1 基本概念

1.1 概念

偏微分方程 (Partial Differential Equation)PDE

常微分方程 (Ordinary Differential Equation)ODE

数理方程中主要研究二阶线性偏微分方程。

1.2 偏微分方程的阶

未知函数偏导数**最高阶**定义为方程的阶。

1.3 偏微分方程的分类

(1) 齐次方程和非齐次方程是否含有仅依赖于自变量的函数

(2) 线性方程——方程中未知函数及其偏导数都是线性的，且未知函数系数依赖于自变量。

(3) 拟线性方程——**最高阶偏导数**是线性的，但方程非线性。

(4) 非线性方程——最高阶偏导是非线性的。

1.4 习题

(a)$(xy+5)u_{xyyz}+x^2yu_{xyz}+y^4u_{yyz}+x^2u+\ln xz=0$

含 $\ln xz$ 非齐次，最高阶 4 阶为 u_{xyyz}，整体线性。

(b)$u_{xx}^2(u_{yy}+1)+2u_xu_y^3+\sin x=0$

含 $\sin x$ 非齐次，最高阶数 2 阶为 u_{xx},u_{yy},u_{xy}，含有 $u_{xx}^2(u_{yy}+1),u_xu_y^3$ 项，非线性。

(c)$u_{xyz}u_{xyyz}+6x^2y^2u_{xyz}+u_xy=0$

方程非线性，但是最高项 4 阶为 $u_{xyz}u_{xyyz}$ 且是线性的，所以总体为拟线性。

注意：如果是 $u_{xxyz}u_{xyyz}$ 最高阶则是非线性的。

2 数学模型的建立及定解问题

2.1 三类典型方程

(1) 波动方程：$u_{tt}=a^2(u_{xx})+u_{yy}$

(2) 热传导方程：$u_t=k(u_{xx}+u_{yy})$

(3) 拉普拉斯方程：$u_{xx}+u_{yy}=0$

3 两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类与化简

3.1 按数学角度分类

(1) 双曲型方程：$u_{tt}=a^2u_{xx}$

(2) 抛物型方程：$u_t = ku_{xx}$

(3) 椭圆型方程：$u_{xx} + u_{yy} = 0$

3.2 两个自变量得二阶线性 PDE 得化简

对于二阶线性微分方程的一般形式为：

$$a(x,y)u_{xx} + b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + d(x,y)u_x + e(x,y)u_y + f(x,y)u = g(x,y)$$

考虑变量变换

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases}$$

Jacobi 行列式确保满足，$J \neq 0$，即为可逆变换：

$$A(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + B(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + C(\xi,\eta)u_{\eta\eta} + D(\xi,\eta)u_\xi + E(\xi,\eta)u_\eta + F(\xi,\eta)u = G(\xi,\eta)$$

为了使得变换后的方程简化，则 ξ, η 应满足

$$\begin{cases} A = a\xi_x^2 + b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0 \\ C = a\eta_x^2 + b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \end{cases}$$

故只需 ξ, η 满足方程：

$$a\varphi_x^2 + b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0$$

对于

$$a\left(\frac{\varphi_x}{\varphi_y}\right)^2 + b\frac{\varphi_x}{\varphi_y} + c = 0$$

与之对应的为如下方程，注意 b 后面的符号为"-"

$$a\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + c = 0$$

解出 $\xi = \varphi_1(x,y), \eta = \varphi_2(x,y)$ 最后代入下式转换后即得标准型方程

$$\begin{cases} u_x = u_\xi\xi_x + u_\eta\eta_x \\ u_y = u_\xi\xi_y + u_\eta\eta_y \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx} \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy} \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy} \end{cases}$$

3.3 习题

1. 判断类型并化为标准型

(a)$u_{xx}+2\cos x u_{xy}-\sin^2 x u_{yy}-\sin x u_y=0$

解　判断类型：$\Delta=b^2-4ac=(2\cos x)^2+4\sin^2=4>0$, 为双曲型方程

特征方程为

$$
\mathrm{d}y^2-2\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y-\sin^2 x\,\mathrm{d}x^2=0
$$
$$
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2\cos\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)-\sin^2 x=0
$$

可解得

$$
\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{1,2}=\cos x\pm 1
$$

积分可得 $\sin x\pm x-y=c$, 并令

$$
\begin{cases}\xi=\sin x+x-y\\ \eta=\sin x-x-y\end{cases}
$$

其中 $\xi_x=\cos x+1,\xi_y=-1,\xi_{xx}=-\sin x,\xi_{yy}=\xi_{xy}=0,\eta_x=\cos x-1,\eta_y=-1,\eta_{xx}=-\sin x,\eta_{yy}=\eta_{xy}=0$，代入可得

$$
\begin{cases}
u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y\\
u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}\\
u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}\\
u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy}
\end{cases}
$$

最后可得 $u_{\xi\eta}=0$

4 S-L 问题

4.1 常见的通解形式

求 $u''+\lambda u=0$ 得通解形式

(1) 当 $\lambda<0$, 方程通解是

$$
u(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}
$$

(2) 当 $\lambda=0$, 方程通解是

$$
u(x)=Ax+B
$$

(3) 当 $\lambda>0$, 方程通解是

$$
u(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x
$$

4.2 习题

3. 求下列 S-L 问题的本征值与本征函数

$$\begin{cases} x^2u'' + 3xu' + \lambda u = 0, 1 < x < e \\ u(1) = 0, u(e) = 0 \end{cases}$$

解　方程各项乘以 x, 可得 $S-L$ 方程：

$$\frac{d}{dx}(x^3\frac{du}{dx}) + \lambda xu = 0$$

此时,$p(x) = x^3, q(x) = 0, s(x) = x.$

(1) 当 $\lambda = 0$ 时，方程通解为

$$u(x) = \frac{C_1}{x^2} + C_2$$

带入边界条件

$$\begin{cases} u(1) = C_1 + C_2 = 0 \\ u(e) = \dfrac{C_1}{e^2} + C_2 = 0 \end{cases}$$

方程组只有零解，即 $C_1 = C_2 = 0$，所以 $u(x) \equiv 0$

(2) 当 $\lambda < 1$ 且 $\lambda \neq 0$, 方程的特解形式为

$$u(x) = x^\beta$$

带入方程中可得：

$$\beta(\beta-1)x^\beta + 3\beta x^\beta + \lambda x^\beta = 0$$
$$x^\beta[\beta(\beta-1) + 3\beta + \lambda] = 0$$
$$\beta^2 + 2\beta + \lambda = 0$$
$$\beta = \pm\sqrt{1-\lambda}$$

方程通解为

$$u(x) = C_1x^{\sqrt{1-\lambda}} + C_2x^{-\sqrt{1-\lambda}}$$

带入边界条件

$$\begin{cases} u(1) = C_1 + C_2 = 0 \\ u(e) = C_1e^{\sqrt{1-\lambda}} + C_2e^{-\sqrt{1-\lambda}} = 0 \end{cases}$$

方程组只有零解，即 $C_1 = C_2 = 0$，所以 $u(x) \equiv 0$

(3) 当 $\lambda > 1$, 由 (2) 可得，此时有

$$\beta^2 + 2\beta + \lambda = 0$$
$$\beta = \pm i\sqrt{1-\lambda}$$

方程通解为

$$u(x) = C_1 x^{i\sqrt{1-\lambda}} + C_2 x^{-i\sqrt{1-\lambda}}$$

注意到

$$x^{\pm i\sqrt{1-\lambda}} = e^{\pm i\sqrt{1-\lambda}\ln x} = \cos(\sqrt{1-\lambda}\ln x) \pm i\sin(\sqrt{1-\lambda}\ln x)$$

方程通解为实部和虚部的线性组合

$$u(x) = A\cos(\sqrt{1-\lambda}\ln x) + B\sin(\sqrt{1-\lambda}\ln x)$$

带入边界条件，由 u(1)=0 可得 $A = 0$，由 $u(e) = 0$ 可得

$$B\sin(\sqrt{1-\lambda}) = 0$$

从上式可得本征值

$$\lambda_n = 1 + n^2\pi^2, n = 1, 2, 3 \ldots$$

相应的本征函数为

$$u_n(x) = \frac{1}{x}\sin(n\pi\ln x), n = 1, 2, 3 \ldots$$

4.3 常数变易法

对于 n 阶线性微分方程在已知其齐次方程通解的基础上，利用常数变易法求解。一般是将前 $n-1$ 阶解的导数表达式中所有含待定系数函数一阶导数项之和等于 0。

对于 n 阶线性微分方程：

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

对应的齐次方程通解为：$y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n$

利用常数变易法设方程的解形式为：$y^* = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \cdots + C_n(x)y_n$，其中 $C_i(x)$ 为待定系数函数, 对该解分别进行 $1, 2, \cdots, (n-1)$ 阶导，可得到 $n-1$ 个方程。

$$\begin{cases} y = C_1y_1 + C_2y_2 + \cdots + C_ny_n \\ y' = (C_1'y_1 + C_2'y_2 + \cdots + C_n'y_n) + (C_1y_1' + C_2y_2' + \cdots + C_ny_n') \\ y'' = (C_1''y_1 + C_2''y_2 + \cdots + C_n''y_n) + (C_1'y_1' + C_2'y_2' + \cdots + C_n'y_n') + (C_1y_1'' + C_2y_2'' + \cdots + C_ny_n'') \\ \cdots \\ y^{(n-1)} = (C_1^{(n-1)}y_1 + C_2^{(n-1)}y_2 + \cdots + C_n^{(n-1)}y_n) + \cdots + (C_1y_1^{(n-1)} + C_2y_2^{(n-1)} + \cdots + C_ny_n^{(n-1)}) \end{cases}$$

分别令 $n-1$ 个表达式中所有含待定函数一阶导数的项的和为 0。

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)+\cdots+C_n'(x)y_n(x)=0 \\ C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+\cdots+C_n'(x)y_n'(x)=0 \\ \cdots \\ C_1'(x)y_1^{(n-2)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-2)}(x)+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-2)}(x)=0 \end{cases}$$

其中最后一项,n 阶导数为：

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=C_1'(x)y_1^{(n-1)}(x)+C_2'(x)y_2^{(n-1)}(x)+\cdots+C_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)=f(x)$$

$$\begin{cases} k_{11}x_1+k_{12}x_2+\cdots+k_{1n}x_n=b_1 \\ k_{21}x_1+k_{22}x_2+\cdots+k_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots \\ k_{n1}x_1+k_{n2}x_2+\cdots+k_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

5 积分变换

求解无界区域或半无界区域上的问题，将 $f(x)$ 经过某种的积分变换

$$F(\lambda)=\int K(x,\lambda)f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 λ 为参变量，$K(x,\lambda)$ 为积分变换核，$F(\lambda)$ 为 $f(x)$ 的**像函数**，$f(x)$ 为 $F(\lambda)$ 的原像函数。通过积分变换，将 PDE 转换为依赖参变量 ODE 的定解问题，求出 ODE 的解后，经过逆变换，得到 PDE 的解。

$f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内分段光滑且绝对可积。则积分 $F(\lambda)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda\xi}d\xi$，称为 $f(\xi)$ 的傅里叶积分变换，记作 $\tilde{F}[f(x)]$。积分 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}F(\lambda)e^{-i\lambda x}d\lambda$ 称为 $F(\lambda)$ 的傅里叶积分逆变换，记作 $\tilde{F}^{-1}[F(\lambda)]$。

原理公式：$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)e^{i\lambda\xi}\,\mathrm{d}\xi\right]e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda$

其中内层积分呢为正变换，外层积分为逆变换，最终变回自身

误差函数说明：$erf(z)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^z e^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta$，积分限为 $(0,z)$

余误差函数为：$erfc(z)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_z^{+\infty}e^{-\eta^2}\,\mathrm{d}\eta$，积分限为 $(z,+\infty)$

误差函数 + 余误差函数 =1，即 $erf(z)+erfc(z)=1$

5.1 傅里叶变换的性质

(1) 线性变换：$\tilde{F}[\alpha f(x)+\beta g(x)]=\alpha\tilde{F}[f(x)]+\beta\tilde{F}[g(x)]$

(2) 位移性质：$\tilde{F}[f(x-c)]=e^{i\lambda c}\tilde{F}[f(x)]$

(3) 积分性质：$\tilde{F}[\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi]=-\dfrac{1}{i\lambda}\tilde{F}[f(x)]$

(4) 微分性质：$\tilde{F}[f^{(n)}(x)]=(-i\lambda)^n\tilde{F}[f(x)]$

(5) 卷积：$f(x),g(x)$ 都满足傅里叶变换条件，即 $F(\lambda)=[f\tilde{(x)}],G(\lambda)=\tilde{F}[g(x)]$，

(6) 则积分 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\xi)g(\xi)d\xi=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x-\xi)f(\xi)d\xi$

5.2 例题

波动方程求解

用傅里叶变换求解

$$\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx}, & -\infty<x<+\infty,t>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) \\ u_t(x,0)=\psi(x) \end{cases}$$

解： 令 $\tilde{F}[u(x,t)]=V(\lambda,t)$，对方程做傅里叶变换转换为：

$$\begin{aligned} &\tilde{F}[u_{tt}]=c^2\tilde{F}[u_{xx}] \\ &\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}t^2}+c^2(-i\lambda)^2V=0 \\ &V(\lambda,t)=c_1(\lambda)\cos c\lambda t+c_2(\lambda)\sin c\lambda t \end{aligned}$$

将已知条件带入得，

$$\begin{aligned} &\tilde{F}[u(x,0)]=\tilde{F}[\varphi(x)]=V(x,0)=F(\lambda) \\ &\tilde{F}[u_t(x,0)]\tilde{F}[\psi(x)]=V_t(x,0)=G(\lambda) \end{aligned}$$

$$V(\lambda,t)=F(\lambda)\cos c\lambda t+\frac{G(\lambda)}{c\lambda}\sin c\lambda t$$

傅里叶逆变换，

$$\begin{aligned} \cos c\lambda t=&\frac{e^{ic\lambda t}+e^{-ic\lambda t}}{2} \\ \tilde{F}^{-1}[F(\lambda)\cos c\lambda t]=&\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)\cos c\lambda t e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda \\ =&\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{ic\lambda t}e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\lambda)e^{-ic\lambda t}e^{-i\lambda x}\,\mathrm{d}\lambda \\ =&\frac{1}{2}\tilde{F}^{-1}[F(\lambda)]e^{i\lambda ct}+\frac{1}{2}\tilde{F}^{-1}[F(\lambda)]e^{-i\lambda ct} \end{aligned}$$

根据位移公式 $\tilde{F}[f(x-c)] = e^{i\lambda ct}\tilde{F}[f(x)]$ 可得

$$\begin{aligned} f(x-c) =& \tilde{F}^{-1}[\tilde{F}(f(x))]e^{i\lambda c} \\ \varphi(x-ct) =& \tilde{F}^{-1}[\tilde{F}(\varphi(x))]e^{i\lambda ct} \\ =& \tilde{F}^{-1}[F(\lambda)]e^{i\lambda ct} \end{aligned}$$

带入上式可得

$$\begin{aligned} \text{原式} =& \frac{1}{2}\tilde{F}^{-1}[F(\lambda)]e^{i\lambda ct} + \frac{1}{2}\tilde{F}^{-1}[F(\lambda)]e^{-i\lambda ct} \\ =& \frac{1}{2}\varphi(x-ct) + \frac{1}{2}\varphi(x+ct) \end{aligned}$$

5.3 拉普拉斯变换 (L-T)

傅里叶变换得局限性：它要求被变换函数定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上，其次要求被变换函数在两端要趋于零，且趋向速度比较快，即满足绝对可积的条件。

而一些涉及到时间的问题，只需研究 $t > 0$ 的变化，不能直接用傅里叶变换。此时若满足 $|f(t)| \leq Me^{s_0 t}$(具有指数阶)，且分段光滑条件不变，则可利用拉普拉斯变换。

$$f_1(t) = \begin{cases} f(t)e^{-st}, & t > 0, s > s_0 > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

此时作傅里叶变换，得拉普拉斯正变换:

$$\begin{aligned} \tilde{F}[f(t)e^{-st}] =& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)e^{st}e^{i\lambda t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-(s-i\lambda)t}\,\mathrm{d}t \\ \overset{p=(s-i\lambda)}{=}& \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t = F(p) \end{aligned}$$

逆变换，一般不用，常借助性质求解。

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} F(p)e^{pt}\,\mathrm{d}p$$

原理公式：

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\left[\int_0^{+\infty} f(\eta)e^{-p\eta}\,\mathrm{d}\eta\right]e^{pt}\,\mathrm{d}p$$

5.4 拉普拉斯变换性质

(1) 线性变换：$\tilde{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha\tilde{L}[f(t)] + \beta\tilde{L}[g(t)]$

(2) 微分性质 1：$\tilde{L}[f^n(t)] = p^n\{\tilde{L}[f(t)] - \frac{f(0^+)}{p} - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0^+)}{p^n}\}$

微分性质 2：$\frac{\mathrm{d}^n F(p)}{\mathrm{d}p^n} = \tilde{L}[(-t)^n f(t)], \tilde{L}[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(\eta)e^{-p\eta}\,\mathrm{d}\eta = F(p)$

(3) 积分性质 1:$\varphi=\int_0^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau,\tilde{L}[\varphi(t)]=\frac{1}{p}\tilde{L}[f(t)]$, $\tilde{L}[\varphi'(t)]=\tilde{L}[f(t)]=p\tilde{L}[\varphi(t)]$

积分性质 2：$F(p)=\tilde{L}[f(t)],\int_p^{+\infty}F(s)=\tilde{L}[\frac{1}{t}f(t)]$

(4) 位移性质：$F(p-p_0)=\tilde{L}[e^{p_0 t f(t)}]$

(5) 延迟性质 (重点)：$\tilde{L}[f(t-c)]=e^{-pc}\tilde{L}[f(t)]=e^{-pc}F(p),c>0$

(6) 相似性质:$\tilde{L}[f(at)]=\frac{1}{a}F(\frac{p}{a}),a>0$

(7) 卷积性质：将 $\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\int_0^t g(t-\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, 记为 $f*g(t)=g*f(t)$。

拉普拉斯变换是线性变换，其中积分微分 1,2 性质主要在于**是先进行积分或微分操作，还是先进行拉普拉斯变换。**

卷积性质说明：卷积的拉普拉斯变换等于拉普拉斯变换后的乘积；乘积的变换等于变换后的卷积。

5.5 常见的拉普拉斯变换

具体如下：

(1)$f(t)=1,F(p)=\tilde{L}[1]=\frac{1}{p^2}$

(2)$f(t)=t^n,F(p)=\tilde{L}[t^n]=\frac{n!}{p^{n+1}}$

(3)$f(t)=\cos wt,F(p)=\tilde{L}[\cos wt]=\frac{p}{p^2+w^2}$

(4)$f(t)=\sin wt,F(p)=\tilde{L}[\sin wt]=\frac{w}{p^2+w^2}$

6 格林函数法

6.1 格林函数法解非线性 ODE 边值问题

前面借助常数变异法解非齐次 ODE 初值问题。格林函数 $G(x,\xi)$ 可看作点 ξ 在单位力的作用下，于 x 处产生的弦振动位移，同理格林函数 $G(\xi,x)$ 可看作点 x 在单位力的作用下，于 ξ 处产生的弦振动位移。

对于区间 $[a,b]$ 上，如果每个小区间上都存密度为 $f(\xi)$ 的连续分布的外力。则在线上点 x 处的振动位移可表示为：

$$u(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

格林函数应满足的条件：

(1) $G(x,\xi)$ 在区域 D 上是连续的（含区域边界），但其一阶，二阶导数是在 D 中除了 $x=\xi$ 以外的区域连续，其中 $D=\{(x,\xi)|a<x<b,a<\xi<b\}$

(2) 一阶导数在区间 (a,b) 内的跳越间断性,$G_x(\xi^+,\xi)-G_x(\xi^-,\xi)=-\frac{1}{p(\xi)}$。(注:$\xi^+>\xi,\xi^-<\xi$)

(3) 对于固定点 ξ，在 $x=\xi$ 之外，$G(x,\xi)$ 关于变量 x 满足 $LG=0$ 及边界条件。

如何构造格林函数：

$$G(x,\xi)=\begin{cases}G_1(x,\xi), & a\le x<\xi\\[2ex] G_2(x,\xi), & \xi<x\le b\end{cases}=\begin{cases}u_1(x)c_1(\xi), & a\le x<\xi\\[2ex] u_2(x)c_2(\xi), & \xi<x\le b\end{cases}$$

求 $Lu(x)$ 通解，选取分别满足边界条件的 $u_1(x),u_2(x)$，注意选取的 $u_1(x),u_2(x)$ 应线性无关。

$$G(x,\xi)=\begin{cases}\dfrac{u_1(x)u_2(\xi)}{p(\xi)W(\xi,u_1(\xi),u_2(\xi))}, & a\le x<\xi\\ \dfrac{u_2(x)u_1(\xi)}{p(\xi)W(\xi,u_1(\xi),u_2(\xi))}, & \xi<x\le b\end{cases}$$

其中 $W(\xi,u_1(\xi),u_2(\xi s))=u_1(\xi)u_2'(\xi)-u_2(\xi)u_1'(\xi)$ 为朗斯基（wronskian）行列式。最后可得 $u(x)=\int_a^{x^-}G_2(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\int_{x^+}^{b}G_1(x,\xi)f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$, 此处应注意区分 G_2,G_1 的前后位置。在 $a\le\xi<x^-$ 区间内积分，即符合 $x>\xi$ 对应的 G_2