

§ 4.3 参数根轨迹

参数根轨迹

当系统可变参数不是增益时，其在取值范围内变化时系统的闭环极点在复平面内变化所描绘出来的轨迹，称为系统的参数根轨迹（以区别于常规根轨迹）。
绘制思路是：将系统闭环特征方程进行预处理，并引入等效开环传递函数，则绘制方法与前面相同。

首先将系统的闭环特征方程进行预处理，即可变参数分离：

$$\Delta(s) = A(s) + XB(s) = 0, \quad X \in (0, +\infty)$$

其中 X 是可变参数，且与 $A(s)$ 和 $B(s)$ 无关，则闭环特征方程等价于：

$$1 + X \frac{B(s)}{A(s)} = 0$$

则系统的等效开环传递函数为：

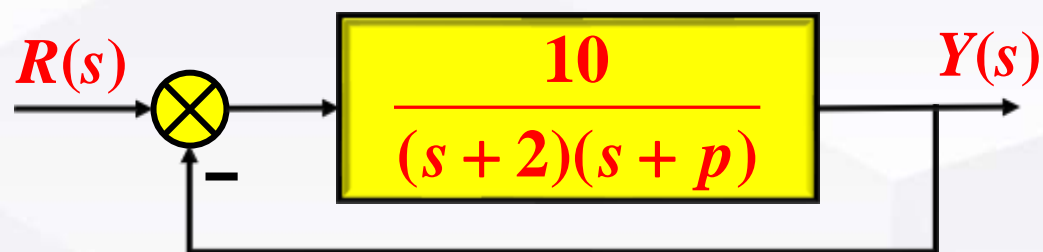
$$G_k(s) = X \frac{B(s)}{A(s)}$$

注意：

- 在等效开环传递函数中可变参数 X 取代了常规根轨迹中的根轨迹增益 K_g
- 等效开环传递函数仅将与系统闭环极点相关性质保留下来，而阶数、零点、型号均不等价，必须按原系统分析

§ 4.3 参数根轨迹

例：考虑如下的单位反馈系统，试绘制关于参数 $p \in (0, +\infty)$ 的系统的根轨迹。



该系统的根轨迹概略图绘制如下：

解：系统的闭环特征方程为：

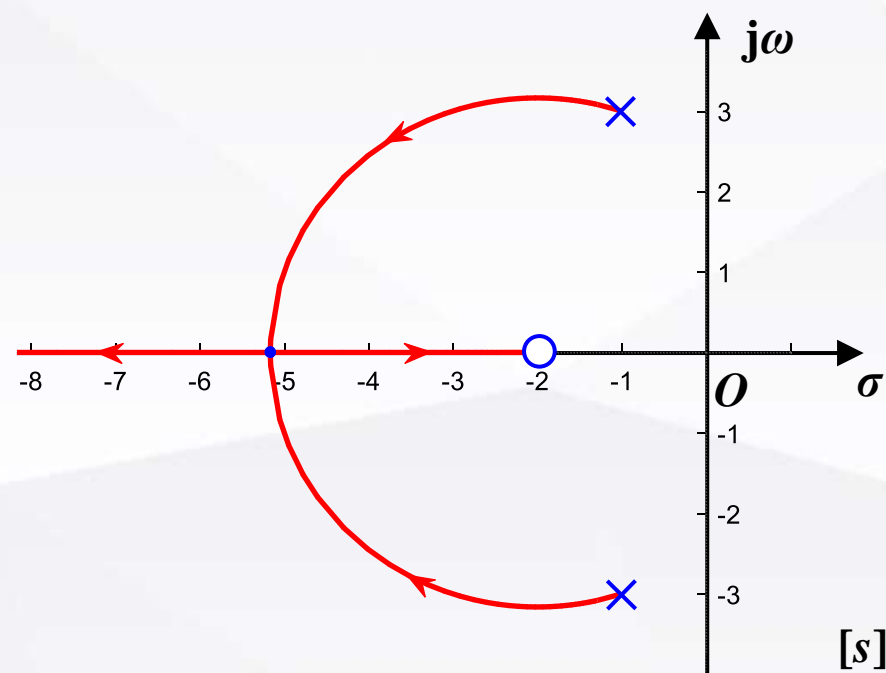
$$10 + (s+2)(s+p) = 0$$

将系统的闭环特征方程进行预处理：

$$s^2 + 2s + 10 + p(s+2) = 0$$

则系统的等效开环传递函数为：

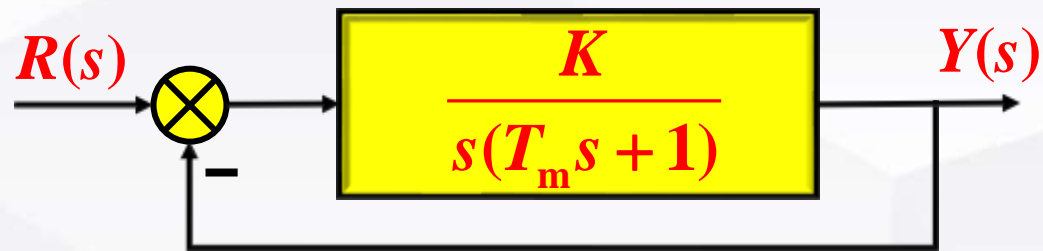
$$G_k(s) = \frac{p(s+2)}{s^2 + 2s + 10}$$



根轨迹概略图

§ 4.3 参数根轨迹

例：考虑如下小功率位置随动系统，试：



①分析随时间常数 $T_m > 0$ 系统闭环极点的分布和暂态性能的变化规律；

②当系统的开环增益 $K=29$ 且输入信号为单位速度信号 $r(t)=t$ 时，若希望的主导极点为 $\lambda_{1,2} = -17.25 \pm j26.521$ ，请问 T_m 应取何值并计算此时系统的性能。

解：①系统的闭环特征方程为：

$$T_m s^2 + s + K = 0$$

此时应视 K 为常数，则等效开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{T_m s^2}{s + K}$$

设根轨迹上任意点 $s = \sigma \pm j\omega$ ，则根据辐角条件有：

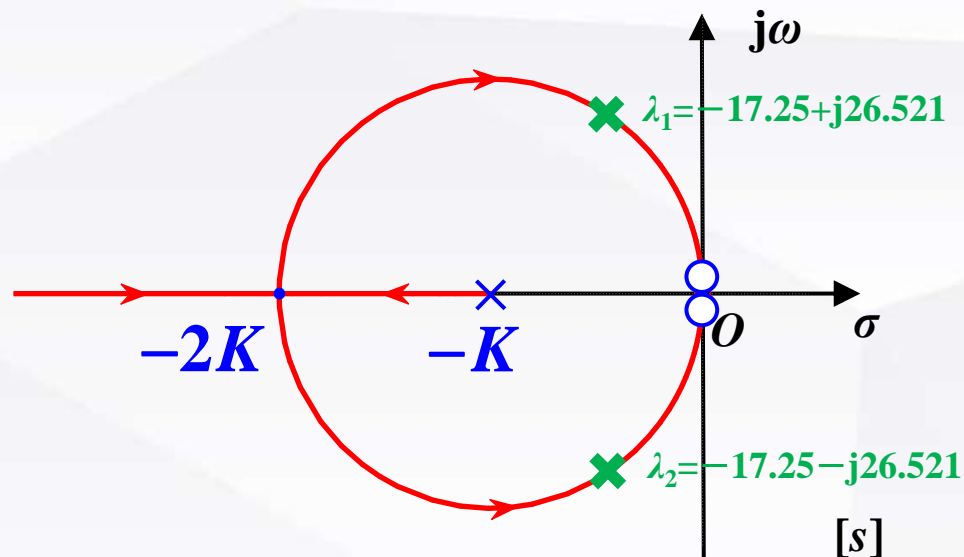
$$2\angle s - \angle(s + K) = (2k + 1) \times 180^\circ$$

两边同时取正切值并将实部虚部代入化简可得：

$$(\sigma + K)^2 + \omega^2 = K^2$$

故根轨迹是以 $(0, -K)$ 圆心、以 K 为半径的圆：

§ 4.3 参数根轨迹



根轨迹概略图

可见系统始终稳定。根据幅值条件可知分离点处时间常数 $T_m = 1/(4K)$ ，可知系统暂态性能：

- 当 $0 < T_m < 1/(4K)$ 时：过阻尼状态
- 当 $T_m = 1/(4K)$ 时：临界阻尼状态
- 当 $T_m > 1/(4K)$ 时：欠阻尼状态，分析 T_s, σ_p, ζ 变化规律

②当 $K=29$ 时，为把系统的极点配置到指定位置，根据幅值条件有：

$$T_m = \left| \frac{s + 29}{s^2} \right|_{s=-17.25+j26.521} = 0.029$$

分析系统的完整性能必须回到原系统，其闭环传递函数为：

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= \frac{K / T_m}{s^2 + s / T_m + K / T_m} \\ &= \frac{1000.5}{s^2 + 34.5s + 1000.5} \end{aligned}$$

自然频率 $\omega_n = 31.631$ rad/s, 阻尼比 $\zeta = 0.545$

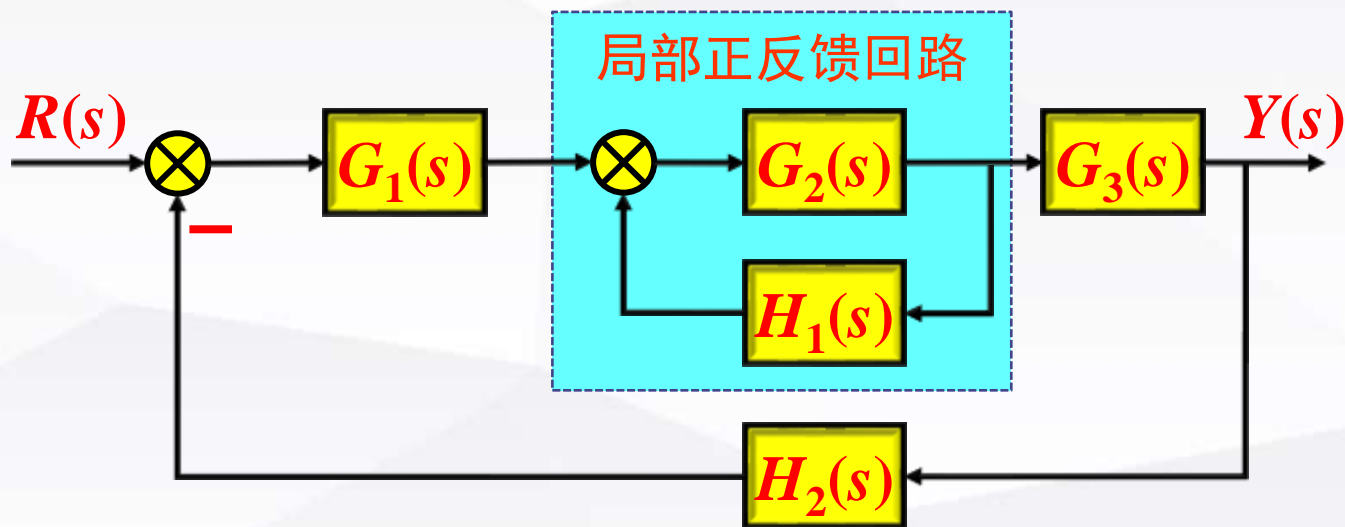
计算： T_s, T_p, σ_p

系统为I型， $K_v = K = 29$ ，稳态误差 $e_{sr} = 0.0345$ 。

§ 4.4 零度根轨迹

在复杂控制系统中，由于控制对象本身的特性或为满足某种性能要求，会出现含有正反馈的内回路，如非最小相位系统等。

考虑如下反馈系统：



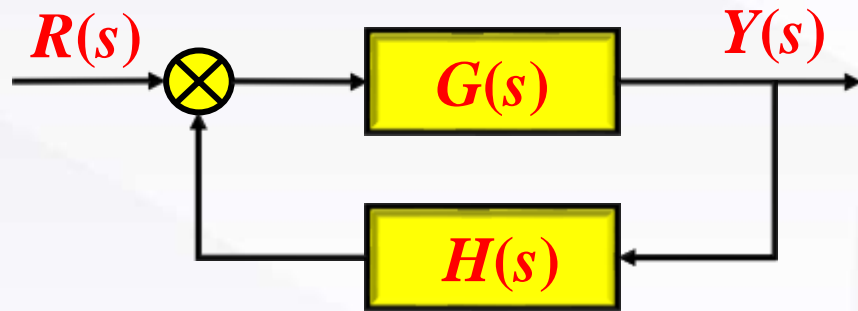
具有局部正反馈内回路的系统结构图

为确定内回路的零极点分布，需要绘制正反馈根轨迹图，也称为零度根轨迹。

§ 4.4 零度根轨迹

幅值条件与辐角条件

考虑如下正反馈系统：



闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)H(s)} = \frac{G(s)}{1 - G_k(s)}$$

闭环特征方程为：

$$1 - G_k(s) = 0$$

复数 s 为系统闭环特征根的充要条件是：

$$G_k(s) = 1$$

化为复数形式：

- 幅值条件： $|G_k(s)| = 1$
- 辐角条件： $\angle G_k(s) = 2k \times 180^\circ$

其中 $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

可见：零度根轨迹可视为根轨迹增益 $K_g \in (-\infty, 0)$ 的常规根轨迹，故又称补根轨迹，与常规根轨迹合成完整根轨迹。

§ 4.4 零度根轨迹

显然，绘制零度根轨迹的规则仍为八条。与常规根轨迹相比，仅与辐角条件相关的绘制规则发生变化，而剩余的绘制规则保持不变。发生变化的如下：

规则3：实轴上的根轨迹：实轴上的某一区域，若其右边的开环实数零、极点个数之和为偶数，则该区域必为根轨迹。

规则4：根轨迹的渐近线：当系统开环极点个数 n 大于开环零点个数 m 时，由 $n-m$ 条根轨迹分支沿着与实轴夹角 φ_a 、交点为 σ_a 的一组渐近线趋于无穷远处。其中：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}, \quad \varphi_a = \frac{2k\pi}{n - m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

规则7：根轨迹的出射角和入射角：分子分母辐角之差为 $2k \times 180^\circ$ ， $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$

§ 4.4 零度根轨迹

零度根轨迹绘制规则八条：

法则 1 根轨迹的起点和终点

法则 2 根轨迹的分支数，对称性和连续性

法则 3 实轴上的根轨迹：其右边的开环实数零、极点个数之和为偶数

法则 4 渐近线
$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n - m}, \quad \varphi_a = \frac{2k\pi}{n - m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

法则 5 分离点
$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{d - p_j} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{d - z_i}$$

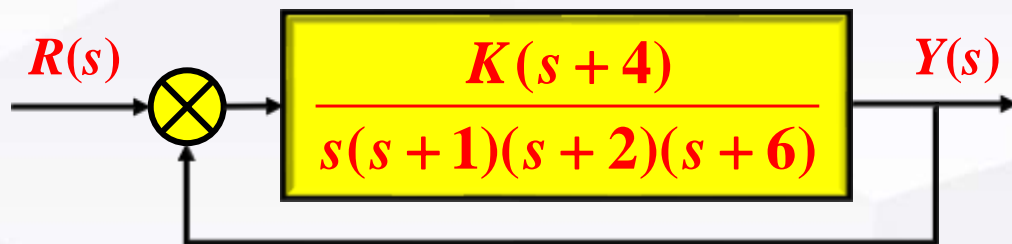
法则 6 与虚轴交点 $\text{Re}[\Delta(j\omega)] = \text{Im}[\Delta(j\omega)] = 0$ or Routh

法则 7 出射角与入射角
$$\sum_{i=1}^m \angle(s - z_i) - \sum_{j=1}^n \angle(s - p_j) = 2k \times 180^\circ, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

法则 8 根之和
$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \sum_{i=1}^n p_i = \text{定值}, \quad n - m \geq 2$$

§ 4.4 零度根轨迹

例：试绘制如下单位正反馈系统的根轨迹概略图。



该系统的根轨迹概略图绘制如下：

解：开环传递函数为： $G_k(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+1)(s+2)(s+6)}$

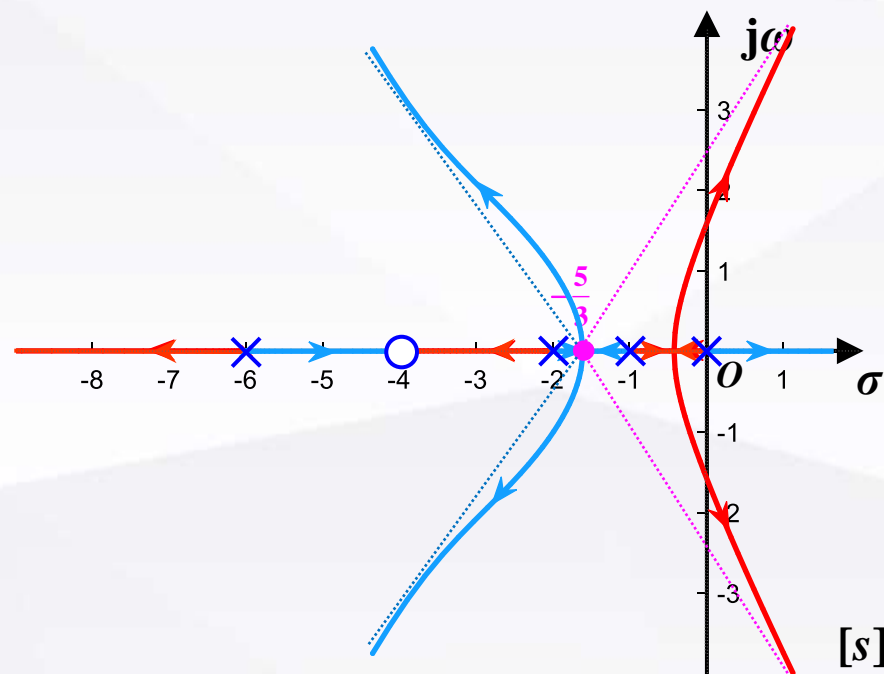
开环零点： $-4, \infty, \infty, \infty, m=1$

开环极点： $0, -1, -2, -6, n=4$

实轴上根轨迹： $(-6, -4), (-2, -1), (0, +\infty)$

渐近线：

$$\sigma_a = \frac{\sum_{j=1}^n p_j - \sum_{i=1}^m z_i}{n-m} = -\frac{5}{3}, \quad \varphi_a = \frac{2k\pi}{n-m} = \begin{cases} 0^\circ, & k=0 \\ -120^\circ, & k=-1 \\ 120^\circ, & k=+1 \end{cases}$$



根轨迹概略图

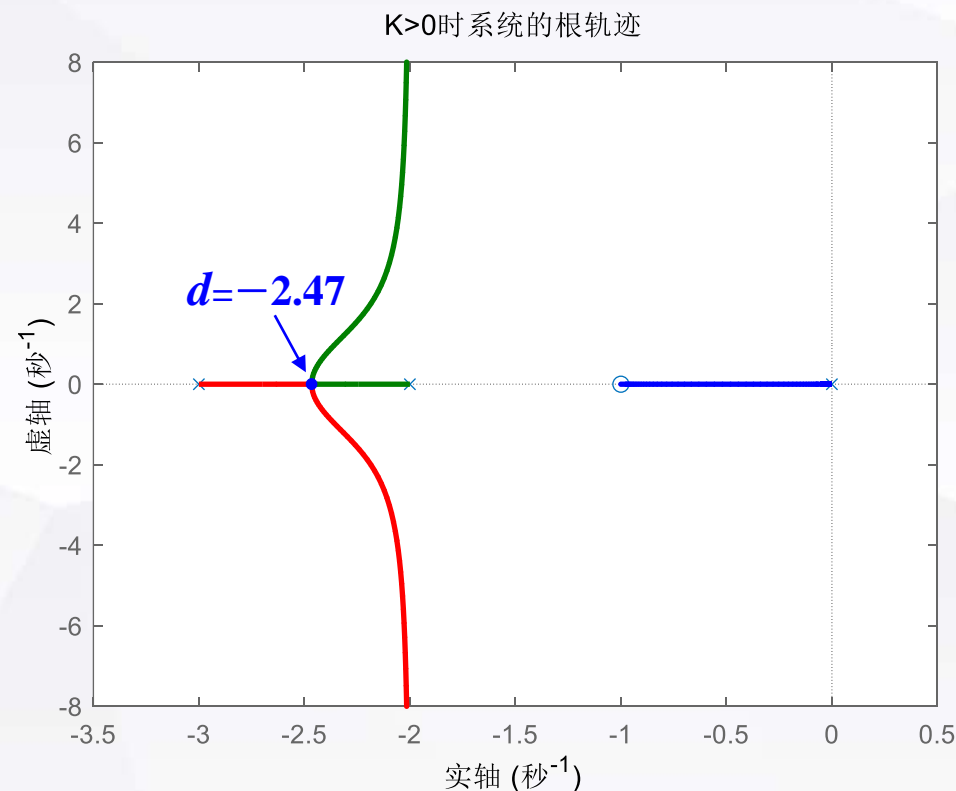
§ 4.4 零度根轨迹

例：若实系数多项式 $f(x)=x^3+5x^2+(\alpha+6)x+\alpha$ 的根均为实数，求参数 α 的取值范围。

分析：将方程 $f(x)=x^3+5x^2+(\alpha+6)x+\alpha=0$ 视为某个系统的闭环特征方程，则考虑用根轨迹方法求解。

解：将 $f(x)=0$ 视为某系统闭环特征方程，则等效传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{K(s+1)}{s^3 + 5s^2 + 6s}, \quad s = x, K = \alpha$$



§ 4.4 零度根轨迹

例：若实系数多项式 $f(x)=x^3+5x^2+(\alpha+6)x+\alpha$ 的根均为实数，求参数 α 的取值范围。

分析：将方程 $f(x)=x^3+5x^2+(\alpha+6)x+\alpha=0$ 视为某个系统的闭环特征方程，则考虑用根轨迹方法求解。

解：将 $f(x)=0$ 视为某系统闭环特征方程，则等效传递函数为：

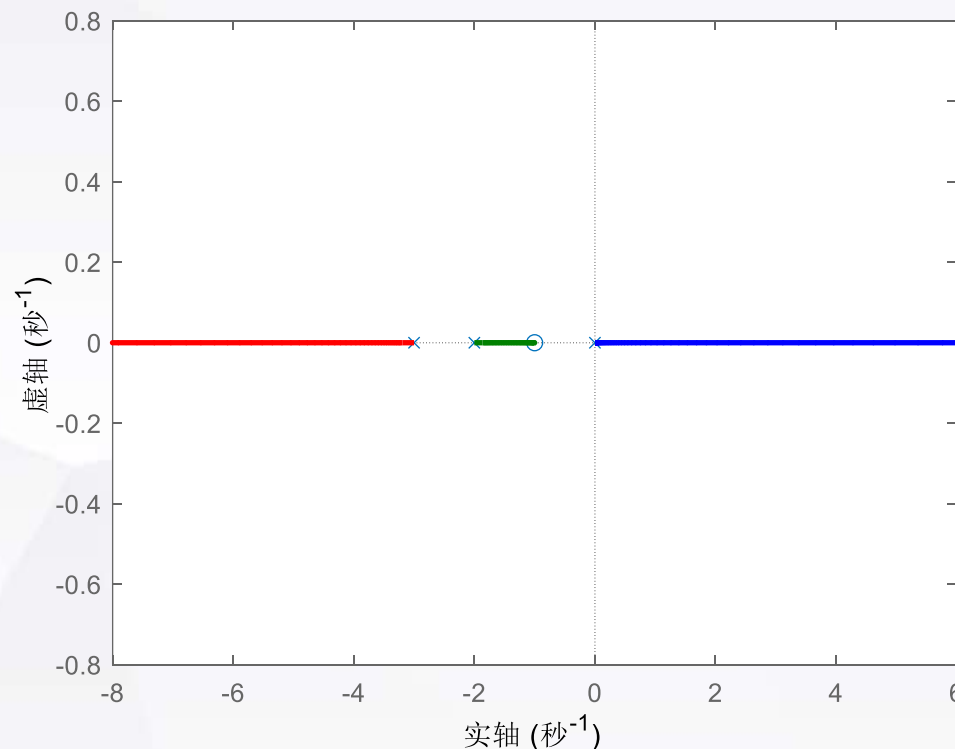
$$G_k(s) = \frac{K(s+1)}{s^3 + 5s^2 + 6s}, \quad s = x, K = \alpha$$

- 利用Matlab绘制当 $K>0$ 和 $K<0$ 时系统的根轨迹图，其中 $K>0$ 时分离点 $d=-2.47$ ，根据幅值条件分离点处

$$K = \left| \frac{s^3 + 5s^2 + 6s}{s+1} \right|_{s=-2.47} = 0.415$$

- $K=0$ 时方程 $f(x)=0$ 有三个实根：0, -2, -3。
- 综上参数 α 的取值范围是： $\alpha \in (-\infty, 0.415)$

K<0时系统的根轨迹



§ 4.5 根轨迹族

实际工程问题中经常遇到含有多个可变参数的控制系统，可以将多个可变参数的根轨迹族问题嵌入到较简单的一个可变参数的根轨迹问题处理。

设系统特征方程为：

$$A(s) + X_1 B_1(s) + X_2 B_2(s) = 0$$

第一步：令其中某一可变参数为零，将问题简化为只有一个可变参数的根轨迹问题来处理。不妨先令参数 $X_2=0$ ，则有 $A(s) + X_1 B_1(s) = 0$ ，其等效传递函数为：

$$G_{k1}(s) = X_1 \frac{B_1(s)}{A(s)}$$

第二步：恢复 X_2 并以 X_2 为可变参数，得到等效开环传递函数：

$$G_{k2}(s) = \frac{X_2 B_2(s)}{A(s) + X_1 B_1(s)}$$

可见：

- ① $G_{k2}(s)$ 开环极点是第一步简化系统的闭环极点；
- ② 根据 $G_{k2}(s)$ 绘制的根轨迹，其起点均在简化系统的根轨迹上；
- ③ 当两个参数同时变化时系统的根轨迹族，是起始于简化系统根轨迹上不同点的一族根轨迹曲线。

§ 4.5 根轨迹族

例： 设单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)}, K > 0, \tau > 0$$

- ① 绘制以 K 和 τ 为可变参数的根轨迹族；
- ② 分析系统稳定性以及当 $K=20$ 时 τ 的大小对系统稳定性的影响。

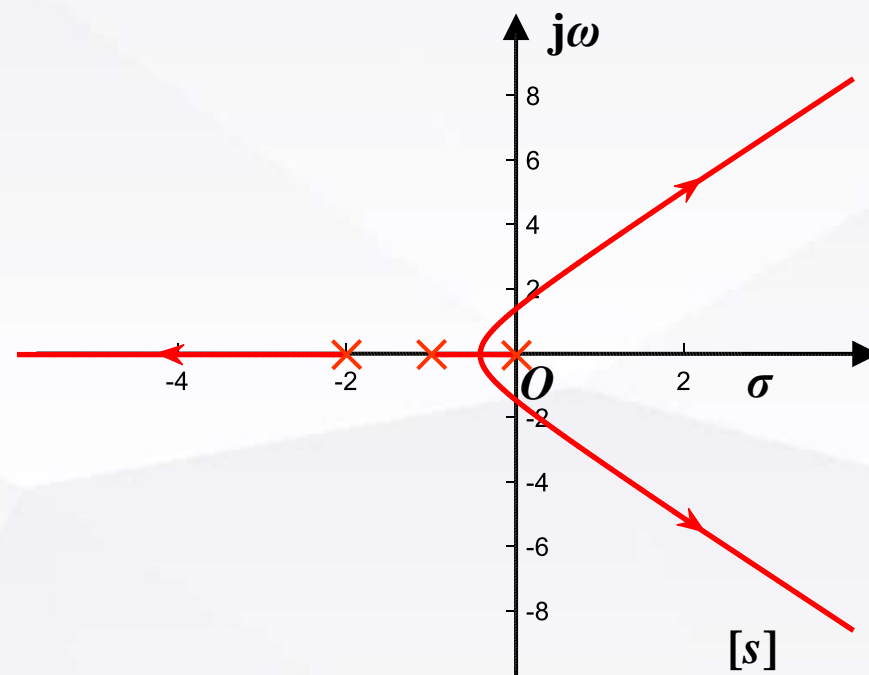
解： 闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2) + K(1 + \tau s)}$$

令 $\tau=0$ ，则等效传递函数为：

$$G_{k1}(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

系统 $\tau=0$ 时的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

§ 4.5 根轨迹族

例： 设单位反馈系统的开环传递函数为：

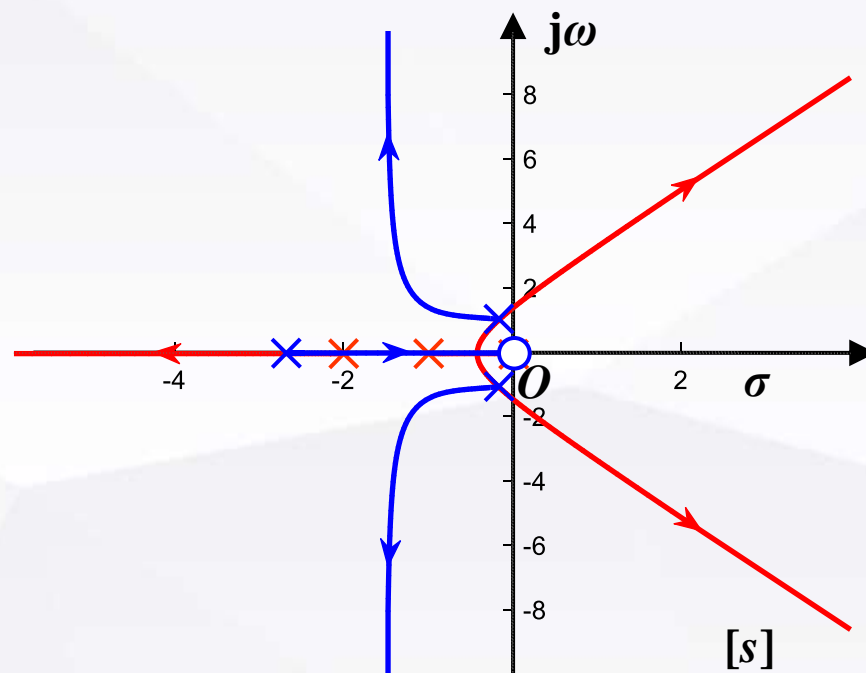
$$G_k(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)}, K > 0, \tau > 0$$

- ① 绘制以 K 和 τ 为可变参数的根轨迹族；
- ② 分析系统稳定性以及当 $K=20$ 时 τ 的大小对系统稳定性的影响。

解： 恢复 τ 为可变参数，等效传递函数为：

$$G_{k2}(s) = \frac{\tau K s}{s(s+1)(s+2) + K}$$

系统 $K=3$ 时的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

§ 4.5 根轨迹族

例： 设单位反馈系统的开环传递函数为：

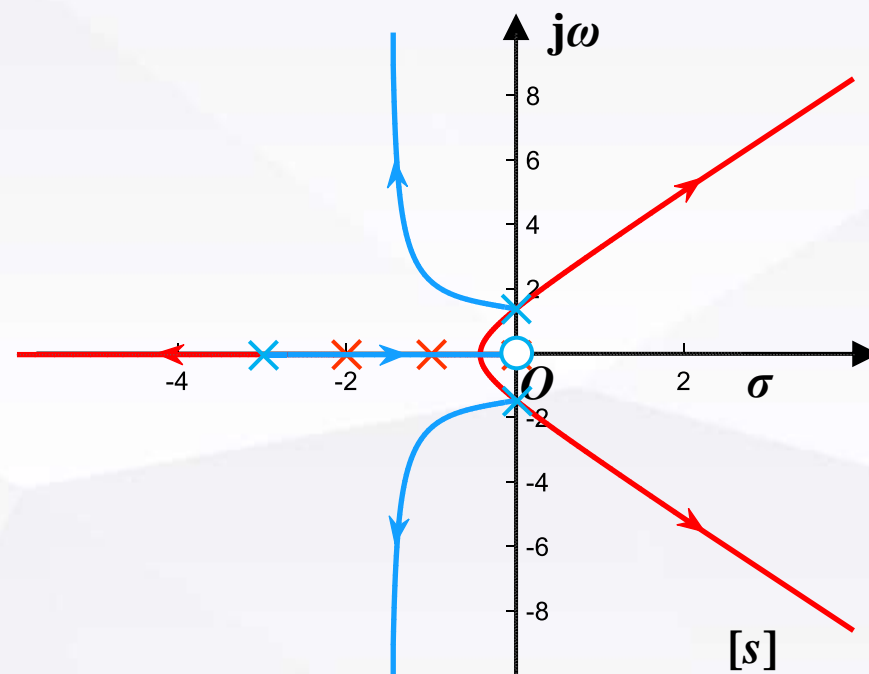
$$G_k(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)}, K > 0, \tau > 0$$

- ① 绘制以 K 和 τ 为可变参数的根轨迹族；
- ② 分析系统稳定性以及当 $K=20$ 时 τ 的大小对系统稳定性的影响。

解： 恢复 τ 为可变参数，等效传递函数为：

$$G_{k2}(s) = \frac{\tau K s}{s(s+1)(s+2) + K}$$

系统 $K=6$ 时的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

§ 4.5 根轨迹族

例： 设单位反馈系统的开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{K(1 + \tau s)}{s(s+1)(s+2)}, K > 0, \tau > 0$$

- ① 绘制以 K 和 τ 为可变参数的根轨迹族；
- ② 分析系统稳定性以及当 $K=20$ 时 τ 的大小对系统稳定性的影响。

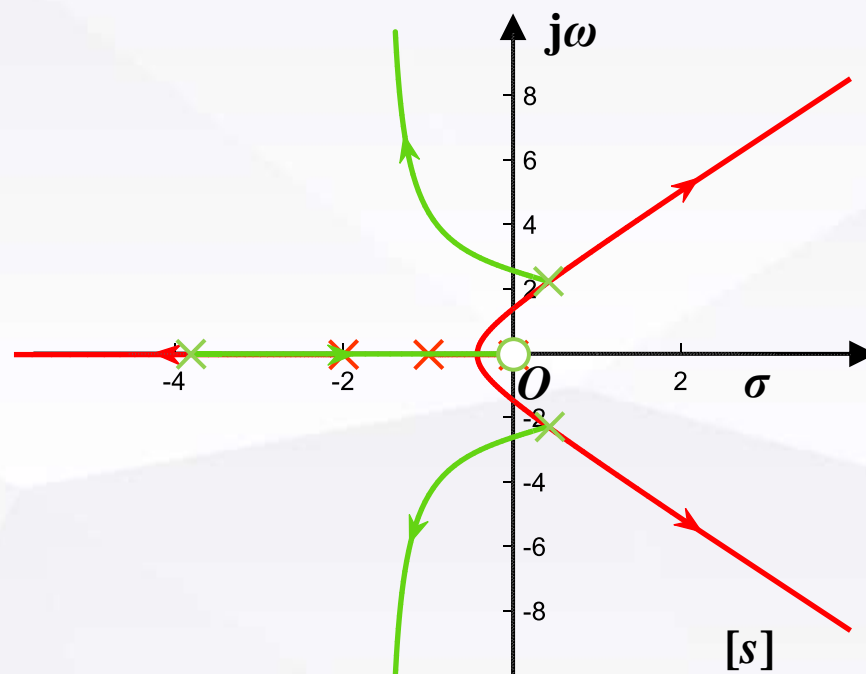
解： 恢复 τ 为可变参数，等效传递函数为：

$$G_{k2}(s) = \frac{\tau K s}{s(s+1)(s+2) + K}$$

当 $K=20$ 时，利用劳斯判据可知：

- 当 $30/7 < \tau < +\infty$ 时系统是稳定的；
- 当 $0 < \tau \leq 30/7$ 时系统是不稳定的。

系统 $K=20$ 时的根轨迹概略图绘制如下：



根轨迹概略图

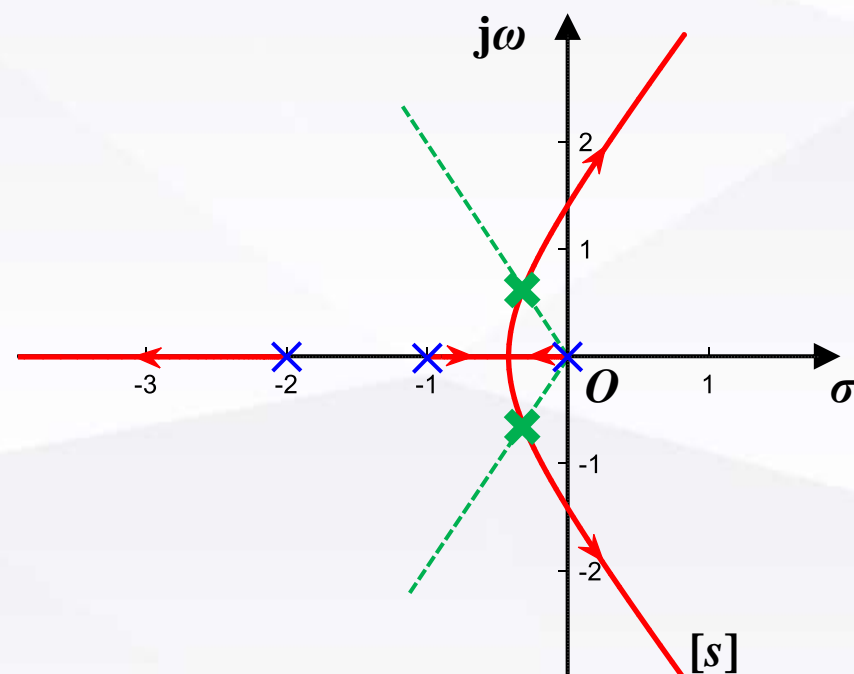
§ 4.6 控制系统性能的复域分析

通过系统的根轨迹图，容易观察到当系统参数在取值范围内变化时所有闭环极点在复平面内分布及变化趋势（**特别地：是否符合主导极点分布规律以对高阶系统进行降阶处理**），从而便于对闭环系统的稳定性、暂态性能和稳态性能进行分析和估算。

例： 设单位负反馈系统开环传递函数为：

$$G_k(s) = \frac{K}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

- ① 试用根轨迹法确定系统在稳定欠阻尼状态下的开环增益 K 的范围；
- ② 计算阻尼比 $\zeta=0.5$ 时的 K 值及相应的闭环极点，估算此时系统的暂态性能指标和稳态单位速度误差。



根轨迹概略图

§ 4.6 控制系统性能的复域分析

①试用根轨迹法确定系统在稳定欠阻尼状态下的开环增益 K 的范围；

解：可见当 $K_g^* > K > 0$ 时，系统是稳定的。因此系统进入稳定欠阻尼状态的两个临界点分别是系统根轨迹的分离点 d 和临界根轨迹增益 K_g^* ：

分离点 d ：

$$K_g(s) = 2K = -(s^3 + 3s^2 + 2s)$$

$$K'_g(s) = -(3s^2 + 6s + 2) = 0 \rightarrow d = -0.432$$

根据幅值条件，此时系统的根轨迹增益为：

$$K_g(d) = 2K = |(s^3 + 3s^2 + 2s)_{s=d}| = 0.4$$

临界根轨迹增益 K_g^* ：系统的闭环特征多项式为：

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K_g^* = 0$$

令其实部和虚部均为零，则：

$$\begin{cases} \text{Re}[\Delta(j\omega)] = -3\omega^2 + K_g^* = 0 \\ \text{Im}[\Delta(j\omega)] = -\omega^3 + 2\omega = 0 \end{cases}$$

求解上述方程可得：

$$\begin{cases} \omega = \pm\sqrt{2} \\ K_g^* = 6 \end{cases}$$

综上所述：系统进入稳定欠阻尼状态的开环增益 K 的取值范围是：

$$0.2 < K < 3$$

§ 4.6 控制系统性能的复域分析

②计算阻尼比 $\zeta=0.5$ 时的 K 值及相应的闭环极点，估算此时系统的暂态性能指标和稳态单位速度误差。

解：设系统的闭环极点分别为：

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega \pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2}, \quad \lambda_3 = \lambda_3$$

阻尼比 $\zeta=0.5$ 时，可知：

$$\lambda_{1,2} = -0.5\omega \pm j0.866\omega, \quad \lambda_3 = \lambda_3$$

系统的闭环特征多项式为：

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= (s - \lambda_1)(s - \lambda_2)(s - \lambda_3) \\ &= s^3 + (\omega - \lambda_3)s^2 + \omega(\omega - \lambda_3)s - \lambda_3\omega^2 \\ &= s^3 + 3s^2 + 2s + K_g = 0\end{aligned}$$

比较系数有：

$$\begin{cases} \omega - \lambda_3 = 3 \\ \omega(\omega - \lambda_3) = 2 \\ -\lambda_3\omega^2 = K_g \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0.667 \\ \lambda_3 = -2.33 \\ K_g = 1.04 \end{cases}$$

故阻尼比 $\zeta=0.5$ 时开环增益 $K=0.52$ ，闭环极点为：

$$\lambda_{1,2} = -0.33 \pm j0.58, \quad \lambda_3 = -2.33$$

闭环极点实部之比为 $2.33/0.33 \approx 7$ 倍，故 $\lambda_{1,2}$ 为主导极点，原系统可降阶为二阶系统处理，注意到原系统闭环增益为 1，降阶系统的闭环传递函数为：

$$\Phi(s) = \frac{\lambda_1\lambda_2}{(s + \lambda_1)(s + \lambda_2)} = \frac{0.667^2}{s^2 + 0.667s + 0.667^2}$$

从而有：

超调量： $\sigma_p = 16.3\%$

调节时间： $t_s = 9s$ ($\Delta=5\%$)

峰值时间： $t_p = 5.42s$

单位速度误差： $e_s = 1.92$

§ 4.6 控制系统性能的复域分析

仅通过调节系统的（根轨迹或开环）增益值，通常难以获得满意的系统性能。

例： 设单位反馈系统的开环传递函数为： 根据根之和性质，相应的系统另外一对非主导闭环极点为：

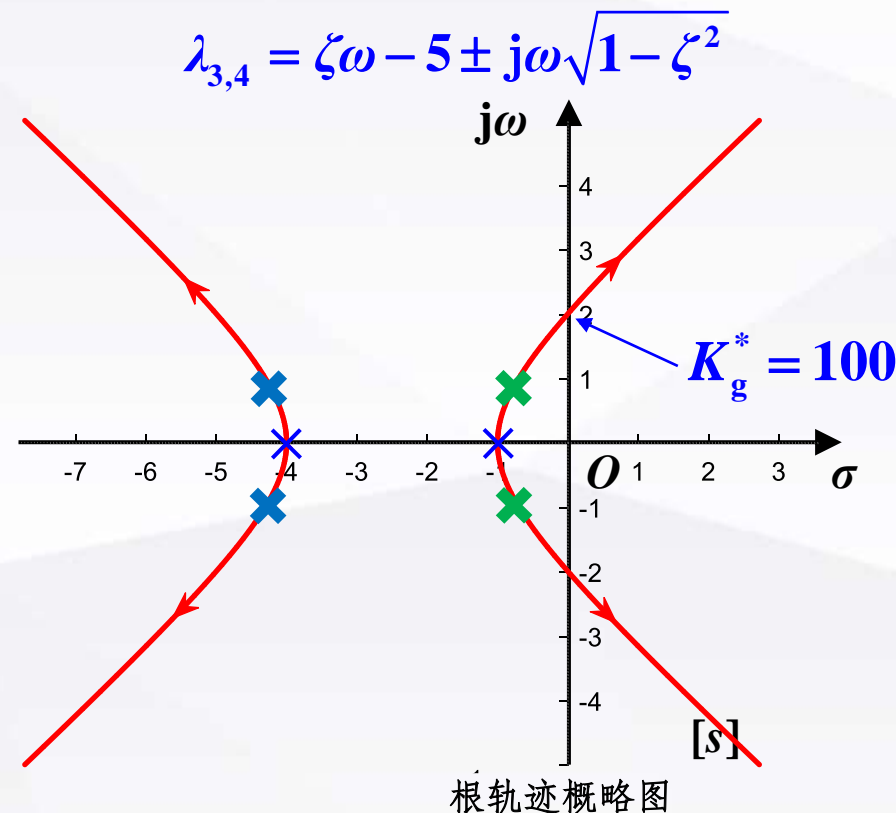
$$G_k(s) = \frac{K}{(s+1)^2(s+4)^2}$$

- ① 绘制系统的根轨迹；
- ② 能够通过选择 K 使得：
 - a) 最大超调量 $\sigma_p \leq 4.32\%$?
 - b) 调节时间： $t_s \leq 2s$ ($\Delta=2\%$)?
 - c) 位置误差系数 $K_p \geq 10$?

解： 绘制系统的根轨迹如右图所示。

可见系统存在一对主导极点，设为：

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega \pm j\omega\sqrt{1-\zeta^2}$$



§ 4.6 控制系统性能的复域分析

a) 最大超调量 $\sigma_p \leq 4.32\%$:

当系统超调量 $\sigma_p = 4.32\%$ 时, 系统阻尼比 $\zeta = 0.707$, 故主导极点实部虚部相等, 则闭环极点可设为:

$$\lambda_{1,2} = -\sigma \pm j\sigma, \lambda_{3,4} = \sigma - 5 \pm j\sigma$$

系统的闭环特征方程式为:

$$\begin{aligned}\Delta(s) &= \prod_{i=1}^4 (s - \lambda_i) \\ &= s^4 + 10s^3 + (25 + 10\sigma)s^2 + 50\sigma s + (50 - 20\sigma + 4\sigma^2) \\ &= s^4 + 10s^3 + 33s^2 + 40s + 16 + K \\ &= 0\end{aligned}$$

比较系数有:

$$\begin{cases} \sigma = 0.8 \\ K = 7.9 \end{cases}$$

当取 $0 < K \leq 7.9$ 时, 系统超调量 $\sigma_p \leq 4.32\%$ 。

b) 调节时间: $t_s \leq 2s$ ($\Delta = 2\%$):

系统主导极点实部必然大于等于 -1 , 故调节时间 $t_s \geq 4s$, 故无法实现。

c) 位置误差系数 $K_p \geq 10$:

位置误差系数 $K_p = K/16 \geq 10$, 意味着根轨迹增益 $K_g = K \geq 160 > K_g^* = 100$, 此时系统依然不稳定, 故无法实现。

总结: 仅通过调节系统的增益, 具有很大的局限性, 通常难以获得满意的系统性能; 此时, 必须引入校正环节才能达到性能设计要求。