

Zhiyuan College

Physics (Zhiyuan Honor Program)

量子霍尔效应

2024 春

Author: Qiheng Wang, Xuanye Fu

Date: December 16, 2024

Contents

1	经典霍尔效应	1
2	整数量子霍尔效应	2
2.1	现象	2
2.2	朗道能级	3
2.3	使用杂质、局域和非局域态进行解释	4
2.4	规范不变性	5
2.5	Kubo 公式	7
3	石墨烯中的整数量子霍尔效应	9
4	分数量子霍尔效应	14
4.1	现象	14
4.2	Laughlin State(ground state)	15
4.2.1	多体粒子的 Laughlin State	15
4.2.2	The Wigner Crystal (Laughlin State 近似上限)	16
4.2.3	等离子体类比	17

4.3	激发态	18
4.4	分数电荷和 anyon	20
4.4.1	anyon 的简介和性质	20
4.4.2	分数电荷和分数统计	22
4.4.3	拓扑序	23

References

- [1] David Tong. *Lectures on the Quantum Hall Effect*. Sept. 2016. arXiv: [1606.06687](#) [[cond-mat](#), [physics:hep-th](#)].
- [2] Gerald D. Mahan. *Many-Particle Physics*. Boston, MA: Springer US, 2000. isbn: 978-1-4419-3339-3 978-1-4757-5714-9. doi: [10.1007/978-1-4757-5714-9](#).
- [3] V. P. Gusynin and S. G. Sharapov. “Magnetic Oscillations in Planar Systems with the Dirac-like Spectrum of Quasiparticle Excitations. II. Transport Properties”. In: *Phys. Rev. B* 71.12 (Mar. 2005), p. 125124. doi: [10.1103/PhysRevB.71.125124](#).
- [4] Philip Kim. “Bloch, Landau, and Dirac:” in: *Zeitschrift für Physik* (1929).
- [5] Yisong Zheng and Tsuneya Ando. “Hall Conductivity of a Two-Dimensional Graphite System”. In: *Phys. Rev. B* 65.24 (June 2002), p. 245420. issn: 0163-1829, 1095-3795. doi: [10.1103/PhysRevB.65.245420](#).
- [6] K. S. Novoselov et al. “Unconventional Quantum Hall Effect and Berry’s Phase of 2π in Bilayer Graphene”. In: *Nature Phys* 2.3 (Mar. 2006), pp. 177–180. issn: 1745-2473, 1745-2481. doi: [10.1038/nphys245](#).

- [7] V. P. Gusynin and S. G. Sharapov. “Unconventional Integer Quantum Hall Effect in Graphene”. In: *Phys. Rev. Lett.* 95.14 (Sept. 2005), p. 146801. doi: [10.1103/PhysRevLett.95.146801](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.146801).
- [8] Daniel C Tsui, Horst L Stormer, and Arthur C Gossard. “Two-dimensional magnetotransport in the extreme quantum limit”. In: *Physical Review Letters* 48.22 (1982), p. 1559. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.48.1559>.
- [9] Robert B Laughlin. “Anomalous quantum Hall effect: an incompressible quantum fluid with fractionally charged excitations”. In: *Physical Review Letters* 50.18 (1983), p. 1395. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.50.1395>.
- [10] John C Slater. “The theory of complex spectra”. In: *Physical review* 34.10 (1929), p. 1293. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.34.1293>.
- [11] Werner Heisenberg. “Mehrkörperproblem und Resonanz in der Quantenmechanik”. In: *Zeitschrift für Physik* 38.6 (1926), pp. 411–426. doi: <https://doi.org/10.1007/BF01397160>.
- [12] Paul Adrien Maurice Dirac. “On the theory of quantum mechanics”. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character* 112.762 (1926), pp. 661–677. doi: <https://doi.org/10.1098/rspa.1926.0133>.
- [13] Henrik Bruus and Karsten Flensberg. *Many-body quantum theory in condensed matter physics: an introduction*. OUP Oxford, 2004.
- [14] Michael G Medvedev et al. “Density functional theory is straying from the path toward the exact functional”. In: *Science* 355.6320 (2017), pp. 49–52. doi: <https://doi.org/10.1126/science.aah5975>.
- [15] Eugene Wigner. “On the interaction of electrons in metals”. In: *Physical Review* 46.11 (1934), p. 1002. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.46.1002>.
- [16] Eugene Wigner. “Effects of the electron interaction on the energy levels of electrons in metals”. In: *Transactions of the Faraday Society* 34 (1938), pp. 678–685. doi: <https://doi.org/10.1039/TF9383400678>.
- [17] Michael Braus. “The theory of electrolytes. I. Freezing point depression and related phenomena (Translation)”. In: (2019).

- [18] R De-Picciotto et al. “Direct observation of a fractional charge”. In: *Physica B: Condensed Matter* 249 (1998), pp. 395–400. doi: [https://doi.org/10.1016/S0921-4526\(98\)00139-2](https://doi.org/10.1016/S0921-4526(98)00139-2).
- [19] James Nakamura et al. “Direct observation of anyonic braiding statistics”. In: *Nature Physics* 16.9 (2020), pp. 931–936. doi: <https://doi.org/10.1038/s41567-020-1019-1>.
- [20] Frank Wilczek. “From electronics to anyonics”. In: *Physics world* 19.1 (2006), p. 22. doi: [10.1088/2058-7058/19/1/31](https://doi.org/10.1088/2058-7058/19/1/31).
- [21] Anil Khurana. “Bosons Condense and Fermions ‘Exclude’, But Anyons...?” In: *Physics Today* 42.11 (1989), pp. 17–21. doi: <https://doi.org/10.1063/1.2811205>.
- [22] Daniel Arovas, John R Schrieffer, and Frank Wilczek. “Fractional statistics and the quantum Hall effect”. In: *Physical review letters* 53.7 (1984), p. 722. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.722>.
- [23] Yakir Aharonov and David Bohm. “Significance of electromagnetic potentials in the quantum theory”. In: *Physical review* 115.3 (1959), p. 485. doi: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.485>.

1 经典霍尔效应

使用最简单的 Drude 模型，在二维中，考虑电子在如图1所示电磁场中的稳态解：

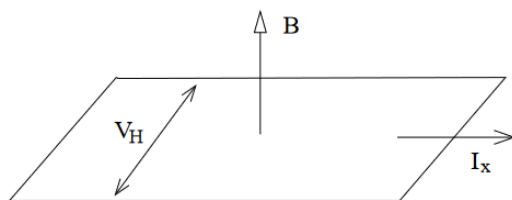


Figure 1: Drude 模型

$$\vec{v} + \frac{e\tau}{m} \vec{v} \times \vec{B} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E} \quad (1a)$$

$$v_i + \epsilon_{ij} v_j \omega_B = -\frac{e\tau}{m} E_i \quad \text{where} \quad \omega_B = \frac{eB}{m} \quad (1b)$$

定义 $\rho_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij} \omega_B$, 我们有:

$$\rho'_{ij} v_j = -\frac{e\tau}{m} E_i \quad (2)$$

因为 $j = -nev$, 所以 $\vec{J} = -ne\vec{v}$, 因此:

$$\rho'_{ij} J_j = -\frac{e^2 n \tau}{m} E_i \quad (3)$$

因此，电导率张量为:

$$\sigma = \frac{\sigma_{DC}}{1 + \omega_B^2 \tau^2} \begin{pmatrix} 1 & -\omega_B \tau \\ \omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \sigma_{DC} = \frac{ne^2 \tau}{m} \quad (4)$$

因为电阻张量可以写为:

$$-\frac{m}{e^2 n \tau} \rho'_{ij} = -\frac{m}{e^2 n \tau} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma_{DC}} \begin{pmatrix} 1 & \omega_B \tau \\ -\omega_B \tau & 1 \end{pmatrix} \quad (5)$$

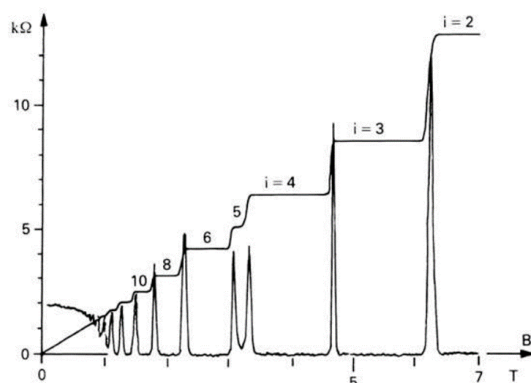


Figure 2: 量子化的霍尔电阻

不难发现 ρ_{xy} 和 ρ_{yx} 与弛豫时间 τ 无关。并且当我们关心霍尔电阻 $R = \frac{V_H}{I_x}$ 时，我们可以发现：

$$\frac{V_y}{I_x} = R_{yx} = \rho_{yx} = \frac{B}{ne} = R_H B \quad (6)$$

这里的 $R_H = \frac{1}{ne}$ 就被称为霍尔系数。

2 整数量子霍尔效应

2.1 现象

实际上测得的霍尔电阻呈现量子化的“平台”特征，平台出现在：

$$\rho_{xy} = \frac{2\pi\hbar}{e^2} \frac{1}{\nu} \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (7)$$

如图2所示。在扫描磁场是时，平台的中心对应于特定的磁场强度：

$$B = \frac{n}{\nu} \frac{2\pi\hbar}{e} = \frac{n}{\nu} \Phi_0 \quad (8)$$

这种量子化的“平台”行为在考虑真实系统的杂质、温度以及其他微扰后仍然是相对稳定的。事实上，如果没有任何杂质，平台将会彻底消失。对于 IQHE 理论的一般刻画参

考了 David Tong 教授的讲义 [1]。

2.2 朗道能级

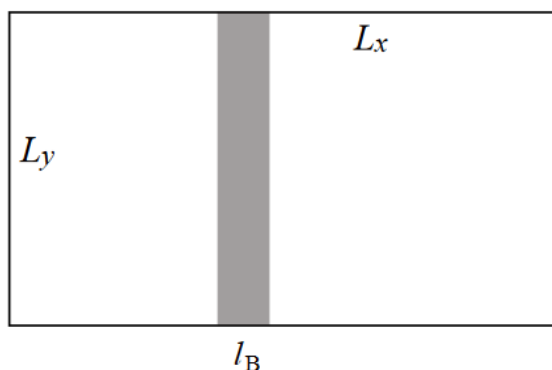


Figure 3: Landau Level

对于有效质量为 m^* 的固体中的电子，其在磁场中的哈密顿量形式为：

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m^*} (\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 \quad (9)$$

选取不同的规范，可以得到不同的本征波函数，但最终不会影响结论。

在朗道规范中，运用薛定谔方程可以解得

$$\psi_{n,k}(x, y) = H_n(x + k\ell_B^2) e^{-(x+k\ell_B^2)^2/2\ell_B^2} e^{iky}.$$

$|\psi_{n,k}|^2$ 高度局域在宽为 ℓ_B ，沿 $x = -k\ell_B^2$ 的一条长带中，这里 $\ell_B = \sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ 。因为 y 方向上的周期性边界条件，波矢 k 被量子化为 $k = \frac{2\pi m}{L_y}$, $m \in \mathbb{Z}$ 。因为能量是对 k 简并的， n -th 朗道能级的简并度即 m 的简并度。根据 $0 \leq -k\ell_B^2 \leq L_x$ ，我们可以得到：

$$m_{max} = \frac{\Phi}{\Phi_0}, \Phi_0 = \frac{h}{e}, \Phi = BL_xL_y \quad (10)$$

对于这个二维系统，完全填充 ν 个朗道能级对应电子密度为：

$$n = \nu \frac{1}{S} \frac{\Phi}{\Phi_0} = \frac{B}{\Phi_0} \nu \quad \nu \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

2.3 使用杂质、局域和非局域态进行解释

在强磁场中，无相互作用的费米气体集聚到一个个朗道能级上。固定电子数密度 n ，假设费米能足够高。假如 $B = n\Phi_0/\nu$ ，则意味着正好有 ν 个朗道能级被填满。此时的霍尔系数也可以写为：

$$R_H = \frac{1}{ne} = \frac{1}{e} \frac{\Phi_0}{B} \nu \quad (12)$$

但是当磁场强度 $B \neq n\Phi_0/\nu$ ，就会有更高一级的朗道能级半充满，体系从磁场的变化中吸取能量，从而破坏霍尔电阻的量子化。维持量子化的因素是材料中的杂质以及干扰。考虑这种无序对哈密顿的修正是一种无序势能 V ，且相对于朗道能级的能隙较小 $V \ll \hbar\omega_B$ ，使得朗道能级还是分立状态。同时这个势能变化在磁场特征长度 ℓ_B 上是平坦的 $|\nabla V| \ll \frac{\hbar\omega_B}{\ell_B}$ ，也就是说在波函数的感受中是平坦的。回顾之前求解朗道能级时定义的轨道中心算符：

$$\hat{X} = \hat{x} - \frac{\hat{\pi}_y}{m\omega_B} \quad \hat{Y} = \hat{y} + \frac{\hat{\pi}_x}{m\omega_B} \quad (13)$$

此前，两个算符满足很好的与哈密顿完全对易关系，在引入无序势后：

$$[X, H + V] = [X, V] \quad V = V_0 + \vec{\nabla} V \cdot \vec{r} \quad (14a)$$

$$= [X, Y] \frac{\partial V}{\partial Y} = i\ell_B^2 \frac{\partial V}{\partial Y} \quad (14b)$$

同理有 $[Y, H + V] = -i\ell_B^2 \frac{\partial V}{\partial X}$ 。由海森堡运动方程可以整理出：

$$i\hbar \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = i\ell_B^2 \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial Y} \\ -\frac{\partial V}{\partial X} \end{pmatrix} \quad (15)$$

由于 $\frac{\partial^2}{\partial X \partial Y} V = \frac{\partial^2}{\partial Y \partial X} V$ 。所以轨道中心算符的演化是沿着势能的切向的，亦即沿着等能面运动。局域化就产生于等能线的局域性。

而带芯的态则是巡游的，因此补偿了局域态的导电劣势。

2.4 规范不变性

之前我们讨论了一般的二维矩形周期性边界材料中的量子霍尔效应。现在我们转而考虑圆环材料，磁场从中心穿过。这里隐含了假设，即量子霍尔效应是与材料几何拓扑性质无关的。

基于体系的旋转对称性，我们选择对称规范求解矢势。由于圆环是在磁场之外且具有复联通拓扑结构，因此仅存在非零的矢势，假设磁通量为 Φ ，则圆环中矢势为：

$$A = \frac{\Phi}{2\pi\rho} \mathbf{e}_\phi \quad (16)$$

我们首先降维，假设径向电子运动受到抑制。这可以说明能谱的性质。动量算符为：

$$\hat{\pi}_\phi = \hat{p}_\phi - qA_\phi = \frac{\hbar}{i\rho} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{q\Phi}{2\pi\rho} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi} - \frac{q\Phi}{2\pi} \right). \quad (17)$$

解这个一维问题可以得到本征态及其对应的本征能量：

$$\psi_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho}} e^{in\phi}, \quad (18a)$$

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m\rho^2} \left(n + \frac{\Phi}{\Phi_0} \right)^2, \quad (18b)$$

上式意味着当 Φ 为磁通量子 Φ_0 的整数倍时，能谱具有相同的行为，但是能级平移。比如说，当磁通从 0 缓慢增加到 Φ_0 的过程中，原来处于基态的电子根据绝热定理应该会停留在基态的波函数。然而，当 $\Phi = \Phi_0$ 时，原来的基态波函数能量变为了第一激发态能量，亦即：

$$\psi_0(\Phi = 0) \rightarrow \psi_0(\Phi = \Phi_0) = \psi_1(\Phi = 0) \quad (19)$$

在这个一维问题中，电子的波函数在绝热演化中没有任何变化但能量改变。现在考虑二维环带中的电子，如图4所示。利用复变函数的方法，引入复变量 $z = x + iy$ ，定义两个湮灭算符：

$$\begin{aligned} \hat{a} &= -i\sqrt{2} \left(\ell_B \bar{\partial} + \frac{z}{4\ell_B} \right), \\ \hat{b} &= -i\sqrt{2} \left(\ell_B \partial + \frac{\bar{z}}{4\ell_B} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

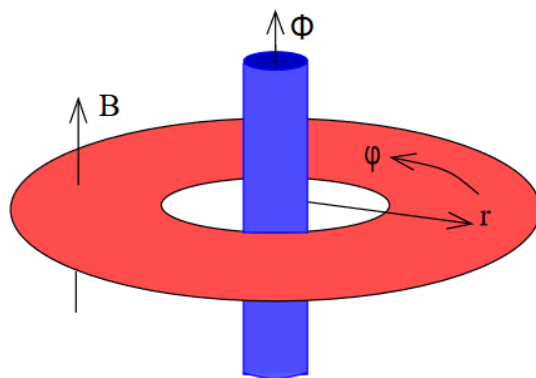


Figure 4: 圆环几何

可以解得基态 (LLL) 的波函数为:

$$\psi_m \sim z^m e^{-|z|^2/4l_B^2} = e^{im\phi} r^m e^{-r^2/4l_B^2} \quad (21)$$

在中心螺线管磁通的缓慢变化中, 电子波函数可以被附加一个相位:

$$\psi_{\Phi+\Delta\Phi} = e^{-ie\phi\Delta\Phi/2\pi\hbar} \psi_{\Phi} \quad (22)$$

如果态是巡游的, 则应当满足圆几何中的单值性, 亦即 $\psi(\phi) = \psi(\phi + 2\pi)$ 。这就量子化了磁通的改变量:

$$-\frac{e\Delta\Phi}{h}\phi = -\frac{e\Delta\Phi}{h}(\phi + 2\pi) + 2\pi N \quad N \in \mathbb{Z} \quad (23a)$$

$$\therefore \Delta\Phi = N\Phi_0 \quad (23b)$$

当然, 引入杂质使部分态局域化是一个好的办法。局域态不用满足边界条件使得磁通可以被连续改变, 但在改变磁通的过程中, 巡游态会越过周期态移动, 称为 **Spectral Flow**。这是来源于之前的波函数 Eq.21 是高度局域在半径 $r = \sqrt{2m\ell_B^2}$ 处的, 因此对于每一个能级上的巡游态, 磁通改变一个 Φ_0 时都正好到达外侧的一个能级。而在这个过程中, 局域态则被几乎限制在自己的轨道上, 形成环向电流。

之前我们说明了当 ν 个朗道能级被正好填满时, 霍尔电阻能够与平台正好相符。当化学势在 ν 和 $\nu+1$ 个朗道能级中间时, 其下 ν 个 LL 被完全填满。由于电磁场的相对性, 我

们把之前的螺线管导致的磁矢势想象成一个电场产生的，亦即由电压驱动螺线管的磁通改变，则这个等效“霍尔电压”为 $\varepsilon = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$ ，径向巡游态电流视为霍尔电流，每改变一个 Φ_0 会输送电子产生电流。则霍尔电阻可以计算得到：

$$R_{xy} = \frac{V_\phi}{I_r} = \frac{\Delta\Phi/\Delta t}{\nu(-e)/\Delta t} = -\frac{2\pi\hbar}{e^2\nu} = -\rho_{xy} \quad (24)$$

可以发现也为平台值！而推导的前提仅是 ν 个 LL 能级被占据，因此可以解释平台的维持。

另一方面，由于我们采取的二维平面周期性边界假设，我们也可以在 x 方向卷曲平面并首尾连接形成一个曲面系统，然后在中心加入一个磁通产生上文的“额外磁矢势”，如图5所示。思想是类似的，不过并不破坏系统的几何，不多赘述了。

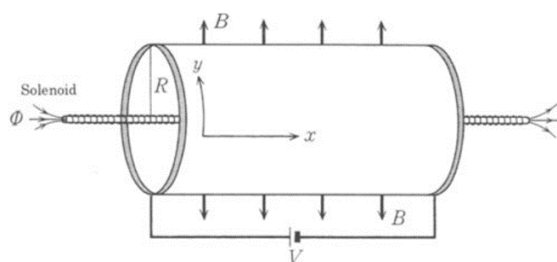


Figure 5: Laughlin 思想实验

2.5 Kubo 公式

前面我们已经介绍了很多对霍尔效应的量子化解释。但为了后文石墨烯中 IQHE 的定量推导，Kubo 方程需要被介绍，Kubo 方程给出了霍尔电导完全由量子力学可观测量算符组成的表达式。

定义在施加电场之前，系统哈密顿量为 H_0 。这可以是最简单的磁场中自由电子气哈密顿量 Eq.9，也可以是复杂的能带电子在磁场中的哈密顿量。引入电场，选取 Temporal Gauge $\phi = A_0 = 0$ 。如此电场强度 $E = -\partial_t A$ 。因为引入这个电场导致的额外哈密顿量

为：

$$\Delta H = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \quad (25)$$

其中 \mathbf{J} 为霍尔电流。假设施加的是交变电场 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ ，对于直流电场可以取 $\omega \rightarrow 0$ 的极限。由 Temporal Gauge 得到磁矢势为：

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{E}_0}{i\omega} e^{-i\omega t} \quad (26)$$

进入相互作用绘景，将 ΔH 视为一个微扰。时间演化算符相应变为：

$$U(t, t_0) = \mathcal{T} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \Delta H(t') dt' \right) \quad (27)$$

其中 \mathcal{T} 为 Time Ordering 算符。霍尔电流的实验测量值应当为算符 \mathbf{J} 的平均值：

$$\langle \mathbf{J}(t) \rangle = \langle 0(t) | \mathbf{J}(t) | 0(t) \rangle \quad (28a)$$

$$= \langle 0 | U^{-1}(t) \mathbf{J}(t) U(t) | 0 \rangle \quad (28b)$$

$$\approx \langle 0 | \left(\mathbf{J}(t) + \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t dt' [\Delta H(t'), \mathbf{J}(t)] \right) | 0 \rangle \quad (28c)$$

这里的 $|0(t)\rangle$ 为多体波函数本征态。最后一步近似使用了 Dyson 级数展开，并且只保留到第一阶微扰。第一项是与电场无关的本征电流，根据物理图景可以设置为 0。代入 Eq.26，得到化简表达式：

$$\langle J_i(t) \rangle = \frac{1}{\hbar\omega} \int_{-\infty}^t dt' \langle 0 | [J_j(t'), J_i(t)] | 0 \rangle E_j e^{-i\omega t'} \quad (29a)$$

$$= \frac{1}{\hbar\omega} \left(\int_0^\infty dt'' e^{i\omega t''} \langle 0 | [J_j(0), J_i(t'')] | 0 \rangle \right) E_j e^{-i\omega t} \quad (29b)$$

霍尔电流的演化与外加电场完全一致，符合线性响应理论。利用微观欧姆定律我们得到霍尔电导的量子力学表达式：

$$\sigma_{xy}(\omega) = \frac{1}{\hbar\omega} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle 0 | [J_y(0), J_x(t)] | 0 \rangle \quad (30)$$

这是最为基础的 Kubo 公式。更进一步，我们还需要考虑对实空间取平均。定义电流关

联函数 [2] 及其傅里叶变换为：

$$\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, t - t') = -i\Theta(t - t')\langle 0|[J_{\alpha}(\mathbf{q}, t), J_{\beta}(\mathbf{q}, t')]|0\rangle \quad (31a)$$

$$\Pi_{\alpha\beta}(\mathbf{q}, \omega) = -i \int dt e^{i\omega(t-t')} \Theta(t - t') \langle 0|[J_{\alpha}(\mathbf{q}, t), J_{\beta}(\mathbf{q}, t')]|0\rangle \quad (31b)$$

则霍尔电导在直流电场中可以表示为 [3]：

$$\sigma_{xy} = -\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Im}\Pi_{xy}(\omega)}{\omega} \quad (32)$$

3 石墨烯中的整数量子霍尔效应

理想单层石墨烯中的整数量子霍尔效应具有很特殊的行为。典型的电子系统的电子质量可以通过与周期晶格的相互作用来重整化，进而得到非零的有效质量。石墨烯的价带和导带在高对称点呈现出狄拉克锥形，就有很高的线性激发谱。其描述的电子与狄拉克电子或准相对论电子高度相似，只不过光速被替换成了体系中的费米速度 v_F ，约比光速小三个数量级。正因为其“相对论性”，不能用薛定谔方程描述，其整数量子霍尔效应是非平凡的，其电导平台出现在：

$$\sigma_{xy} = -\frac{2e^2}{h}(2n + 1), \quad n = 0, 1, \dots \quad (33)$$

为了解释石墨烯这一特殊的整数量子霍尔效应，我们首先得从朗道能级开始回顾。之前使用的薛定谔方程对于无质量的费米子是不适用的，我们必须使用狄拉克方程。定义材料中的电子色散关系为：

$$E(\mathbf{k}) = \pm \hbar v_F |\mathbf{k}|$$

这里的正负号分别对应价带和导带中的电子和空穴。回顾狄拉克方程的形式：

$$\bar{\psi}(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0 \quad \gamma^0 = \begin{pmatrix} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} & \sigma^i \\ -\sigma^i & \end{pmatrix}, \quad (34)$$

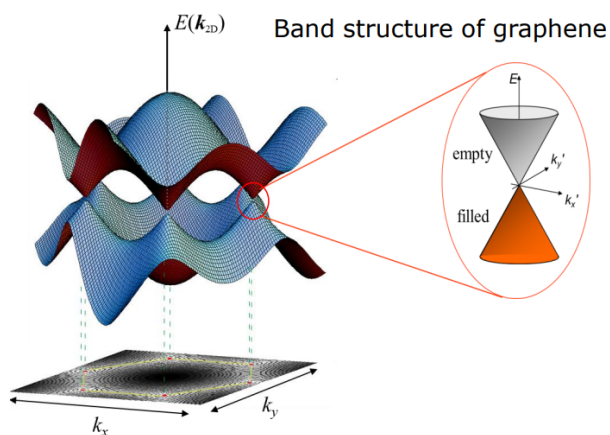


Figure 6: 石墨烯的能带图 [4]

在二维无散射材料中，可以使用有效狄拉克方程 $H_{eff}\psi = \epsilon\psi$ 。单电子在磁场 B 中的有效质量哈密顿量 (effective-mass Hamiltonian) 应为 [5]:

$$\mathcal{H}_0 = v_F \begin{pmatrix} 0 & \hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y & 0 & 0 \\ \hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\pi}_x + i\hat{\pi}_y \\ 0 & 0 & \hat{\pi}_x - i\hat{\pi}_y & 0 \end{pmatrix} \quad (35)$$

其中 $\pi = \mathbf{p} + \frac{e\mathbf{A}}{c}$ ，磁矢势取朗道规范: $\mathbf{A} = (0, Bx)$ 。解之可得本征波函数，其由三个量子数决定，分别是朗道能级指标 n ，独立原子指标（分别是 K 和 K' 如图7）以及波矢 \mathbf{k}

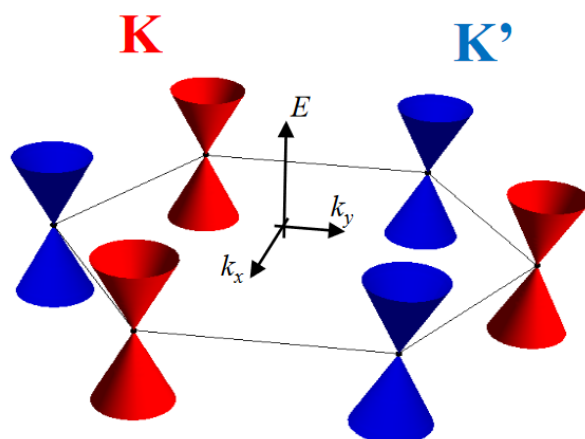


Figure 7: 石墨烯倒空间晶胞示意图 [4]

决定：

$$\psi_{nk}^K(\mathbf{r}) = \frac{C_n}{\sqrt{L}} \exp(-iky) \begin{pmatrix} \text{sgn}(n) i^{|n|-1} \phi_{|n|-1} \\ i^{|n|} \phi_{|n|} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (36a)$$

$$\psi_{nk}^{K'}(\mathbf{r}) = \frac{C_n}{\sqrt{L}} \exp(-iky) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i^{|n|} \phi_{|n|} \\ \text{sgn}(n) i^{|n|-1} \phi_{|n|-1} \end{pmatrix}, \quad (36b)$$

$$C_n = \begin{cases} 1 & (n = 0), \\ 1/\sqrt{2} & (n \neq 0), \end{cases} \quad \phi_{|n|} = \frac{1}{\sqrt{2^{|n|}|n|!}\sqrt{\pi}l} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x - l^2k}{l}\right)^2\right] H_{|n|}\left(\frac{x - l^2k}{l}\right), \quad (36c)$$

其中 l 为磁场尺度 $\sqrt{\frac{\hbar}{eB}}$ 。本征能量/色散关系为 [5, 4, 6, 7]:

$$\varepsilon_n = \sqrt{2\hbar v_F^2 eB |n|} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \quad (37)$$

对比之前二维朗道能级 $\varepsilon_n = \hbar\omega_B(n + \frac{1}{2})$ ，石墨烯的朗道能级的能级间隔不是恒定的，特别是在低能级处，能级间隔远大于一般的二维系统，如图8示意。我们首先通过“霍尔

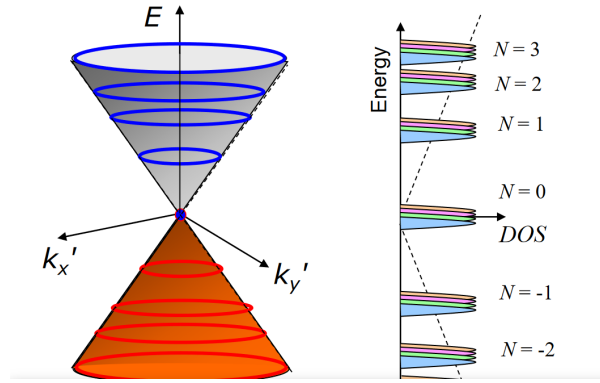


Figure 8: 石墨烯中朗道能级示意图 [4]

效应平台出现在整数倍填充朗道能级”的思想，通过计算朗道能级简并度定性地认识。由于朗道能级具有圆对称性，因此狄拉克电子等能面在倒空间为同心圆样式的朗道环。假设朗道能级的简并度来源于将两朗道环中的态简并到朗道能级上，亦即：

$$g = \frac{S}{4\pi^2} \Delta S_k = \frac{S}{4\pi^2} \pi \Delta(k_x^2 + k_y^2) \quad (38)$$

通过电子的色散关系 $E = \hbar v_F |k|$ 及朗道能级表达式 $\varepsilon_n = \sqrt{2\hbar v_F^2 e B |n|}$ ，通过差分，我们定性地得到简并度：

$$\hbar^2 v_F^2 (k_x^2 + k_y^2) = 2\hbar v_F^2 e B |n| \quad (39a)$$

$$\Delta(k_x^2 + k_y^2) = \frac{eB}{2\hbar} \quad (39b)$$

$$\therefore g = \frac{1}{4} \frac{\Phi}{\Phi_0}, \Phi = BS \quad (39c)$$

对比之前的二维系统，其朗道能级简并度为 $g = \frac{\Phi}{\Phi_0}$ ，可见石墨烯中的朗道能级占据数应当是差为 4 的数列。又由于能级在 $|n| \geq 1$ 有两重简并，而 $n = 0$ 没有该简并。因此填满第一能级需要的电子数仅是后续能级的一半。因而电导的量子化为：

$$\sigma_{xy} = \frac{e^2}{h} \nu \quad \nu = \pm 2, \pm 6, \pm 10 \dots \quad (40)$$

定量的计算需要用到 Kubo 公式 Eq.32。在类狄拉克粒子系统中，电流关联函数具有如

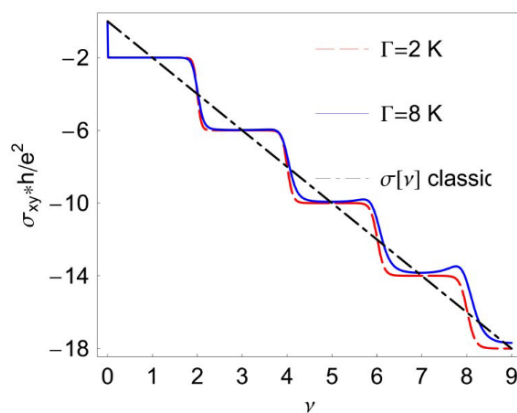


Figure 9: 数值计算石墨烯中的霍尔电导

下的形式 [3]:

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}^R(\Omega + i0) = & \frac{e^2 v_F^2}{2} \sum_{\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 d\omega_2 \times \frac{\tanh[(\omega_2 - \mu_{\sigma})/2T] - \tanh[(\omega_1 - \mu_{\sigma})/2T]}{\omega_1 - \omega_2 + \Omega + i0} \\ & \times \int \frac{d^2 k}{(2\pi)^2} \text{tr}[A(\omega_1, \mathbf{k}) \gamma_i A(\omega_2, \mathbf{k}) \gamma_j]. \end{aligned} \quad (41)$$

定义谱函数为:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\omega, B, \Gamma, \Delta) = & \frac{1}{\pi^2} \frac{\Gamma^2}{(eB)^2 + (2\omega\Gamma)^2} \\ & \times \left\{ 2\omega^2 + \frac{(\omega^2 + \Delta^2 + \Gamma^2)(eB)^2 - 2\omega^2(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)eB}{(\omega^2 - \Delta^2 - \Gamma^2)^2 + 4\omega^2\Gamma^2} \right. \\ & \left. - \frac{\omega(\omega^2 - \Delta^2 + \Gamma^2)}{\Gamma} \text{Im}\psi\left(\frac{\Delta^2 + \Gamma^2 - \omega^2 - 2i\omega\Gamma}{2eB}\right) \right\} \end{aligned} \quad (42)$$

取 $\Gamma \rightarrow 0$ 的极限, 霍尔电导可以表示为 [7]:

$$\sigma_{xy} = -\frac{2e^2 \text{sgn}(eB) \text{sgn} \mu}{h} \left(1 + 2 \left[\frac{\mu^2 c}{2\hbar |eB| v_F^2} \right] \right) \quad (43)$$

计算机模拟图见图9, 与实验和定性计算符合的都很好。

4 分数量子霍尔效应

4.1 现象

和整数量子霍尔效应一样，在 1982 年的实验中，D. C. Tsui, H. L. Stormer, and A. C. Gossard 三人在温度很低 ($T < 5\text{K}$) 和强磁场下，发现了其 Landau fill factor $\nu = \frac{1}{3}$ ，是一个分数 [8]。在后面的实验中，大量的实验给出了更多的分数结果测量，经典的 Landau fill factor 包括 $\nu = \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}, \dots$ ，具体的测量结果图如下所示。

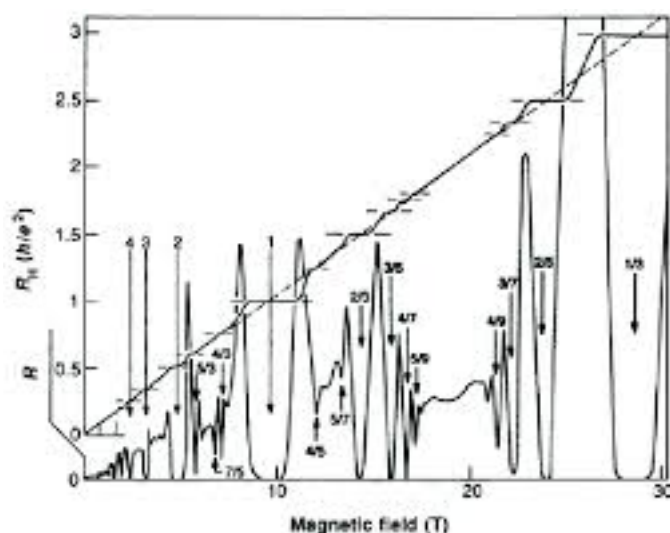


Figure 10: experiment of fraction quantum hall effect

对于 $\nu = \frac{1}{3}$ 时，Landau level 没有被填充满，此时却出现了平台，和上面整数霍尔效应相互违背。我们就需要思考在整数霍尔效应中做的假设，即我们假设了自由电子气，实际上在低温和高磁场下，尤其是低温，电子的热运动对应的能量和电子之间库伦势相匹配，此时电子的库伦势是无法忽视的。可以认为分数量子霍尔效应实际上是一群全同粒子的统计效应。

4.2 Laughlin State(ground state)

4.2.1 多体粒子的 Laughlin State

如果我们直接写系统的拉氏量或者哈密顿量，由于粒子数量很多，且我们假设的粒子的势能是最简单的库伦势，这个 Schrodinger 方程很难求解。

Laughlin 通过猜测给出了该系统的基态波函数 [9]。这个波函数假设实际上是类比了 Landau 能级推导出来的基态波函数，并加上了全同粒子假设。

加上磁场后，我们使用对称规范，可以看到在基态的波函数的形式为

$$\psi(z, \bar{z}) = f(z, \bar{z}) e^{-\frac{|z|^2}{4l_B^2}} \quad (44)$$

其中 $f(z, \bar{z})$ 为解析函数。Laughlin 假设前面的解析函数为电子的耦合，即

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j)^m \prod_i e^{-\frac{|z_i|^2}{4l_B^2}} \quad (45)$$

由于需要满足费米子的统计性质，即交换两个粒子顺序后，波函数需要出一个负号，故 m 必须是个奇数。

实际上这个波函数的来源可以类比于 Slater determinant[10, 11, 12]，即考虑全同费米子的交换反对称给出的一种波函数形式，即

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \begin{vmatrix} \psi_1(z_1) & \psi_1(z_2) & \dots & \psi_1(z_N) \\ \psi_2(z_1) & \psi_2(z_2) & \dots & \psi_2(z_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_N(z_1) & \psi_N(z_2) & \dots & \psi_N(z_N) \end{vmatrix} \quad (46)$$

对于不同阶的波函数为 $\psi_m(z) \propto z^m \exp(-\frac{|z|^2}{4l_B^2})$ 。可以利用 Vandermonde determinant 为

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i < j} (z_i - z_j) \prod_i e^{-\frac{|z_i|^2}{4l_B^2}} \quad (47)$$

为上面 Laughlin 波函数取 $m = 1$ 的情况，Laughlin State 可以视为高阶情况。

我们就需要考虑为什么这个波函数对应的是分数量子霍尔效应的情况。此时我们考虑一个特定的电子，以 z_1 为例，其他电子的位置即为参数，对于 z_1 来说，前面的多项式是 $m(N - 1)$ 阶的，我们可以用求导的方式大致可以看出来，该电子在 $R = \sqrt{2mN}l_B$ 后，指数项会起到明显的衰减效果，也就是电子集中在以原点为中心，半径为 R 的区域内。对应的磁通和单位磁通之比为

$$\frac{AB}{\Phi_0} = \frac{\pi R^2 B}{\Phi_0} = mN \quad (48)$$

这个结果为一个 Landau level 上面能容纳的电子数，对应的 Landau fill factor 为

$$\nu = \frac{N}{mN} = \frac{1}{m} \quad (49)$$

事实上上面的结果似乎和我们选择的势场无关，因为我们根本就没有用到整个系统的哈密顿量，只是用了自由电子气的波函数，对其做线性组合的结果，可以说只是考虑了存在很强的相互作用，并且存在 Pauli exclusion principle。我们就需要质疑这个波函数是否准确，事实上这个波函数和数值模拟得到的波函数相比误差相当小，有 99.99% 的重叠。这一结果和密度泛函理论 (DFT) 与 Hartree Fork Method 有着密切相关 [13, 14]。

4.2.2 The Wigner Crystal (Laughlin State 近似上限)

那么问题来了，这个波函数是否存在适用范围，或者说这个波函数对于任意的 m 都成立吗。实际上对于很大的 m ，我们就不能用这类近似，当 m 很大时，也就意味着电子密度很低，此时电子会趋于形成固态，也就是 Wigner Crystal [15, 16]，而不是液态的 Laughlin State。一般来说这个状态发生在 $m > 70$ 情况下会发生。所以对于通常测量到的 ν ，都不会形成 Wigner Crystal，是可以用 Laughlin State 近似的。

4.2.3 等离子体类比

我认为等离子体类比是一个很美妙的方式去描述分数量子霍尔效应。其主要通过类比出配分函数，就能给出整个势场的势能和等效温度。

对于 Laughlin State 的非归一化的概率，我们可以写成

$$P[z_i] = \prod_{i < j} \frac{|z_i - z_j|^{2m}}{l_B^{2m}} e^{-\sum_i \frac{|z_i|^2}{2l_B^2}} \quad (50)$$

对于配分函数，可以写成

$$Z = \prod_{i=1}^N d^2 z_i P[z_i] \quad (51)$$

通常情况下，我们可以用玻尔兹曼分布做近似，对于每个 z_i 情况下的概率，我们就可以写出其对应的等效势能

$$e^{-\beta U(z_i)} = P[z_i] = \prod_{i < j} \frac{|z_i - z_j|^{2m}}{l_B^{2m}} e^{-\sum_i \frac{|z_i|^2}{2l_B^2}} \Rightarrow \beta U(z_i) = \sum_i \frac{|z_i|^2}{2l_B^2} - 2m \sum_{i < j} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) \quad (52)$$

我们不妨假设 $\beta = \frac{2}{m}$ ，可以看到对于 $m < 70$ 的情况，对于 m 越小，等效的温度就越低，其实和我们实验的需求是一致的。我们假设的 $\beta = \frac{2}{m}$ 是，给出的 $U(z_i)$ 可以和等离子体进行类比。这里要注意的是， β 在这里是个无量纲量。

$$U(z_i) = -m^2 \sum_{i < j} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) + \frac{m}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2 \quad (53)$$

这里第一项是在 z_j 处存在电荷，在 z_i 处感受到的电势能，即求解二维空间的 Laplace 方程 $-\nabla^2 \phi = 2\pi q \delta^2(\vec{r})$ 。第二项是背景为一个恒定的电荷场的电势能，即求解二维空间的 Laplace 方程 $-\nabla^2 \phi = -\frac{1}{l_B^2}$ 。这个类比方式还适用于我们后面引入准粒子和准空穴的模型，可以给出很漂亮的二维空间近似。

4.3 激发态

对于基态的讨论，我们得出了 $\nu = \frac{1}{m}$ 的量子霍尔效应系统，我们需要考虑其激发态，主要考虑的就是两种带点粒子的激发态，分别是准电子和准空穴。我们其实可以证明这个准粒子和准空穴带电量为 $\frac{1}{m}$ 。

假设电子波函数在某一个位置 η 上面存在零点，那么波函数就可以写成

$$\psi(z_1, z_2, \dots, z_N) = \prod_{i=1}^N (z_i - \eta) \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_i^n |z_i|^2 / 4l_B^2} \quad (54)$$

实际上这个波函数的零点，用等离子体近似的角度去看，可以视为，这些位置对应的就是晶体中的杂质 (impurity)。在等离子体或者金属中，如果存在一个和等离子体场电荷相异的非纯净物质，那么原先等离子体场中的电荷就会在这个杂质周围聚集，形成静电屏蔽层。在静电屏蔽层以外，这个杂质的效应就可以近似忽略掉，而在这个杂质对应的点，可以视为电子的态的数量为 0，对应的波函数就处于零点。正如下面给出的 Debye 屏蔽的结论相符 [17]。

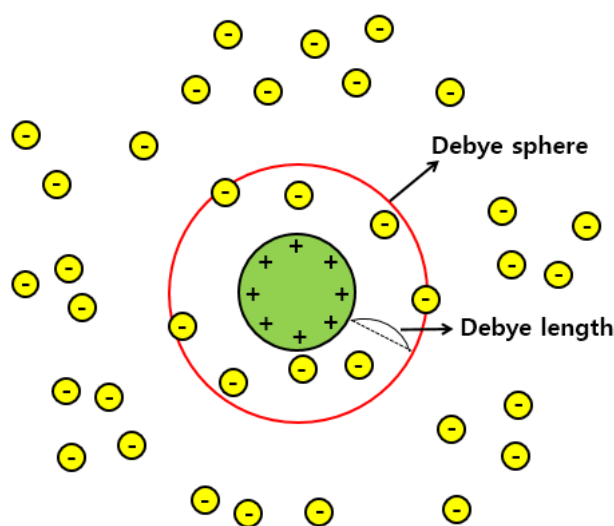


Figure 11: Debye shielding

类似的，在全二维平面上，波函数零点可以不止存在一个，对于每个零点来说物理意义

是一样的。如果在 η 处存在的零点是 m 阶的，那给出的 Debye 屏蔽的结论是一致的，此时我们需要考虑 m 阶的零点代表的物理意义是什么，我们先写出此时的波函数。

$$\psi_{m-hole} = \prod_i^N (z_i - \eta)^m \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_i^n |z_i|^2 / 4l_B^2} \quad (55)$$

其给出的等离子体势能为

$$U(z_i, \eta) = -m^2 \sum_{i < j} \log\left(\frac{|z_i - z_j|}{l_B}\right) - m \sum_i \log\left(\frac{|z_i - \eta|}{l_B}\right) + \frac{m}{4l_B^2} \sum_i |z_i|^2 \quad (56)$$

如何和真实的等离子体势能类比，可以发现在这个无电子的点，给出的电量为 $-\frac{e}{m}$ ，对应缺失的有效电荷为 $\frac{e}{m}$ 。我们可以视为这个点是准空穴 (quasi-hole)，携带了 $\frac{e}{m}$ 的电荷数。对于准粒子来说，是一个类似的过程，我们就不做过多阐述。

如果我们可以理解这分数电荷，实际上对于理解分数量子霍尔效应就很简单了，可以视为等效的分数电荷给出了分数的 ν 。在实验中可以通过噪声法 [18] 和干涉法 [19] 测量出分数电荷，具体结果如下。

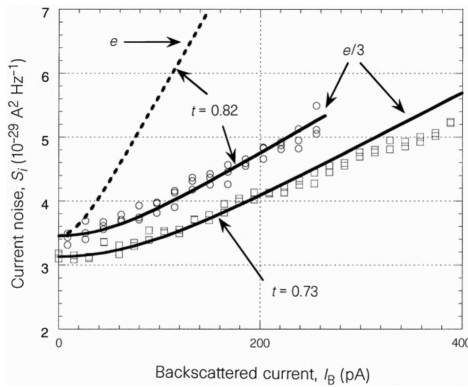


Figure 12: Noise Method

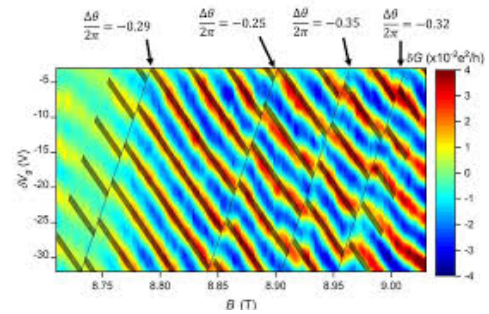


Figure 13: Interfere Method

实际上对于真正的波函数，我们如果用等离子体类比的方式去描述，对应的准空穴仍然会有相互作用，即波函数中会存在形如 $\eta_i - \eta_j$ 的一项，对应的波函数和势能为

$$\psi(\eta, z) = \prod_{a < b} (\eta_a - \eta_b)^{\frac{1}{m}} \prod_{a, i} (z_i - \eta_a) \prod_{k < l} (z_k - z_l)^m e^{-\sum_i |z_i|^2 / 4l_B^2 - \sum_a |\eta_a|^2 / 4ml_B^2} \quad (57)$$

$$U(\eta, z) = -m^2 \sum_{k < l} \log\left(\frac{|z_k - z_l|}{l_B}\right) - m \sum_{k, i} \log\left(\frac{|z_i - \eta_i|}{l_B}\right) - \sum_{i < j} \log\left(\frac{|\eta_i - \eta_j|}{l_B}\right) \quad (58a)$$

$$+ \frac{m}{4l_B^2} \sum_{k=1}^N |z_k|^2 + \frac{1}{4l_B^2} \sum_{i=1}^M |\eta_i|^2 \quad (58b)$$

4.4 分数电荷和 anyon

4.4.1 anyon 的简介和性质

anyon 最早是由两位理论物理学家 Jon Magne Leinaas 和 Jan Myrheim 于 1977 年在研究二维空间中的粒子的性质时,发现费米子和玻色子的统计不再适用 [20]。1982 年, Frank Wilczek 提出了 anyon 的概念,深入探究了 anyon 在二维空间中的统计性质。同年分数量子霍尔效应在实验上被首次观测到,于 1985 年用数学证实分数量子霍尔效应中的准粒子是 anyon[21, 22]。

在三维空间中,我们可以把粒子分为玻色子 (boson) 和费米子 (fermion),玻色子是指两个全同粒子相互交换后,波函数不变,费米子是两个全同粒子相互交换以后,波函数会出现一个负号。这两种粒子有一个共同特点,就是交换两次全同粒子以后,波函数不会发生变化。其原因可以理解为,三维空间中即使存在很多奇点,只要这些奇点不会连接成一个到无穷远处的圆柱,那我们总可以找到这样的一个回路,使得交换两个粒子的回路总能缩成一个点,即总存在一个回路,回路中间似乎没有奇点。

但当这些奇点相连且延申到无穷远处后,这个空间其实只能做一个二维截面的投影,即我们可以用二维空间描述。此时仍以两个粒子交换顺序的回路,总存在一个回路,中间存在一个奇点,即这个回路无法缩成一个点。这点可以和 AB 效应 [23] 类比,AB 效应中存在一个无穷长的螺线管,粒子在通过螺线管周围的回路后,会累计一个相位,这个相位就是 AB 相位。事实上 anyon 和这个结果也类似,在交换两次粒子以后,会出现一

个相位，这个相位不为 2π 的整数倍，故可以写成

$$|\psi_1, \psi_2\rangle \rightarrow e^{i2\pi\alpha} |\psi_1, \psi_2\rangle \quad (59)$$

$$|\psi_2, \psi_1\rangle = e^{i\pi\alpha} |\psi_1, \psi_2\rangle \quad (\alpha \neq 0, 1) \quad (60)$$

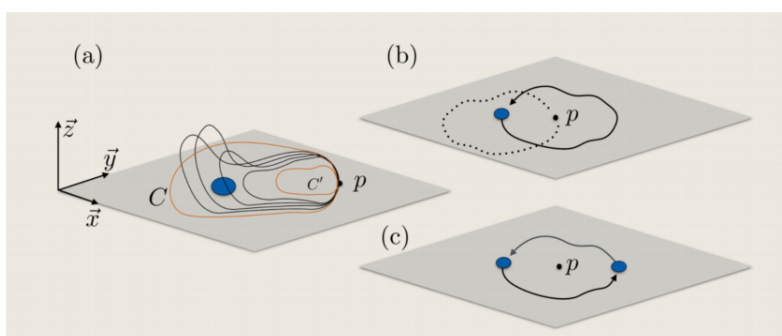


Figure 14: anyon 交换粒子环路

事实上 anyon 形成一个编织群 (braid group)，和我们在生活中的扎绳子类似，如下图所示。

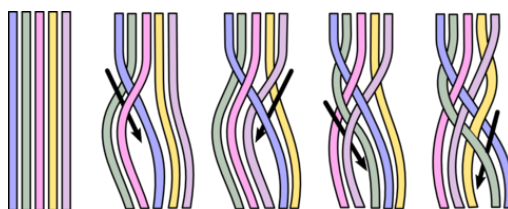


Figure 15: 编织群

特别的，编织群满足两个性质，即

$$\forall |i - j| \geq 2, \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (61)$$

$$\forall 1 \leq i \leq n - 1, \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} = \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \quad (62)$$

4.4.2 分数电荷和分数统计

引入 anyon 实际上是为了更好的理解分数电荷，先说结论，上面提到的准粒子激发，即 quasi-hole 就是一种准粒子，就是一种 anyon。我们在后面需要计算其分数电荷和其统计规律。我们从贝利相位的角度出发去给出计算过程。因为贝利相位中存在 AB 相位，这一项可以给出电荷数。

我们仍然用等离子体类比，得到体系的势能，正如式子 Eq. 58 所示，我们可以直接类比得到配分函数等结果，而配分函数就是我们计算贝利相位的关键。我们可以写出贝利联络，主要是两个物理量， η 和 $\bar{\eta}$

$$\mathcal{A}_\eta = -i \langle \psi | \frac{\partial}{\partial \eta} | \psi \rangle = -\frac{i}{2} \frac{\partial \log Z}{\partial \eta} \quad (63)$$

其中 $|\psi\rangle$ 为归一以后的态，归一系数为 Z

$$Z = \int \prod_i d^2 z_i \exp(\sum_{i,j} \log |z_i - \eta_j|^2 + m \sum_{k,l} \log |z_k - z_l|^2 - \frac{1}{2l_B^2} \sum_i |z_i|^2) \quad (64)$$

我们考虑一个近似情况，即在等效温度 $\beta = \frac{2}{m}$ 很低的时候，Debye 长度正比于 \sqrt{T} ，故德拜半径很小，此时我们在考虑全空间的配分函数积分的时候，就可以忽略掉这些杂质点的影响，实际上就说明配分函数是一个和准空穴位置无关的物理量，不妨定义为 C ，则有

$$C = \int \prod_i d^2 z_i \exp(-\beta U(z, \eta)) = Z \exp(-\frac{1}{m} \sum_{i < j} \log |\eta_i - \eta_j|^2 + \frac{1}{2ml_B^2} \sum_i |z_i|^2) \quad (65)$$

我们即可得到两个贝利联络

$$\mathcal{A}_{\eta_i} = -\frac{i}{2m} \sum_{i \neq j} \frac{1}{\eta_i - \eta_j} + \frac{i\bar{\eta}_i}{4ml_B^2} \quad (66)$$

$$\mathcal{A}_{\bar{\eta}_i} = \frac{i}{2m} \sum_{i \neq j} \frac{1}{\bar{\eta}_i - \bar{\eta}_j} + \frac{i\eta_i}{4ml_B^2} \quad (67)$$

前者和多个准空穴的统计性质有关，而后者和单个准空穴的贝利相位有关，即 AB 相位。



Figure 16: path and Berry phase

我们先考虑只有一个准空穴，则不用考虑前面一项，可以直接计算围绕准空穴的贝利相位为

$$\gamma = - \oint_C \mathcal{A}_\eta d\eta + \mathcal{A}_{\bar{\eta}} d\bar{\eta} = \frac{e\Phi}{m\hbar} \quad (68)$$

和通常的 AB 相位类比， $\gamma = \frac{e\Phi}{\hbar}$ ，可以看到我们施加相同磁通的情况下，对应的电荷量变为了 $\frac{e}{m}$ ，其实我们可以理解为一个磁通带了分数的电荷，或者说 m 个磁通和一个电子进行了耦合。这个结论和复合费米子理论给出的解释很类似。

此时我们再考虑前面一项的效应，即 anyon 的统计规律，我们可以得到上面定义的 α 为什么值，猜测其实就可以知道 $\alpha = \frac{1}{m}$ 。我们考虑一个准空穴绕另一个准空穴旋转 360° ，此时可以视为交换了两次这两个准空穴，会累计相位 $e^{i2\pi\alpha}$

$$\gamma = - \oint_C \mathcal{A}_\eta d\eta + \mathcal{A}_{\bar{\eta}} d\bar{\eta} = \frac{2\pi i}{m} \quad (69)$$

此时我们得到了我们预想的结果，同时也证明了准空穴是一种 anyon。

4.4.3 拓扑序

拓扑序表现了这些电子之间的长程的量子纠缠，具体可以体现在其波函数的形式上面，可以看到波函数和所有电子有关，这个纠缠是和全空间的拓扑性质有关，它决定了基态的简并性，这个简并没有任何对称性破缺，而是和全空间的拓扑性质有关，我们考虑一个甜甜圈模型，如果从一个点出发选择一条路径回到原点，一共存在三个路径，如下图所示

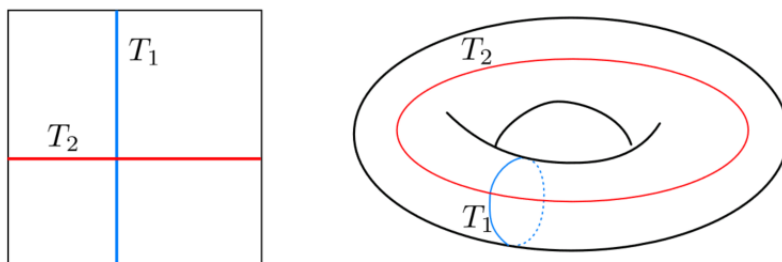


Figure 17: 拓扑序和拓扑结构

其中很经典的两个路径是 T_1 和 T_2 ，而第三种路径可以视为 T_3 ，即在原地旋转一圈，这个路径会收缩成一个点。我们可以通过演示可以得到下面的结论，即 $T_1 T_2 T_1^{-1} T_2^{-2} = T_3$ 而在甜甜圈表面绕一个点旋转一周，就会出现一个相位，为 $e^{i2\pi/m}$

$$T_1 T_2 = e^{2\pi i/m} T_2 T_1 \quad (70)$$

故对于基态来说，可以写出其简并的形式，即

$$T_1 |n\rangle = e^{2\pi i/m} |n\rangle \quad (71)$$

$$T_2 |n\rangle = |n+1\rangle \quad (72)$$

这个基态的简并度只依赖于拓扑性质。拓扑序的最重要的作用就是其存在拓扑不变量，即 Chern Number，对于系统存在一些扰动的情況下，由于存在拓扑不变量，整个系统的性质不会轻易的改变。

$$C = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{T}_\Phi^2} d^2\theta \mathcal{F}_{\eta\bar{\eta}} \quad (73)$$

$$\mathcal{F}_{\eta\bar{\eta}} = \frac{\partial \mathcal{A}_\eta}{\partial \bar{\eta}} - \frac{\partial \mathcal{A}_{\bar{\eta}}}{\partial \eta} \quad (74)$$