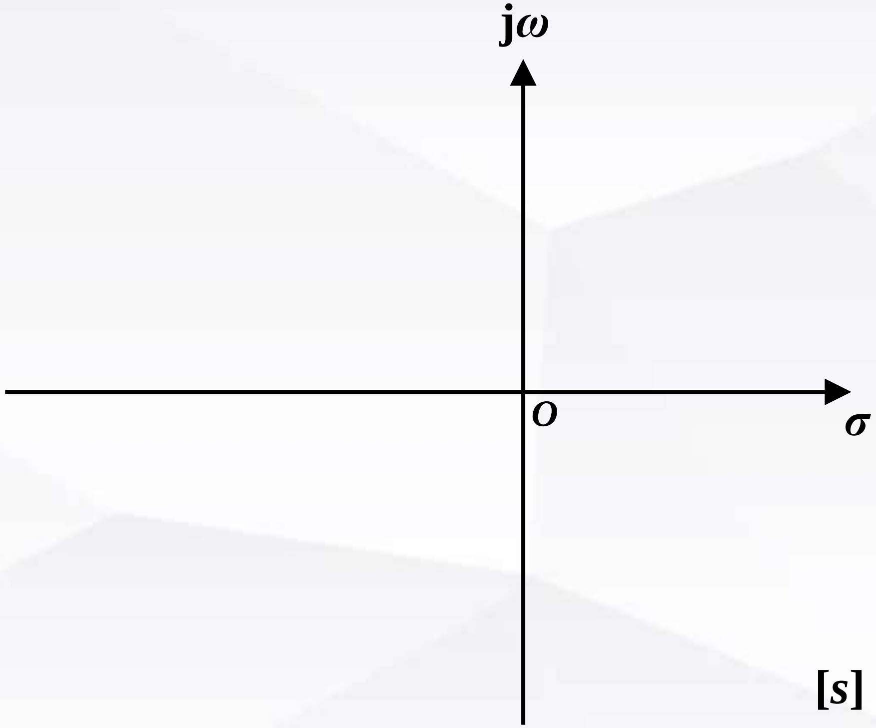


根轨迹概略图

第九讲

1. 根轨迹的基本概念：

参数从零到无穷变化时，由开环零极点绘制闭环极点分布图

2. 根轨迹的绘制： 八条基本原则

3. 控制系统性能的复域分析：

稳定性，稳态性能，动态性能（主导极点）

4. 控制系统的根轨迹综合

本课程知识体系脉络图

§ 4.7 根轨迹综合法

系统的综合：

设计一个满足技术性能要求的控制系统，其基本手段通常有两种：

1. 调整增益
2. 改变系统的结构：引入改善系统特性的附加装置来对系统的缺陷进行校正，常称这类装置为校正装置；校正方式分为串联校正、反馈校正和复合校正

根轨迹综合法的基本思路：

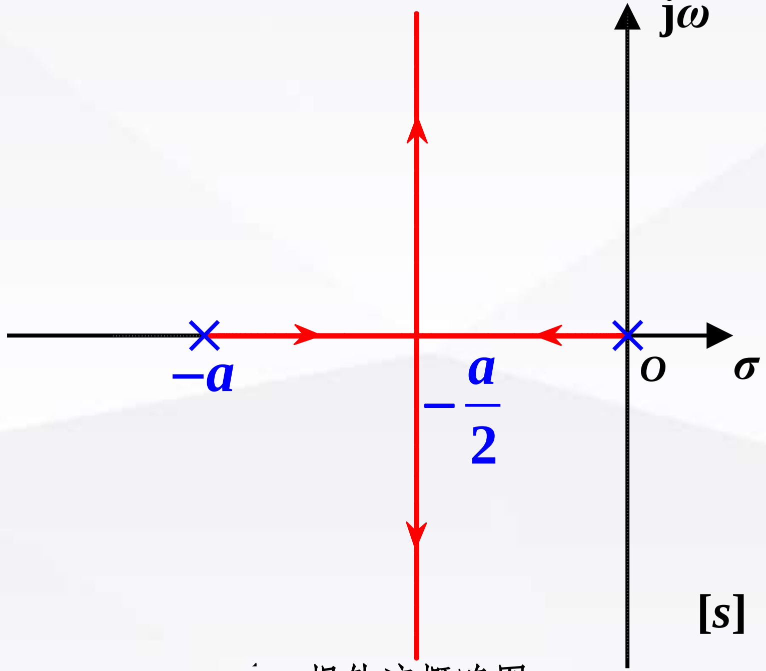
通过适当添加校正装置改变系统开环零极点的分布，以改变根轨迹的形状，使得系统在开环增益的设计值下，其根轨迹能够通过希望的闭环极点（尤其是主导极点），从而使系统具有满意的性能。

添加开环零点对根轨迹的影响：

合理添加开环零点，可以使得根轨迹主要分支将向左移，有利于改善系统的暂态性能和稳定性。

设二阶系统得开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{K}{s(s+a)},\quad a > 0$$



根轨迹概略图

添加开环零点对根轨迹的影响

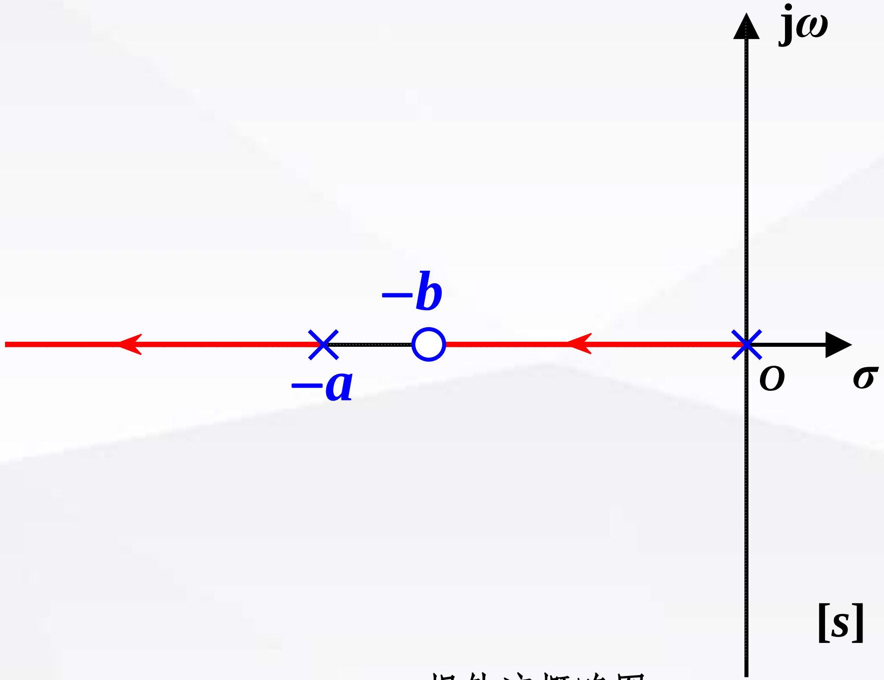
设二阶系统得开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\ a>0$$

在原系统上添加一个实数开环零点，则系统得开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K(s+b)}{s(s+a)},\ a>0,b>0$$

若a>b>0，则有：



根轨迹概略图

添加开环零点对根轨迹的影响

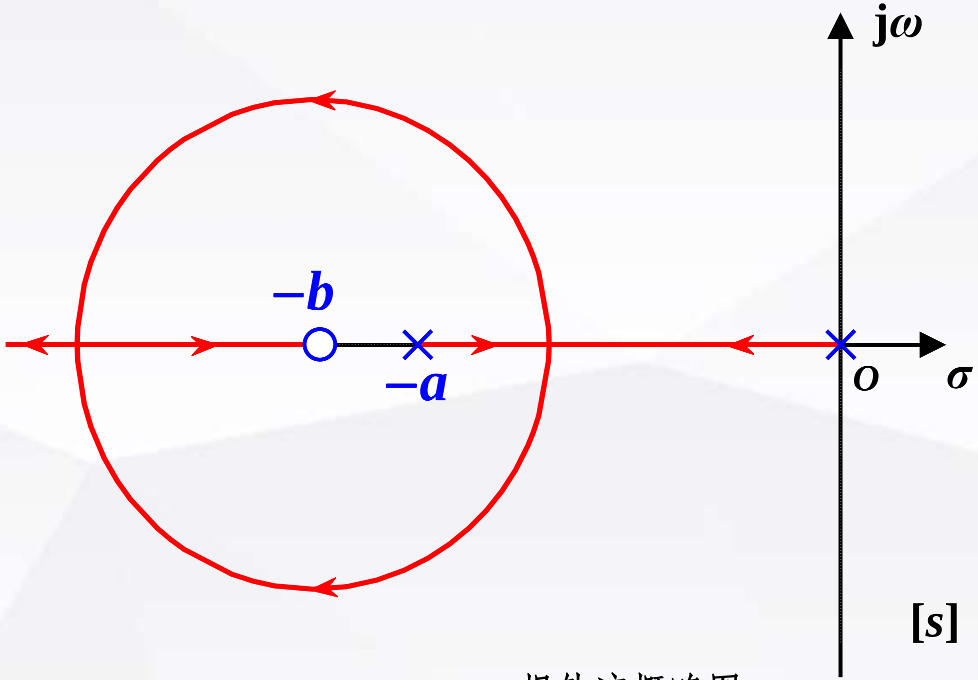
设二阶系统得开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\ a>0$$

在原系统上添加一个实数开环零点，则系统得开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K(s+b)}{s(s+a)},\ a>0,b>0$$

若$b>a>0$，则有：



根轨迹概略图

添加开环零点对根轨迹的影响

设二阶系统得开环传递函数为：

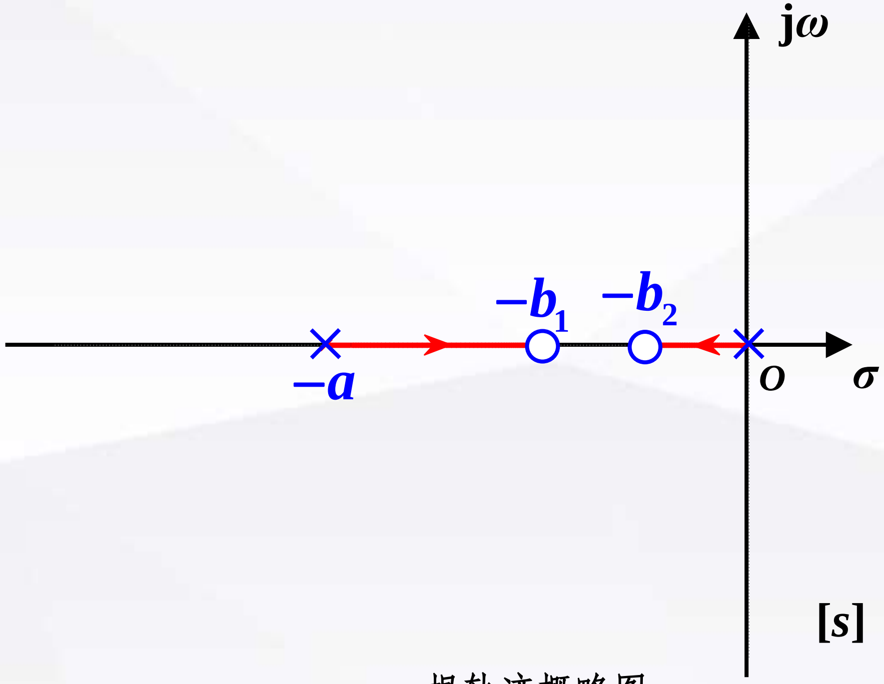
$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\quad a>0$$

在原系统上添加一对实数开环零点，则系统得开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K(s+b_1)(s+b_2)}{s(s+a)}$$

其中$b_{1,2}>0$

若$b_{1,2}<a$，则有：



根轨迹概略图

添加开环零点对根轨迹的影响

设二阶系统得开环传递函数为：

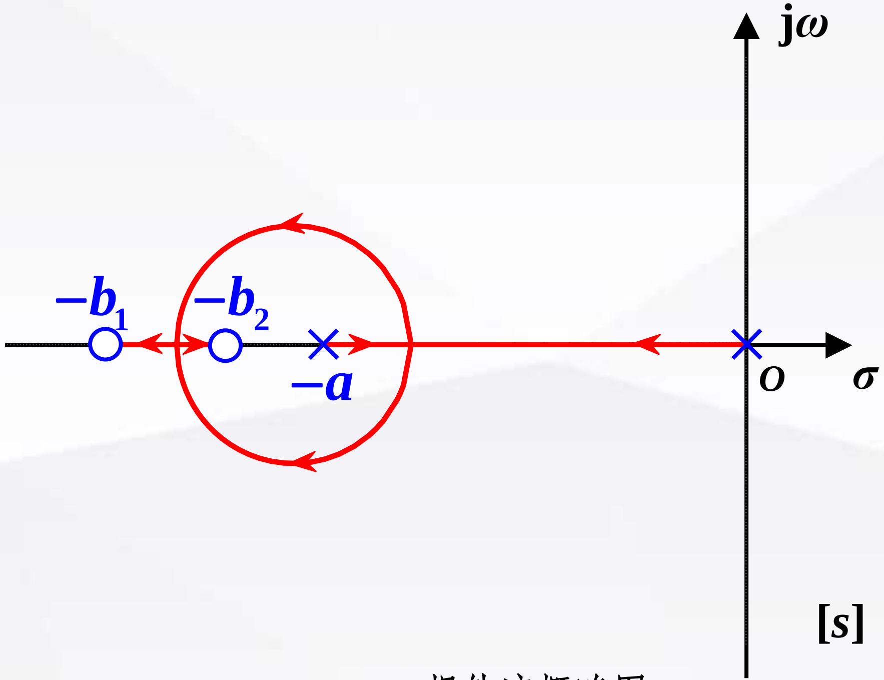
$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\quad a>0$$

在原系统上添加一对实数开环零点，则系统得开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K(s+b_1)(s+b_2)}{s(s+a)}$$

其中$b_{1,2}>0$

若$b_{1,2}>a$，则有：



根轨迹概略图

添加开环零点对根轨迹的影响

设二阶系统得开环传递函数为：

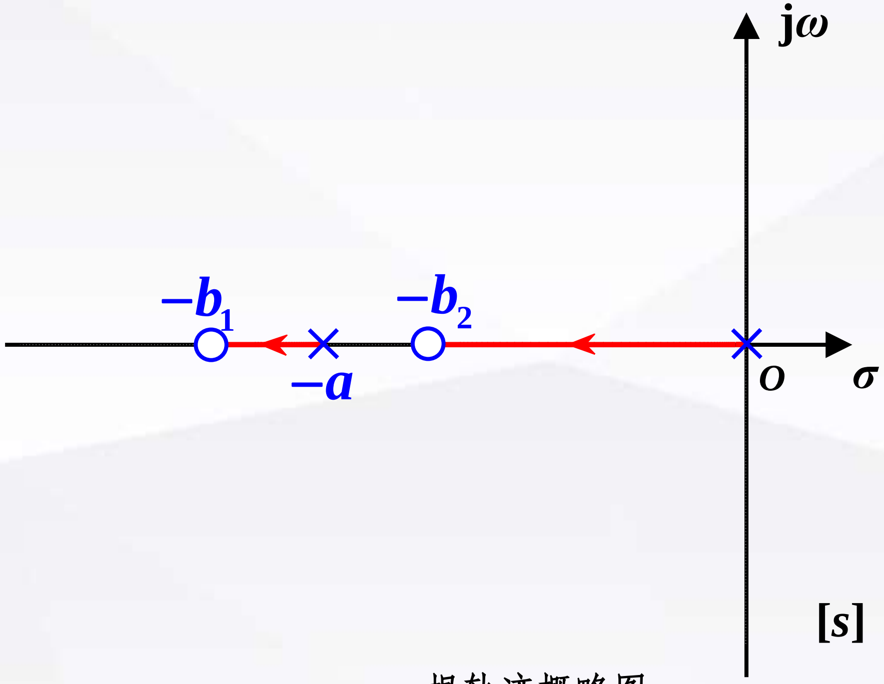
$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\ a>0$$

在原系统上添加一对实数开环零点，则系统得开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K(s+b_1)(s+b_2)}{s(s+a)}$$

其中$b_{1,2}>0$

若$b_1>a>b_2$，则有：



根轨迹概略图

添加开环零点对根轨迹的影响

设二阶系统得开环传递函数为：

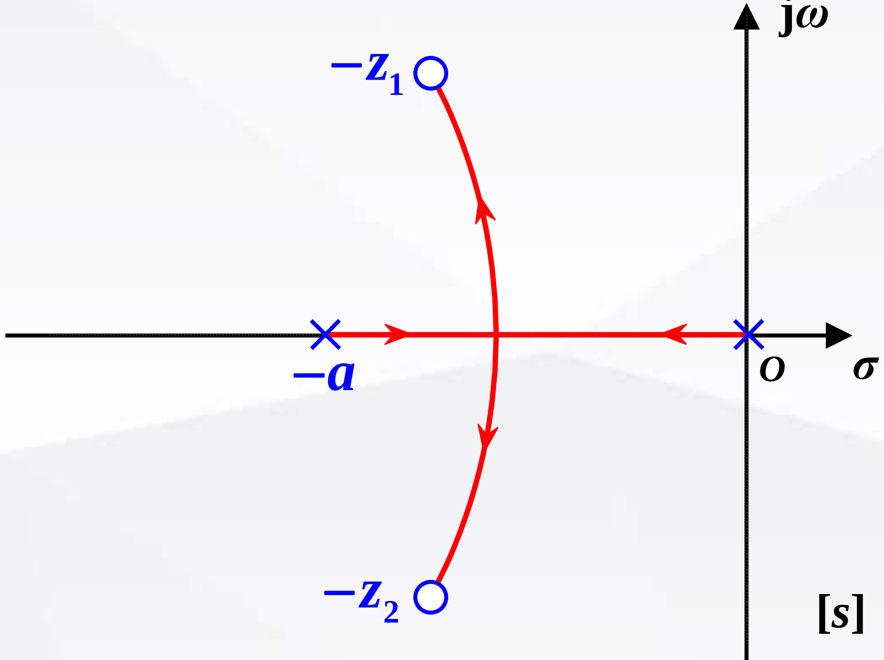
$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\quad a>0$$

在原系统上添加一对共轭复数开环零点，则系统得开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+a)}$$

其中$\mathrm{Re}(z_{1,2})>0$

若$\mathrm{Re}(z_{1,2})>a/2$，则有：



根轨迹概略图

添加开环零点对根轨迹的影响

设二阶系统得开环传递函数为：

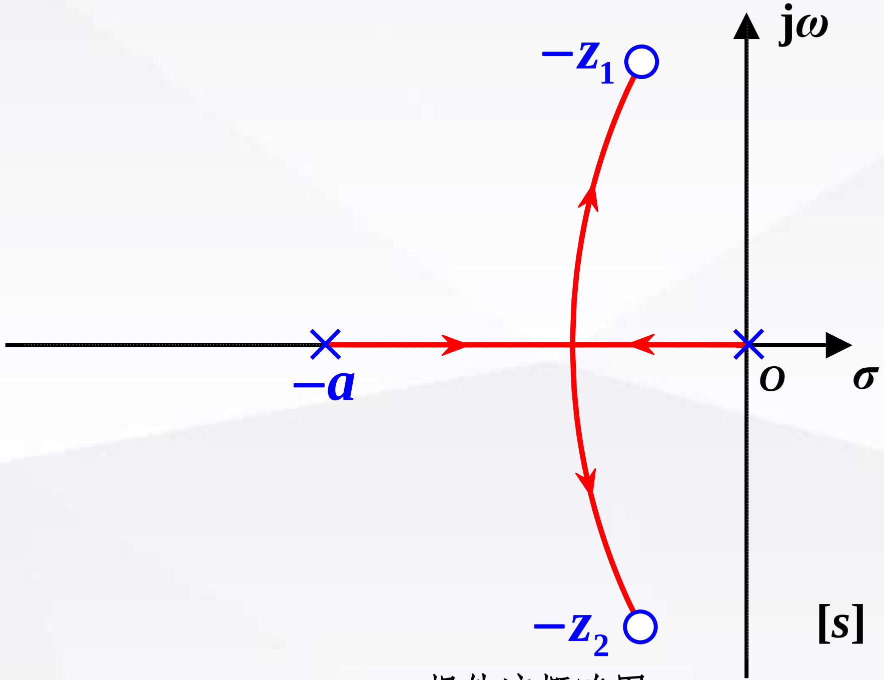
$$G_k(s) = \frac{K}{s(s+a)},\quad a>0$$

在原系统上添加一对共轭复数开环零点，则系统得开环传递函数为：

$$G\ (s) = \frac{K(s+z_1)(s+z_2)}{s(s+a)}$$

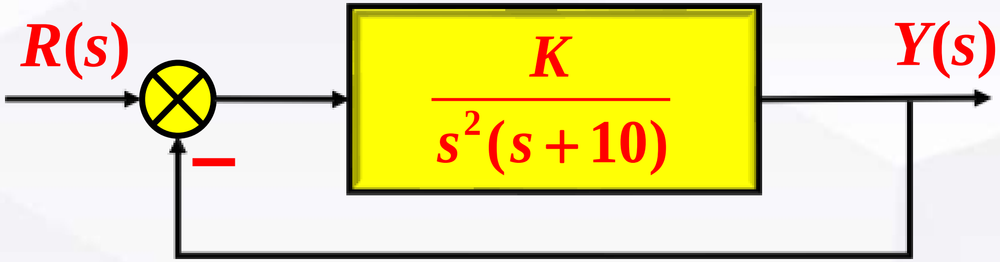
其中Re($z_{1,2}$)>0

若Re($z_{1,2}$)<a/2，则有：



根轨迹概略图

例： 考虑如下的单位反馈系统，



试利用根轨迹法讨论分别在左半开复平面上添加：

①一个实数零点z；

②一对共轭复数零点$z_{1,2}$；

闭环系统的稳定性、暂态性能及稳态性能的变化情况。

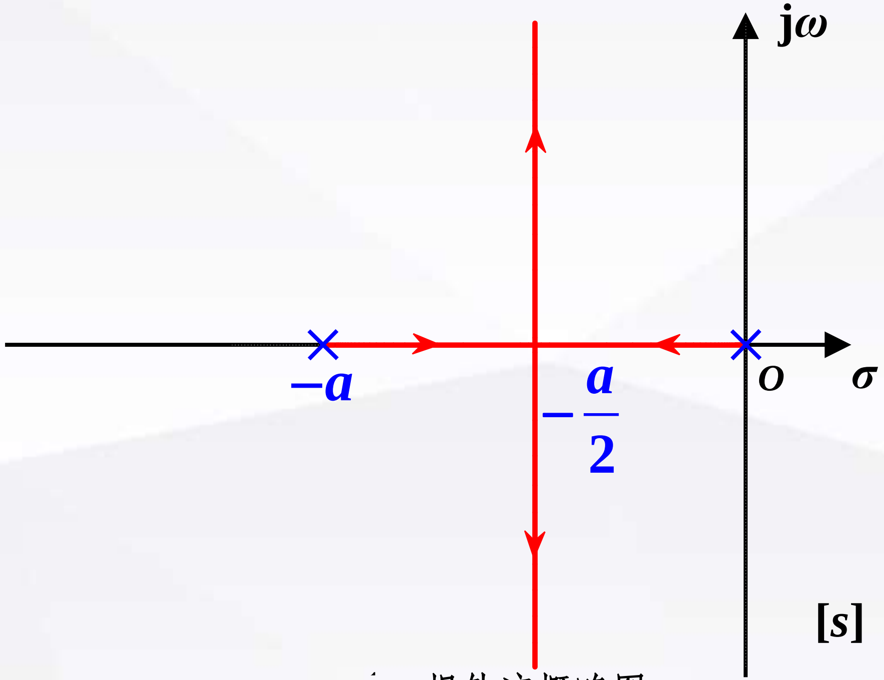
§ 4.7 根轨迹综合法：

添加开环极点对根轨迹的影响：

添加开环极点，可以使得根轨迹主要分支将向右移动，不利于系统的暂态性能和稳定性。

设二阶系统得开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\ a>0$$



根轨迹概略图

添加开环极点对根轨迹的影响

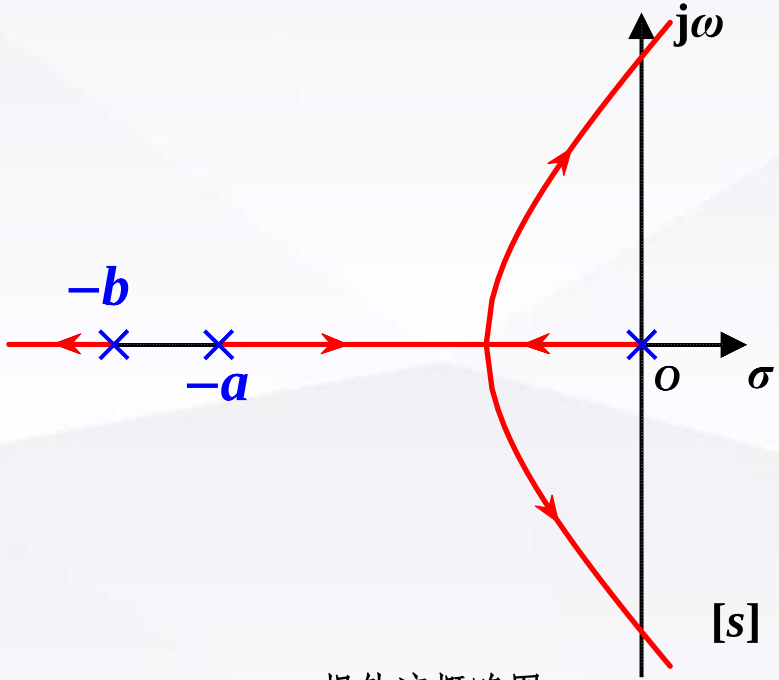
设二阶系统得开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\ a>0$$

在原系统上添加一个实数开环极点，则系统开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)(s+b)},\ a>0, b>0$$

不妨令$b>a>0$，则有：



根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法：增加开环零、极点及偶极子对根轨迹形状的影响

添加开环极点对根轨迹的影响

设二阶系统得开环传递函数为：

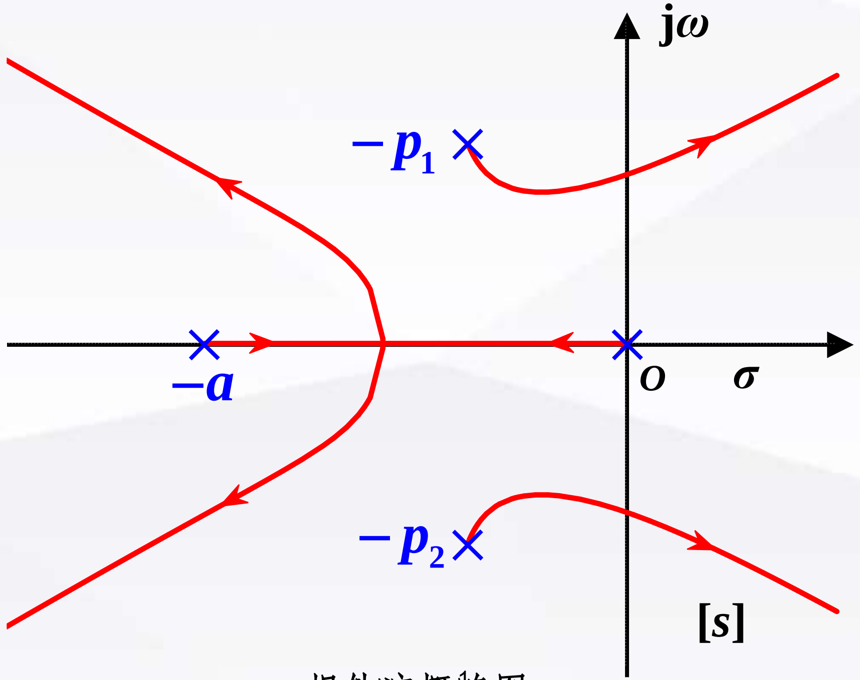
$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\quad a>0$$

在原系统上添加一对共轭复数开极点，则系统开环传递函数为：

$$G\ (s)=\frac{K}{s(s+a)(s+p_1)(s+p_2)}$$

其中Re($p_{1,2}$)>0

若Re($p_{1,2}$)<a/2，则有：



根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法：增加开环零、极点及偶极子对根轨迹形状的影响

添加开环极点对根轨迹的影响

设二阶系统得开环传递函数为：

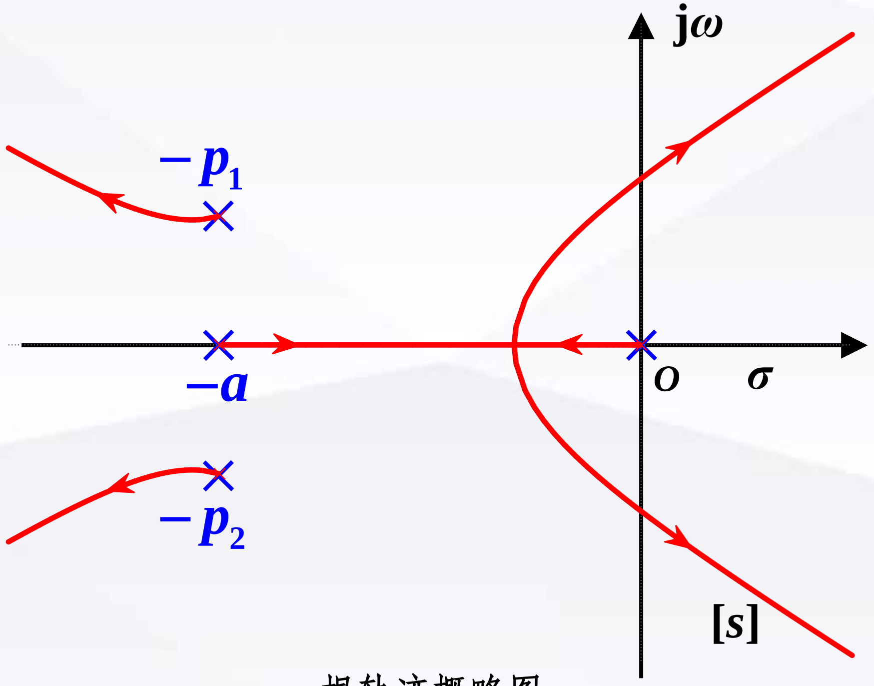
$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\quad a>0$$

在原系统上添加一对共轭复数开极点，则系统开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K}{s(s+a)(s+p_1)(s+p_2)}$$

其中$\mathrm{Re}(p_{1,2})>0$

若$\mathrm{Re}(p_{1,2})>a/2$，则有：



根轨迹概略图

添加开环极点对根轨迹的影响

设二阶系统得开环传递函数为：

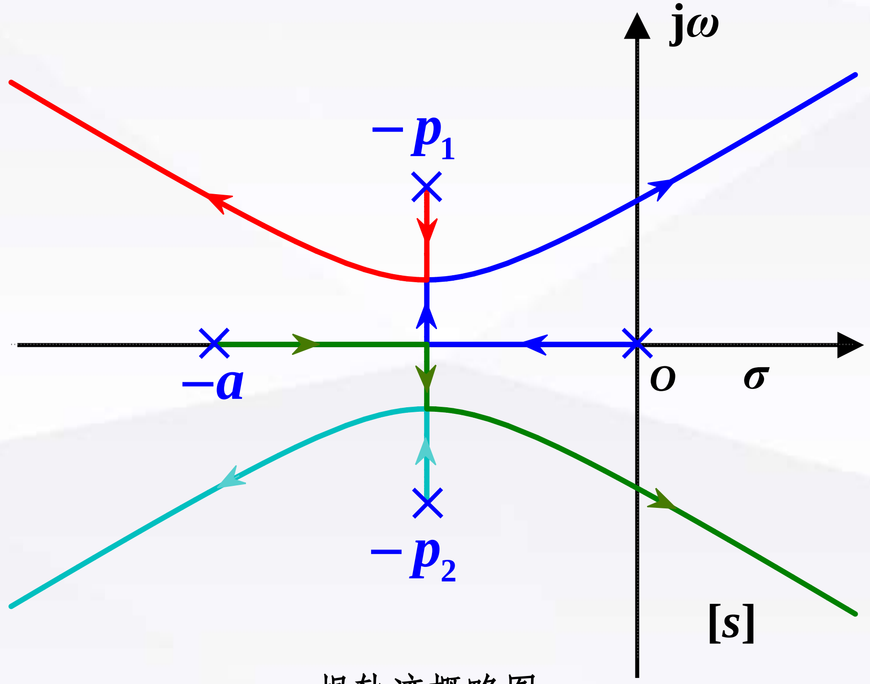
$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\quad a>0$$

在原系统上添加一对共轭复数开极点，则系统开环传递函数为：

$$G(s)=\frac{K}{s(s+a)(s+p_1)(s+p_2)}$$

其中$\mathrm{Re}(p_{1,2})>0$

若$\mathrm{Re}(p_{1,2})=a/2$，则有：



根轨迹概略图

添加开环偶极子对根轨迹的影响

添加开环偶极子基本不会影响根轨迹的形状，其在幅值条件和辐角条件中彼此抵消，因此系统暂态特性不会发生明显变化，但是其增益可以发生明显变化（当其靠近原点时），进而对稳态特性产生影响。

系统开环传递函数中添加一对靠近原点的开环偶极子z_c、p_c，且满足$z_c=Mp_c$，则保持增益不变的前提下，可将$s-z_c$和$s-z_c$近似消去：

$$G_k(s)=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)(s-z_c)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)(s-p_c)}\approx MK_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

添加开环偶极子后系统增益相较原系统增大M倍；若M值较大，则系统的稳态特性将会发生明显变化。

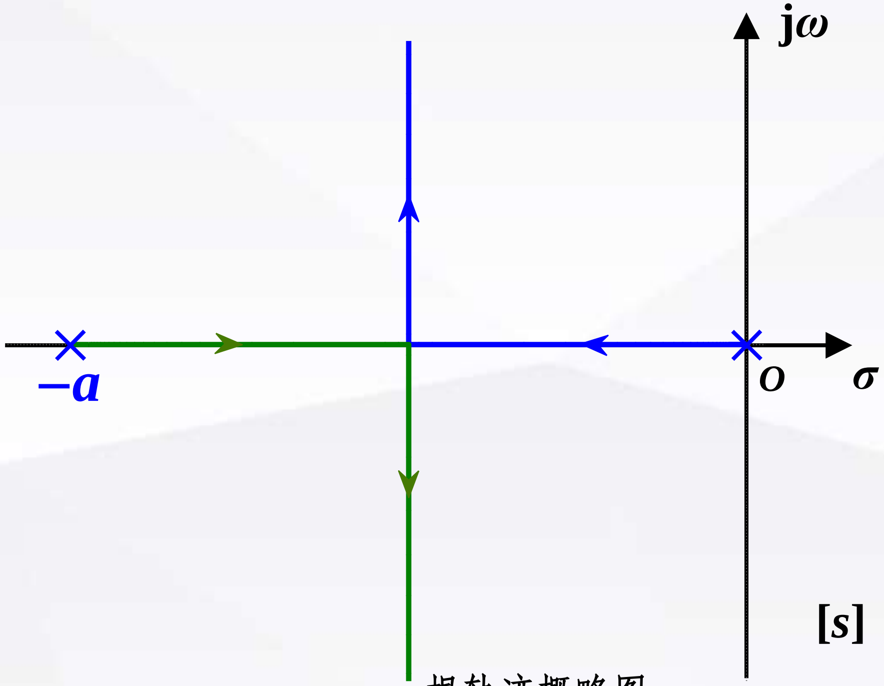
§ 4.7 根轨迹综合法

添加开环偶极子对根轨迹的影响

合理添加一对左半开复平面上的开环偶极子，可在不改变根轨迹形状的情况下有效提升系统的稳态性能。

设二阶系统得开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\ a>0$$



根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法

添加开环偶极子对根轨迹的影响

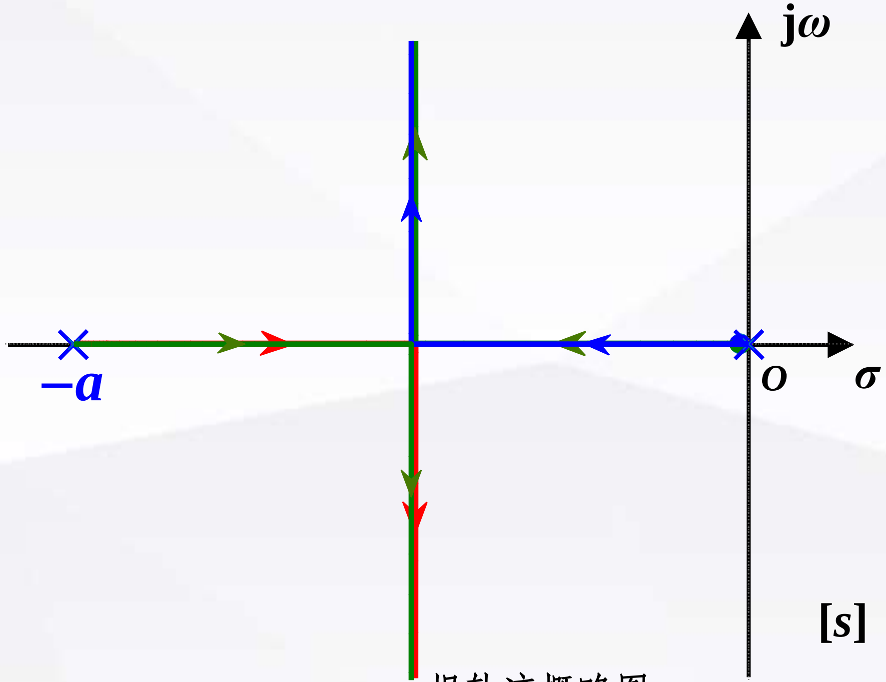
合理添加一对左半开复平面上的开环偶极子，可在不改变根轨迹形状的情况下有效提升系统的稳态性能。

设二阶系统得开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{K}{s(s+a)},\quad a>0$$

在原系统上添加一对靠近原点的开环偶极子，则系统开环传递函数为：

$$G\ (s)=\frac{K(s+z_c)}{s(s+a)(s+p_c)},\quad \frac{z_c}{p_c}=M$$

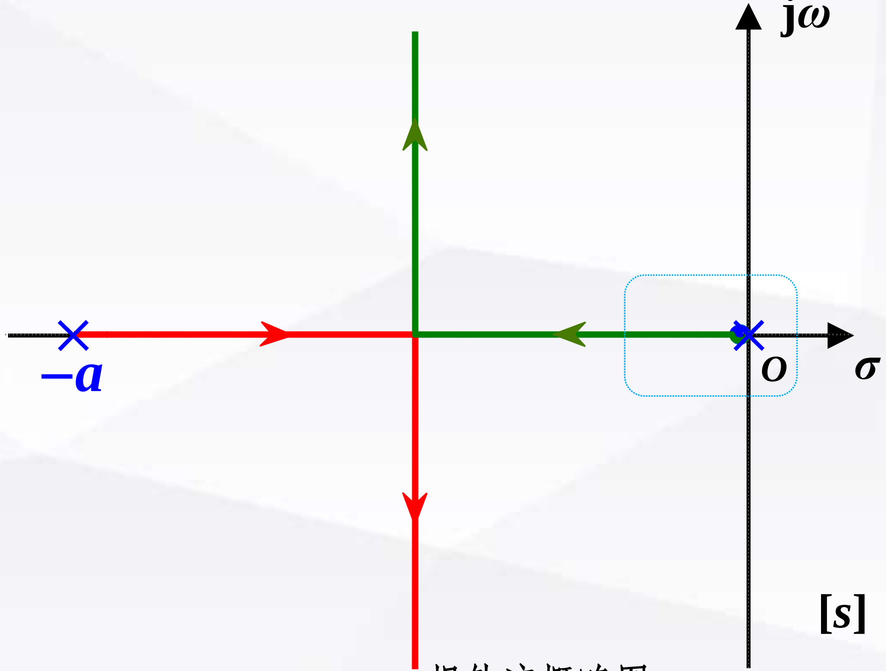


根轨迹概略图

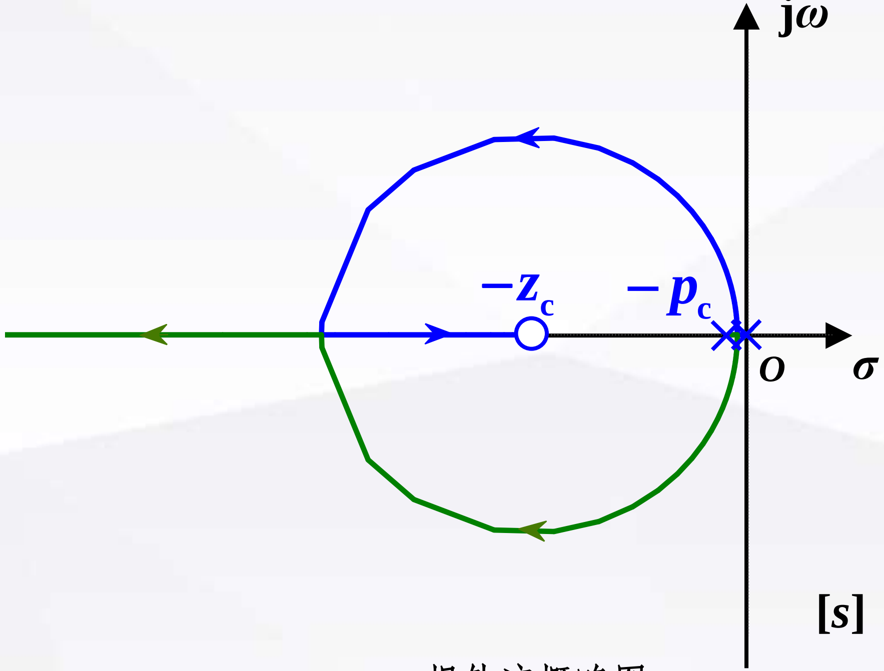
§ 4.7 根轨迹综合法

添加开环偶极子对根轨迹的影响

$$G(s)=\frac{K(s+z_c)}{s(s+a)(s+p_c)},\quad \frac{z_c}{p_c}=M$$



根轨迹概略图



根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法：校正装置

超前校正装置

添加开环零点，即PD控制，会产生两方面问题：一是单纯添加零点物理上较难以实现；二是对高频噪声具有放大作用，降低了信噪比。

在零点远处设置一个开环极点，形成了超前校正装置：

$$G_c(s)=\frac{s+z_d}{s+p_d}=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}$$

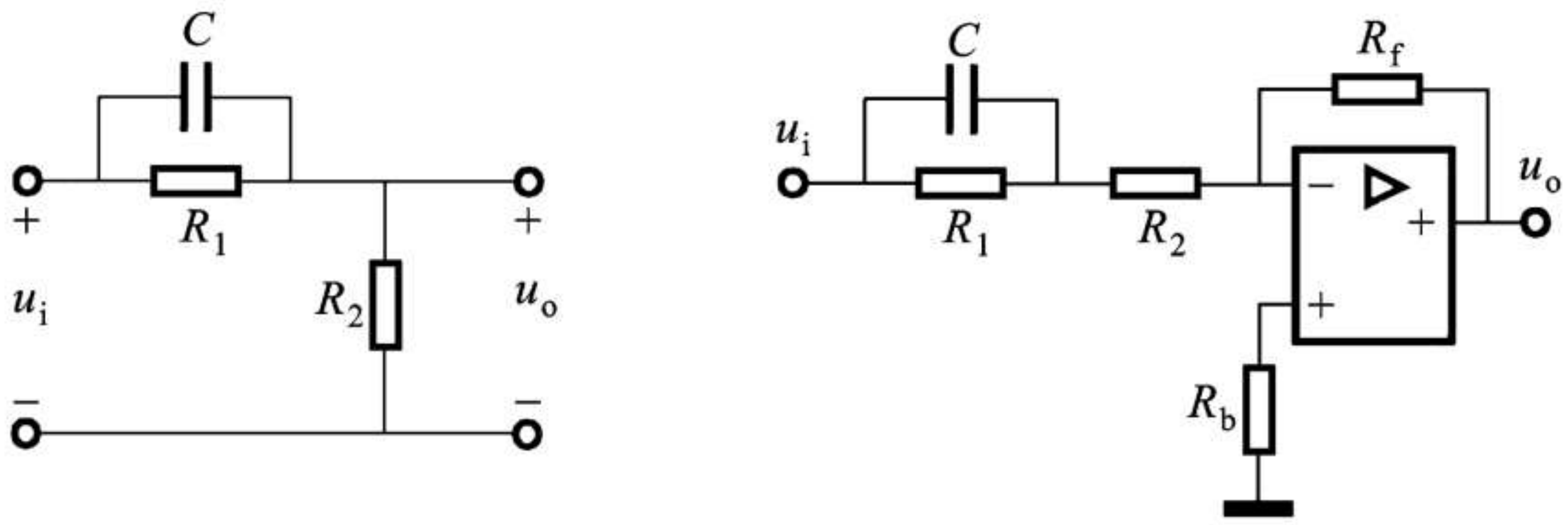
其中：$\alpha=p_d/z_d>1$为环节的分度系数，$T_d=1/p_d$为时间常数，其辐角φ_d恒正。

超前校正装置的特点

在反馈系统中引入超前校正装置对系统进行超前校正，利用的是该装置所提供的超前角，使得校正后系统的根轨迹主分支向左移动，进而有效的改善系统的暂态性能；缺点是可能存在增益衰减现象，降低系统的稳态精度。

超前校正装置的物理实现

硬件实现中最常见的是电气校正装置:



(a) 无源超前校正网络　　(b) 有源超前校正装置

迟后校正装置

引入PI控制可以改善系统的稳态特性，但不利于系统的暂态特性。然而，在原点附近添加一对开环偶极子，且$p_i<z_i$，则对系统的暂态特性几乎没有影响，此时PI控制就会演变为迟后校正装置：

$$G_c(s)=\frac{s+z_i}{s+p_i}=\frac{\beta T_i s+1}{T_i s+1}$$

其中：$\beta=p_i/z_i<1$为环节的分度系数，$T_i=1/p_i$为时间常数，其辐角φ_i恒负。

迟后校正装置的特点

在维持主导极点附近根轨迹主要分支形状不变的同时，有效提升系统的开环增益，提高的倍数约与β成反比，从而有效改善系统的稳态特性；缺点是使根轨迹主要分支略向右移动，影响系统暂态响应的快速性。

迟后超前校正装置

将迟后校正装置和超前校正装置组合在一起，可形成性能更加完善的校正装置，称为迟后超前校正装置：

$$G_c(s)=\frac{s+z_i}{s+p_i}\cdot\frac{s+z_d}{s+p_d}=\frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{\beta T_i s+1}{T_i s+1}\cdot\frac{\alpha T_d s+1}{T_d s+1}$$

其中：$\alpha>1$，$\beta<1$，$T_i>>T_d$。

迟后超前校正装置的特点

将迟后超前校正装置对系统进行串联校正时，既可以利用迟后校正装置的特性有效改善系统的稳态特性，又可以利用超前校正装置的特性有效改善系统的暂态特性，其本质可以视为一个带有滤波环节的PID控制器；需要指出，在实际物理实现中，两个分度系数α和β可能彼此相关，并不能独立选择。

§ 4.7 根轨迹综合法:串联校正

串联校正综合

基本思路：在反馈控制系统的前向通道上引入校正装置，利用其零极点改变系统开环零极点分布，使系统根轨迹在开环增益设计值下通过期望的闭环主导极点，从而使得校正后的系统具有所要求的性能。

串联校正的步骤

①根据给定的系统暂态性能指标，确定期望的闭环主导极点的位置。

②分析原系统性能与性能指标要求之间的差距，确定校正的基本形式：

绘制未校系统的根轨迹：

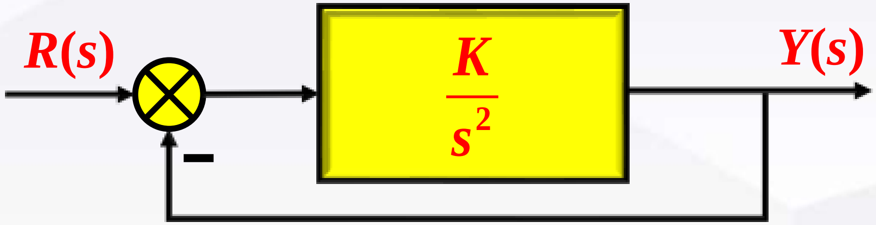
1.若期望的主导极点不在根轨迹上，则需综合校正装置；

2.若期望的主导极点在根轨迹上，则检验相应系统开环增益是否满足稳态特性要求；若不满足，则需在原点附近增加开环偶极子来提升系统的稳态特性。

③校验综合后系统是否满足稳态和暂态性能指标。

§ 4.7 根轨迹综合法

例： 考虑如下的单位负反馈系统：



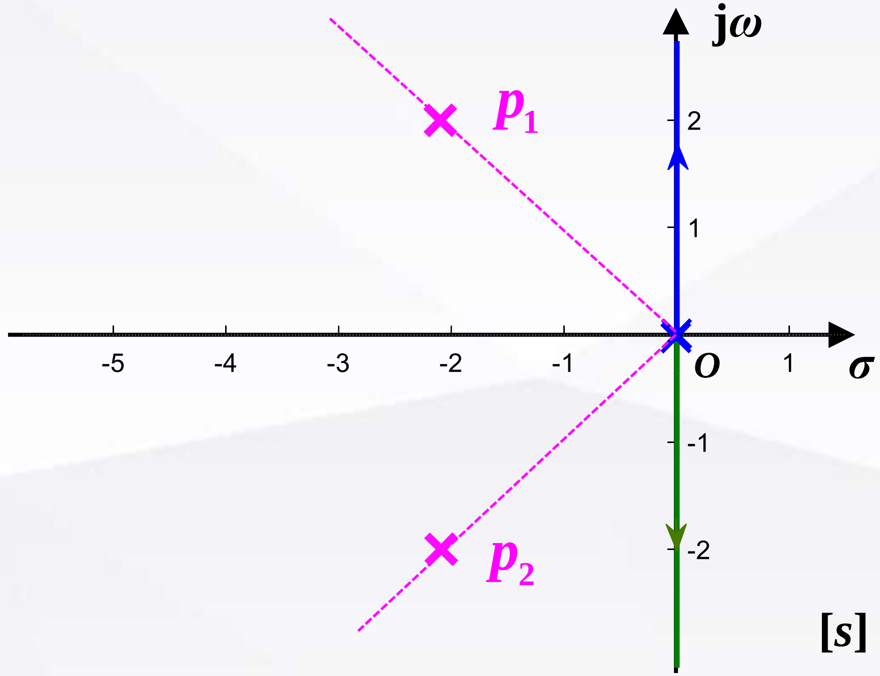
试对该系统进行串联校正，使校正后的系统具有性能指标：$\zeta = 0.707$，调节时间 $t_s \le 2\mathrm{s}$ (Δ=5%)。

解： ①根据给定性能指标，可选取校正后系统期望主导极点为：$p_{1,2}=-2\pm j2$。

②校正：绘制未校正系统根轨迹，如图所示。由根轨迹图可知需要引入超前校正装置。

设其传递函数为：

$$G_c(s)=\frac{s+z_d}{s+p_d}$$



根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法

选取 z_d=1，根据辐角条件有：

$$\theta_{z_d}-\theta_{p_d}-2\theta_{p_1}=(2k+1)\times180^{\circ}$$

即：

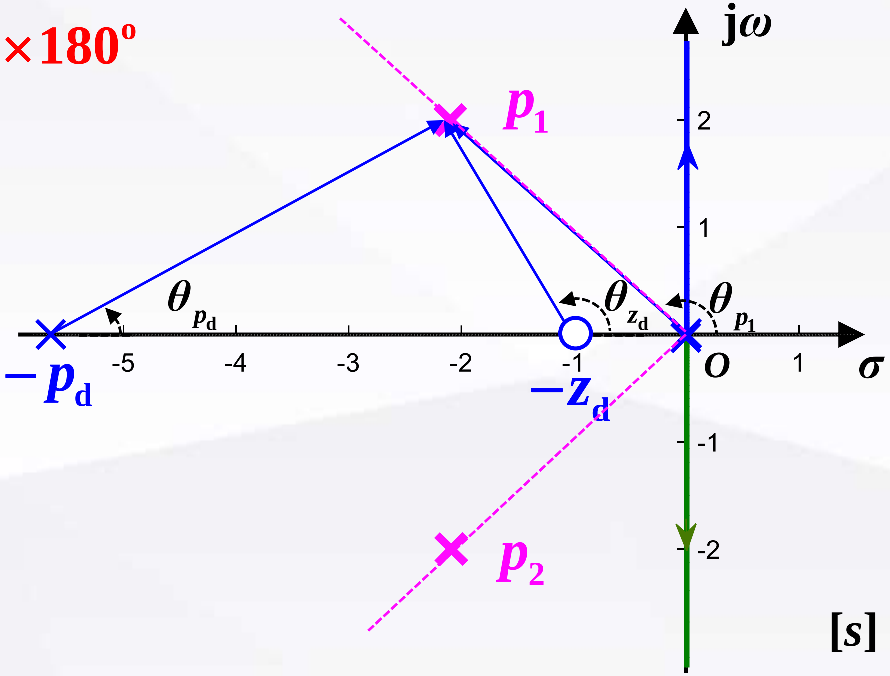
$$(180^{\circ}-\arctan 2)-\arctan\frac{2}{|-p_d-(-2)|}-2\times135^{\circ}=(2k+1)\times180^{\circ}$$

即：

$$\arctan 2+\arctan\frac{2}{|-p_d-(-2)|}=90^{\circ},\ k=-1$$

解得：p_d=6，故超前校正装置的传递函数为：

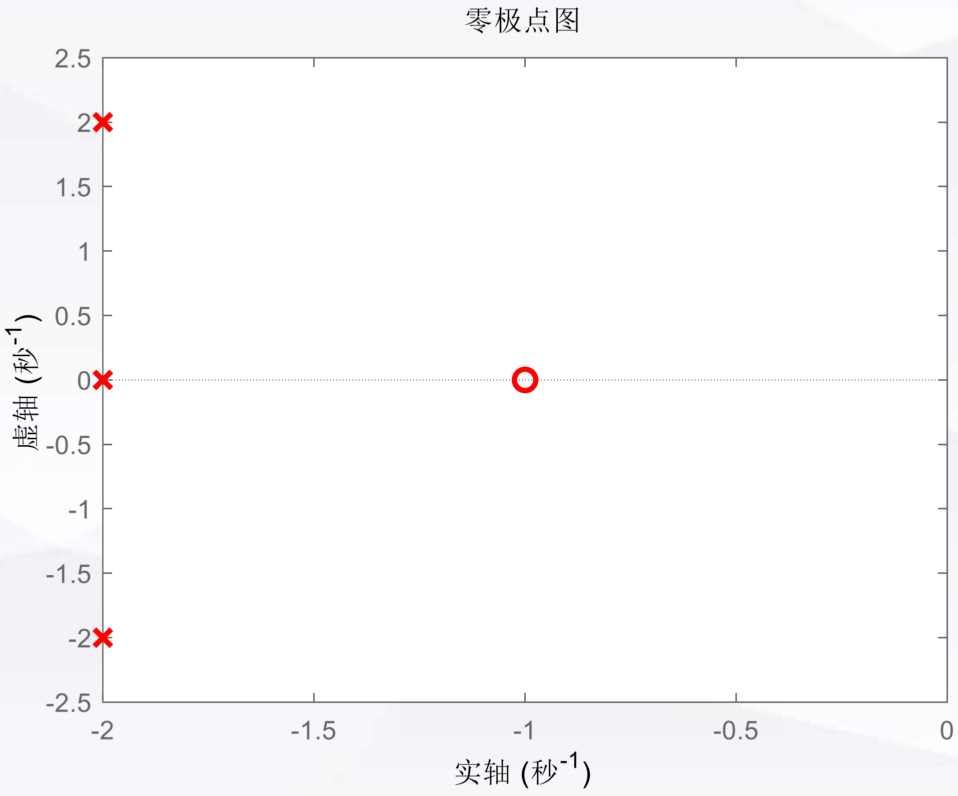
$$G_c(s)=\frac{s+1}{s+6}$$

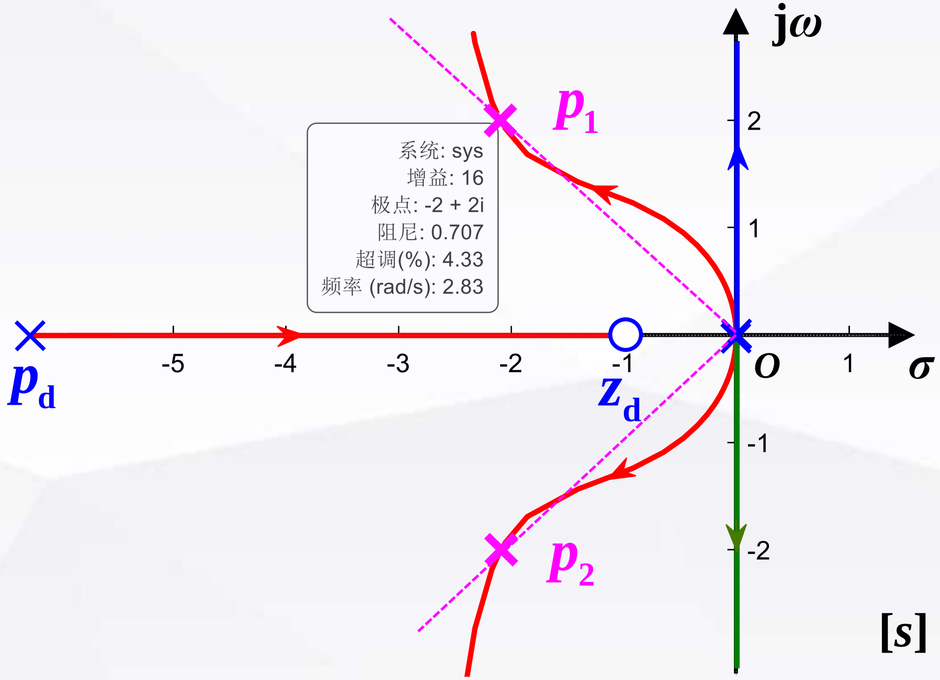


根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法

③校验：主要验证主导极点的主导性是否满足。当K=16时，系统有有一对复数闭环极点 $p_{1,2}=-2\pm j2$，和一个实数极点 $p_3=-2$，不能满足主导极点条件件，故校正装置无法满足要求。

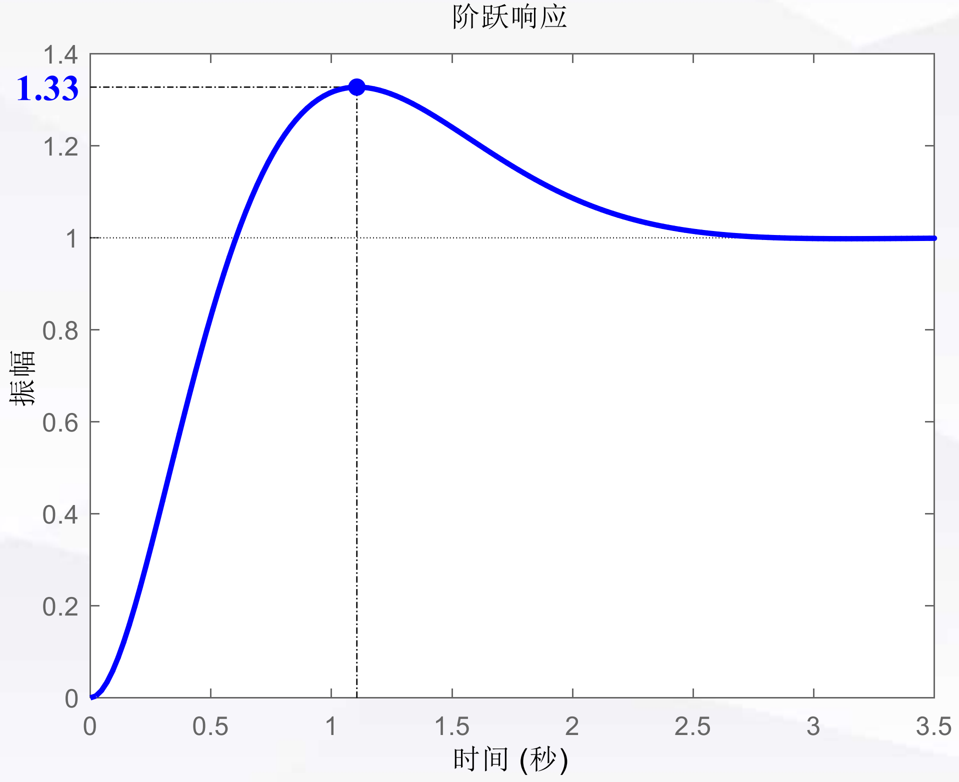


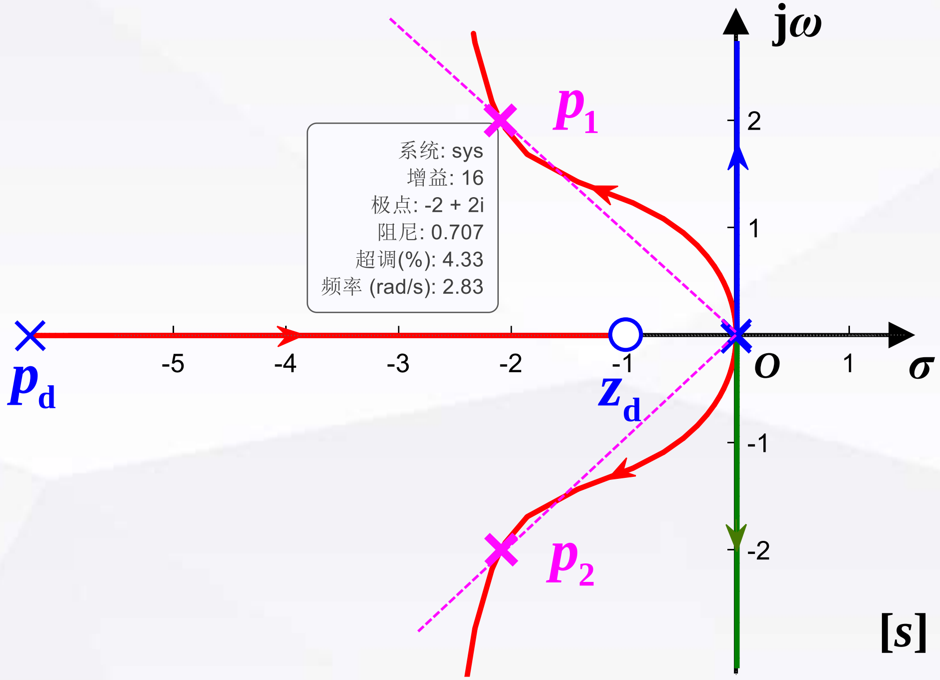


根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法

④讨论：主要验证主导极点的主导性是否满足。当K=16时，系统有一对复数闭环极点 $p_{1,2}=-2\pm j2$，和一个实数极点 $p_3=-2$，不能满足主导极点条件，故校正装置无法满足要求。原因：$\varphi_d=90°$，此时分度系数 $\alpha=p_d/z_d\to+\infty$。



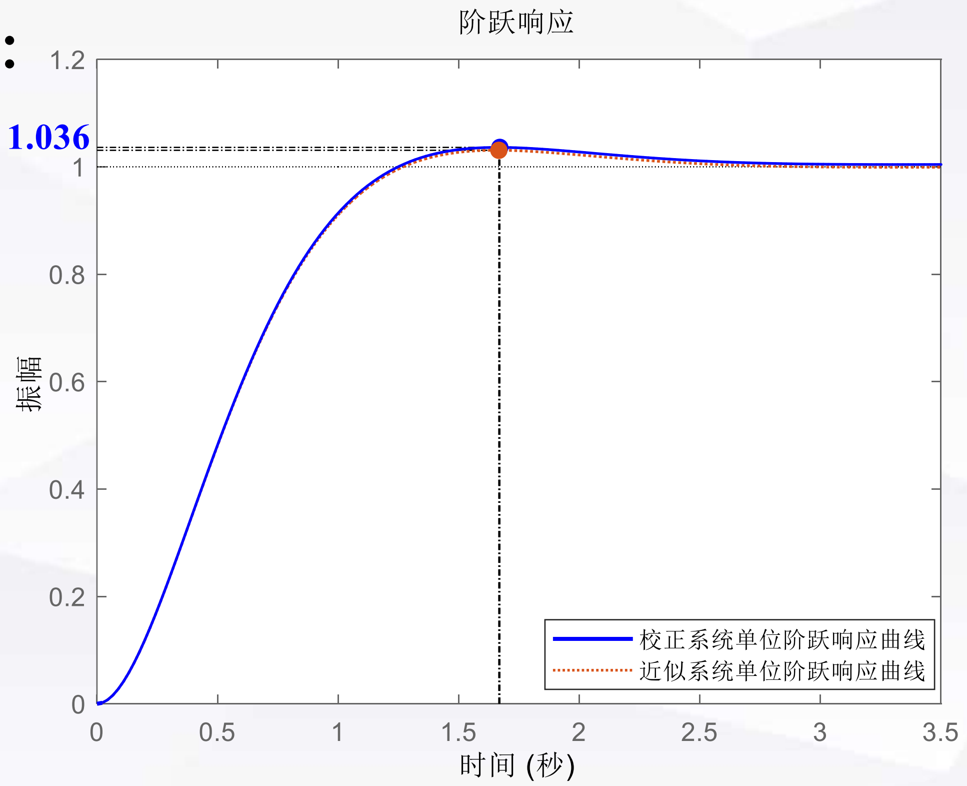


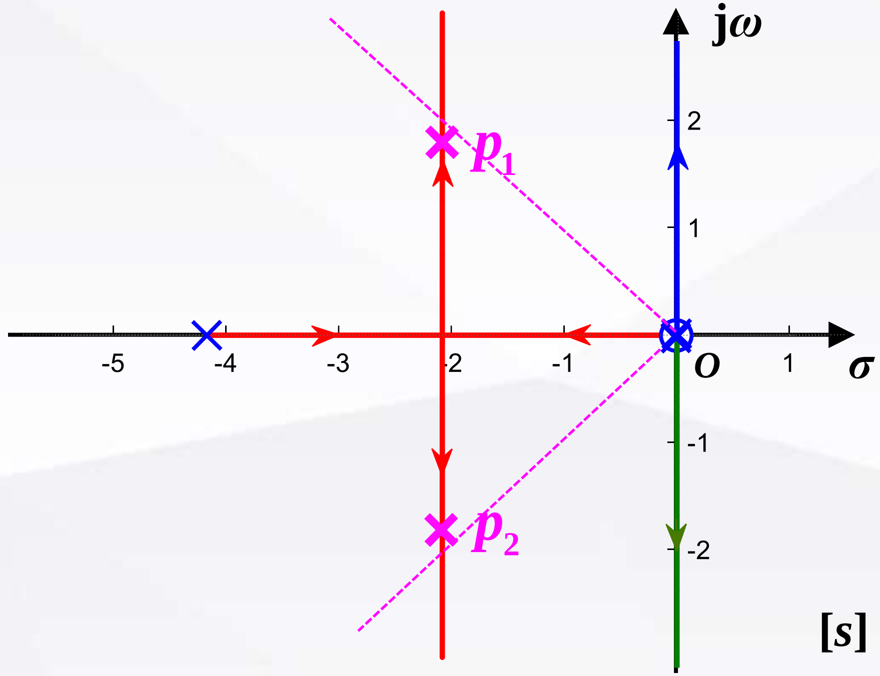
根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法

④校正：取z_d=0.01， p_d =4.2，则根轨迹如下。考虑留有一定余量，取K=8，此时系统有一对复数闭环极点 $p_{1,2}=-2.09\pm j1.89$，闭环实数零点$z=-0.01$和闭环实数极点$p=-0.0101$近似相消，故系统可以降阶为如下的二阶系统：$\tilde{G}_k(s)=\dfrac{1}{s(s+4.2)}$ 。

⑤校验：





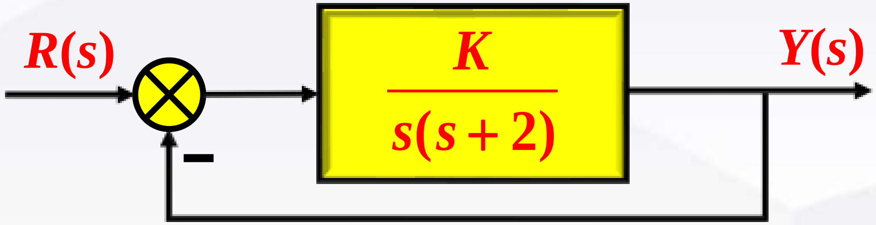
校正系统根轨迹概略图

§ 4.7 根轨迹综合法

⑥讨论：取z_d=0.01， p_d =4.2，系统开环增益下降$\alpha=p_d/z_d$=420倍（ α通常取3~5），因此开环增益衰减严重，大大降低了系统的稳态精度；因此，引入超前校正装置时需要系统开环增益储备较为充足，否则就需要附加放大器进行补偿。

§ 4.7 根轨迹综合法

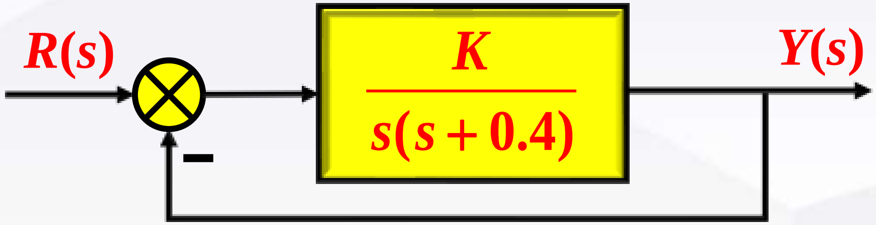
例： 考虑如下的单位负反馈系统：



试对该系统进行串联校正，使校正后的系统具有性能指标：ζ=0.5，ω_n=2，单位速度稳态误差e_s≤0.05。

§4.7 根轨迹综合法

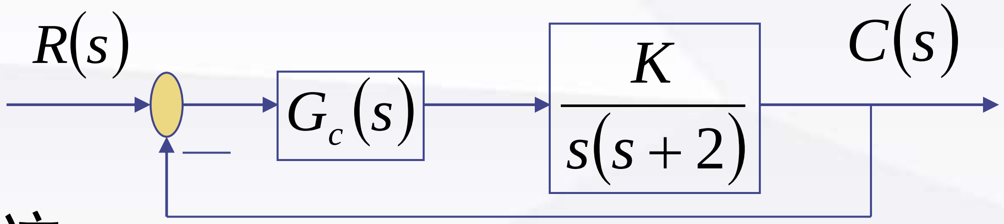
例： 考虑如下的单位负反馈系统：



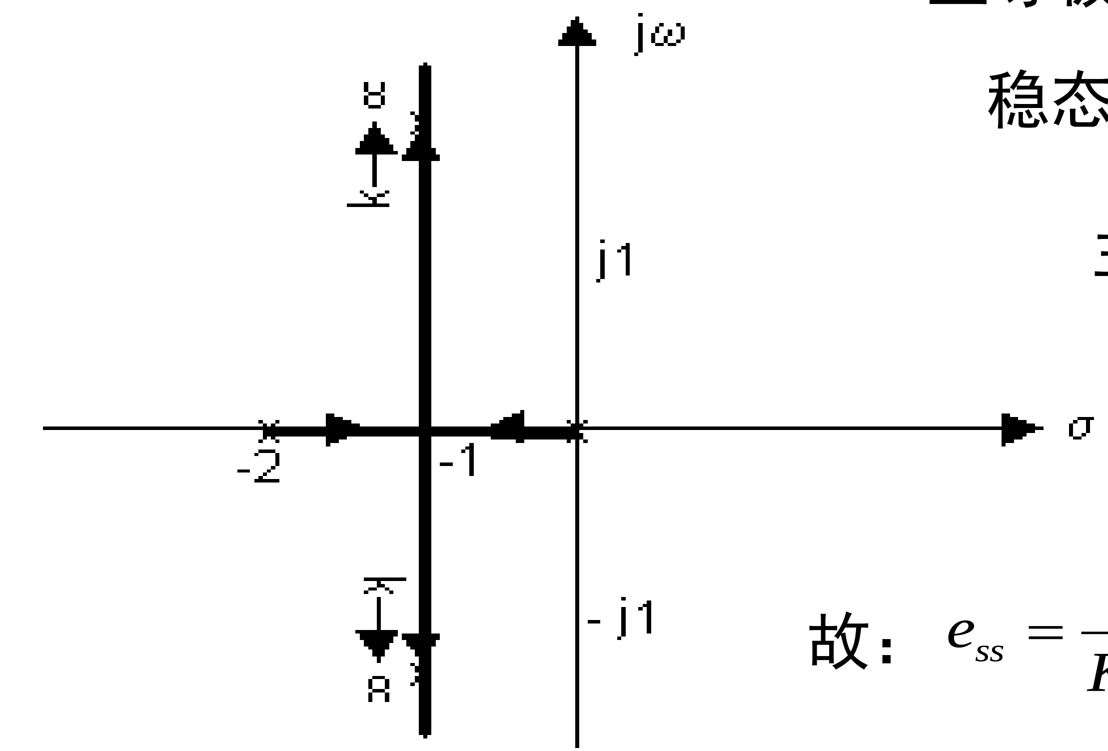
试对该系统进行串联校正，使校正后的系统具有性能指标：ζ=0.5，ω_n=0.4，单位速度稳态系数K_v≥40。

§ 4.7 根轨迹综合法

例4. 10



- 系统根轨迹：



主导极点参数： $\zeta = 0.5, \omega_n = 2$

稳态误差： $e_{ss}\Big|_{单位斜坡} \le 0.05$弧度

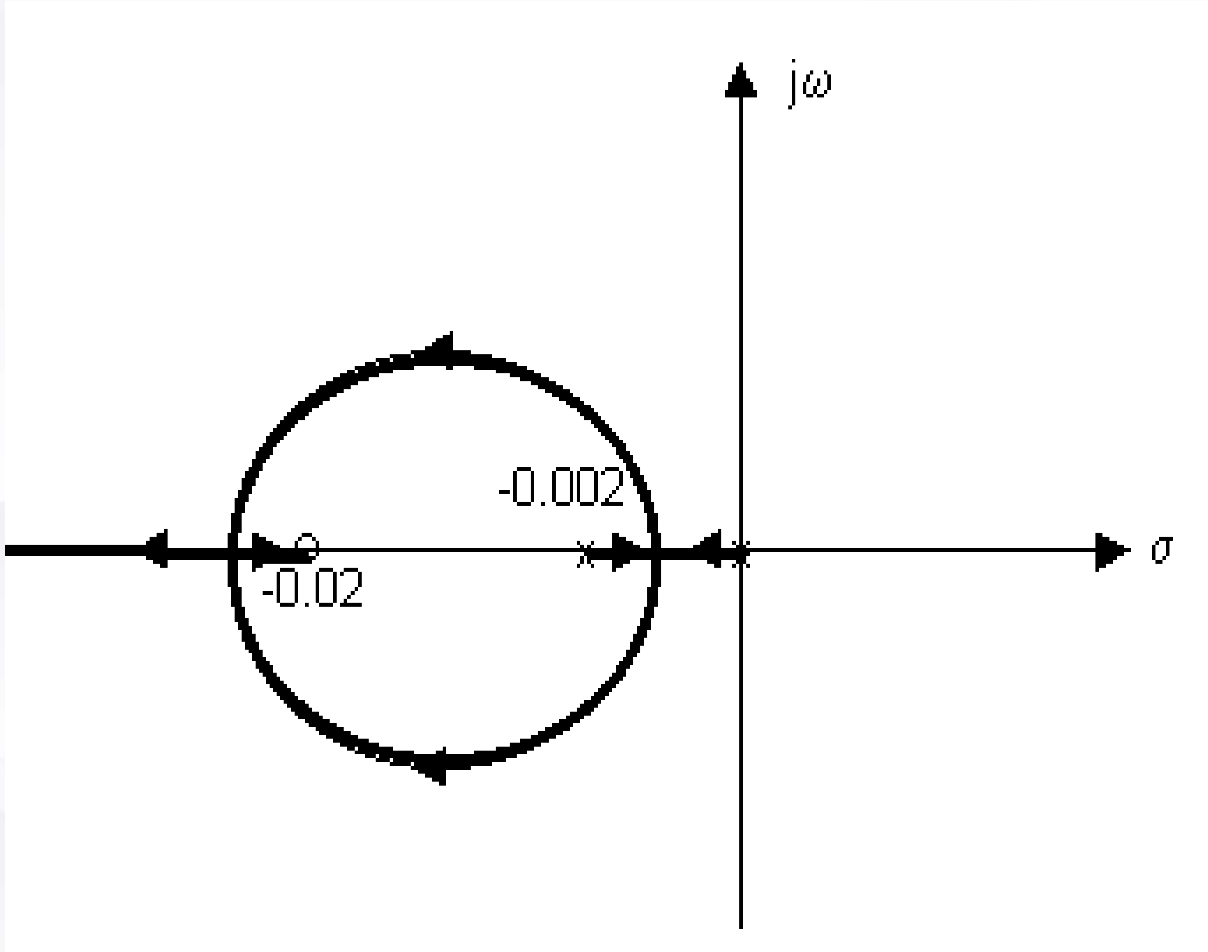
主导极点： $-1 \pm j1.732$

根据幅值条件，有

$$K = 4$$

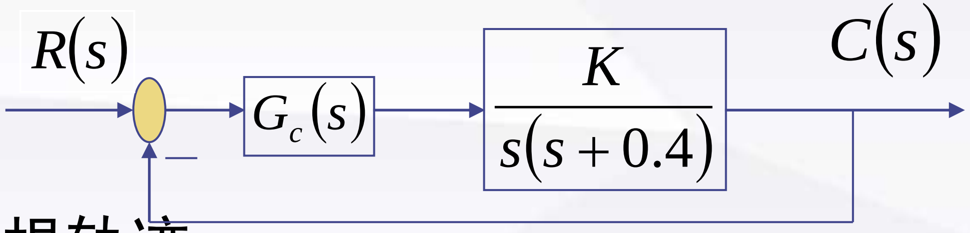
故： $e_{ss} = \dfrac{1}{K_v} = \dfrac{1}{\lim\limits_{s \to 0} sG(s)} = 0.5 > 0.05$

例 4.10 原点附近的跟轨迹

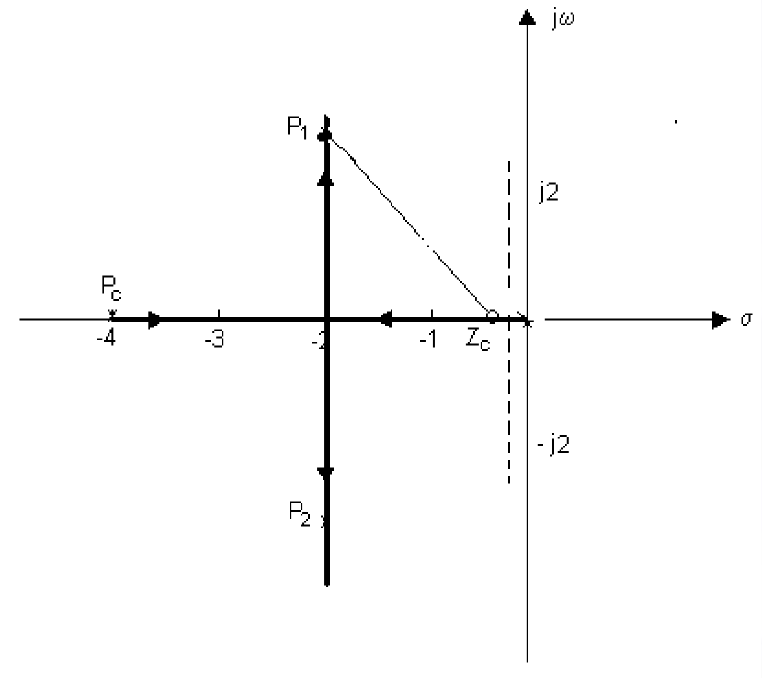


§ 4.7 根轨迹综合法

例4. 11



- 综合后系统根轨迹



闭环主导极点参数：$\zeta=0.5, \omega_n=4$

稳态误差指标： $K_v \geq 40$

主导极点：

$$-\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=-2\pm j3.14$$

选择控制器的零点为：$z_c=-0.4$，则

$$p_c=-4$$

§ 4.7 根轨迹综合法

控制器传函为：

$$G_c(s)=\frac{K(s+0.4)}{s+4}$$

此时系统在主导极点出的增益值为：

$$K=\left|s(s+4)\right|_{s=-2+j3.14}=16$$

系统速度误差系数为：$K_v=\lim\limits_{s\to 0}\frac{s+0.4}{s+4}\cdot\frac{16}{s+0.4}=4<40$

为此选择偶极子，使得

$$\frac{z_c^{'}}{p_c^{'}}=10,\qquad \text{如}\left(p_c^{'}=-0.01, z_c^{'}=-0.1\right)$$

控制器参数为：

$$G'(s)=\frac{s+0.1}{s+0.01}$$

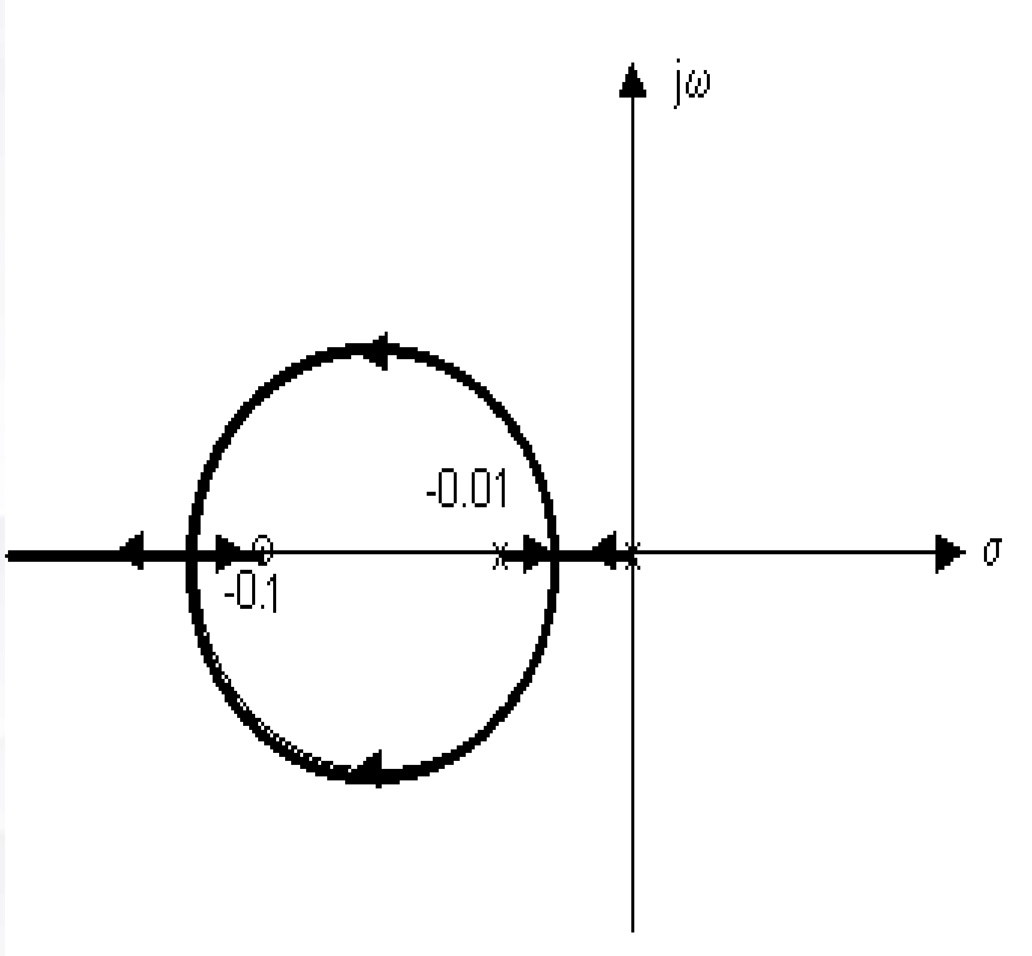
综合后系统的开环传函为：

$$KG_c(s)G'(s)G_p(s)=\frac{16(s+0.4)(s+0.1)}{s(s+0.4)(s+4)(s+0.01)}=\frac{16(s+0.1)}{s(s+4)(s+0.01)}$$

检验：

$$K_v=\lim_{s\to 0}\frac{16(s+0.1)}{s(s+4)(s+0.01)}=40$$

例4. 11原点附近的根轨迹



§ 4.7 根轨迹综合法

补充例题

1、试绘制单位反馈系统 $G(s)=\dfrac{K}{s(s+\alpha)}$ 当参数 α 变化时根轨迹

2、某单位反馈系统的开环传函为

$$G(s)=\frac{K}{s(s+1)(s+5)(s+6)}$$

试绘制系统的根轨迹，并确定
①使系统超调量为10%的K值；
②确定所有非主导闭环极点的分布，并评价得到①的结果所用的近似二阶系统；
③使系统稳定的K值范围。

§ 4.7 根轨迹综合法

3、单位反馈控制系统如下，系统以主导极点的阻尼比为0. 707来运行，综合一个控制器，使调整时间减少到原来的1/2。比较综合前后系统的动态和稳态特性。

$$G_K(s)=\frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+6)}$$

§ 4.7 根轨迹综合法

作业：

B4.26，B4.27，B4.28