



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY



结构概念分析 及ANSYS程序实现

郭小农

同济大学建筑工程系





同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

第03讲

认识应力刚度

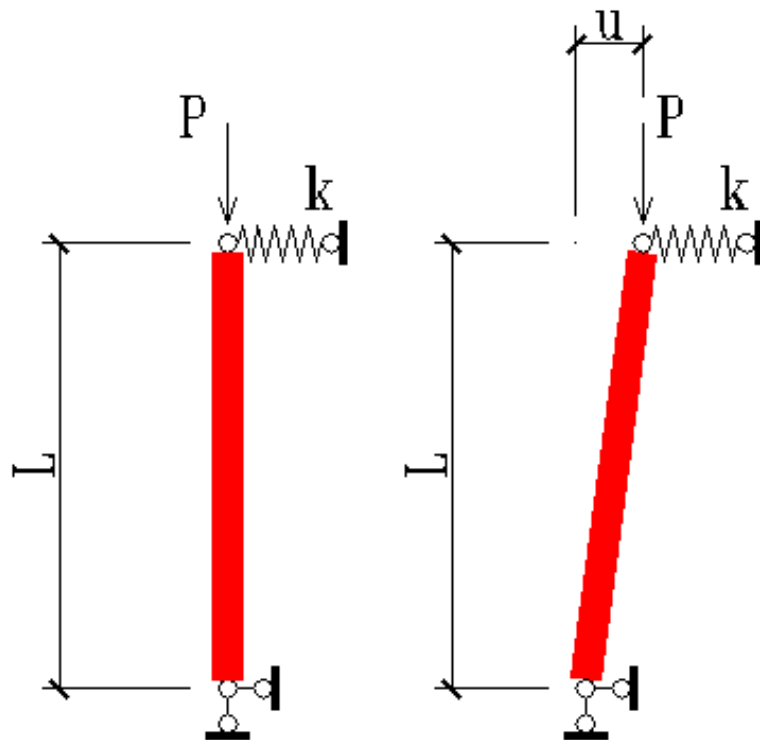
郭小农

同济大学建筑工程系



计算条件：

- 1) 刚性二力杆 $L=1\text{m}$;
- 2) 弹簧刚度 $k=1000\text{ N/m}$
- 3) 集中荷载 $P=1000\text{ N}$
- 4) 求线性屈曲系数;
- 5) 命令流: **Ex03a.mac**



A. 平衡法

设结构的临界荷载为 $P_{cr} = \lambda P$

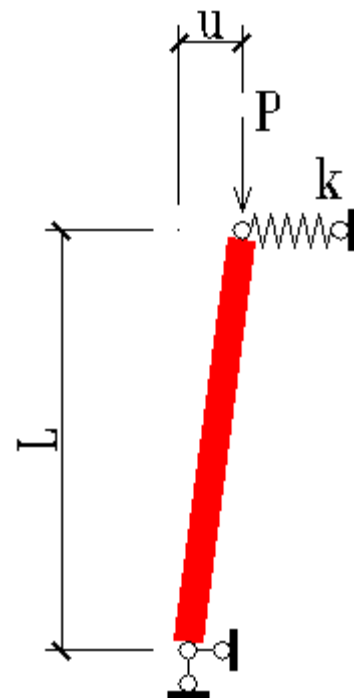
根据**屈曲后位置**建立平衡方程

$$\lambda Pu = kuL$$

即： $(k - \lambda P/L)u = 0$

写成矩阵形式：

$$([k_E] - \lambda[k_G])\{u\} = \{0\}$$



B. 能量法

根据**屈曲后位置**建立能量守恒方程

弹性应变能: $U = ku^2 / 2$

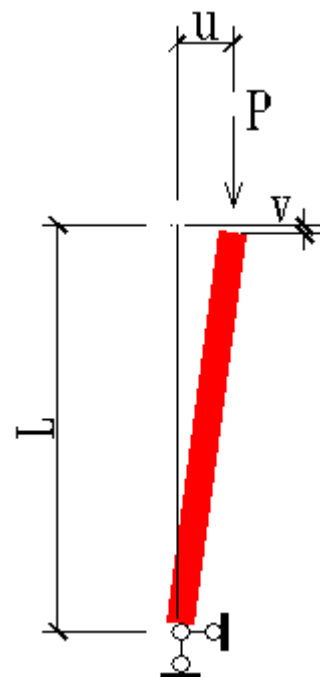
荷载作用点的竖向位移: $v = L - \sqrt{L^2 - u^2} \approx u^2 / 2L$

荷载势能: $V = -\lambda P v \approx -\lambda P u^2 / 2L$

势能驻值原理: $\delta \Pi = \delta (U + V) = 0$

可得: $ku - Pu / L = 0$

写成矩阵形式: $([k_E] - \lambda [k_G]) \{u\} = \{0\}$



平衡方程

$$([k_E] - \lambda[k_G])\{u\} = \{0\}$$

弹性刚度矩阵

$$[k_E]$$

弹性恢复力

几何刚度矩阵
应力刚度矩阵

$$[k_G] = \left[\frac{P}{L} \right]$$

和荷载相关的

屈曲时, $\{u\} \neq \{0\}$ 则有:

$$|[k_E] - \lambda[k_G]| = 0$$

即: $|[k_G]^{-1}[k_E] - \lambda[E]| = 0$

矩阵的特征值问题

$$[k_G]^{-1} = L/P \quad [k_E] = k \quad \lambda = kL/P$$

1) 屈曲分析在数学上属于什么问题？屈曲分析的求解过程中，先进行一次静力分析的原因？

矩阵的特征值问题

$$\left| [k_G]^{-1} [k_E] - \lambda [E] \right| = 0$$

2) 本题中的应力刚度矩阵是正的还是负的？当 P 为**拉力**时，会不会发生屈曲？如何计算悬索结构的屈曲荷载？压力会增大结构刚度还是减小结构刚度？

P 为**压力** $\left([k_E] - \lambda [k_G] \right) \{u\} = \{0\}$

P 为**拉力** $\left([k_E] + \lambda [k_G] \right) \{u\} = \{0\}$

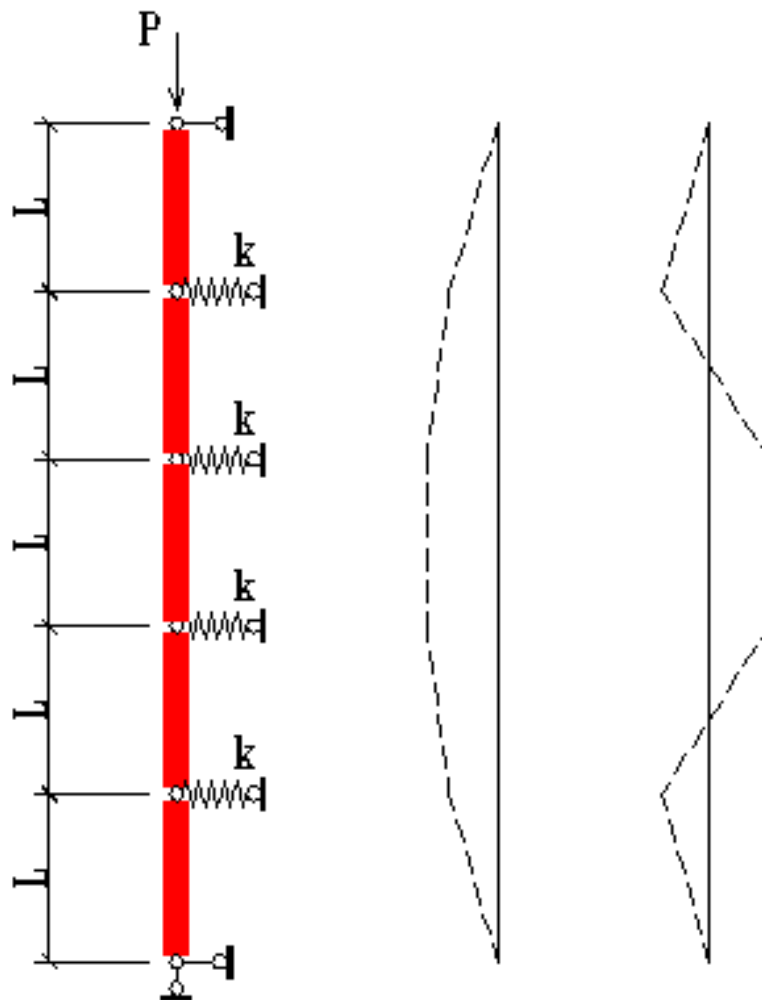
【算例Ex03b】



同濟大學
TONGJI UNIVERSITY

计算条件:

- 1) 刚性二力杆 $L=1\text{m}$;
- 2) 弹簧刚度 $k=1000\text{ N/m}$
- 3) 集中荷载 $P=1000\text{ N}$
- 4) 求线性屈曲系数;
- 5) 命令流: **Ex03b.mac**



A. 平衡法 不方便!

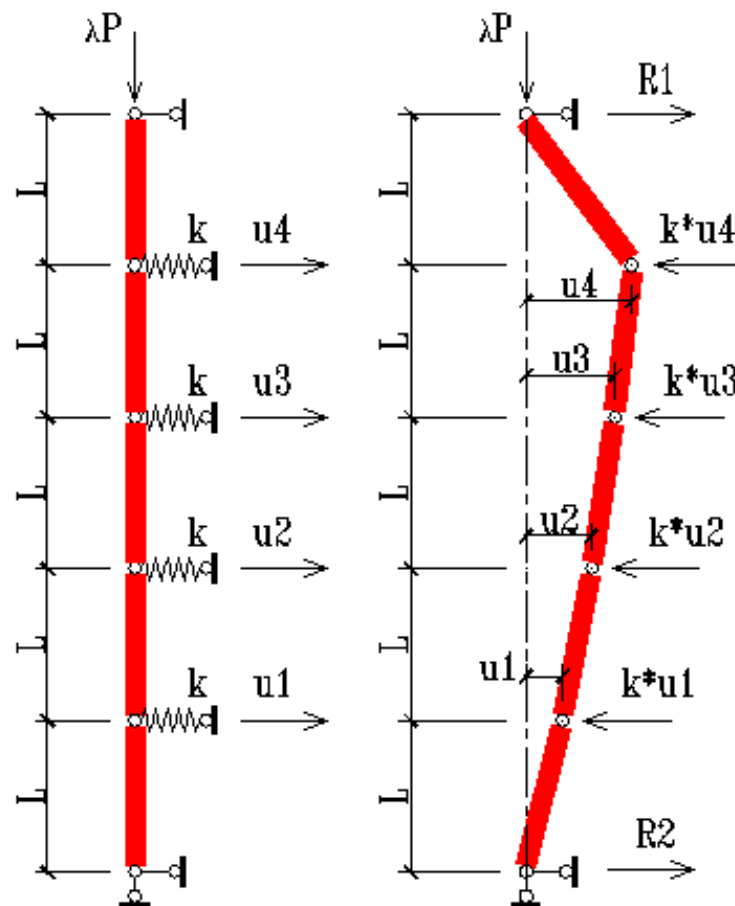
设结构的临界荷载为 $P_{cr} = \lambda P$

根据屈曲后位置建立平衡方程

$$R_1 = k(u_1 + 2u_2 + 3u_3 + 4u_4)/5$$

$$R_2 = k(4u_1 + 3u_2 + 2u_3 + u_4)/5$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda P u_4 = L R_1 \\ \lambda P u_3 = 2L R_1 - L k u_4 \\ \lambda P u_2 = 3L R_1 - 2L k u_4 - L k u_3 \\ \lambda P u_1 = 4L R_1 - 3L k u_4 - 2L k u_3 - L k u_2 \end{array} \right.$$



B. 能量法 更不方便!

设结构的临界荷载为 $P_{cr} = \lambda P$

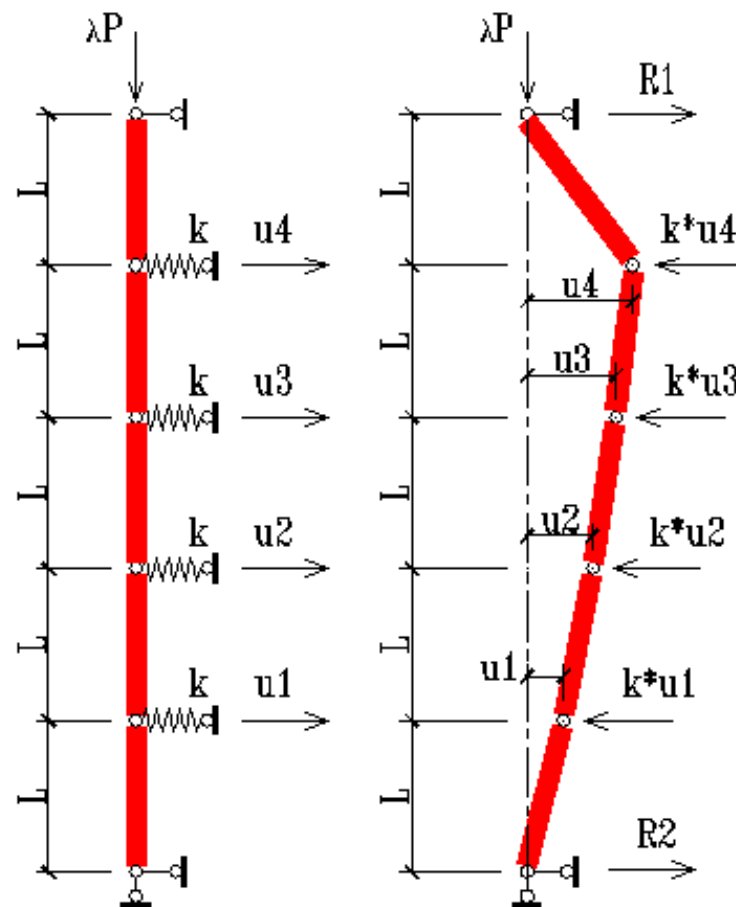
弹性应变能

$$U = \frac{k}{2} (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)$$

荷载势能

$$V = -\frac{\lambda P}{2L} \left[u_1^2 + (u_2 - u_1)^2 + u_4^2 + (u_3 - u_2)^2 + (u_4 - u_3)^2 \right]$$

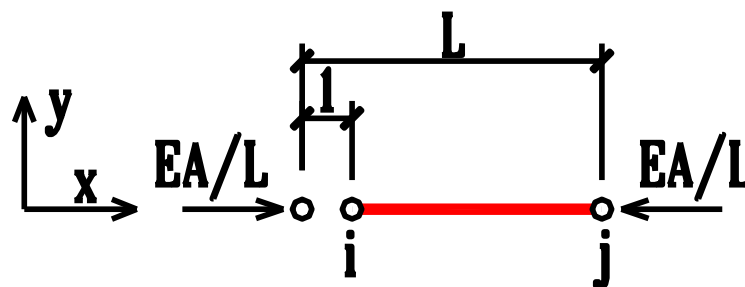
$$\delta \Pi = \delta (U + V) = 0$$



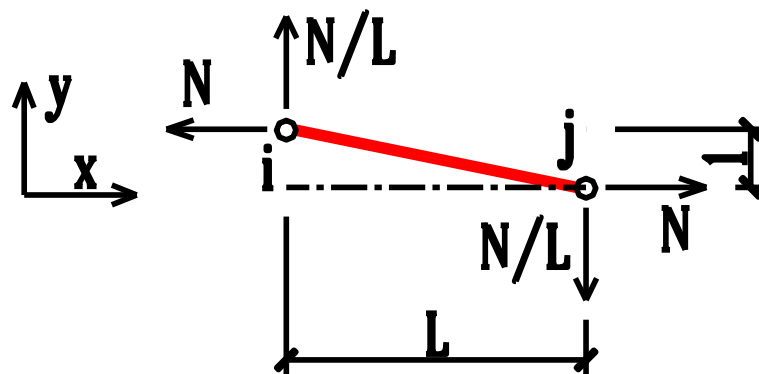
C. 直接写刚度矩阵法 自创，方便

杆单元的单元刚度矩阵

轴向刚度



切向刚度?!



总单元刚度矩阵

	i_x	i_y	j_x	j_y
i_x	EA/L	0	$-EA/L$	0
i_y	0	N/L	0	$-N/L$
j_x	$-EA/L$	0	EA/L	0
j_y	0	$-N/L$	0	N/L

弹性刚度矩阵

	i_x	i_y	j_x	j_y
i_x	EA/L	0	$-EA/L$	0
i_y	0	0	0	0
j_x	$-EA/L$	0	EA/L	0
j_y	0	0	0	0

 $[k_E]$

+

应力刚度矩阵

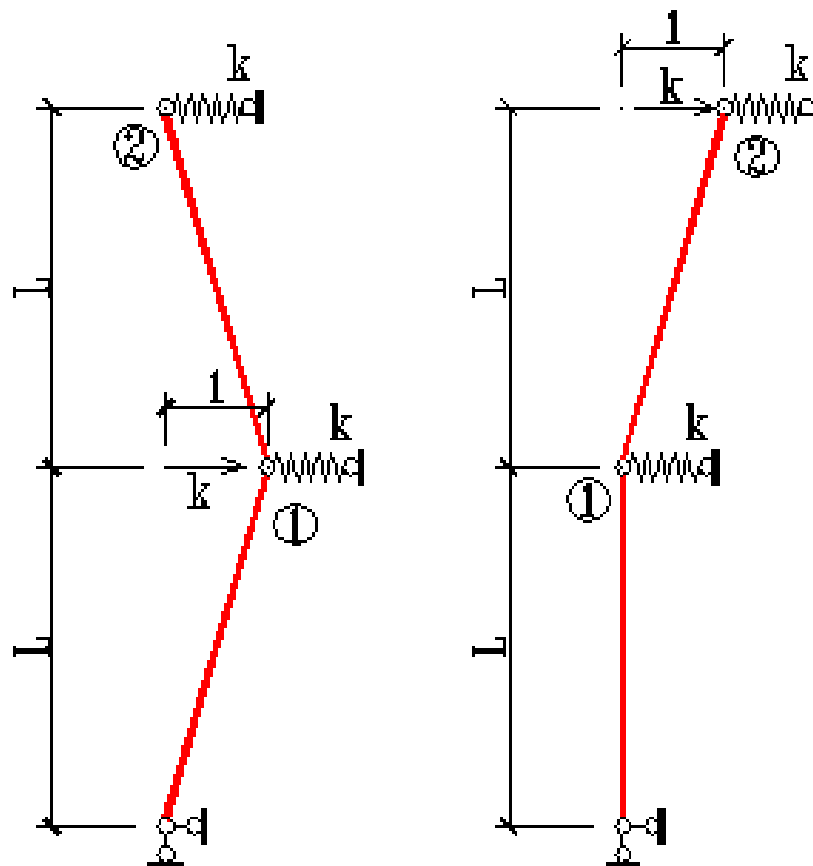
	i_x	i_y	j_x	j_y
i_x	0	0	0	0
i_y	0	N/L	0	$-N/L$
j_x	0	0	0	0
j_y	0	$-N/L$	0	N/L

 $[k_G]$

根据物理意义直接写弹性刚度矩阵

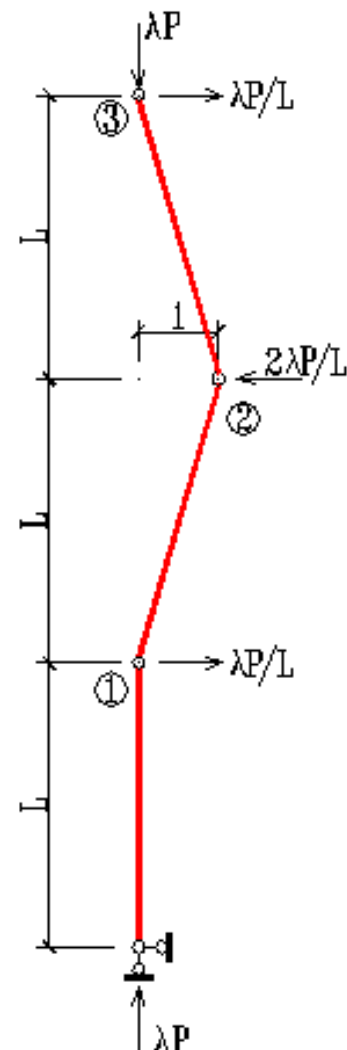
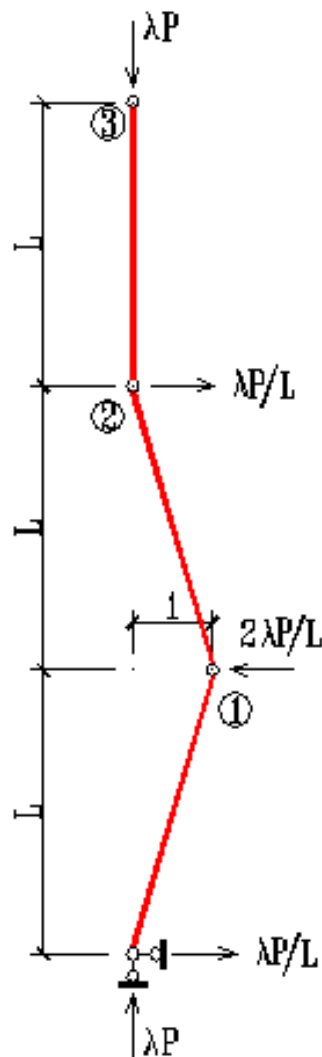
2个自由度

$$k \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



根据物理意义
直接写应力刚度矩阵

$$\frac{\lambda P}{L} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$



根据物理意义直接写弹性刚度矩阵和应力刚度矩阵

$$k \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{\lambda P}{L} \begin{bmatrix} -2 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ & 1 & -2 & 1 \\ & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$[k_E]$$

+

$$\lambda [k_G]$$

根据物理意义直接写弹性刚度矩阵和应力刚度矩阵

$$k \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix} - \frac{\lambda P}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & \\ -1 & 2 & -1 & \\ & -1 & 2 & -1 \\ & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[k_E]$$

—

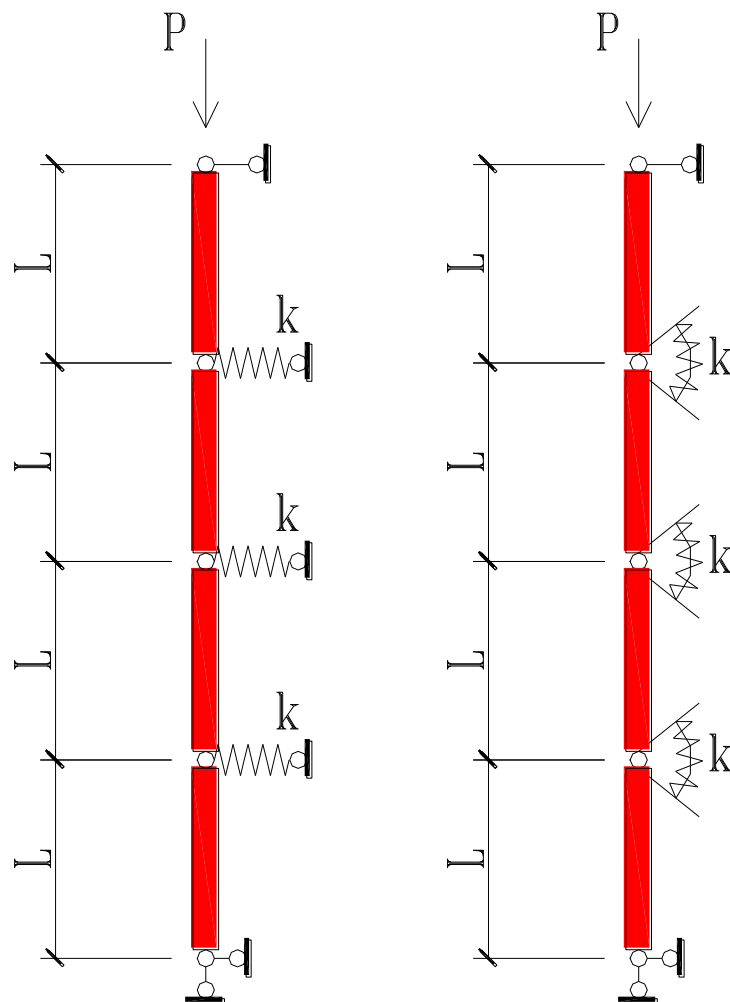
$$\lambda [k_G]$$

- 1) 对比理论解和ANSYS解**Ex03b.mac**，对比屈曲系数和屈曲模态。ANSYS中模态的归一化准则？
- 2) 取 $NN=4$ ，采用子程序读取刚度矩阵和应力刚度矩阵，和理论解进行对比。
- 3) 取 $NN=99$ ，画出结构的**第1阶**屈曲模态和**第99阶**屈曲模态。观察其他各阶屈曲模态。第1阶屈曲模态和第99阶屈曲模态均为正弦曲线，**为什么**？
- 4) 取 $NN=2$ ，采用CAD解答，理解第1阶屈曲模态的意义。

【算例Ex03c】



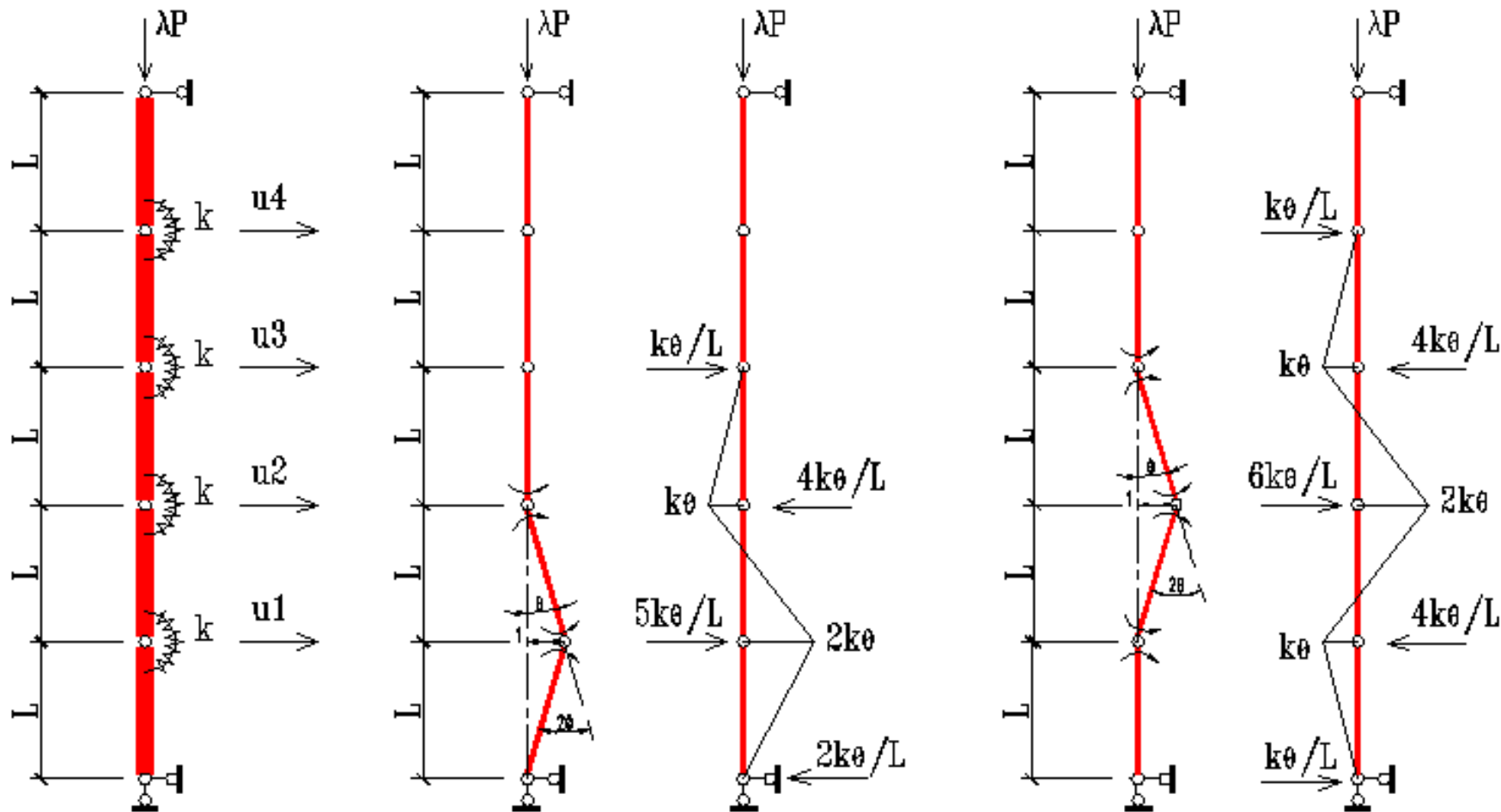
同济大学
TONGJI UNIVERSITY



计算条件：

- 1) 刚性二力杆 $L=1\text{m}$;
- 2) 弹簧刚度 $k=1000\text{ Nm/rad}$
- 3) 集中荷载 $P=1000\text{ N}$
- 4) 求线性屈曲系数;
- 5) 命令流: **Ex03c.mac**

根据物理意义直接写弹性刚度矩阵和应力刚度矩阵



根据物理意义直接写弹性刚度矩阵和应力刚度矩阵

$$\frac{k}{L^2} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} - \frac{\lambda P}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[k_E]$$

—

$$\lambda [k_G]$$

- 1) 注意ANSYS中的编程方法。当两个节点坐标重合时，如何施加扭转弹簧？
- 2) 对比理论解和ANSYS解Ex03c.mac，对比屈曲系数和屈曲模态。如何根据结构概念直接判定一阶屈曲模态？
- 3) 取NN=99，画出结构的第1阶屈曲模态和第99阶屈曲模态。观察其他各阶屈曲模态。第1阶屈曲模态和第99阶屈曲模态均为正弦曲线，为什么？
- 4) 和命令流Ex03b.mac对比，思考为啥这2个算例的模态正好相互倒置？

