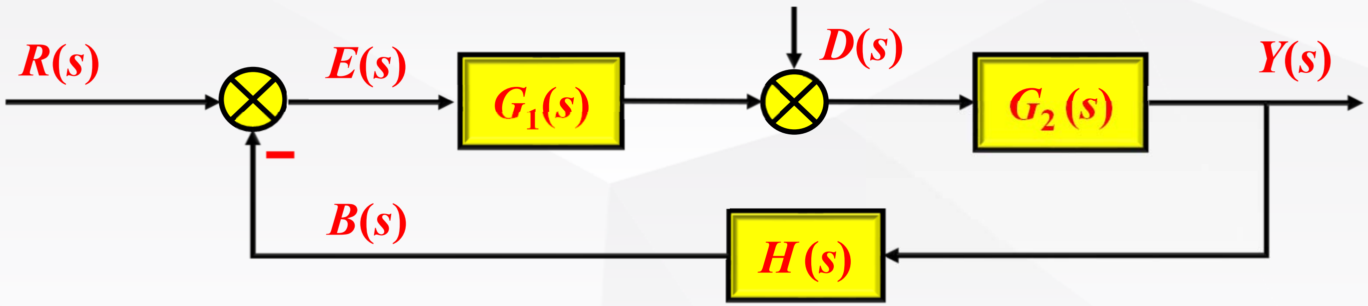
第四讲

作业：

B3.13(只做劳斯)， B3.14， B3.15

§ 2.3 反馈控制系统的传递函数

典型反馈控制系统中重要几个传递函数：



- 输入作用下闭环传递函数： $\Phi(s)=\dfrac{Y(s)}{R(s)}=\dfrac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$
- 干扰作用下闭环传递函数： $\Phi_d(s)=\dfrac{Y(s)}{D(s)}=\dfrac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$
- 闭环系统的开环传递函数： $G_k(s)=\dfrac{B(s)}{R(s)}=G_1(s)G_2(s)H(s)$
- 误差传递函数： $\Phi_e(s)=\dfrac{E(s)}{R(s)}=\dfrac{1}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}$

§ 2.3 反馈控制系统的传递函数

重要观察：

①特征方程 $\Delta=1+G_k(s)=0$是反应系统结构特性的不变量：

当系统无零极相消时，同一系统各种不同形式的闭环传递函数，无论以何种信号作为输入和输出，其分母始终是特征方程 $\Delta=1+G_k(s)=0$

②反馈的引入导致闭环系统的零极点分布发生变化：

$$G_k(s)=G_1(s)G_2(s)H(s)=\frac{N_1(s)N_2(s)N_H(s)}{M_1(s)M_2(s)M_H(s)}$$

$$\Phi(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_k(s)}=\frac{N_1(s)N_2(s)M_H(s)}{N_1(s)N_2(s)N_H(s)+M_1(s)M_2(s)M_H(s)}$$

- 闭环传递函数零点由前向通道传递函数零点和反馈通道传递函数极点组成；
- 闭环特征多项式由开环传递函数的分子多项式和分母多项式之和组成。

§ 2.3 反馈控制系统的传递函数

3）输入和干扰同时作用下的输出：

$$Y(s)=\frac{G_1(s)G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}R(s)+\frac{G_2(s)}{1+G_1(s)G_2(s)H(s)}D(s)$$

如果满足下列条件：

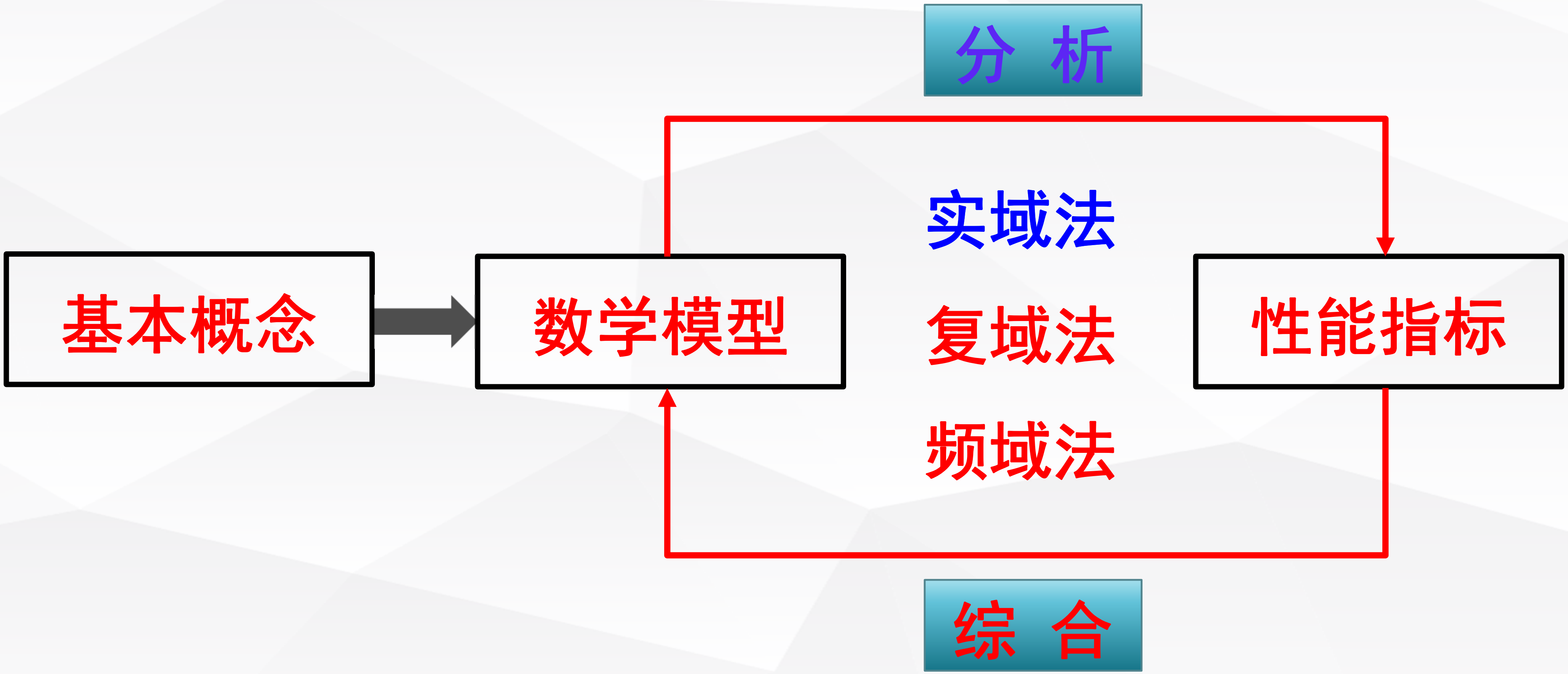
$$\begin{cases}|G_1(s)G_2(s)H(s)|\gg 1\\ |G_1(s)H(s)|\gg 1\end{cases}$$

则必然有：

$$Y(s)\approx\frac{1}{H(s)}R(s)$$

因此，如果是单位反馈系统 ***H*(s)=1**，此时输出信号可以完全复现输入信号。

本课程知识体系脉络图



第三章：控制系统的时域分析

§ 3.1 控制系统的稳定性分析

§ 3.2 控制系统的稳定性判据：劳斯判据

§ 3.3 控制系统的动态特性分析

§ 3.4 欠阻尼二阶系统动态特性分析

§ 3.5 控制系统的稳态特性分析

§ 3.6 利用MATLAB进行时域分析

时域法的作用和特点

时域法是最基本的分析方法,是学习复域法、频域法的基础

（1）直接在时间域中对系统进行分析校正，直观，准确；

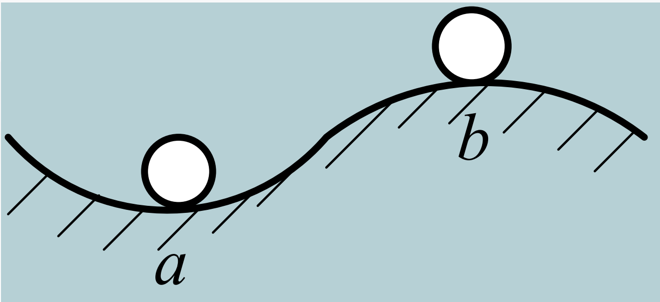
（2）可以提供系统时间响应的全部信息；

（3）基于求解系统输出的解析解，比较烦琐。

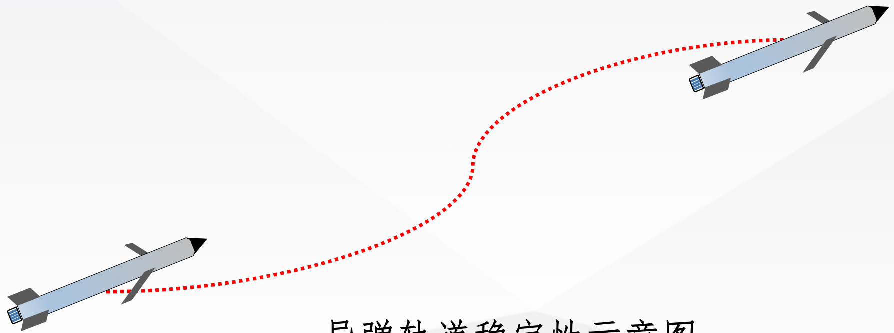
§3.1 控制系统的稳定性分析

运动稳定性

运动受到扰动时其状态将发生变化，若扰动除去后该运动能够恢复到原来的状态，称该运动是稳定的，否则称之为不稳定的。



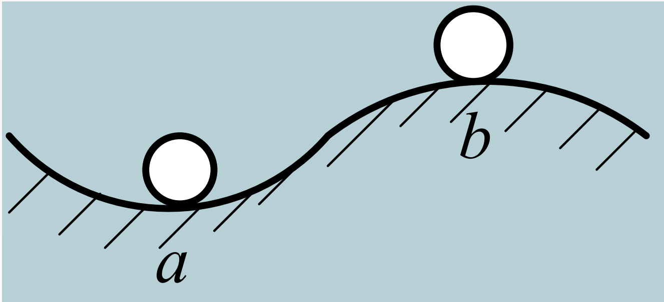
运动稳定性示意图



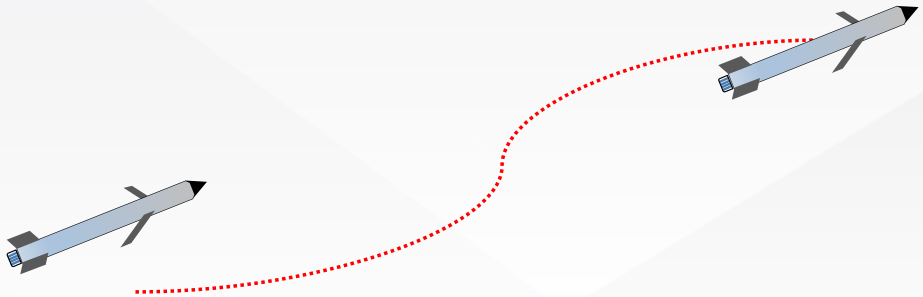
导弹轨道稳定性示意图

运动稳定性

运动受到扰动时其状态将发生变化，若扰动除去后该运动能够恢复到原来的状态，称该运动是稳定的，否则称之为不稳定的。



运动稳定性示意图

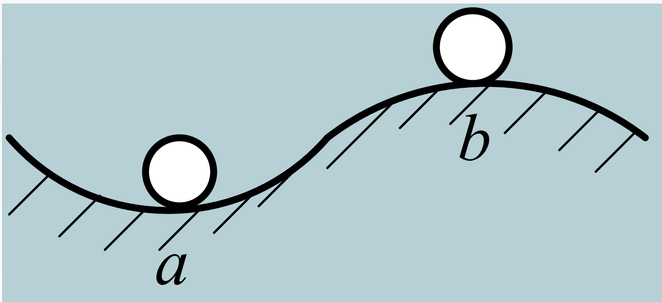


导弹轨道稳定性示意图

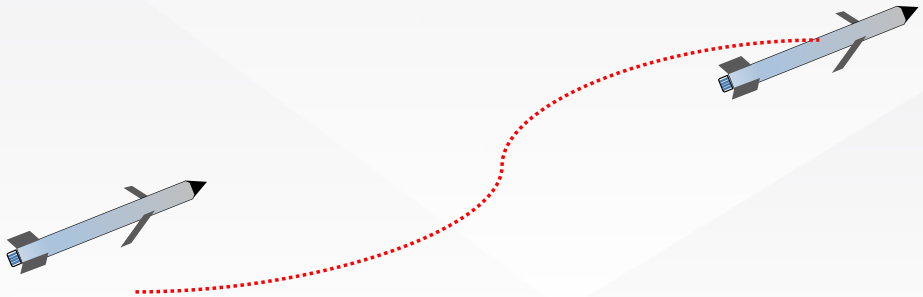
§ 3.1 控制系统的稳定性分析

运动稳定性

运动受到扰动时其状态将发生变化，若扰动除去后该运动能够恢复到原来的状态，称该运动是稳定的，否则称之为不稳定的。



运动稳定性示意图



导弹轨道稳定性示意图

稳定是控制系统正常工作的首要条件；分析、判定系统的稳定性，提出系统稳定条件是自动控制理论基本任务之一。

注：亚历山大·李雅普诺夫于1892年发表专著《论运动稳定性的一般问题》，全面建立了稳定性问题分析方法。

§ 3.1 控制系统的稳定性分析

李雅普诺夫稳定性 (*Lyapunov Stability*)

在系统的给定运动 $g(t)$ 的某个邻域 $\|x(t)-g(t)\|<h$ 内，若对于任意给定的正数 $\varepsilon\in(0,h)$ ，存在正数 $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$，使得对于任意初始状态 x_0 ，当 $\|x_0-g_0\|<\delta$ 时，则有

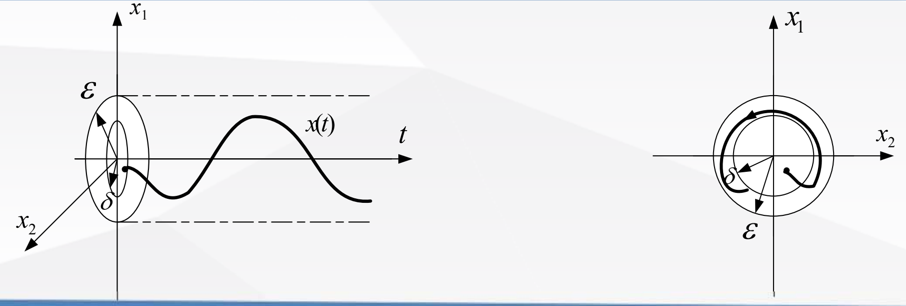
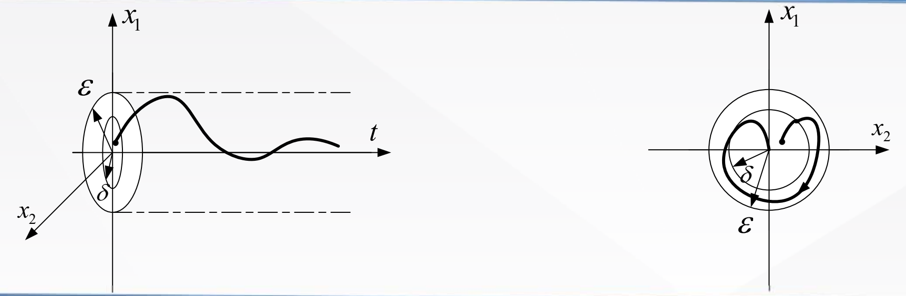
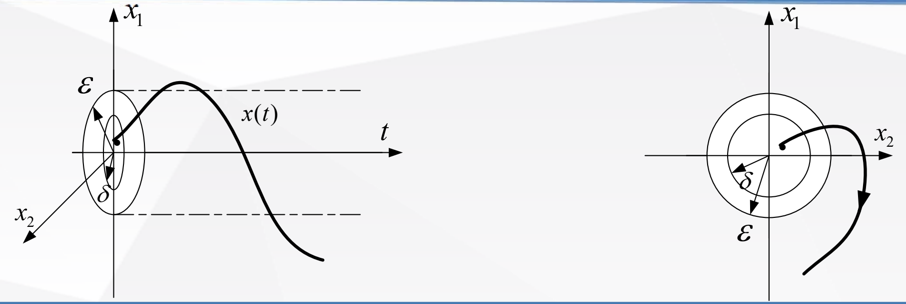
$$\|x(t)-g(t)\|<\varepsilon, \quad t\geq t_0$$

则称给定运动 $g(t)$ 在 $t=t_0$ 时刻是稳定的。

李雅普诺夫意义下的不稳定

对任意正数 δ 和任意给定正数 ε，至少存在一个初始状态 x_0 和时刻 $t_1> t_0$，对于给定运动 $g(t)$，当系统满足 $\|x_0-g_0\|<\delta$ 时，有 $\|x(t_1)-g(t_1)\|\geq\varepsilon$ ，则称给定运动 $g(t)$ 是不稳定的。

§3.1 控制系统的稳定性分析：图示

▪ 李雅普诺夫稳定 给定运动 $g(t)\equiv 0$	
▪ 李雅普诺夫渐近稳定 给定运动 $g(t)\equiv 0$ $\lVert x(t)-g(t)\rVert \to 0,\quad t\to+\infty$	
▪ 李雅普诺夫不稳定 给定运动 $g(t)\equiv 0$	

§ 3.1 控制系统的稳定性分析

内部稳定性(*Lyapunov Stability*)：零输入响应稳定性

线性控制系统的内部稳定性即李雅普诺夫渐近稳定；系统稳定性只需要考察由初始状态引起的零输入响应，又称零输入响应稳定性。

*分析：考虑如下的线性定常系统：

时域：$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du$

复域：$Y(s)=[C(sI-A)^{-1}B+D]U(s)$

设受扰运动x和给定运动g是由不同初始状态x_0和g_0产生的运动轨迹，则有

扰动方程：$\dot{z} = \dot{x} - \dot{g} = Ax + Bu - (Ag + Bu)$

$= Az$

· 误差变量z的运动轨迹与初始状态和系统矩阵A有关，与控制输入u无关

· 任何运动稳定性的讨论，都可归结为扰动方程零平衡态的稳定性研究

· 线性定常系统的稳定性取决于系统矩阵A的极点分布，其稳定性带有全局性质

§3.1 控制系统的稳定性分析

外部稳定性(*BIBO Stability*)：零状态响应稳定性

对任意有界外部输入系统的输出必有界；外部稳定性是从系统的输入输出关系考察稳定性的，而不考虑内部状态如何变化。为使得输入输出描述具备唯一性和有意义，总是假设初始状态为零，故又称零状态响应稳定性。

***分析**：线性定常系统在任意输入$u(t)$作用下产生的零状态相应为

$$y(t)=\int_{t_0}^{t} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$$

如果输入$\boldsymbol{u(t)}$有界$|\boldsymbol{u(t)}|\le \boldsymbol{M_1}<\infty$，则：

$$|y(t)|=\left|\int_{t_0}^{t} g(t)u(t-\tau)d\tau\right|\le M_1\int_{t_0}^{t}|g(\tau)|d\tau,\ \ \forall t\in[t_0,+\infty)$$

线性定常系统输出有界的充要条件是系统的单位脉冲响应是绝对可积的，等价于其传递函数$\boldsymbol{G(s)}$的极点均具有负实部。

§ 3.1 控制系统的稳定性分析

*稳定的充要条件证明(以互不相同的单根情形为例)

根据稳定性定义，若单位冲激响应 $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$，则系统是稳定的。

必要性：

$$\Phi(s)=\frac{N(s)}{\Delta(s)}=\frac{b_m(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)}$$

$$\Phi(s)=\frac{A_1}{s-\lambda_1}+\frac{A_2}{s-\lambda_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-\lambda_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{A_i}{s-\lambda_i}\quad(A_i\neq 0)$$

$$g(t)=A_1e^{\lambda_1 t}+A_2e^{\lambda_2 t}+\cdots A_ne^{\lambda_n t}=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\lambda_i t}$$

$$\lim_{t\to\infty}g(t)=\lim_{t\to\infty}\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\lambda_i t}=0\quad\Rightarrow\quad\lambda_i<0\quad i=1,2,\cdots,n$$

充分性：

$$\lambda_i<0\quad i=1,2,\cdots,n\quad\Rightarrow\quad g(t)=\sum_{i=1}^{n}A_ie^{\lambda_i t}\xrightarrow{t\to\infty}0$$

线性定常系统（内部）稳定的充要条件：

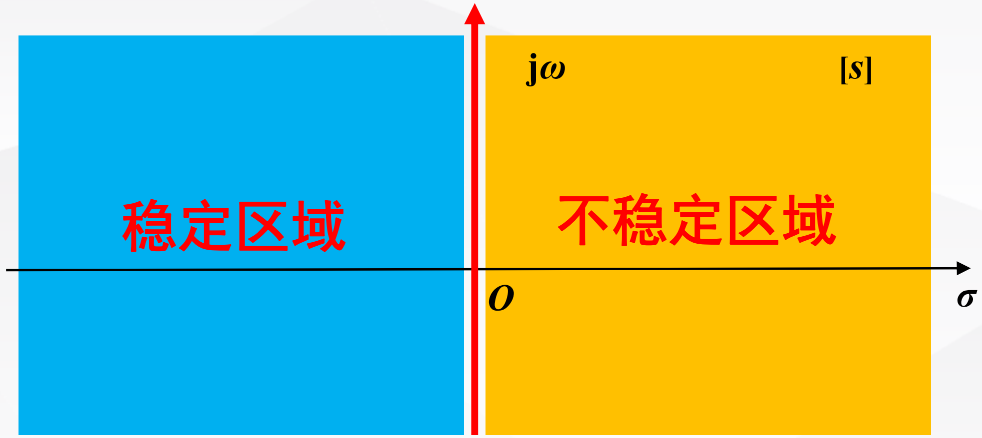
系统传递函数的所有闭环极点均具有负的实部，即所有闭环极点均严格位于左半s开平面。

§ 3.1 控制系统的稳定性分析

根据极点与稳定性的关系可将整个复平面划分为三个区域：

- 左半开平面的稳定区域
- 右半开平面的不稳定区域
- 虚轴为临界稳定

注：本课程将临界稳定归为不稳定



复平面稳定区域划分

线性定常系统内、外部稳定性关系：

①内部稳定则必然外部稳定：传递函数极点一般是系统极点的子集

注：$G(s)=C(sI-A)^{-1}B+D$ 与A的特征值对比

②无（不稳定）零极点相消时，二者是等价的

§3.2 控制系统的稳定性判据

判断系统的稳定性，等价于判断系统极点在s平面内的位置：

1）直接求极点

- 求特征方程的根，五次及以上的代数方程无求根公式
- 根轨迹法求根

2）间接求极点

- 代数判据：
  以特征多项式的系数为依据，经代数运算来判别系统极点的分布情况
- 几何判据：
  图解法，用开环频率特性来判别闭环极点分布
- 李亚普诺夫第二方法：
  将“动力学系统稳定其能量不增”加以拓展，引入广义“能量”函数来判别系统的稳定性

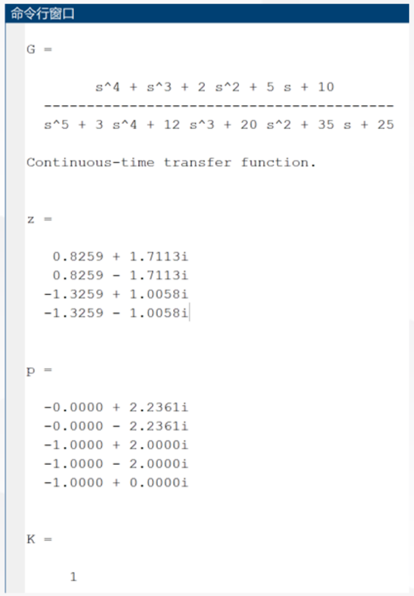
判断系统的稳定性，等价于判断系统极点在*s*平面内的位置：

3）Matlab软件求取极点和绘制零极点分布图。例如：

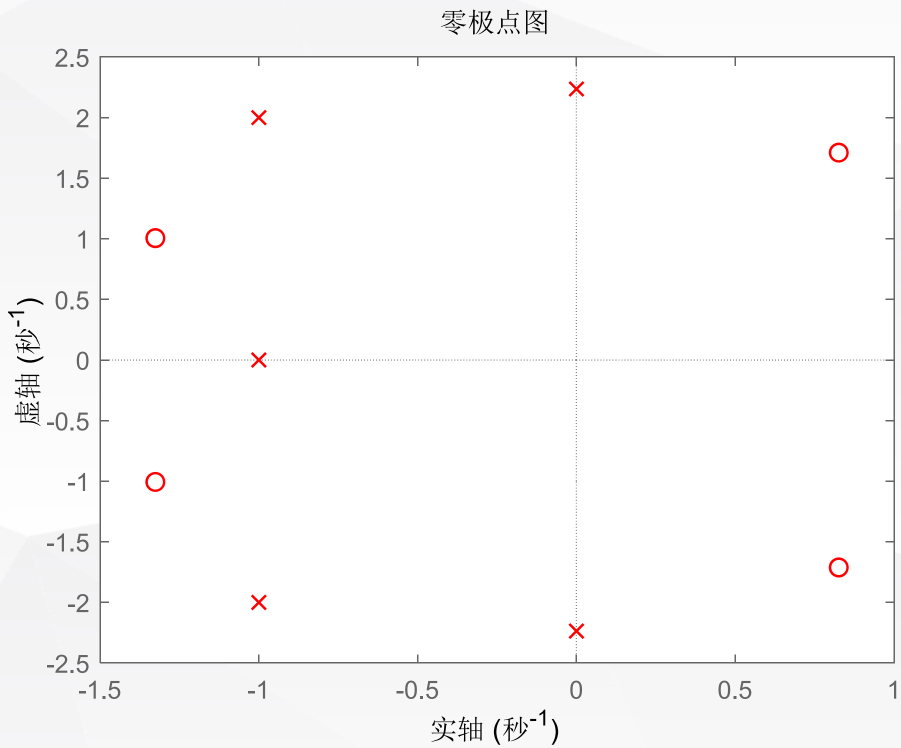
$$G(s)=\frac{s^4+s^3+2s^2+5s+10}{s^5+3s^4+12s^3+20s^2+35s+25}$$

Matlab代码：

```
num=[1 1 2 5 10];
den=[1 3 12 20 35 25];
G=tf(num,den)
[z,p,K]=tf2zp(num,den)
pzmap(G)
```



```
命令行窗口
G =

      s^4 + s^3 + 2 s^2 + 5 s + 10
  ----------------------------------------
  s^5 + 3 s^4 + 12 s^3 + 20 s^2 + 35 s + 25

Continuous-time transfer function.


z =

   0.8259 + 1.7113i
   0.8259 - 1.7113i
  -1.3259 + 1.0058i
  -1.3259 - 1.0058i


p =

  -0.0000 + 2.2361i
  -0.0000 - 2.2361i
  -1.0000 + 2.0000i
  -1.0000 - 2.0000i
  -1.0000 + 0.0000i


K =

     1
```



§3.2 控制系统的稳定性判据：根与系数关系定理

设线性定常系统的特征方程式为： $\Delta(s)=a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$

系统的n个极点分别为：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ ， 则有： $a_n(s-\lambda_1)(s-\lambda_2)\cdots(s-\lambda_n)=0$

两式同次幂项的系数相等：

$$
\begin{cases}
\dfrac{a_{n-1}}{a_n} = -(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n) = -\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \\
\dfrac{a_{n-2}}{a_n} = (\lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\cdots+\lambda_{n-1}\lambda_n) = (-1)^2\sum_{i,j=1,i\neq j}^{n}\lambda_i\lambda_j \\
\dfrac{a_{n-3}}{a_n} = (-1)^3\sum_{i,j,k=1,i\neq j\neq k}^{n}\lambda_i\lambda_j\lambda_k \\
\vdots \\
\vdots \\
\dfrac{a_0}{a_n} = (-1)^n\prod_{i=1}^{n}\lambda_i
\end{cases}
$$

分析1：$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$全部在$s$左半开平面须：

（1）全部系数不为零

（2）全部系数具有相同的符号

分析2：对于一阶和二阶系统，系统是稳定的当且仅当其特征多项式的系数是同号的。

§3.2 控制系统的稳定性判据：劳斯判据

劳斯判据提出了判别系统稳定性的充分必要条件；不仅能判别系统稳定性，还能确定在s的左、右半平面内系统极点的个数。

（1）将系统特征多项式写成s的降幂形式：

$$\Delta(s)=a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0$$

（2）构造劳斯表：

s^n	a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	$\cdots$
s^{n-1}	a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	$\cdots$
s^{n-2}	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
s^{n-3}	c_1	c_2	c_3	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$			
s^0	a_0			

其中：

$$b_1=-\frac{\begin{vmatrix}a_n & a_{n-2}\\ a_{n-1} & a_{n-3}\end{vmatrix}}{a_{n-1}},b_2=-\frac{\begin{vmatrix}a_n & a_{n-4}\\ a_{n-1} & a_{n-5}\end{vmatrix}}{a_{n-1}},\cdots$$

$$c_1=-\frac{\begin{vmatrix}a_{n-1} & a_{n-3}\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}}{b_1},c_2=-\frac{\begin{vmatrix}a_{n-1} & a_{n-5}\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}}{b_1},\cdots$$

§3.2 控制系统的稳定性判据：劳斯判据

劳斯判据：

系统稳定性可由劳斯表的第一列元素的符号来判断：

- 若第一列元素符号全为正号，则极点全部位于复平面左半开平面内，系统稳定
- 若不满足第一条，系统是不稳定的（含临界稳定）
- 复平面的右半开平面内的系统极点个数，等于第一列元素的符号改变次数

构造劳斯表时的两个特殊情况及处理：

①若某行的第一列元素算出为零但该行不全为零时，将零替换为ε继续计算

②有一行元素全为零，该行须基于上一行构造辅助方程求一次导数，采用求导后方程的系数进行替换

劳斯判据的应用：

①判断系统是否稳定

②相对稳定性分析

③分析系统参数变化对稳定性的影响，给出系统稳定时参数的取值范围

§3.2 控制系统的稳定性判据：劳斯判据

例1： $\Delta(s) = s^4 + 5s^3 + 7s^2 + 2s + 10$

解： 列劳斯表

$$
\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 7 & 10 \\
s^3 & 5 & 2 & \\
\hline
s^2 & \frac{33}{5} & 10 & \\
s^1 & -\frac{184}{33} & & \\
s^0 & 10 & &
\end{array}
$$

$$-\frac{1\times 2-5\times 7}{5}=\frac{33}{5}$$

$$-\frac{1\times 0-5\times 10}{5}=10$$

$$-\frac{5\times 10-33/5\times 2}{33/5}=-\frac{184}{33}$$

$$-\frac{33/5\times 0-(-184/33\times 10)}{-184/33}=10$$

劳斯表第一列元素变号 2次，有2个正实部的根，系统不稳定。

§3.2 控制系统的稳定性判据：劳斯判据

例2： 已知 $\Delta = s^3 - 3s + 2$ 判定在右半s开平面的极点个数。

解： 列劳斯表

s^3	1	-3
s^2	ε	2
s^1	$-\infty$	
s^0	2	

$$-\frac{1\times 2-(-3\times\varepsilon)}{\varepsilon} = -\infty$$

$$-\frac{\varepsilon\times 0-(-2\times\infty)}{-\infty} = 2$$

若某行第一列元素为0，而该行元素不全为0时，将0改为ε继续运算。

劳斯表第一列元素变号 2次，有2个正实部的根，系统不稳定。

§ 3.2 控制系统的稳定性判据：劳斯判据

例3： $\Delta(s)=s^5+3s^4+12s^3+20s^2+35s+25=(s\pm j\sqrt{5})(s+1)(s+1\pm j2)$

解： 列劳斯表

s^5	1	12	35
s^4	3	20	25
s^3	$\frac{16}{3}$	$\frac{80}{3}$	
s^2	5	25	
s^1	10	0	
s^0	25		

$-\frac{1\times20-3\times12}{3}=\frac{16}{3}$ $\quad -\frac{1\times25-3\times35}{3}=\frac{80}{3}$

$-\frac{3\times80-16\times20}{16}=5$ $\quad -\frac{3\times0-16\times25}{16}=25$

$-\frac{16\times25-5\times80}{5\times3}=0$ $\quad -\frac{5\times0-10\times25}{10}=25$

出现全零行时：用上一行元素组成辅助方程，关于s求导一次，用新方程的系数代替全零行系数，继续运算

列辅助方程：$5s^2+25=0$

求一阶导数：$\frac{d}{ds}\left(5s^2+25\right)=10s$

注：出现全零行时，特征方程存在一些大小相等符号相反、关于原点对称的实根或者共轭复根。

§ 3.2　控制系统的稳定性判据：劳斯判据

例4： $\Delta(s)=s^5+2s^4-s-2=(s+2)(s+1)(s-1)(s\pm j)=0$

解： 列劳斯表

s^5	1	0	-1
s^4	2	0	-2
s^3	8	0	
s^2	ε	-2	
s^1	$\frac{16}{\varepsilon}$		
s^0	-2		

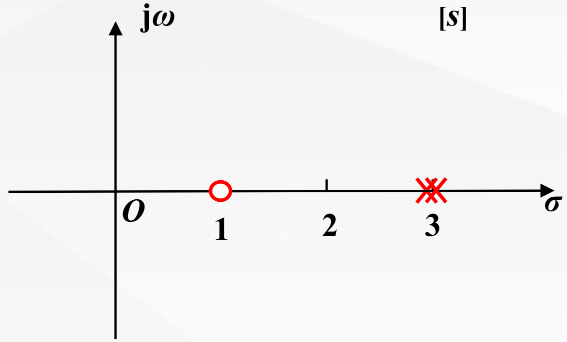
列辅助方程： $2s^4-2=0$

$$\frac{d}{ds}\left(2s^4-2\right)=8s^3=0$$

第一列元素变号一次，有一个具有正实部的根，系统不稳定

§3.2 控制系统的稳定性判据：劳斯判据

例5： 某单位负反馈系统的开环零、极点分布如图所示，判定系统能否稳定；若能稳定，试确定相应开环增益K的范围。



系统的开环零极点分布图

解： 依题意有

$$G_k(s)=\frac{K(s-1)}{(s/3-1)^2}=\frac{9K(s-1)}{(s-3)^2}$$

则闭环系统特征方程为

$$\Delta(s)=(s-3)^2+9K(s-1)=s^2+(9K-6)s+9(1-K)$$

对于二阶系统，仅需所有系数为正即可，故有

$$\begin{cases}9K-6>0\\1-K>0\end{cases}\Rightarrow\quad\frac{2}{3}<K<1$$

系统稳定时开环增益取值范围是：$K\in(2/3,1)$.

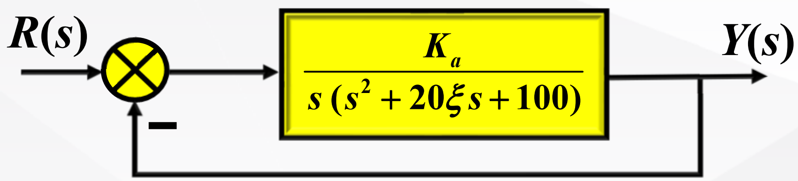
系统闭环稳定与开环稳定之间没有直接关系！

例6：系统结构图如下所示：

(1)确定使系统稳定的参数（K,ξ）的范围，K是开环增益；

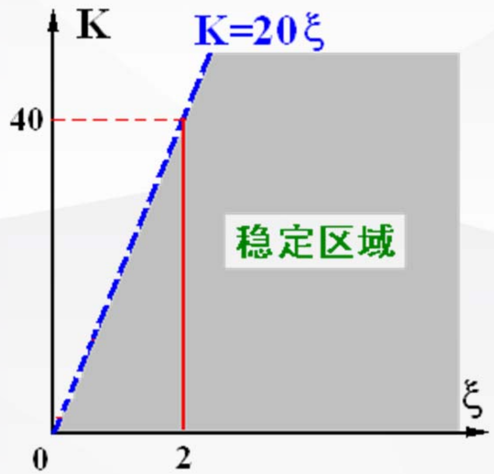
(2)当$x=\xi$时，确定使全部极点均位于$s=-1$之左的K值范围。

解：(1) $G_k(s)=\dfrac{K_a}{s(s^2+20\xi s+100)}$　　$K=\dfrac{K_a}{100}$



$$\Delta(s)=s^3+20\xi s^2+100s+100K$$

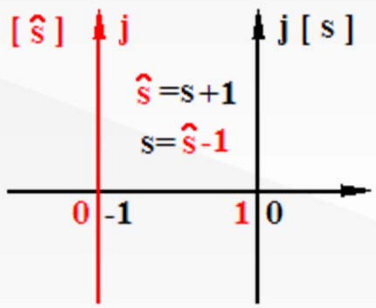
s^3	1	100	
s^2	20ξ	$100K$	$\Rightarrow\ \xi>0$
s^1	$\dfrac{2000\xi-100K}{20\xi}$	0	$\Rightarrow\ K<20\xi$
s^0	$100K$		$\Rightarrow\ K>0$



§3.2 控制系统的稳定性判据：劳斯判据

(2)当 ξ=2 时，确定使全部极点均位于s=－1之左的K值范围。

当 ξ=2 时，进行平移变换：$s=\hat{s}-1$



$$\Delta(s)=s^3+20\times 2\,s^2+100\,s+100K$$

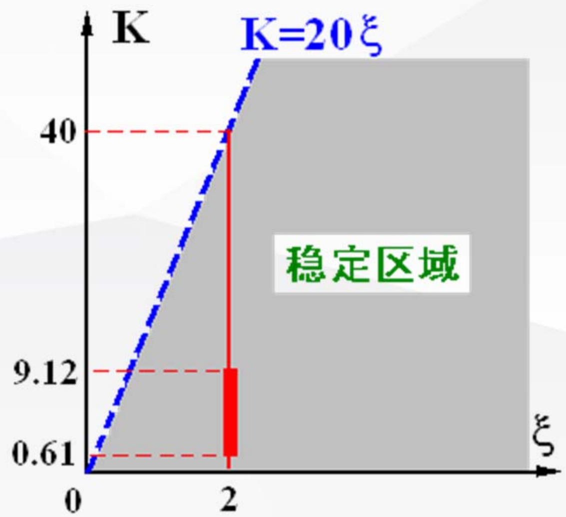
$$\Big\downarrow\ s=\hat{s}-1$$

$$\Delta(\hat{s})=(\hat{s}-1)^3+40\,(\hat{s}-1)^2+100(\hat{s}-1)+100K$$

$$=\hat{s}^3+37\,\hat{s}^2+23\,\hat{s}+(100K-61)$$

$\hat{s}^3$	1	23
$\hat{s}^2$	37	$100K-61$
$\hat{s}^1$	$\dfrac{912-100K}{37}$	0
$\hat{s}^0$	$100K-61$	

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow\ K<9.12\\ \Rightarrow\ K>0.61\end{array}\right\}\Rightarrow\ \underline{0.61<K<9.12}$$



课堂随练

采用劳斯判据判定稳定性并求出其所有的极点：

$$D(s) = s^5 + 2s^4 - s - 2$$