第六讲

作业

B3.33， B3.34， B3.39

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

当稳定线性系统在输入信号作用下的暂态响应过程结束后，便进入与系统初值无关而仅与输入信号相关的稳态响应过程，稳态响应的精度通常用稳态误差来衡量。讨论稳态误差的前提：控制系统必须稳定。

***分析**：考虑如下的线性定常系统：

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),\quad x(t_0)=x_0$$
$$y(t)=Cx(t)+Du(t)$$

其完整的输出响应为：

$$y(t)=\underbrace{Ce^{A(t-t_0)}x_0}_{零输入响应}+\underbrace{\int_{t_0}^{t}Ce^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau+Du(t)}_{零状态响应}$$

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

当稳定线性系统在输入信号作用下的暂态响应过程结束后，便进入与系统初值无关而仅与输入信号相关的稳态响应过程，稳态响应的精度通常用稳态误差来衡量。讨论稳态误差的前提：控制系统必须稳定。

稳态误差

系统稳态响应输出量的希望值与实际值之差

稳态误差=跟踪稳态误差 + 扰动稳态误差

（参考输入信号）　（干扰输入信号）

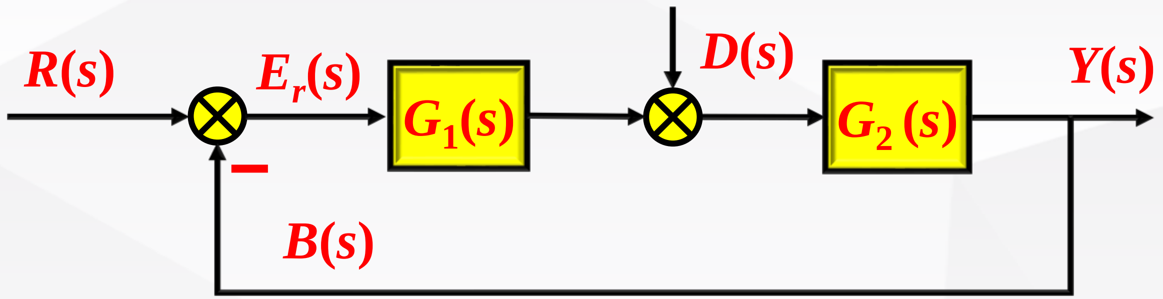
稳态误差的分类

①结构性稳态误差：元器件的非线性因素、产品质量等

②原理性稳态误差：系统结构、参数、输入信号的形式与大小等

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

单位反馈系统的跟踪稳态误差



跟 踪 误 差：$E_r(s)=R(s)-Y(s)$

开环传递函数：$G_k(s)=\dfrac{B(s)}{R(s)}=G_1(s)G_2(s)$

误差传递函数：$\Phi_{er}(s)=\dfrac{E_r(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{1+G_k(s)}$

跟踪误差信号：$E_r(s)=\dfrac{1}{1+G_k(s)}R(s)$

将开环传递函数化为典型环节形式，即“尾 1 型”：

$$G_k(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(T_i s+1)}{s^v\prod_{j=1}^{n-v}(T_j s+1)}=\frac{K}{s^v}\frac{N_0(s)}{M_0(s)}$$

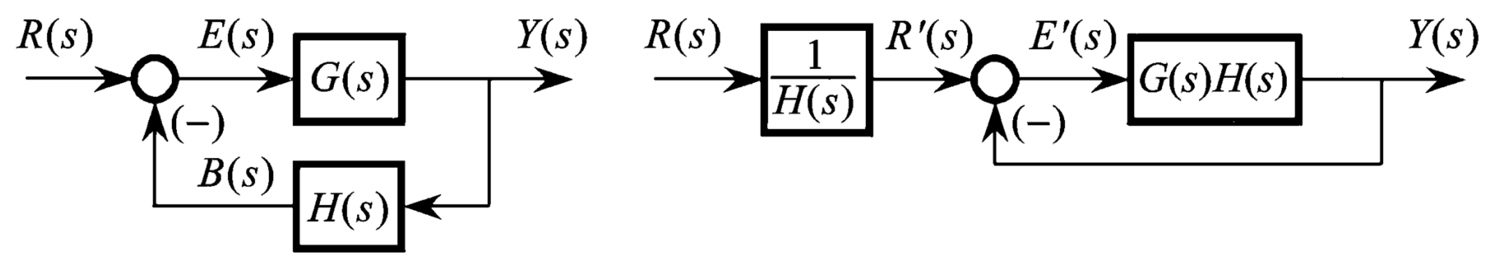
其中：

K 称为**开环增益**

v 称为**系统的型号**，表示开环系统中串联的积分环节的个数

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

非单位反馈系统的跟踪稳态误差



(a) 系统结构图　　(b) 等效单位反馈系统结构图

· 折算到输入端，即按照偏差信号定义，可测量，便于理论分析，为工程上所采取：

$$E(s)=R(s)-B(s)=R(s)-H(s)Y(s)$$

· 折算到输出端：系统中无对应物理量，难以测量，故仅具有理论意义，用为误差的定义：

$$E'(s)=R'(s)-Y(s)=\frac{R(s)}{H(s)}-Y(s)\ \left(=\frac{E(s)}{H(s)}\right)$$

注：对于单位反馈系统，二者没有区别。

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

跟踪稳态误差的基本变化规律

考虑如下的p次多项式输入信号：

$$r(t)=a_0+a_1t+\frac{a_2}{2!}t^2+\cdots+\frac{a_p}{p!}t^p$$

则其拉氏变换为：

$$R(s)=\frac{a_0}{s}+\frac{a_1}{s^2}+\frac{a_2}{s^3}+\cdots+\frac{a_p}{s^{p+1}}$$

$$=\frac{a_0s^p+a_1s^{p-1}+\cdots+a_{p-1}s+a_p}{s^{p+1}}=\frac{R_1(s)}{s^{p+1}}$$

跟踪误差为：

$$E_r(s)=\Phi_{er}(s)R(s)=\frac{s^vM_0(s)}{s^vM_0(s)+KN_0(s)}\frac{R_1(s)}{s^{p+1}}$$

若$sE_r(s)$的所有极点均分布在左半开复平面上，则由终值定理得：

$$\lim_{t\to+\infty}e_r(t)=\lim_{s\to0}sE_r(s)$$

$$=\lim_{s\to0}\frac{s^{v+1}M_0(s)}{s^vM_0(s)+KN_0(s)}\frac{R_1(s)}{s^{p+1}}$$

$$=\lim_{s\to0}\frac{s^{v+1}}{s^v+K}\frac{a_p}{s^{p+1}}$$

$$=\lim_{s\to0}\frac{a_ps^{v-p}}{s^v+K}=\begin{cases}\infty, & v<p\\ \dfrac{a_p}{K}, & v=p\\ 0, & v>p\end{cases}$$

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

观察：

①系统的型号 v 就是闭环系统可以跟踪的多项式输入信号的最高次数，将该类系统称为 v 型系统；系统是否存在跟踪误差取决于系统的型号；

②系统稳态性能与开环增益成反比，与开环传递函数分子和分母的阶次无关；

③无差系统：跟踪阶跃输入信号无稳态误差的系统

④若输入信号为多项式信号，则消除稳态误差基本原理是：

内模原理*

将系统外部输入信号的极点编入系统的开环极点中，使误差传递函数所含在原点上的 v 阶零点可以和输入信号极点产生零极相消，从而使得系统无稳态误差。

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

误差系数法

·单位阶跃输入信号 **1(*t*)**:

$$e_{sr} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{1}{s}}{1+G_k(s)} = \frac{1}{1+\lim\limits_{s\to 0}G_k(s)} = \frac{1}{1+K_p}$$

位置误差系数

·单位斜坡输入信号 ***t* ·1(*t*)**:

$$e_{sr} = \lim_{s\to 0}\frac{sR(s)}{1+G_k(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{s\cdot\frac{1}{s^2}}{1+G_k(s)} = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s+sG_k(s)} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}sG_k(s)} = \frac{1}{K_v}$$

速度误差系数

·单位加速度函数 **0.5 · *t*²·1(*t*)**:

$$e_{sr} = \frac{1}{\lim\limits_{s\to 0}s^2G_k(s)} = \frac{1}{K_a}$$

加速度误差系数

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

典型输入信号作用下各型系统的跟踪稳态误差一览表

系统类型（或无差度）ν	误差系数 K_p	K_v	K_a	跟踪稳态（终值）误差：阶跃输入时 $e_{sr}=\dfrac{R}{1+K_p}$	斜坡输入时 $e_{sr}=\dfrac{R}{K_v}$	抛物线输入时 $e_{sr}=\dfrac{R}{K_a}$
0	K	0	0	$\dfrac{R}{1+K}$	∞	∞
Ⅰ	∞	K	0	0	$\dfrac{R}{K}$	∞
Ⅱ	∞	∞	K	0	0	$\dfrac{R}{K}$
Ⅲ	∞	∞	∞	0	0	0

$$K_p=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu}}\quad K_v=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu-1}}\quad K_a=\lim_{s\to 0}\frac{K}{s^{\nu-2}}$$

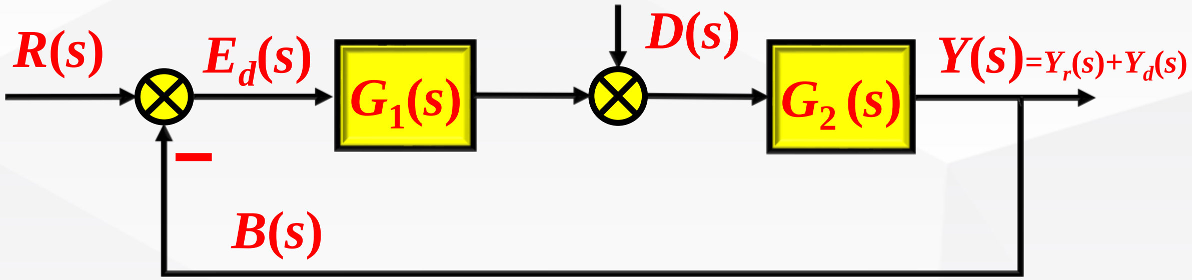
$$r(t)=R\cdot 1(t)\qquad e_{sr}=\frac{R}{1+K_p}$$

$$r(t)=R\cdot t\cdot 1(t)\qquad e_{sr}=\frac{R}{K_v}$$

$$r(t)=\frac{R}{2}\cdot t^2\cdot 1(t)\qquad e_{sr}=\frac{R}{K_a}$$

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

单位反馈系统的扰动稳态误差



扰 动 误 差：$E_d(s)=0-Y_d(s)$

开环传递函数：$G_k(s)=\dfrac{B(s)}{R(s)}=G_1(s)G_2(s)$

误差传递函数：$\Phi_{ed}(s)=\dfrac{E_d(s)}{D(s)}=-\dfrac{G_2(s)}{1+G_k(s)}$

扰动误差信号：$E_d(s)=-\dfrac{G_2(s)}{1+G_k(s)}D(s)$

· 计算稳态误差的一般方法：

① 判断系统稳定性；不稳定，稳态误差趋于无穷；

② 考察终值定理应用条件是否成立：

$sE_r(s)$所有极点均分布在左半开复平面上；

③ 求误差传递函数：

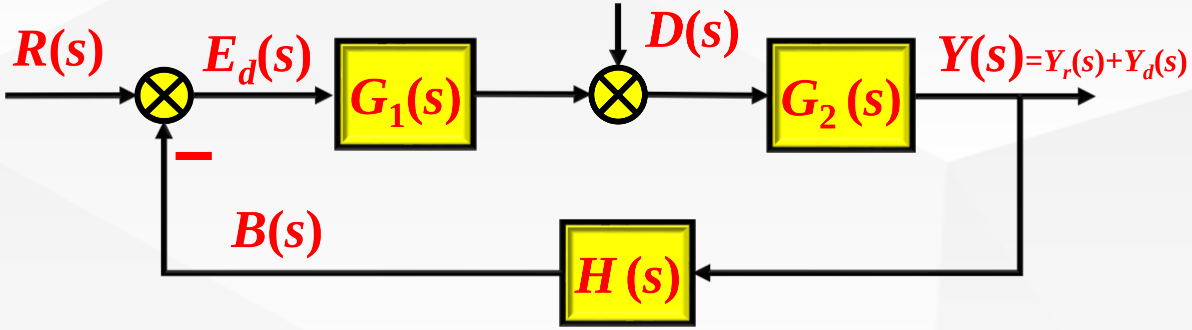
$$\Phi_{er}(s)=\frac{E_r(s)}{R(s)},\qquad \Phi_{ed}(s)=\frac{E_d(s)}{D(s)}$$

④ 应用终值定理求取稳态误差：

$$e_s=\lim_{t\to\infty}e(t)$$

$$=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s[\Phi_{er}(s)R(s)+\Phi_{ed}(s)D(s)]$$

非单位反馈系统的扰动稳态误差



扰 动 误 差：$E_d(s)=0-H(s)Y_d(s)$

开环传递函数：$G_k(s)=\dfrac{B(s)}{R(s)}=G_1(s)G_2(s)H(s)$

误差传递函数：$\Phi_{ed}(s)=\dfrac{E_d(s)}{D(s)}=-\dfrac{G_2(s)H(s)}{1+G_k(s)}$

扰动误差信号：$E_d(s)=-\dfrac{G_2(s)H(s)}{1+G_k(s)}D(s)$

· 计算稳态误差的一般方法：

① 判断系统稳定性；不稳定，稳态误差趋于无穷；

② 考察终值定理应用条件是否成立：

$sE_r(s)$所有极点均分布在左半开复平面上；

③ 求误差传递函数：

$$\Phi_{er}(s)=\frac{E_r(s)}{R(s)},\qquad \Phi_{ed}(s)=\frac{E_d(s)}{D(s)}$$

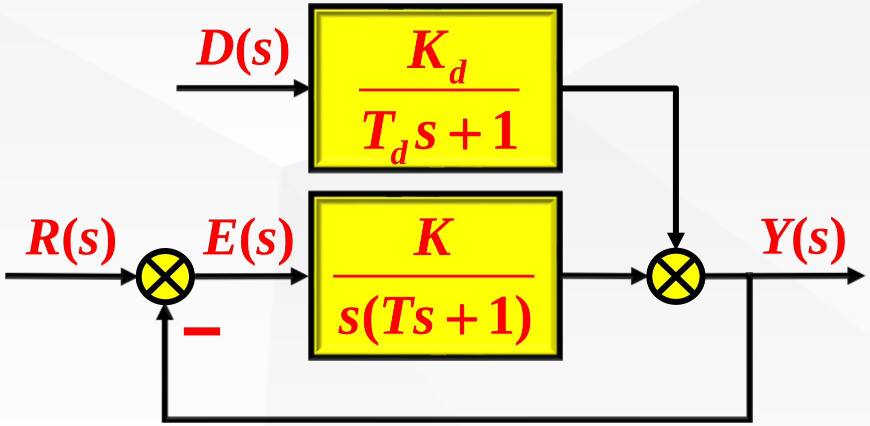
④ 应用终值定理求取稳态误差：

$$e_s=\lim_{t\to\infty}e(t)$$

$$=\lim_{s\to 0}sE(s)=\lim_{s\to 0}s[\Phi_{er}(s)R(s)+\Phi_{ed}(s)D(s)]$$

§ 3.6 控制系统的稳态特性分析

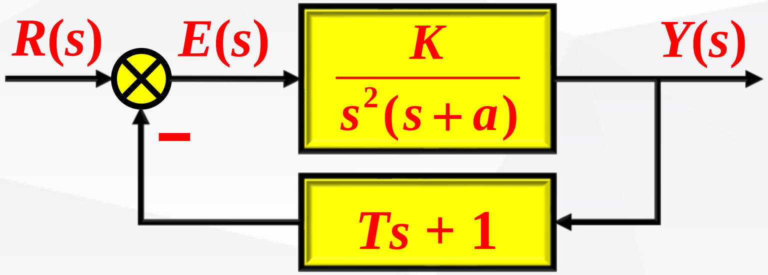
例： 已知单位反馈控制系统框图如下，若输入信号$r(t)=d(t)=t$，求系统的稳态误差。



解： 按定义计算，稳态误差为：

$$e_s = e_{sr} + e_{sd} = \frac{1-K_d}{K}$$

例： 已知反馈控制系统框图如下，若输入信号$R(t)=2t+4t^2$，求系统的稳态误差。



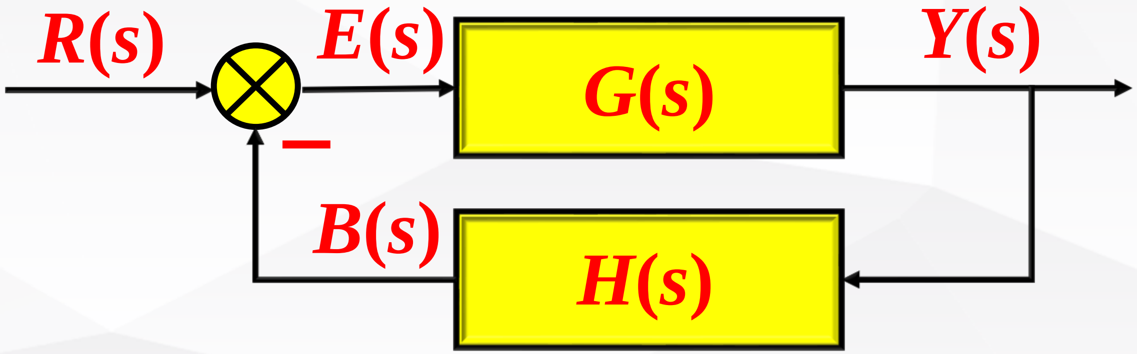
解： 采用误差系数法，稳态误差为：

$$e_{sr} = \frac{8a}{K},\ aT > 1$$

§ 3.7 反馈控制的作用与控制系统灵敏度分析

无论以何种方法建立的数学模型，只是对于控制系统运动特性的某种近似描述，影响因素包括：内、外部扰动和不确定性等。要在扰动和不确定条件下实现系统可靠和有效工作，反馈控制就是有力手段。

考虑如下反馈控制系统：



控制系统前向通道未受到扰动时

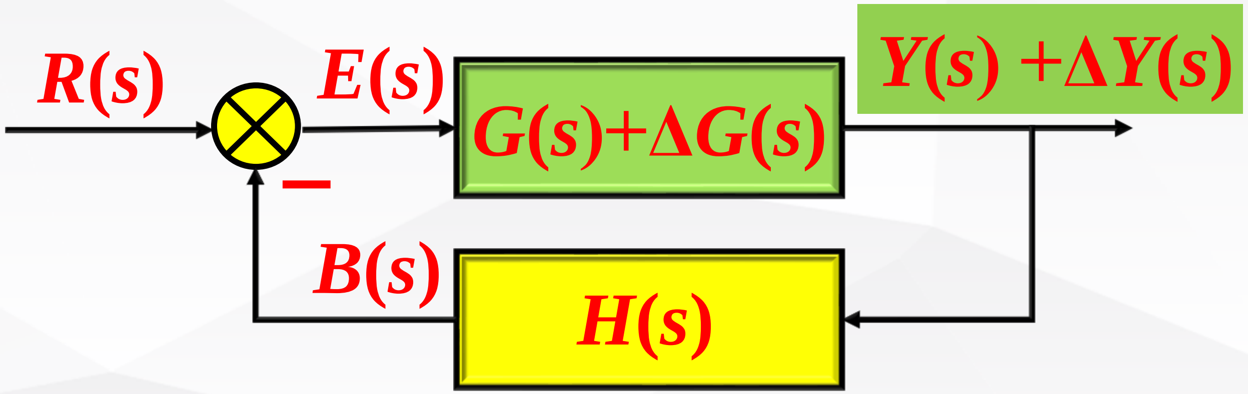
- 未受扰动系统闭环传递函数为：

$$\frac{Y}{R}=\Phi=\frac{G}{1+GH}$$

§ 3.7 反馈控制的作用与控制系统灵敏度分析

无论以何种方法建立的数学模型，只是对于控制系统运动特性的某种近似描述，影响因素包括：内、外部扰动和不确定性等。要在扰动和不确定条件下实现系统可靠和有效工作，反馈控制就是有力手段。

考虑如下反馈控制系统：



控制系统前向通道受到扰动时

- 未受扰动系统闭环传递函数为：

$$\frac{Y}{R}=\Phi=\frac{G}{1+GH}$$

- 前向通路受到扰动发生变化后系统的闭环传递函数为：

$$\frac{Y+\Delta Y}{R}=\frac{G+\Delta G}{1+(G+\Delta G)H}$$

§ 3.7 反馈控制的作用与控制系统灵敏度分析

闭环系统输出量的变化量:

$$\Delta Y=\frac{G+\Delta G}{1+(G+\Delta G)H}\cdot R-\Phi\cdot R$$

$$=\frac{(G+\Delta G)\cdot(1+GH)-[1+(G+\Delta G)H]\cdot G}{[1+(G+\Delta G)H]\cdot(1+GH)}\cdot R$$

$$=\frac{\Delta G}{(1+GH+\Delta GH)\cdot(1+GH)}\cdot R$$

$$=\frac{\Delta G}{G\cdot(1+GH+\Delta GH)}\boxed{\frac{G\cdot R}{(1+GH)}}$$

$$=\frac{\Delta G}{G\cdot(1+GH+\Delta GH)}\cdot Y$$

整理可得:

$$\boxed{\frac{\Delta Y}{Y}}=\boxed{\frac{\Delta G}{G}}\cdot\boxed{\frac{1}{(1+GH+\Delta GH)}}$$

注意:

$$\frac{\Delta Y}{Y}\equiv\frac{\Delta\Phi}{\Phi}$$

§3.7 反馈控制的作用与控制系统灵敏度分析

控制系统的灵敏度

控制系统的灵敏度定义为：由扰动和不确定因素造成的x环节特性或参数的变化率，与由此（x变化）而引起的系统特性P（传递函数或输出量）的变化率之比：

$$S_x^P=\frac{\Delta P/P}{\Delta x/x}$$

取微小增量形式，即$\Delta x\to 0$时，有：

$$S_x^P=\frac{\partial P/P}{\partial x/x}=\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{x}{P}$$

说明：

①灵敏度等于0意味着系统的特性完全不受扰动的影响，故灵敏度越小越好；

②灵敏度的最大值为1，扰动造成的环节特性或参数的相对变化完全影响系统特性，使之做同样相对变化而毫无抑制能力。

§3.7 反馈控制的作用与控制系统灵敏度分析

①闭环传递函数$\Phi(s)$关于前向通道$G(s)$的灵敏度：

$$S_G^{\Phi}=\frac{\partial\Phi}{\partial G}\cdot\frac{G}{\Phi}=\frac{1}{(1+GH)^2}\cdot\frac{G}{G/(1+GH)}$$

$$=\frac{1}{1+GH}=\frac{1}{1+G_k}$$

在主要工作区间内满足$|G_k|\gg 1$

当扰动作用在被反馈环包围的前向通道的环节上时，无论扰动的形式如何，闭环系统对于摄动所造成的环节特性（传递函数）或参数变化的灵敏度，均减少到开环系统时的$1/[1+G_k(s)]$。

②闭环传递函数$\Phi(s)$关于反馈通道$H(s)$的灵敏度：

$$S_H^{\Phi}=\frac{\partial\Phi}{\partial H}\cdot\frac{H}{\Phi}=\frac{-G^2}{(1+GH)^2}\cdot\frac{H}{G/(1+GH)}$$

$$=-\frac{GH}{1+GH}=-\frac{G_k}{1+G_k}$$

在主要工作区间内满足$|G_k|\gg 1$

对于扰动所造成的反馈通道上环节特性或参数变化，反馈控制无抑制能力，这些变化将几乎完全影响到系统的特性或输出。

③开环系统传递函数$\Phi(s)$关于前向通道$G(s)$的灵敏度：

$$S_G^{\Phi}=\frac{\partial\Phi}{\partial G}\cdot\frac{G}{\Phi}=1$$

开环系统对于扰动毫无抑制作用

对于不被反馈环包围的输入通道上各环节，对扰动作用所造成的环节特性或参数变化，反馈控制毫无抑制能力，它们都将完全影响到系统的特性或输出使其作相应的变化。

§ 3.7 反馈控制的作用与控制系统灵敏度分析

反馈控制的优势与代价

不可避免地扰动和不确定因素的作用是制约现代工程系统性能提高的重要因素，反馈控制是有利的应对手段：

- **优势：** 其可对闭环系统前向通道环节上的扰动信号加以有效抑制并显著降低系统特性对于这些环节上的扰动和不确定性因素作用的灵敏度。
- **代价：** 系统复杂性升高，带来了稳定性问题。

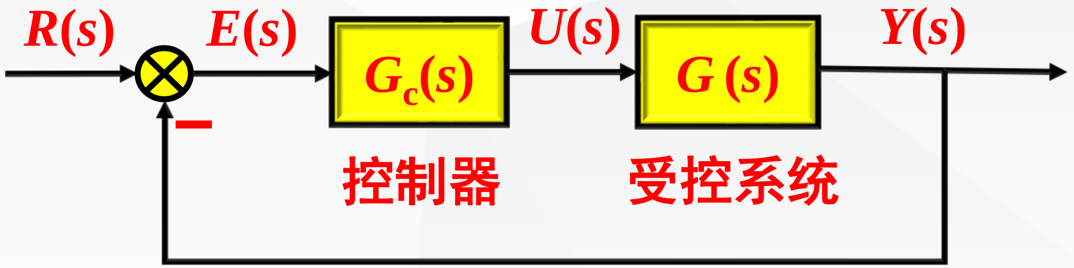
构建高精度控制系统的基本思路

将受控对象和执行机构等系统主要部件设置在前向通道上，通过反馈控制和闭环系统设计，采用与系统精度要求相匹配的高精度检测装置和给定装置，可构建高性能制动控制系统。

§ 3.8 闭环系统的基本控制律：PID控制

改善控制系统动态性能的基本手段

在反馈控制基础上，引入能提供满意性能的控制器



单回路工程控制系统

PID控制器

工程上常用的基本控制律是基于对偏差信号的比例、积分和微分运算，简称PID控制器：

中文全称为：比例+积分+微分控制器

英文全称为：Proportional+Integral+Derivative Control

§ 3.8 闭环系统的基本控制律：比例控制器

比例控制器：P控制

- 比例控制器传递函数为：

$$G_c(s) = K_p$$

- 产生的控制信号：

$$u(t) = K_p e(t)$$

- 作用原理：

只要存在输出量和参考输入量偏差，则控制器及时产生一个与偏差成比例的控制信号作用于受控系统消除偏差。

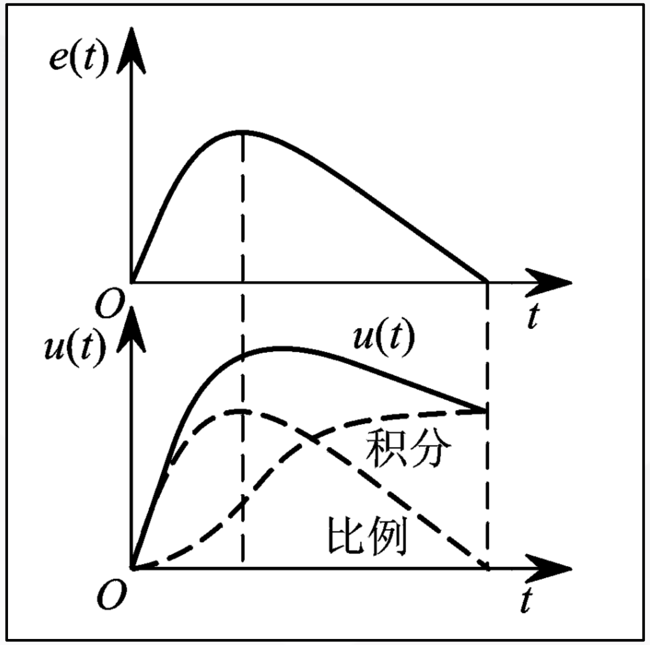
- 优、缺点：

优点：作用及时，普遍采用；

缺点：必须存在偏差才发挥作用，无法消除稳态误差

§ 3.8 闭环系统的基本控制律：比例+积分控制器

比例+积分控制器：PI控制



- 比例+积分控制器传递函数为：

$$G_c(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$$

- 产生的控制信号：

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)d\tau$$

其中 $K_i = K_p / T_i$，T_i叫做积分时间常数。

- 作用原理：

只要存在偏差，控制输出量就不断变化；偏差存在时间越长，输出变化量就越大；偏差为零时，输出量维持某一恒值

- 积分控制优、缺点：

优点是力图消除稳态误差；但容易造成稳定性问题，对于动态性能不利，因此不能单独使用

§3.8 闭环系统的基本控制律：比例+微分控制器

比例+微分控制器：PD控制

· 比例+微分控制器传递函数为：

$$G_c(s) = K_p(1 + T_D s)$$

· 产生的控制信号：

$$u(t) = K_p e(t) + K_D \dot{e}(t)$$

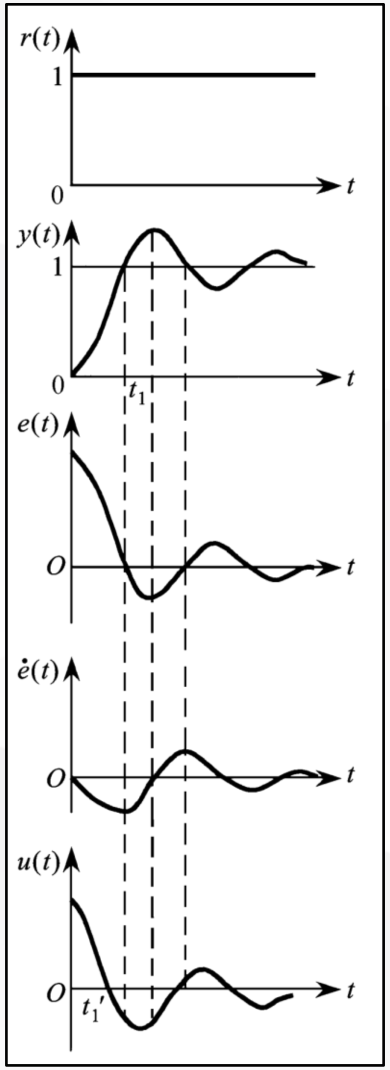
其中 $K_D = K_p T_D$ ，T_D叫做微分时间常数。

· 作用原理：

在偏差出现和改变的瞬间，根据变化的趋势产生超前的预见调节作用，改善系统的暂态特性。

· 微分控制优、缺点：

能够有效提升动态特性；但是对噪声干扰信号比较敏感；偏差不变就不产生控制作用，故不能单独使用。



§3.8 闭环系统的基本控制律：比例+积分+微分控制器

比例+积分+微分控制器：PID控制

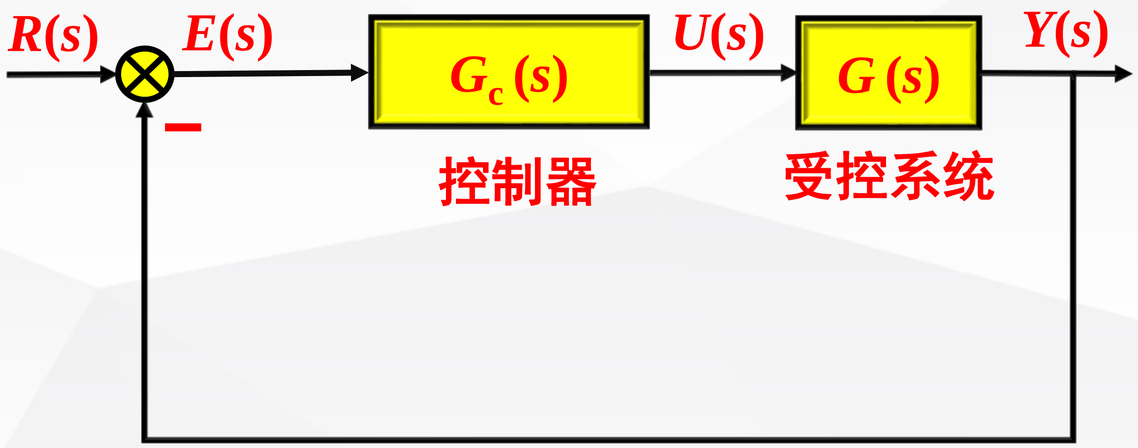
- 比例+积分+微分控制器传递函数为：

$$G_c(s) = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_D s\right)$$

- 产生的控制信号：

$$u(t) = K_p e(t) + K_i\int_0^t e(\tau)d\tau + K_D\dot{e}(t)$$

只需要恰当地整定三个参数即可获得满意的控制性能；PID控制时一般工程系统取得满意控制性能的基本控制律。



单回路控制工程系统示意图

§ 3.8 闭环系统的基本控制律：比例+积分+微分控制器

比例+积分+微分控制器：PID控制

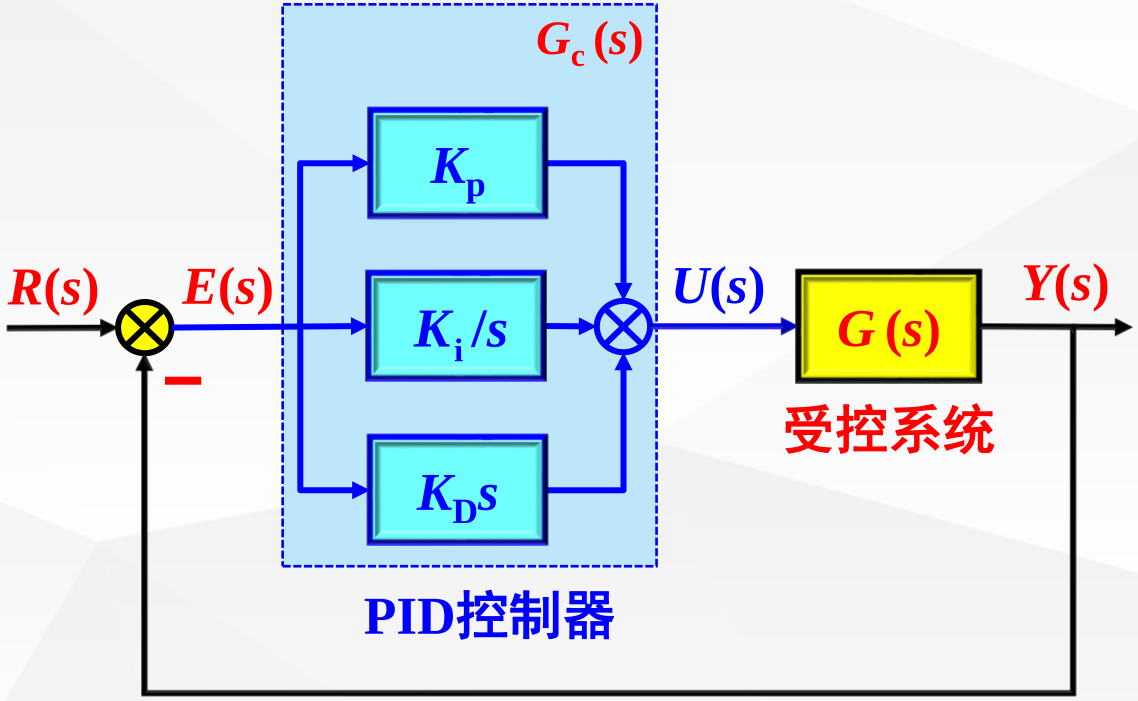
- 比例+积分+微分控制器传递函数为：

$$G_c(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_D s\right)$$

- 产生的控制信号：

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)d\tau + K_D \dot{e}(t)$$

只需要恰当地整定三个参数即可获得满意的控制性能；PID控制时一般工程系统取得满意控制性能的基本控制律。



单回路PID工程控制系统示意图