第十一讲

上节回顾

频率特性： 稳态正弦响应与输入正弦信号的复数比

$$G(j\omega)=|G(j\omega)|\angle G(j\omega)$$

$|G(j\omega)|$：系统的**幅频特性**

$\angle G(j\omega)$：系统的**相频特性**

频率特性的物理意义：

频率特性描述了在不同频率下系统传递正弦信号的能力

图示法：

- 极坐标图（Nyquist图）
- 对数频率特性图（伯德（Bode）图）

§ 5.3 频域稳定性判据

系统稳定的充要条件

全部闭环极点均具有负的实部

代数稳定判据：Routh判据

由闭环特征多项式系数（不解根）判定系统稳定性

不能用于研究如何调整系统结构来改善系统稳定性的问题

频域稳定判据

Nyquist 判据

对数稳定判据

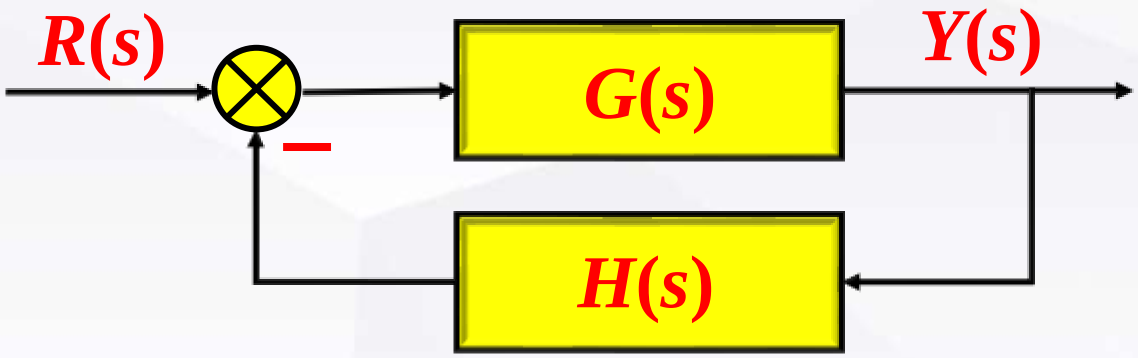
由开环频率特性直接判定闭环系统的稳定性

可以研究包含延迟环节的系统的稳定性问题

可研究如何调整系统结构参数改善系统稳定性及性能问题

§ 5.3 频域稳定性判据

考虑如下反馈控制系统：



令：

$$G(s)=\frac{N_G(s)}{D_G(s)},H(s)=\frac{N_H(s)}{D_H(s)}$$

则有：

$$1+G(s)H(s)=\frac{\boxed{N_G(s)N_H(s)+D_G(s)D_H(s)}}{\boxed{D_G(s)D_H(s)}}$$

$N_G(s)N_H(s)+D_G(s)D_H(s)$ ⟶ 系统的闭环极点

$D_G(s)D_H(s)$ ⟶ 系统的开环极点

§ 5.3 频域稳定性判据

映射定理（柯西围线定理）

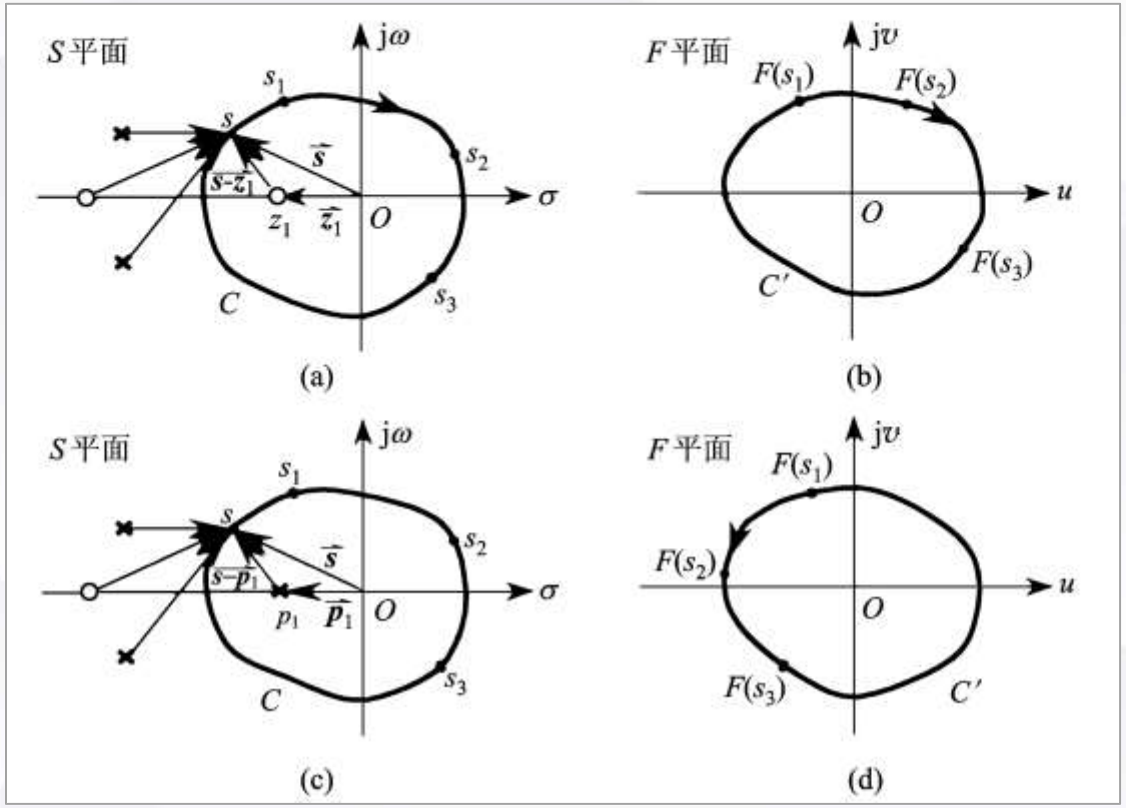
设有理函数

$$F(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)},n\geq m$$

注：若闭曲线C不通过F(s)的任一零点或极点，则F(s)对应的曲线C’仍为闭曲线。

若其自变量s在原相平面上沿着封闭曲线C顺时针运动一周，结合曲线C内部和外部函数F(s)零、极点分布情况，考察相平面上函数F(s)的运动情况。

注：本节所有结论均基于沿逆时针运动为正方向之约定。



映射定理示意图

§ 5.3 频域稳定性判据

结论：

- 若封闭曲线C内部存在一个零点 z，则s在原相平面上沿着曲线C顺时针运动一周，$F(s)$相角变化-2π rad，即$F(s)$绕原点顺时针旋转一圈；
- 若封闭曲线C内部存在一个极点 p，则s在原相平面上沿着曲线C顺时针运动一周，$F(s)$相角变化$+2\pi$ rad，即$F(s)$绕原点逆时针旋转一圈；
- 对于分布在封闭曲线C外部的零、极点，s在原相平面上沿曲线C顺时针运动一周，$F(s)$相角保持不变。

映射定理

如果在s平面上某一闭曲线C内含有$F(s)$的P个极点和Z个零点且该闭曲线不通过$F(s)$的任一零点或极点，当s沿闭曲线顺时针方向连续变化一周时，函数$F(s)$沿逆时针方向绕坐标原点的周数N为：$N=P-Z$．

§ 5.3 频域稳定性判据

Nyquist判据

· 若系统开环传递函数在右半开复平面上有P个极点，且Nyquist曲线对临界点(—1, j0)包围的圈数 N (N>0为逆时针，N<0为逆时针)，则系统闭环极点在右半开复平面的数目Z为：

$$Z = P - N\ ;$$

如果 Z=0, 则系统稳定；

如果 Z≠0, 则系统不稳定。

· 若对于开环稳定的系统或最小相位系统，此时P =0，则系统稳定的充要条件是：系统的开环频率特性$G_k(j\omega)$不包围临界点；

· 若闭环系统临界稳定，则系统开环频率特性$G_k(j\omega)$通过临界点。

§ 5.3 频域稳定性判据

Nyquist判据推导*

总共分为三个步骤：

①建立一个能包围整个s右半平面的围线，且该围线符合映射定理；

②如何进行围线映射

③如何确定$F(s)$相应的映射围线对原点的包围圈数N，并将$F(s)$和系统的开环频率特性$G_k(j\omega)$相关联。

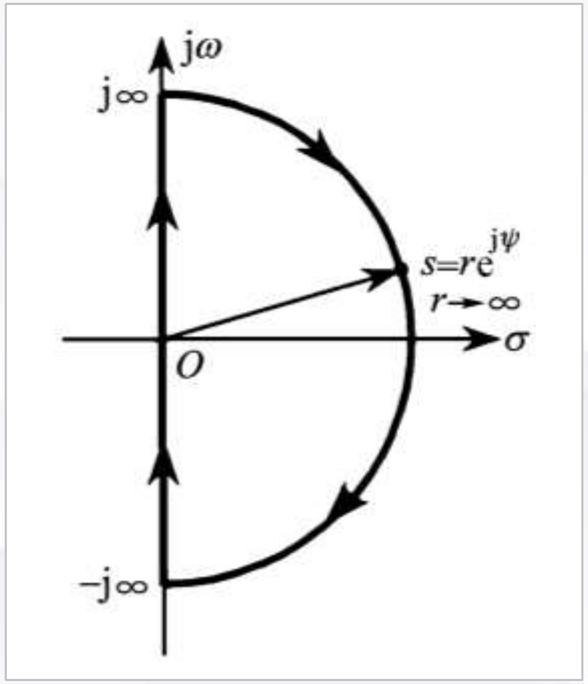
§ 5.3 频域稳定性判据

Nyquist判据推导*

令$F(s)=1+G_k(s)$，则Nyquist判据推导如下：

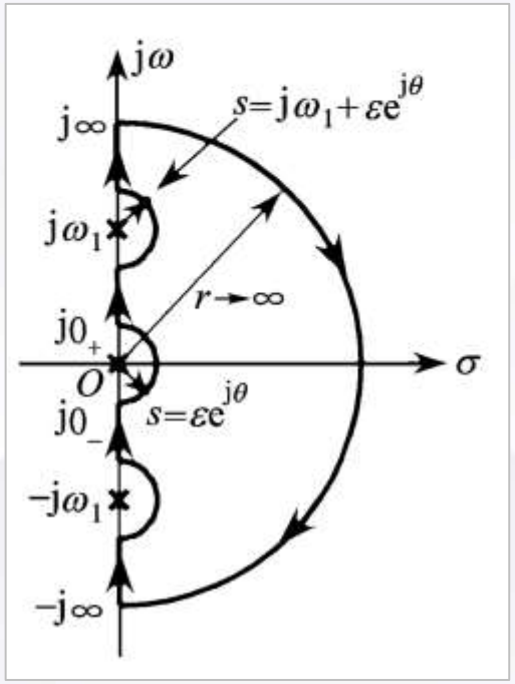
①建立一个能包围整个s右半平面的围线，且该围线符合映射定理：

虚轴上无开环极点



s平面上的D型围线

虚轴上有开环极点



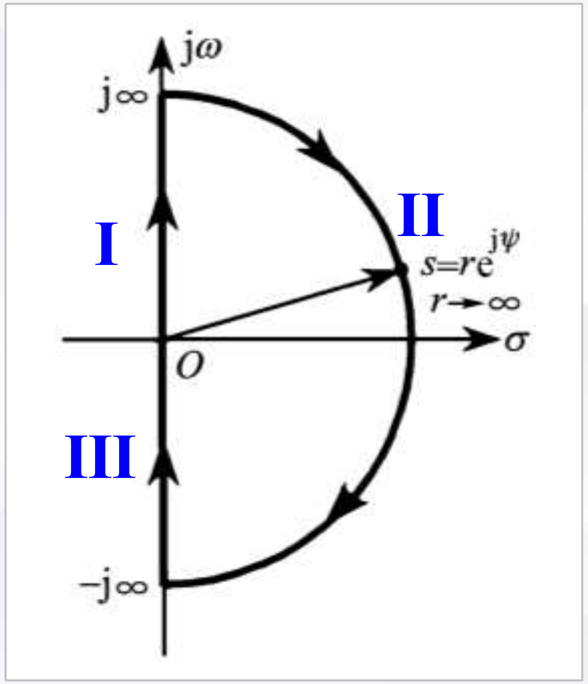
s平面上的广义D型围线

§ 5.3 频域稳定性判据

Nyquist判据推导*

令$F(s)=1+G_k(s)$，则Nyquist判据推导如下：

②围线映射



s平面上的D型围线

I段：$s=j\omega$，此时相应的相函数$F(s)|_{s=j\omega}=1+G_k(s)|_{s=j\omega}$；

II段：$s=re^{j\psi}$，注意到$G_k(s)$满足分母阶次n>分子阶次m，故$r\to+\infty$时，$|G_k(s)|\to 0$；

III段：$s=-j\omega$，此时相应的相函数$F(s)|_{s=-j\omega}=1+G_k(s)|_{s=-j\omega}$，与第I段关于实轴对称。

§ 5.3 频域稳定性判据

Nyquist判据推导*

令$F(s)=1+G_k(s)$，则Nyquist判据推导如下：

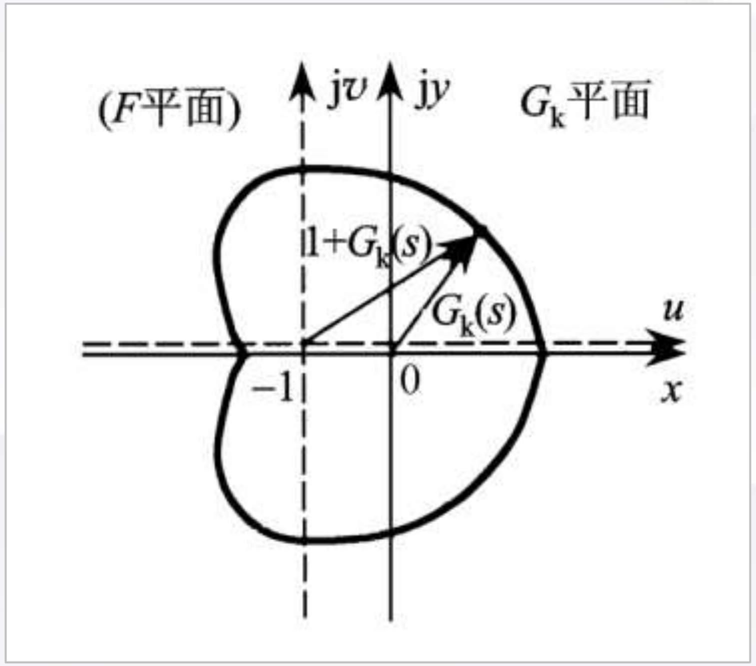
③确定$F(s)$相应的映射围线对原点的包围圈数N，并将$F(s)$和系统的开环频率特性$G_k(j\omega)$相关联：

函数$F(s)=1+G_k(s)$对原点的包围圈数N等价于：

$G_k(s)$对临界点$(-1, j0)$的包围圈数N；

根据②，其又等价于：

$G_k(j\omega)$和$G_k(-j\omega)$对临界点$(-1, j0)$的包围圈数N。



$1+G_k(s)$平面和$G_k(s)$平面

§ 5.3 频域稳定性判据

Nyquist判据

· 若系统开环传递函数在右半开复平面上有P个极点，且Nyquist曲线对临界点(－1, j0)包围的圈数 N (N>0为逆时针，N<0为顺时针)，则系统闭环极点在右半开复平面的数目Z为：

$$Z = P - N\ ;$$

如果 Z=0, 则系统稳定；

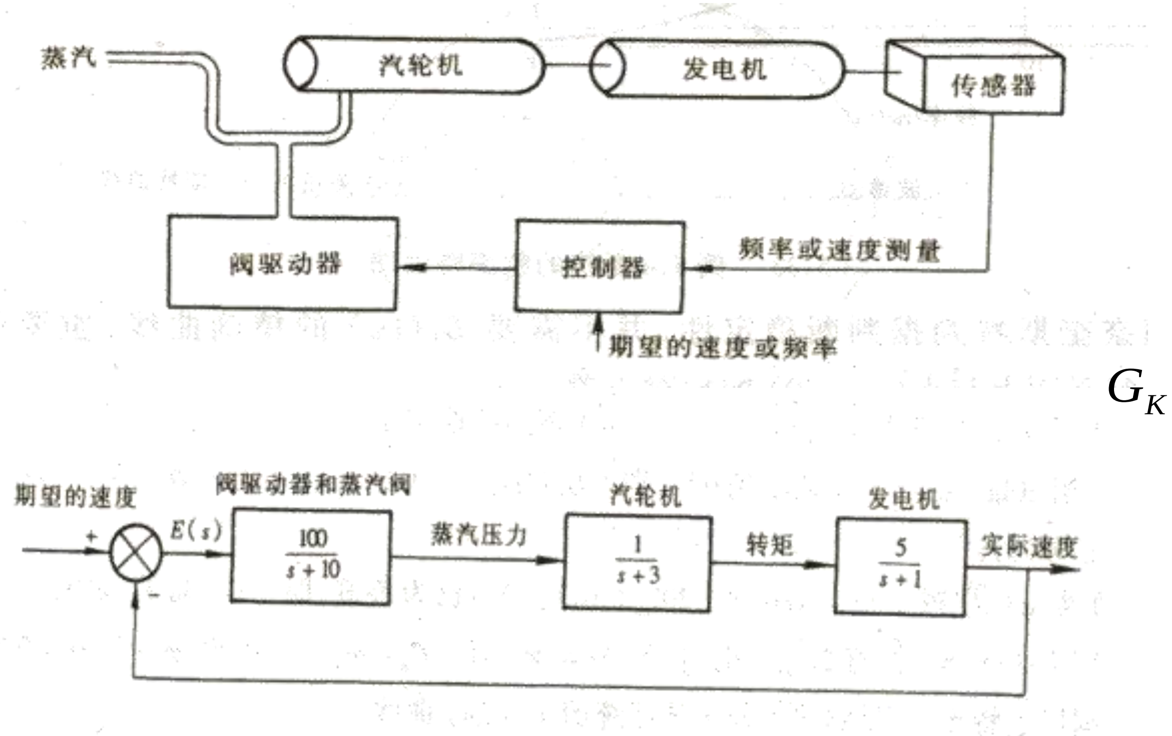
如果 Z≠0, 则系统不稳定。

· 对于最小相位系统，P =0，则系统稳定的充要条件是：系统的开环频率特性$G_k(j\omega)$不包围临界点；

· 若闭环系统临界稳定，则系统开环频率特性$G_k(j\omega)$通过临界点。

◈ Nyquist稳定判据应用举例

- 例5.4



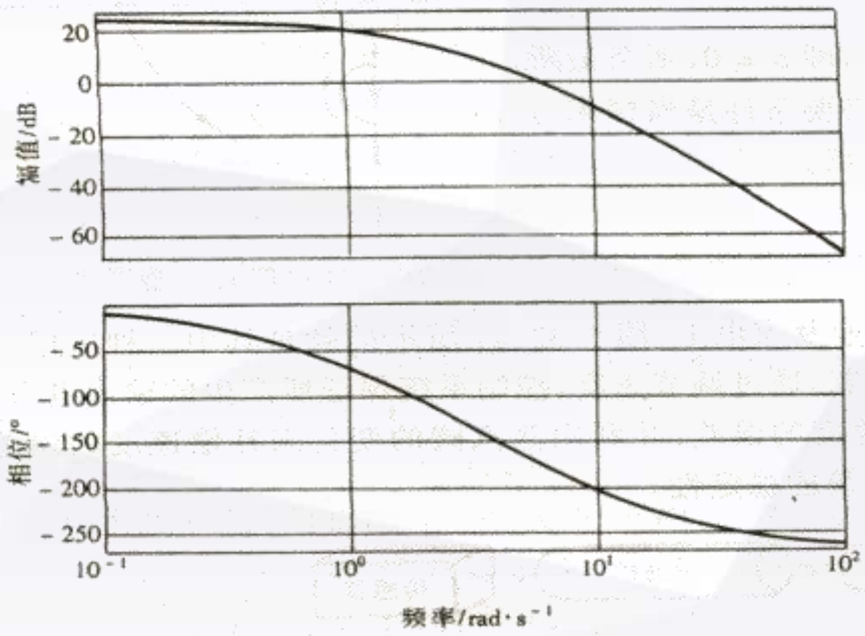
$$G_K(s)=\frac{500}{(s+10)(s+3)(s+1)}$$

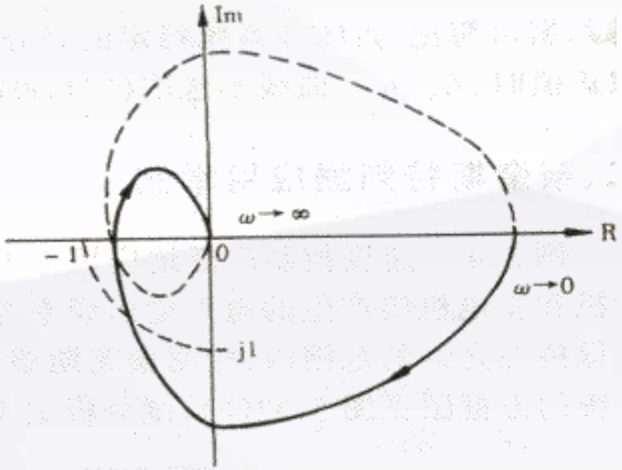
$$=\frac{\frac{50}{3}}{\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)(s+1)}$$

Nyquist稳定判据应用举例（续1）

◆ 系统的Bode图及Nyquist曲线

$$G_K(s)=\frac{500}{(s+10)(s+3)(s+1)}=\frac{\frac{50}{3}}{\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{3}+1\right)(s+1)}$$

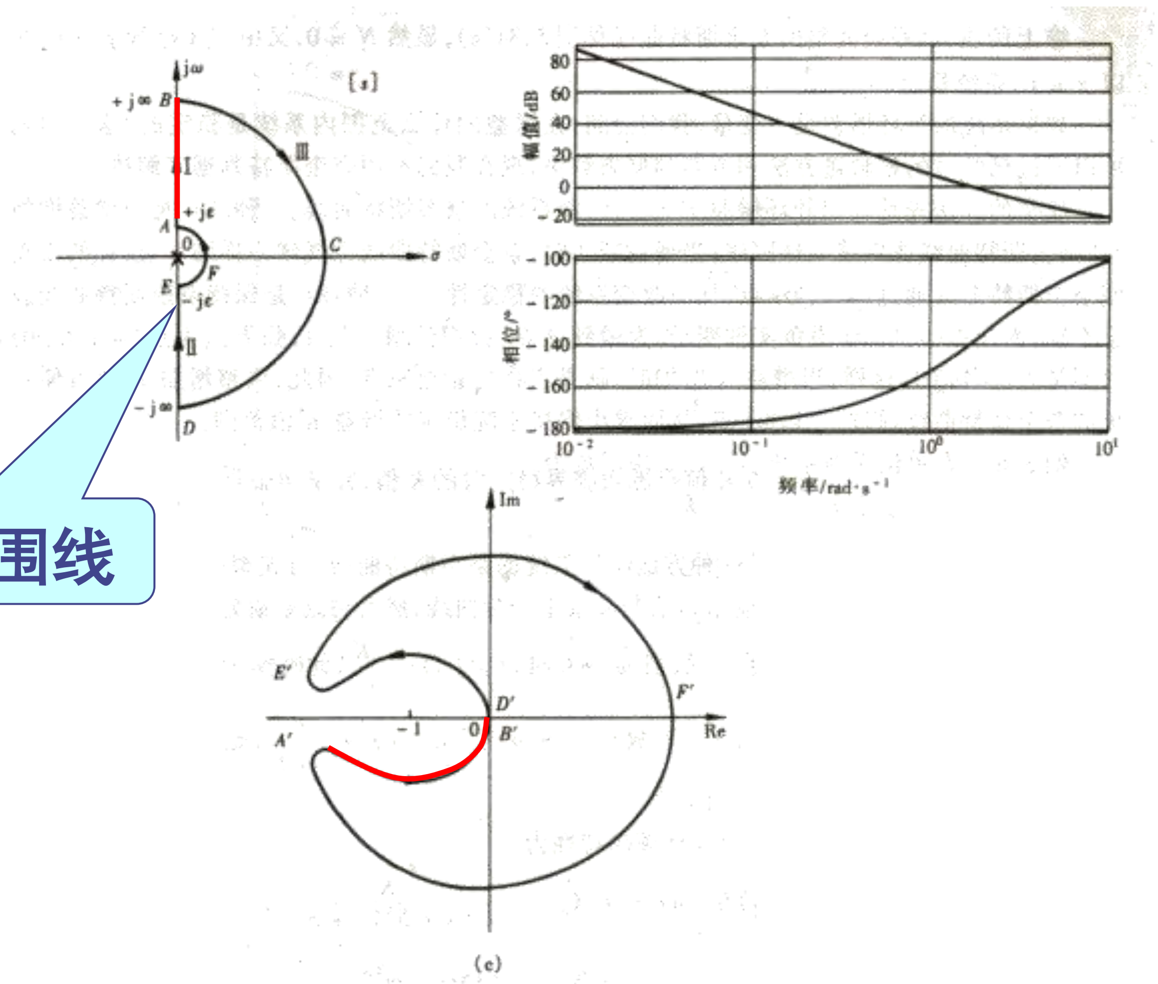




Nyquist稳定判据举例（续2）

◈ 例5.5：

$$G_K(s)=\frac{s+2}{s^2}$$

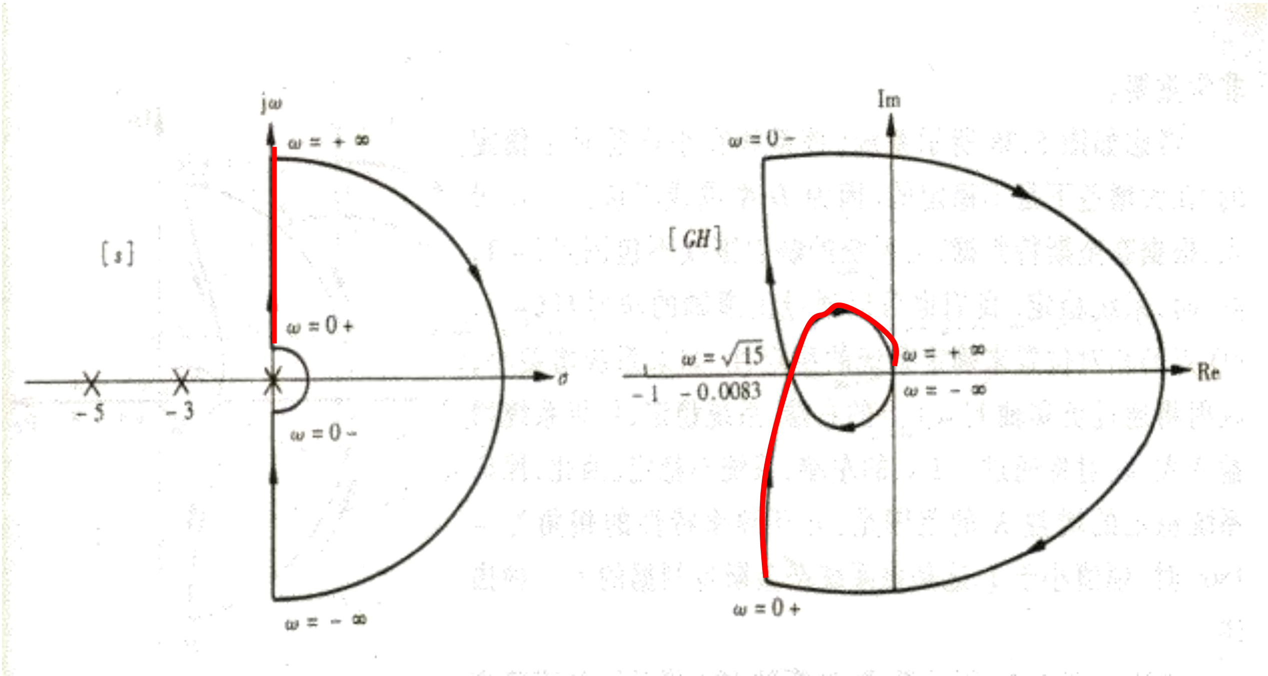


广义D型围线

Nyquist稳定判据举例（续3）

◈ 例5.6

$$G_K(s)=\frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

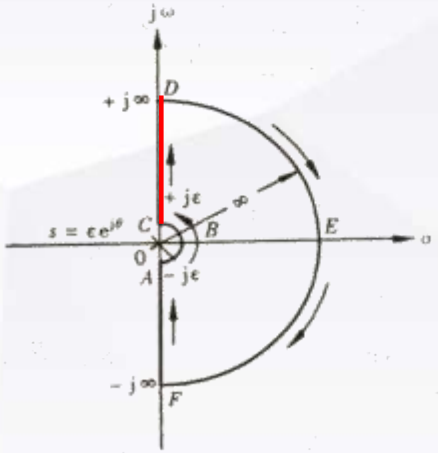


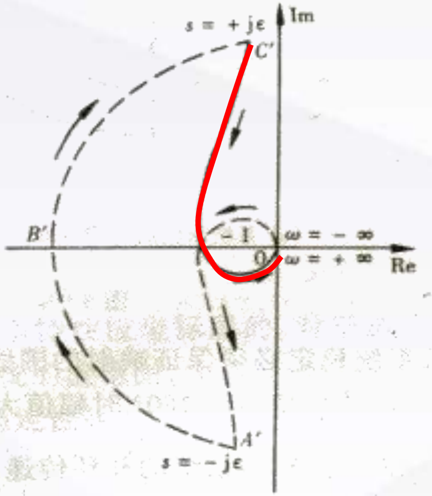
Nyquist稳定判据举例（续4）

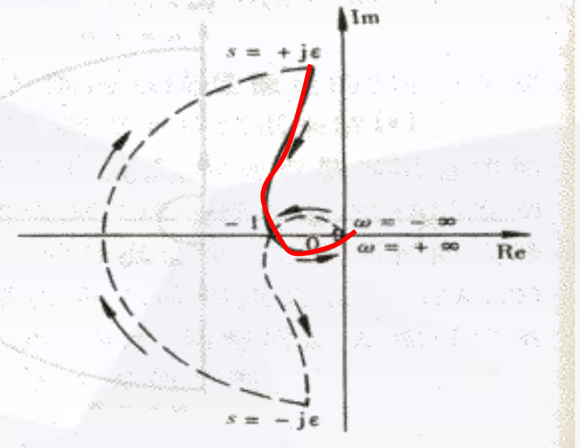
◆ 例5.7

$$G_K(s)=\frac{-6(0.33s+1)}{s(-s+1)}$$

$$G_K(s)=\frac{-1.5(0.33s+1)}{s(-s+1)}$$

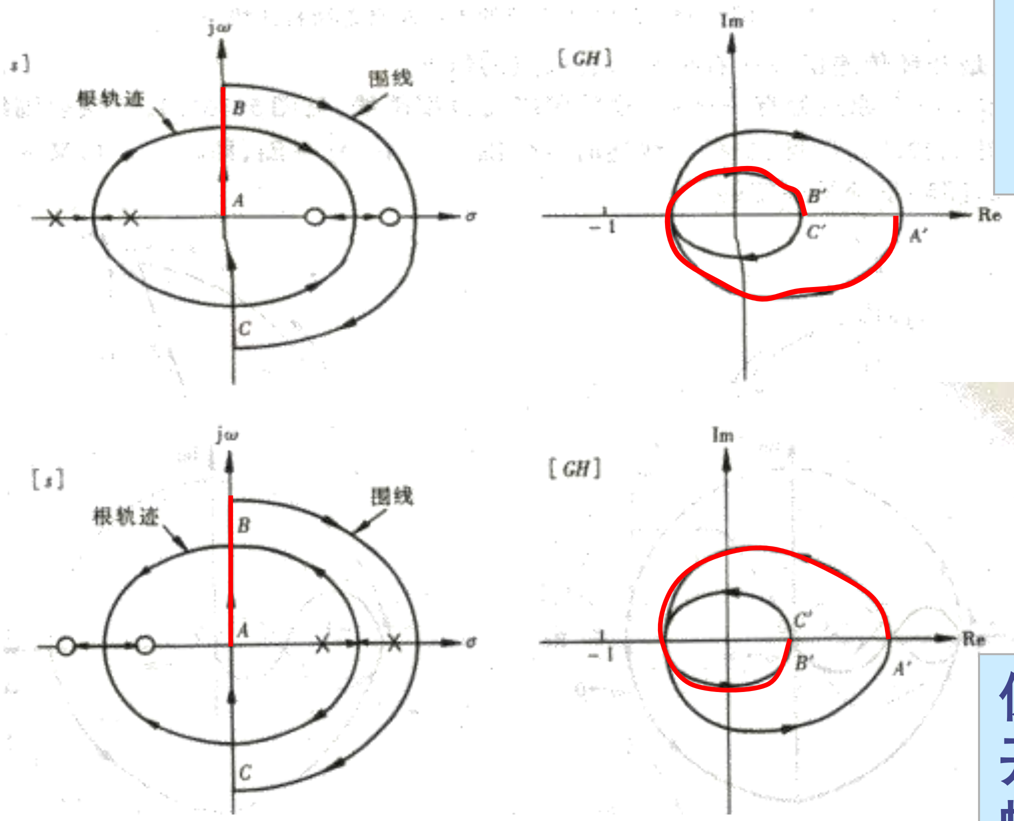






Nyquist稳定判据举例（续5）

◆ Nyquist稳定判据的另一种描述形式



保证系统稳定的增益K的范围是:
开环频率特性的相角为-180^0时,
幅值小于1.

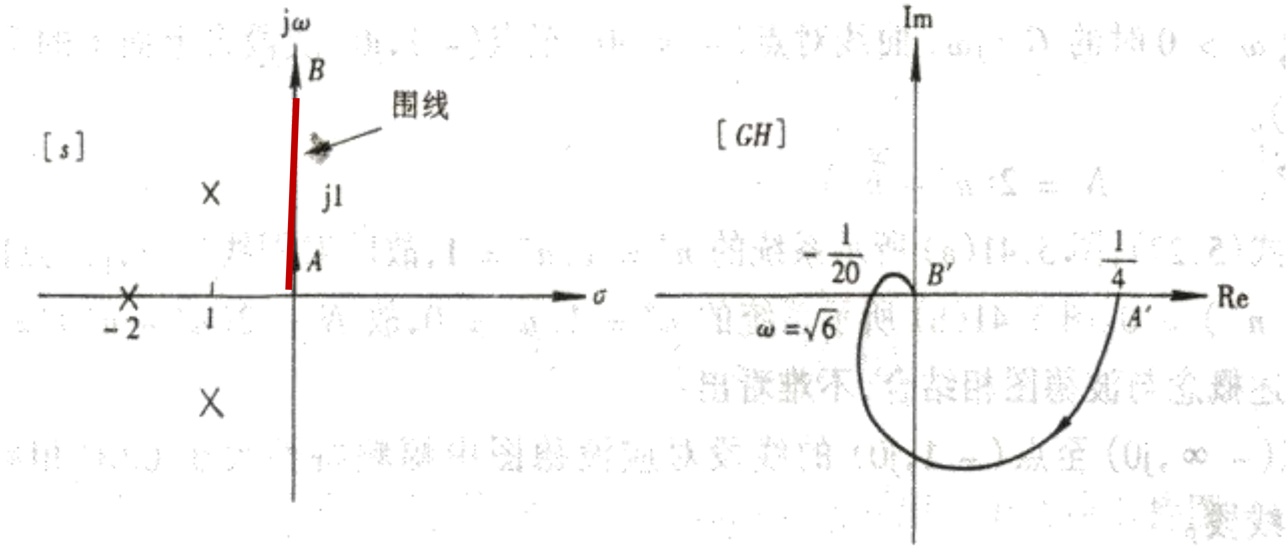
通过正虚轴的映射与(-1,j0)点的相对位置确定系统的稳定性.

保证系统稳定的增益K的范围是:
开环频率特性的相角为-180^0时,
幅值大于1.

Nyquist稳定判据举例（续6）

◆ 例5.7

$$G_K(s)=\frac{K}{(s^2+2s+2)(s+2)}$$



§ 5.4 Nyquist稳定判据的对数坐标图形式

穿越数与包围次数

在极坐标图上:

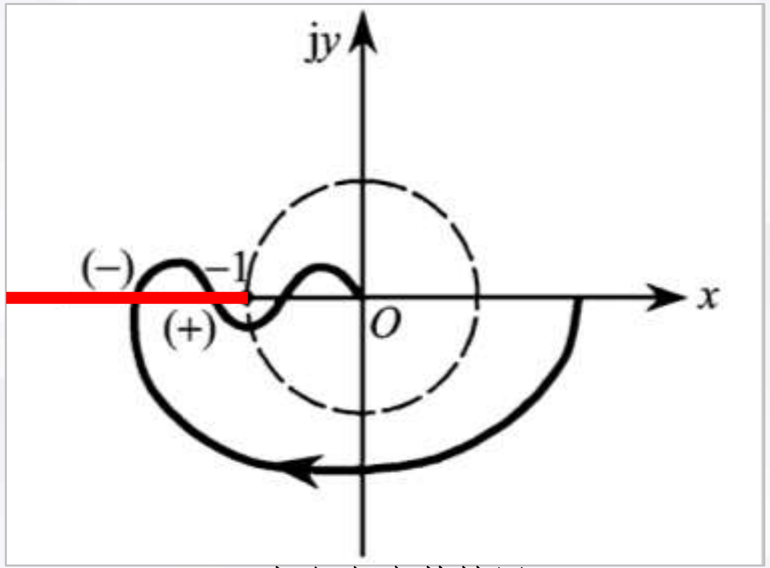
· N^+为自上而下的穿越数，称为正穿越数，始自负实轴$(-\infty, -1)$区间向下穿越为半次正穿越。

· N^-为自下而上的穿越数，称为负穿越数，始自负实轴$(-\infty, -1)$区间向上穿越为半次正穿越。

在Bode图上:

· N^+为自下而上的穿越数，称为正穿越数，始-180°相位线向上穿越为半次正穿越。

· N^-为自上而下的穿越数，称为负穿越数，始自-180°相位线向下穿越为半次负穿越。

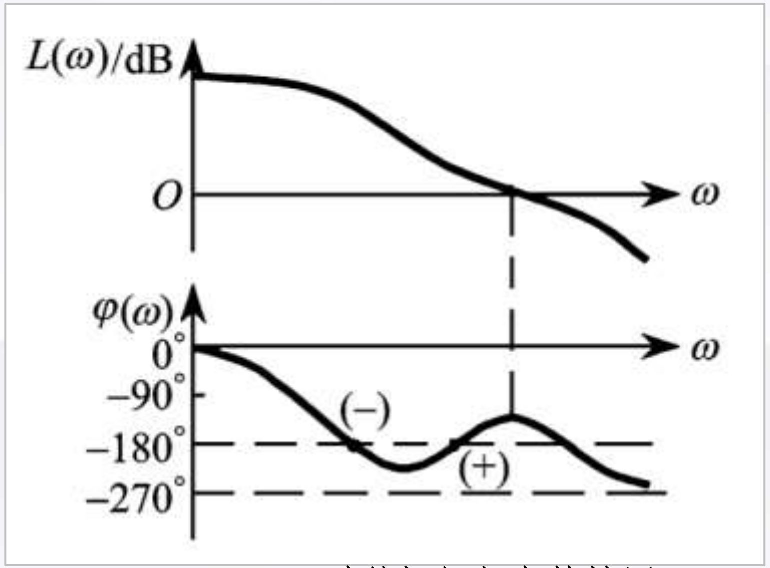


开环幅相频率特性图

两种定义内在逻辑保持一致:

相角增大方向为正;

相角减小方向为负。



开环对数幅相频率特性图

§ 5.4 Nyquist稳定判据的对数坐标图形式

穿越数与包围次数

在极坐标图上:

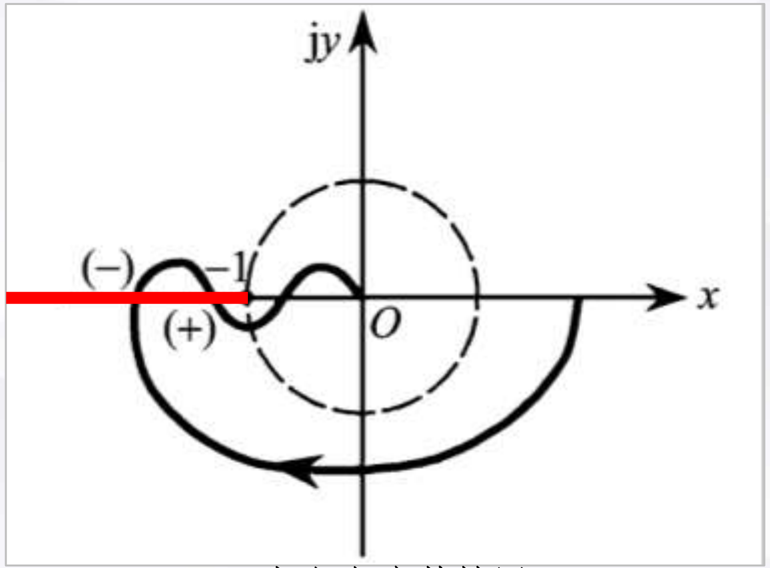
· N^+为自上而下的穿越数，称为正穿越数，始自负实轴$(-\infty, -1)$区间向下穿越为半次正穿越。

· N^-为自下而上的穿越数，称为负穿越数，始自负实轴$(-\infty, -1)$区间向上穿越为半次正穿越。

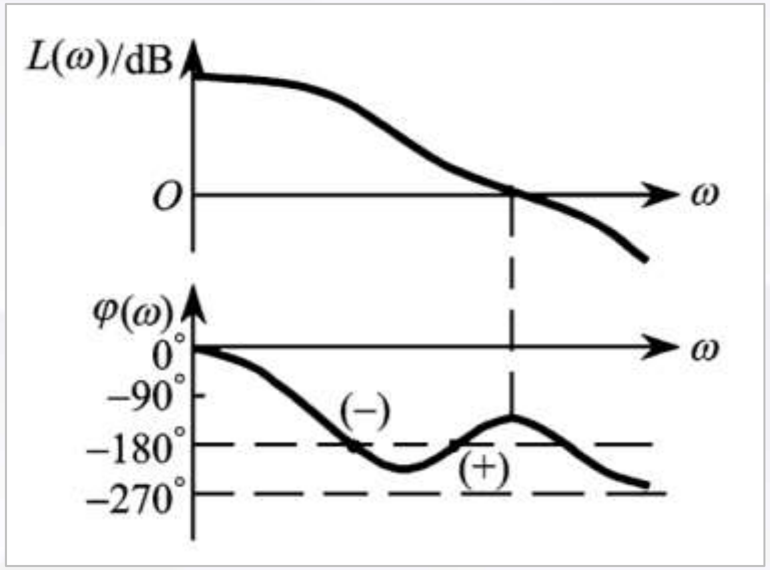
在Bode图上:

· N^+为自下而上的穿越数，称为正穿越数，始-180°相位线向上穿越为半次正穿越。

· N^-为自上而下的穿越数，称为负穿越数，始自-180°相位线向下穿越为半次负穿越。



开环幅相频率特性图



开环对数幅相频率特性图

ω：$0 \to +\infty$时

包围次数N_h：

$N_h = N^+ - N^-$

正穿越方向对应逆时针方向；负穿越方向对应顺时针方向。

§ 5.4 Nyquist稳定判据的对数坐标图形式

基于Bode图的Nyquist判据

- 若系统开环传递函数在右半开复平面上有P个极点，其Bode图的正、负穿越数分别为N^+（逆时针）和N^-（顺时针），则系统闭环极点在右半开复平面的数目Z为：

$$Z = P - 2(N^+ - N^-),$$

如果 Z=0, 则系统稳定；

如果 Z≠0, 则系统不稳定。

- 对于最小相位系统，$P=0$，则系统稳定的充要条件是：$N^+=N^-$。

注意：

①系统型号$v\geq 1$时，其Bode图相位低频段需延伸以对应广义D型曲线低频段之映射；

②Bode图只显示频率在ω：$0\to+\infty$时的穿越情况，$N_h>0$表示逆时针绕临界点N_h圈。

§5.4 Nyquist稳定判据的对数坐标图形式

例： 设控制系统的开环传递函数为

$$G_k(s)=\frac{K}{s^2(1+Ts)}$$

试判断闭环系统稳定性。

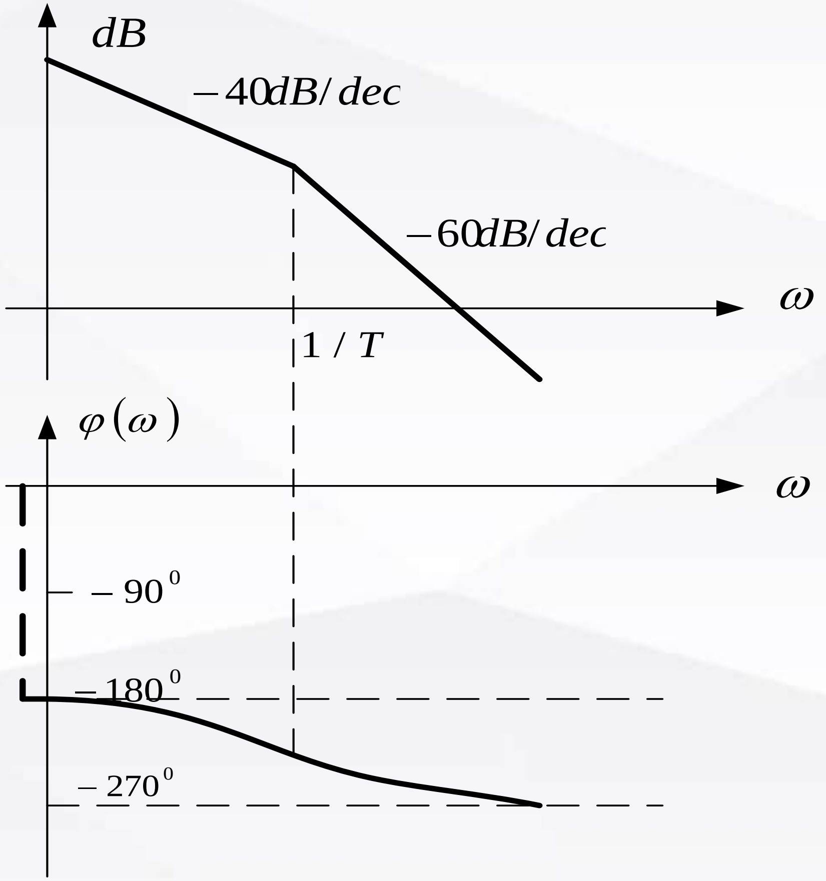
解： 绘制其Bode图，可知：

$$N^-=1, N^+=0;$$

$$N_h=N^+-N^-=-1;$$

$$Z=P-2N_h=2$$

由于开环系统为最小相位系统，故闭环系统不稳定。



开环对数幅相频率特性图

§ 5.4 稳定裕度

稳定性：

绝对稳定性以及相对稳定性

设计系统时，不仅要求系统是绝对稳定的，还要保证系统有一定的稳定程度，使系统不致因参数的小范围漂移而导致系统性能变差甚至是不稳定——**鲁棒性**。

§ 5.4 稳定裕度

增益裕度G_M（单位：dB)

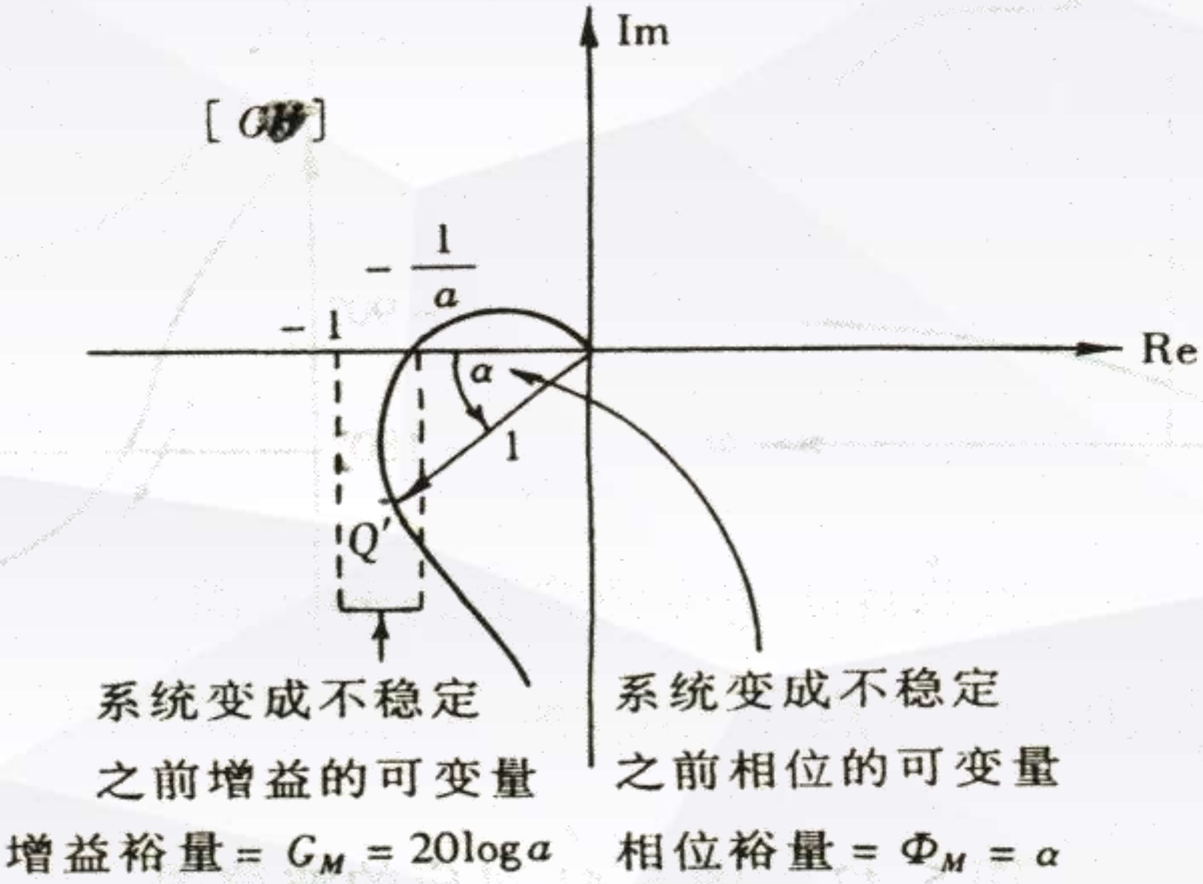
增益裕度是指衡量稳定开环系统的增益在**相位为-180°**时需要改变多大量以使得闭环系统变得不稳定

相位裕度Φ_M（单位：度)

相位裕度是指衡量稳定开环系统的相位在**增益为1**时需要改变多大量以使得闭环系统变得不稳定

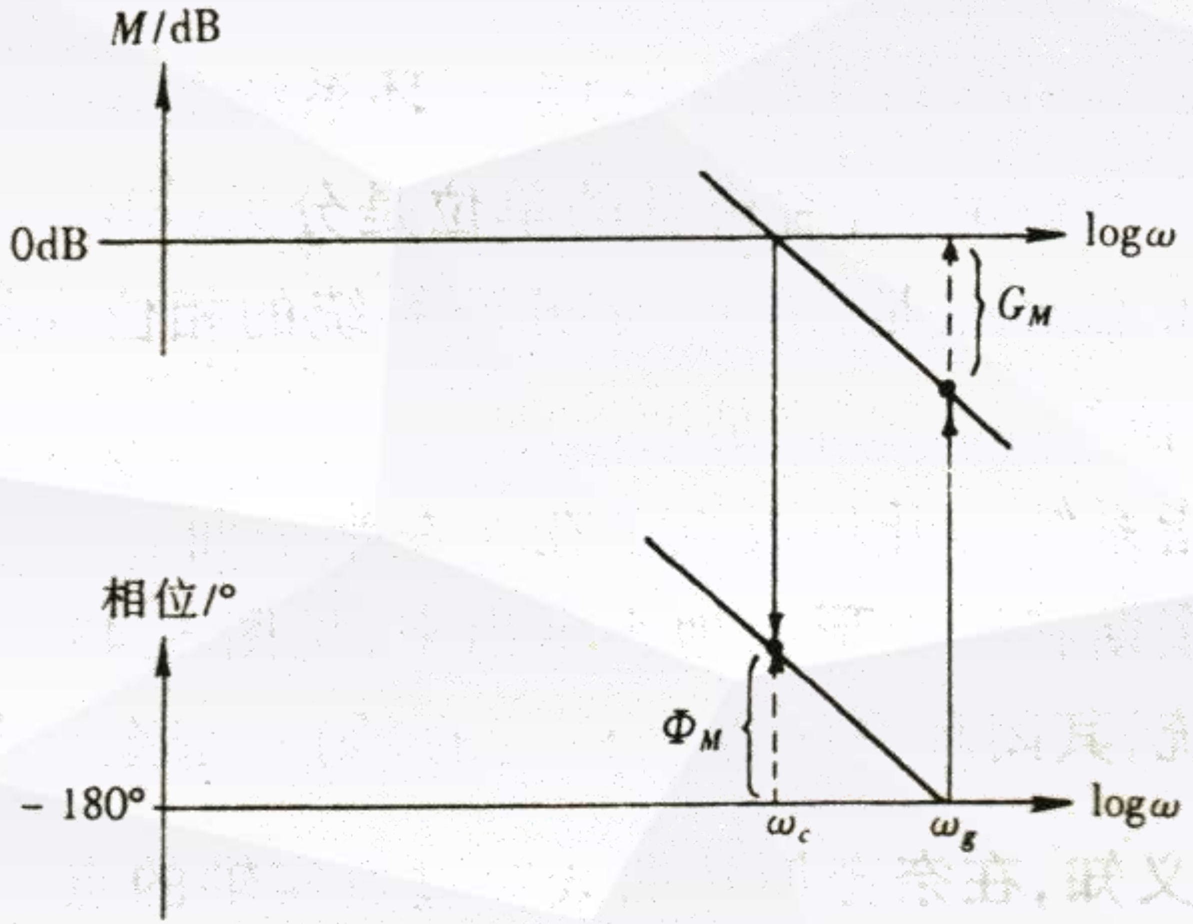
§5.4 稳定裕度

基于Nyquist曲线的系统相对稳定性



§ 5.4 稳定裕度

基于Bode图的系统相对稳定性



§ 5.4 稳定裕度

基于Nichols图的系统相对稳定性