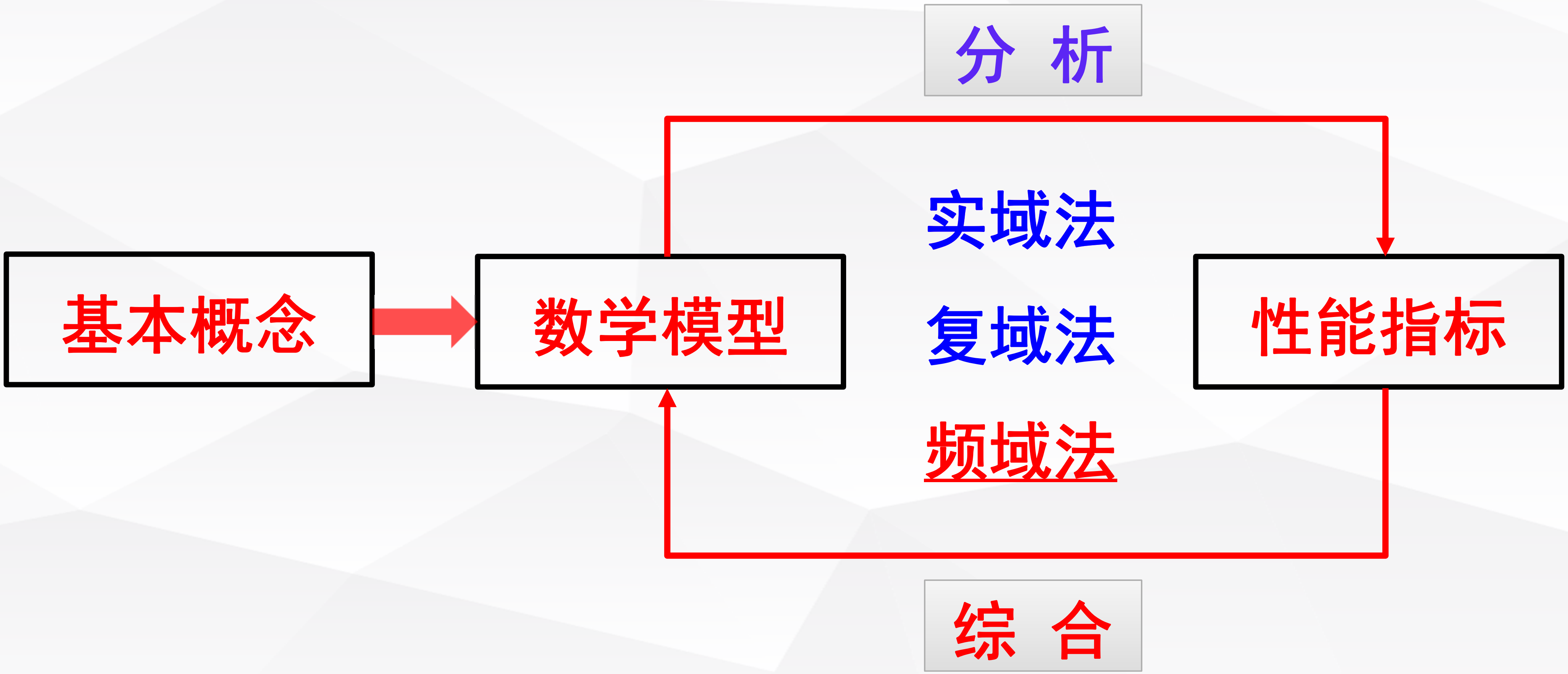
第十讲

本课程知识体系脉络图



第五章：控制系统的频域分析与综合

§ 5.1 频率响应法的基本概念

§ 5.2 频率特性图的绘制

§ 5.3 奈奎斯特判据

§ 5.4 稳定裕量

§ 5.5 控制系统性能的频率响应分析

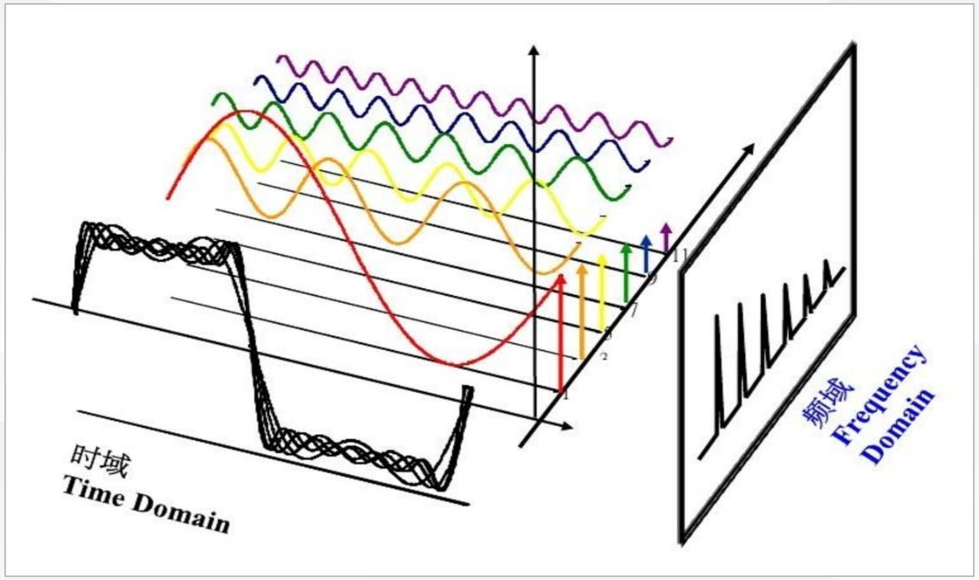
§ 5.6 控制系统的频率响应综合

§ 5.7 利用MATLAB绘制系统的频率特性图

§ 5.1 频率响应法的基本概念

频域和时域的关系：

对于稳定的线性因果系统：若输入量为正弦信号，则系统的稳态输出必为同频率（ω）的正弦信号，改变的只有幅值（A）和相位（φ）。



频域时域关系示意图

- 任意周期输入信号满足满足狄利克莱条件，则傅里叶变换存在；
- 任意非周期输入信号满足满足狄利克莱条件①②并在无穷时域内绝对可积，则傅里叶变换存在；
- 任意正弦信号可以由频率ω、幅值A和相位φ唯一确定。

§ 5.1 频率响应法的基本概念

频率特性的物理意义：

频率特性描述了在不同频率下系统传递正弦信号的能力

频率响应法的基本思想和物理意义：

· **基本思想：** 将控制系统变量视为信号，每一个信号通过傅里叶分解可视为由不同频率的正弦信号所合成，线性系统各变量的运动就是系统对各不同频率信号响应叠加的结果。

· **物理意义：** 控制系统的运动就是信号沿各个相关环节传递和变换的过程：每个信号含有不同频率的正弦分量，这些不同频率的正弦信号在不同环节的传递和变换过程中，其振幅和相位的变化规律不同，从而产生不同形式的运动。

§5.1 频率响应法的基本概念

频率响应的定义：

线性系统在输入正弦信号时，其稳态输出随着频率（ω=0→+∞）变化的规律，称为该系统的频率响应。

正弦输入信号的频率响应：

线性系统在输入正弦信号$u(t)=X\sin\omega t$时，稳态输出与输入是同频率正弦信号：

①输出正弦信号与输入正弦信号的幅值之比为频率特性$G(j\omega)$的幅值$|G(j\omega)|$，称为幅频特性；

②输出正弦信号与输入正弦信号的相位之差是频率特性$G(j\omega)$的相位$\angle G(j\omega)$，称为相频特性；

③频率特性函数$G(j\omega)=|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$，可见$G(j\omega)\ |\ j\omega \to s$.

设稳定n阶系统的传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{M(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

不妨假设所有极点为互异负实数单根。当输入信号为$r(t)=X\sin\omega t$时，有

$$R(s)=\frac{X\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{X\omega}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}$$

则输出信号的拉普拉斯变换为：

$$Y(s)=\frac{M(s)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}\frac{X\omega}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}=\frac{Y_1}{s+p_1}+\frac{Y_2}{s+p_2}+\cdots\frac{Y_n}{s+p_n}+\frac{Y_-}{s+\mathrm{j}\omega}+\frac{Y_+}{s-\mathrm{j}\omega}$$

当$t\to\infty$时，闭环极点对应的自由响应全部为零，故稳态响应为：

$$y_s=\lim_{t\to\infty}y(t)=Y_-\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}+Y_+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}$$

其中

$$Y_{-}=\Phi(s)\frac{X\omega}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}(s+\mathrm{j}\omega)\bigg|_{s=-\mathrm{j}\omega}=-X\frac{\Phi(-\mathrm{j}\omega)}{2\mathrm{j}}=-X\frac{|\Phi(-\mathrm{j}\omega)|}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle\Phi(-\mathrm{j}\omega)}$$

$$Y_{+}=\Phi(s)\frac{X\omega}{(s+\mathrm{j}\omega)(s-\mathrm{j}\omega)}(s-\mathrm{j}\omega)\bigg|_{s=\mathrm{j}\omega}=X\frac{\Phi(\mathrm{j}\omega)}{2\mathrm{j}}=X\frac{|\Phi(\mathrm{j}\omega)|}{2\mathrm{j}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle\Phi(\mathrm{j}\omega)}$$

系统的稳态响应为：

$$\begin{aligned}y_s&=X\frac{|\Phi(\mathrm{j}\omega)|}{2\mathrm{j}}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\angle\Phi(\mathrm{j}\omega)}+\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\angle\Phi(\mathrm{j}\omega)}\right]\\&=X|\Phi(\mathrm{j}\omega)|\sin\left[\omega t+\angle\Phi(\mathrm{j}\omega)\right]\end{aligned}$$

§ 5.1 频率响应法的基本概念

频率响应法的特点：

①物理意义鲜明；

②可以用实验的方法测出系统的频率特性，求得传递函数或其他形式的数学模型，对于难于机理建模的复杂系统更有意义；

③图解方法：形象直观，计算量小；

④仅适用于线性定常系统，且是一种近似方法。

§ 5.2 频率响应的图示方法

幅相频率特性图（极坐标图，奈奎斯特（Nyquist）图）

以频率ω为自变量，系统频率特性$G(j\omega)$的幅值$A(\omega)=|G(j\omega)|$和相位$\varphi(\omega)=\angle G(j\omega)$关系图称为幅相频率特性图。

考虑一阶系统：

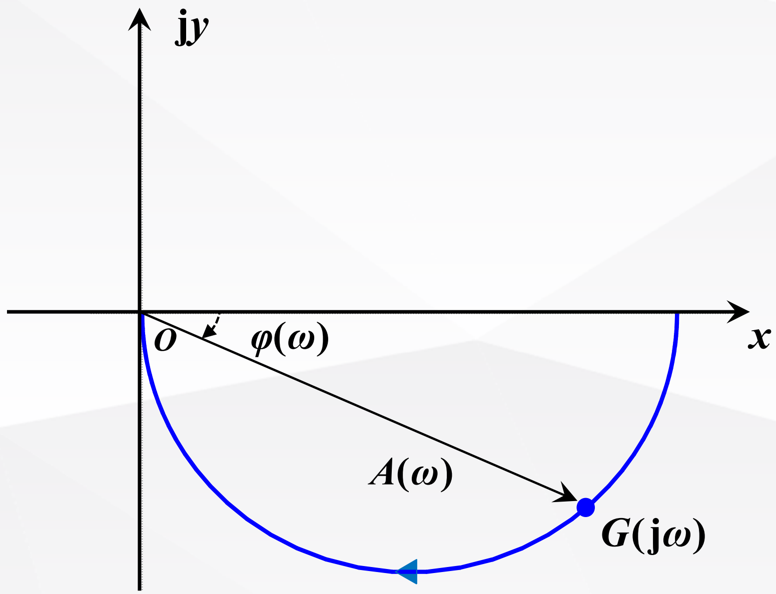
$$G(s)=\frac{1}{Ts+1},\quad T>0$$

幅频特性为：

$$A(\omega)=\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

相频特性为：

$$\varphi(\omega)=-\arctan\omega T$$



一阶系统奈奎斯特图

§ 5.2 频率响应的图示方法

对数频率特性图(伯德(Bode)图)

将系统频率特性表示在对数坐标中，可绘制在对数幅频特性和对数相频特性图，称为幅相频率特性图。**特别注意：**

1、Bode图由对数幅频特性和对数相频特性两条曲线组成。

2、对数幅频特性是$G(j\omega)$的对数值$20\lg|G(j\omega)|$与频率ω的关系曲线；

对数相频特性则是相位$\varphi(\omega)$与频率ω的关系曲线。

3、Bode图是在半对数坐标纸上：

横坐标采用对数刻度$\lg\omega$；

纵坐标采取均匀刻度。

4、采取相同的频率横坐标。

对数频率特性图(伯德(Bode)图)

5、绘制Bode图时，特别注意对数刻度的特点！

- 在频率轴上标的是频率ω实际值，但是横坐标是按照其常用对数$\lg\omega$来刻度的！坐标上任意两点ω_1和ω_2之间 ($\omega_1<\omega_2$) 距离为$\lg\omega_2-\lg\omega_1$，不是$\omega_2-\omega_1$！横坐标上两对频率之间的距离相等，表示其比值相等！
- 频率ω每变化10倍称为一个十倍频程，记作dec。每个dec沿横坐标走过的间隔为一个单位长度。
- 对数幅频特性的纵坐标为$L(\omega)=20\lg|G(j\omega)|$，称为对数幅值，单位分贝是(dB)，采用线性刻度，$|G(j\omega)|$每增大10倍，对数幅值$L(\omega)$增加20dB；
  对数相频特性的纵坐标为相位$\varphi(\omega)$，单位为度，采用线性刻度。

§5.2 频率响应的图示方法

考虑一阶系统：

$$G(s)=\frac{1}{Ts+1},\quad T>0$$

其对数幅频特性为：

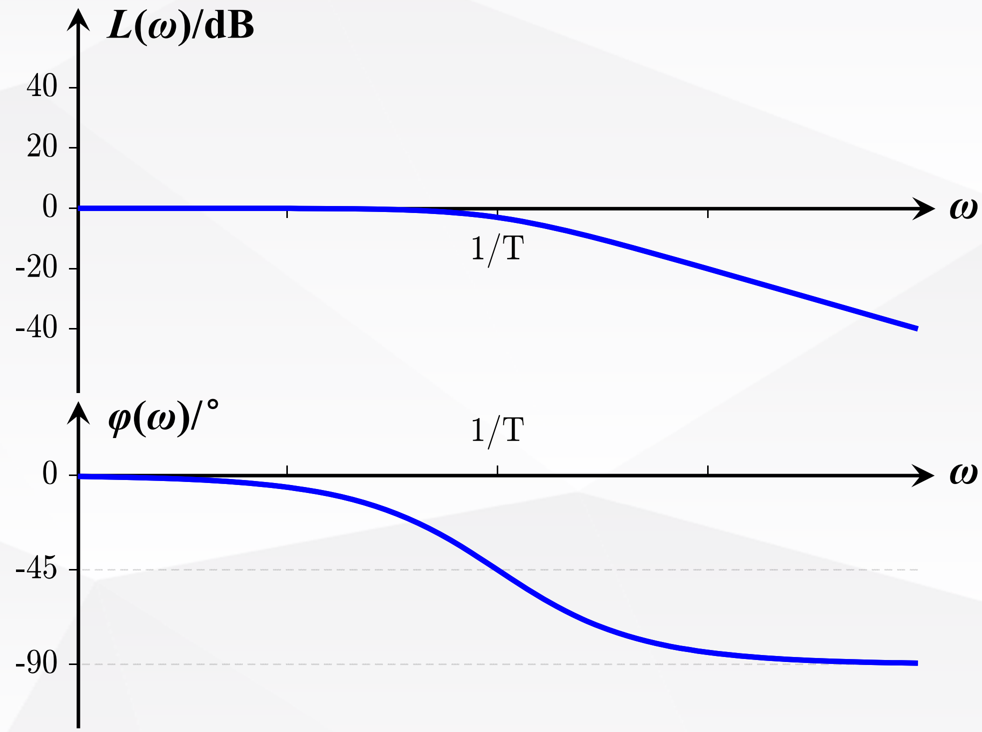
$$A(\omega)=20\lg\frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

$$=-20\lg\sqrt{T^2\omega^2+1}$$

$$=-10\lg(T^2\omega^2+1)$$

其对数相频特性为：

$$\varphi(\omega)=-\arctan\omega T$$



一阶系统Bode图

§ 5.2 频率响应的图示方法

Bode图与极坐标图对比

- 可以在很宽的频率范围内观察系统的频率特性;
- 简化作图;
- 频率特性的纵向放大和缩小可化成Bode图曲线的上下平移;
- 频率特性的横向压缩和伸长可化成Bode图曲线的左右平移;
- 频率特性的倒数关系可化成Bode图曲线关于频率轴对称。

典型环节的频率特性

n阶控制系统的频率特性可视为基本环节频率特性组合而成

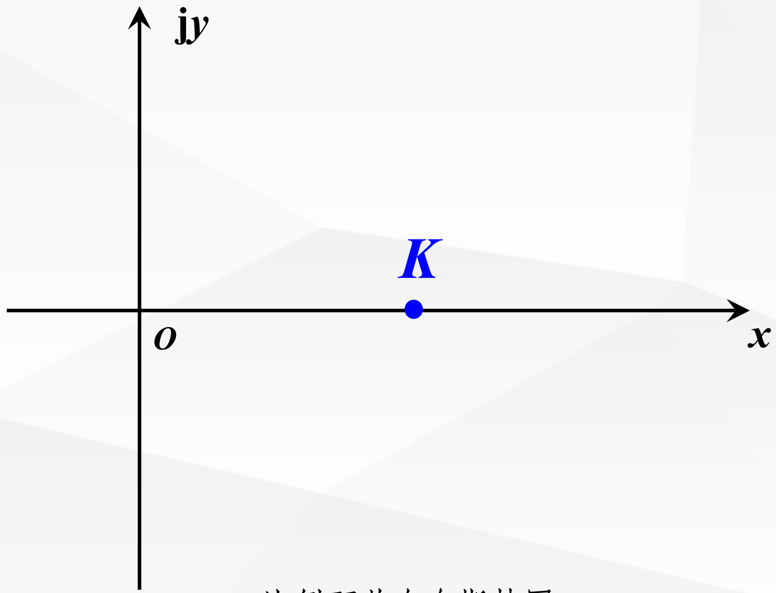
$$G(s)=K\frac{\prod_{k=1}^{m_1}\left(\tau_k s+1\right)\prod_{l=1}^{m_2}\left(\tau_l^2 s^2+2\zeta\tau_l s+1\right)}{s^{\nu}\prod_{i=1}^{n_1}\left(T_i s+1\right)\prod_{j=1}^{n_2}\left(T_j^2 s^2+2\xi T_j s+1\right)}e^{-\tau s}$$

包括：比例环节、积分环节、微分环节、一阶惯性环节、一阶微分环节、二阶振荡环节、二阶微分环节、延迟环节。

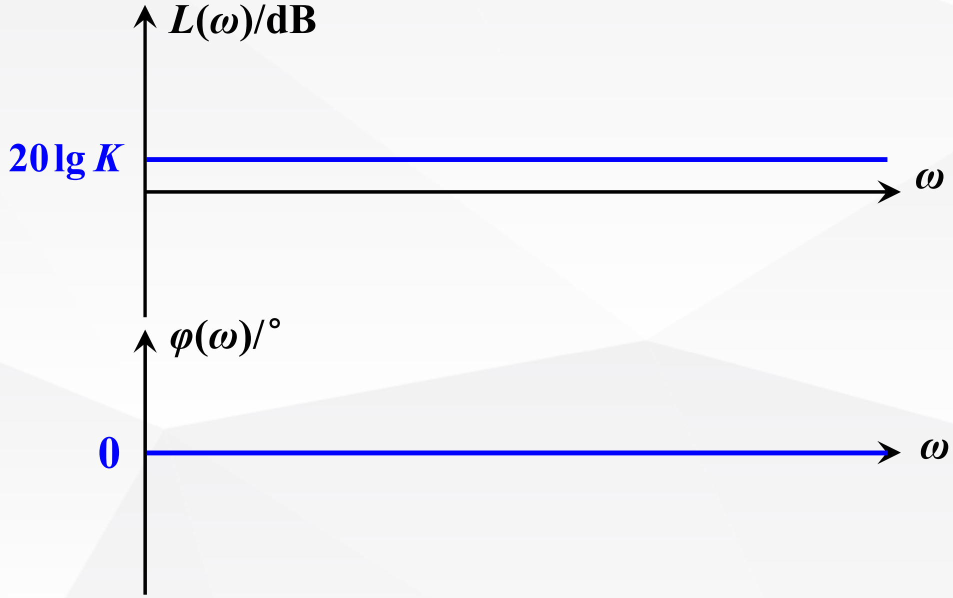
§ 5.2 频率特性的绘制

比例环节

传递函数：$G(s) = K$　　　频率特性：$G(j\omega) = K$



比例环节奈奎斯特图

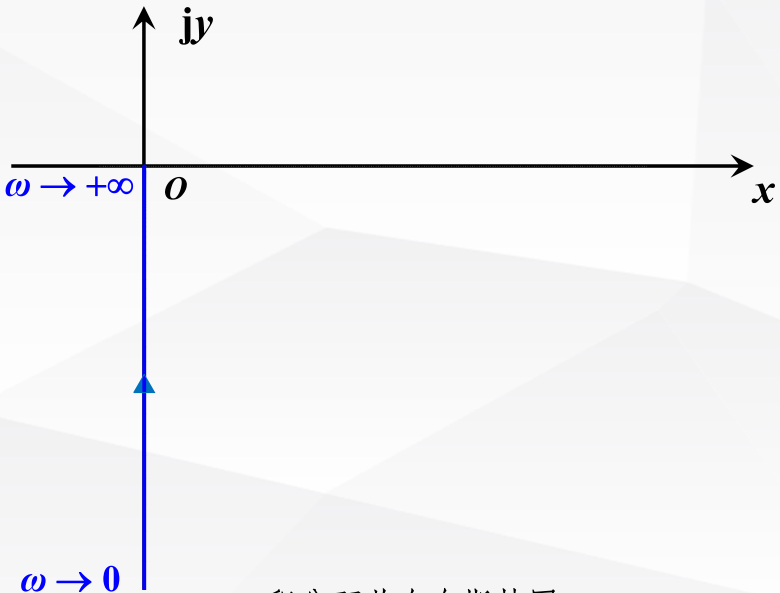


比例环节Bode图

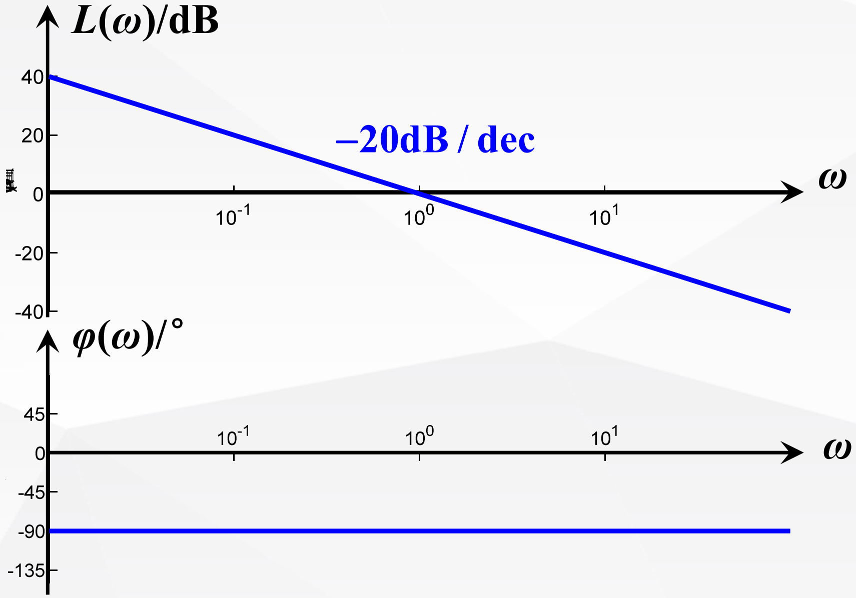
§ 5.2 频率特性的绘制

积分环节

传递函数：$G(s)=\dfrac{1}{s}$　　频率特性：$G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}=\dfrac{1}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$



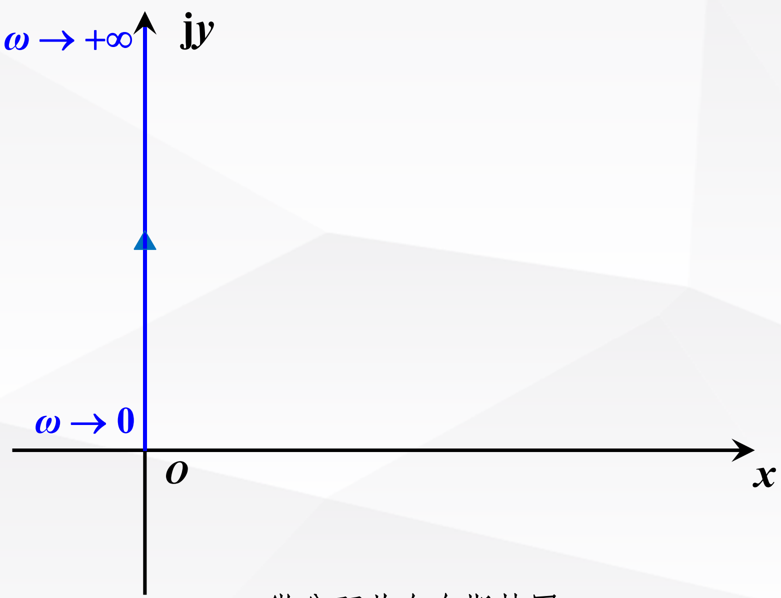
积分环节奈奎斯特图



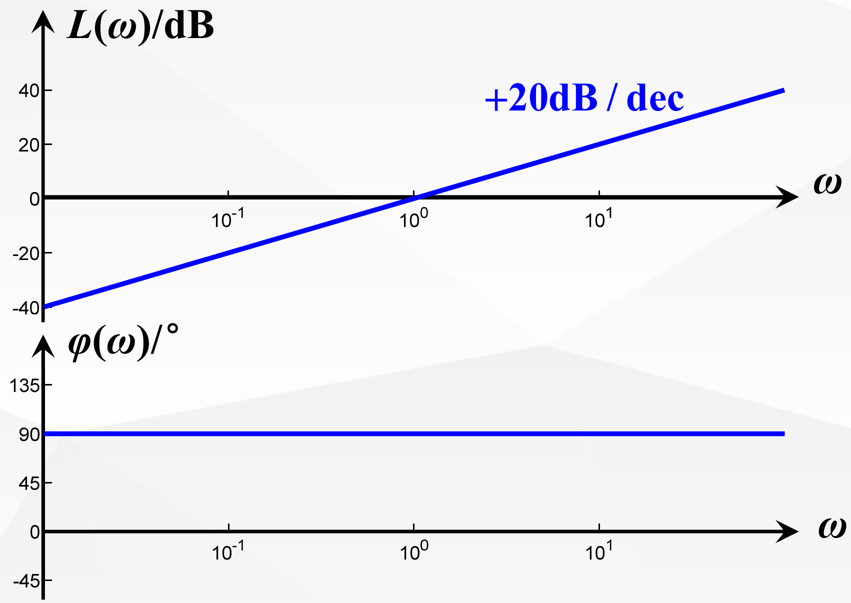
积分环节Bode图

微分环节

传递函数：$G(s) = s$　　　频率特性：$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega = \omega e^{\mathrm{j}\frac{\pi}{2}}$



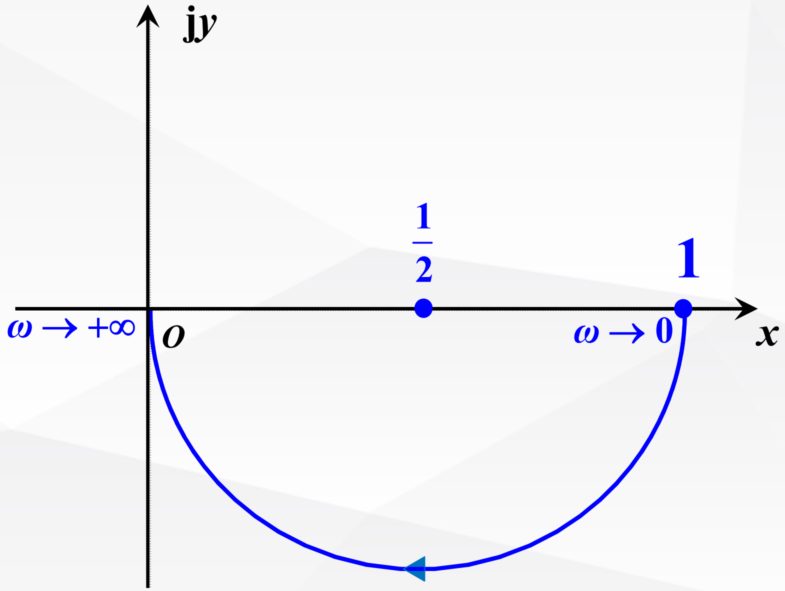
微分环节奈奎斯特图



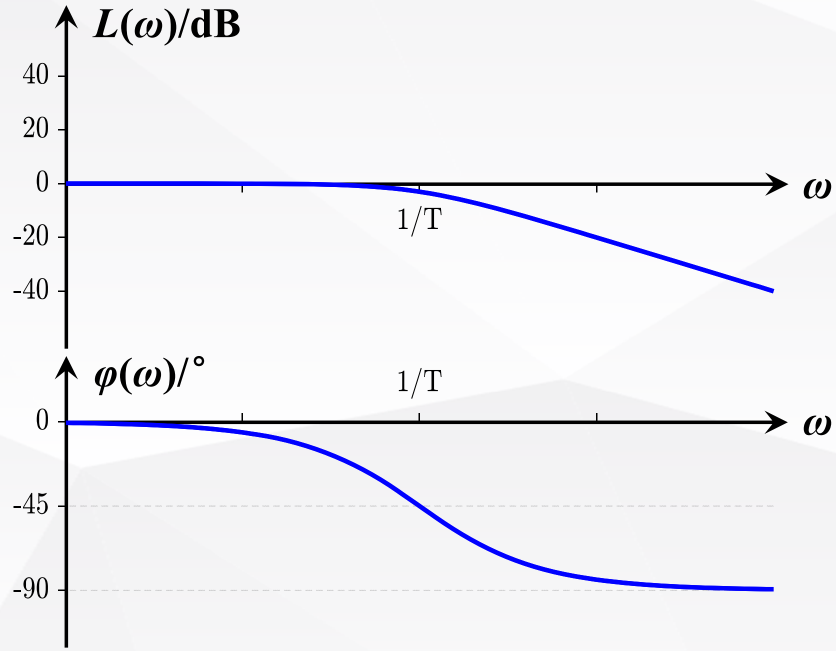
微分环节Bode图

一阶惯性环节

传递函数：$G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$　频率特性：$G(j\omega)=\dfrac{1}{j\omega T+1}=\dfrac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}e^{-j\arctan\omega T}$



一阶惯性环节奈奎斯特图

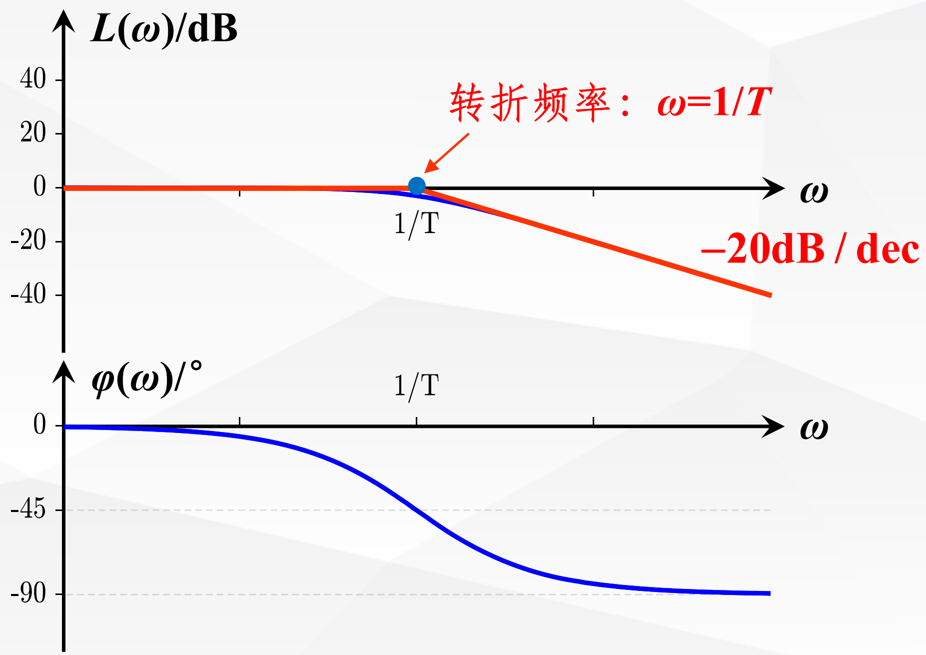


一阶惯性环节Bode图

§ 5.2 频率特性的绘制

一阶惯性环节

传递函数：$G(s)=\dfrac{1}{Ts+1}$　频率特性：$G(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega T+1}=\dfrac{1}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\arctan\omega T}$



一阶惯性环节Bode图

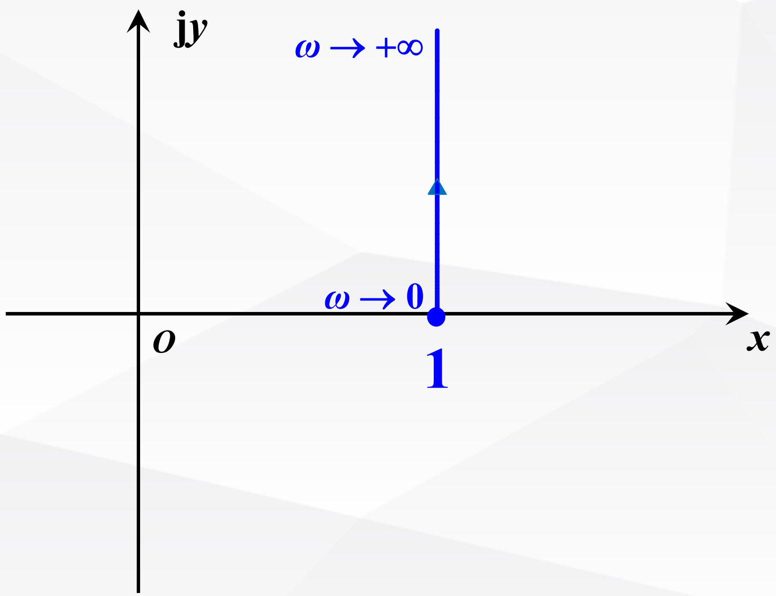
· 转折频率是一个重要的特征量,其在数值上等于极点的模，频率特性曲线的形状取决于转折频率的分布。

· 在低频段可以较好地复现信号，在高频段可以抑制噪声信号，因此一阶惯性环节具有低通滤波特性，其可以很好地跟踪恒定或变化缓慢的输入信号。

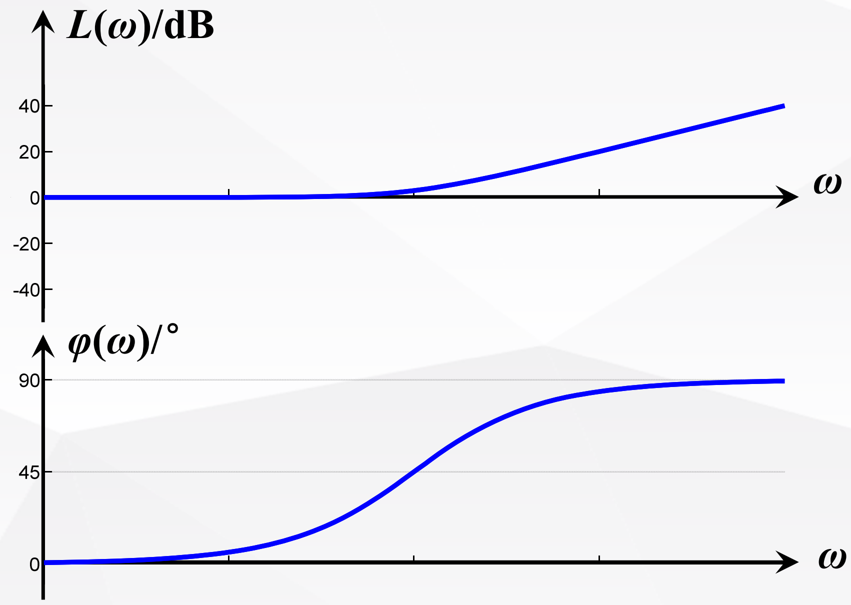
§ 5.2 频率特性的绘制

一阶微分环节

传递函数：$G(s) = Ts + 1$　频率特性：$G(\mathrm{j}\omega) = \mathrm{j}\omega T + 1 = \sqrt{T^2\omega^2 + 1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\omega T}$



一阶微分环节奈奎斯特图

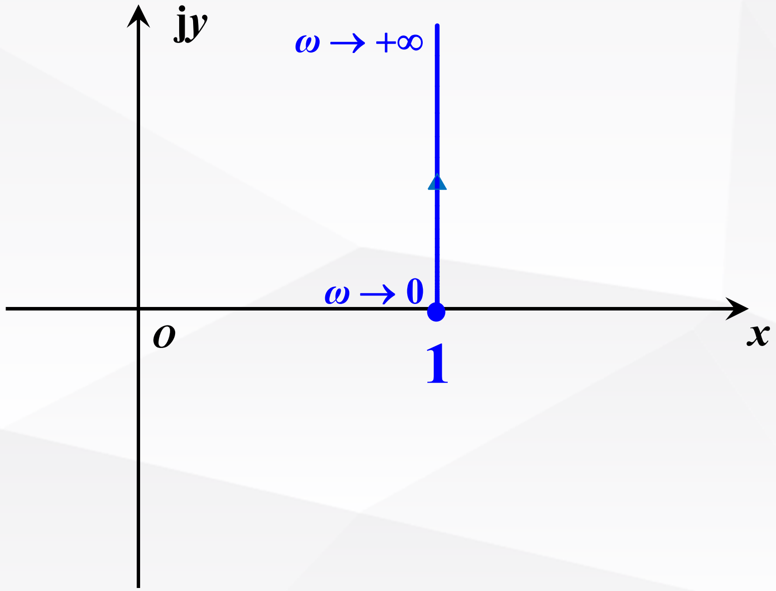


一阶微分环节Bode图

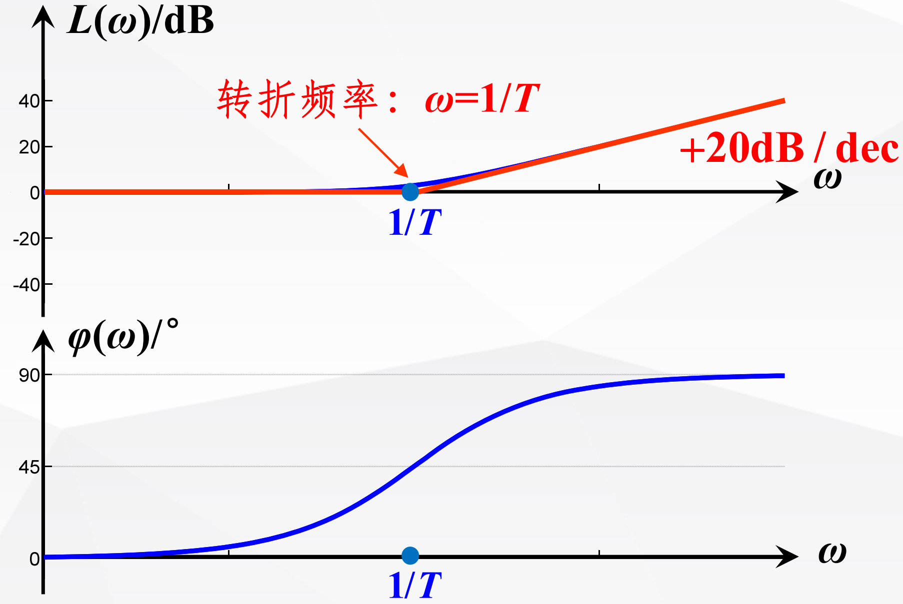
§ 5.2 频率特性的绘制

一阶微分环节

传递函数：$G(s)=Ts+1$ 频率特性：$G(\mathrm{j}\omega)=\mathrm{j}\omega T+1=\sqrt{T^2\omega^2+1}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\omega T}$



一阶微分环节奈奎斯特图



一阶惯性环节Bode图

§ 5.2 频率特性的绘制

二阶振荡环节

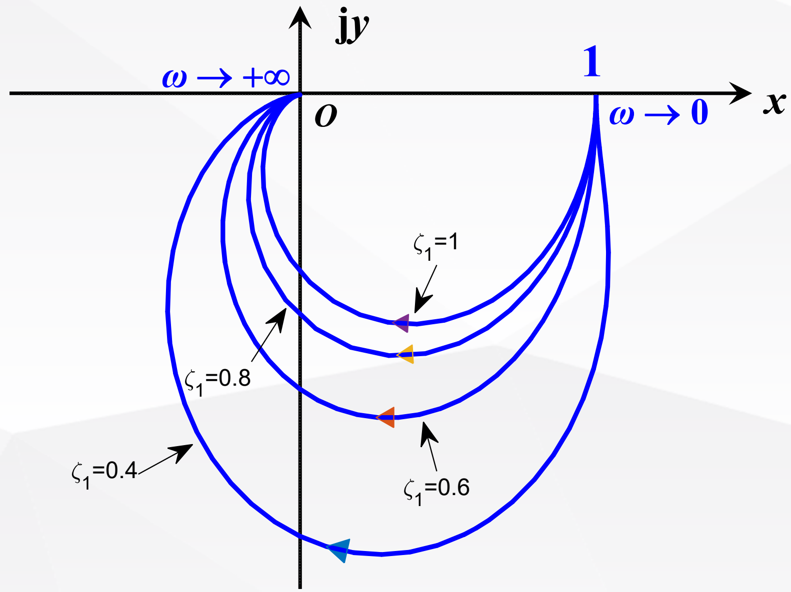
传递函数： $G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\dfrac{1/T^2}{s^2+2\zeta s/T+1/T^2}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}\bigg|_{s=j\omega}=\frac{1}{(j\omega)^2+2\zeta(j\omega T)+1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(1-\omega^2T^2\right)^2+4\zeta^2\omega^2T^2}}e^{-j\arctan\frac{2\zeta\omega T}{1-\omega^2T^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}}e^{-j\arctan\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}}$$



二阶振荡环节奈奎斯特图

§ 5.2 频率特性的绘制

二阶振荡环节

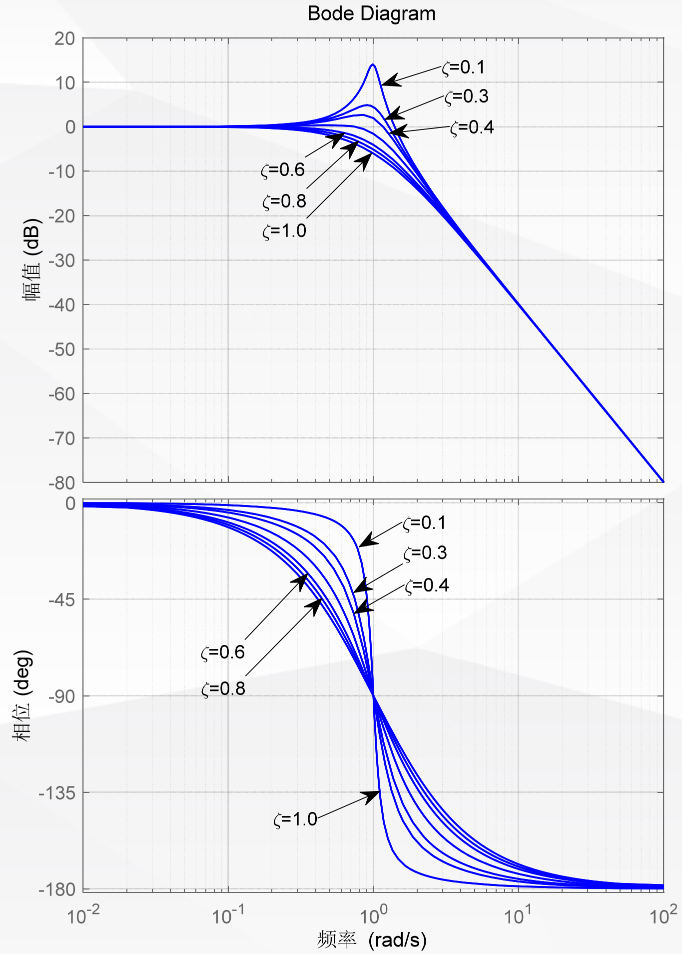
传递函数：$G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+4\zeta^2(\omega/\omega_n)^2}}e^{-j\arctan\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}}$$

谐振频率：$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2},\quad \left(0\le\zeta\le\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

谐振峰值：$M_r=\dfrac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$



二阶振荡环节

传递函数：$G(s)=\dfrac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1}=\dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

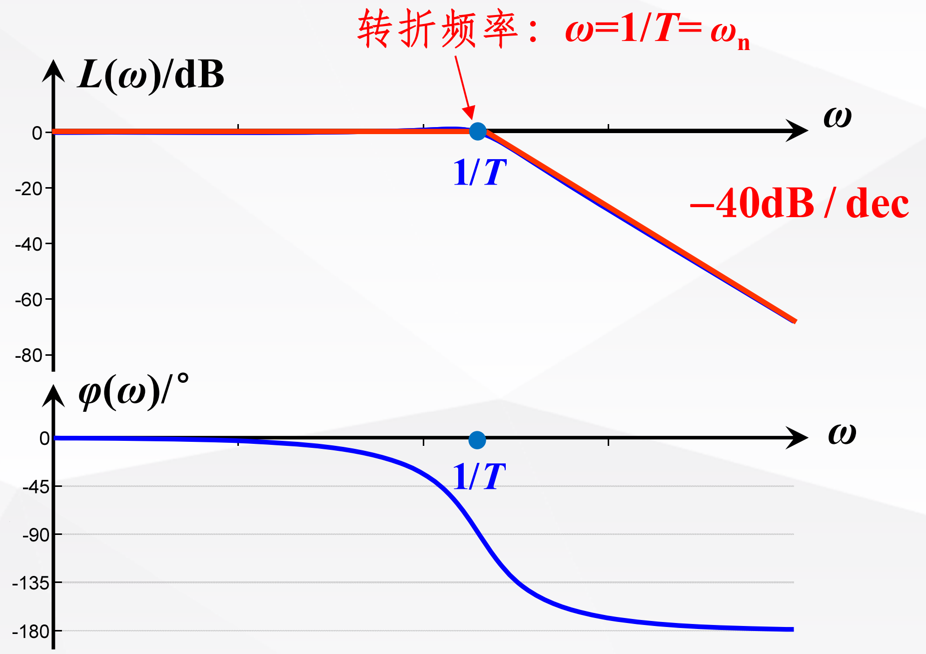
频率特性：

$$G(j\omega)=\frac{1}{\sqrt{\left[1-\left(\omega/\omega_n\right)^2\right]^2+4\zeta^2\left(\omega/\omega_n\right)^2}}e^{-j\arctan\frac{2\zeta\left(\omega/\omega_n\right)}{1-\left(\omega/\omega_n\right)^2}}$$

闭环特征量：

ω_n决定转折频率；

ζ 决定谐振频率附近形状及峰值大小。

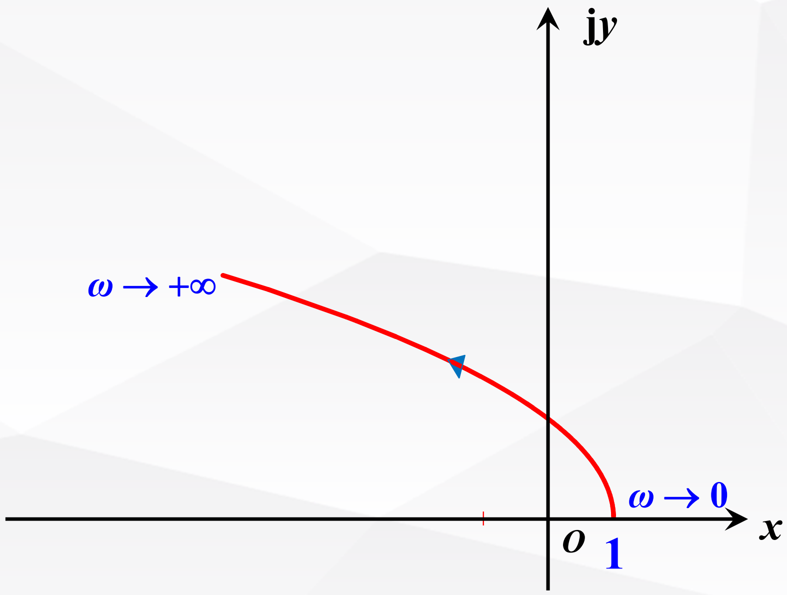


二阶振荡环节Bode图

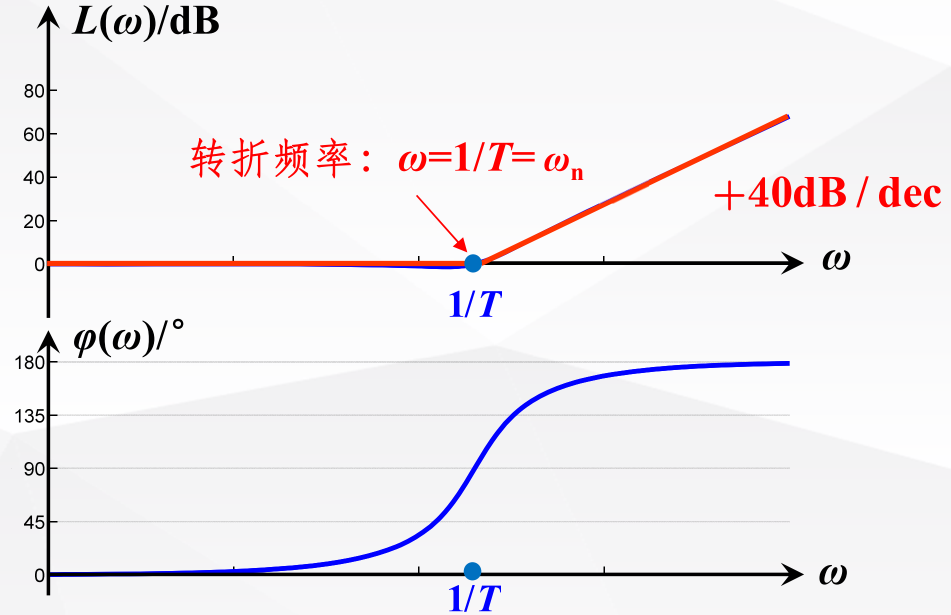
§ 5.2 频率特性的绘制

二阶微分环节

传递函数：$G(s)=T^2s^2+2\zeta Ts+1$ 频率特性：$G(\mathrm{j}\omega)=\sqrt{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+\left(2\zeta T\omega\right)^2}\ \mathrm{e}^{\mathrm{j}\arctan\frac{2\zeta T\omega}{1-T^2\omega^2}}$



二阶微分环节奈奎斯特图

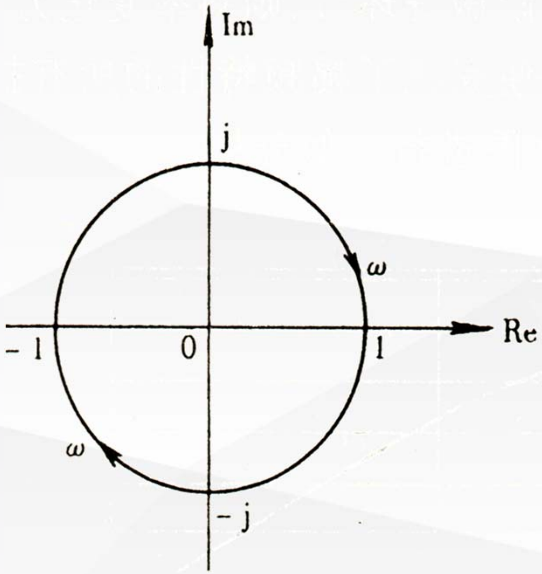


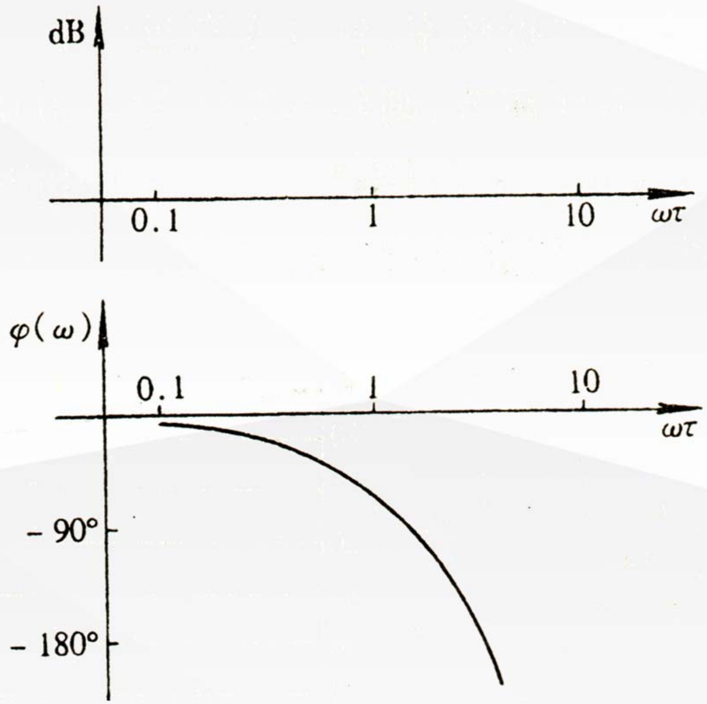
二阶微分环节Bode图

§ 5.2 频率特性的绘制

时滞环节

传递函数：$G(s)=e^{-\tau s}$　　　　频率特性：$G(j\omega)=e^{-j\omega\tau}$





§ 5.2 频率特性的绘制

复杂系统频率特性的绘制

①将开环传递函数写成“尾1型”；

确定开环增益K和型号v；

将各典型环节的转折频率由小到大依次表在频率轴上。

②绘制对数幅频特性曲线低频段渐近线：斜率为－20vdB/dec，过点（1，20lg$K$）。

③在低频段渐近线基础上，沿频率增大方向，每遇到一个转折频率改变一次斜率：

一阶惯性环节：－20dB/dec，0°～－90°；

一阶微分环节：＋20dB/dec，0°～＋90°；

二阶振荡环节：－40dB/dec，0°～－180°；

二阶微分环节：＋40dB/dec，0°～＋180°；

直至经过所有转折频率结束，最终对数幅频曲线渐近线斜率：－20(n-m)dB/dec。

§ 5.2 频率特性的绘制

复杂系统频率特性的绘制

④绘制对数相频特性曲线：

1）低频段：相位－v90°；

2）转折频率处所有环节相角累加；

3）用光滑的曲线连接；

4）直至经过所有转折频率结束，最终对数相频曲线渐近线相位－$(n-m)$ 90°。

§ 5.2 频率特性的绘制

例

$$G(s)=\frac{2500}{s(s+10)(s^2+5s+25)}$$

化成标准形式：

$$G(s)=\frac{10}{s(0.1s+1)(0.04s^2+0.2s+1)}$$

分成四个典型环节：

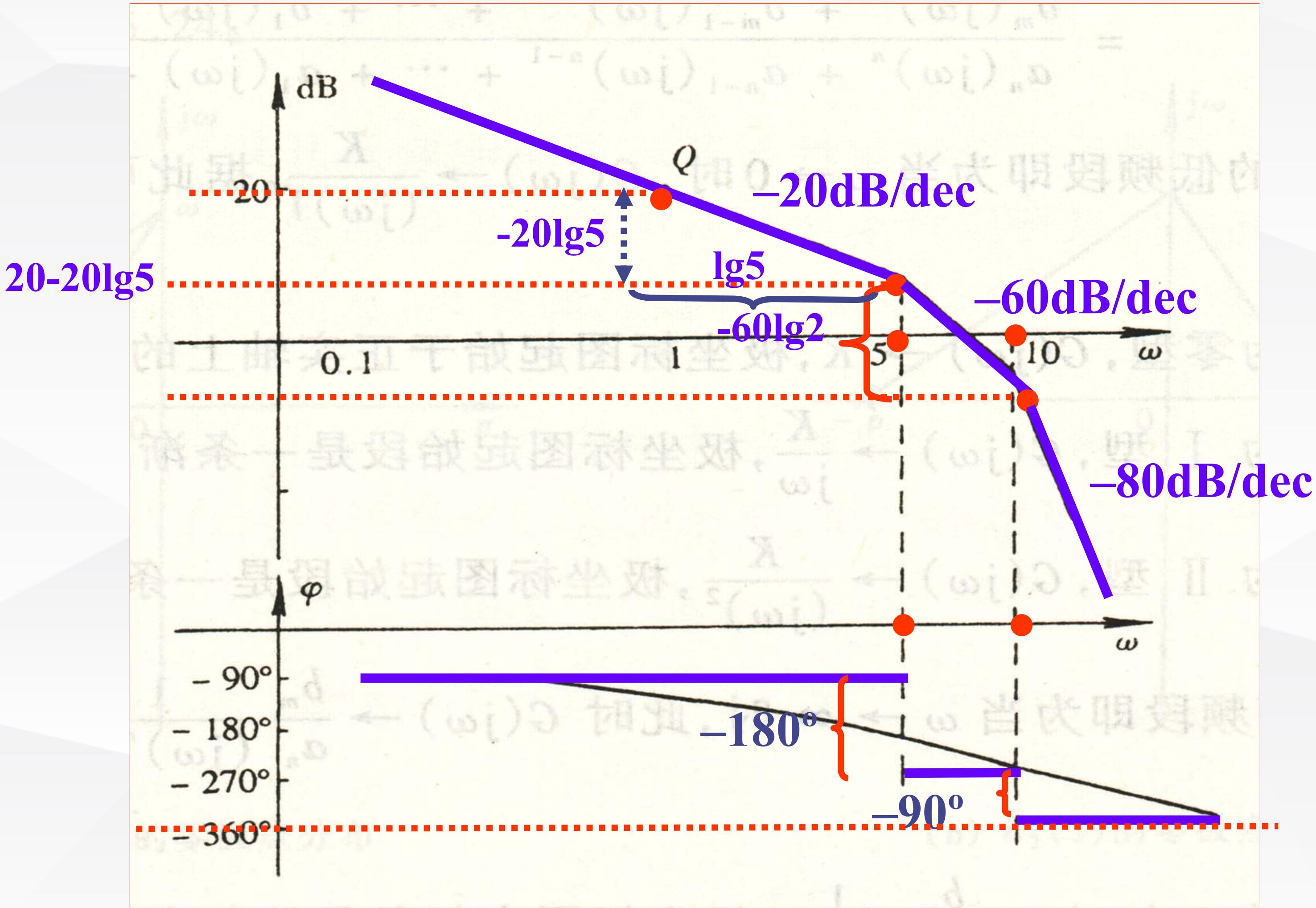
$$G_1(s)=10,\quad G_2(s)=\frac{1}{s},\quad G_3(s)=\frac{1}{0.1s+1},\quad G_4(s)=\frac{1}{0.04s^2+0.2s+1}$$

其转折频率为：5，10

$T_2=0.1$

$T_1=0.2$

§ 5.2 频率特性的绘制



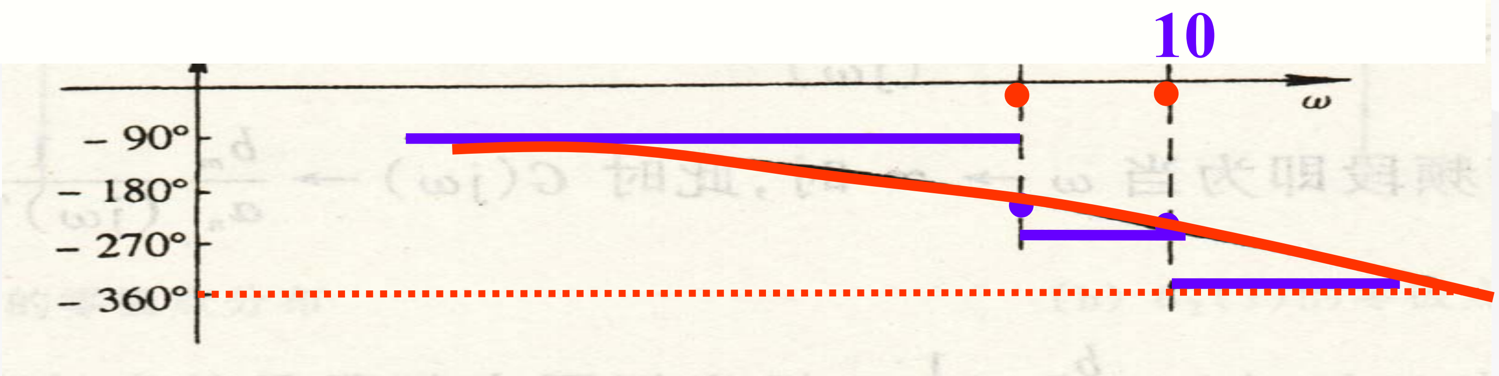
dB
Q
20
–20dB/dec
-20lg5
lg5
20-20lg5
–60dB/dec
-60lg2
0.1
1
5
10
ω
–80dB/dec
φ
ω
– 90°
– 180°
– 270°
– 360°
–180°
–90°

§ 5.2 频率特性的绘制

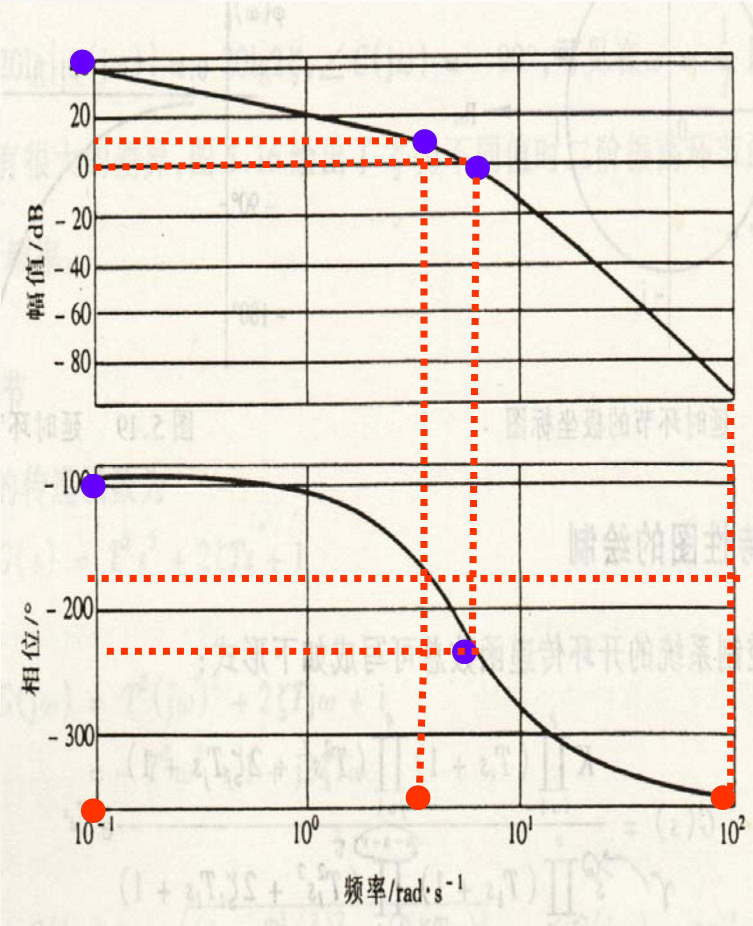
$$\varphi(\omega_1) = -90^o - \mathrm{arctg}\frac{2\zeta T_1\omega_1}{1-T_1^2\omega_1^2} - \mathrm{arctg}T_2\omega_1$$

$$= -90^o - 90^o - \mathrm{arctg}0.5 \quad = -206^o$$

$$\varphi(\omega_2) = -90^o - \mathrm{arctg}\frac{2\zeta T_2\omega_2}{1-T_2^2\omega_2^2} - 45^o \quad = -233^o$$



例5.2的Bode图

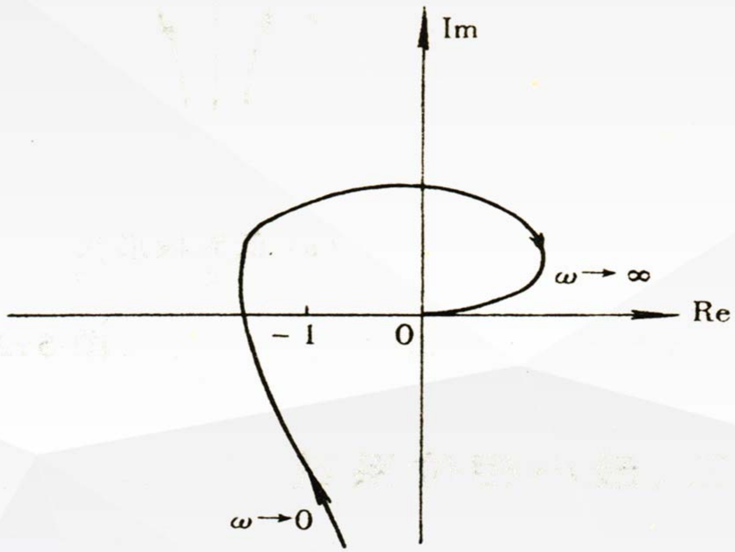


$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\angle G(j\omega)$	ω
$+\infty$	-90^{o}	$\omega \to 0$
>1	-180^{o}	
1	$<-180^{o}$	
0	-360^{o}	$\omega \to \infty$

Nyquist图的绘制

表 5.1

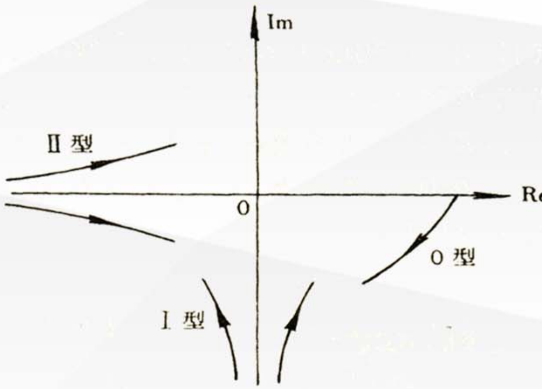
$\lvert G(j\omega)\rvert$	$\angle G(j\omega)$	ω
$+\infty$	-90°	$\omega \to 0$
>1	-180°	
1	$<-180^\circ$	
0	-360°	$\omega \to \infty$

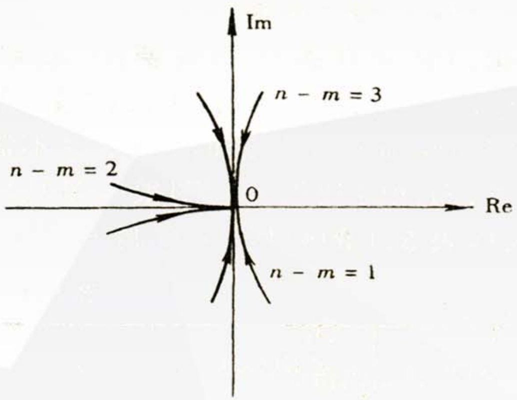


系统开环频率特性

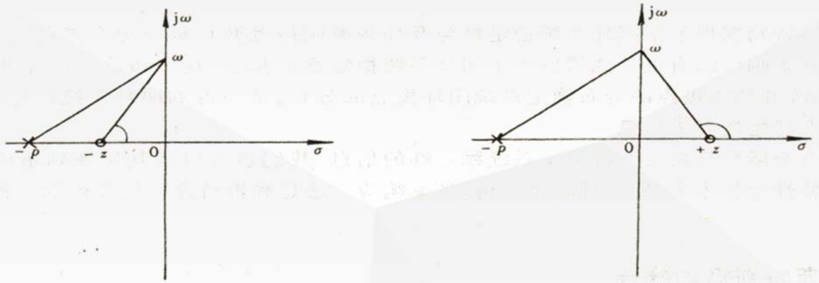
$$G(j\omega)=\frac{K\prod_{i=1}^{p}(j\omega T_i+1)\prod_{j=1}^{q}\left(-\omega^2T_j^2+2j\zeta_jT_j\omega+1\right)}{(j\omega)^r\prod_{k=1}^{u}(j\omega T_k+1)\prod_{l=1}^{\frac{n-r-u}{2}}\left(-\omega^2T_l^2+2j\omega\zeta_lT_l+1\right)}$$

$$=\frac{b_m(j\omega)^m+b_{m-1}(j\omega)^{m-1}+\cdots+b_1(j\omega)+b_0}{a_n(j\omega)^n+a_{n-1}(j\omega)^{n-1}+\cdots+a_1(j\omega)+a_0}$$





最小相位系统



(a) $G_1(s)$的零极点分布　　(b) $G_2(s)$的零极点分布