

# 数字电路与逻辑设计

Digital circuit and logic design

## 第二章 逻辑代数基础

主讲教师 | 于俊清

02

# 逻辑函数表达式的形式与变换



逻辑函数表达式的基本形式



最小项和最大项



逻辑函数表达式的标准形式



逻辑函数表达式的转换

## 最小项

### 定义

- 具有  $n$  个变量的函数的“与项”包含全部  $n$  个变量
- 每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且仅出现一次
- 该“与项”被称为“最小项”，有时又称为“标准与项”

### 最小项的数目

- $n$  个变量可以构成  $2^n$  个最小项

#### 例


3个变量  $A$ 、 $B$ 、 $C$  构成的8个最小项

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$   $\bar{A}\bar{B}C$   $\bar{A}B\bar{C}$   $\bar{A}BC$   $A\bar{B}\bar{C}$   $A\bar{B}C$   $AB\bar{C}$   $ABC$



## 最小项

简写： $m_i$

 **下标  $i$  的取值规则：**按照变量顺序将最小项中的原变量用 1 表示，反变量用 0 表示，由此得到一个二进制数，与该二进制数对应的十进制数即下标  $i$  的值

例

3 变量  $A$ 、 $B$ 、 $C$  构成的最小项  $A\bar{B}C$  可用  $m_5$  表示

$A \quad \bar{B} \quad C \longrightarrow m_5$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$   
 $1 \quad 0 \quad 1 \longrightarrow (5)_{10}$

# ■ 最小项

例

$\bar{A}\bar{B}\bar{C}$	$\bar{A}\bar{B}C$	$\bar{A}B\bar{C}$	$\bar{A}BC$	$A\bar{B}\bar{C}$	$A\bar{B}C$	$AB\bar{C}$	$ABC$
000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7
$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$m_4$	$m_5$	$m_6$	$m_7$

## ■ 最小项

例

用最小项表示函数： $F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC$

解：

$$F = \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + AB\bar{C} + ABC$$
$$= m_2 + m_3 + m_6 + m_7$$
$$= \sum m(2, 3, 6, 7)$$

## 最小项性质

### 性质 1

- 任意一个最小项，其相应变量有且仅有一种取值使这个最小项的值为1  
最小项不同，使其值为1的变量取值也不同，任何一种变量取值都不可能使两个不同最小项同时为1
- 因为不同的最小项中都存在互补变量
- 在由n个变量构成的任意“与项”中，最小项是使其值为1的变量取值组合数最少的一种“与项”
- 最小项名字的由来



## ■ 最小项性质

### 性质 2

相同变量构成的两个不同最小项相“与”为 0

因为任何一种变量取值都不可能使两个不同最小项同时为 1，故相“与”为 0，  
即  $m_i \cdot m_j = 0$

例

$$m_i = \bar{A}B, \quad m_j = AB$$

$$m_i \cdot m_j = \bar{A}B \cdot AB = 0$$



## ■ 最小项性质



### 性质 3



n 个变量的全部最小项相“或”为1



通常借用数学中的累加符号“ $\Sigma$ ”，将其记为：

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} m_i = 1$$

## ■ 最小项性质

### 性质 4

◆  $n$  个变量构成的最小项有  $n$  个相邻最小项

$\bar{A}BC$  **相邻最小项**：除一个变量互为相反外，其余部分均相同的最小项

#### 例

三变量最小项  $ABC$  的相邻最小项为：

$$\bar{A}BC \quad A\bar{B}C \quad AB\bar{C}$$

## 最大项

### 定义

- 如果一个具有  $n$  个变量的函数的“或项”包含全部  $n$  个变量
- 每个变量都以原变量或反变量形式出现一次，且仅出现一次
- 该“或项”被称为“最大项”，有时又称为“标准或项”

### 最大项的数目

- $n$  个变量可以构成  $2^n$  个最大项



## 最大项

## 例

3个变量 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 可以构成8个最大项

$$A + B + C$$

$$\bar{A} + B + C$$

$$A + B + \bar{C}$$

$$\bar{A} + B + \bar{C}$$

$$A + \bar{B} + C$$

$$\bar{A} + \bar{B} + C$$

$$A + \bar{B} + \bar{C}$$

$$\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$$

## 最大项

简写： $M_i$



下标  $i$  的取值规则



按照变量顺序将最大项中的原变量用 0 表示，反变量用 1 表示



由此得到一个二进制数，与该二进制数对应的十进制数即下标  $i$  的值

例

3 变量  $A$ 、 $B$ 、 $C$  构成的最大项  $(A + \bar{B} + C)$  可用  $M_2$  表示

$$\begin{array}{ccc} A + \bar{B} + C & \longrightarrow & M_2 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow & & \\ 0 \quad 1 \quad 0 & \longrightarrow & (2)_{10} \end{array}$$

## 最大项

例

$$F = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$$

解：  $F = (A + B + C)(A + B + \bar{C})(\bar{A} + B + C)(\bar{A} + B + \bar{C})$

$$= M_0 M_1 M_4 M_5$$

$$= \prod M(0, 1, 4, 5)$$



## ■ 最大项性质

### 性质 1



任意一个最大项，其相应变量有且仅有一种取值使这个最大项的值为0，最大项不同，使其值为0的变量取值不同



在由  $n$  个变量构成的任意“或项”中，最大项是使其值为1的变量取值组合数最多的一种“或项”



最大项名字的由来

## 最大项性质

### 性质 2



相同变量构成的两个不同最大项相“或”为1



因为任何一种变量取值都不可能使两个不同最大项同时为0，故相“或”为1，即  $M_i + M_j = 1$

例

$$M_0 = A + B, M_2 = \bar{A} + B,$$

$$M_0 + M_2 = A + B + \bar{A} + B = 1$$

## 最大项性质

### 性质 3



$n$  个变量的全部最大项相“与”为0



通常借用数学中的累乘符号“ $\Pi$ ”，将其记为：

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} M_i = 0$$



## 最大项性质

### 性质 4



$n$  个变量构成的最大项有  $n$  个相邻最大项



**相邻最大项**：除一个变量互为相反外，其余部分均相同的最大项

例

三变量最大项  $A + B + C$  的相邻最大项为：

$$\bar{A} + B + C \quad A + \bar{B} + C \quad A + B + \bar{C}$$

# 最小项和最大项

## 2 变量最小项、最大项真值表

变量	最小项				最大项			
$AB$	$\bar{A}\bar{B}$	$\bar{A}B$	$A\bar{B}$	$AB$	$A+B$	$A+\bar{B}$	$A+B$	$A+B$
	$m_0$	$m_1$	$m_2$	$m_3$	$M_0$	$M_1$	$M_2$	$M_3$
00	1	0	0	0	0	1	1	1
01	0	1	0	0	1	0	1	1
10	0	0	1	0	1	1	0	1
11	0	0	0	1	1	1	1	0

## ■ 最小项和最大项的关系



在同一问题中，下标相同的最小项和最大项互为反函数



相同变量构成的最小项 $m_i$ 和最大项 $M_i$ 之间存在互补关系

$$\overline{m_i} = M_i, \text{ 或 } \overline{M_i} = m_i$$

例

由3变量 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 构成的最小项 $m_3$ 和最大项 $M_3$

$$\overline{m_3} = \overline{\overline{A}BC} = A + \overline{B} + \overline{C} = M_3$$

$$\overline{M_3} = \overline{A + \overline{B} + \overline{C}} = \overline{A}BC = m_3$$



# 逻辑函数表达式的形式与变换



逻辑函数表达式的基本形式



最小项和最大项



逻辑函数表达式的标准形式



逻辑函数表达式的转换

## 标准形式

### 标准“与-或”表达式



由若干最小项相“或”构成的逻辑表达式



最小项表达式

### 标准“或-与”表达式



由若干最大项相“与”构成的逻辑表达式



最大项表达式

## 标准形式

例

$$\begin{aligned}
 F(A,B,C) &= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} + ABC \\
 &= m_1 + m_2 + m_4 + m_7 \\
 &= \sum m(1,2,4,7) \text{ 最小项表达式 (标准“与-或”)}
 \end{aligned}$$

例

$$\begin{aligned}
 F(A,B,C) &= (A+B+\bar{C})(\bar{A}+B+\bar{C})(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}) \\
 &= M_1 M_5 M_7 \\
 &= \prod M(1,5,7) \text{ 最大项表达式 (标准“或-与”)}
 \end{aligned}$$



# 数字电路与逻辑设计

Digital circuit and logic design

谢谢，祝学习快乐！

主讲教师 | 于俊清

02