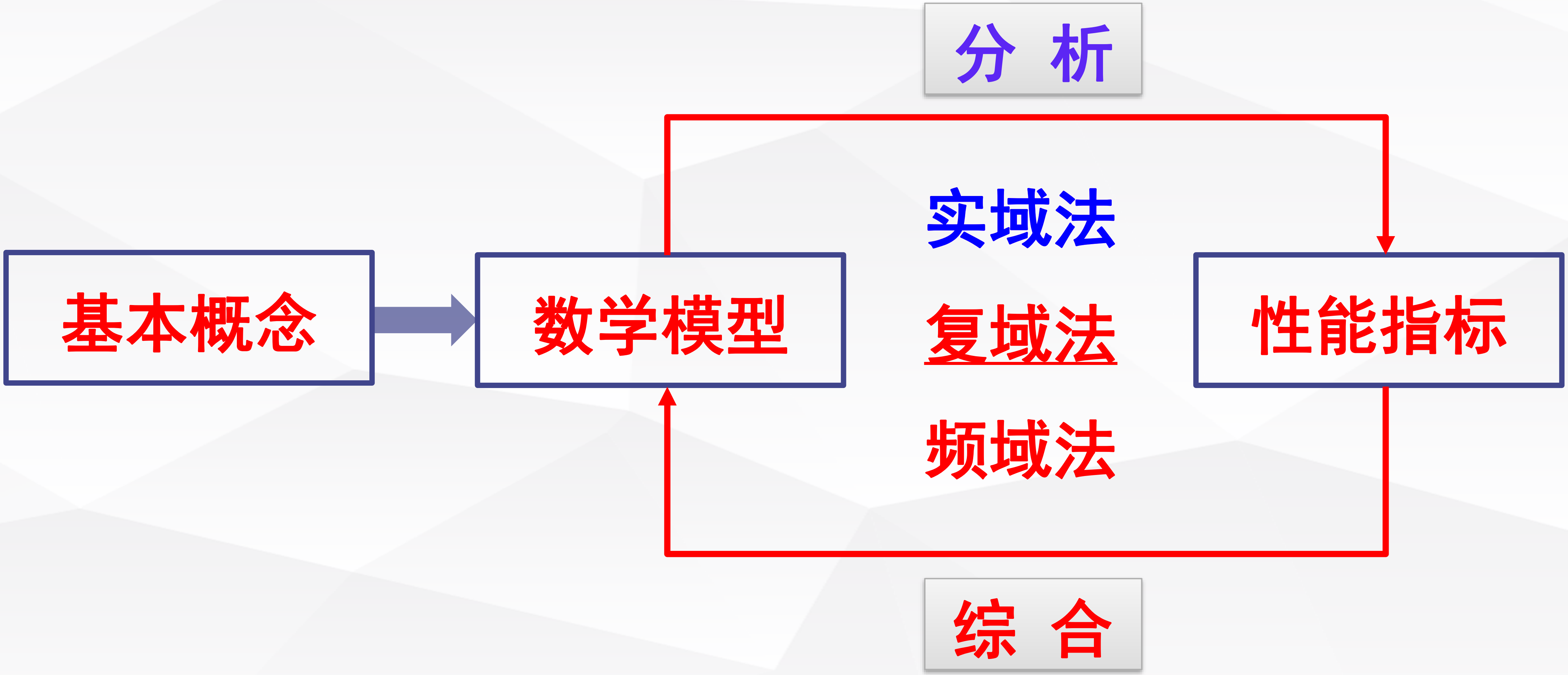
第七讲

作业：

B4.1，B4.4，B4.5，B4.7

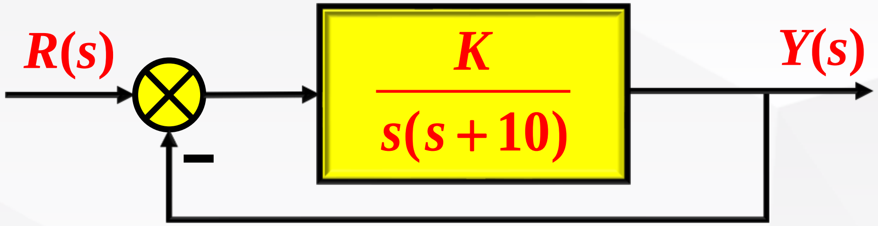
本课程知识体系脉络图



第四章：控制系统的复数域分析与综合

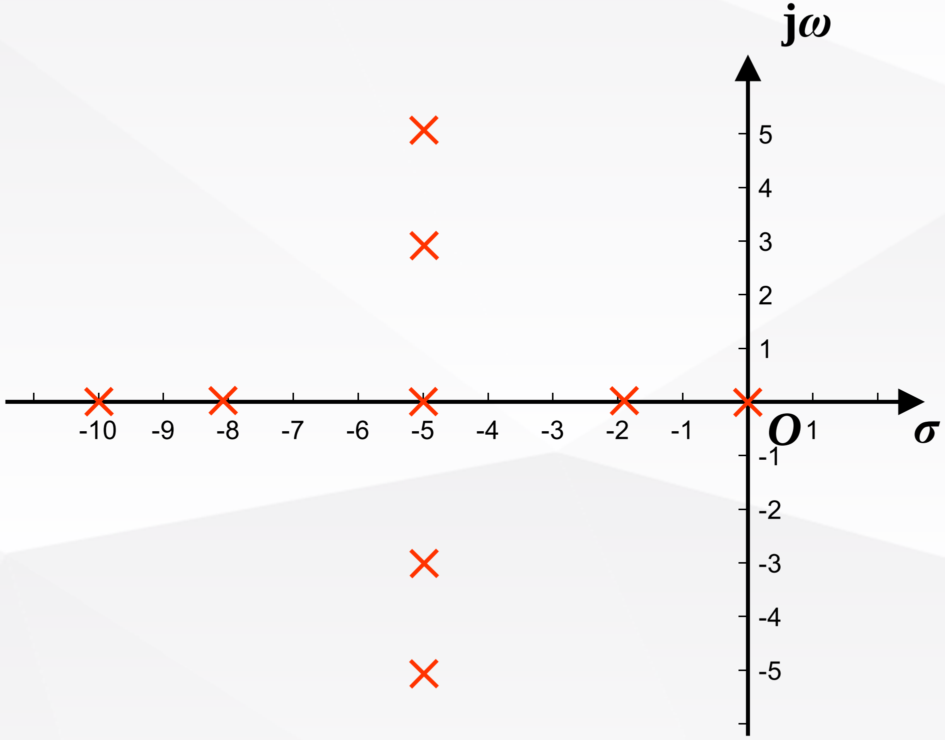
§ 4.1 根轨迹的基本概念

例： 考虑如下的单位反馈系统，试考察其闭环极点随参数K变化的运动轨迹以及性能指标的变化趋势。



闭环极点： $p_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25-K}$

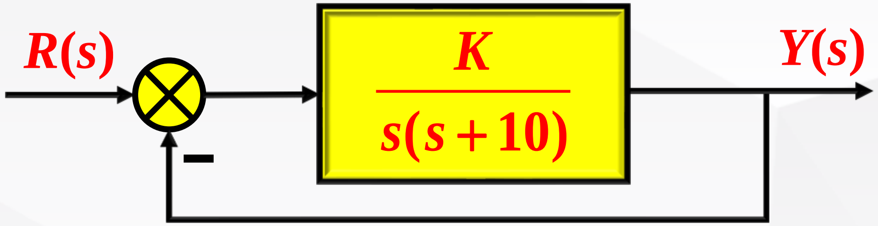
K	p_1	p_2
0	0	10
15	−1.84	−8.16
25	−5	−5
35	−5−j3.16	−5+j3.16
50	−5−j5	−5+j5



闭环极点运动轨迹示意图

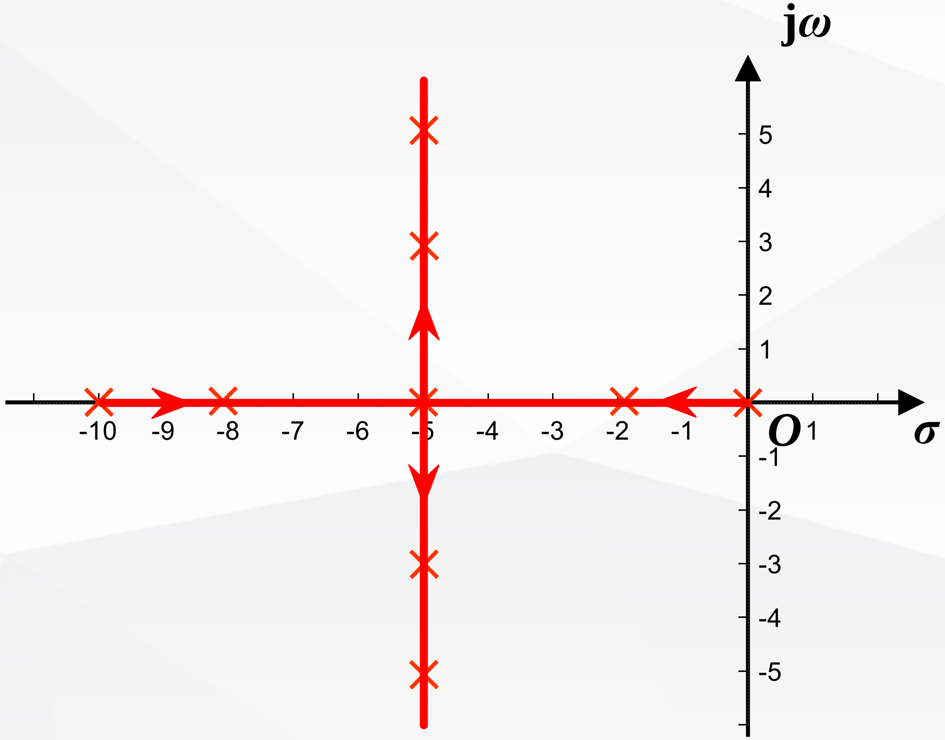
§ 4.1 根轨迹的基本概念

例： 考虑如下的单位反馈系统，试考察其闭环极点随参数K变化的运动轨迹以及性能指标的变化趋势。



闭环极点： $p_{1,2} = -5 \pm \sqrt{25-K}$

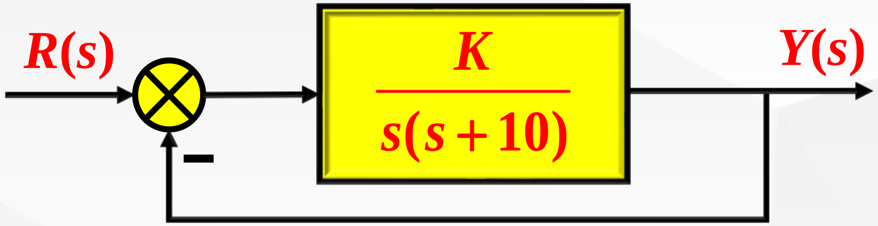
K	p_1	p_2
0	0	10
15	−1.84	−8.16
25	−5	−5
35	−5−j3.16	−5+j3.16
50	−5−j5	−5+j5

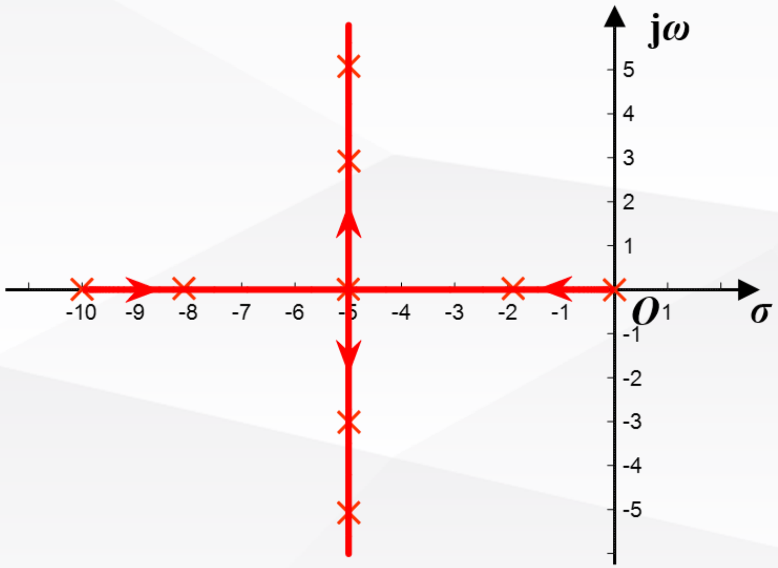


闭环极点运动轨迹示意图

§ 4.1 根轨迹的基本概念

例： 考虑如下的单位反馈系统，试考察其闭环极点随参数K变化的运动轨迹以及性能指标的变化趋势。





闭环极点运动轨迹示意图

稳定性： 当$K>0$时，系统是稳定的。

暂态特性：

当$K<25$时：系统处于过阻尼状态；

当$K=25$时：系统处于临界阻尼状态；

当$K>25$时：系统处于欠阻尼状态；

当$K\geq 25$时：复数极点实部相等，调整时间不变；但随着复数极点虚部的增加，系统阻尼比减少，超调量增加，峰值时间下降。

稳态特性：

系统为I型系统；对于斜坡信号，随K增大，稳态误差减小，对于阶跃型号，稳态误差为0 。

§ 4.1 根轨迹的基本概念

根轨迹

根据系统开环传递函数的零极点分布，当系统可变参数在可能的取值范围内（通常是0到+∞）变化时系统的闭环极点在复平面内变化所描绘出来的轨迹，叫做系统的根轨迹。

工程适用性：

①图解法：形象直观、简单实用，是一种近似方法；

②用较简单的系统开环传递函数来分析闭环系统特性；

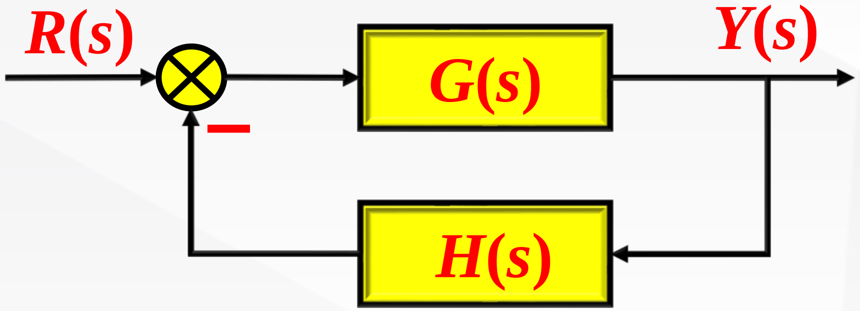
③特别适合于研究当系统中某一参数变化时系统性能的变化趋势；

④受控系统的传递函数无零极点相消现象。

§ 4.1 根轨迹的基本概念

幅值条件与辐角条件

考虑如下反馈系统：



闭环传递函数为：

$$\Phi(s)=\frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}=\frac{G(s)}{1+G_k(s)}$$

闭环特征方程为：

$$1+G_k(s)=0$$

复数s为系统闭环特征根的充要条件是：

$$G_k(s)=-1$$

化为复数形式：

- **幅值条件：**

$$|G_k(s)|=1$$

- **辐角条件：**

$$\angle G_k(s)=(2k+1)\times 180^\circ$$

其中$k=0,\pm1,\pm2,\ldots$

§ 4.1 根轨迹的基本概念

幅值条件与辐角条件

根据梅森增益公式，多闭环系统的等效开环传递函数：

$$G_k(s)=(-1)^1\sum_{i}L_i+(-1)^2\sum_{i,j}L_iL_j+(-1)^3\sum_{i,j,h}L_iL_jL_h+\cdots$$

将开环传递函数分子、分母最高次项系数化为 1，即“首1型”：

$$G_k(s)=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)},\quad n\geq m$$

其中K_g称为（开环）根轨迹增益。

§ 4.1 根轨迹的基本概念

幅值条件与辐角条件的几何意义

幅值条件的几何意义：

所有开环零点z_i引向点s的向量的幅值之积，与所有开环极点p_j引向点s的向量的幅值之积的比值，即根轨迹上点s对应的根轨迹增益值K_g。

$$K_g = \frac{\prod_{i=1}^{m} \left| s - p_j \right|}{\prod_{j=1}^{n} \left| s - z_i \right|}$$

- 对复平面上任意点s，总存在一个 K_g使其满足幅值条件，但该点不一定在根轨迹上；
- 因此仅根据幅值条件无法判定点s是否在根轨迹上。
- 满足辐角条件的点s自然满足幅值条件；根轨迹上某点s对应的 K_g 由幅值条件确定。

幅值条件与辐角条件的几何意义

辐角条件的几何意义：

若所有开环零点z_i引向点s的向量的辐角之和，与所有开环极点p_j引向点s的向量的辐角之和的差值恰好为180°的奇数倍，则点s在根轨迹上。

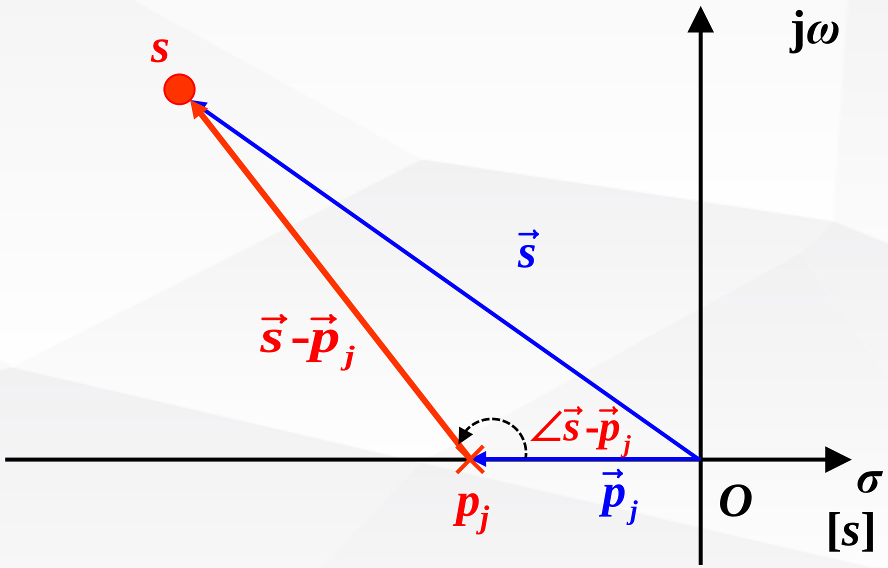
$$\angle G_k(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)$$

$$=(2k+1)\times180^{\circ},\ k=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

幅值条件与辐角条件的几何意义

辐角条件的几何意义：

若所有开环零点z_i引向点s的向量的辐角之和，与所有开环极点p_j引向点s的向量的辐角之和的差值恰好为180°的奇数倍，则点s在根轨迹上。

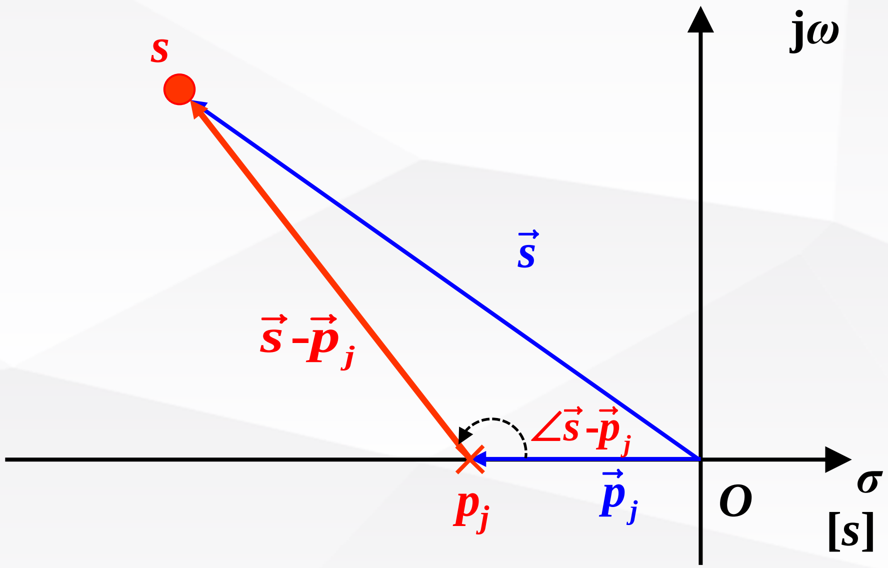


开环极点p_j引向点s的向量辐角示意图

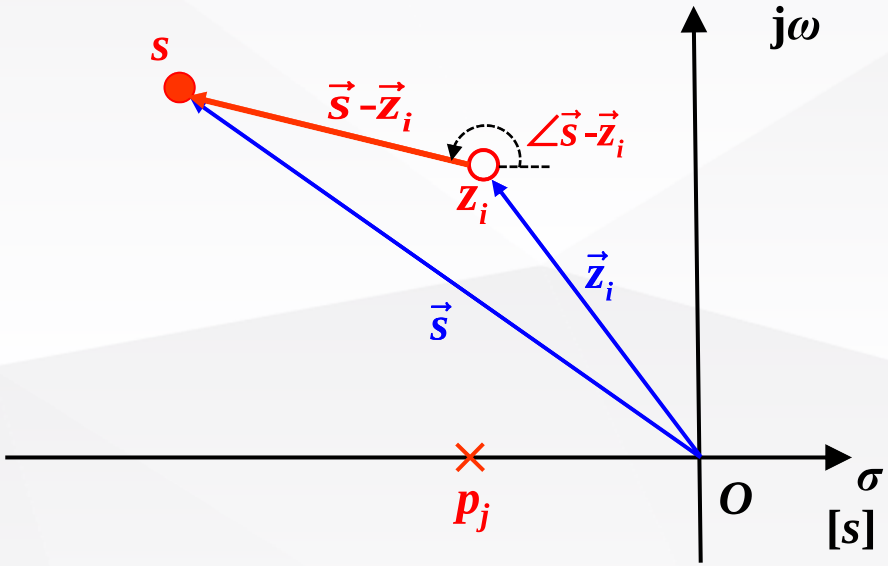
幅值条件与辐角条件的几何意义

辐角条件的几何意义：

若所有开环零点z_i引向点s的向量的辐角之和，与所有开环极点p_j引向点s的向量的辐角之和的差值恰好为180°的奇数倍，则点s在根轨迹上。



开环极点p_j引向点s的向量辐角示意图



开环零点z_i引向点s的向量辐角示意图

§ 4.1 根轨迹的基本概念

幅值条件与辐角条件的几何意义

辐角条件的几何意义：

若所有开环零点z_i引向点s的向量的辐角之和，与所有开环极点p_j引向点s的向量的辐角之和的差值恰好为180°的奇数倍，则点s在根轨迹上。

$$\angle G_k(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)$$

$$=(2k+1)\times 180^{\circ},\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

由于复平面上任意满足辐角条件的点s同时必定满足幅值条件，故：

根轨迹基本定理

复平面上某一点s位于根轨迹上的充要条件是其满足辐角条件。

§ 4.2 根轨迹的绘制

根轨迹绘制基本原则

规则1：根轨迹的起点和终点：根轨迹起始于开环极点，终止于开环零点；如果开环零点个数m少于开环极点个数n，则有$(n-m)$条根轨迹终止于无穷远。

注：根据幅值条件：

$$K_g = \frac{\prod_{j=1}^{n}|s-p_j|}{\prod_{i=1}^{m}|s-z_i|} = s^{n-m} \cdot \frac{\prod_{j=1}^{n}\left|1-\frac{p_j}{s}\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|1-\frac{z_i}{s}\right|}$$

- 当$s \to p_j$时，$K_g \to 0$，为根轨迹起点；
- 当$s \to z_i$时，$K_g \to +\infty$，为根轨迹终点；
- 当$|s| \to +\infty$且$n>m$时，$K_g \to +\infty$，为根轨迹终点。

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则2：根轨迹的分支数、对称性和连续性：根轨迹的分支数与开环零点个数m和开环极点个数n的较大者相等（一般地，$n \geq m$，此时根轨迹的分支数等于开环极点个数n）；根轨迹连续并对称于实轴。

注：分支数：根轨迹分支数必与闭环极点的数目一致，因此必然和系统的阶数保持一致。

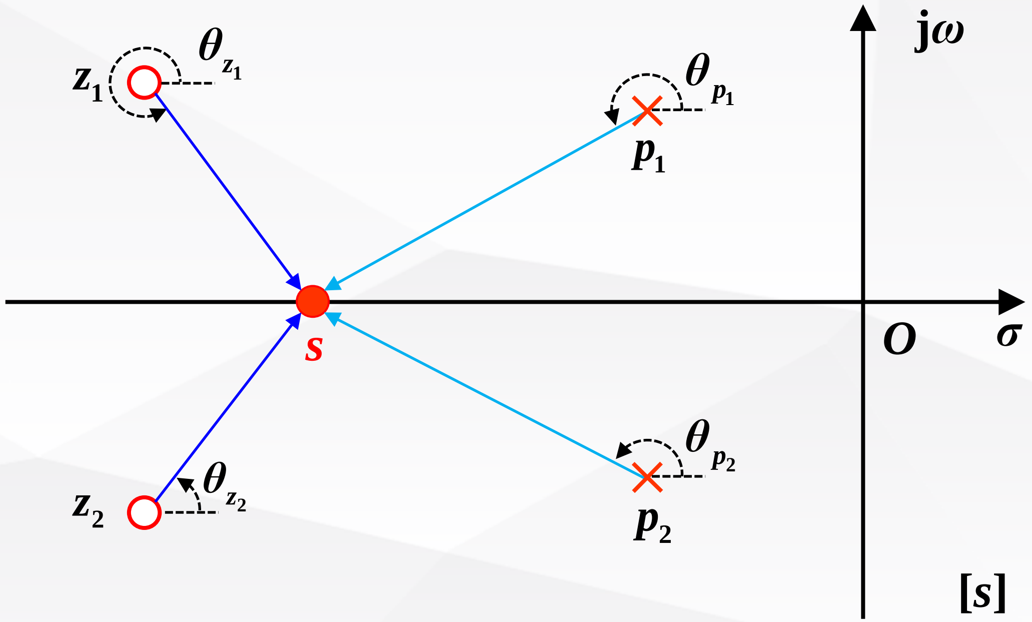
连续性：特征方程的系数随着参数K_g连续变化，因此特征根也必定是连续变化的，故根轨迹具有连续性。

对称性：特征方程是实系数方程，其根必定是实数或者共轭复数，故根轨迹必定关于实轴对称。故只需画出复平面上半部和实轴上的根轨迹，下半部根轨迹可由对称性画出。

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则3：实轴上的根轨迹：实轴上的某一区域，若其右边的开环实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必为根轨迹。

注：考查各类开环零极点在辐角条件中的贡献：



共轭复数开环零、极点到点s的向量辐角示意图

$$\angle G_k(s) = \sum_{i=1}^{m} \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s - p_j)$$

$$= (2k+1)\times 180^{\circ}, k=0,\pm1,\pm2,...$$

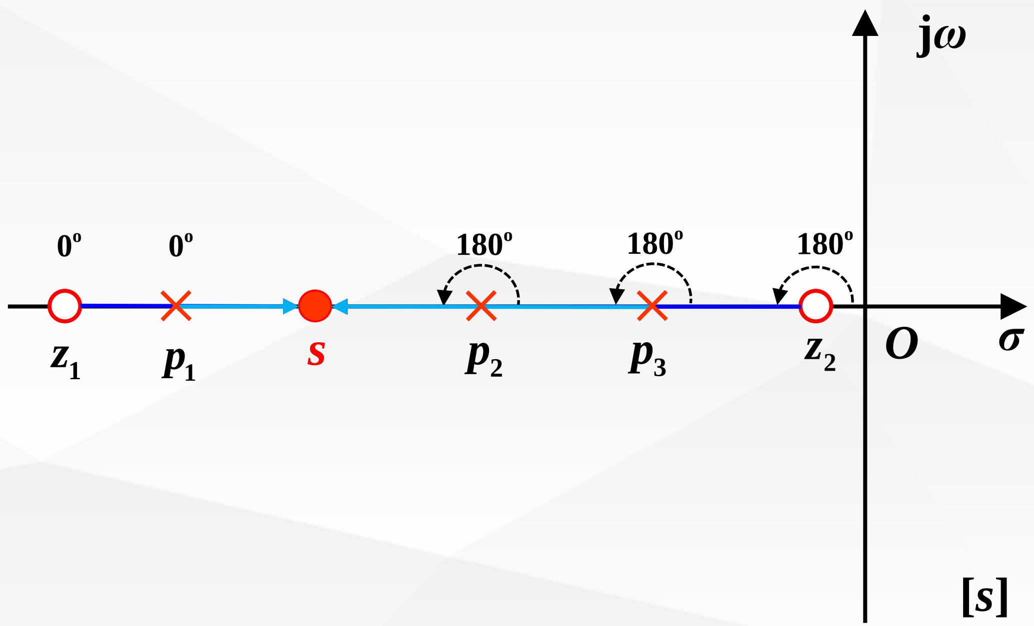
·一对共轭复数开环零点的辐角在辐角条件中的贡献值为$\theta_{z1}+\theta_{z2}=+360^{\circ}$；

·一对共轭复数开环极点的辐角在辐角条件中的贡献值为$-\theta_{p1}-\theta_{p2}=-360^{\circ}$；

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则3：实轴上的根轨迹： 实轴上的某一区域，若其右边的开环 实数零、极点个数之和为奇数，则该区域必为根轨迹。

注： 考查各类开环零极点在辐角条件中的贡献：



实轴上实数开环零、极点到点s的向量辐角示意图

$$\angle G_k(s)=\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)$$

$$=(2k+1)\times 180^{\circ},\ k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

- 点s左侧每个开环零点贡献 0° ；
- 点s左侧每个开环极点贡献 0° ；
- 点s右侧每个开环零点贡献 $+180^{\circ}$ ；
- 点s左侧每个开环极点贡献 -180° ；

§ 4.2 根轨迹的绘制

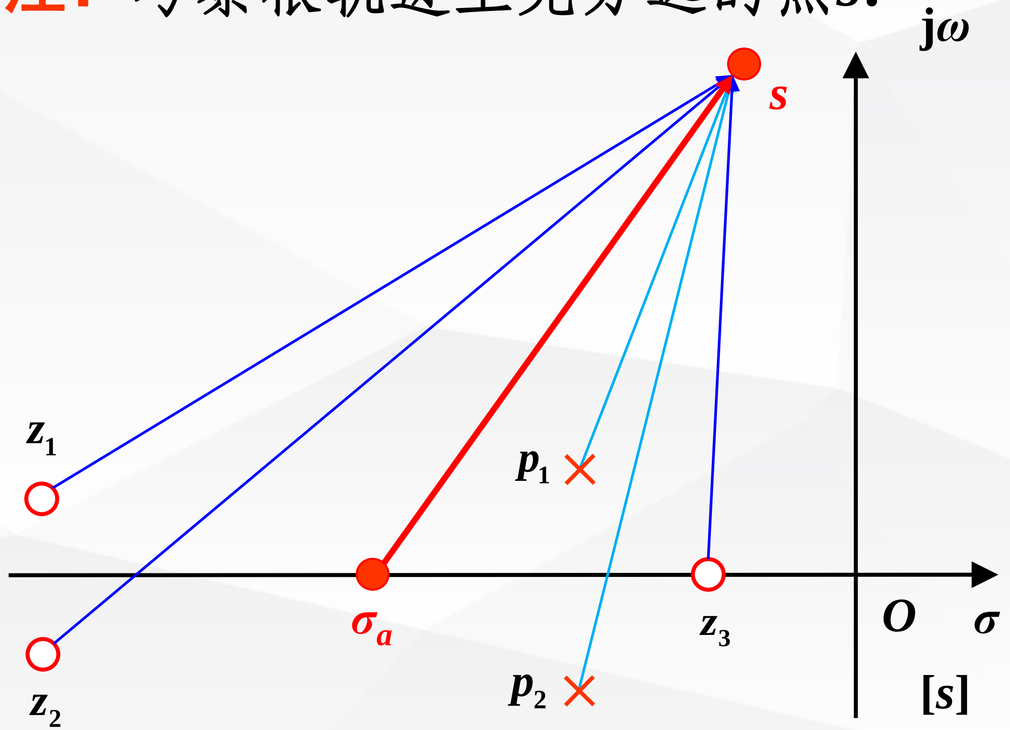
规则4：根轨迹的渐近线： 当系统开环极点个数n大于开环零点数m时，由n-m条根轨迹分支沿着与实轴夹角φ_a、交点为σ_a的一组渐近线趋于无穷远处。其中：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}, \quad \varphi_a = \frac{(2k+1)\pi}{n-m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则4：根轨迹的渐近线： 当系统开环极点个数n大于开环零点数m时，由n-m 条根轨迹分支沿着与实轴夹角φ_a、交点为σ_a的一组渐近线趋于无穷远处。

注： 考察根轨迹上充分远的点s：



根轨迹渐近线与实轴交点示意图

由幅值条件：

$$-K_g=\frac{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}=(s-\sigma_a)^{n-m}\quad(|s|\to+\infty\text{时}: z_i=p_j=\sigma_a)$$

$$=s^{n-m}-\sigma_a(n-m)s^{n-m-1}+\cdots$$

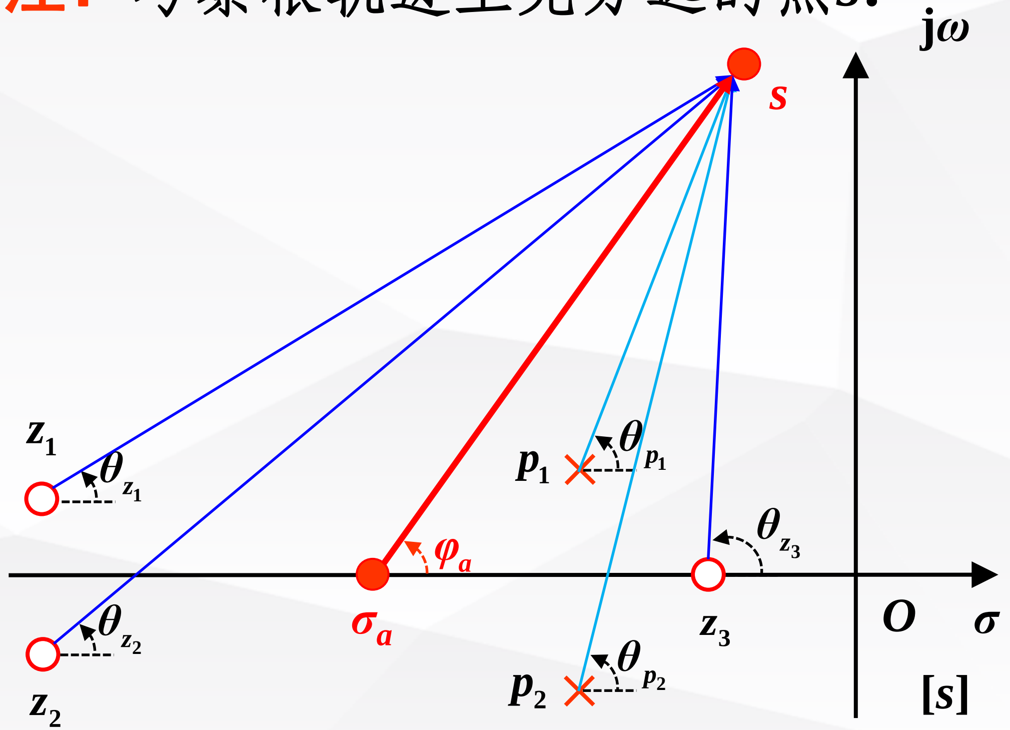
$$-K_g=\frac{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}{\prod_{i}^{m}(s-z_i)}=\frac{s^n-(\sum_{j=1}^{n}p_j)s^{n-1}+\cdots}{s^m-(\sum_{i=1}^{m}z_i)s^{m-1}+\cdots}$$

$$=s^{n-m}-(\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i)s^{n-m-1}+\cdots$$

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则4：根轨迹的渐近线： 当系统开环极点个数n大于开环零点数m时，由n-m 条根轨迹分支沿着与实轴夹角φ_a、交点为σ_a的一组渐近线趋于无穷远处。

注： 考察根轨迹上充分远的点s：



根轨迹渐近线与实轴交点示意图

当|s|→+∞时，点s引向任意有限开环零、极点的向量的辐角都是相等的，即：

$$\theta_z = \theta_p = \varphi_a$$

由辐角条件：

$$\sum_{i=1}^{m}\angle(s-z_i)-\sum_{j=1}^{n}\angle(s-p_j)$$

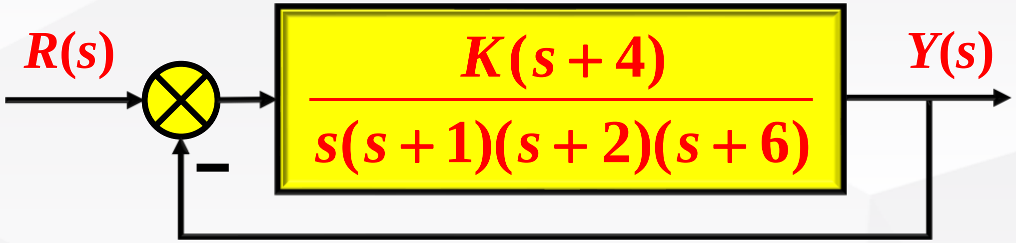
$$= m\varphi_a - n\varphi_a$$

$$= (m-n)\varphi_a$$

$$= (2k+1)\pi,\ k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$$

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



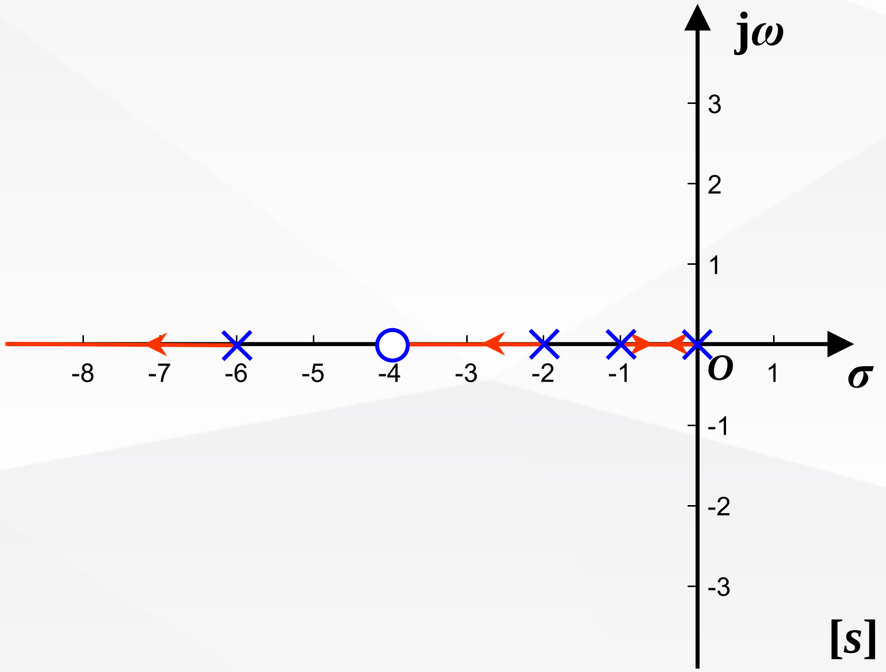
解： 开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+6)}$

开环零点：$-4,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\quad m=1$

开环极点：$0,\ -1,\ -2,\ -6,\quad n=4$

实轴上根轨迹：$(-\infty,-6),\ (-4,-2),\ (-1,\ 0)$

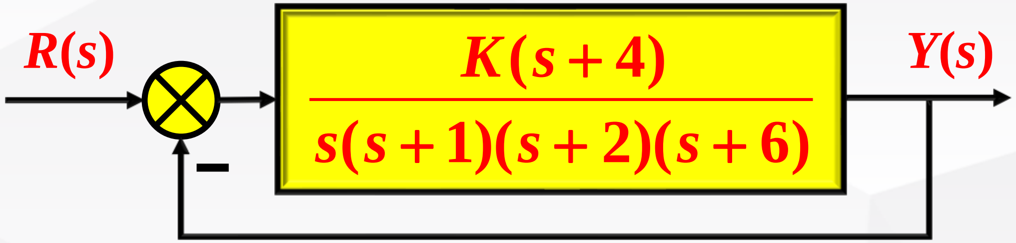
该系统的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



解： 开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+6)}$

开环零点：$-4,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\quad m=1$

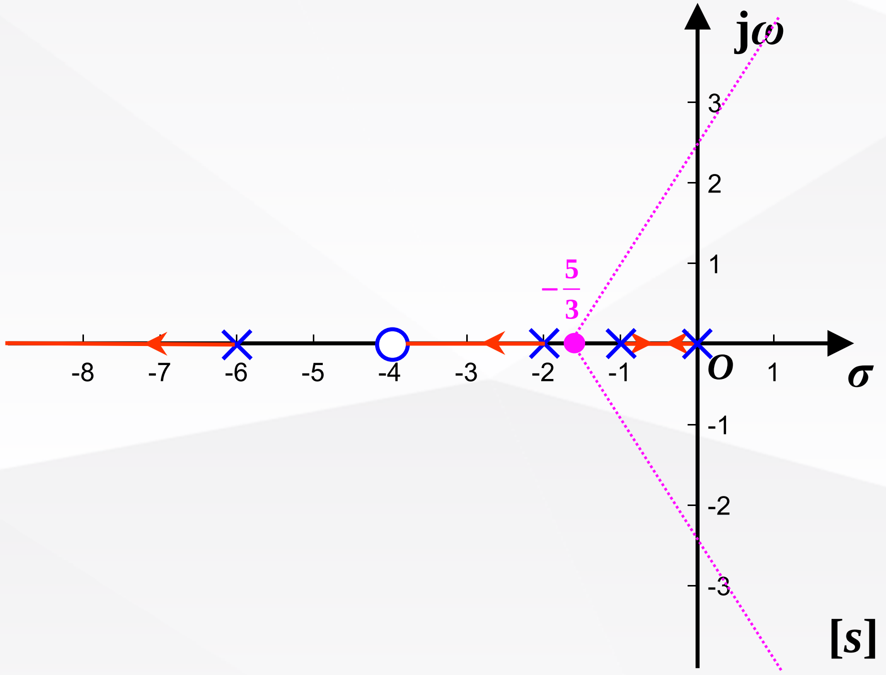
开环极点：$0,\ -1,\ -2,\ -6,\quad n=4$

实轴上根轨迹：$(-\infty,-6),\ (-4,-2),\ (-1,\ 0)$

渐近线:

$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-\frac{5}{3},\quad \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\begin{cases}60^{\circ}, & k=0\\ -60^{\circ}, & k=-1\\ 180^{\circ}, & k=+1\end{cases}$$

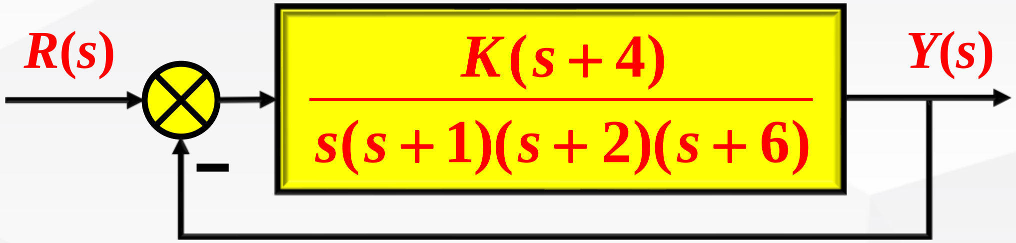
该系统的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



该系统的根轨迹概略图绘制如下：

解： 开环传递函数为：$G_k(s)=\dfrac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+6)}$

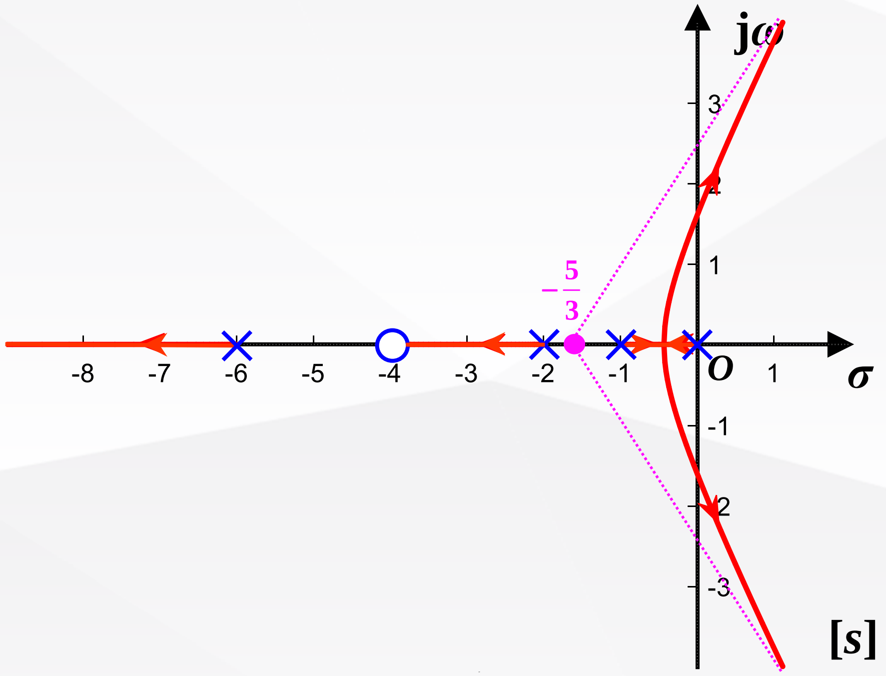
开环零点：$-4,\ \infty,\ \infty,\ \infty,\quad m=1$

开环极点：$0,\ -1,\ -2,\ -6,\quad n=4$

实轴上根轨迹：$(-\infty,-6),\ (-4,-2),\ (-1,\ 0)$

渐近线：

$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-\frac{5}{3},\quad \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\begin{cases}60^{\circ}, & k=0\\ -60^{\circ}, & k=-1\\ 180^{\circ}, & k=+1\end{cases}$$



根轨迹概略图

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则5： 根轨迹分离点：两条或者两条以上的根轨迹分支在复平面上相遇又分离的点d，称为根轨迹的分离点；分离点d必在根轨迹上，且必为下列任一方程的解：

$$(1)\quad \frac{\mathrm{d}G_k(s)}{\mathrm{d}s}=0$$

$$(2)\quad \frac{\mathrm{d}K_g(s)}{\mathrm{d}s}=0,\ K_g\text{满足}1+G_k(s)=0$$

$$(3)\quad \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{d-p_j}=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{d-z_i}$$

·闭环特征方程的重根即为分离点，根的重数就是从分离点离开的根轨迹分支数；
·在分离点处个根轨迹分支的切线之间的夹角是相等的。

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则5：证明根轨迹分离点*d*满足方程（1）～（3）。

证明：（1）由于分离点*d*是闭环特征方程的重根，故有：

$$\begin{cases} \left[1+G_k(s)\right]\Big|_{s=d}=0 \\ \dfrac{\mathrm{d}\left[1+G_k(s)\right]}{\mathrm{d}s}\Bigg|_{s=d}=\dfrac{\mathrm{d}G_k(s)}{\mathrm{d}s}\Bigg|_{s=d}=0 \end{cases}$$

（2）将开环传递函数写为：

$$G_k(s)=K_g\frac{N(s)}{M(s)}$$

根据（1）知在分离点*d*处必有：

$$\frac{\mathrm{d}G_k(s)}{\mathrm{d}s}\Bigg|_{s=d}=-K_g\frac{M'(s)N(s)-M(s)N'(s)}{N^2(s)}\Bigg|_{s=d}=0$$

由K_g满足闭环特征方程方程可得：

$$K_g(s)=-\frac{M(s)}{N(s)}$$

对$K_g(s)$ 求一阶导数，在分离点*d*处有：

$$\frac{\mathrm{d}K_g(s)}{\mathrm{d}s}\Bigg|_{s=d}=-\frac{M'(s)N(s)-M(s)N'(s)}{N^2(s)}\Bigg|_{s=d}=0$$

规则5：证明根轨迹分离点d满足方程（1）~（3）。

证明：（3）将开环传递函数写为：

$$G_k(s)=K_g\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

则系统的闭环特征多项式为：

$$\Delta(s)=\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)+K_g\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)=0$$

对$\Delta(s)$ 求一阶导数，在分离点d处有：

$$\left.\frac{\mathrm{d}\Delta(s)}{\mathrm{d}s}\right|_{s=d}=0$$

即：

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\prod_{i=1}^{n}(d-p_i)}{d-p_j}+K_g\sum_{i=1}^{m}\frac{\prod_{j=1}^{m}(d-z_j)}{d-z_i}=0$$

在分离点d处有$G_k(d)=-1$，因此：

$$(-K_g=)\ \frac{\cancel{\prod_{j=1}^{n}(d-p_j)}}{\cancel{\prod_{i=1}^{m}(d-z_i)}}=\frac{\sum_{j=1}^{n}\frac{\cancel{\prod_{i=1}^{n}(d-p_i)}}{d-p_j}}{\sum_{i=1}^{m}\frac{\cancel{\prod_{j=1}^{m}(d-z_j)}}{d-z_i}}$$

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则6：根轨迹与虚轴的交点：若根轨迹与虚轴相交，则意味着闭环特征方程出现纯虚根。此处的根轨迹增益称为临界根轨迹增益(记作K_g^*)。

注：求解方法有两种：

（1）在闭环特征方程中令s=jω，然后分别令方程的实部和虚部均为零：

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\left[\Delta(\mathrm{j}\omega)\right]=0\\ \mathrm{Im}\left[\Delta(\mathrm{j}\omega)\right]=0\end{cases}$$

联立两个方程可求得交点的坐标值和相应的根轨迹增益K_g。

（2）根轨迹与虚轴相交表明系统在相应的K_g值下处于临界稳定状态，故可用劳斯判据求得交点的坐标值和相应的根轨迹增益K_g。

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则7：根轨迹的出射角和入射角：

出射角：根轨迹离开开环极点处的切线与正实轴的夹角；

入射角：根轨迹进入开环零点处的切线与正实轴的夹角。

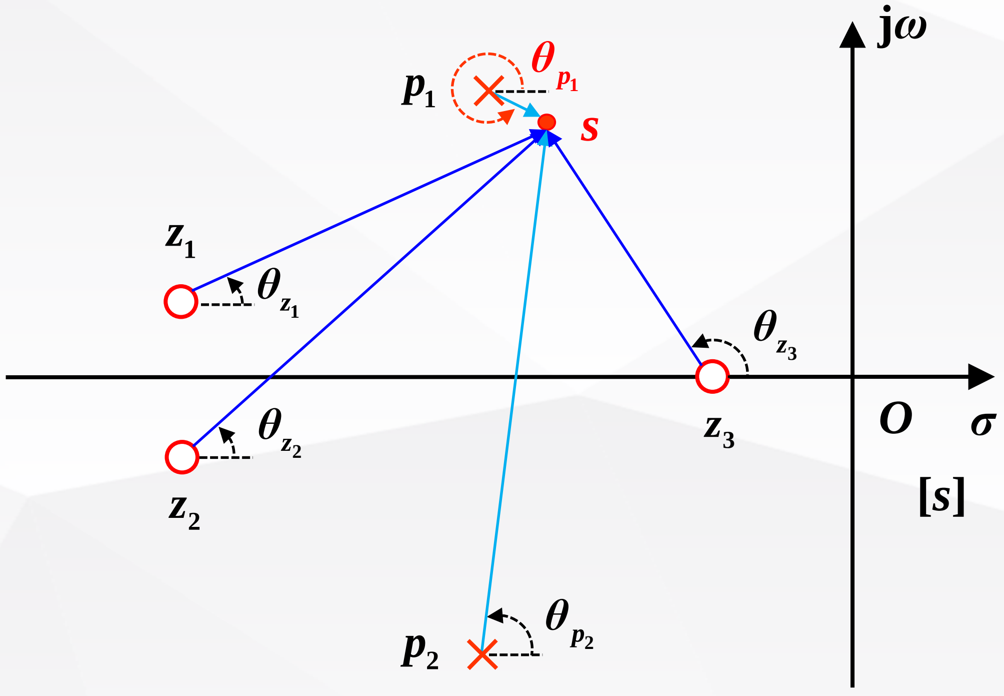
注：复数开环极点的出射角：

考察根轨迹上距离复数开环极点 p_1 无限近的点 s，则根轨迹在开环极点 p_1 处的出射角为 θ_{p1}。

根据辐角定理：

$$\theta_{p_1} = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} + \theta_{z_3} - \theta_{p_2} - (2k+1)\times 180^{\circ}$$

其中：$k=0,\pm 1, \pm 2,\ldots, \theta_{p2}=90^{\circ}$



复数开环极点出射角示意图

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则7：根轨迹的出射角和入射角：

出射角：根轨迹离开开环极点处的切线与正实轴的夹角；

入射角：根轨迹进入开环零点处的切线与正实轴的夹角。

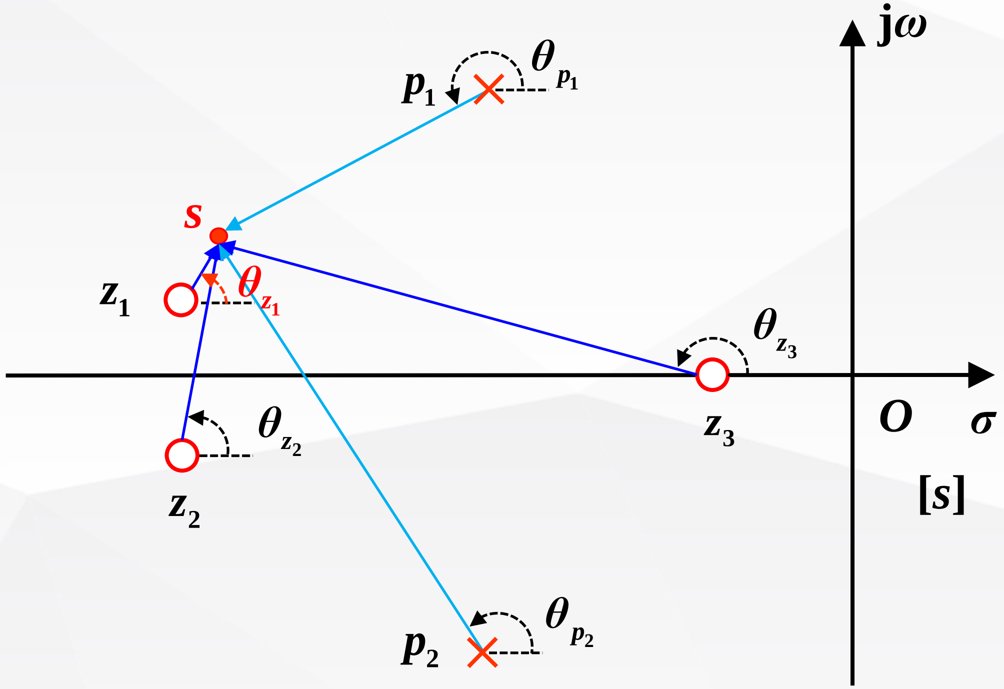
注：复数开环零点的入射角：

考察根轨迹上距离复数开环零点z_1无限近的点s，则根轨迹在开环极点z_1处的出射角为θ_{z1}。

根据辐角定理：

$$\theta_{z_1}=\theta_{p_1}+\theta_{p_2}-\theta_{z_2}-\theta_{z_3}+(2k+1)\times 180^\circ$$

其中：$k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots,\ \theta_{z2}=90^\circ$



复数开环零点入射角示意图

§ 4.2 根轨迹的绘制

规则8：根之和： 开环传递函数$G_k(s)$的分子、分母阶次差$n-m\geq 2$时，系统闭环极点之和等于系统开环极点之和：

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}p_i=\text{定值},\quad n-m\geq 2$$

注： 开环传递函数为：

$$G_k(s)=K_g\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\cdots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_2s^2+a_1s+a_0}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}p_i=-a_{n-1}$$

闭环传递函数为：

$$\begin{aligned}\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}&+a_{n-2}s^{n-2}+a_{n-3}s^{n-3}+\cdots+a_0\\&+K_gs^{n-2}+K_gb_{n-3}s^{n-3}+\cdots+K_gb_0\\=s^n+a_{n-1}s^{n-1}&+(a_{n-2}+K_g)s^{n-2}+(a_{n-3}+K_gb_{n-3})s^{n-3}+\cdots+(a_0+K_gb_0)\end{aligned}\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=-a_{n-1}$$

§ 4.2 根轨迹的绘制

根轨迹绘制规则八条：

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

法则 3 实轴上的根轨迹

法则 4 渐近线 $\sigma_a = \dfrac{\sum_{j=1}^{n} p_j - \sum_{i=1}^{m} z_i}{n-m}$， $\varphi_a = \dfrac{(2k+1)\pi}{n-m}$， $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

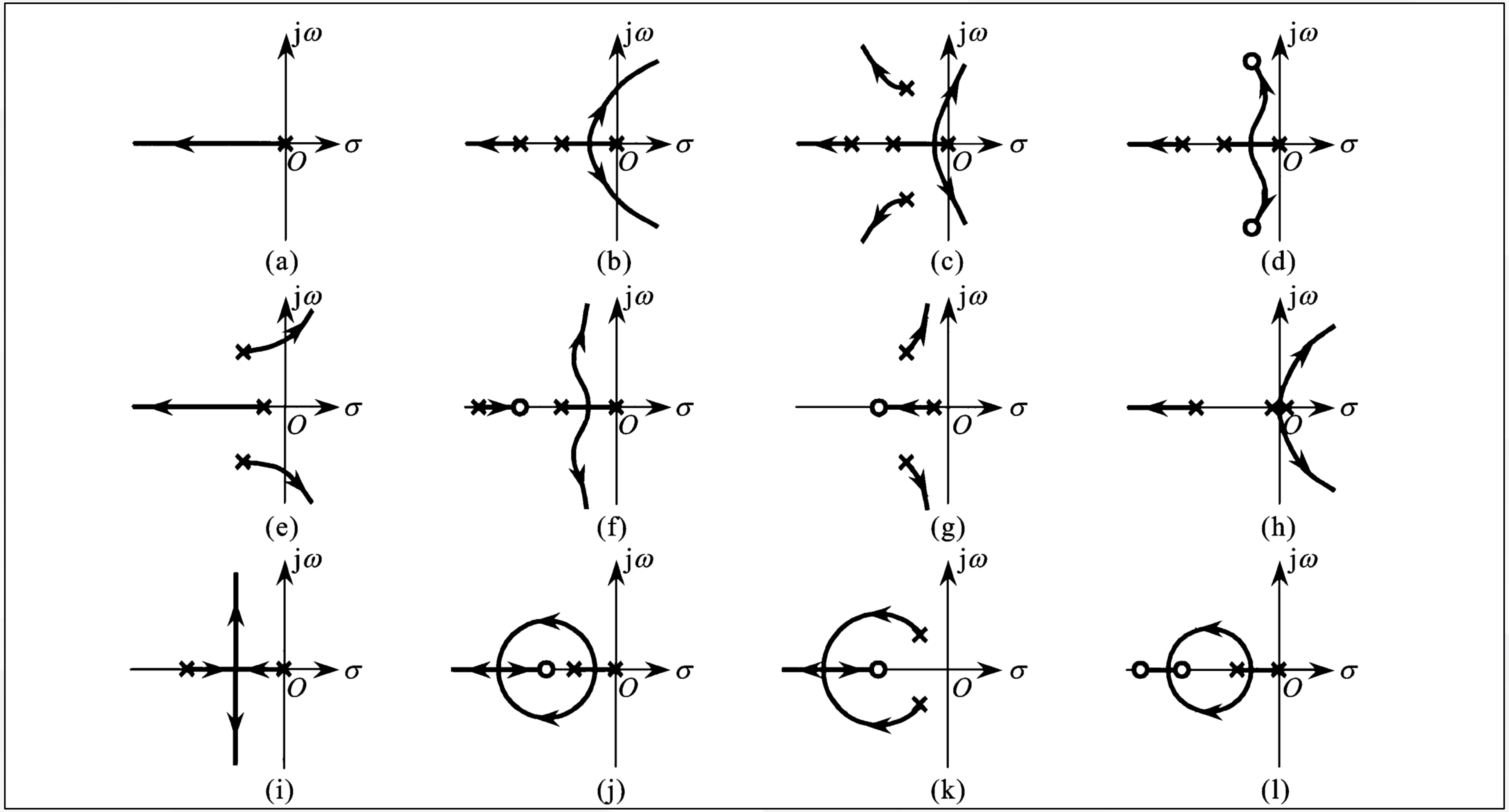
法则 5 分离点 $\sum_{j=1}^{n} \dfrac{1}{d-p_j} = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{1}{d-z_i}$

法则 6 与虚轴交点 $\mathrm{Re}\left[\Delta(j\omega)\right] = \mathrm{Im}\left[\Delta(j\omega)\right] = 0$ or Routh

法则 7 出射角与入射角 $\sum_{i=1}^{m} \angle(s-z_i) - \sum_{j=1}^{n} \angle(s-p_j) = (2k+1)\times 180^{\circ}, k=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$

法则 8 根之和 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} p_i =$ 定值， $n-m \geq 2$

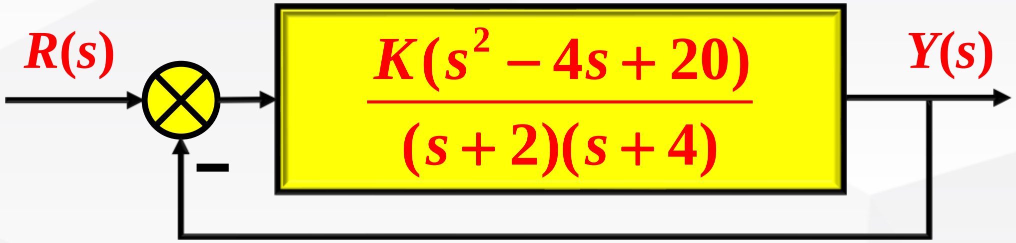
§ 4.2 根轨迹的绘制：常见开环零极点分布及根轨迹概略图



常见的开环零极点分布及其根轨迹的概略图

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



解： 开环零点： $+2-j4,\ +2+j4,\quad m=2$

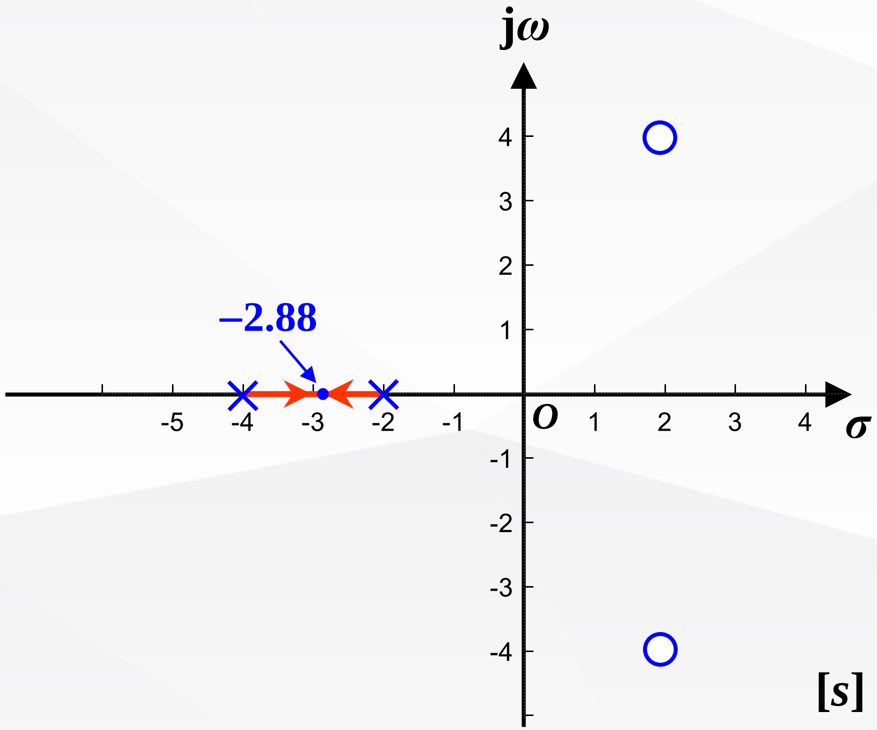
开环极点： $-4,\ -2,\quad n=2$

实轴上根轨迹: $(-4,-2)$

分离点: $\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{d-p_j}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{d-z_i}\rightarrow d=-2.88$

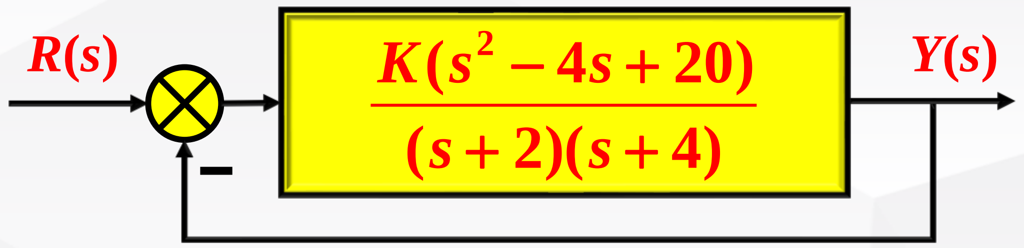
渐近线: $m=n$，故无渐近线

该系统的根轨迹概略图绘制如下:

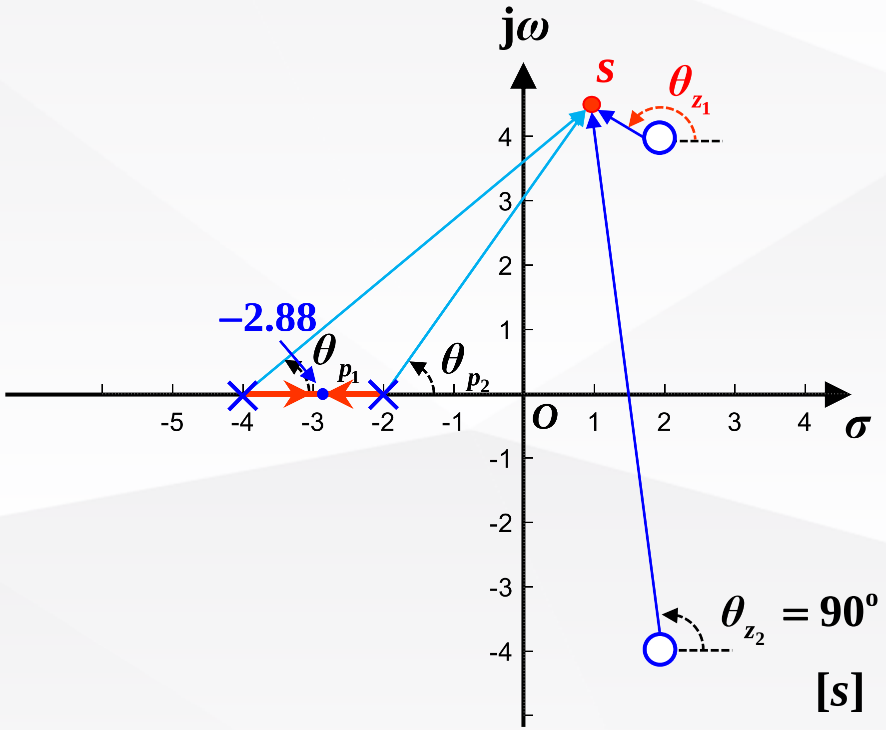


根轨迹概略图

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



该系统的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

解： 开环零点： $+2-j4,\ +2+j4,\quad m=2$

开环极点： $-4,\ -2,\quad n=2$

实轴上根轨迹: $(-4,-2)$

分离点: $\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{d-p_j}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{d-z_i}\rightarrow d=-2.88$

渐近线: $m=n$，故无渐近线

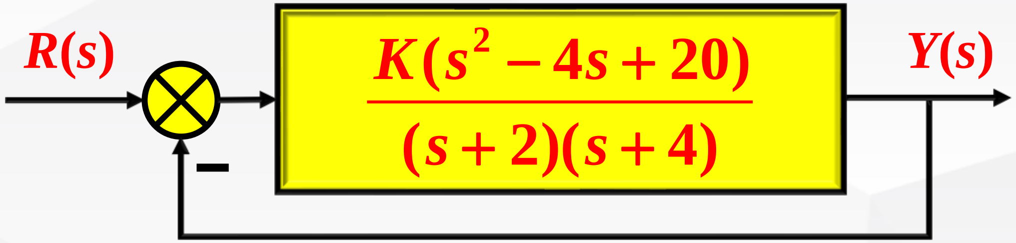
入射角: $\theta_{z_1}=\theta_{p_1}+\theta_{p_2}-\theta_{z_2}+(2k+1)\times180^\circ$

$=\arctan\frac{2}{3}+\arctan1-90^\circ+180^\circ$

$=33.7^\circ+45^\circ+90^\circ=168.7^\circ \qquad \theta_{z_2}=-168.7^\circ$

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



解： 开环零点： $+2-j4,\ +2+j4,\quad m=2$

开环极点： $-4,\ -2,\qquad n=2$

实轴上根轨迹: $(-4,-2)$

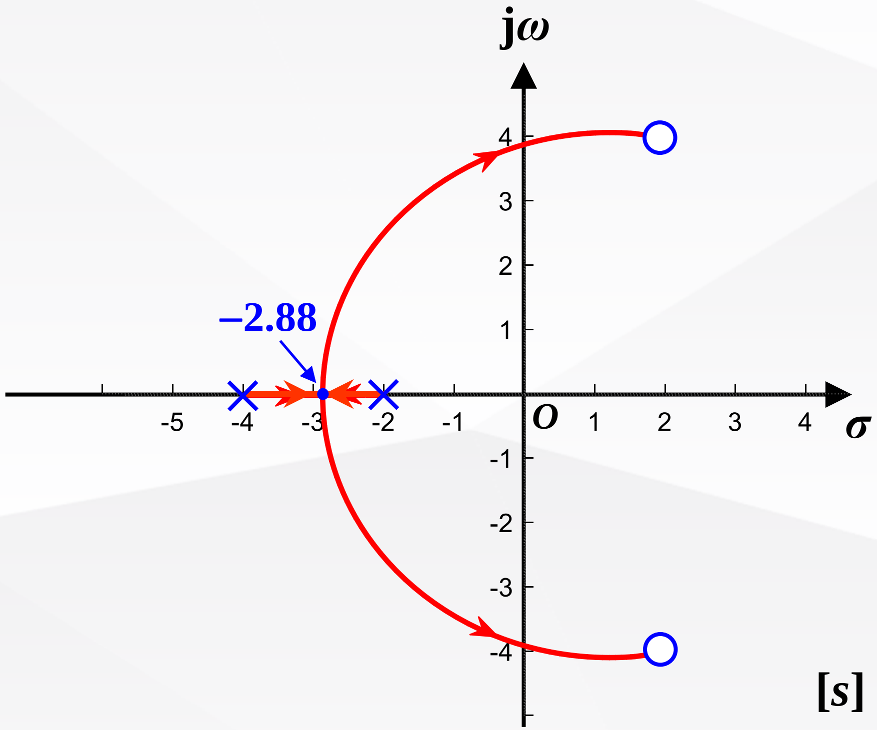
分离点: $\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{d-p_j}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{d-z_i}\rightarrow d=-2.88$

渐近线: $m=n$，故无渐近线

入射角: $\theta_{z_1}=168.7^{\circ}$，$\theta_{z_2}=-168.7^{\circ}$

出射角：开环极点在实轴上，无需考虑

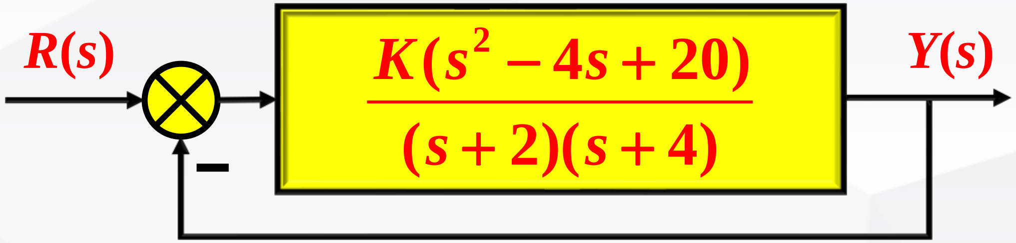
该系统的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



坐标系比例变化后系统根轨迹概略图绘制如下：

解： 开环零点： $+2-j4$, $+2+j4$, $m=2$

开环极点： -4, -2, $n=2$

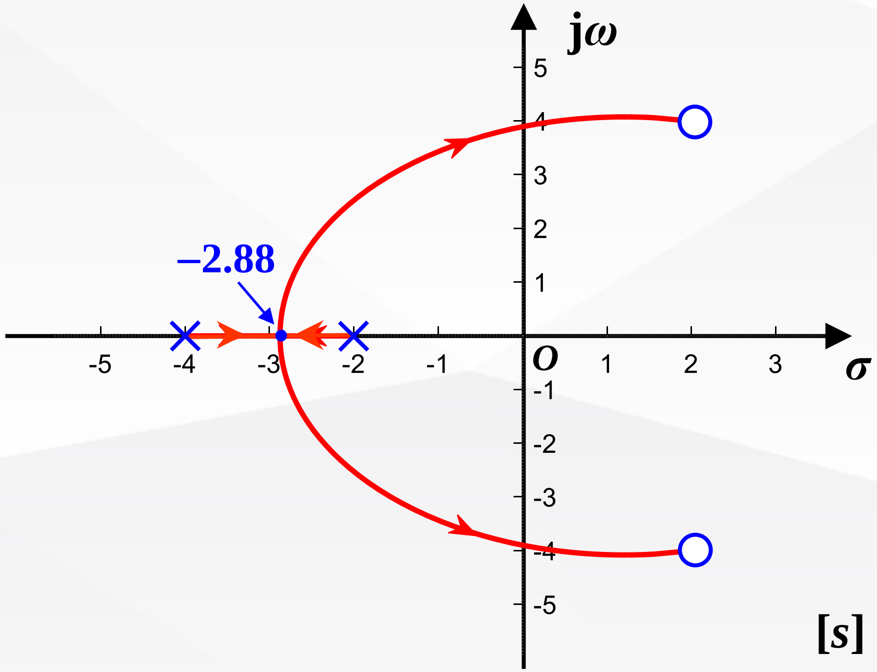
实轴上根轨迹: $(-4,-2)$

分离点: $\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{d-p_j}=\sum_{i=1}^{2}\frac{1}{d-z_i}\rightarrow d=-2.88$

渐近线: $m=n$，故无渐近线

入射角: $\theta_{z_1}=168.7^{\circ}$，$\theta_{z_2}=-168.7^{\circ}$

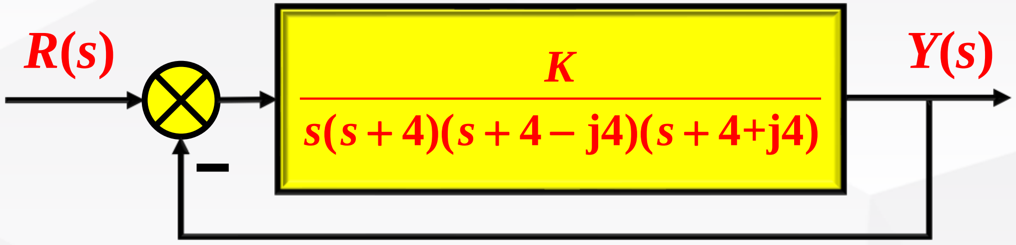
出射角: 开环极点在实轴上，无需考虑



坐标系比例变化后根轨迹概略图

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



解： 开环零点： $-\infty, -\infty, -\infty, -\infty,\ m=0$

开环极点： $-4\pm j4, -4, 0,\qquad n=4$

实轴上根轨迹: $(-4,0)$

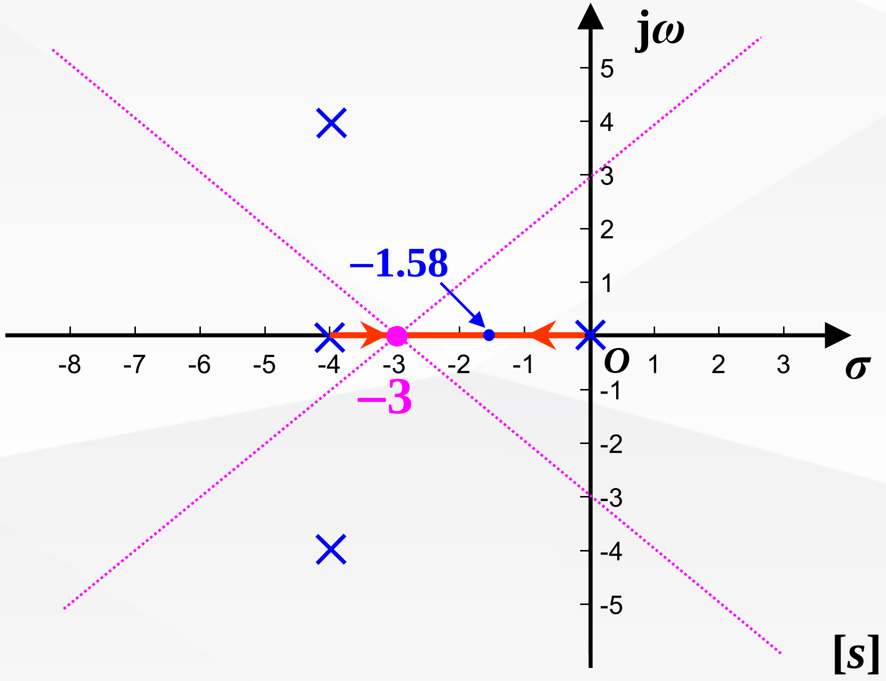
渐近线:

$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-3,\quad \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\begin{cases}45^\circ, & k=0\\ -45^\circ, & k=-1\\ 135^\circ, & k=+1\\ -135^\circ, & k=-2\end{cases}$$

分离点： $K_g(s)=-(s^4+12s^3+64s^2+128s)$

$$K_g'(s)=-4(s^3+9s^2+32s+32)=0\rightarrow d=-1.58$$

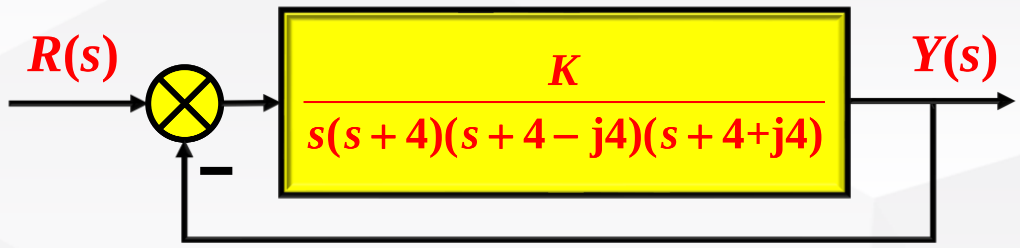
该系统的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



该系统的根轨迹概略图绘制如下：

解： 开环零点： $-\infty, -\infty, -\infty, -\infty,\ m=0$

开环极点： $-4\pm j4, -4, 0,\qquad n=4$

实轴上根轨迹: $(-4,0)$

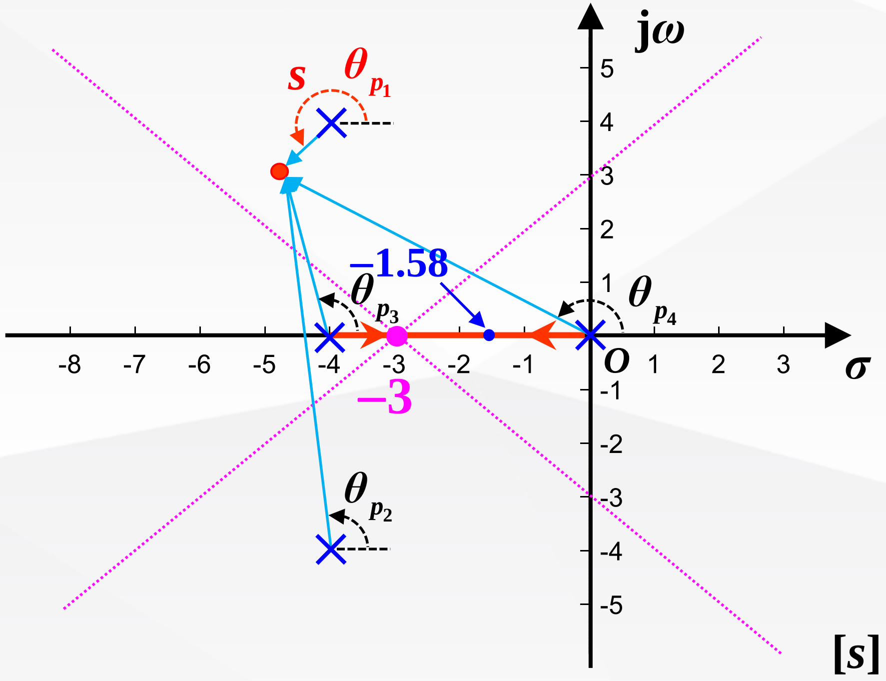
入射角：无有限开环零点，无需考虑

出射角：$\theta_{p_1} = -\theta_{p_2} - \theta_{p_3} - \theta_{p_4} + (2k+1)\times 180^{\circ}$

$= -90^{\circ} - 90^{\circ} - 135^{\circ} + 180^{\circ}$

$= -135^{\circ}$

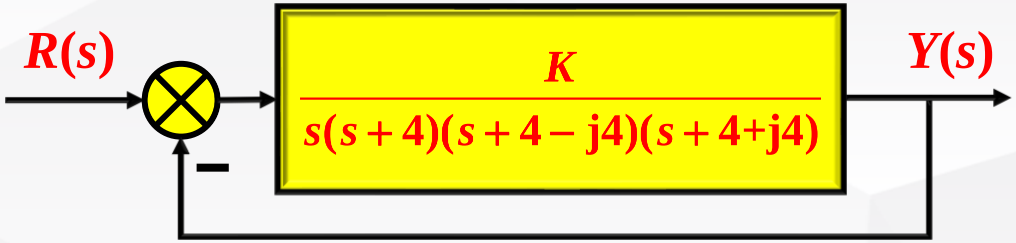
$\theta_{p2} = 0^{\circ} - \theta_{p_1} = 135^{\circ}$



根轨迹概略图

§ 4.2 根轨迹的绘制

例： 试绘制如下单位反馈系统的根轨迹概略图。



解： 开环零点： $-\infty, -\infty, -\infty, -\infty$, $m=0$

开环极点： $-4\pm j4, -4, 0,$ $n=4$

实轴上根轨迹: $(-4,0)$

渐近线:

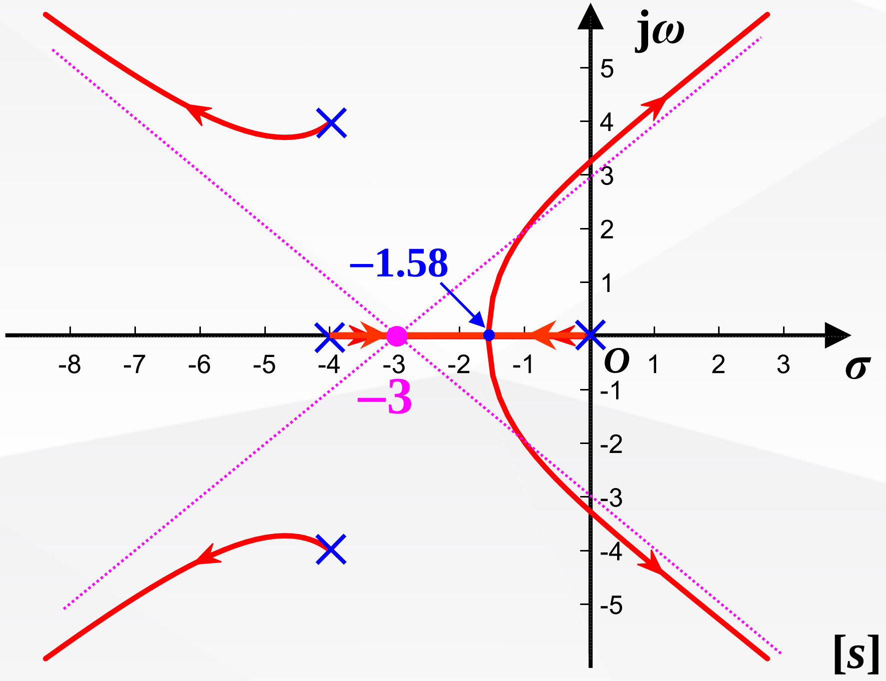
$$\sigma_a=\frac{\sum_{j=1}^{n}p_j-\sum_{i=1}^{m}z_i}{n-m}=-3,\quad \varphi_a=\frac{(2k+1)\pi}{n-m}=\begin{cases}45^\circ, & k=0\\ -45^\circ, & k=-1\\ 135^\circ, & k=+1\\ -135^\circ, & k=-2\end{cases}$$

分离点： $d=-1.58$

入射角：无有限开环零点，无需考虑

出射角： $\theta_{p_1}=-135^\circ$, $\theta_{p2}=135^\circ$

该系统的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

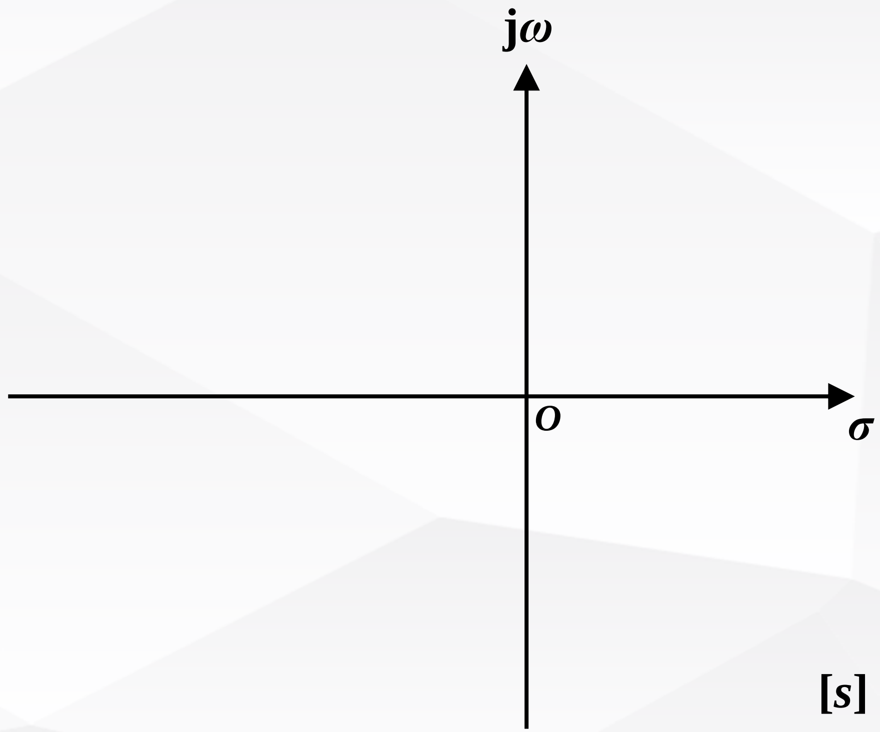
§ 4.2 根轨迹的绘制

补充例1 $G(s)=\dfrac{K(s+2)}{(s^2+4s+9)^2}$ 根轨迹

补充例2：设反馈控制系统中 $G(s)=\dfrac{K^*}{s^2(s+2)(s+5)}, H(s)=1$

1）概略绘制系统根轨迹图，并判断系统稳定性；

2）如果 $H(s)=1+2s$，试判断 $H(s)$ 改变后系统稳定性，并研究 $H(s)$ 改变所产生的影响。



根轨迹概略图