数字电路与逻辑设计

Digital circuit and logic design

第二章　逻辑代数基础

主讲教师 | 于俊清

提 纲

- 逻辑代数的基本概念
- 逻辑代数的基本定理和规则
- 逻辑函数表达式的形式与变换
- 逻辑函数化简

为什么要化简？

- 实现某一逻辑功能的逻辑电路的复杂性与描述该功能的逻辑表达式的复杂性直接相关
- 一般来说，逻辑函数表达式越简单，设计出来的相应逻辑电路也就越简单
- 为了降低系统成本、减小复杂度、提高可靠性，必须对逻辑函数进行化简

逻辑函数化简

把逻辑函数化简成最简形式

逻辑函数最小化

化简的起点

"或-与"表达式

"与-或"表达式

化简的常用方法

- 代数化简法
- 卡诺图化简法
- 列表化简法

逻辑函数化简

- 代数化简法
- 卡诺图化简法
- 列表化简法

逻辑函数化简

代数化简法

- “与-或”表达式的化简方法
- “与-或”表达式的化简举例
- “或-与”表达式的化简

代数化简法

运用逻辑代数的公理、定理和规则对逻辑函数进行化简

没有固定的步骤可以遵循

关键：对逻辑代数中公理、定理和规则的熟练掌握及灵活运用

逻辑代数公理

公理1：交换律	$A + B = B + A$ $A \cdot B = B \cdot A$
公理2：结合律	$(A + B) + C = A + (B + C)$ $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
公理3：分配律	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$ $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
公理4：0—1律	$A + 0 = A$ $A + 1 = 1$ $A \cdot 0 = 0$ $A \cdot 1 = A$
公理5：互补律	$A + \overline{A} = 1$ $A \cdot \overline{A} = 0$

逻辑代数的基本定理

定理 1	$0+0=0$　$0+1=1$　$1+0=1$　$1+1=1$ $0\cdot 0=0$　$0\cdot 1=0$　$1\cdot 0=0$　$1\cdot 1=1$
定理 2	$A+A=A$　$A\cdot A=A$
定理 3	$A+A\cdot B=A$　$A\cdot(A+B)=A$
定理 4	$A+\bar{A}B=A+B$　$A\cdot(\bar{A}+B)=AB$
定理 5	$\bar{\bar{A}}=A$
定理 6	$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$　$\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$
定理 7	$AB+A\bar{B}=A$　$(A+B)(A+\bar{B})=A$
定理 8	$A\cdot B+\bar{A}\cdot C+B\cdot C=A\cdot B+\bar{A}\cdot C$ $(A+B)\cdot(\bar{A}+C)\cdot(B+C)=(A+B)\cdot(\bar{A}+C)$

逻辑代数的重要规则

代入规则

- 任何一个含有变量A的逻辑等式
- 如果将所有出现A的位置都代之以同一个逻辑函数 F
- 则等式仍然成立

反演规则

- 若将逻辑函数表达式 F 中所有“·”变成“+”，“+”变成“·”，“0”变成“1”，“1”变成“0”，原变量变成反变量，反变量变成原变量
- 保持原函数中的运算顺序不变
- 则所得到的新的函数为原函数 F 的反函数 $\bar{F}$

对偶规则

- 将逻辑函数表达式F中所有“·”变成“+”，“+”变成“·”，“0”变成“1”，“1”变成“0”
- 保持原函数中的运算顺序不变
- 所得到的新的逻辑表达式称为函数F的对偶式，记作F'
- 若两个逻辑函数表达式 F 和 G 相等，则其对偶式 F' 和 G' 也相等

"与-或"表达式的化简

什么是最简"与-或"表达式

- 条件1：表达式中的"与"项个数最少
- 条件2：每个"与"项中的变量个数最少
- 满足上述两个条件，相应逻辑电路中所需门的数量以及门的输入端个数均为最少，电路最经济

“与-或”表达式的化简

常用的化简方法

并项法：利用定理7中的 $A\bar{B} + AB = A$，将两个“与”项合并成一个“与”项，合并后消去一个变量

例

$$\bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}$$
$$=\bar{A}B$$

吸收法：利用定理3中A + AB=A ,吸收多余的项

例

$$\bar{A}B + \bar{A}B\bar{C}$$
$$=\bar{A}B$$

“与-或”表达式的化简

常用的化简方法

消去法：利用定理4中的 $A+\bar{A}B=A+B$,消去多余变量

例

$$AB+\bar{A}\,\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$$

$$=AB+(\bar{A}+\bar{B})\,\bar{C}$$ 公理3

$$=AB+\overline{AB}\,\bar{C}$$ 定理6

$$=AB+\bar{C}$$ 定理4（消去法）

配项法：利用公理4和公理5中的 $A\cdot1=A$ 及 $A+\bar{A}=1$

- 从函数式中适当选择某些“与”项，配上其所缺的合适的变量
- 利用并项、吸收和消去等方法进行化简

“与-或”表达式的化简

常用的化简方法

例

$$A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{B}C + \bar{A}B$$

$$= A\bar{B} + B\bar{C} + (A+\bar{A})\bar{B}C + \bar{A}B(C+\bar{C})$$ 公理4、5（配项）

$$= A\bar{B} + B\bar{C} + A\bar{B}C + \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}BC + \bar{A}B\bar{C}$$ 公理3

定理3（吸收法）

定理7（并项法）

$$= A\bar{B} + B\bar{C} + \bar{A}C$$

实际应用中遇到的逻辑函数往往比较复杂，化简时应灵活使用所学的公理、定理及规则，综合运用各种方法

数字电路与逻辑设计

Digital circuit and logic design

谢谢，祝学习快乐！

主讲教师 | 于俊清