

实验五 基于 Matlab 的线性系统的根轨迹

一、 实验目的

- 1、熟练掌握用MATLAB 绘制系统的根轨迹的方法。
- 2、熟悉根据根轨迹分析系统的性能。
- 3、理解增加开环零点、极点对系统根轨迹及性能的影响。

二、 实验设备

PC 机一台 Matlab 软件

三、 Matlab 基础

根轨迹是指系统的某一参数从零变到无穷大时，特征方程的根在 s 平面上的变化轨迹。这个参数一般选为开环系统的增益 K 。课本中介绍的手工绘制根轨迹的方法，只能绘制根轨迹草图。而用 MATLAB 可以方便地绘制精确的根轨迹图，并可观测参数变化对特征根位置的影响。

假设系统的对象模型可以表示为

$$G(s) = KG_0(s) = K \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \cdots + b_m s + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + b_{n-1} s + a_n}$$

系统的闭环特征方程可以写成 $1 + KG_0(s) = 0$

对每一个 K 的取值，我们可以得到一组系统的闭环极点。如果我们改变 K 的数值，则可以得到一系列这样的极点集合。若将这些 K 的取值下得出的极点位置按照各个分支连接起来，则可以得到一些描述系统闭环位置的曲线，这些曲线又称为系统的根轨迹。

绘制系统的根轨迹 `rlocus()`

Matlab 中绘制根轨迹的函数调用格式为：

<code>rlocus(num, den)</code>	开环增益 k 的范围自动设定。
<code>rlocus(num, den, k)</code>	开环增益 k 的范围人工设定。
<code>rlocus(p, z)</code>	依据开环零极点绘制根轨迹。
<code>r=rlocus(num, den)</code>	不作图，返回闭环根矩阵。
<code>[r, k]=rlocus(num, den)</code>	不作图，返回闭环根矩阵 r 和对应的开环增益向量 k 。

其中，`num`, `den` 分别为系统开环传递函数 $G_0(s)$ 的分子、分母多项式系数，按 s 的降幂排列。 K 为根轨迹增益，可设定增益范围。

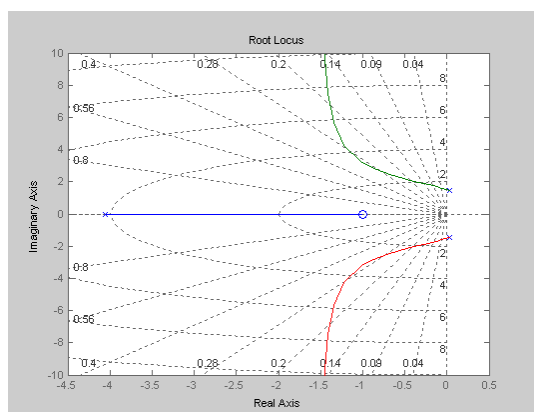
例 5-1：已知系统的开环传递函数 $G(s) = K \frac{(s+1)}{s^3 + 4s^2 + 2s + 9}$ ，绘制系统的根轨迹的 matlab 的调用语句如下：

```
num=[1 1]; %定义分子多项式
den=[1 4 2 9]; %定义分母多项式
rlocus (num,den) %绘制系统的根轨迹
grid %画网格标度线
xlabel('Real Axis'),ylabel('Imaginary Axis') %给坐标轴加上说明
title('Root Locus') %给图形加上标题名
```

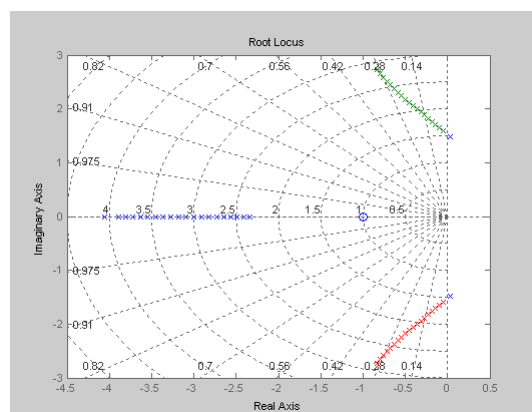
则该系统的根轨迹如图 5-1（a）所示。

若上例要绘制 K 在（1，10）的根轨迹图，则此时的 matlab 的调用格式如下，对应的根轨迹如图 5-1（b）所示。

```
num=[1 1]; den=[1 4 2 9];
k=1:0.5:10;
rlocus (num,den,k)
```



(a) 完整根轨迹图形



(b) 特定增益范围内的根轨迹图形

图 5-1 系统的根轨迹图形

1. 确定闭环根位置对应增益值 K 的函数 rlocfind（）

在 Matlab 中，提供了 rlocfind 函数获取与特定的复根对应的增益 K 的值。在求出的根轨迹图上，可确定选定点的增益值 K 和闭环根 r（向量）的值。该函数的调用格式为：

```
[k, r]=rlocfind(num, den)
```

执行前，先执行绘制根轨迹命令 rlocus（num,den），作出根轨迹图。执行 rlocfind 命令时，出现提示语句“Select a point in the graphics

window”，即要求在根轨迹图上选定闭环极点。将鼠标移至根轨迹图选定的位置，单击左键确定，根轨迹图上出现“+”标记，即得到了该点的增益 K 和闭环根 r 的返回变量值。

例 5-2：系统的开环传递函数为 $G(s) = K^* \frac{s^2 + 5s + 6}{s^3 + 8s^2 + 3s + 25}$ ，试求：（1）系统的根轨迹；（2）系统稳定的 K 的范围；（3）K=1 时闭环系统阶跃响应曲线。则此时的 matlab 的调用格式为：

```
G=tf([1,5,6],[1,8,3,25]);
rlocus(G); %绘制系统的根轨迹
[k,r]=rlocfind(G) %确定临界稳定时的增益值 k 和对应的极点 r
G_c=feedback(G,1); %形成单位负反馈闭环系统
step(G_c) %绘制闭环系统的阶跃响应曲线
```

则系统的根轨迹图和闭环系统阶跃响应曲线如图 5-2 所示。

其中，调用 rlocfind（）函数，求出系统与虚轴交点的 K 值，可得与虚轴交点的 K 值为 0.0264，故系统稳定的 K 的范围为 $K \in (0.0264, \infty)$ 。

2. 绘制阻尼比 ζ 和无阻尼自然频率 ω_n 的栅格线 sgrid（）

当对系统的阻尼比 ζ 和无阻尼自然频率 ω_n 有要求时，就希望在根轨迹图上作等 ζ 或等 ω_n 线。matlab 中实现这一要求的函数为 sgrid（），该函数的调用格式为：

sgrid(ζ, ω_n) 已知 ζ 和 ω_n 的数值，作出等于已知参数的等值线。

sgrid('new') 作出等间隔分布的等 ζ 和 ω_n 网格线。

例 5-3：系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$ ，由 rlocfind 函数找出能产生主导极点阻尼 $\zeta = 0.707$ 的合适增益，如图 5-3(a) 所示。

```
G=tf(1,[conv([1,1],[1,2]),0]);
zet=[0.1:0.2:1];wn=[1:10];
sgrid(zet,wn);hold on;rlocus(G)
[k,r]=rlocfind(G)
Select a point in the graphics window
selected_point =
-0.3791 + 0.3602i
```

$$k =$$

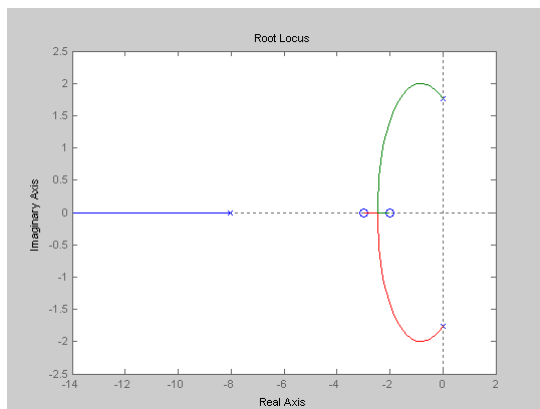
$$0.6233$$

$$r =$$

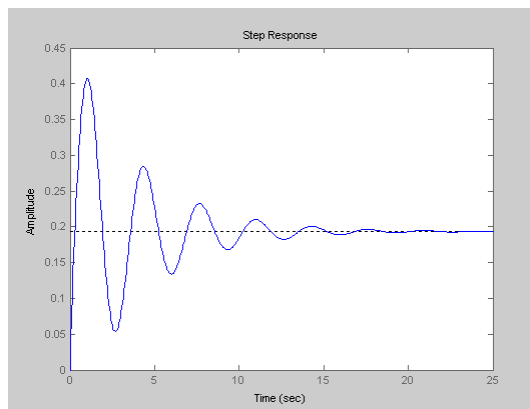
$$-2.2279$$

$$-0.3861 + 0.3616i$$

$$-0.3861 - 0.3616i$$

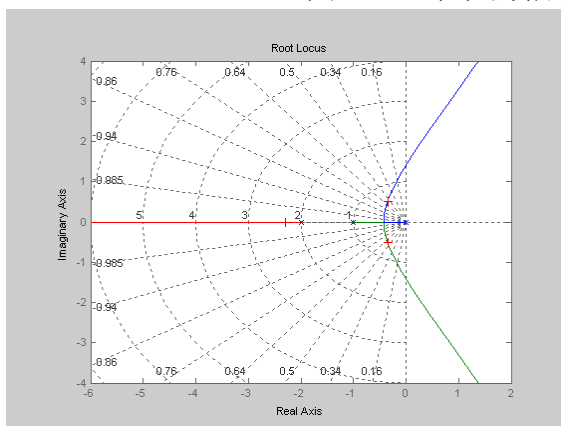


(a) 根轨迹图形

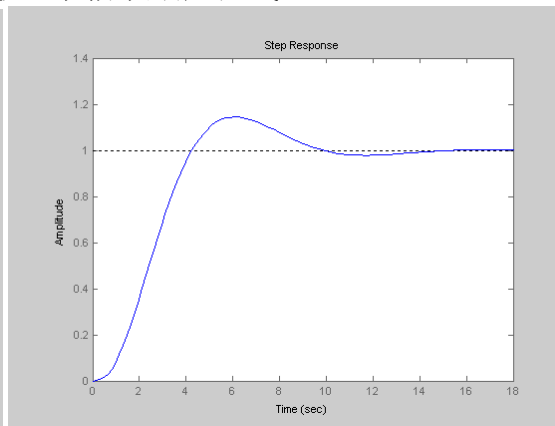


(b) K=1 时的阶跃响应曲线

图 5-2 系统的根轨迹和阶跃响应曲线



(a) 根轨迹上点的选择



(b) 闭环系统阶跃响应

图 5-3 由根轨迹技术设计闭环系统

同时还可以绘制出该增益下闭环系统的阶跃响应，如图 5-3 (b) 所示。事实上，等 ζ 或等 ω_n 线在设计系补偿器中是相当实用的，这样设计出的增益 $K=0.6233$ 将使得整个系统的阻尼比接近 0.707。

3. 基于根轨迹的系统设计及校正工具 rltool

matlab 中提供了一个系统根轨迹分析的图形界面，在此界面可以可视地在整个前向通路中添加零极点（亦即设计控制器），从而使得系统的性能得到改善。实现这一要求的工具为 rltool，其调用格式为：

rltool 或 rltool(G)

例 5-4：单位负反馈系统的开环传递函数

$$G(s) = \frac{s + 0.125}{s^2(s + 5)(s + 20)(s + 50)}$$

输入系统的数学模型，并对此对象进行设计。

```
den=[conv([1,5],conv([1,20],[1,50])),0,0];
```

```
num=[1,0.125];
```

```
G=tf(num,den);
```

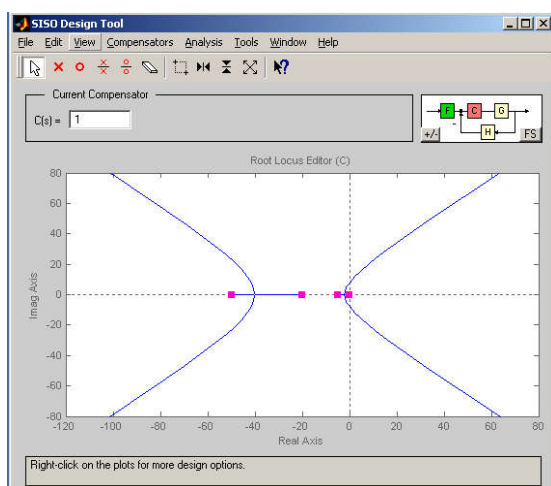
```
rltool(G)
```

该命令将打开 rltool 工具的界面，显示原开环模型的根轨迹图，如图 5-4（a）所示。单击该图形菜单命令 Analysis 中的 Response to Step Command 复选框，则将打开一个新的窗口，绘制系统的闭环阶跃响应曲线，如图 5-4（b）所示。可见这样直接得出的系统有很强的振荡，就需要给这个对象模型设计一个控制器来改善系统的闭环性能。

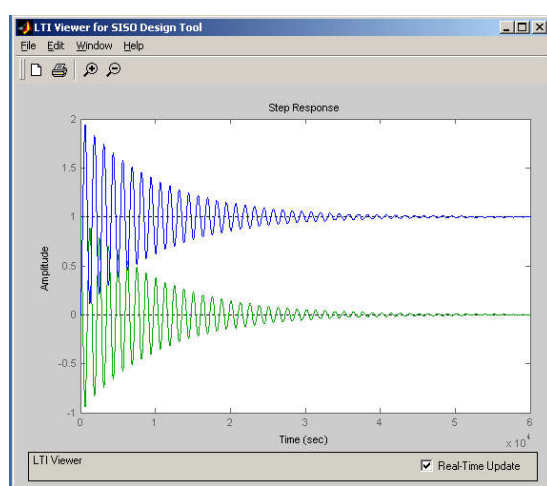
单击界面上的零点和极点添加的按钮，可以给系统添加一对共轭复极点，两个稳定零点，调整它们的位置，并调整增益的值，通过观察系统的闭环阶跃响应效果，则可以试凑地设计出一个控制器：

$$G_c(s) = 181307.29 \frac{(s + 38.31)(s + 10.26)}{(s + 61.3 + j0.84)(s + 61.3 - j0.84)}$$

在此控制器下分别观察系统的根轨迹和闭环系统阶跃响应曲线。可见，rltool 可以作为系统综合的实用工具，在系统设计中发挥作用。



a) 原对象模型的根轨迹



(b) 闭环系统阶跃响应

图 5-4 根轨迹设计工具界面及阶跃响应分析

四、 实验内容

1、已知单位负反馈系统开环传函：

$$G(s) = \frac{K}{(s+8)(s^2+3s+3.25)}$$

(1) 试在根轨迹图上标注阻尼比为0.5和0.707的等阻尼线，并求对应的系统的开环增益，闭环极点，最大超调量和调节时间。

(绘制根轨迹，阻尼比为0.5时显示格子，找阻尼比为0.5与根轨迹的交点，得到开环增益及闭环极点，就可写出开环传递函数，进而写出闭环传递函数，绘制响应曲线，找出最大超调量和调节时间。阻尼比为0.707，采用同样的方法。)

(2) 画出这两种情况下的单位阶跃的响应曲线，比较其结果。

2、设控制系统开环传递函数为 $G(s) = \frac{K^*(s+2)}{(s+3)(s^2+2s+2)}$ ，试分别画出正反馈系统和负反馈系统的根轨迹图，并分析它们的稳定情况有何不同？

(正反馈系统的根轨迹用 `rlocus(-num,den)` 绘制)

3、单位负反馈控制系统的开环传递函数为 $G(s) = \frac{K_g}{s(s+4)(s+6)}$

(1) 试绘制系统的根轨迹，并确定临界增益的值。

(先绘制根轨迹，再找根轨迹与虚轴的交点，点击，确定参数。不建议用 `rlocfind`)

(2) 若要求闭环系统单位阶跃响应的最大超调量 $M_p \leq 16.3\%$ ，试确定开环增益 K ，以及此系统分别在阶跃输入，单位速度输入和加速度输入情况下的稳态误差。

(在根轨迹上找满足 $M_p \leq 16.3\%$ 这个条件的点，得到开环增益，得到开环增益，就可写出开环传递函数，进而写出闭环传递函数，绘制响应曲线，计算稳态误差)

(3) 用鼠标选一点，使得该点增益下所有极点在 s 左半平面，求其增益及闭环极点值 (用 `rlocfind` 在根轨迹上选点，得到 K 及闭环极点)，并画出其单位阶跃响应和单位斜坡响应曲线；(得到开环增益，就可写出开环传递函数，进而写出闭环传递函数，绘制响应曲线)

(4) 用鼠标在 s 右半平面任选一点，使得该点增益下有极点在 s 右半平面 (用 `rlocfind` 在根轨迹上选点，得到 K 及闭环极点)，求其增益及闭环极点值，并画出其单位阶跃响应和单位斜坡响应。(得到开环增益，就可写出开环传递函数，进而写出闭环传递函数，绘制响应曲线)

(5) 比较(3)与(4)的结果，并加以说明。

五、 实验报告

1. 根据内容要求，写出调试好的 MATLAB 语言程序，及对应的结果。
2. 记录显示的根轨迹图形，根据实验结果分析根轨迹的绘制规则。
3. 根据实验结果分析闭环系统的性能，观察根轨迹上一些特殊点对应的 K 值，确定闭环系统稳定的范围。
4. 根据实验分析增加极点或零点对系统动态性能的影响。
5. 写出实验的心得与体会。

六、 预习要求

1. 预习实验中的基础知识，运行编制好的 MATLAB 语句，熟悉根轨迹的绘制函数 `rlocus()` 及分析函数 `rlocfind()`, `sgrid()`。
2. 掌握用根轨迹分析系统性能的图解方法，思考当系统参数 K 变化时，对系统稳定性的影响。
3. 思考加入极点或零点对系统动态性能的影响。