第十四讲

§ 5.4 稳定裕量与鲁棒性

鲁棒性

系统稳定性包括绝对稳定性以及相对稳定性。设计系统时，不仅要求系统绝对稳定，还需保证系统具有一定的稳定程度，使系统不致因参数的小范围漂移而导致系统性能变差甚至是不稳定，即系统具有鲁棒性。

增益裕量G_M（或用 g_m 表示）(单位：dB)

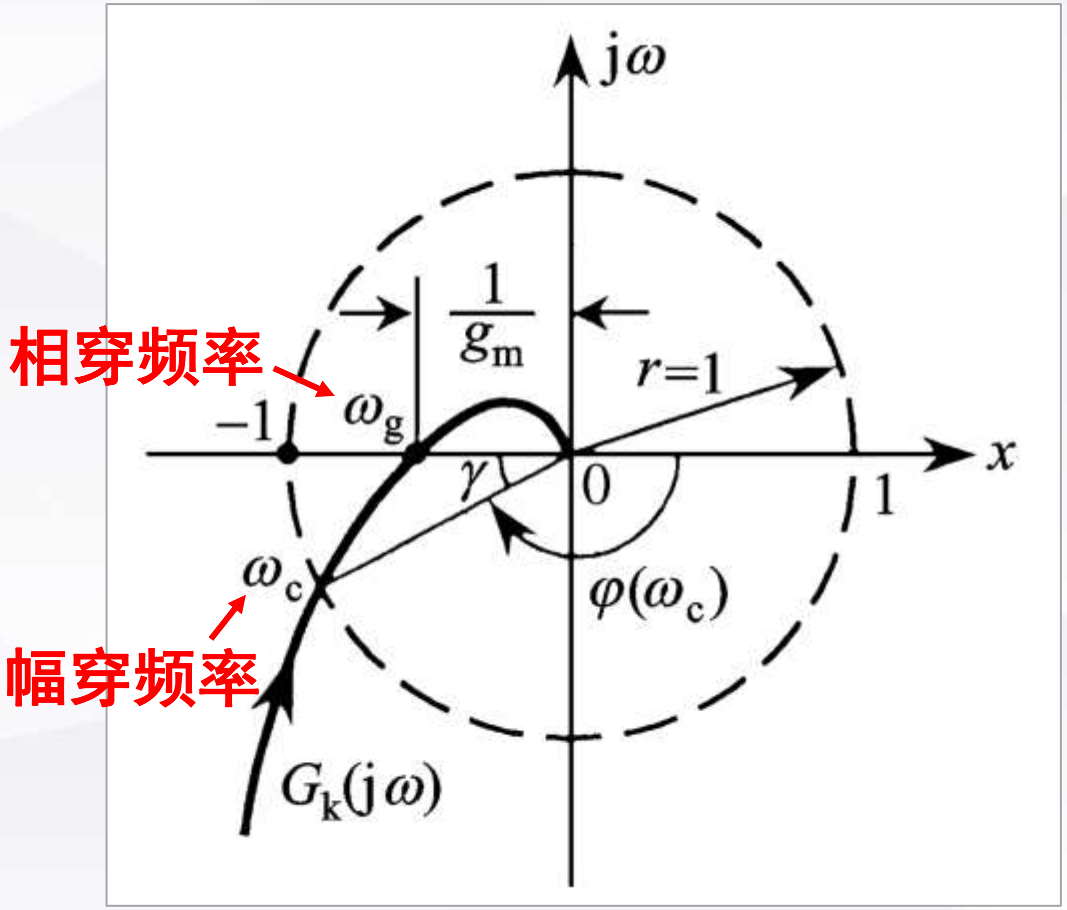
增益裕量是指衡量开环系统的增益在相位为－180°时需要改变多大量以使得闭环系统达到不稳定边缘。

相位裕量Φ_M（或用 γ 表示）(单位：度)

相位裕量是指衡量开环系统的相位在增益为1时需要改变多大量以使得闭环系统达到不稳定边缘。

§ 5.4 稳定裕量与鲁棒性

增益裕量与相位裕量



奈奎斯特图：增益裕量与相位裕量示意图

增益裕量G_M：增益裕度是指衡量开环系统的增益在相位为-180°时需要改变多大量以使得闭环系统达到不稳定边缘，即

$$G_M = g_m = \frac{1}{|G(j\omega_g)|}$$

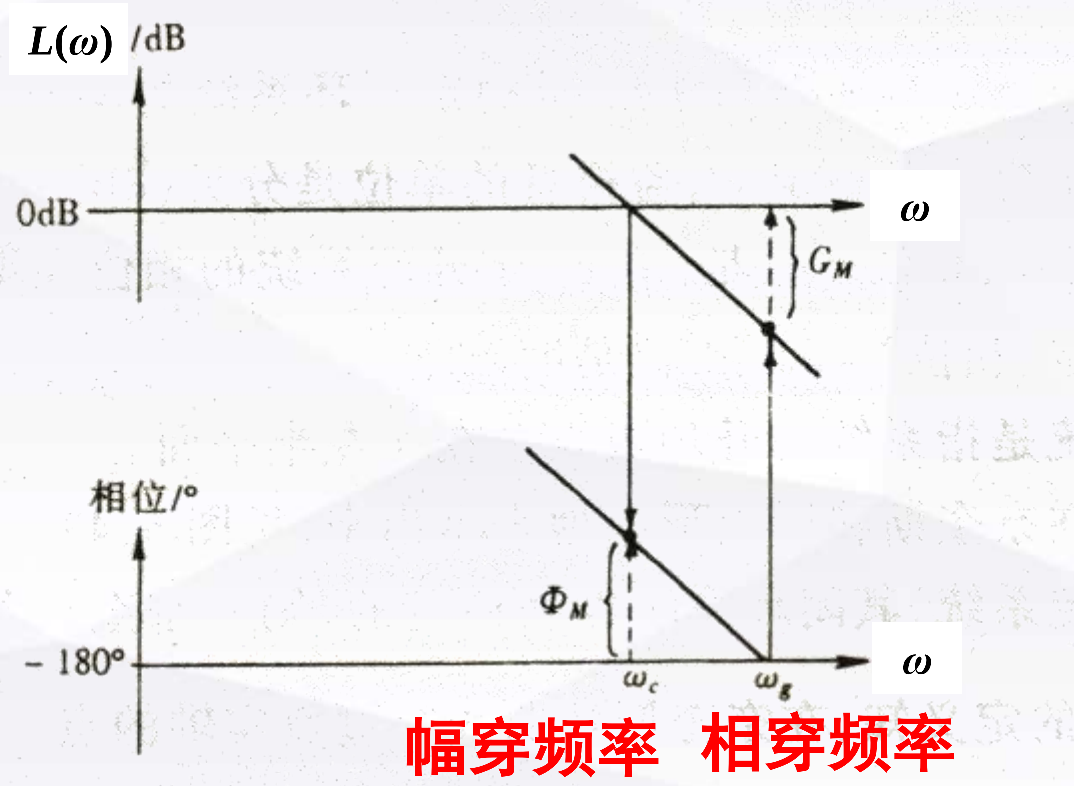
$$G_M = g_m = 20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 0 - 20\lg|G(j\omega_g)|\ \mathrm{dB}$$

相位裕量Φ_M：相位裕度是指衡量开环系统的相位在增益为1时需要改变多大量以使得闭环系统达到不稳定边缘，即

$$\Phi_M = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

§ 5.4 稳定裕量与鲁棒性

增益裕量与相位裕量



Bode图：增益裕量与相位裕量示意图

增益裕量G_M：增益裕度是指衡量开环系统的增益在相位为-180°时需要改变多大量以使得闭环系统达到不稳定边缘，即

$$G_M = g_m = \frac{1}{|G(j\omega_g)|}$$

$$G_M = g_m = 20\lg\frac{1}{|G(j\omega_g)|} = 0 - 20\lg|G(j\omega_g)|\ \mathrm{dB}$$

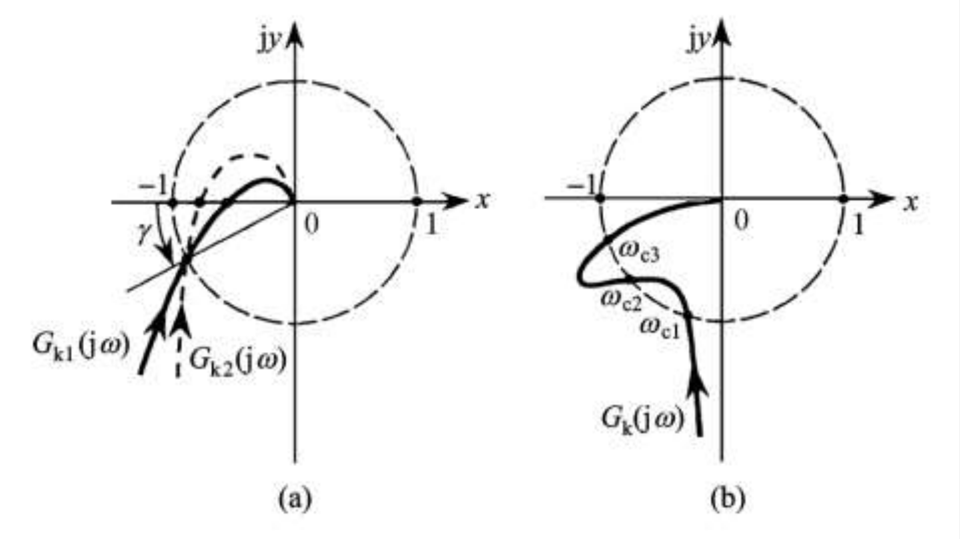
相位裕量Φ_M：相位裕度是指衡量开环系统的相位在增益为1时需要改变多大量以使得闭环系统变得不稳定，即

$$\Phi_M = \varphi(\omega_c) - (-180^\circ) = 180^\circ + \varphi(\omega_c)$$

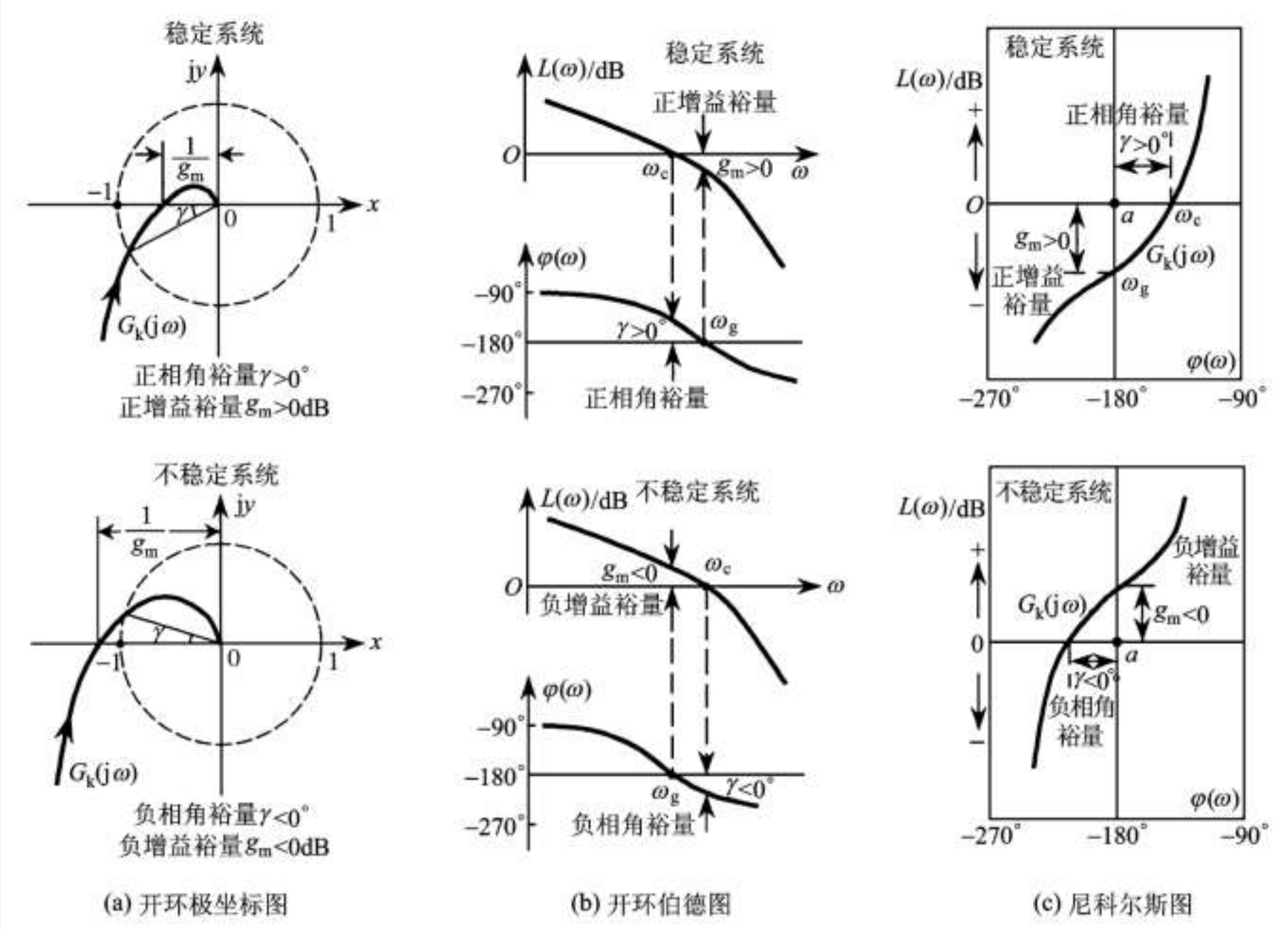
§ 5.4 稳定裕量与鲁棒性

增益裕量与相位裕量

对于存在多个幅穿频率或相穿频率的复杂控制系统，其裕量必须取最小者。



复杂控制系统的稳定裕量



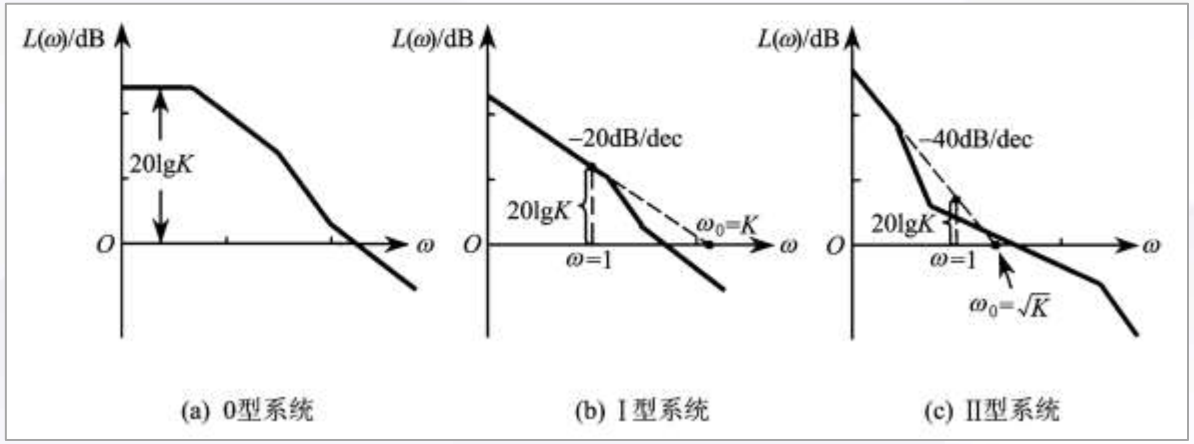
最小相位系统稳定裕量

利用开环频率特性分析系统稳态特性（Bode图低频段）

开环幅频特性曲线的低频段满足：

$$\lim_{\omega\to 0} L(\omega) = \lim_{\omega\to 0} 20\lg\frac{K}{\omega^{v}}$$

当$v\geq 1$时，幅频曲线或其延长线必与0dB线相交，交点频率为：$\omega_0=K^{1/v}$。



稳态特性与开环幅频特性渐近线关系图

闭环系统稳态特性取决于开环幅频特性曲线低频渐近线的形状和位置：

低频渐近线斜率 (dB/dec)	系统型号 v	稳态误差系数		
0	0	$K_p=K$	$K_v=0$	$K_a=0$
−20	1	$K_p=\infty$	$K_v=K=\omega_0$	$K_a=0$
−40	2	$K_p=\infty$	$K_v=\infty$	$K_a=K=\omega_0^2$

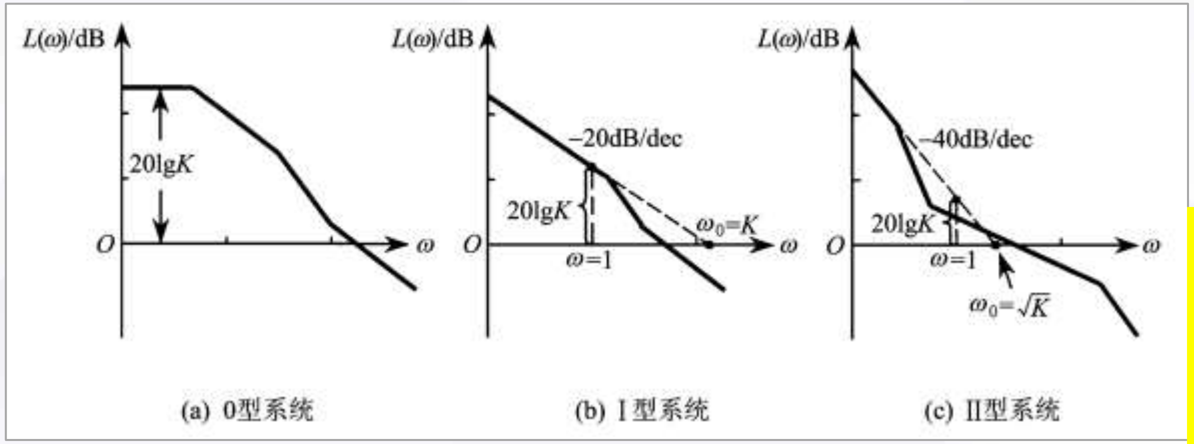
稳态误差系数与开环幅频特性渐近线关系表

利用开环频率特性分析系统稳态特性（Bode图低频段）

开环幅频特性曲线的低频段满足：

$$\lim_{\omega\to 0} L(\omega) = \lim_{\omega\to 0} 20\lg\frac{K}{\omega^{v}}$$

当$v \geq 1$时，幅频曲线或其延长线必与0dB线相交，交点频率为：$\omega_0 = K^{1/v}$。



稳态特性与开环幅频特性渐近线关系图

高增益原则：

考虑单位反馈系统，其闭环频率特性为：

$$\Phi(\mathrm{j}\omega) = \frac{G(\mathrm{j}\omega)}{1+G(\mathrm{j}\omega)}$$

在低频段往往有$|G(\mathrm{j}\omega)|$远大于1，故：

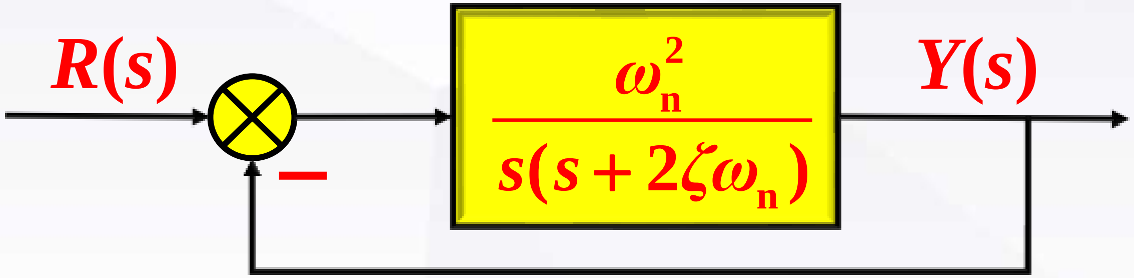
$$\Phi(\mathrm{j}\omega) \approx 1$$

因此，在低频段$|G(\mathrm{j}\omega)|$保持高增益的频段越宽，其（闭环）输出复现输入信号就越好，这就是所谓的“高增益原则”。

§5.5 控制系统性能的频率响应分析

利用开环频率特性分析系统暂态特性（Bode图中频段）

以典型二阶单位反馈控制系统为例：



其开环幅频和相频特性分别为：

$$L(\omega)=\frac{\omega_n^2}{\omega\sqrt{\omega^2+(2\zeta\omega_n)^2}}$$

$$\varphi(\omega)=-90^{\circ}-\arctan\frac{\omega}{2\zeta\omega_n}$$

可得其幅穿频率和相位裕度分别为：

$$\omega_c=\omega_n\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}$$

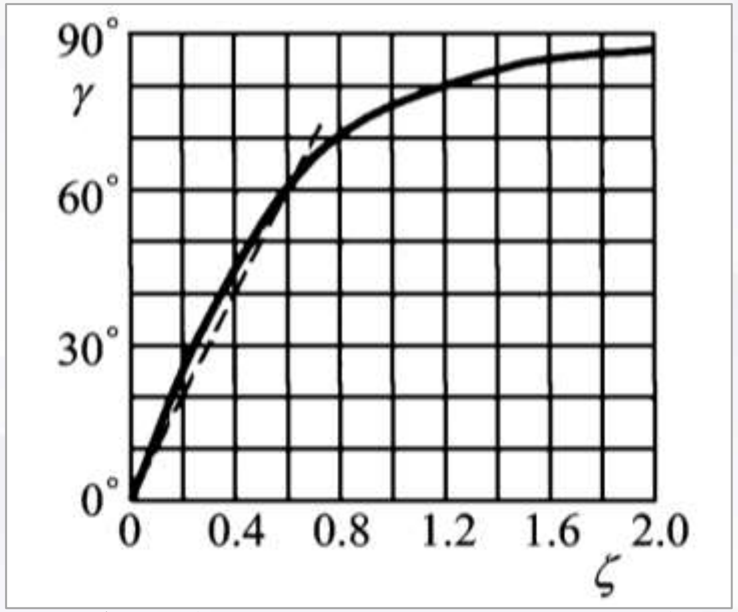
$$\Phi_M=\gamma=180^{\circ}+\varphi(\omega_c)=\arctan\frac{2\zeta}{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}$$

利用开环频率特性分析系统暂态特性（Bode图中频段）

二阶典型系统的相位裕量和阻尼比满足：

当$0 \le \zeta \le 0.7$时，可近似化为：$\zeta = 0.01\gamma$。

可知系统相位裕量越大，超调量σ_p越小。



二阶典型系统相位裕量和阻尼比关系图

其调节时间为：

$$t_s = \frac{3\sim4}{\omega_c}\frac{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4+1}-2\zeta^2}}{\zeta} = \frac{6\sim8}{\omega_c}\frac{1}{\tan\gamma}$$

结论：

①相位裕量可用于系统暂态响应的相对稳定性，相位裕量越大，超调量越小；

②幅穿频率可用于表征系统暂态响应的快速性：相对稳定性相同时，幅穿频率越大，系统调节时间越短。

③对高阶系统需查经验公式，性质类似。

§ 5.5 控制系统性能的频率响应分析

利用开环频率特性分析系统抗高频干扰能力（Bode图高频段）

以单位反馈系统为例，其闭环频率特性为：

$$\Phi(\mathrm{j}\omega)=\frac{G(\mathrm{j}\omega)}{1+G(\mathrm{j}\omega)}$$

一般地，在高频段有$|G(\mathrm{j}\omega)|$远小于1，故：

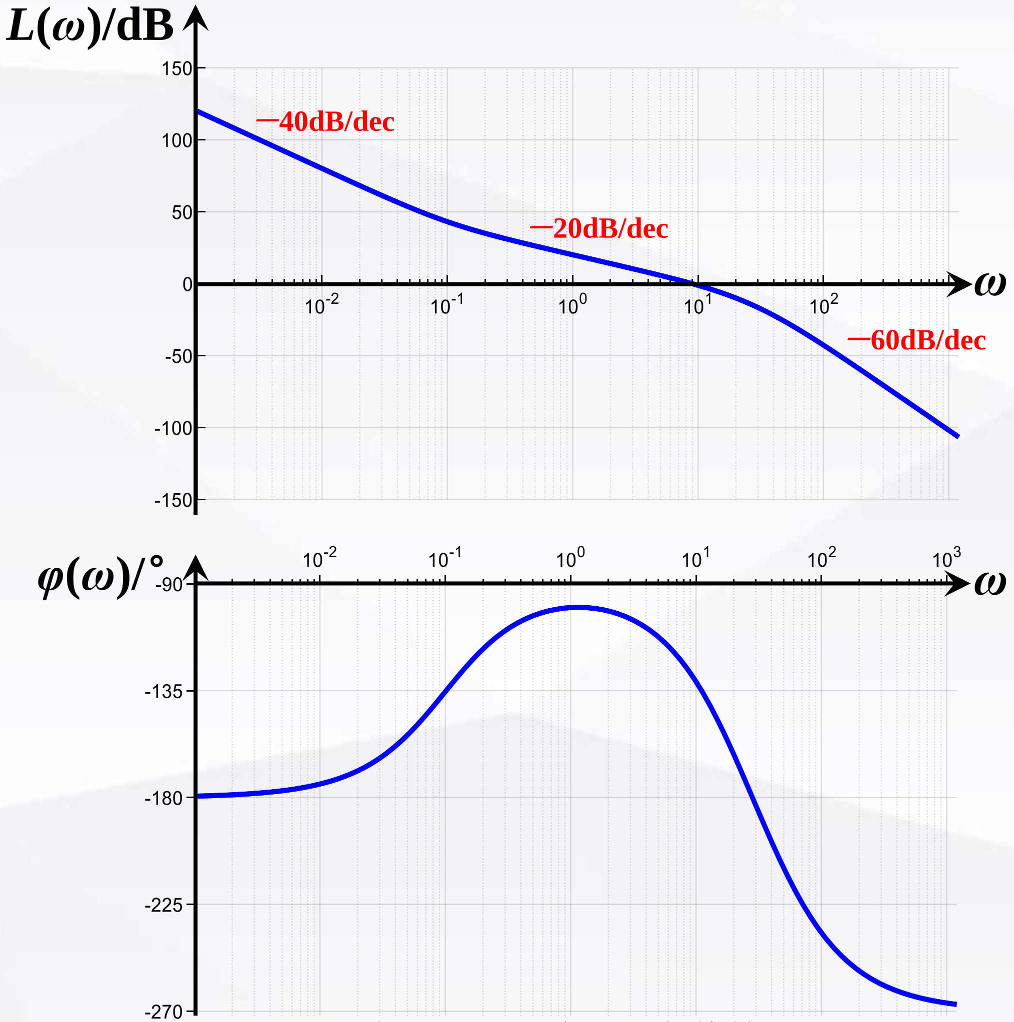
$$\Phi(\mathrm{j}\omega)\approx G(\mathrm{j}\omega)\ll 1$$

开环幅频特性曲线的高频段直接反应系统对输入高频信号的抑制能力，其分贝值越低，则系统容对高频信号的衰减作用越大，系统抗高频干扰能力越强。

§ 5.6 控制系统的频率响应综合

三频段理论

$L(\omega)$ 频段	特征量	对应性能	希望形状
低频段	开环增益 K；系统型号 v	稳态误差 e_{ss}	陡，高
中频段	幅穿频率 ω_c；相位裕量 Φ_M	动态性能 t_s，σ_p	缓，宽
高频段		系统抗高频干扰的能力	低，陡



希望的开环对数频率特性图

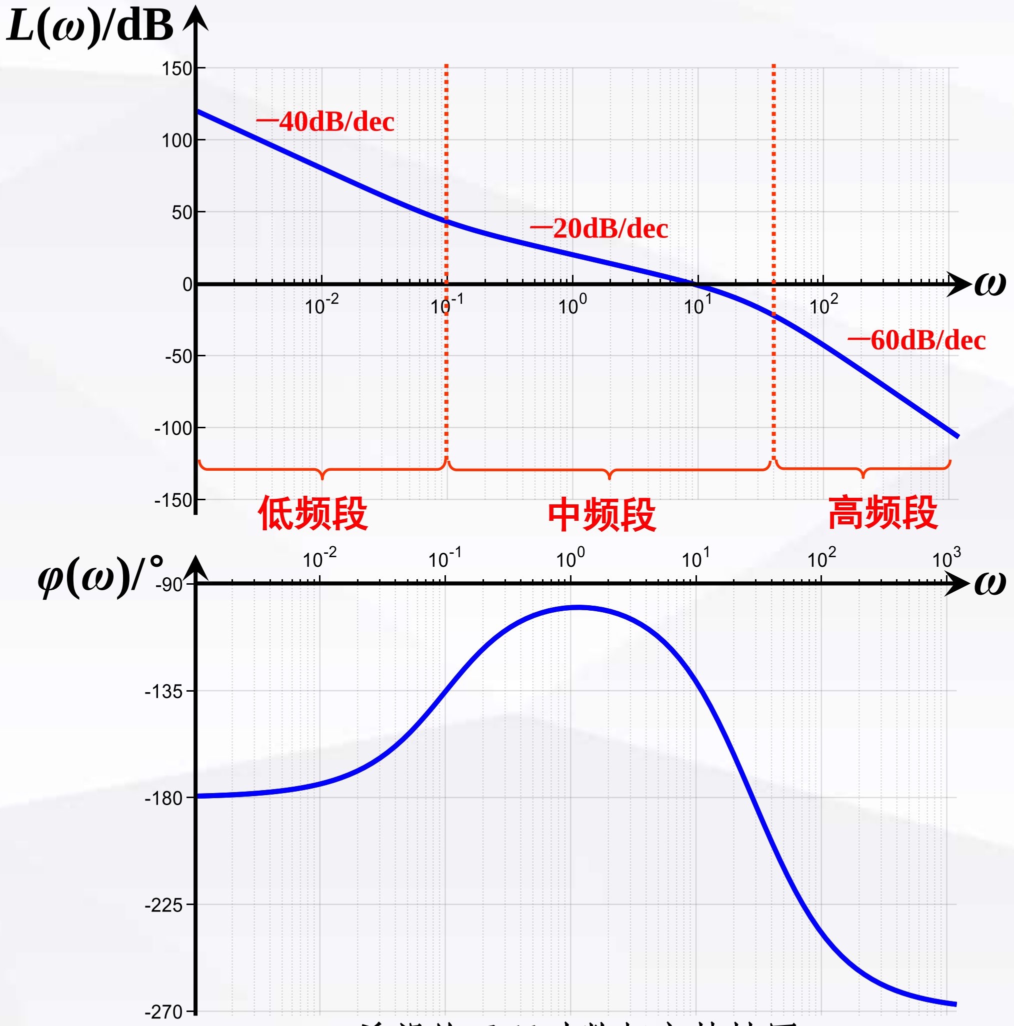
§ 5.6 控制系统的频率响应综合

三频段理论

频段	特征量	对应性能	希望形状
低频段	开环增益 K 系统型号 v	稳态误差 e_{ss}	陡，高
中频段	幅穿频率 ω_c 相位裕量 Φ_M	动态性能 $\begin{cases} t_s \\ \sigma_p \end{cases}$	缓，宽
高频段		系统抗高频干扰的能力	低，陡

$L(\omega)$

三频段理论为改变系统开环频率特性形状和位置进而改善系统的性能提供了原则和方向。

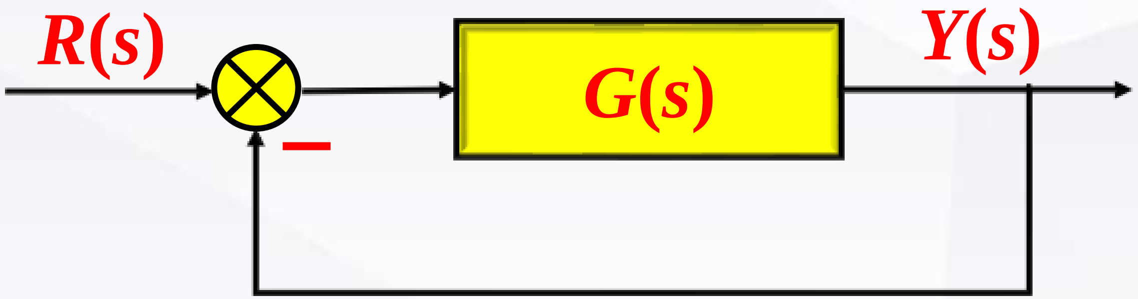


希望的开环对数频率特性图

§ 5.5 控制系统性能的频率响应分析

闭环频率特性

考虑如下单位反馈控制系统：



其闭环频率特性为：

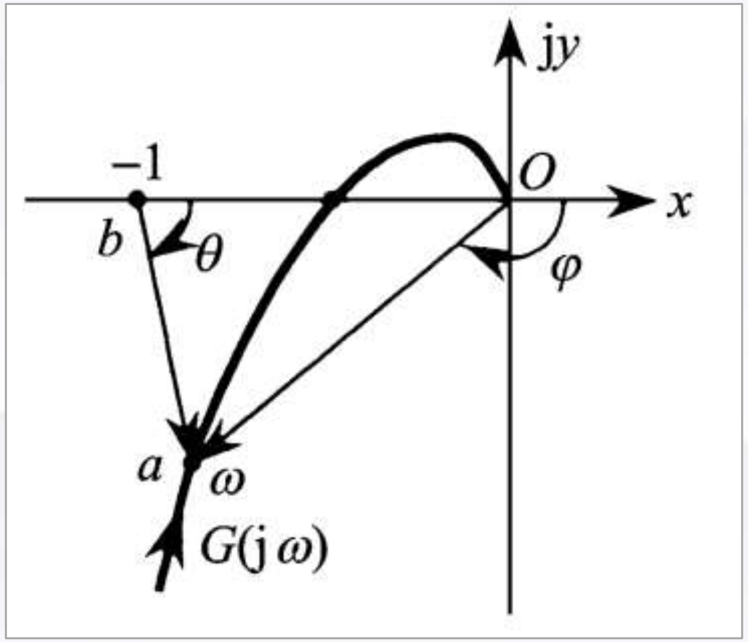
$$\Phi(\mathrm{j}\omega)=\frac{G(\mathrm{j}\omega)}{1+G(\mathrm{j}\omega)}=M(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha(\omega)}$$

$$=\frac{\overrightarrow{Oa}}{\overrightarrow{ba}}=\frac{|\overrightarrow{Oa}|}{|\overrightarrow{ba}|}\angle(\varphi-\theta)$$

闭环频率特性绘制：（自行了解）

①等M圆和等N圆绘制法；

②绘制于尼科尔斯图上。

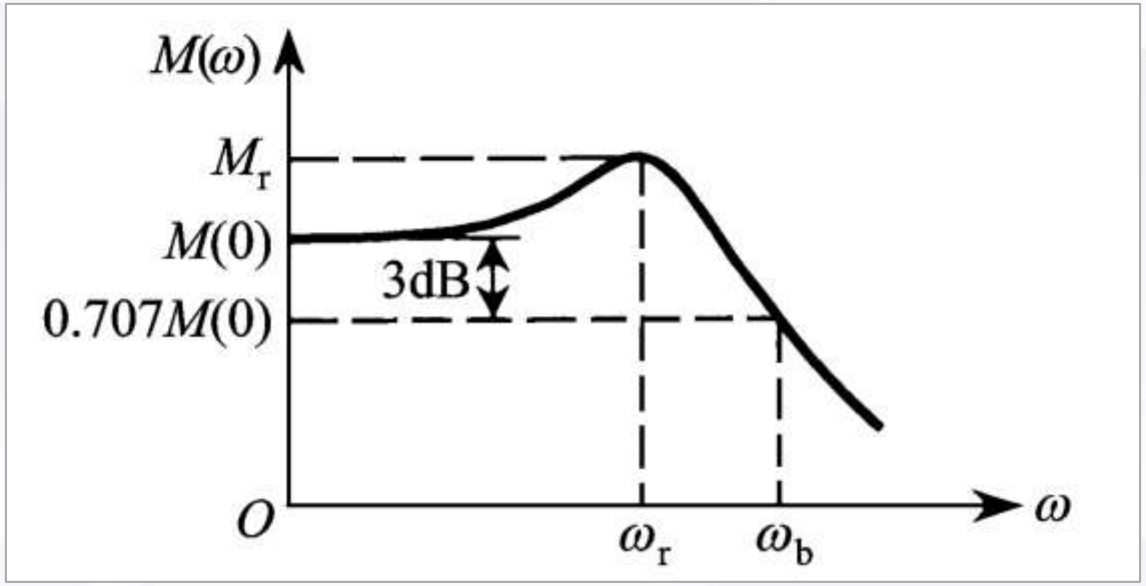


由开环频率特性曲线确定闭环频率特性曲线

§ 5.5 控制系统性能的频率响应分析

闭环频率特性特征量

典型的闭环频率特性为：



①零频值$M(0)$：$\omega=0$时闭环频率特性值，即闭环系统增益，也是单位阶跃响应的稳态值，其越接近于1，则稳态精度越高。

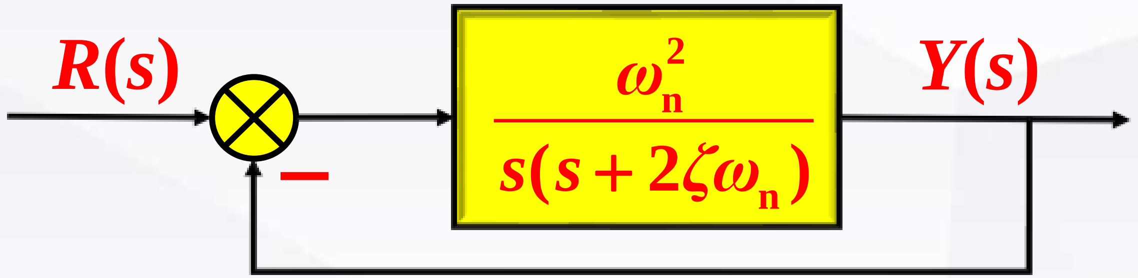
②谐振峰值M_r：$M_r= M_r/M(0)$，表明对某频率正弦信号反映强烈，有震荡趋势。若M_r越大，对应系统的相对稳定性越差，系统对阶跃响应具有较大的超调量。

③谐振峰值ω_r：谐振峰值M_r对应的频率。

④带宽频率$\omega_b(\omega_{BW})$：闭环频率特性$M(\omega)$下降到零频值$M(0)$的70.7%，或者零频值$M(0)$以下-3dB处所对应的频率值。带宽频率ω_b反应系统的静态滤波特性，又反应系统响应快速性：带宽越大，系统暂态响应速度越快，反之快速性变差。

利用闭环频率特性特征量分析系统暂态特性

以典型二阶单位反馈控制系统为例：



其谐振峰值、谐振频率、带宽频率分别为：

$$M_r=\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}\quad(0\le\zeta\le0.707)$$

$$\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\zeta^2}\quad(0\le\zeta\le0.707)$$

$$\omega_b=\omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}}$$

调节时间为：

$$t_s=\frac{3\sim4}{\omega_r}\frac{\sqrt{1-2\zeta^2}}{\zeta}=\frac{3\sim4}{\omega_b}\frac{\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{(1-2\zeta^2)^2+1}}}{\zeta}$$

结论：

①谐振峰值M_r和超调量σ_p一一对应：M_r越大，则σ_p越大；故用M_r表征系统的相对稳定性。

②阻尼比ζ给定时，调节时间t_s和谐振频率ω_r、带宽频率ω_b成反比关系，故可用ω_r和ω_b表征系统暂态响应的快速性。

§ 5.5 控制系统性能的频率响应分析

高阶系统开环频率特性和闭环频率特性关系

①经验公式：对于高阶控制系统，开闭环频率特性特征量间具有如下经验公式：

$$\omega_b = 1.6\omega_c$$

$$M_r = \frac{1}{\sin\gamma}$$

$$\sigma_p = 0.16 + 0.4(M_r - 1) \quad (1 \le M_r \le 1.8)$$

$$t_s = \frac{\pi}{\omega_c}[2 + 1.5(M_r - 1) + 2.5(M_r - 1)^2] \, (1 \le M_r \le 1.8)$$

②降阶法：若高阶系统存在一对主导极点，则可将其降阶为二阶系统进行计算。

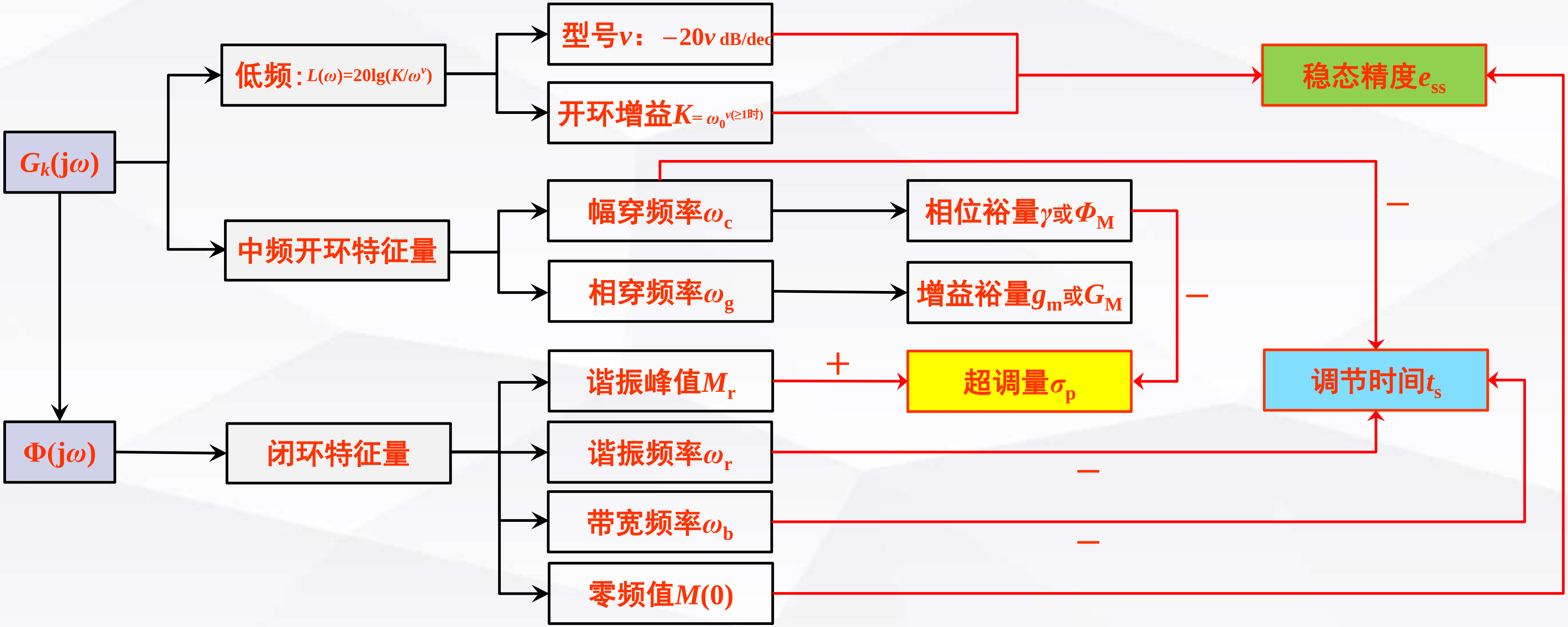
③图表法：带宽频率ω_b可从开环幅频特性图中－6dB至－7.5dB之间、对应相频特性图中－135°至－225°相位之间近似读取；相位裕量γ可在幅穿频率ω_c处读取。

结论：

高阶系统频域性能指标和时域暂态性能指标的定性关系和变化规律，与二阶规范系统类似。

§ 5.5 控制系统性能的频率响应分析

用频域响应特性分析和估算系统的性能总结



§ 5.5 控制系统性能的频率响应分析

例： 设单位反馈系统开环传递函数为：

$$G_k(s)=\frac{50}{s(s+3)(s+6)}$$

试由其开环频率响应确定闭环系统的响应速度。

$$\omega_{BW}=3.7rad/s$$

$$\omega_c=2.2rad/s$$

$$\Phi_M=35^0$$