Allgemeine Bemerkungen zum Lösen von **ganzrationalen Gleichungen**

## Allgemeine Form

Bringt man die Gleichung auf die allgemeine Form $\mathbf{a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0}$, hat diese die Lösungen:

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Der Term **$b^2 - 4ac$ heißt Diskriminante D**.
Mit Hilfe der Diskriminante lässt sich entscheiden, wie viele Lösungen eine quadratische Gleichung besitzt. Ist $D > 0$, gibt es zwei Lösungen, ist $D = 0$, eine Lösung und ist $D < 0$, gibt es keine Lösung.

## Normalform

Bringt man die Gleichung auf die Normalform $\mathbf{x^2 + px + q = 0}$, hat diese die Lösungen:

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{mit} \quad D = \frac{p^2}{4} - q\,.$$

## Weiteres

Enthält eine ganzrationale Gleichung **kein Absolutglied**, so wird die Gleichung durch **Ausklammern** umgeformt und anschließend der „Satz vom Nullprodukt“ angewandt:
**Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens einer seiner Faktoren null ist.**

## Tipps

- In der Normalform sind p und q in der Regel Brüche.
  Wenn Sie **Brüche vermeiden** wollen, verwenden Sie die **allgemeine Form**!
- Formen Sie die Gleichung so um, dass a eine **natürliche Zahl** ist.
- Achten Sie auf die **Vorzeichen**!
  In $3x^2 - 7x - 4 = 0$ ist $a = 3$; $b = -7$; $c = -4$.

## Substitution

Durch eine geeignete Substitution wird eine biquadratische Gleichung in eine quadratische Gleichung übergeführt. Dabei sind die folgenden Schritte durchzuführen:

1. **Substitution:** Ersetzen Sie das Quadrat der Variablen x durch eine neue Variable, z. B. $x^2 = u$.
2. **Lösen** Sie die entstehende quadratische Gleichung für u.
3. **Rücksubstitution**: Setzen Sie die Lösungen dieser Gleichung in $x^2 = u$ für u ein.
4. Geben Sie **alle Lösungen** an.

Bemerkung:
Nicht immer ergeben sich 4 Lösungen.

**Beispiel:**

Bestimmen Sie die Lösungen von $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$.

**Lösung:**

Mit der Substitution $x^2 = u$ ergibt sich aus $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ die Gleichung $u^2 - 3u - 4 = 0$ mit den Lösungen $u_1 = 4$; $u_2 = -1$.
Aus $x^2 = 4$ folgt $x_{1/2} = \pm 2$, während die Gleichung $x^2 = -1$ unlösbar ist.
Damit hat die gegebene Gleichung nur die Lösungen +2 und −2.

## Polynomdivision

Ist bei einer Gleichung vom Grad n (sie hat die Form $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$) **$f(x) = 0$** eine Nullstelle **$x_1$** bekannt, dann lässt sich f(x) durch Polynomdivision auf die Form $f(x) = (x - x_1) \cdot g(x)$ bringen, wobei g(x) ein Polynom ist, das den Grad $n - 1$ hat.

**Beispiel:**

Bestimmen Sie die Lösungen von $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = 0$.

**Lösung:**

Durch Probieren findet man $x_1 = 1$. Polynomdivision von $x^3 - 5x^2 + 5x - 1$ durch $(x - 1)$:

$$\begin{array}{l}
\phantom{-}(x^3 - 5x^2 + 5x - 1) : (x - 1) = x^2 - 4x + 1 \\
\underline{-(x^3 - \phantom{5}x^2)} \\
\qquad -4x^2 + 5x - 1 \\
\quad \underline{-(-4x^2 + 4x)} \\
\qquad\qquad\quad x - 1 \\
\qquad\qquad \underline{-(x - 1)} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Also ist $x^3 - 5x^2 + 5x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 - 4x + 1)$.
Die weiteren Lösungen der Gleichung erhält man aus der Gleichung $x^2 - 4x + 1 = 0$.
Mit der Lösungsformel ergibt sich $x_2 = 2 + \sqrt{3}$; $x_3 = 2 - \sqrt{3}$.
Damit hat die gegebene Gleichung die Lösungen $x_1 = 1$; $x_2 = 2 + \sqrt{3}$; $x_3 = 2 - \sqrt{3}$.

## Standardverfahren beim Lösen einer Bruchgleichung

- Angabe der Definitionsmenge D der Bruchgleichung.
  Diese besteht aus der Menge der reellen Zahlen ohne die Werte, bei denen die Nenner null werden:
  $D = \mathbb{R} \setminus \{\ldots\}$.
- Angabe des gemeinsamen Nenners (Hauptnenner)
- Durchmultiplizieren der Bruchgleichung mit dem Hauptnenner
- Lösen der sich ergebenden Gleichung
- Überprüfen, ob die Lösungen dieser Gleichung auch in der Definitionsmenge D der Bruchgleichung liegen.

## Tipps

- Die Werte, bei denen die **Nenner null werden**, sind meistens direkt angebbar;
  wenn nicht, setzen Sie in einer Nebenrechnung jeden Nenner gleich null.
- Achten Sie darauf, dass Sie beim Durchmultiplizieren **beide Seiten** der Gleichung multiplizieren.
- **Vergessen Sie auf keinen Fall den letzten Schritt**, bei dem Sie überprüfen müssen, ob die errechneten Lösungen auch tatsächlich Lösungen der gegebenen Gleichung sind.
  So hat die Gleichung $\frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = \frac{4}{x^2-4}$ die Definitionsmenge $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; +2\}$.
  Die Rechung ergibt $x = 2$.
  Da $2 \notin D$ ist, hat die Gleichung **keine** Lösung.

In einer **Exponentialgleichung** steht die Variable, nach der aufgelöst werden soll, im **Exponenten** (z. B. $2^x = 8$).

Man löst Exponentialgleichungen in der Regel durch **Logarithmieren** (vgl. Aufgabe b)).

In Sonderfällen ist ein **Vergleich der Exponenten** (vgl. Aufgabe a)) oder eine **Substitution** möglich (vgl. Aufgabe c)).

Exponentialgleichungen **mit drei oder mehr** Summanden sind nur in Sonderfällen lösbar. Dabei muss man in der Regel das Verfahren der Substitution anwenden.

Damit man substituieren kann, müssen in der Exponentialgleichung alle Basen (die die Variable im Exponenten haben) gleich sein, oder mit Hilfe der Potenzregeln gleichgemacht werden. Falls diese entstehende algebraische Gleichung lösbar ist, kann man durch Rücksubstitution die Lösungen der Exponentialgleichung erhalten.

Exponentialgleichungen kann man wie jede andere Gleichung **näherungsweise mit dem GTR lösen**. Hierzu berechnet man z. B. die Nullstellen der zugehörigen Funktion.

## Tipps

- Die Logarithmen- und Potenzgesetze sollten Sie kennen.
  Beachten Sie dabei insbesondere, dass es **kein Logarithmengesetz für $\log(a \pm b)$ gibt**.
- Vergessen Sie beim Logarithmieren nicht, **beide Seiten** einer Gleichung zu logarithmieren (vgl. Lösung b)).
- Auch die Gleichung $5 \cdot 5^x + 5^{-x} = 6$ kann durch eine Substitution gelöst werden. Denn es ist $5^{-x} = \frac{1}{5^x}$ und damit führt $5^x = u$ auf die Gleichung $5u^2 - 6u + 1 = 0$.

Zusätzlich zu den Lösungsverfahren bei Exponentialgleichungen sollte beachtet werden:

- $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln(x)} = x$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $\ln(1) = 0$; $\ln(e) = 1$.
- $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
  Dies ist für die Anwendung des Satzes vom Nullprodukt wichtig.
- Beim Substituieren nützt oft: $e^{(m \cdot n)} = (e^m)^n$.

## Hinweise zum Lösen einer Gleichung mit dem GTR

Wurde eine Gleichung handschriftlich gelöst, so kann man das Ergebnis natürlich mit dem GTR überprüfen.
Bei Anwendungen kommen aber oft Gleichungen vor, die nicht exakt gelöst werden können.
Dies ist z.B. der Fall bei der Gleichung

$$0{,}5 \cdot e^{x+1} = 3 - x^2.$$

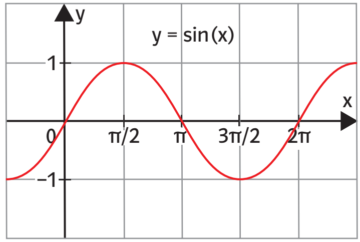
Mit dem GTR bieten sich **drei Lösungsmöglichkeiten** an:

1) Man erstellt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = 0{,}5 \cdot e^{x+1}$ bzw. $g(x) = 3 - x^2$ und ermittelt mit dem Befehl *intersect* aus dem CALC-Menü die Schnittpunkte.
2) Man bringt alles auf eine Seite, erstellt den Graphen der Funktion h mit $h(x) = 0{,}5e^{x+1} + x^2 - 3$ und bestimmt von der Funktion h die Nullstellen mit dem Befehl *zero* aus dem CALC-Menü.
3) Man verwendet den Befehl *Solver* aus dem MATH-Menü.

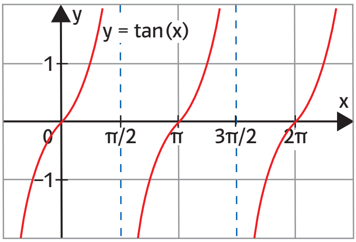
   Die Lösungen der Gleichung sind $x_1 \approx -1{,}6554$; $x_2 \approx 0{,}6433$.

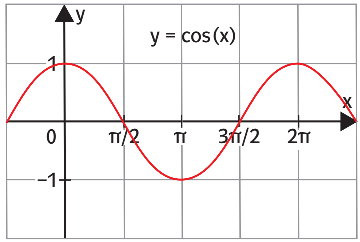
## Standardverfahren beim Lösen von trigonometrischen Gleichungen

Die Lösungen einer trigonometrischen Gleichung lassen sich ermitteln, wenn die Rückführung der Gleichung auf die Grundgleichungen **$\sin(x) = b$**, **$\cos(x) = b$** oder **$\tan(x) = b$** gelingt.
Die wichtigsten Hilfsmittel hierfür sind die Durchführung einer **Substitution** und die **Verwendung trigonometrischer Beziehungen** (Formelsammlung).




Hilfreich ist es, die Graphen der Grundfunktionen skizzieren zu können.




### Tipps

- Die Graphen der trigonometrischen Funktionen f, g und h mit
  $f(x) = \sin(x)$, $g(x) = \cos(x)$ und $h(x) = \tan(x)$
  sollten Sie skizzieren können.

- Die **Koordinaten der wichtigsten Punkte** der Graphen sollten Ihnen bekannt sein.
  Eine Formelsammlung kann hilfreich sein!

- Wichtige **Zusammenhänge** trigonometrischer Funktionen:

  (1) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

  (2) $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

  (3) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$

  (4) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 1 - 2\cdot\sin^2(x)$

Ein lineares Gleichungssystem (LGS) kann man mit dem GAUSS-Algorithmus lösen.
Bei diesem Verfahren wird das LGS durch Äquivalenzumformungen auf **Stufenform** gebracht. Die wichtigsten Äquivalenzumformungen hierzu sind:

- Multiplikation einer Zeile mit einer von null verschiedenen Zahl;
- Addition von Zeilen.

Aus der Stufenform kann die Lösung ermittelt werden, indem man von unten nach oben **„hochrechnet“**.
Ein LGS kann **keine**, **genau eine** oder **unendlich** viele Lösungen haben.

### Hinweise zum Gebrauch des GTR beim Lösen eines LGS

Zu jedem LGS gehört eine Matrix A. Diese Matrix wird in den GTR eingegeben und mit dem Befehl *rref* auf die sogenannte reduzierte Stufenform gebracht.

Für Aufgabe a) erhält man:

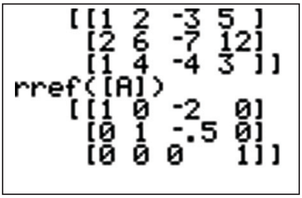



Fig. 1

Für Aufgabe b) erhält man:

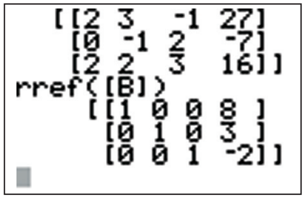



Fig. 2

### Tipps

- Nummerieren Sie die Gleichungen durch. Jede neue Gleichung erhält eine neue Nummer.

- Immer alle Gleichungen mitführen: Aus den ersten drei Gleichungen werden die nächsten drei, usw.

- Konzentrieren Sie sich auf die Vorzeichen!

- Machen Sie sich immer die Bedeutung einer Zeile wie $0 = 1$ klar; hier wurde eine Variable nicht geschrieben. Ausführlich besagt diese Zeile z.B. $0 \cdot x_3 = 1$. Jetzt wird deutlicher, dass es keine Zahl für $x_3$ gibt, welche die Gleichung erfüllt. Diese Überlegungen sind besonders dann wichtig, wenn Sie ein LGS mit einem GTR gelöst haben.

- **Keine** Lösung für das LGS erkennen Sie an einer Gleichung wie **$0 = 1$**;
  **unendlich viele** Lösungen erkennen Sie an einer Gleichung wie **$0 = 0$**.

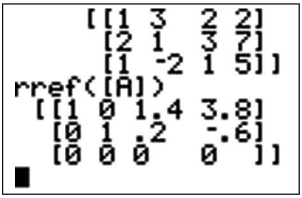
Ein LGS hat **keine**, **genau eine** oder **unendlich viele** Lösungen (vgl. Karte 7).

**Unendlich viele** Lösungen erkennt man an einer Zeile wie **0 = 0** oder auch **5 = 5**.
Man wählt dann für eine Variable einen Parameter, z. B. t, und drückt die anderen dann auch durch t aus.

### Hinweise zum Gebrauch des GTR beim Lösen eines LGS (vgl. Karte 7)

Zu jedem LGS gehört eine Matrix A. Diese Matrix wird in den GTR eingegeben und mit dem Befehl *rref* auf die sogenannte reduzierte Stufenform gebracht.

Für die Aufgabe erhält man:




### Tipps

- Wenn ein LGS unendlich viele Lösungen hat, stellt man die Lösungen mit einem Parameter dar; setzen Sie eine Variable gleich t, so dass **wenige Brüche** entstehen.

- Machen Sie sich klar, was bei einer GTR-Anzeige wie in Fig. die letzte Zeile ausführlich bedeutet: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$.

Der Graph einer linearen Funktion f ist eine Gerade mit der Gleichung $y = mx + c$ (Fig. 1).
**(Hauptform)**

Geht die Gerade g durch die Punkte $P(x_P \mid y_P)$ und $Q(x_Q \mid y_Q)$, so gilt (Fig. 2):

Steigung: $m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$,

Steigungswinkel: $\tan(\alpha) = m$,

Gleichung: $y = m(x - x_P) + y_P$.

Die Form $Ax + By + C = 0$ heißt **allgemeine Form**.

**Sonderfall:**
Geraden parallel zur y-Achse haben eine Gleichung der Form $x = a$. Dabei handelt es sich nicht um Graphen von Funktionen.

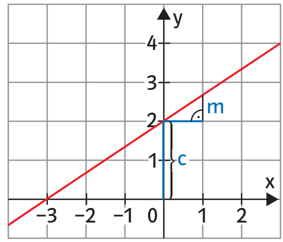


Fig. 1

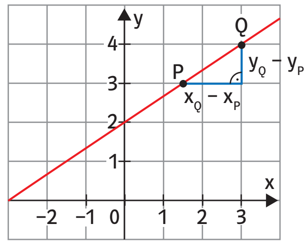


Fig. 2

## Tipps

- Die angegebenen Formeln sollte Sie **auswendig** wissen.
- Achten Sie beim Einsetzen der Koordinaten der Punkte auf die **Vorzeichen**.
- Welchen der zwei gegebenen Punkte man P bzw. Q nennt, ist gleichgültig.
- Zur Berechnung eines Steigungswinkels müssen Sie den Taschenrechner auf „**Degree**" einstellen.
- Achten Sie auf den **Unterschied** von z. B. $y = 2$ und $x = 2$ (vgl. Fig. 3).

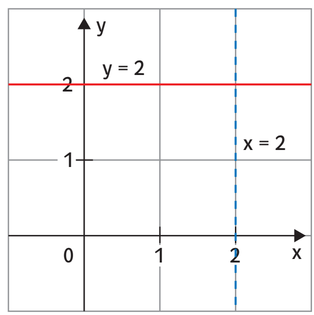


Fig. 3

### Orthogonalität zweier Geraden

Gegeben sind zwei Geraden g und h mit den Steigungen $m_1$ bzw. $m_2$.

1) Sind g und h orthogonal, dann gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$.
2) Gilt $m_1 \cdot m_2 = -1$, dann sind g und h orthogonal.

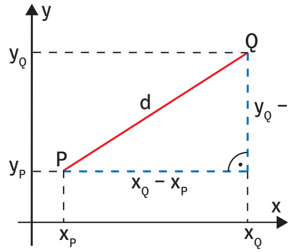


Fig. 1

### Länge einer Strecke

Sind $P(x_P | y_P)$ und $Q(x_Q | y_Q)$ die Endpunkte einer Strecke, so gilt für die Länge der Strecke nach dem Satz des Pythagoras (Fig. 1):

$$\overline{PQ} = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}.$$

### Mitte einer Strecke

Für die Mitte $M(x_M | y_M)$ gilt (Fig. 2):

$$x_M = \frac{1}{2} \cdot (x_P + x_Q),$$
$$y_M = \frac{1}{2} \cdot (y_P + y_Q).$$

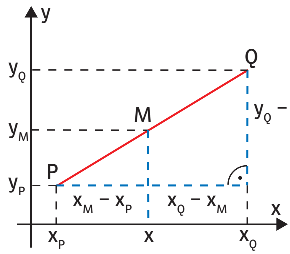


Fig. 2

### Tipps

- Die angegebenen Formeln sollten Sie **auswendig** wissen.
- Bei der Berechnung von $m_2$ aus $m_1$ ergibt sich oft ein Doppelbruch. Beachten Sie also die Regeln der **Bruchrechnung**.
- Die Mitte einer Strecke wird oft in der Analytischen Geometrie benötigt (vgl. Karte 64; 69).
  Sind $P(x_1 | x_2 | x_3)$ und $Q(y_1 | y_2 | y_3)$ Punkte im Raum, so gilt für die Mitte $M(m_1 | m_2 | m_3)$ der Strecke PQ:

  $$m_1 = \frac{1}{2}(x_1 + y_1);\ \ m_2 = \frac{1}{2}(x_2 + y_2);\ \ m_3 = \frac{1}{2}(x_3 + y_3).$$

Potenzfunktionen sind die Grundbausteine der ganzrationalen und gebrochenrationalen Funktionen.

## Eigenschaften der Graphen

1. **Definitionsbereich; Asymptoten**

   n positiv:

   - Der Definitionsbereich sind die reellen Zahlen, also ist **$D = \mathbb{R}$**.
   - Für $x \to \pm\infty$ existiert kein Grenzwert von f; daher existieren **keine waagrechten** Asymptoten.

   n negativ:

   - Aus $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ ersieht man: **$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$**. Die y-Achse ist **senkrechte** Asymptote.
   - Für $x \to \pm\infty$ geht $f(x) \to 0$. Daher ist die x-Achse **waagrechte** Asymptote.

2. **Symmetrie**

   n gerade:

   - Es gilt stets $f(-x) = (-x)^n = x^n = f(x)$, so dass die Graphen von f in diesem Fall **symmetrisch zur y-Achse** sind.

   n ungerade:

   - Es gilt stets $f(-x) = (-x)^n = -x^n = -f(x)$, so dass die Graphen von f in diesem Fall **symmetrisch zum Ursprung** sind.

## Tipps

- Skizzieren Sie sich weitere Graphen von Potenzfunktionen.
  Überprüfen Sie die Ergebnisse mit dem GTR.
- Für negative n zerfällt der Graph in zwei Äste.
  Verbinden Sie also **niemals** diese Äste über die Polstelle hinüber.
- Beachten Sie für die **verschiedenen Exponenten** auch das **unterschiedliche Monotonieverhalten** der Graphen.

Eine Funktion f, deren Term in der Form
$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
geschrieben werden kann, heißt **ganzrationale Funktion vom Grad n**.

Der Verlauf einer ganzrationalen Funktion vom Grad n für $x \to +\infty$ bzw. für $x \to -\infty$
wird von der höchsten vorkommenden Potenz von x festgelegt.

Ist für eine Zahl $x_0 \in D_f$ die Bedingung $f(x_0) = 0$ erfüllt, nennt man $x_0$ **Nullstelle** der Funktion f.

Für eine **ganzrationale** Funktion f vom Grad n gilt:
1. Es existieren **höchstens** n Nullstellen.
2. Ist eine Nullstelle $x_0$ bekannt, kann man die **Polynomdivision** durchführen.
3. Ist $x_0$ Nullstelle, lässt sich f(x) in der Form **$f(x) = (x - x_0) \cdot g(x)$** schreiben. Dabei ist g(x) vom Grad $n - 1$.
4. Wenn $f(x) = (x - x_0)^2 \cdot g(x)$ mit $g(x_0) \neq 0$ gilt, **berührt** der Graph von f die x-Achse an der Stelle $x_0$.

## Tipps

- Um die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion zu berechnen,
  ist eine **ganzrationale Gleichung** zu lösen. Zu den möglichen Verfahren vgl. Karten 1 und 2.

- Beachten Sie: Bei der **Polynomdivision** wird durch $x - x_0$ dividiert.
  Ist z. B. $x_0 = -2$, muss durch $x + 2$ dividiert werden.

- Die **Anzahl** der Nullstellen ist **höchstens** n.
  Der Graph der Funktion f mit $f(x) = x^4 + 2x^2 + 2$ hat z. B. keine Nullstellen.

- **Berührung** zweier Graphen an der Stelle $x_0$ bedeutet:
  **$f(x_0) = g(x_0)$ und $f'(x_0) = g'(x_0)$**.

Eine gebrochenrationale Funktion f ist der Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen z und n.
Es gilt also $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$.

## Definitionsbereich gebrochenrationaler Funktionen

Da die Teilbarkeit durch 0 auszuschließen ist, ist der Definitionsbereich gebrochenrationaler Funktionen durch die Nullstellen des Nennerpolynoms eingeschränkt. Hat das Nennerpolynom keine Nullstellen, so ist $D = \mathbb{R}$.

Hat das Nennerpolynom Nullstellen, so gilt folgende Fallunterscheidung:

1. Das Zählerpolynom hat bei der Definitionslücke $x_0$ **keine** Nullstelle, d.h. z(x) strebt für $x \to x_0$ gegen eine von null verschiedene reelle Zahl. Dann weist der Graph von f einen Pol auf, d.h. $x = x_0$ ist die Gleichung der **senkrechten Asymptote** des Graphen von f (vgl. Aufgabe a)).

2. Das Zählerpolynom *hat* bei der Definitionslücke $x_0$ **eine** Nullstelle, d.h. z(x) strebt für $x \to x_0$ gegen 0. Dann kann durch Ausklammern (Faktorisieren: ggf. mit Hilfe einer Polynomdivision) und anschließendem Kürzen mit $(x - x_0)$ der Verlauf des Graphen in der Nähe der Definitionslücke bestimmt werden. Hat das Nennerpolynom des gekürzten Funktionsterms von f an der Stelle $x_0$ keine Nullstelle mehr, so spricht man von einer **hebbaren Definitionslücke**. Die Funktion f lässt sich damit an der Stelle $x_0$ stetig fortsetzen (vgl. Aufgabe b)).

## Tipps

- Bei einer gegebenen gebrochenrationalen Funktion sollten Sie zunächst den **Zähler und den Nenner faktorisieren**.
  Hilfsmittel hierzu sind: **Ausklammern**; **Binomische Formeln**; **Polynomdivision**
- An der gekürzten Form erkennt man den Verlauf des Graphen einfacher. Beachten Sie aber die weiterhin geltende **Definitionsmenge**.
- Handelt es sich um eine **hebbare Definitionslücke**, **markieren** Sie im Graphen den Punkt deutlich.

Eine gebrochenrationale Funktion f ist der Quotient aus zwei ganzrationalen Funktionen z und n. Es gilt also $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$.

## Asymptoten gebrochenrationaler Funktionen

Asymptoten sind Geraden, an die sich der Graph einer Funktion beliebig nahe annähert. Bei der Grenzwertbetrachtung für $x \to \pm\infty$ können bei Graphen gebrochenrationaler Funktionen Asymptoten nur dann auftreten, wenn der Grad des Zählerpolynoms (Zählergrad) um höchstens eins größer ist als der Grad des Nennerpolynoms (Nennergrad).

Bezeichnet n das Maximum von Nennergrad und Zählergrad, so kann man das Verhalten des Graphs für $x \to \pm\infty$ untersuchen, indem man den Term der gebrochenrationalen Funktion mit dem Kehrbruch von $x^n$ erweitert.

1. **Nennergrad > Zählergrad:**
   **$y = 0$** ist waagrechte Asymptote an den Graphen von f für $x \to \pm\infty$.
2. **Nennergrad = Zählergrad:**
   **$y = \frac{a}{b}$** ist waagrechte Asymptote an den Graphen von f für $x \to \pm\infty$, wobei a der Leitkoeffizient des Zählers und b der Leitkoeffizient des Nenners ist.
3. **Nennergrad = Zählergrad −1:**
   Mit Hilfe der Polynomdivision (= gemischte Schreibweise) kann man die Gleichung der **schiefen Asymptote** ermitteln.

## Tipps

Bei einer gebrochenrationalen Funktion sind unterschiedliche Schreibweisen des Terms hilfreich.

- Für die Untersuchung auf **senkrechte Asymptoten** hilft die Zerlegung von Zähler und Nenner in Produkte. Besonders ist darauf zu achten, ob Zähler und Nenner an der gleichen Stelle null werden.
- Für die Untersuchung auf **waagrechte Asymptoten** hilft die Form, die man nach einer Erweiterung erhält.
- An der Form nach einer **Polynomdivision** ersieht man direkt eine **schiefe Asymptote**.

Die **Polynomdivision** ist ein gängiges Verfahren bei der Bestimmung von **Näherungskurven** von gebrochenrationalen Funktionen oder beim Bestimmen von **Nullstellen** ganzrationaler Funktionen.

## Näherungsfunktionen gebrochenrationaler Funktionen

Eine Näherungsfunktion einer gebrochenrationalen Funktionen f ist eine ganzrationale Funktion g, an die sich der Graph von f beliebig nahe annähert. Bei der Grenzwertbetrachtung für $x \to \pm\infty$ spricht man von einer **Näherungskurve** einer gebrochenrationalen Funktion, falls der Grad des Zählerpolynoms (Zählergrad) um **mindestens zwei** größer ist als der Grad des Nennerpolynoms (Nennergrad). Im anderen Fall spricht man von Asymptoten (vgl. Karte 14).
Man ermittelt den Term der Näherungsfunktion (wie bei schiefen Asymptoten) durch Polynomdivision. Hierbei schreibt man den Bruch als Divisionsaufgabe und verfährt wie beim schriftlichen Dividieren von Zahlen.

**Beispiel:** $f(x) = \frac{2x^3 - 6x^2 + x - 5}{x + 1} = (2x^3 - 6x^2 + x - 5) : (x + 1) = 2x^2 - 8x + 9 - \frac{14}{x + 1}$

$$
\begin{array}{lll}
-(2x^3 + 2x^2) & & \\
\hline
-(-8x^2 + x) & 2x^3 : x & \\
-(-8x^2 - 8x) & & -8x^2 : x \\
\hline
-(9x - 5) & & 9x : x \\
-(9x + 9) & & \\
\hline
-14 & & -14 : (x + 1)
\end{array}
$$

## Tipps

- Polynomdivision ist hilfreich bei
  1) der Berechnung von **Nullstellen** ganzrationaler Funktionen (vgl. Karte 12),
  2) der Bestimmung von **Asymptoten** bzw. **Näherungskurven** von gebrochenrationalen Funktionen.
- Nach der Polynomdivision erkennt man am Vorzeichen des „Restterms“, ob sich der Graph der Funktion f **von oben oder von unten** an die schiefe Asymptote bzw. an die Näherungskurve annähert.

Exponentialfunktionen sind die Grundbausteine, um z. B. Wachstumsprozesse mathematisch zu beschreiben. Die spezielle Basis e (≈ 2,7183) ist die Eulersche Zahl.
Sie ist eine irrationale (transzendente) Zahl, die als Grenzwert der Folge $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ definiert ist.

### Eigenschaften jeder Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$; $a > 1$

- Der Definitionsbereich sind die reellen Zahlen: $D = \mathbb{R}$.
- Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$.
- Es ist $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Daher ist die x-Achse waagrechte Asymptote.
- Es gilt $a^0 = 1$ für jedes $a \neq 0$. Der Punkt $P(0\,|\,1)$ gehört also stets zum Graphen von f.
- Jede Exponentialfunktion ist streng monoton steigend.

### Eigenschaften der Exponentialfunktion $f_1$ mit $f_1(x) = e^x$

- Wegen $f_1(x) = f_1'(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ stimmt die Tangentensteigung in jedem Punkt $P(x_0\,|\,f(x_0))$ (oder die momentane Änderungsrate an jeder Stelle $x_0$) mit dem Funktionswert überein (vgl. Karte 29).

### Spiegelung von Graphen

- **an der y-Achse**
  Gilt für eine Funktion g, dass $\mathbf{g(x) = f(-x)}$ ist, entsteht der Graph von g aus dem von f durch Spiegelung an der y-Achse.

  Begründung:
  Die Funktion g nimmt an der Stelle $x_0$ denselben Funktionswert an wie die Funktion f an der Stelle $-x_0$.

- **an der x-Achse**
  Gilt für eine Funktion h, dass $\mathbf{h(x) = -f(x)}$ ist, entsteht der Graph von h aus dem von f durch Spiegelung an der x-Achse.

  Begründung:
  Liegt der zum Graphen von f gehörende Punkt $P(x_0\,|\,f(x_0))$ z. B. oberhalb der x-Achse, dann hat der zum Graphen von h gehörende (gespiegelte) Punkt die Koordinaten $P'(x_0\,|\,-f(x_0))$ und liegt damit unterhalb der x-Achse. Da die Funktionswerte von f und h an jeder Stelle $x_0$ denselben Abstand zur x-Achse haben ($|h(x_0)| = |f(x_0)|$), ergibt sich der gespiegelte Graph.

Verschiebungen und Streckungen gehören zu den einfachsten Verwandtschaftsbeziehungen innerhalb einer Funktionenklasse. Veränderungen am Funktionsterm lassen Rückschlüsse auf entsprechende Veränderungen des Graphen zu.

## Verschiebungen

- **um c in y-Richtung:** **$g(x) = f(x) \pm c;\ \ c > 0$**

  Wird der Graph von f um c Einheiten in y-Richtung verschoben, so wird zu jedem Funktionswert c addiert (Verschiebung nach oben) oder c subtrahiert (Verschiebung nach unten). Eine Ordinatenaddition der beiden Funktionsterme von $y = f(x)$ und $y = \pm c$ liefert also den gesuchten Graphen.

- **um b in x-Richtung:** **$g(x) = f(x \pm b);\ \ b > 0$**

  Eine Verschiebung des Graphen nach rechts (z. B. um 2 Einheiten) bedeutet, dass der neue Funktionswert von g an der Stelle $x_0$ dem (alten) von f an der Stelle $x_0 - 2$ entspricht.
  Gilt also $g(x) = f(x - b)$, so ist der Graph von g aus dem von f durch Verschiebung um b **nach rechts** entstanden.
  Entsprechend gilt für $g(x) = f(x + b)$: der Graph von g ist aus dem von f durch Verschiebung um b **nach links** entstanden.

## Streckung

- **von der x-Achse in y-Richtung: $g(x) = k \cdot f(x)$**

  Streckung von der x-Achse in y-Richtung bedeutet eine Ver-k-fachung jedes Funktionswerts. Ist k dabei eine negative Zahl, so entsteht der Graph von g aus dem von f durch eine zusätzliche Spiegelung an der x-Achse.

- **von der y-Achse in x-Richtung: $g(x) = f(a \cdot x)$**

  Streckung von der y-Achse in x-Richtung bedeutet in diesem Fall eine Stauchung um den Faktor $\frac{1}{a}$. Ist z. B. $a = 2$, so bekommt man den neuen Funktionswert an einer beliebigen Stelle, in dem man den Funktionswert des doppelten x-Werts von f nimmt. Die x-Werte der neuen Funktion g werden also bei gleichem y-Wert halbiert. Ist a negativ, so entsteht der Graph von g aus dem von f durch zusätzliche Spiegelung an der y-Achse.

## Tipps

- Um z. B. den Term für $f(2x - 3)$ zu ermitteln, muss im Term von f die Variable x durch $2x - 3$ ersetzt werden.
- Beachten Sie, dass Verschiebungen und Streckungen in **x-Richtung** sich anders auswirken, als man zunächst glaubt:
  $g(x) = f(x - b)$ bedeutet für $b > 0$ eine Verschiebung nach **rechts**,
  $g(x) = f(a \cdot x)$ bedeutet für $a > 1$ eine **Stauchung um den Faktor** $\frac{1}{a}$.

Trigonometrische Funktionen spielen bei der Beschreibung periodischer Vorgänge eine wesentliche Rolle.

### Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen: Sinus und Kosinus

Die Sinus- und Kosinusfunktion sind periodisch mit der **Periode $2\pi$**.
Damit ergeben sich für die Koordinaten der Hochpunkte des Graphen der Sinusfunktion

$\mathbf{H_k\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \,|\, 1\right)}$; $k \in \mathbb{Z}$

und für die Tiefpunkte entsprechend

$\mathbf{T_k\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \,|\, -1\right)}$; $k \in \mathbb{Z}$.

Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind Vielfache von $\pi$: $\mathbf{N_k(k \cdot \pi \,|\, 0)}$; $k \in \mathbb{Z}$

Da der Graph der Kosinusfunktion aus dem Graphen der Sinusfunktion durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links hervorgeht, werden die Extremstellen der Sinusfunktion zu den Nullstellen der Kosinusfunktion und umgekehrt.

Der Graph der Sinusfunktion ist **punktsymmetrisch zum Ursprung**,
da $\sin(x) = -\sin(-x)$ für alle x gilt.
Der Graph der Kosinusfunktion ist **achsensymmetrisch zur y-Achse**,
da $\cos(x) = \cos(-x)$ für alle x gilt.

### Wichtigste Beziehung zwischen der Sinus- und Kosinusfunktion

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

Dies geht zurück auf die Definition von Sinus und Kosinus im rechtwinkligen Dreieck:

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

### Tipps

- Die Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ sollten Sie skizzieren können. Sie benötigen die Graphen z. B. dann, wenn Sie eine trigonometrische Gleichung lösen müssen (vgl. Karte 6).
- Die Koordinaten weiterer wichtiger Punkte können Sie einer Formelsammlung entnehmen.

Trigonometrische Funktionen spielen bei der Beschreibung periodischer Vorgänge eine zentrale Rolle.

**Veränderung der Periode**

Die Sinus- und Kosinusfunktion sind periodisch mit Periode $2\pi$. Aufgrund der Stauchung des Graphen der trigonometrischen Grundfunktionen von der y-Achse in x-Richtung ergibt sich für die Periode der Funktionen f und g mit

$$f(x) = \sin(k \cdot x) \quad \text{bzw.} \quad g(x) = \cos(k \cdot x)$$

eine Periode

$$p = \left|\frac{2\pi}{k}\right|$$

(vgl. Karte 17).

Um den Graphen einer Sinus- oder Kosinusfunktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$ skizzieren zu können, muss man den Term zunächst umformen:

$$\mathbf{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + e)) + d} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + e)) + d}\,. \qquad (1)$$

Dann gibt

| | |
|---|---|
| $\lvert a \rvert$ | die Amplitude, |
| $\left\lvert\frac{2\pi}{b}\right\rvert$ | die Periode, |
| e | die Verschiebung nach links (e positiv) bzw. rechts (e negativ), |
| d | die Verschiebung nach oben (d positiv) bzw. unten (d negativ) an. |

**Tipps**

- **Formen** Sie zunächst den Term in die Form (1) **um**.
- Beachten Sie die **Reihenfolge** der Veränderungen:
  1) Streckung in y-Richtung
  2) Streckung in x-Richtung
  3) Verschiebung in x-Richtung
  4) Verschiebung in y-Richtung
- **„Streckung“** kann auch **„Stauchung“** bedeuten.
- Beachten Sie die **Vorzeichen** der Konstanten.

Eine Sinus- oder Kosinusfunktion der Form

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ bzw. $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c) + d$

kann umgeformt werden in

$\mathbf{f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + e)) + d}$ bzw. $\mathbf{f(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + e)) + d}$ . (1)

Dabei gibt

$|a|$ die Amplitude,

$\left|\frac{2\pi}{b}\right|$ die Periode,

$e$ die Verschiebung nach links (e positiv) bzw. rechts (e negativ),

$d$ die Verschiebung nach oben (d positiv) bzw. unten (d negativ) an.

Aus einem vorgelegten Graphen kann man schrittweise die Konstanten ermitteln.

Wird in einer **Anwendungssituation** ein periodischer Vorgang beschrieben, geht man entsprechend vor. Man skizziert den Graphen und bestimmt schrittweise die Konstanten.

### Tipps

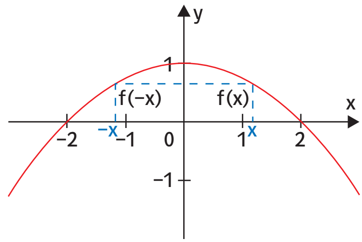
- Skizzieren Sie sich zunächst die „Mittellage“ der Schwingung als Parallele zur x-Achse. Dann erkennt man eine Verschiebung in y-Richtung und die Amplitude $|a|$.
- Lesen Sie die Periode p ab.
  Aus $\left|\frac{2\pi}{b}\right| = p$ ergibt sich b.
- Die Verschiebung nach rechts bzw. links erkennt man aus der „Mittellage“.

### Hinweise zum Gebrauch eines GTR bei einer Termsuche

Liegt eine Wertetabelle vor, deren Werte einen sinusförmigen Verlauf beschreiben, kann man eine sogenannte **Funktionsanpassung** durchführen.
Hierzu gibt man die Wertetabelle als Liste in den GTR ein und führt mit dem Befehl *SinReg* eine **Regression** durch.
Der GTR liefert einen Term in der Form $y = a \cdot \sin(bx + c) + d$.

## Achsensymmetrie bezüglich der y-Achse

(bezüglich des Ursprungs vgl. Karte 22)




Der Graph der Funktion f ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt:

**$f(-x) = f(x)$**

für alle x des Definitionsbereiches.

Diese Bedingung ist also rechnerisch zu überprüfen.
Es gibt aber Funktionenklassen, bei denen man eine Symmetrie ohne diese Rechnung direkt am Term erkennen kann.

1. Eine **ganzrationale Funktion** ist achsensymmetrisch zur y-Achse, falls **alle** auftretenden **Exponenten gerade** sind.

   **Beispiel:**
   Der Graph von f mit $f(x) = x^8 + 3x^6 + 2x^5 - x^4 + 5x^2$ ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse, da nicht alle Exponenten gerade sind.

2. Eine **gebrochenrationale Funktion** ist achsensymmetrisch zur y-Achse, falls **alle** auftretenden **Exponenten ausschließlich gerade oder ungerade** sind.

   **Beispiel:**
   Der Graph von f mit $f(x) = \frac{x^3 + x}{x^5 - 3x^3 + 2x}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, da $f(x) = f(-x)$ für alle x gilt.

### Tipps

- Betrachten Sie zunächst den Term der Funktion. Gehört dieser zu den ganzrationalen bzw. gebrochenrationalen Funktionen, können Sie oft ohne weitere Rechnung über die Symmetrie entscheiden.
  Bei den gebrochenrationalen Funktionen ist aber Vorsicht geboten (vgl. Beispiel).
- Ist die Überprüfung der Bedingung $f(-x) = f(x)$ erforderlich, ersetzen Sie im gegebenen Term x durch −x und vereinfachen Sie den Term, bis Sie über eine eventuelle Symmetrie entscheiden können.

### Beispiel:

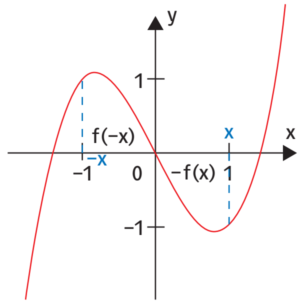
$f(x) = \frac{5x}{x^2 - 1}$

Ersetzt man im Term x durch −x, ergibt sich:

$$\frac{5 \cdot (-x)}{(-x)^2 - 1} = \frac{-5x}{x^2 - 1} = -\frac{5x}{x^2 - 1} = -f(x).$$

Es gilt $f(-x) = -f(x)$. Der Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung (vgl. Wissen und Karte 22).

### Punktsymmetrie bezüglich des Ursprungs O (0 | 0)




Der Graph der Funktion f ist genau dann symmetrisch zum Ursprung, wenn gilt:
**$f(-x) = -f(x)$**
für alle x des Definitionsbereiches.

Diese Bedingung ist also rechnerisch zu überprüfen.
Bei **ganzrationalen** Funktionen geht die Prüfung auf Symmetrie zum Ursprung aber schneller, denn es gilt:

> Eine **ganzrationale Funktion** ist punktsymmetrisch zum Ursprung, falls **alle** auftretenden **Exponenten ungerade** sind.

**Beispiel:**
Der Graph von f mit $f(x) = 2x^9 + 5x^7 - 13x^5 - 1{,}5x^3 + 5x - 2$
ist nicht punktsymmetrisch zum Ursprung, da nicht alle Exponenten ungerade sind.
Zur Erinnerung: $2 = 2 \cdot x^0$. Null ist eine gerade Zahl.
Der Graph von f ist aber punktsymmetrisch zum Punkt P (0 | −2); vgl. Karte 23.

### Tipps

- Ist die gegebene Funktion **ganzrational**, erkennt man eine Symmetrie **ohne weitere Rechnung** an den Exponenten.
- Ist die Überprüfung der Bedingung $f(-x) = -f(x)$ erforderlich, **ersetzen Sie im gegebenen Term x durch −x** und vereinfachen Sie den Term, bis Sie über eine Symmetrie entscheiden können (vgl. z. B. Lösung von Aufgabe c)).

### Achsensymmetrie zur Geraden x = a

Der Graph K der Funktion f ist **achsensymmetrisch zu x = a**, wenn für alle a + h und a − h aus dem Definitionsbereich gilt (vgl. Fig. 1): $\mathbf{f(a+h)=f(a-h)}$.

### Punktsymmetrie zum Punkt Z (u | v)

Der Graph K der Funktion f ist **punktsymmetrisch zum Punkt Z (u | v)**, wenn für alle u + h und u − h aus dem Definitionsbereich gilt (vgl. Fig. 2): $\mathbf{\frac{1}{2}(f(u+h)+f(u-h))=v}$.

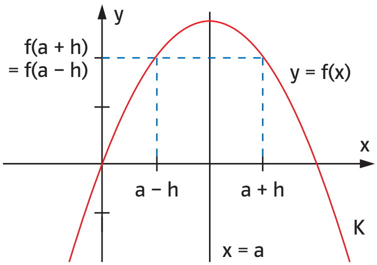


Fig. 1

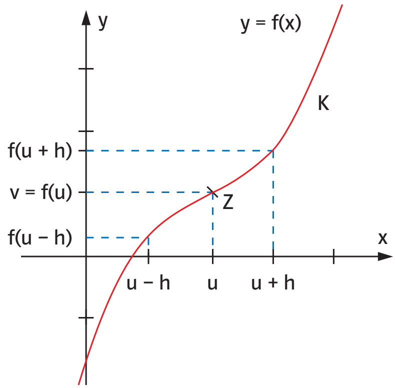


Fig. 2

### Tipps

- Berechnen Sie bei der Überprüfung einer Achsensymmetrie **jede Seite** der Bedingung **für sich** (vgl. Lösung a)).
- Berechnen Sie auch bei der Überprüfung einer Punktsymmetrie **zunächst f (u + h) und f (u − h) getrennt**. Bei einer Punktsymmetrie muss der Mittelwert dann gleich v sein.
- Ist in der Aufgabe nicht angegeben, welche Symmetrie nachzuweisen ist, **skizzieren** Sie zunächst den Graphen von f, um eine **Vermutung** zu haben.

## Änderungsrate

Ist eine Größe f in einem Intervall $[x; x_0]$ definiert, nennt man den Quotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ auch die **Änderungsrate** von f im Intervall $[x; x_0]$.

## Momentane Änderungsrate

Wenn die Änderungsrate $\frac{f(x) - (f_0)}{x - x_0}$ für $x \to x_0$ gegen einen Grenzwert strebt, nennt man diesen Grenzwert auch die **momentane Änderungsrate der Funktion f**.

Je nach Größe hat die Änderungsrate einen speziellen Namen. Beschreibt der Quotient z. B. die Differenz von Strecken in einem Zeitintervall spricht man von einer **Durchschnittgeschwindigkeit**. Der Grenzwert ist dann die **Momentangeschwindigkeit**.

Liegt (wie in der Aufgabe) die Funktion nur grafisch vor, kann man für eine Änderungsrate und eine momentane Änderungsrate nur **Näherungswerte** ermitteln.

## Beispiele für momentane Änderungsraten von Größen:

- **Strecke s** (in m) im **Zeitintervall $[t_1; t_2]$** (in s)
  Momentane Änderungsrate von s(t): „**Momentangeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0$**"
  Einheit der Änderungsrate: $\frac{m}{s}$.
- **Höhe h** (in m) eines Bergprofils auf dem **Streckenabschnitt $[x_1; x_2]$** (in km)
  Momentane Änderungsrate von h(x): „**Lokale Höhenzunahme (oder -abnahme) an der Stelle $x_0$**", auch Steigung oder Gefälle an der Stelle $x_0$.
  Einheit der Änderungsrate: $\frac{m}{km}$.
- **Länge L** (in m) eines Pflanzenkeimlings im **Zeitintervall $[t_1; t_2]$** (in s)
  Momentane Änderungsrate von L(t): „**Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt $t_0$**"
  Einheit der Änderungsrate: $\frac{m}{s}$.
- **Wassermenge V** (in $m^3$) einer Quelle im **Zeitintervall $[t_1; t_2]$** (in s)
  Momentane Änderungsrate von V(t): „**Schüttung zum Zeitpunkt $t_0$**"
  Einheit der Änderungsrate: $\frac{m^3}{s}$.

**Änderungsrate** (vgl. Karte 24)

Ist eine Größe f in einem Intervall $[x; x_0]$ definiert, nennt man den Quotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ auch die **Änderungsrate** von f im Intervall $[x; x_0]$.

Am Graphen entspricht eine Änderungsrate der Steigung der Sekante im Intervall $[x; x_0]$.

**Momentane Änderungsrate**

Wenn die Änderungsrate $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ für $x \to x_0$

gegen einen Grenzwert strebt, nennt man diesen Grenzwert auch die **momentane Änderungsrate der Funktion f**.

Ist die Funktion f durch einen Term gegeben, kann man eine momentane Änderungsrate als Grenzwert rechnerisch bestimmen (vgl. Lösung).

**Tipps**

- Um rechnerisch eine momentane Änderungsrate (ohne Ableitungsregeln, vgl. Karten 29 bis 32) als Grenzwert bestimmen zu können, muss man den Term umformen. Hierbei helfen
  1) **ausklammern**
  2) **binomische Formeln**
  3) **Polynomdivision**.
- Beachten Sie: Die Umformungen gelten nur für $x \neq x_0$. Deshalb darf man **kürzen**.
- Mit den **Ableitungsregeln** kann man die umfangreichen Rechnungen zur Ermittlung einer momentanen Änderungsrate vermeiden.

## Definition der Ableitung einer Funktion an einer Stelle

Ist eine Funktion f definiert auf dem Intervall I und ist $x_0 \in I$, so nennt man den Grenzwert des Differenzenquotienten $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ die **Ableitung** von f an der Stelle $x_0$.

Man schreibt $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Am Graphen entspricht der Ableitung von f an der Stelle $x_0$ die **Steigung der Tangente** an dieser Stelle (vgl. Fig. 1).

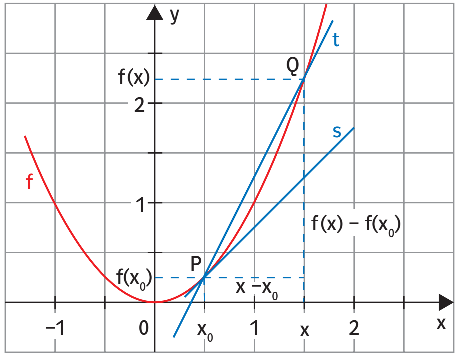


Fig. 1

Es entsprechen sich:
**Differenzenquotient und Änderungsrate**
sowie
**Ableitung** und **momentane Änderungsrate**.

Die Ableitung einer Funktion an einer Stelle kann mit dem GTR ermittelt werden (vgl. Fig. 2)

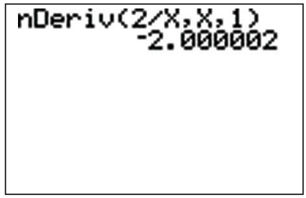


Fig. 2

### Tipps

- Um die Ableitung an einer Stelle **mit der Definition** zu berechnen, sollten Sie schrittweise vorgehen:
  1) Differenzenquotient
  2) Grenzwert des Differenzenquotienten.
     Bei der Berechnung des Differenzenquotienten sind die in Karte 25 angegebenen Umformungen hilfreich.
- Mit den **Ableitungsregeln** (vgl. Karten 29 bis 32) ist die Berechnung einer Ableitung einfacher.
- Mit der h-Schreibweise gilt für die Ableitung (vgl. Fig. 3):

  $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

  Diese ist häufig **übersichtlicher**.

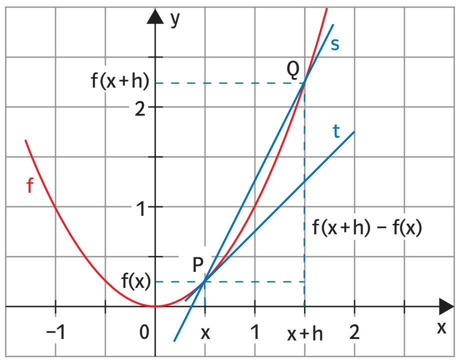


Fig. 3

## Zusammenhänge von f, f′ und f″

Für eine Funktion f mit der Ableitungsfunktion f′ gibt $f'(x_0)$ die Steigung der Tangente an den Graphen K von f im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ auf K an.
Deshalb ist die Monotonie von f am Graphen von f′ ablesbar. Ebenso können die Extrempunkte und mit etwas mehr Aufwand auch die Wendepunkte von K bestimmt werden.

Bezeichnet K′ den Graphen der Ableitungsfunktion f′ einer Funktion f mit Graph K, so gilt:

- Wenn die Funktionswerte f′(x) von K′ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ sind, so ist f streng monoton $\begin{Bmatrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{Bmatrix}$.
- Wenn die Funktionswerte f″(x) von K″ $\begin{Bmatrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{Bmatrix}$ sind, so ist f′ streng monoton $\begin{Bmatrix}\text{steigend}\\ \text{fallend}\end{Bmatrix}$

  und damit ist K eine $\begin{Bmatrix}\text{Linkskurve}\\ \text{Rechtskurve}\end{Bmatrix}$.
- An den Stellen, an denen G Extrempunkte hat, hat G′ Nullstellen (für Extremstellen gilt: $f'(x) = 0$).
- An den Stellen, an denen G Wendepunkte hat, hat G′ Extremstellen (für Wendestellen gilt $f''(x) = 0$, also hat G′ Extremstellen).

## Tipps

- Liegt der Graph einer Funktion f gezeichnet vor und ist der Graph der Ableitungsfunktion f′ zu skizzieren, sollten Sie wie folgt vorgehen:
  1) An den Extremstellen von f hat f′ **Nullstellen**, also **markieren** Sie diese.
  2) Stellen Sie in den einzelnen Intervallen das **Vorzeichen der Steigung** fest.
  3) Schätzen Sie ab, **zwischen welchen Werten** ungefähr sich die Steigungen bewegen.
  Skizzieren Sie entsprechend den Graphen von f′.
- Mit dem GTR können Sie Ihre Überlegungen überprüfen (vgl. Fig. 1 und Fig. 2).

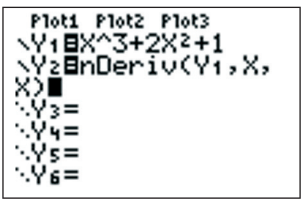


Fig. 1

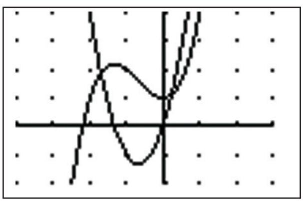


Fig. 2

**Zusammenhänge zwischen dem Graphen K′ von f′ und dem Graphen K von f** (vgl. auch Karte 26)**:**

- Wenn K′ $\begin{Bmatrix}\text{oberhalb}\\ \text{unterhalb}\end{Bmatrix}$ der x-Achse verläuft, ist f streng monoton $\begin{Bmatrix}\text{zunehmend}\\ \text{abnehmend}\end{Bmatrix}$.
- Wenn K′ die x-Achse an der Stelle $x_0$ schneidet, hat K an dieser Stelle ein Extremum.
- Wenn K′ streng monoton $\begin{Bmatrix}\text{zunehmend}\\ \text{abnehmend}\end{Bmatrix}$ verläuft, ist K eine $\begin{Bmatrix}\text{Linkskurve}\\ \text{Rechtskurve}\end{Bmatrix}$.
- Wenn K′ an der Stelle $x_0$ ein Extremum hat, so hat K an dieser Stelle einen Wendepunkt.

**Tipps**

- Besonders zu beachten ist:
  Da f und g mit g(x) = f(x) + c dieselbe Ableitungsfunktion f′ besitzen, ist der Graph K von f bei Vorgabe von K′ nicht **eindeutig festgelegt**.
- Markieren Sie charakteristische Punkte wie Schnittpunkte mit der x-Achse und Extrempunkte auf K′.
  Null**stellen** von K′ ergeben Extrem**stellen** von K;
  Extrem**stellen** von K′ ergeben Wende**stellen** von K.
- Mit dem GTR können Sie Ihre Überlegungen überprüfen (vgl. Fig. 1 und Fig. 2).

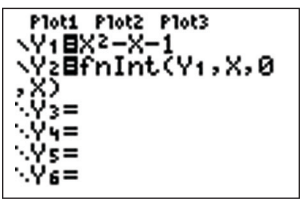



Fig. 1

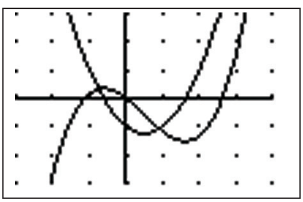


Fig. 2

## Zusammenfassung einfacher Ableitungsregeln

Beim Ableiten ganzrationaler Funktionen oder einfacher gebrochenrationaler Funktionen sind folgende Ableitungsregeln Grundlage, um die Ableitungsfunktion **ohne Anwendung der Definition** bilden zu können.

**Potenzregel:** Eine Funktion f der Form $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ hat als Ableitung die Funktion f′ mit $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$.

**Summenregel:** Eine Summe wird „summandenweise“ abgeleitet, d. h. für eine differenzierbare Funktion f mit $f(x) = u(x) + v(x)$ gilt: $f'(x) = u'(x) + v'(x)$.

**Faktorregel:** Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten, d.h. für eine differenzierbare Funktion f mit $f(x) = k \cdot u(x)$ gilt: $f'(x) = k \cdot u'(x)$.

## Tipps

**Die Ableitungen der folgenden Grundfunktionen sollten Sie auswendig kennen.**

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $c$ | $0$ |
| $x$ | $1$ |
| $\frac{1}{x}$ | $-\frac{1}{x^2}$ |
| $\sqrt{x}$ | $\frac{1}{2\sqrt{x}}$ |
| $\sin(x)$ | $\cos(x)$ |
| $\cos(x)$ | $-\sin(x)$ |
| $e^x$ | $e^x$ |

Funktionsterme wie $\frac{1}{x^2}$ bzw. $\frac{1}{x^3}$ sollten Sie zunächst in $x^{-2}$ bzw. $x^{-3}$ umschreiben und erst dann ableiten.

## Höhere Ableitungsregeln

**Produktregel:**
Sind zwei Funktionen u und v differenzierbar im Intervall I mit $x \in I$, so ist auch das Produkt f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x),$$

kurz: $\mathbf{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$.

Die Produktregel gilt auch für mehr als zwei Faktoren:

$$\mathbf{(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'}.$$

**Quotientenregel**:
Sind zwei Funktionen u und v differenzierbar im Intervall I mit $x \in I$ und $v(x) \neq 0$, so ist auch der Quotient f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ differenzierbar, und es gilt:

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2},$$

kurz: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

## Tipps

- Bedenken Sie:
  Ist die erste Ableitung falsch berechnet worden, sind bei einer Funktionsuntersuchung auch alle weiteren Berechnungen falsch.
  **Überprüfen** Sie also immer Ihre Bestimmung der ersten Ableitung.
- Achten Sie bei **negativen** Faktoren besonders darauf, genügend **Klammern** zu setzen, um Vorzeichenfehler zu vermeiden.
- Nach dem Ableiten sollten Sie zuerst **zusammenfassen** und **ausklammern** bevor Sie die zweite Ableitung bilden (vgl. Lösung a).
- Beachten Sie bei der Quotientenregel das **Minuszeichen im Zähler**, d.h. setzen Sie Klammern beim Berechnen der Ableitung.

## Kettenregel

Ist eine Funktion f durch eine Verkettung $f(x) = u(v(x))$ gegeben und sind die äußere Funktion u und die innere Funktion v differenzierbar, so ist f ebenfalls differenzierbar und es gilt für die Ableitung:

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

### Merkregel:

Für die Ableitung einer Verkettung gilt: **„Äußere Ableitung mal innere Ableitung“**,
kurz: $f' = u'(v) \cdot v'$.

### Beispiel:

$f(x) = 5 \cdot (2x^3 + 4x^2 + 2x + 1)^2$
äußere Funktion: $u(x) = 5x^2$ mit $u'(x) = 10x$
innere Funktion: $v(x) = 2x^3 + 4x^2 + 2x + 1$ mit $v'(x) = 6x^2 + 8x + 2$
Ableitung: $f'(x) = 10 \cdot (2x^3 + 4x^2 + 2x + 1)^1 \cdot (6x^2 + 8x + 2)$

## Tipps

- Die **Kettenregel** ist eine der wichtigsten Regeln der Analysis.
  Entscheidend bei der Anwendung der Kettenregel ist es, zu erkennen, welche Funktion die **äußere** und welche Funktion die **innere** Funktion ist und dann die **innere Ableitung** nicht zu vergessen.
  So hat z. B. die Funktion f mit $f(x) = \sin^2(x)$
  die Ableitung $f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$.
- Bei ganzrationalen Funktionen wie $f(x) = (5 - 2x)^3$ ist es geschickter, vor dem Ableiten **nicht** auszumultiplizieren, sondern direkt die **Kettenregel** anzuwenden.
  Dies ist in der Regel viel einfacher und weniger fehleranfällig.
  Aber auch hier darf die innere Ableitung nicht vergessen werden:
  $f'(x) = 3 \cdot (5 - 2x)^2 \cdot (-2)$.
- Funktionen mit Termen wie $\sin(2x)$, $\cos(x^2)$, $e^{2x+5}$ lassen sich nur mit Hilfe der Kettenregel ableiten.
- Die Kettenregel kommt oft in **Kombination** mit Produkt- oder Quotientenregel vor (vgl. Karte 32).

Um komplizierte Funktionen ableiten zu können, müssen oft die
Produktregel und die Kettenregel sowie
die Quotientenregel und die Kettenregel
**in Kombination** angewendet werden.

Entscheidend ist, bei einem vorgegebenen Funktionsterm die **Struktur** zu erkennen:
Welche Terme werden multipliziert bzw. dividiert und wo ist die Kettenregel anzuwenden (vgl. Lösungen)?

Bei gebrochenrationalen Funktionen kann man häufig den Term der Ableitungsfunktion **kürzen**.

**Tipps**

- Verwenden Sie u und v, um die Teilfunktionen zu definieren.
  Bei den Ableitungen $u'$ und $v'$ ist dann die Kettenregel zu beachten.
- Achten Sie bei negativen Faktoren besonders darauf, genügend **Klammern zu setzen**, um Vorzeichenfehler zu vermeiden.
- Nach dem Ableiten sollten Sie den Term **zusammenfassen** und gegebenenfalls **kürzen**. Dies gilt insbesondere dann, wenn höhere Ableitungen zu bestimmen sind.
- Es ist hilfreich, die Ableitungen aller wichtigen Grundfunktionen wie z. B. $\sqrt{x}$, $\frac{1}{x}$, $x^r$ usw. zu kennen.

Man unterscheidet **drei Grundaufgaben** bei Tangenten:

1. Gesucht ist die Gleichung der Tangente im **Berührpunkt $B(x_B\,|\,f(x_B))$**:
   B ist ein Punkt des Graphen von f, damit haben Tangente und Funktion diesen Punkt gemeinsam. Die Tangente t hat die Steigung $f'(x_B)$, ihre Gleichung erhält man mit der Punktsteigungsform einer Geradengleichung.

2. Gesucht ist die Gleichung einer Tangente mit der vorgegebenen **Steigung m**.
   Aus $f'(x_B) = m$ erhält man den x-Wert $x_B$ des Berührpunktes $B(x_B\,|\,f(x_B))$ und dann wie in 1. eine Gleichung von t.

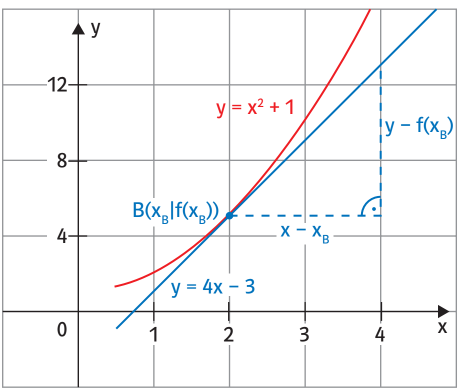
3. Gesucht ist die Gleichung einer Tangente durch den **Punkt $P(x_0\,|\,y_0)$**, der **nicht** auf dem Graphen von f liegt.
   Es ist $y - f(x_B) = f'(x_B)\cdot(x - x_B)$ eine Gleichung von t mit Berührpunkt B.
   Da $P(x_0\,|\,y_0) \in t$ ist, gilt $y_0 - f(x_B) = f'(x_B)\cdot(x_0 - x_B)$, woraus man $x_B$ und dann eine Gleichung von t bestimmt.

**Tipps**

- Da in der Analysis Gleichungen von Tangenten häufig zu bestimmen sind, sollten Sie sich eine der allgemeinen Formen einer **Tangentengleichung** merken.

  1) $f'(x_B) = \frac{y - f(x_B)}{x - x_B}$ 2) $y = f'(x_B)\cdot(x - x_B) + f(x_B)$

- Besonders wichtig für die ganze Analysis ist der Begriff der **Steigung**:
  Eine Steigung ist der **Quotient zweier Differenzen** (vgl. 1) und Fig.);
  die Differenz der **y-Werte** steht im **Zähler**.



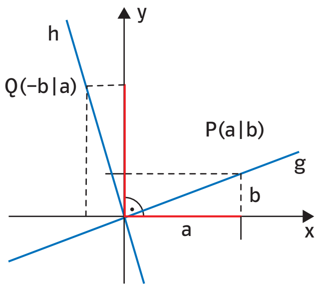
## Orthogonale Geraden

Dreht man eine Ursprungsgerade g durch P um 90° um den Ursprung, erhält man eine orthogonale Gerade h. Wenn der Punkt P(a | b) ein Punkt der Geraden g ist, liegt Q(−b | a) auf h.
Nach Definition der Steigung ergibt sich für die Gerade g:

$$m_g = \frac{b}{a}.$$

Für die Steigung von h erhält man

$$m_h = \frac{a-0}{-b-0} = -\frac{a}{b}.$$ Somit gilt $\boldsymbol{m_g \cdot m_h = -1}$.



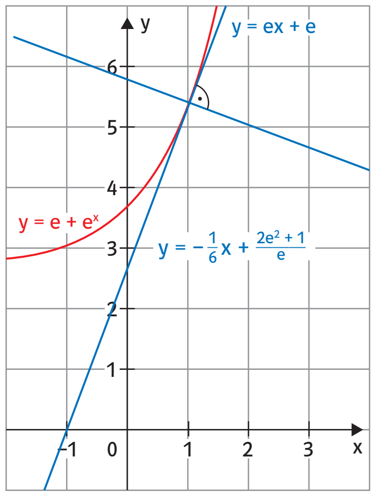

Es gilt auch umgekehrt:
Aus $m_g \cdot m_h = -1$ folgt, dass die zugehörigen Geraden orthogonal sind.

## Tangente und Normale

Bei gegebenem Funktionsterm f(x) wird oft auch nach der Normalen des Graphen in einem Punkt P gefragt. Sie verläuft orthogonal zur Tangente im Punkt $P(x_P \mid f(x_P))$.
Die **Normale** an den Graphen von f im Punkt $P(x_P \mid f(x_P))$ hat die **Steigung** $-\frac{1}{f'(x_P)}$.

## Beispiel

Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = e + e^x$.
Skizzieren Sie den Graphen von f.
Bestimmen Sie Gleichungen für die Tangente und die Normale im Punkt P(1 | f(1)).




## Lösung

$f(1) = 2e$, also ist $P(1 \mid 2e)$.
$f'(x) = e^x$, damit ist $m_t = f'(1) = e$.
Mit der Punktsteigungsform erhält man
**t: $y = ex + e$**.

Mit der Bedingung $m_t \cdot m_n = -1$ folgt für die Steigung der Normalen $m_n = -\frac{1}{e}$.

Mit der Punktsteigungsform und P(1 | 2e) folgt für die Gleichung der Normalen:

$y = -\frac{1}{e} \cdot (x-1) + 2e$ bzw.

**n: $y = -\frac{1}{e}x + \frac{2e^2+1}{e}$**.

### Berührbedingungen

Die Graphen zweier Funktionen f und g **berühren sich** in einem Punkt $B(x_0 | y_0)$, wenn sie diesen Punkt gemeinsam haben und an der Stelle $x_0$ eine **gemeinsame Tangente** besitzen, d.h. wenn gilt:

1. $\mathbf{f(x_0) = g(x_0)}$ und
2. $\mathbf{f'(x_0) = g'(x_0)}$.

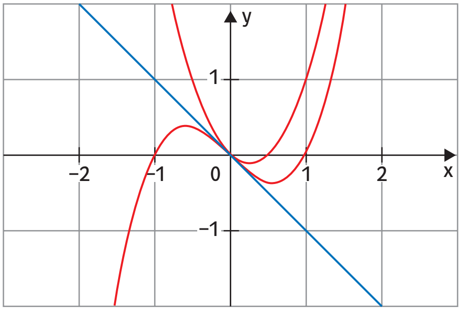


Fig. 1

Wären die beiden Tangentensteigungen im gemeinsamen Punkt B verschieden, so würden sich die Graphen der beiden Funktionen **schneiden und nicht berühren**.

### Tipps

Die Berührung zweier Graphen kann in unterschiedlichen Fragestellungen eine Rolle spielen. Hier einige Beispiele:

- Gegeben sind f und $g_a$. Gesucht sind a und die zugehörigen Berührpunkte, so dass sich die Graphen von f und $g_a$ berühren (vgl. Aufgabe).
- Bestimmen Sie eine ganzrationale Funktion f vom Grad 3 so, dass der Graph von f die x-Achse im Punkt $P(5 | 0)$ berührt (weitere Bedingungen sind notwendig).
- Zwei Kurven (Straßenstücke) sollen knickfrei verbunden werden. Dabei müssen an den „Verbindungsstellen“ ebenfalls die Berührbedingungen gelten (vgl. Fig. 2).

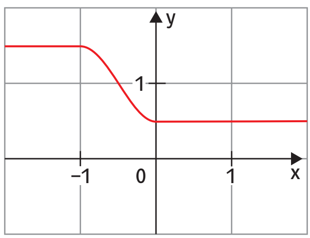


Fig. 2

Wichtig bei diesen Aufgaben:
Es müssen
die **Funktionswerte** übereinstimmen **und** die **ersten Ableitungen** übereinstimmen.

**Definition der Monotonie** (Fig. 1)

Sei $x_1 < x_2$ mit $x_1, x_2$ aus einem Intervall I.
Gilt für alle $x_1$, $x_2$ in I, das **$f(x_1) < f(x_2)$**, so Ist f in I streng **monoton steigend**.
Gilt für alle $x_1$, $x_2$ in I, das **$f(x_1) > f(x_2)$**, so Ist f in I streng **monoton fallend**.

**Monotoniesatz** (Fig. 2)

Eine Funktion f sei im Intervall I differenzierbar. Wenn für alle x aus I gilt, dass

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **$f'(x) > 0$** | bzw. | **$f'(x) < 0$,** | dann ist |
| **f streng monoton steigend** | bzw. | **f streng monoton fallend** | in I. |

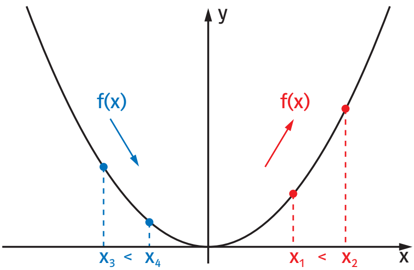


Fig. 1

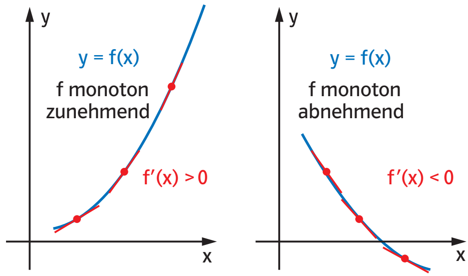


Fig. 2

**Tipps**

Intervalle der Monotonie können ermittelt werden
1) mit der **Definition der Monotonie**,
2) mit dem **Monotoniesatz**.

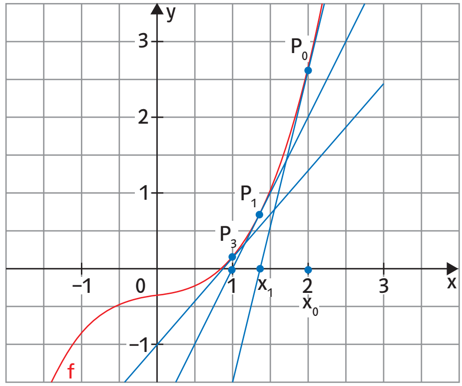
Der Nachweis mit dem **Monotoniesatz** ist in der Regel **einfacher**.
Dabei sollten Sie nicht die zugehörigen Ungleichungen betrachten, sondern folgendes Verfahren anwenden (vgl. Lösung):

- Man bestimmt **zunächst die Ableitung und dann die Nullstellen von f'** (z. B. $x_1$, $x_2$).
  Die Nullstellen sind die Grenzen der Intervalle, da dort f' ihr Vorzeichen wechseln kann.
- Nun wählt man aus jedem der Intervalle **eine Stelle aus** und bestimmt **jeweils das Vorzeichen von f'**.
  Wegen des Monotoniesatzes ist f steigend, falls f' positiv ist und fallend, falls f' negativ ist.

### Herleitung der Rekursionsvorschrift für das NEWTON-Verfahren

Mit einer Skizze sucht man sich einen Näherungswert für den Startwert $x_0$.

Aufstellen der Tangentengleichung an der Stelle $x_0$:
t: $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$.




Setzt man y = 0 und formt um, erhält man:
$f'(x_0) \cdot x = f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)$ bzw.

$$x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Setzt man $x = x_1$, so folgt: $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

Wiederholte Durchführung dieses Verfahrens führt zur allgemeinen **Rekursionsvorschrift** für das NEWTON-Verfahren:

$$\mathbf{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}}, \quad n \in \mathbb{N} \text{ mit Startwert } x_0.$$

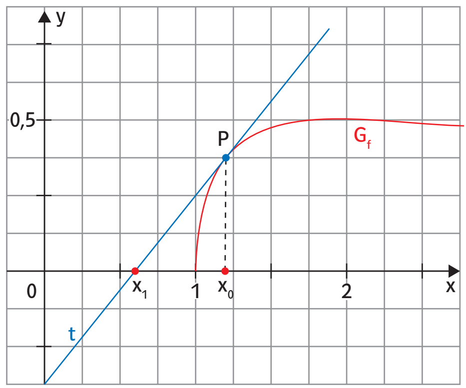
### Bemerkungen

Nicht immer führt das NEWTON-Verfahren zum Erfolg. Gründe könnten sein:

- Der Wert für $x_1$ liegt nicht in der Definitionsmenge von f.

  Beispiel: $f(x) = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x}$.

- Der Startwert $x_0$ liegt zu weit von der gesuchten Nullstelle weg, dass die „$x_n$-Werte“ gegen eine andere Nullstelle gehen oder das Verfahren gar nicht konvergiert.




### Tipps

- Verschaffen Sie sich mit einer Skizze einen **Überblick** über die ungefähre Lage der Nullstellen.
- Grenzen Sie jede Nullstelle so auf ein Intervall [a; b] ein, dass f (a) und f (b) verschiedene Vorzeichen haben. Wählen Sie dann z. B. die **Mitte des Intervalls als Startwert**.

Bei der Untersuchung einer **ganzrationalen** Funktion sind folgende Eigenschaften zu beachten, die man meist ohne Rechnung am Term erkennen kann (vgl. Karte 11):

1) Definitionsmenge: Diese ist immer $D = \mathbb{R}$; es gibt keine senkrechten Asymptoten.
2) Symmetrie: Enthält der Term **nur gerade** Hochzahlen, ist der Graph **achsensymmetrisch** zur y-Achse. Enthält der Term **nur ungerade** Hochzahlen, ist der Graph **punktsymmetrisch** zum Ursprung.
3) Verhalten für $x \to \pm\infty$: Man betrachtet die höchste Potenz n und den Koeffizienten $a_n$.
   Wenn **n gerade und $a_n > 0$** ist, strebt $f(x) \to +\infty$ für $x \to \pm\infty$;
   wenn **n gerade und $a_n < 0$** ist, strebt $f(x) \to -\infty$ für $x \to \pm\infty$;
   wenn **n ungerade und $a_n > 0$** ist, strebt $f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$;
   wenn **n ungerade und $a_n < 0$** ist, strebt $f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$ und $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$.

Weiteres Vorgehen bei der Untersuchung:
**Gemeinsame Punkte mit der x-Achse** haben die Lösungen von **$f(x) = 0$** als x-Wert.
**Schnittpunkt mit der y-Achse** hat **$f(0)$** als y-Wert.

**Extrempunkte:**
Wenn **$f'(x_E) = 0$** und **$f''(x_E) \neq 0$**, so ist $E(x_E \mid f(x_E))$ ein Extrempunkt des Graphen.
Für **$f''(x_E) < 0$** ist E ein Hochpunkt, für **$f''(x_E) > 0$** ist E ein Tiefpunkt des Graphen.

**Wendepunkte**:
Wenn **$f''(x_W) = 0$** und **$f'''(x_W) \neq 0$**, so ist $W(x_W \mid f(x_W))$ ein Wendepunkt des Graphen.

## Tipps

- Am Term ist eine **Symmetrie** sofort erkennbar.
- An den auftretenden **Potenzen** erkennt man, ob der Graph „von unten oder von oben“ kommt und „nach unten oder nach oben“ verläuft.
- Die auftretenden Gleichungen sind ganzrational.
  Wiederholen Sie also die Strategien zur Lösung einer solcher Gleichung (vgl. Karten 1 und 2).
- Ist eine Gleichung nicht exakt zu lösen, hilft das **NEWTON-Verfahren** zur Ermittlung eines Näherungswertes (vgl. Karte 37).
- Wiederholen Sie auch die Möglichkeiten zum Lösen einer Gleichung mit dem GTR (vgl. Karte 5).

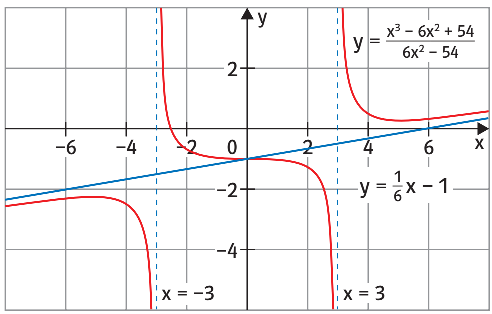
Bei einer **gebrochenrationalen** Funktion erhält man **ohne Ableitungen** (vgl. Karte 11):
1) Definitionsmenge
2) senkrechte Asymptoten
3) waagrechte Asymptote
4) Nullstellen
5) Schnittpunkt mit der y-Achse
6) Näherungskurve

**Mit Ableitungen** erhält man:
1) Extremstellen
2) Wendestellen

Bei gebrochenrationalen Funktionen kann es sein, dass zur Bestimmung einer **zweiten Ableitung** aufwendige Rechnungen durchgeführt werden müssen.
Man sollte deshalb überlegen, ob nicht die Bestimmung von Extremstellen durch eine Untersuchung auf **Vorzeichenwechsel der ersten Ableitung** einfacher ist.
Hilfreich dabei ist eine **Produktdarstellung** der ersten Ableitung.

## Tipps

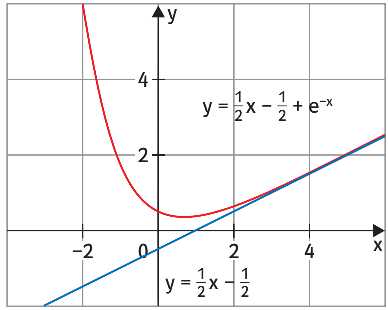
- Überprüfen Sie **vor** Berechnung der zweiten Ableitung, ob die erste Ableitung gekürzt werden kann.
- Beim Zeichnen des Graphen **zuerst die Asymptoten** einzeichnen.
- Eine senkrechte Asymptote wird nie vom Graphen geschnitten.
  Also: **Niemals** über eine senkrechte Asymptote **hinwegzeichnen**.
- Eine waagrechte oder schiefe Asymptote dagegen **kann** vom Graphen der zugehörigen Funktion geschnitten werden (vgl. Fig.).




- Hat eine gebrochenrationale Funktion nur einen Summanden im Nenner, sollte man durchdividieren:
  $f(x) = \frac{4x^3 - x^2 - 2}{2x^2} = 2x - \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$.
  Die **Ableitungen** und die **schiefe Asymptote** $\left(y = 2x - \frac{1}{2}\right)$ sind dann **einfacher** zu bestimmen.

**Exponentialfunktionen** und ihre Graphen werden auf dieselbe Weise untersucht wie **ganzrationale** Funktionen. Nur das Verhalten von $f(x)$ für $x \to +\infty$ und für $\to -\infty$ bei einer Exponentialfunktion f wird durch andere Regeln beherrscht.

Für $x \to +\infty$ strebt $e^x \to +\infty$, für $x \to -\infty$ strebt $e^x \to 0$, d.h. die x-Achse ist die Asymptote des Graphen von f mit $f(x) = e^x$ (vgl. Karte 16).




Funktionen mit einem Term wie $f(x) = a \cdot e^{bx} + c$ haben stets die Gerade mit der Gleichung **$y = c$** als waagrechte Asymptote.
Wird bei einer Funktion f eine ganzrationale zu einer Exponentialfunktion addiert, ist die ganzrationale Funktion meist **schiefe Asymptote** bzw. **Näherungskurve** von f für $x \to +\infty$ oder $x \to -\infty$ (vgl. Fig.).

Ist eine Funktion f zusammengesetzt aus dem **Produkt** einer Exponentialfunktion mit einer ganzrationalen Funktion, so lassen sich die Nullstellen von f meist leicht bestimmen.
Für das asymptotische Verhalten von f gilt:
Für $x \to +\infty$ strebt $x^n \cdot e^x \to +\infty$, für $x \to -\infty$ strebt $x^n \cdot e^x \to 0$,
d.h. die x-Achse ist die Asymptote des Graphen von f mit $f(x) = x^n \cdot e^x$.

## Tipps

- Häufig ist die Definitionsmenge $\mathbb{R}$; dann gibt es **keine** senkrechten Asymptoten.
- Beim Zeichnen des Graphen zuerst **waagrechte** bzw. **schiefe** Asymptoten einzeichnen.
- Bei Ableitungen von Exponentialfunktionen kann man oft den exponentiellen Bestandteil **ausklammern** (vgl. Lösung).

Ist die Funktion f in der Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$ gegeben, formt man sie um in die Form $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - e)) + d$. Dann ist (vgl. Karte 19)

$|a|$ die **Amplitude**, $\left|\frac{2\pi}{b}\right|$ die **Periode**, e die **Verschiebung nach rechts**, d die **Verschiebung nach oben**.

Wird bei einer Funktion f zu einer trigonometrischen Funktion eine weitere Funktion **addiert**, erhält man den Graphen durch **Ordinatenaddition** (Fig. 1).
Wird bei einer Funktion f eine trigonometrische Funktion mit einer weiteren Funktion **multipliziert**, so „steuert" diese Funktion die **Amplitude** (Fig. 2).

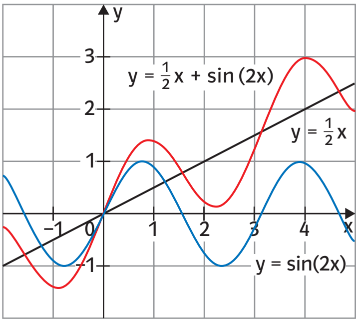


Fig. 1

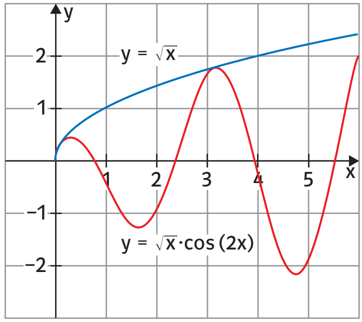


Fig. 2

**Tipps**

- Notieren Sie zuerst, in welchem **Intervall** der Graph untersucht werden soll.
  Da sich bei den auftretenden Gleichungen in der Regel unendlich viele Lösungen ergeben, ist es wichtig zu wissen, welche für die konkrete Funktionsuntersuchung gebraucht werden.
- Wiederholen Sie die Strategien zum Lösen einer trigonometrischen Gleichung (vgl. Karte 6).
- Ist eine trigonometrische Funktion nur in einem Intervall gegeben, kann z. B. an den **Intervallenden kein Wendepunkt** vorliegen, da diese für Umgebungen definiert sind.

Bei **Extremwertaufgaben** ist folgende Vorgehensweise sinnvoll:

1. **Aufstellen der Zielfunktion** Z (in der Aufgabe A), deren Extremstellen oder Extremwerte bestimmt werden sollen. $Z(u)$ darf nur die Variable u enthalten.
   Enthält der Term **mehrere** Variable, kann man diese mit Hilfe einer **Nebenbedingung** reduzieren.

2. Mit $Z'$ und $Z''$ werden die **Extremstellen $u_E$** von Z bestimmt.
   Das Vorgehen dabei ist das Gleiche, wie beim Bestimmen der Hoch- und Tiefpunkte einer Funktion f.

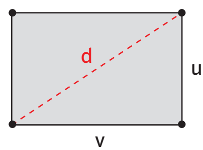
3. Da mit 2. nur Extremstellen erfasst werden, die im Innern des Definitionsintervalls von z liegen und an denen z differenzierbar ist, muss der Rand des Definitionsbereichs noch gesondert untersucht werden.
   **Randextrema** können meist dadurch ausgeschlossen werden, dass man das Verhalten von $z(u)$ am Rand des Definitionsintervalls untersucht oder/und darauf hinweist, dass die Funktion z im Definitionsintervall nur eine Extremstelle besitzt.

**Tipps**

- Komplexere Extremwertprobleme hängen meist von mehreren Größen ab, so dass eine **Nebenbedingung** notwendig ist, um die Zielfunktion nur in Abhängigkeit von einer Variablen zu haben. Außerdem ist darauf zu achten, eine **möglichst einfache Zielfunktion** zu erhalten, damit die Ableitungen und die Gleichungen nicht zu kompliziert werden.
- Bei Fragestellungen nach einer extremalen Länge treten oft **Wurzelfunktionen** auf.
  In diesem Fall kann man die quadrierte Funktion als **Ersatzfunktion** untersuchen.

**Beispiel:**

Welches Rechteck mit dem Umfang 40 hat die kürzeste Diagonale?




**Lösung:**

Die Länge der Diagonalen sei L.
Mit dem Satz des Pythagoras gilt: $L(u, v) = \sqrt{u^2 + v^2}$.
Nebenbedingung: $2u + 2v = 40$
Einsetzen von $v = 20 - u$ aus der Nebenbedingung liefert
$L(u) = \sqrt{u^2 + (20 - u)^2} = \sqrt{2u^2 - 40u + 400}$.
Da $L(u)$ positiv ist, wird $(L(u))^2$ an der gleichen Stelle extremal.
$Z(u) = 2u^2 - 40u + 400$; $Z'(u) = 4u - 40$; $Z''(u) = 4$ (Lösung immer Minimum!)

Mit $Z'(u) = 0$ erhält man $u = 10$. Damit ist auch $v = 10$.
Das gesuchte Rechteck ist also (wie erwartet) ein Quadrat.

Zur Vorgehensweise einer **Extremwertaufgaben** (vgl. Karte 42):

1. **Zielfunktion**; Reduktion auf eine Variable durch **Nebenbedingung**
   (Die Reduktion kann wie in der vorliegenden Aufgabe entfallen.)
2. Untersuchung der Zielfunktion auf **Extremwerte**
3. Untersuchung auf **Randextrema**

**Tipps**

- Erstellen Sie sich immer eine Skizze der vorliegenden Situation.
- Bezieht sich bei einer Extremwertaufgabe die Zielfunktion auf den Flächeninhalt eines Dreiecks, bedenken Sie Folgendes:
  Jedes Dreieck hat drei mögliche Grundseiten und damit drei zugehörige Höhen.
  Manchmal vereinfacht sich die Rechnung sehr, wenn man die **Grundseite** und damit die Höhe **geschickt wählt** (vgl. Lösung).
- Liegt ein Koordinatensystem zugrunde, müssen bei Streckenlängen **Vorzeichen beachtet** werden.

## Zusammenfassung der wichtigsten Bedingungen für eine Funktion f mit Graph K

- Wenn K durch den Punkt $P(x_0\,|\,y_0)$ verläuft, gilt: $f(x_0) = y_0$.
- Hat K an der Stelle $x_0$ die Steigung m, gilt: $f'(x_0) = m$.
- Besitzt K den Extrempunkt $E(x_E\,|\,y_E)$ gilt: $f(x_E) = y_E$ und $f'(x_E) = 0$.
- Besitzt K den Wendepunkt $W(x_W\,|\,y_W)$, gilt: $f(x_W) = y_W$ und $f''(x_W) = 0$.

## Vorgehen bei der Bestimmung einer ganzrationalen Funktion

► Allgemeiner Ansatz für f(x)
(z. B. für eine Funktion 3. Grades: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$)

► Formulieren der gegebenen Bedingungen mit Hilfe von f, f′ und gegebenenfalls f″

► Aufstellen eines LGS mit n + 1 Gleichungen und n + 1 Variablen für eine Funktion n-ten Grades

► Lösen des LGS und Angabe des Funktionsterms

► Kontrolle, ob die gegebenen Bedingungen erfüllt sind

## Tipps

- Nutzen Sie schon beim **Ansatz vorgegebene Bedingungen aus**.
  Soll z. B. der Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 punktsymmetrisch zum Ursprung sein, setzt man an: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x$.
  Entsprechend für Achsensymmetrie zur y-Achse.
- Eine Aussage wie „Der Graph hat in $P(1\,|\,2)$ einen Tiefpunkt“ enthält **zwei** notwendige Bedingungen: $f(1) = 2$ und $f'(1) = 0$.
- Notieren Sie zunächst alle Bedingungen in Gleichungen mit f, f′ und f″, dann erst als Gleichungen mit a, b und c usw. (vgl. Lösung).
- Zum Lösen eines LGS vgl. Karte 7.
- Vergessen Sie nicht die **Probe**, denn bei dem Verfahren werden nur notwendige Bedingungen verwendet. Es kann durchaus sein, dass keine Funktion die angegebenen Bedingungen erfüllt.

Enthält der Term einer Funktion einen **Parameter**, so spricht man von einer **Funktionenschar**.
Funktionenscharen werden untersucht wie Funktionen ohne Parameter.
Die Koordinaten der ermittelten Hoch-, Tief- und Wendepunkte bei Funktionenscharen enthalten aber in der Regel den Parameter (vgl. Lösung b)).

Neben der eigentlichen Untersuchung der Funktionenschar sind Fragestellungen möglich, die sich auf den Parameter beziehen (vgl. Aufgabenteil a)).

Im Aufgabenteil c) wird der Wert des Parameters t gesucht, für den der Umfang eines Rechtecks minimal wird. Es handelt sich also um eine **Extremwertaufgabe**.
Zur Vorgehensweise bei einer Extremwertaufgabe vgl. Karte 42.
Beachten Sie aber: Die Zielfunktion im Aufgabenteil c) hat **t als Variable** und nicht x.
Die Zielfunktion muss also **nach t abgeleitet** werden.

## Tipps

- Auch bei einer Funktionenschar wird nach der Funktionsvariablen x abgeleitet und **nicht** nach dem Parameter t. Dieser wird beim Ableiten wie eine Konstante behandelt (vgl. Lösung b)).
- Oft ist der Geltungsbereich des Parameters eingeschränkt, z. B. $t > 0$.
  Beachten Sie die Auswirkungen für alle folgenden Rechnungen.
- Bezieht sich ein Extremwertproblem auf ein **Rechteck**, achten Sie darauf, ob der **Flächeninhalt** oder der **Umfang** untersucht werden soll.

**Hinweis zum GTR:** Anstelle des Parameters t wird eine **Liste**, z. B. $L_1$ eingegeben (vgl. Fig. 1). $L_1$ enthält die Werte des Parameters, für die der Graph gezeichnet werden soll; hier $t = 0{,}2$ und $t = 0{,}5$ für die Funktion aus der Aufgabe (vgl. Fig. 2).

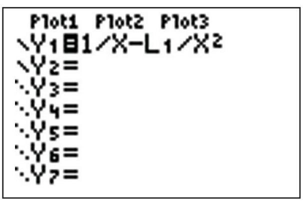


Fig. 1

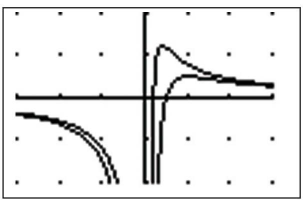


Fig. 2

## Verfahren zur Bestimmung einer Ortslinie

Gegeben ist eine Funktionenschar $f_t$.
Gesucht ist eine Gleichung der Ortslinie, auf der z. B. die Extrempunkte aller Graphen von $f_t$ liegen.

1. Schritt: Man bestimmt die **Koordinaten** eines Hochpunktes in **Abhängigkeit vom Parameter t**.

2. Schritt: Aus den Termen für die Koordinaten wird der **Parameter t eliminiert**.

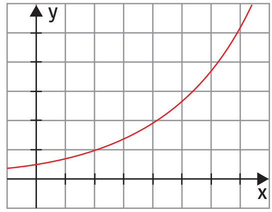
## Tipps

- Auch bei einer Funktion mit einem Parameter t wird nach der Funktionsvariablen x abgeleitet und **nicht** nach dem Parameter t. Dieser wird beim Ableiten wie eine Konstante behandelt.
  So hat z. B. die Funktion $f_t$ mit $f\,t(x) = 3t^2x^3 + tx + t^2$ die Ableitung $f_t'(x) = 9t^2x^2 + t$.
- Achten Sie bei Fragestellungen zu einer Ortslinie genau auf die Formulierung. Bei einer Frage wie „**Auf welcher Linie** liegen die Hochpunkte aller Graphen $K_t$?“ muss der Definitionsbereich **nicht** eingeschränkt werden.
  Dies ist anders bei einer Frage wie „**Welche Linie bilden** die Wendepunkte der Graphen $K_t$ für alle zugelassenen Werte von t?“.

## Wissen über die wichtigsten Wachstumsformen

f(x) gibt z. B. den **Bestand einer Population**, die Intensität einer Größe oder die Temperatur einer Flüssigkeit an. Die Variable x entspricht meistens der Zeit und wird dann oft mit t bezeichnet. Zu jeder Wachstumsform gehört eine bestimmte Differenzialgleichung, die den Zusammenhang von Bestand f(x) und seiner momentanen Änderungsrate f′(x) beschreibt.

### Exponentielles (natürliches) Wachstum

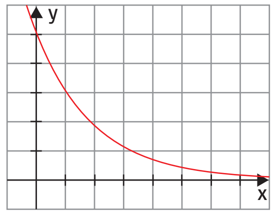


**Beispiel:** *Vermehrung von Bakterien*

Bestandsfunktion: $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ mit $k > 0$
a: Anfangsbestand

Differenzialgleichung:
$f'(x) = k \cdot f(x)$ mit Wachstumskonstante k

### Exponentielle Abnahme (Zerfall)

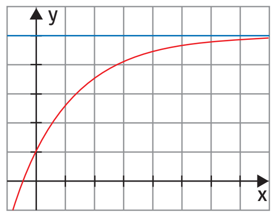


**Beispiel:** *Radioaktiver Zerfall*

Zerfallsfunktion: $f(x) = a \cdot e^{-kx}$ mit $k > 0$
a: Anfangsbestand f(0)

Differenzialgleichung:
$f'(x) = -k \cdot f(x)$ mit Zerfallskonstante k

### Beschränktes Wachstum

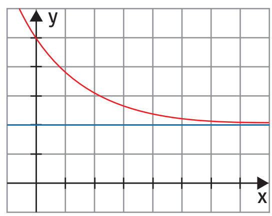


**Beispiel:** *Wachstum von Pflanzen*

Bestandsfunktion: $f(x) = G - c \cdot e^{-kx}$ mit $k > 0$
mit Sättigungsgrenze G.

Differenzialgleichung:
$f'(x) = k \cdot (G - f(x))$ mit Wachstumskonstante k

### Beschränkte Abnahme

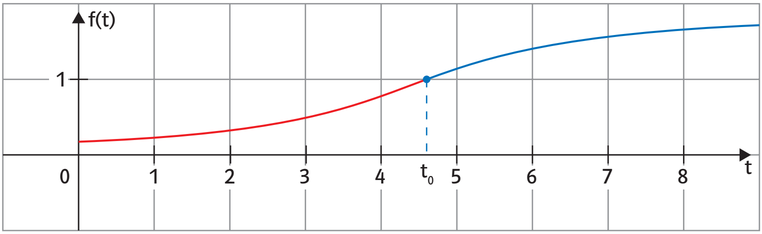


**Beispiel:** *Abkühlung einer warmen Flüssigkeit in kälterer Umgebung*

Bestandsfunktion: $f(x) = G + c \cdot e^{-kx}$ mit $k > 0$
mit Grenze G.

Differenzialgleichung:
$f'(x) = k \cdot (G - f(x))$ mit Wachstumskonstante k

Das Wachstum einer Pflanze kann in der Regel weder durch exponentielles noch durch beschränktes Wachstum allein modelliert werden (vgl. Karte 47). Deshalb setzt man in einer ersten Näherung Funktionen zusammen, für die in einem ersten Intervall mit $t \leq t_0$ exponentielles und für $t > t_0$ dann beschränktes Wachstum gilt (vgl. Aufgabe). Dabei achtet man darauf, dass die Graphen ohne Sprung ineinander übergehen (vgl. Fig.).




Damit die Graphen an der Stelle $t_0$ auch **„ohne Knick“** ineinander übergehen, muss man auch noch die Steigungen an der Stelle $t_0$ betrachten. Eine bessere Möglichkeit ergibt sich, wenn man einen **Funktionstyp** wählt, der für das ganze Intervall gilt (vgl. Karte 49).

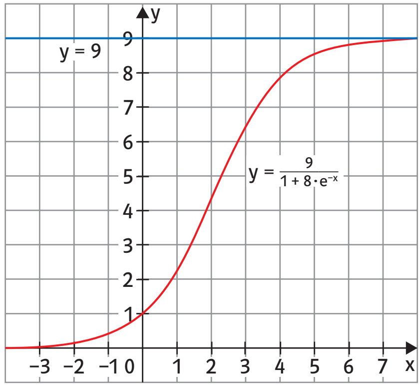
## Tipps

- Die in Karte 47 angegebenen wichtigsten Wachstumsformen einschließlich der zugehörigen Gleichungen und Graphen sollten Sie auswendig kennen.
- Dem Funktionswert zur Zeit $t = 0$ entspricht im Modell der **Anfangsbestand**.
- Fragen nach langfristigem Verhalten bei Wachstumsprozessen beinhalten mathematisch die Frage nach einer **Asymptote**.
  Man untersucht also das Verhalten der Funktion für $t \to \infty$.
  Bedenken Sie aber: Wachstumsprozesse sind in der Regel **endliche Prozesse**. Der durch Grenzwertüberlegungen ermittelte Wert wird in der Praxis weit **eher angenommen, als im Modell berechnet**.

Funktionen mit einem Term der Form

$f(x) = \frac{G}{1 + c \cdot e^{-k \cdot x}}$ mit $G > 0$; $c > 0$; $k > 0$

haben Graphen mit einem S-förmigen Verlauf (vgl. Fig.). Charakteristisch für die S-Form ist, dass der Graph **zunächst ganz langsam ansteigt, der Anstieg dann zunimmt und allmählich wieder abnimmt**. Deshalb werden Funktionen der angegebenen Form häufig für die Modellierung von Wachstumsprozessen verwendet.




Man kann die Ableitung

$f'(x) = \frac{G \cdot c \cdot k \cdot e^{-k \cdot x}}{(1 + c \cdot e^{-k \cdot x})^2}$

mit Hilfe der Funktion $f(x)$ ausdrücken: $f'(x) = \frac{k}{G} \cdot f(x) \cdot [G - f(x)]$.

Dies ist die sogenannte **Differenzialgleichung eines „logistischen Wachstums“**, bei dem die Änderung eines Bestandes sowohl dem augenblicklichen Bestand als auch dem bis zur Grenze G noch fehlenden Restbestand $G - f(x)$ proportional ist.

## Tipps

- In Anwendungssituationen wird oft nach der **„größten Wachstumsgeschwindigkeit“** gefragt. Da die „Geschwindigkeit“ durch die Änderungsrate beschrieben wird, muss man diese auf eine **Maximalstelle** untersuchen (vgl. auch Karte 48).
- Bei komplizierten Funktionen kann der Aufwand für die dritte Ableitung groß sein. In einem solchen Fall sollten Sie als hinreichende Bedingung einen **Vorzeichenwechsel** der zweiten Ableitung nachweisen (vgl. Lösung). Hierzu ist eine **Produktdarstellung** der zweiten Ableitung hilfreich.

Integrieren ist das umgekehrte Vorgehen von Differenzieren (Ableiten). Sucht man eine Stammfunktion F zu einer vorgegebenen Grundfunktion f, so ist die Grundfunktion die Ableitung der Stammfunktion. Da konstante Funktionen beim Ableiten null werden, unterscheiden sich zwei Stammfunktionen zur gleichen Grundfunktion um höchstens eine additive Konstante.

### Summen- und Faktorregel für Stammfunktionen („Linearität des Integrals")

Da beim Ableiten die Summen- und Faktorregel gelten (vgl. Karte 29), gelten diese auch beim Bilden einer Stammfunktion (Probe!).
Zusammengesetzte Funktionen werden also stückweise integriert.
Lässt sich f schreiben als

$$f(x) = c \cdot g(x) + h(x)$$

und sind F, G und H Stammfunktionen von f, g und h, so gilt

$$F(x) = c \cdot G(x) + H(x).$$

Für Potenzfunktionen gilt: Ist $f(x) = x^z$; $z \neq -1$, so ist F mit $F(x) = \frac{1}{z+1}x^{z+1}$ eine Stammfunktion von f.
Diese Formel gilt auch für rationale Exponenten.

**Ergänzung:** $z = -1$:
Da die natürliche Logarithmusfunktion f mit $f(x) = \ln(x)$ $(x > 0)$ die Ableitungsfunktion f′ mit $f'(x) = \frac{1}{x}$ besitzt, ist eine Stammfunktion von $f(x) = x^{-1}$ die Funktion $F(x) = \ln|x|$ $(x \neq 0)$.

### Tipps zur Vermeidung von Fehlern

- Schreiben Sie Potenzfunktionen in Bruchschreibweise zunächst mit **negativen Hochzahlen**, Wurzelfunktionen mit **Brüchen** als Hochzahlen.
- Berechnen Sie zunächst die neue Hochzahl, dann den neuen Faktor: $\frac{1}{\text{neue Hochzahl}}$. Wandeln Sie nun die Doppelbrüche um.
- Beachten Sie: $-3$ um 1 erhöht ist $-2$; $-\frac{1}{2}$ um 1 erhöht ist $\frac{1}{2}$.
- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten!

**Beispiele:**

a) $f(x) = \frac{6}{x^3} = 6 \cdot x^{-3}$

$$F(x) = 6 \cdot \frac{1}{-3+1} \cdot x^{-3+1} = \frac{6}{-2} \cdot x^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

b) $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}} = 2 \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

$$F(x) = 2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \sqrt{x}$$

Integrieren ist das umgekehrte Vorgehen von Differenzieren (Ableiten) (vgl. Karte 50).
Bei trigonometrischen Funktionen gehen beim Ableiten ggf. bis auf Vorzeichen Sinus- und Kosinusfunktion ineinander über, also gilt dies auch (bis auf Vorzeichen) beim Bilden einer Stammfunktion einer trigonometrischen Funktion. Beim viermaligen Ableiten oder „Aufleiten" gelangt man wieder zur Ausgangsfunktion:

$f(x) = \sin(x)$, $\quad F(x) = -\cos(x)$;

$g(x) = \cos(x)$, $\quad G(x) = \sin(x)$.

**Lineare Substitution**

Da beim Ableiten die Kettenregel gilt (vgl. Karte 31) und lineare Funktionen konstante Ableitungen haben, kann man eine Funktion, die mit einer linearen Funktion verkettet ist, ohne größere Mühe integrieren. Ist

$\mathbf{f(x) = g(mx + c)}$

und sind F und G Stammfunktionen von f und g, so gilt

$\mathbf{F(x) = \frac{1}{m} G(mx + c)}$.

(Probe: $f(x) = F'(x) = \left(\frac{1}{m} G(mx + c)\right)' \underset{\text{Faktorregel}}{=} \frac{1}{m} G'(mx + c) \underset{\text{Kettenregel}}{=} \frac{m}{m} g(mx + c) = g(mx + c) = f(x)$)

**Tipps zur Vermeidung von Fehlern**

- Eine der wichtigsten Regeln beim Ableiten ist die **Kettenregel**.
- Beachten Sie also die Auswirkungen der Kettenregel beim „Aufleiten":
  Bei linearer Substitution ergibt sich ein Faktor, den man mit „1 durch innere Ableitung" beschreiben kann.
- Überprüfen Sie Ihr Ergebnis durch Ableiten!

**Weitere Beispiele zur linearen Substitution:**

a) $f(x) = \frac{3}{(2x-1)^4} = 3 \cdot (2x-1)^{-4}$ mit $m = 2$ und $c = -1$:

$F(x) = 3 \cdot \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2x-1)^{-3} = \frac{-1}{2(2x-1)^3}$

b) $f(x) = \frac{3}{2x-1} = 3 \cdot (2x-1)^{-1}$ mit $m = 2$ und $c = -1$ und $z = -1$ (vgl. Karte 50)

$F(x) = 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln|2x-1| = \frac{3}{2} \cdot \ln|2x-1|$

Integrieren ist das umgekehrte Vorgehen von Differenzieren (Ableiten) (vgl. Karte 50).
Die Exponentialfunktion zur Basis e stimmt mit ihrer Ableitungsfunktion überein (vgl. Karte 50). Daher stimmt sie auch mit einer Stammfunktion überein.

**Rechenregeln beim Rechnen mit Exponentialfunktionen:**

Potenzgesetze
1. $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$
2. $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
3. $e^{x \cdot y} = (e^x)^y$

Logarithmengesetze ($x > 0$; $y > 0$)
4. $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$
5. $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
6. $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$

$e^{\ln(x)} = x$

**Tipps**

- Vergessen Sie bei der Bildung einer konkreten Stammfunktion zu einer Grundfunktion nicht die **additive Konstante**.
- Die Bestimmung der Konstante erfolgt aus einer **Zusatzbedingung**, die aus der Aufgabenstellung zu entnehmen ist.
- Zur Berechnung eines **bestimmten Integrals** kommt es nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung **nicht auf die additive Konstante** an.

**Beispiel:**

$$\int_1^4 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^4 = \left[\frac{1}{3}x^3 + 2\right]_1^4 = \left(\frac{1}{3}4^3 + 2\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 + 2\right) = \frac{64}{3} + 2 - \frac{1}{3} - 2 = 21$$

Wenn $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in [a; b]$ ist, so ergibt sich der Flächeninhalt unterhalb des Graphen durch (Fig. 1):

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Wenn $f(x) \leqq 0$ für alle $x \in [a; b]$ ist, dann gilt:

$$A = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|.$$

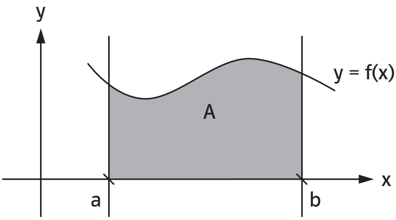


Fig. 1

**Tipps**

- Auch wenn es in der Aufgabe nicht verlangt ist, sollten Sie **stets eine Skizze erstellen**, um festzustellen, ob die Fläche **oberhalb oder unterhalb der x-Achse** liegt.
- Je nach Lage der Fläche ist die x-Achse der Graph von f bzw. von g.
  Der Inhalt einer Fläche ist **immer positiv**.
  Bei richtiger Anwendung der Formel
  $A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$ ist dies erfüllt.
- Sie können das Ergebnis Ihrer Rechnungen **mit dem GTR überprüfen** (vgl. Fig. 2 und Karte 54).

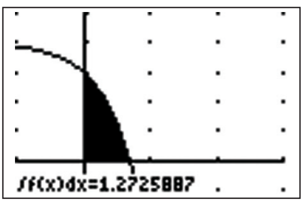


Fig. 2

Wenn $f(x) \geqq g(x)$ für alle $x \in [a;\, b]$ ist, so ergibt sich der Flächeninhalt zwischen den beiden Graphen durch (Fig. 1):

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx = F(b) - F(a) - (G(b) - G(a)).$$

Wenn die Graphen sich im Intervall $[a;\, b]$ schneiden (Fig. 2), gilt teilweise $f(x) \geqq g(x)$ und teilweise $g(x) \geqq f(x)$.

$$A = \int_a^z (f(x) - g(x))\,dx + \int_z^b (g(x) - f(x))\,dx$$

oder einfacher, wenn ein GTR zur Verfügung steht: $A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx$.

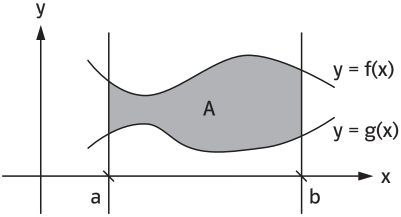


Fig. 1

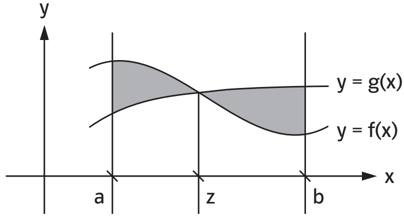


Fig. 2

**Tipps**

- Auch wenn es in der Aufgabe nicht verlangt ist, sollten Sie stets eine **Skizze** erstellen, um die gegenseitige Lage der Graphen $K_f$ und $K_g$ festzustellen.
- Die Skizze hilft außerdem, die **Anzahl der Schnittpunkte** im vorgegebenen Intervall zu überblicken.
- Achten Sie bei der Berechnung der Inhalte von Teilflächen darauf, ob **$K_f$ oberhalb oder unterhalb von $K_g$** liegt.
- Vereinfachen Sie den Integranden bevor Sie integrieren.
- Notieren Sie den Term beim Einsetzen der oberen und der unteren Grenze zunächst in der Form $(\ldots) - (\ldots)$.
- Sie können Ihre Rechnungen mit dem GTR überprüfen (vgl. Fig. 3 und Fig. 4).

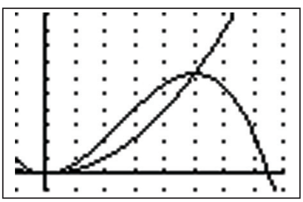


Fig. 3

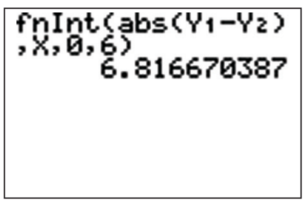
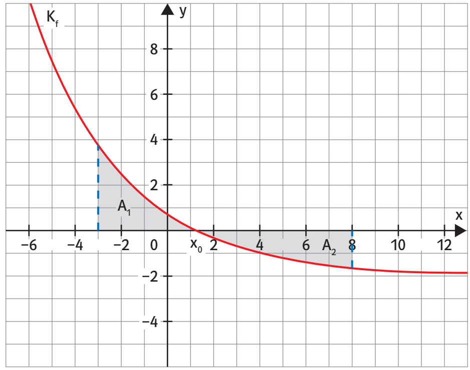


Fig. 4

Das Integral einer Funktion f ist genau dann negativ, wenn der Graph von f unterhalb der x-Achse verläuft. Es ist positiv, wenn der Graph oberhalb der x-Achse verläuft.
Man spricht dann auch anstelle des Integrals vom **orientierten Flächeninhalt**:
Das Integral setzt sich aus mehreren Flächen zusammen, die ggf. entsprechend addiert bzw. subtrahiert werden müssen.




**Beispiel:**

$$\int_{-3}^{8} f(x)\,dx = A_1 - A_2 \quad \text{(vgl. Fig.)}$$

wobei $A_1 = \int_{-3}^{x_0} f(x)\,dx$ und $A_2 = -\int_{x_0}^{8} f(x)\,dx$.

Zusammenfassung:
- **Flächeninhalte** sind stets **positiv**.
- **Integrale können auch negativ** sein.

## Tipps

- Ist in der Aufgabenstellung nach einem **Integral** gefragt, können Sie einfach „drauflos“ integrieren. Die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse sowie die Lage des Graphen (oberhalb oder unterhalb der x-Achse) sind dann unwichtig.
- Ist in der Aufgabenstellung nach **Flächeninhalten** gefragt, sollten Sie stets eine **Skizze** erstellen, um die Schnittpunkte des Graphen mit der x-Achse abschätzen zu können. Beachten Sie dann für die Flächenberechnung durch Integration die Vorzeichen.

- Die momentane Änderungsrate einer Funktion f an der Stelle $x_0$ ist die Ableitung $f'(x_0)$.
- Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung kann f aus f′ durch

  $$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\,dt$$

  ermittelt werden.
- Hat also eine Größe F die Änderungsgrate f, so gibt $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ die Änderung $F(x) - F(x_0)$ der Größe F zwischen $x_0$ und x an.

**Typische Beispiele für den Zusammenhang zwischen Änderungsrate und Bestand**

| **Gesamtänderung der Größe** | | **Momentane Änderungsrate der Größe** |
|---|---|---|
| Weg s in $[t_1; t_2]$ | $s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt$ | Geschwindigkeit $v(t)$ |
| Geschwindigkeit v in $[t_1; t_2]$ | $v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)\,dt$ | Beschleunigung $a(t)$ |
| Längenwachstum in $[t_1; t_2]$ | $L = \int_{t_1}^{t_2} w(t)\,dt$ | Wachstumsgeschwindigkeit $w(t)$ |
| Schadstoffausstoß E in $[t_1; t_2]$ | $E = \int_{t_1}^{t_2} e(t)\,dt$ | Momentaner Schadstoffausstoß $e(t)$ |
| Durchflussmenge D in $[t_1; t_2]$ | $D = \int_{t_1}^{t_2} d(t)\,dt$ | Momentane Durchflussmenge $d(t)$ |
| Arbeit W in $[s_1; s_2]$ | $W = \int_{s_1}^{s_2} F(s)\,ds$ | Kraft (entlang eines Wegs) $F(s)$ |

Durch die Tabelle sind Funktionswerte einer Änderungsrate gegeben.
Um aus einer Tabelle mit vorgegebenen Werten einen **Term** für die zugehörige Funktion zu gewinnen, geht man wie folgt vor:

1) Man notiert einen Ansatz. Im vorliegenden Fall ist der **Funktionstyp vorgegeben**.
   Ist dies nicht der Fall, veranschaulicht man sich die Werte der Tabelle in einem Koordinatensystem und **wählt einen angemessenen Funktionstyp**.

2) Um die im Ansatz auftretenden Koeffizienten zu bestimmen, kann man
   a) **Punktproben** durchführen und erhält ein LGS
   b) eine **Regression** durchführen, wenn ein GTR zur Verfügung steht.

Die Gesamtmenge ausgetretenen Wassers ergibt sich **aus der Änderungsrate als Integral** (vgl. Karte 56).

**Tipps**

- Beachten Sie:
  Bei a) ist ein Term für eine Änderungsrate gesucht.
  Im Ansatz kann man für eine Rate auch f(t) statt f′(t) schreiben.
  Insbesondere bei **Anwendungen** sollten Sie sich aber immer die **inhaltliche Bedeutung** einer Funktion klar machen.
  Beschreibt z. B. eine Funktion den **Bestand** einer Population oder die **Änderungsrate** der Population.
- Steht ein GTR zur Verfügung, ist eine **Regression** vorzuziehen (vgl. Fig. 1, Fig. 2, Fig. 3).
  Im Unterschied zu dem Verfahren mit Punktproben werden bei einer Regression alle Wertepaare verwendet. Daher die leicht unterschiedlichen Ergebnisse.

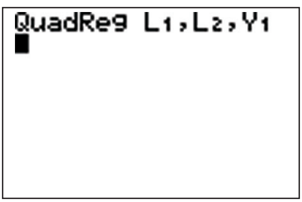


Fig. 1

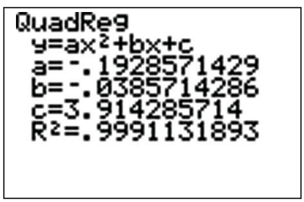


Fig. 2

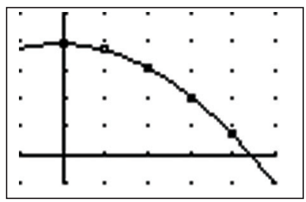


Fig. 3

Ist f: $t \mapsto f(t)$ eine in einem Intervall stetige Funktion und ist a ein Wert aus diesem Intervall,

so nennt man die Funktion $I_a$ mit $I_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ die **Integralfunktion von f zur Grenze a**.

Es gilt: $I_a'(x) = f(x)$, d.h., die **Funktion $I_a$ ist eine Stammfunktion von f**.

**Tipps**

- Da $I_a$ eine Stammfunktion von f ist, sollten Sie zur Bestimmung von $I_a(x)$ folgende Schritte durchführen:
  1) Stammfunktion von f bestimmen; Integrationskonstante c.
  2) Aus der Bedingung $I_a(a) = 0$ ergibt sich eine Gleichung für c.
  3) Angabe von $I_a(x)$.
- Sie können das Ergebnis Ihrer Rechnungen mit dem GTR überprüfen (vgl. Fig. 1 und Fig. 2).

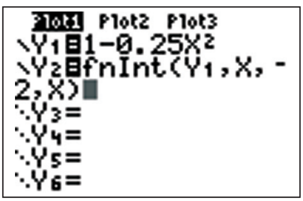


Fig. 1

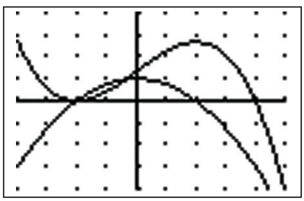


Fig. 2

Das arithmetische Mittel („der Durchschnitt“) $\overline{m}$ für endlich viele Werte $x_1, \ldots, x_n$ ist definiert durch

$$\overline{m} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

Für *unendlich* viele nahe beieinanderliegende Werte ergibt sich dadurch folgende sinnvolle Definition:

Für eine auf einem Intervall [a; b] stetige Funktion f heißt

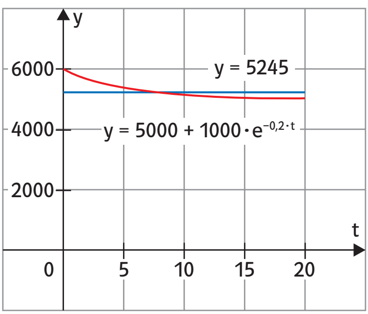
$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

der **Mittelwert** der Funktionswerte von f auf [a; b].

**Tipp**

Den Mittelwert einer Funktion kann man wie folgt **interpretieren**:
Es sei $\overline{m}$ der errechnete Mittelwert.
Dann entspricht dem Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f im Intervall [a; b] der Flächeninhalt des Rechtecks mit den Seitenlängen $b - a$ und $\overline{m}$.

Hiermit können Sie also Ihre Rechnung **kontrollieren**.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f und zeichnen Sie zusätzlich die Gerade mit der Gleichung $y = \overline{m}$ ein. Vergleichen Sie näherungsweise die Flächeninhalte.



Ist die Funktion f auf dem Intervall [a; b] stetig, so entsteht bei Rotation der Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse über [a; b] ein Körper mit dem Volumen

$$\mathbf{V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx}.$$

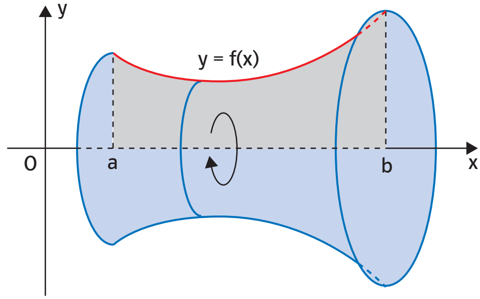


Fig. 1

Die Idee bei der Herleitung der Formel ist, dass der entstandene Rotationskörper in unendlich viele kleine Teilzylinder zerlegt wird.
Die Grundfläche des Zylinders ist $G = \pi \cdot r^2$, wobei $r = f(x)$ ist.
Die Höhe eines Zylinders ist das Differenzial $h = dx$ (es hat eine unendlich kleine Länge).
Das Volumen eines Teilzylinders ist $dV = G \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot f(x)^2 \cdot dx$.

Das Gesamtvolumen des Rotationskörpers erhält man durch Summieren (d.h. Integrieren) aller Teilzylinder.

## Hinweis zur Vermeidung eines Fehlers

Ist die Funktion f als **Summe** oder **Differenz** zweier Funktionen gegeben, so vergessen Sie nicht, beim Berechnen des Rotationsvolumens die **Binomischen Formeln** anzuwenden!

**Beispiel:**

$$V = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2\,dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4)\,dx$$

Aber:
Soll das Volumen eines Hohlkörpers bestimmt werden (vgl. Fig. 2), dann gilt:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,dx - \pi \int_a^b g^2(x)\,dx$$

$$= \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x))\,dx\,.$$

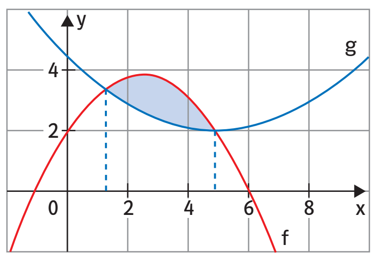


Fig. 2

**Integration über ein nach links oder rechts unbeschränktes Intervall**

Ist die Funktion f auf dem Intervall [a; +∞) stetig und existiert der Grenzwert

$\lim\limits_{z \to +\infty} \int\limits_a^z f(x)\,dx$, so heißt dieser Grenzwert das **uneigentliche Integral** von f über dem Intervall [a; +∞).

Entsprechend kann man das uneigentliche Integral von f über (−∞; b] definieren.

Man schreibt auch

$$\lim\limits_{z \to +\infty} \int\limits_a^z f(x)\,dx = \int\limits_a^{\infty} f(x)\,dx\,.$$

**Merke:**

- Nach **rechts oder links** ins Unendliche reichende Flächen können einen **endlichen oder unendlichen** Inhalt haben.
- Eine Einzelfallprüfung durch **Grenzwertbetrachtung des Integrals** ist notwendig.

**Tipps**

- Sie sollten vor der Rechnung immer den Graphen skizzieren und die zu untersuchende Fläche markieren.
- Beachten Sie, dass der Grenzwert nach Definition eine (reelle) Zahl ist. Schreiben Sie hinter dem Limeszeichen nur dann ein Gleichheitszeichen, wenn der Wert des zu berechnenden Terms eine Zahl (und nicht unendlich!) ist.
- Verwenden Sie daher bei Grenzwertbetrachtungen stets zunächst den „geht gegen“ Pfeil →.

**Integration über ein Intervall, an dessen Rand der Integrand nicht definiert ist**

Ist die Funktion f auf dem Intervall (a; b] stetig und existiert der Grenzwert

$\lim\limits_{z \to a} \int_z^b f(x)\,dx$, so heißt dieser Grenzwert das **uneigentliche Integral** von f über dem Intervall (a; b].

Entsprechend kann man das uneigentliche Integral von f über [a; b) definieren: $\lim\limits_{z \to b} \int_a^z f(x)\,dx$.

Man schreibt auch

$$\lim_{z \to a} \int_z^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad \text{bzw.} \quad \lim_{z \to b} \int_a^z f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

**Merke:**

- Nach **oben oder unten** ins Unendliche reichende Flächen können einen **endlichen** oder **unendlichen Inhalt** haben.
- Eine Einzelfallprüfung durch **Grenzwertbetrachtung** des Integrals ist notwendig.

**Tipps**

- Sie sollten sich vor der Rechnung immer den Graphen skizzieren und die zu untersuchende Fläche markieren.
- Beachten Sie, dass der Grenzwert nach Definition eine (reelle) Zahl ist. Schreiben Sie hinter dem Limeszeichen nur dann ein Gleichheitszeichen, wenn der Wert des zu berechnenden Terms eine Zahl (und nicht unendlich!) ist (vgl. Karte 61).
- Verwenden Sie daher bei Grenzwertbetrachtungen stets zunächst den „geht gegen“ Pfeil →.

Bei der Herleitung der Formel wird der Graph der Funktion vor der Integration näherungsweise durch eine Parabel beschrieben.

Man bestimmt die Gleichung der Parabel mit Hilfe der beiden Randpunkte $(a\,|\,f(a))$ und $(b\,|\,f(b))$ sowie einem Punkt zwischen den beiden Randpunkten, dessen x-Wert der Mittelwert von a und b ist und der vierfach „gewichtet“ wird. Der Flächeninhalt zwischen Parabel und x-Achse ist dann näherungsweise so groß wie der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse.

Man erhält folgende Formel:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a) + 4\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

KEPLER ging ursprünglich von einem Fass aus, von dem drei Querschnittsflächen bekannt sind und dessen Volumen bestimmt werden sollte. Er gewichtete die mittlere Fläche vierfach und erhielt so eine gute Näherung für das Volumen des Fasses. Daher der Name **„Fassregel“**.

### Tipps

Die KEPLERsche Fassregel ist eine Formel zur **näherungsweisen Berechnung eines Integrals**. Sie ist also nicht nur bei Flächenberechnungen anwendbar, sondern immer dann von Nutzen, wenn eine **Stammfunktion** nicht oder nur mühsam bestimmt werden kann.

Bei der praktischen Durchführung sollten Sie **schrittweise** vorgehen:

- Notieren Sie a und b sowie den Mittelwert $\frac{a+b}{2}$.
- Berechnen Sie die zugehörigen Funktionswerte.
- Setzen Sie die ermittelten Werte an die richtige Stelle in der Formel ein.

### Punkte und Vektoren im Koordinatensystem

Aus den **Punkten** $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ erhält man den **Vektor** $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix}$.

Die Zahlen $b_1 - a_1$, $b_2 - a_2$ und $b_3 - a_3$ heißen **Koordinaten** des Vektors $\overrightarrow{AB}$ (vgl. Fig. 1).

Ist O der Koordinatenursprung und $A(a_1|a_2|a_3)$ ein Punkt, so heißt der Vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} a_1 - 0 \\ a_2 - 0 \\ a_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ **Ortsvektor** von A.

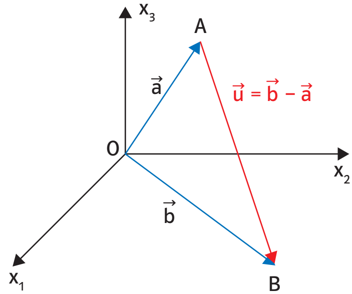


Fig. 1

### Betrag eines Vektors

Der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ hat den **Betrag** $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

### Einheitsvektor

Ein Vektor mit dem Betrag 1 nennt man **Einheitsvektor**.
Aus einem Vektor $\vec{u}$ erhält man den Einheitsvektor $\vec{u_0}$, indem man den Vektor $\vec{u}$ mit $\frac{1}{|\vec{u}|}$ multipliziert: $\vec{u_0} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$.

### Hinweise und Tipps

- Zu Punkten $A(a_1|a_2|a_3)$ und $B(b_1|b_2|b_3)$ erhält man **direkt** die zugehörigen **Ortsvektoren**:
  $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$; $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.
  Den Vektor $\overrightarrow{AB}$ dagegen erhält man als **Differenz** der Ortsvektoren: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$.
  Beachten Sie bei allen Aufgaben zur Analytischen Geometrie diesen Unterschied.

- Vektoren haben einen **Betrag**, die zugehörige Strecke zwischen den Punkten A und B hat eine **Länge**.

- **Einheitsvektoren** benötigt man, wenn z. B. auf einer Geraden g ein Punkt Q gesucht ist, der von einem gegebenen Punkt P auf g einen vorgegebenen Abstand d hat (vgl. Fig. 2 und Karte 95).

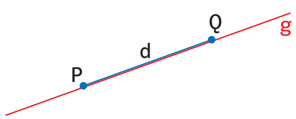


Fig. 2

## Addition und Subtraktion von Vektoren

Mit $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ gilt: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}$.

## Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl

Mit $r \in \mathbb{R}$ und $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ gilt: $r \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} r \cdot a_1 \\ r \cdot a_2 \\ r \cdot a_3 \end{pmatrix}$.

## Parallelität von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ nennt man **parallel**, wenn es eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ gibt, so dass gilt: $\vec{a} = r \cdot \vec{b}$.

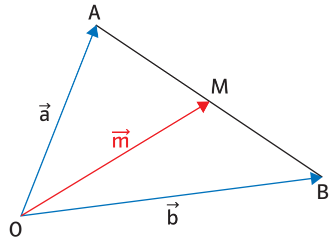


Fig. 1

## Mittelpunkt einer Strecke

Den Mittelpunkt M einer Strecke mit den Endpunkten A und B kann man vektoriell berechnen, denn für den Ortsvektor von M gilt (vgl. Fig. 1):

$\vec{m} = \vec{a} + \frac{1}{2}\left(-\vec{a} + \vec{b}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$.

## Hinweise und Tipps

Für den **Mittelpunkt** M der Strecke mit den Endpunkten A (1 | 0) und B (5 | 0) gilt (vgl. Fig. 2):

$M\left(\frac{1}{2}(1 + 5) \,|\, \frac{1}{2}(0 + 0)\right) = M(3 \,|\, 0)$ .

Dies gilt allgemein:

Für den **Mittelpunkt** M einer Strecke mit den Endpunkten $A(a_1 \,|\, a_2 \,|\, a_3)$ und $B(b_1 \,|\, b_2 \,|\, b_3)$ gilt:

$M\left(\frac{1}{2}(a_1 + b_1) \,|\, \frac{1}{2}(a_2 + b_2) \,|\, \frac{1}{2}(a_3 + b_3)\right)$ .

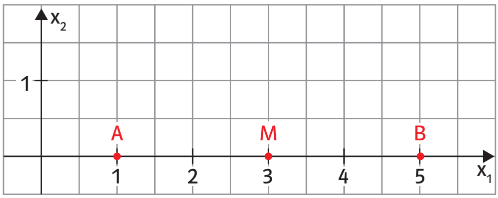


Fig. 2

Die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke werden oft benötigt. Deshalb sollte man sich merken: Man erhält die Koordinaten des Mittelpunktes einer Strecke, indem man jeweils die Koordinaten der Endpunkte addiert und dann halbiert (vgl. Karte 10).

Einen Ausdruck wie $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c}$ nennt man **Linearkombination** der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind genau dann **linear unabhängig**, wenn die Gleichung
$r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} = \vec{0}$ (1)
nur die Lösung $r = 0$; $s = 0$; $t = 0$ besitzt.
Die zu untersuchende Gleichung (1) ist äquivalent zu einem LGS, das man mit dem GAUSS-Verfahren lösen kann.

**Hinweise zum Lösen eines LGS** (vgl. Karten 7 und 8)**:**

1) Das LGS wird auf **Stufenform** gebracht.
2) Aus der Stufenform kann die Lösung ermittelt werden, indem man die Stufen **von unten nach oben „hochrechnet“**.
3) **„Ordnung halten“** beim Rechnen; aus den **ersten drei** Gleichungen werden die **nächsten drei**, usw.

**Hinweis zum GTR-Einsatz**

Bei Aufgabe a) erhält man die Matrix

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -2 & -8 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ und mit dem Befehl *rref* die reduzierte Stufenform $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Man liest ab: $t = 0$; $s = 0$; $r = 0$.

**Wie erkennt man am LGS, ob drei Vektoren linear abhängig oder unabhängig sind?**

**Linear abhängig:**
Während der Rechnung erhält man zwei identische Gleichungen;
durch Subtraktion ergibt sich dann $0 = 0$.
In diesem Fall kann man eine Variable wählen, die anderen ergeben sich dann.

**Beispiel:**

Das LGS $\begin{array}{r} r + 2s + 4t = 0 \\ 3s - 6t = 0 \\ -6s + 12t = 0 \end{array}$ ist äquivalent zu $\begin{array}{r} r + 2s + 4t = 0 \\ s - 2t = 0 \\ s - 2t = 0 \end{array}$ bzw. zu $\begin{array}{r} r + 2s + 4t = 0 \\ s - 2t = 0. \\ 0 = 0 \end{array}$

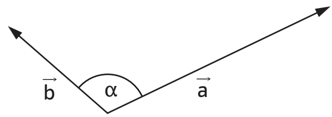
Setzt man $t = 1$, folgt $s = 2$; $r = -8$.

**Linear unabhängig:**
Während der Rechnung erhält man keine identischen Gleichungen.
Bei dem LGS in Stufenform hat die dritte Gleichung **nicht die Form 0 = 0**.

**Beispiel:**

Aus der Stufenform $\begin{array}{r} r + 4s - t = 0 \\ 2s + t = 0 \\ 4t = 0 \end{array}$ folgt $t = 0$; $s = 0$; $r = 0$.

Unter dem **Winkel** $\alpha$ zwischen zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den kleineren Winkel zwischen den Pfeilen (vgl. Fig.). Damit gilt: $0 \leqq \alpha \leqq 180°$.




Das Produkt $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\alpha)$ nennt man das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

## Koordinatenform des Skalarproduktes

- **in der Ebene:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2$$

- **im Raum:**

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

## Winkelberechnung

- **in der Ebene:**

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

- **im Raum:**

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}}$$

## Orthogonalität

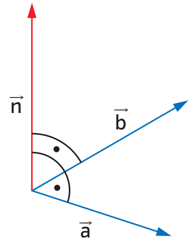
Wenn $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit $\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$ orthogonal sind, dann gilt: $\boldsymbol{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$.
Gilt umgekehrt $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, dann sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonal.

## Tipps zur Vermeidung von Fehlern:

- Um mit dem TR oder GTR z. B. aus $\cos(\alpha) = 0{,}5627$ den Winkel $\alpha$ zu ermitteln, müssen Sie das Gerät auf „**Degree**" einstellen.
- Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist eine reelle Zahl. Diese kann auch 0 sein, im Unterschied zum Nullvektor $\vec{0}$.
- Im Rahmen der Analytischen Geometrie treten Winkel sehr oft auf. So zwischen
  a) zwei Vektoren (vgl. Aufgabe a)
  b) zwei Geraden (vgl. Karte 91)
  c) einer Geraden und einer Ebene (vgl. Karte 92)
  d) zwei Ebenen (vgl. Karte 93).

Beachten Sie, welche Werte der Winkel jeweils annehmen kann und wie dies bei der Berechnung berücksichtigt wird (**Betrag** im Skalarprodukt).

Ist ein Vektor $\vec{n}$ mit $\vec{n} \neq \vec{0}$ orthogonal zu zwei linear unabhängigen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, heißt $\vec{n}$ ein **Normalenvektor** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ (vgl. Fig.).




**Ermittlung eines Normalenvektors:**

Einen Normalenvektor $\vec{n}$ von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ kann man bestimmen
a) mithilfe des **Skalarproduktes**
b) mithilfe des **Vektorproduktes** (auch **Kreuzprodukt** genannt).

Zu a): Da $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{a}$ und zu $\vec{b}$ ist, gilt: $\vec{n} \cdot \vec{a} = 0$ und $\vec{n} \cdot \vec{b} = 0$.

Mit $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ erhält man zwei Gleichungen für $n_1$, $n_2$ und $n_3$. Da ein Normalenvektor nicht eindeutig bestimmt ist, kann man eine Koordinate wählen, die anderen ergeben sich dann (vgl. Beispiel).
Zu b): Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist definiert durch:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

**Vergleich beider Verfahren:**

Da das Vektorprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ ein Vektor ist im Unterschied zum Skalarprodukt, erhält man direkt einen gesuchten Normalenvektor. Außerdem ist das Verfahren **weniger rechenanfällig**. Allerdings muss man die Formel kennen.

**Beispiel:** (Ermittlung eines Normalenvektors mit Gleichungen, vgl. Aufgabe)

Ermitteln Sie einen Normalenvektor von $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$.

**Lösung:**
Für einen Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ muss gelten: $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ und $\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$.

Diese Skalarprodukte ergeben das LGS:
$3n_1 + 4n_2 + 2n_3 = 0$
$-n_1 + 5n_2 - 3n_3 = 0.$
Hieraus folgt das LGS:
$3n_1 + 4n_2 + 2n_3 = 0$
$\quad 19n_2 - 7n_3 = 0.$
Wählt man $n_3 = 19$, ergibt sich $n_2 = 7$, $n_1 = -22$. Damit ist $\vec{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-22} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{19} \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor.

Der Flächeninhalt eines Dreiecks ist $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$, wobei g die sogenannte **Grundseite** und h die **Höhe zur Grundseite** g ist.
Beachten Sie: **Jede** Seite ist als Grundseite möglich; es muss aber die **zugehörige** Höhe verwendet werden.
Häufig sind **Sonderfälle**, bei denen sich eine Seite als Grundseite anbietet:

a) gleichschenkliges Dreieck,
b) rechtwinkliges Dreieck.

Ist ein Dreieck ABC **gleichschenklig** mit $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$, so wählt man AB als Grundseite.
Die zugehörige Höhe ergibt sich als Betrag des Vektors $\overrightarrow{MC}$, wobei M die Mitte von AB ist (vgl. Fig. 1).
Ist das Dreieck ABC **rechtwinklig** mit rechtem Winkel bei A, so wählt man AB als Grundseite.
Die zugehörige Höhe ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{AC}$ (vgl. Fig. 2).

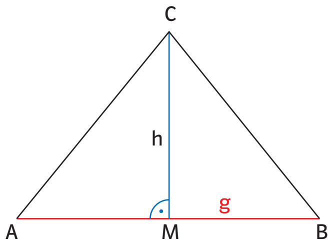


Fig. 1

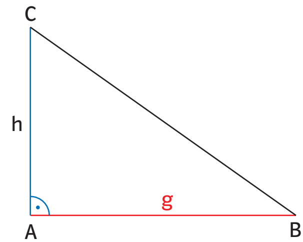


Fig. 2

Handelt es sich um ein **beliebiges** Dreieck (vgl. Fig. 3), muss man zunächst den Fußpunkt F der Höhe bestimmen. Dies ist mit der Methode eines „laufenden" Punktes (vgl. Karte 85) oder mit einer Hilfsebene (vgl. Karte 86) möglich.

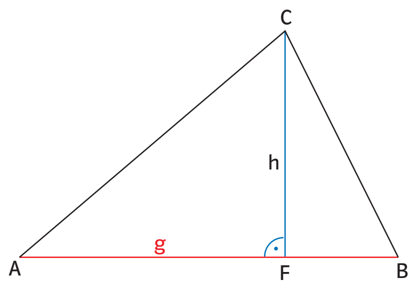


Fig. 3

**Tipp**

Bevor Sie mit der Berechnung des Flächeninhaltes eines Dreiecks beginnen, untersuchen Sie, ob es sich bei dem vorliegenden Dreieck um einen **Sonderfall** handelt (vgl. Aufgabe).

Der Rauminhalt einer Pyramide ist $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$, wobei G die **Grundfläche** und h die **Höhe** ist.
Häufig sind **Sonderfälle**:

a) die Grundfläche ist ein Quadrat (Fig. 1), Parallelogramm oder Dreieck (Fig. 2)
b) die Spitze liegt senkrecht über dem Mittelpunkt der Grundfläche (Fig. 1)
c) die Pyramide hat eine besondere Lage im Koordinatensystem (Fig. 2).

Liegt **kein Sonderfall** vor, kann man die Höhe mit der Hesse'schen Normalenform (vgl. Karte 87) als Abstand der Spitze von der Ebene berechnen, in der die Grundfläche liegt.

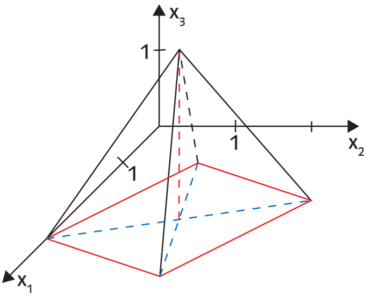


Fig. 1

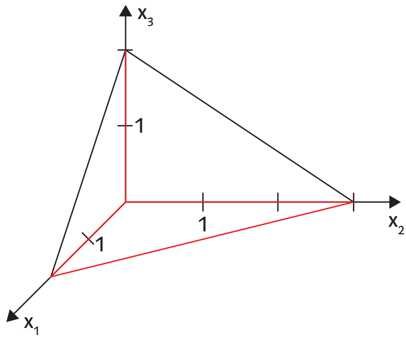


Fig. 2

**Tipp**

Bevor Sie mit der Berechnung des Rauminhaltes einer Pyramide oder eines anderen Körpers beginnen, untersuchen Sie,

a) ob der Körper eine **besondere Form** hat (vgl. Aufgabe) oder
b) ob der Körper eine **spezielle Lage** im Koordinatensystem hat (vgl. Fig. 3).

Bei der abgebildeten Pyramide liegt die Grundfläche in der $x_1x_2$-Ebene. Die Höhe ergibt sich also direkt als $x_3$-Koordinate der Spitze S.

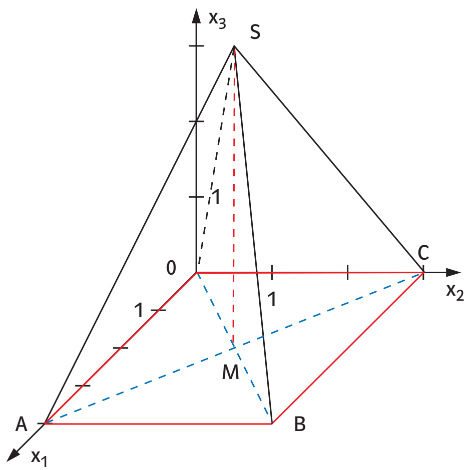
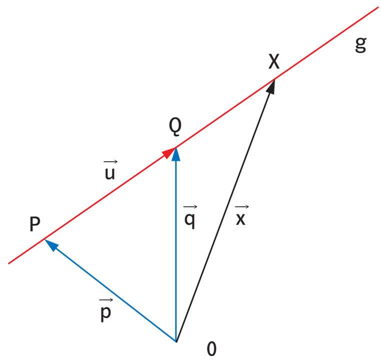


Fig. 3

Gleichung einer Geraden in **Parameterform**:
Die Gleichung einer Geraden g durch die Punkte P und Q mit den Ortsvektoren $\vec{p}$ und $\vec{q}$ lautet:
$\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$; $t \in \mathbb{R}$, wobei $\vec{u} = \vec{q} - \vec{p}$ ist.
Man nennt t einen **Parameter**,
der Vektor $\vec{p}$ heißt **Stützvektor**,
der Vektor $\vec{u}$ heißt **Richtungsvektor**.




Verwendet man die Punkte P und Q, so gilt:
$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$; $t \in \mathbb{R}$.

Mit $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $P(p_1 | p_2 | p_3)$ bzw. $Q(q_1 | q_2 | q_3)$ kann

man auch schreiben:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R} \quad \text{bzw.} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}; \ t \in \mathbb{R}.$$

### Tipp zur Vermeidung eines häufigen Fehlers

In der Geradengleichung $\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$ ist $\overrightarrow{OP}$ ein Ortsvektor.
$\overrightarrow{OP}$ ergibt sich also **direkt** aus den Koordinaten von P.
Dagegen ergibt sich der Vektor $\overrightarrow{PQ}$ als **Differenz** zweier Ortsvektoren.
Der Ortsvektor von Q ist **kein Richtungsvektor** einer Geraden.

### Gerade in der $x_1x_2$-Ebene

In der $x_1x_2$-Ebene ist z. B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ bzw. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$
eine Gleichung einer Geraden.

Eliminiert man t, ergibt sich $x_2 = -\frac{1}{4}x_1 + \frac{9}{4}$.

In der Analysis schreibt man hierfür meistens $y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{4}$.

### Punktprobe

Um zu prüfen, ob ein Punkt A auf einer Geraden g liegt, führt man eine sogenannte **„Punktprobe“** durch, d. h., man setzt die Koordinaten von A in die Gleichung von g ein.
Gibt es einen Wert für t, der die Vektorgleichung erfüllt, **liegt A auf g**,
gibt es keinen solchen Wert, **liegt A nicht auf g**.

Bei der Durchführung dieses Verfahrens schreibt man die Vektorgleichung um in ein LGS mit drei linearen Gleichungen und einer Variablen t. Ergibt sich aus den drei Gleichungen jeweils der gleiche Wert für t, liegt A auf g.

Gleichung einer Ebene in **Parameterform**:
Die Gleichung einer Ebene E mit dem **Stützvektor** $\vec{p}$ und den **Spannvektoren** $\vec{u}$ und $\vec{v}$ lautet (vgl. Fig. 1):
$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$;  $r, s \in \mathbb{R}$.

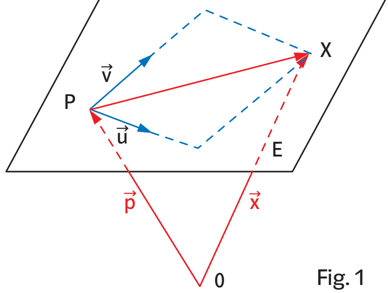


Fig. 1

## Aufstellen einer Gleichung für E in Parameterform

E kann festgelegt sein durch:

a) Punkte A, B und C

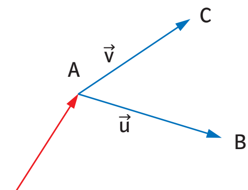


Fig. 2

Stützvektor: Ortsvektor von A
Spannvektoren: $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

b) Gerade g und Punkt A

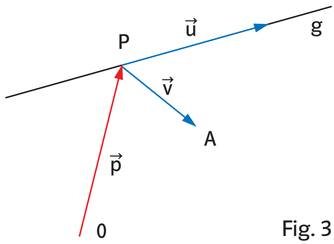


Fig. 3

Stützvektor: Stützvektor von g
Spannvektoren: $\vec{u}$ von g, $\vec{v} = \overrightarrow{PA}$

c) Geraden g und h, die sich in S schneiden

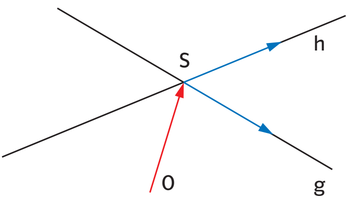


Fig. 4

Stützvektor: Ortsvektor von S
Spannvektoren: Richtungsvektoren von g und h

d) Geraden g und h, die parallel sind

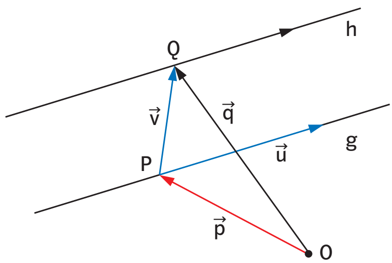


Fig. 5

Stützvektor: Stützvektor von g
Spannvektoren: $\vec{u}$ von g, $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

## Punktprobe für D

Setzt man die Koordinaten für D in die Gleichung für E ein, erhält man ein LGS mit drei linearen Gleichungen für zwei Variablen r und s.
Aus zwei Gleichungen erhält man Werte für r und s; erfüllen diese Werte auch die dritte Gleichung, **liegt der Punkt D in E**.

**Gleichung einer Ebene in Koordinatenform:**

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b \quad (1)$

Eine Koordinatengleichung einer Ebene E wird oft benötigt, z. B. für Abstandsberechnungen.
Sind von E drei Punkte A, B und C gegeben, bieten sich folgende Möglichkeiten an:

1) Man notiert zunächst eine Gleichung in Parameterform (vgl. Karte 72) und eliminiert die Parameter r und s (vgl. Karte 74).
2) Man setzt die Koordinaten der Punkte A, B und C in (1) ein und löst das LGS (vgl. Karte 75).
3) Man ermittelt zunächst eine Gleichung in Normalenform (vgl. Karte 76) und schreibt diese um in Koordinatenform (vgl. Lösung).

Für die Normalenform benötigt man einen Normalenvektor. Diesen kann man ermitteln

a) mit Gleichungen
b) mit dem Vektorprodukt (auch Kreuzprodukt genannt).

Bei den Möglichkeiten 1), 2) und 3)a) muss ein LGS gelöst werden. Steht ein GTR zur Verfügung, mit dem man ein LGS lösen kann, sind diese Verfahren schnell durchführbar.
**Ohne** GTR geht **3)b) am schnellsten** und ist am **wenigsten fehleranfällig** (vgl. Lösung).
Allerdings muss man das Vektorprodukt kennen.

**Vektorprodukt:**

Das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ ist der Vektor $\vec{c}$ mit

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

Im Unterschied zum Skalarprodukt erhält man also mit dem **Vektorprodukt einen Vektor**.

Merkregel für das Vektorprodukt:

$a_1 \quad b_1$

$a_2 \quad b_2$

$a_3 \quad b_3$

$a_1 \quad b_1$

$a_2 \quad b_2$

$c_1 = a_2b_3 - a_3b_2$

$c_2 = a_3b_1 - a_1b_3$

$c_3 = a_1b_2 - a_2b_1$

**Gleichung einer Ebene in Koordinatenform:**

$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = b$

Ist eine Gleichung einer Ebene in Parameterform gegeben, erhält man eine Koordinatenform, wenn man das zugehörige LGS notiert und die Parameter eliminiert.

**Lösung der Aufgabe mit GTR:**

Der gegebenen Gleichung entspricht das LGS

$$\begin{array}{lcl} x_1 = 1 - 2r - s & & -2r - s = x_1 - 1 \\ x_2 = 2 + 3r - 4s & \text{bzw. umgestellt:} & 3r - 4s = x_2 - 2\,. \\ x_3 = 4 + 5r + 2s & & 5r + 2s = x_3 - 4 \end{array}$$

Durch diese Umstellung, bei der die Summanden mit r und s zuerst notiert werden, erhält man in der reduzierten Stufenform eine Zeile, die r und s nicht enthält.

$$\text{Aus}\quad \begin{array}{l} -2r - s = x_1 - 1 \\ 3r - 4s = x_2 - 2 \\ 5r + 2s = x_3 - 4 \end{array} \quad \text{ergibt sich die Matrix } A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Gibt man die Matrix A in den GTR ein (vgl. Fig. 1), erhält man mit dem Befehl *rref* die reduzierte Stufenform der Matrix A (vgl. Fig. 2 und Fig. 3).
Die letzte Zeile lautet ausführlich: $0 \cdot r + 0 \cdot s = 1 \cdot x_1 - \frac{1}{26} \cdot x_2 + \frac{11}{26} \cdot x_3 - \frac{34}{13}$.
Damit erhält man als Koordinatengleichung:
E: $26x_1 - x_2 + 11x_3 = 68$.

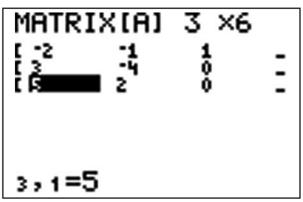


Fig. 1

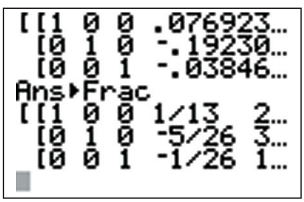


Fig. 2

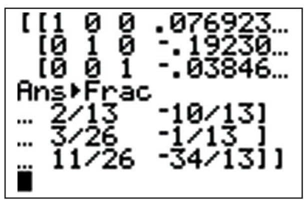


Fig. 3

## Gleichung einer Ebene in Koordinatenform

$a \cdot x_1 + b \cdot x_2 + c \cdot x_3 = d \quad (1)$

Sind die Koordinaten von drei Punkten der Ebene gegeben, erhält man durch Einsetzen dieser Koordinaten in Gleichung (1) ein **LGS für a, b, c und d**.
Dieses LGS bringt man auf die Stufenform und drückt dann **a, b und c in Abhängigkeit von d** aus (vgl. Lösung).
Durch **Wahl z. B. von d** ergeben sich dann a, b und c.

## Lösung der Aufgabe mit dem GTR

Ansatz: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$;
Punktprobe mit den gegebenen Punkten liefert das LGS

$$\begin{aligned} 2a + 3b - c &= d \\ 8a + 4b - 9c &= d \\ 11a + 12b - 7c &= d \end{aligned} \quad \text{mit der Matrix } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 8 & 4 & -9 & 1 \\ 11 & 12 & -7 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt man die Matrix A in den GTR ein (vgl. Fig. 1), erhält man mit dem Befehl *rref* die reduzierte Stufenform der Matrix A. Der Befehl *frac* wandelt die Dezimalzahlen in Brüche um (vgl. Fig. 2).
Man liest ab: $1 \cdot a = -\frac{22}{7}d$; $1 \cdot b = \frac{12}{7}d$; $1 \cdot c = -\frac{15}{7}d$.
Setzt man $d = 7$, folgt $a = -22$; $b = 12$; $c = -15$.
Damit ergibt sich die Koordinatengleichung
E: $-22x_1 + 12x_2 - 15x_3 = 7$.

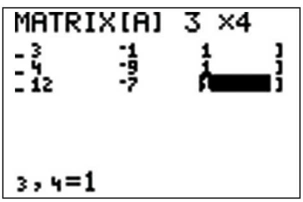


Fig. 1

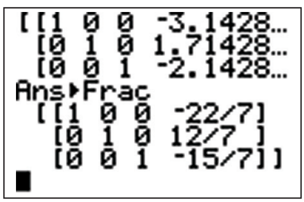
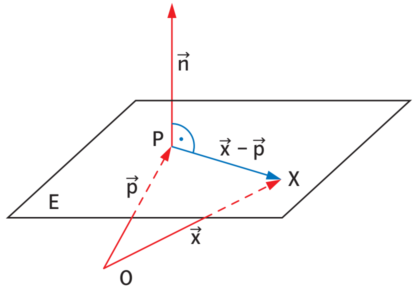


Fig. 2

Gleichung einer Ebene in **Normalenform**:
Sind $\vec{p}$ ein Stützvektor, $\vec{n}$ ein Normalenvektor und $\vec{x}$ der Ortsvektor eines Punktes in der Ebene E, so ist (vgl. Fig.)

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

die Gleichung einer Ebene in Normalenform.




Diese Form ergibt sich, wenn man beachtet, dass die Vektoren $\vec{x} - \vec{p}$ und $\vec{n}$ **orthogonal** sind (**Skalarprodukt gleich null**).

Soll eine Gleichung in Parameterform umgeschrieben werden in eine Koordinatenform, so tritt die Normalenform oft als „Zwischenform“ auf (vgl. Karte 73).
Zur Bestimmung eines Normalenvektors vgl. Karte 73.
Ist eine Gleichung in Normalenform gegeben, kann man direkt einen **Normalenvektor $\vec{n}$ von E ablesen**.

## Hesse'sche Normalenform

Ist $\vec{n_0}$ ein Normalenvektor mit dem Betrag 1 (Normalen-Einheitsvektor, vgl. Karte 64), so nennt man die Ebenengleichung

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0} = 0$$

die **Hesse'sche Normalenform** in vektorieller Darstellung und die Gleichung

$$\frac{a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = 0$$

die **Hesse'sche Normalenform** in Koordinatendarstellung.

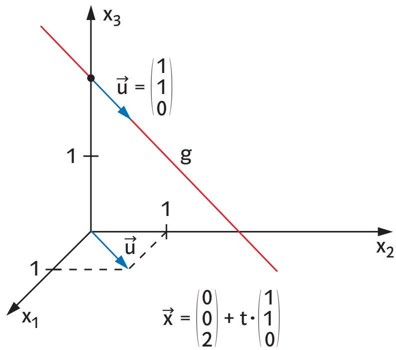
Beide Formen sind sehr hilfreich bei der Berechnung des Abstandes eines Punktes von einer Ebene (vgl. Karte 87).

**Besondere Lagen von Geraden** erkennt man an **speziellen Werten von Koordinaten** im Stützvektor und im Richtungsvektor. Mit

$$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

gilt z. B.:

Für $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ geht g durch den Ursprung;
für $p_1 = p_2 = p_3 = 0$ und $u_2 = u_3 = 0$ ist g mit der $x_1$-Achse identisch;
für $u_2 = u_3 = 0$ ist g eine Parallele zur $x_1$-Achse;
für $u_1 = u_2 = 1$ und $u_3 = 0$ ist g eine Parallele zu einer der Winkelhalbierenden zwischen der $x_1$-Achse und der $x_2$-Achse (vgl. Fig.).




**Beispiele für besondere Lagen von Geraden**

a) $x_1$-Achse:

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

b) $x_2$-Achse:

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

c) $x_3$-Achse:

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

d) 1. Winkelhalbierende in der $x_1x_2$-Ebene:

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

e) 2. Winkelhalbierende in der $x_1x_2$-Ebene:

$$\vec{x} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

f) Gerade durch den Punkt P(0 | 0 | 2) und parallel zu einer Winkelhalbierenden der $x_1x_3$-Ebene:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

## Ebenengleichung in Koordinatenform

Die besondere Lage einer Ebene erkennt man sofort, wenn die Gleichung in **Koordinatenform** gegeben ist:
Fehlt in der Gleichung eine Koordinate $x_i$, ist die Ebene zu dessen Achse parallel.
So fehlt z. B. in der Gleichung $x_1 + 2x_3 = 2$ die $x_2$-Koordinate; also ist die Ebene **parallel zur $x_2$-Achse** (vgl. Fig. 1).

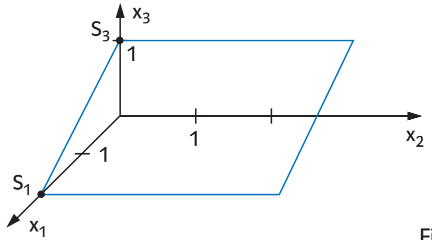


Fig. 1

Fehlen in der Gleichung zwei Koordinaten, ist die Ebene parallel zu der von diesen Koordinaten aufgespannten Koordinatenebene.
So fehlen z. B. in der Gleichung $x_2 = 2$ die Koordinaten $x_1$ und $x_3$; also ist die Ebene **parallel zur $x_1x_3$-Koordinatenebene** (vgl. Fig. 2).

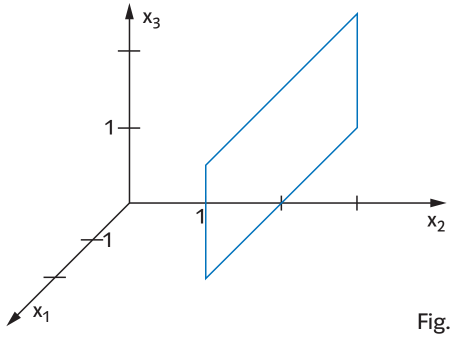


Fig. 2

## Ebenengleichung in Parameterform

Ist eine Gleichung in **Parameterform** gegeben, erkennt man besondere Lagen an speziellen Werten von Koordinaten im Stützvektor und in den Spannvektoren. Mit

$$E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix};\quad r, s \in \mathbb{R}$$

gilt z. B.:
Ist $p_1 = p_2 = p_3 = 0$, geht E durch den Ursprung;
ist $u_1 = v_1 = 0$, ist E parallel zur $x_2x_3$-Ebene;
ist $v_1 = v_2 = 0$, ist E parallel zur $x_3$-Achse
(vgl. Fig. 3).

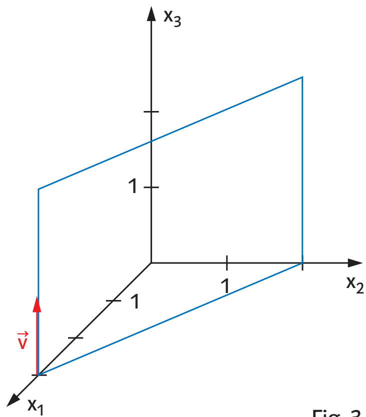


Fig. 3

Für zwei Geraden im Raum sind 4 Fälle möglich:
Sie sind **echt parallel**,
sie sind **identisch**,
sie **schneiden sich**,
sie sind **windschief**.
Im konkreten Fall kann man an den Richtungsvektoren erkennen, ob die Geraden parallel sind oder nicht. Eine weitere Untersuchung ist dann nach folgendem Schema möglich.

| $g \parallel h$ | | $g \nparallel h$ | |
|---|---|---|---|
| Ein Punkt auf g liegt nicht auf h | Ein Punkt auf g liegt auf h | Das LGS hat eine Lösung | Das LGS hat keine Lösung |
| g und h sind echt parallel (Aufg. a)) | g und h sind identisch (Aufg. b)) | g und h schneiden sich (Karte 80) | g und h sind windschief (Karte 80) |

**Lösung der Aufgabe mit dem GTR**

a) Aus der Gleichung $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}$ folgt $r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Gibt man die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & -3 & 4 \\ 4 & 12 & -1 \end{pmatrix}$ in den GTR ein, erhält man mit dem Befehl *rref* die reduzierte Stufenform der Matrix A (vgl. Fig. 1). Dieser entnimmt man, dass das LGS keine Lösung hat und damit g und h sich nicht schneiden. Die Richtungsvektoren von g und h sind linear abhängig. **Also sind g und h echt parallel.**

b) Man erhält die Matrix $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. Gibt man diese Matrix in den GTR ein, erhält man mit dem Befehl *rref* das Ergebnis von Fig. 2.
Das LGS hat unendlich viele Lösungen; **g und h sind identisch**.

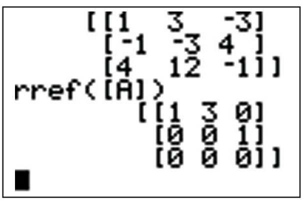


Fig. 1

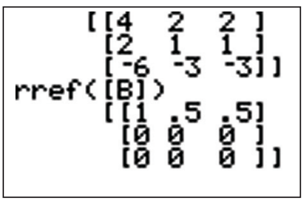


Fig. 2

Für zwei Geraden im Raum sind 4 Fälle möglich:
Sie sind **echt parallel**,
sie sind **identisch**,
sie **schneiden sich**,
sie sind **windschief**.
Im konkreten Fall kann man an den Richtungsvektoren erkennen, ob die Geraden parallel sind oder nicht.
Sind g und h nicht parallel, setzt man die rechten Seiten der Vektorgleichungen gleich.
Dieser neuen Vektorgleichung entspricht ein LGS.
Hat das LGS eine **Lösung, schneiden sich g und h** (vgl. Aufgabe a));
hat das LGS **keine Lösung, sind g und h windschief** (vgl. Aufgabe b)).

**Lösung der Aufgabe mit dem GTR**

a) Der Richtungsvektor von h ist kein Vielfaches des Richtungsvektors von g.
Also sind g und h nicht parallel.
Aus der Gleichung $\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ folgt $r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\2\\-4\end{pmatrix}$.
Mit $A = \begin{pmatrix}3 & -1 & -4\\-1 & 1 & 2\\2 & -2 & -4\end{pmatrix}$ und dem Befehl *rref* erhält man Fig. 1.
Das LGS ist eindeutig lösbar mit r = −1; s = 1. Also schneiden sich g und h in **S(1|2|1)**.

b) Man erhält die Matrix $B = \begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\-3 & -7 & 3\\4 & -3 & -12\end{pmatrix}$. Mit dieser Matrix und dem Befehl *rref* erhält man Fig. 2.
Der untersten Zeile entnimmt man: $0\cdot r + 0\cdot s = 1$.
Das LGS hat keine Lösung; g und h schneiden sich nicht, **sie sind windschief**.

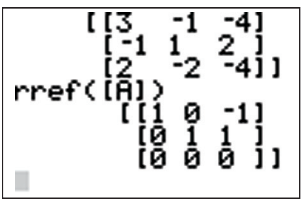


Fig. 1

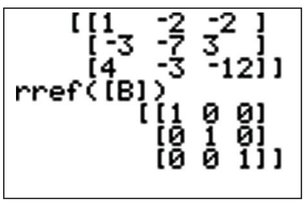


Fig. 2

Für die Lage einer Geraden g und einer Ebene E sind 3 Fälle möglich:
g und E **schneiden sich**,
g und E sind **echt parallel**,
g **liegt in** E.

Für die Untersuchung der Lage hängt der rechnerische Aufwand davon ab, in welcher Form die Ebene gegeben ist.
Ist die Ebene E in **Koordinatenform** gegeben, ist der rechnerische Aufwand **am geringsten**.
Setzt man $x_1$, $x_2$ und $x_3$ aus der Geradengleichung in die Gleichung für E ein, ergibt sich eine Gleichung für den Parameter.
Die **verschiedenen Lagen** von g und E ergeben sich, je nachdem, ob diese Gleichung
**genau eine** Lösung,
**keine** Lösung,
**unendlich viele** Lösungen hat.

Ist die Ebene E in Parameterform gegeben, ist der Einsatz eines GTR sehr hilfreich
(vgl. Karte 82).

**Hinweis auf einen häufigen Sonderfall**

Ist ein Normalenvektor von E ein Vielfaches eines Richtungsvektors von g, sind g und E orthogonal. Dieser Fall ist einfach zu entscheiden.

**Beispiel:**
Zeigen Sie, dass die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$
die Ebene E: $12x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 10$ orthogonal schneidet.

**Lösung:**
Der Vektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Richtungsvektor von g.
Die Ebene E hat $\vec{n} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ als Normalenvektor.
Da $\vec{n} = 3 \cdot \vec{u}$ ist , **schneidet g die Ebene E orthogonal**.

Für die Lage einer Geraden g und einer Ebene E sind 3 Fälle möglich:
g und E **schneiden sich**,
g und E sind **echt parallel**,
g **liegt in** E.

Für die Untersuchung der Lage hängt der rechnerische Aufwand davon ab, in welcher Form die Ebene gegeben ist (vgl. Karte 81).

Ist die Ebene E in **Parameterform** gegeben, setzt man die rechten Seiten gleich.
Die sich ergebende Vektorgleichung ist äquivalent einem LGS, das zu lösen ist.

Steht ein GTR zur Verfügung, ist die Lösung des LGS einfacher (vgl. die folgende Lösung).

**Um das LGS zu vermeiden, kann man die Parameterform der Ebenengleichung in eine Koordinatenform umwandeln**. Hierzu bestimmt man einen **Normalenvektor** mit dem **Kreuzprodukt**.

**Lösung der Aufgabe mit dem GTR**

Aus der Gleichung

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \text{folgt} \quad r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Mit $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 6 \\ -3 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 12 \end{pmatrix}$ und dem Befehl *rref* erhält man zunächst Fig. 1 und mit dem Befehl *frac* dann Fig. 2.

Man entnimmt: $r = \frac{4}{3}$; $s = -\frac{4}{3}$; $t = -\frac{10}{3}$.

Die Gerade g und die Ebene E schneiden sich in $\mathbf{S}\left(\frac{8}{3} \middle| -\frac{11}{3} \middle| \frac{16}{3}\right)$.

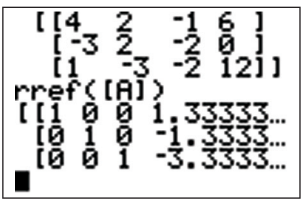



Fig. 1

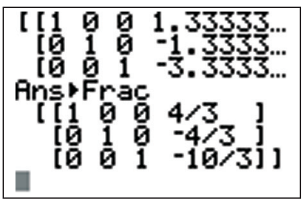



Fig. 2

Für die Lage zweier Ebenen sind 3 Fälle möglich:
Sie **schneiden sich (Schnittgerade)**,
sie sind **echt parallel**,
sie sind **identisch**.

Für die Untersuchung der Lage hängt der rechnerische Aufwand davon ab, in welcher Form die Ebenen gegeben sind.
Ist eine der Ebenen in Koordinatenform gegeben, ist der Rechenaufwand am geringsten.

Sind **beide** Gleichungen in **Koordinatenform** gegeben, fasst man beide Gleichungen als ein LGS mit 3 Variablen auf (Aufgabe a)).
Ist eine Gleichung in **Koordinaten-** und eine in **Parameterform** gegeben, setzt man $x_1$, $x_2$ und $x_3$ aus der Parametergleichung in die Koordinatengleichung ein und erhält eine Gleichung mit den beiden Parametern (Aufgabe b)).

Sind beide Gleichungen in Parameterform gegeben, ist der Einsatz eines GTR sehr hilfreich (vgl. Karte 82).
Ohne GTR ist zu überlegen, ob man mindestens eine der Gleichungen in eine
Koordinatenform umwandelt (vgl. Karte 74).

## Tipps

Die Gleichung einer Schnittgerade zweier Ebenen enthält einen **Parameter**.
Sind beide Ebenengleichungen in Koordinatenform gegeben, ist zunächst nicht ersichtlich, wie der Parameter „entsteht“: Er kommt in die Rechnung durch eine **Setzung**; z. B. $x_3 = t$ (vgl. Lösung zu a)).
Denken Sie also bei Schnittproblemen von Ebenen immer daran, dass eine Gleichung für die Schnittgerade einen **Parameter** enthält, der durch Setzung „ins Spiel“ kommen kann.
**Eine Gleichung für die Schnittgerade** erhält man, in dem man das **LGS als Vektorgleichung** schreibt (vgl. Lösung zu a)).

Ist eine der beiden Gleichungen in **Parameterform** gegeben, so muss der **eine Parameter durch den anderen** ausgedrückt werden, um eine Gleichung für die Schnittgerade zu erhalten (vgl. Lösung zu b)).

Für die Lage zweier Ebenen sind 3 Fälle möglich:
Sie **schneiden sich (Schnittgerade)**,
sie sind **echt parallel**,
sie sind **identisch**.

Ist die Untersuchung ohne GTR durchzuführen, hängt der rechnerische Aufwand davon ab, in welcher Form die Ebenengleichungen gegeben sind (vgl. Karte 83).

Sind **beide Gleichungen in Parameterform** gegeben und ist die Untersuchung **ohne GTR** durchzuführen, ist es ratsam, eine der beiden Gleichungen in die Koordinatenform umzuwandeln (vgl. Lösung).

Ist ein GTR zugelassen, ist eine Umwandlung nicht angebracht, denn in diesem Fall ist die „Größe“ des LGS unwichtig.
Zu beachten ist aber, dass die sich ergebende Vektorgleichung **umgeordnet** werden muss (vgl. die ersten beiden Zeilen der Lösung mit dem GTR). Denn nur so erhält man einen Zusammenhang z. B. zwischen t und u bzw. zwischen r und s.

**Lösung der Aufgabe mit dem GTR**

Aus der Gleichung $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ folgt

$r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

Gibt man die Matrix A in den GTR ein, erhält man mit dem Befehl *rref* die reduzierte Stufenform von A (vgl. Fig. 1). Der untersten Zeile entnimmt man: $t - 0{,}8u = -0{,}6$.
Die Ebenen $E_1$ und $E_2$ schneiden sich.
Setzt man $t = 0{,}8u - 0{,}6$ in die Gleichung für $E_2$ ein, erhält man für die Gleichung der Schnittgeraden

$g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (0{,}8u - 0{,}6) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1{,}6} \\ \mathbf{-2{,}2} \\ \mathbf{-0{,}2} \end{pmatrix} + \mathbf{u} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{3{,}2} \\ \mathbf{2{,}6} \\ \mathbf{3{,}6} \end{pmatrix};\ \mathbf{u} \in \mathbb{R}.$

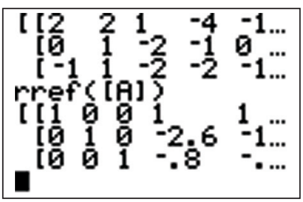


Fig. 1

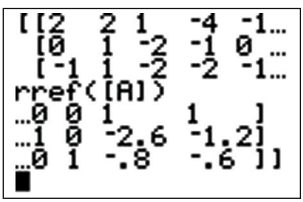
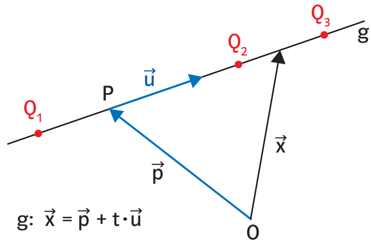


Fig. 2

**Allgemeine Beschreibung der Methode eines „laufenden" Punktes:**

Gegeben ist eine Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

Gesucht sind ein oder mehrere Punkte auf g, die eine vorgegebene Bedingung erfüllen sollen.
Mit $Q(q_1 | q_2 | q_3)$ gilt daher:
$q_1 = p_1 + t \cdot u_1$, $q_2 = p_2 + t \cdot u_2$, $q_3 = p_3 + t \cdot u_3$
bzw. $Q(p_1 + t \cdot u_1 | p_2 + t \cdot u_2 | p_3 + t \cdot u_3)$.
Im konkreten Fall sind die Koordinaten von Q nur vom Parameter t abhängig.
Dieser Parameter kann dann durch die zusätzliche Bedingung berechnet werden.




g: $\vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$

Da $t \in \mathbb{R}$ ist, „läuft" Q auf g.

Diese **zusätzliche Bedingung** kann z. B. sein:

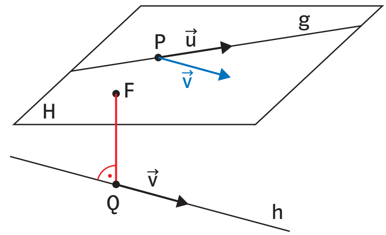
a) Der Abstand zu einem gegebenen Punkt A hat einen vorgegebenen Wert d.
b) Die Abstände zu zwei gegebenen Punkten A und B sind gleich.
c) Der Vektor $\overrightarrow{AQ}$ mit gegebenem Punkt A ist orthogonal zum Richtungsvektor von g.
   Dieser Fall ist besonders häufig; nämlich dann, wenn ein Lotfußpunkt auf g gesucht ist
   (vgl. Karte 89).

**Weitere Hinweise zu dem Verfahren:**

Zunächst werden die **Koordinaten von Q** auf g immer in **Abhängigkeit vom Parameter t** angegeben.
Danach geht das Verfahren unterschiedlich weiter.
Da in a) ein **Abstand** d vorgegeben ist, wird in diesem Fall der **Betrag** des Vektors $\overrightarrow{AQ}$ gleich d gesetzt.
In b) werden die **Beträge** $|\overrightarrow{AQ}|$ und $|\overrightarrow{BQ}|$ berechnet und **gleich gesetzt**.
In c) dagegen ist eine **Orthogonalität** vorgegeben, deshalb wird das **Skalarprodukt** von $\overrightarrow{AQ}$ und dem Richtungsvektor $\vec{u}$ von g gleich null gesetzt.

## Allgemeine Bemerkungen zu der Methode „Hilfsebene"

Besonders bei **Abstandsberechnungen** kann die Einführung einer Hilfsebene hilfreich sein.
So z. B. bei der Berechnung
a) des **Abstandes eines Punktes von einer Geraden** (vgl. Aufgabe und Lösung)
b) des **Abstandes windschiefer Geraden** (vgl. Fig.).




Entscheidend ist, dass man sich zunächst die **Lage** der **Hilfsebene H verdeutlicht** und dann aufgrund dieser Überlegungen die **Form der Gleichung für H wählt**.
Da bei a) die Hilfsebene H orthogonal zu g ist, bietet sich die Normalenform einer Ebene an, denn ein Richtungsvektor von g ist ein Normalenvektor von H („Rollentausch" von Richtungs- und Normalenvektor).
Bei b) dagegen wird man die Ebene, in der g liegt und die parallel zu h verläuft als Hilfsebene H wählen (vgl. Fig.). Richtungsvektoren von g und h sind also auch Spannvektoren von H. Deshalb bietet sich hier die Parameterform einer Ebene an.

## Wiederholungen zu verschiedenen Formen einer Ebenengleichung

Um aus einer **Parameterform** einer Ebenengleichung eine **Koordinatenform** zu erhalten, setzt man $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und erhält ein LGS.

Eliminiert man aus den **drei** Gleichungen die Parameter r und s, erhält man **eine** Gleichung in $x_1$, $x_2$ und $x_3$, die sogenannte Koordinatenform.

Um aus einer **Normalenform** einer Ebenengleichung eine **Koordinatenform** zu erhalten, setzt man $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und berechnet das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{x} - \vec{p}$ und $\vec{n}$:

Aus $\begin{pmatrix} x_1 - p_2 \\ x_2 - p_2 \\ x_3 - p_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0$ folgt $n_1(x_1 - p_1) + n_2(x_2 - p_2) + n_3(x_3 - p_3) = 0$.

Im konkreten Fall enthält diese Gleichung nur noch $x_1$, $x_2$ und $x_3$.

**Parameterform:**
$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v};\ r, s \in \mathbb{R}$
Diese Form verwendet man, wenn zwei Spannvektoren der Ebene bekannt sind.

**Normalenform:**
$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$
Diese Form verwendet man, wenn der Ortsvektor $\vec{p}$ eines Punktes in der Ebene und ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene bekannt sind.

Hat der Punkt die Koordinaten $P(p_1|p_2|p_3)$ und die Ebene die Koordinatengleichung $E\colon\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$, so gilt für den Abstand $d(P; E)$ von P und E:

$$\mathbf{d(P; E)} = \left|\frac{a \cdot p_1 + b \cdot p_2 + c \cdot p_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\right|.$$

In einem konkreten Fall kann man also den gesuchten **Abstand direkt mit dieser Formel berechnen**.
Oder aber man führt die **einzelnen Schritte der Reihe nach durch**:

**1. Schritt:** Hesse'sche Normalenform

Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Hesse'sche Normalenform von E: $\dfrac{ax_1 + bx_2 + cx_3 - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 0$

**2. Schritt:** Abstandsberechnung
Setzt man in die linke Seite dieser Gleichung für $x_1$, $x_2$ und $x_3$ die Koordinaten $p_1$, $p_2$ und $p_3$ des Punktes P ein, erhält man den gesuchten Abstand als Betrag dieses Terms.

**Bemerkung:** Mit der Hesse'schen Normalenform erhält man den Abstand eines Punktes P von einer Ebene E, **ohne den Fußpunkt des Lotes zu kennen**.

## Tipps zur Vermeidung von Fehlern

- Ist z. B. $2x_1 - 3x_2 - 8x_3 = 9$ die gegebene Gleichung für E, muss diese auf die Form $\mathbf{2x_1 - 3x_2 - 8x_3 - 9 = 0}$ gebracht werden.

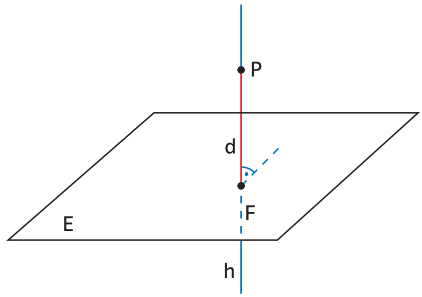
- Bei den Koordinaten eines Normalenvektors $\vec{n}$ ist auf die **Vorzeichen der Koeffizienten** in der Gleichung für E zu achten:

  $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -8 \end{pmatrix}$.

- Zur Berechnung des Abstandes wird **nur die linke Seite** der Hesse'schen Normalenform benötigt. Der Abstand eines Punktes von einer Ebene ist immer größer oder gleich null.
  Er ist nur dann null, wenn der Punkt P in der Ebene E liegt.
  Bei der Rechnung ergibt sich eine nichtnegative Zahl durch den **Betrag**.

Der Abstand d eines Punktes P von einer Ebene E ist gleich der Länge des Lotes von P auf E (vgl. Fig.).
Bei Aufgaben mit Abstandsberechnungen sollte man vor der Bearbeitung den ganzen Text lesen. Denn:

- Ist **nur der Abstand d** gesucht, berechnet man diesen mit der Hesse'schen Normalenform der Ebene E (vgl. Karte 87).
- Ist **auch der Lotfußpunkt F** gesucht, ermittelt man zunächst diesen mit einer Hilfsgeraden h und dann d als Betrag des Vektors $\overrightarrow{PF}$.




## Beschreibung des Verfahrens

**1. Schritt**: Hilfsgerade h
Die Hilfsgerade h geht durch den Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ und ist orthogonal zu E. Damit ist der **Ortsvektor** von P ein **Stützvektor** von h und ein **Normalenvektor** $\vec{n}$ von E ein **Richtungsvektor** von h.
Ist die Ebene E in der **Koordinatenform** $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ gegeben, erhält man einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E aus den Koeffizienten a, b und c. Damit ergibt sich:

$$h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.$$

**2. Schritt:** Lotfußpunkt F
Zur Ermittlung der Koordinaten von F schreibt man $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und setzt

$$x_1 = p_1 + t \cdot a,\ \ x_2 = p_2 + t \cdot b,\ \ x_3 = p_3 + t \cdot c$$

in die Gleichung von E ein. Man erhält eine Gleichung für t.
Setzt man die Lösung für t in die Gleichung für h ein, erhält man den Ortsvektor von F.

**3. Schritt:** Abstand
Mit $P(p_1|p_2|p_3)$ und $F(f_1|f_2|f_3)$ ergibt sich $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} f_1 - p_1 \\ f_2 - p_2 \\ f_3 - p_3 \end{pmatrix}$.

Der Betrag dieses Vektors ist der gesuchte Abstand: $d(P; E) = \left|\overrightarrow{PF}\right|$.

## Tipps zur Vermeidung von Fehlern

- Da ein Normalenvektor von E ein Richtungsvektor der Hilfsgeraden h ist, kann man **ohne weitere Rechnung** eine Gleichung für h notieren („Rollentausch" eines Normalenvektors).
- Im 2. Schritt berechnet man zunächst einen t-Wert aus einer **linearen** Gleichung. Setzt man den ermittelten Wert in die Gleichung für die Hilfsgerade h ein, erhält man den **Ortsvektor** von F und schreibt entsprechend $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ im Gegensatz zu $F(f_1|f_2|f_3)$.

Der Abstand d eines Punktes P von einer Geraden g ist gleich der Länge des Lotes von P auf g; d. h. der **Abstand d ist gleich dem Betrag des Vektors $\overrightarrow{PF}$**, wobei F der Lotfußpunkt ist (vgl. Fig. 1).

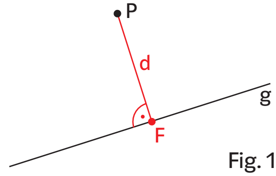



Fig. 1

Den Lotfußpunkt F kann man bestimmen

a) mit der Methode eines „laufenden“ Punktes (vgl. Karte 85) oder
b) mit einer Hilfsebene (vgl. Karte 86).

Mit beiden Methoden berechnet man zunächst den Fußpunkt F des Lotes von P auf g und dann die Länge des Lotes als Betrag des Vektors $\overrightarrow{PF}$.

**Lösung der Aufgabe mit einer Hilfsebene**

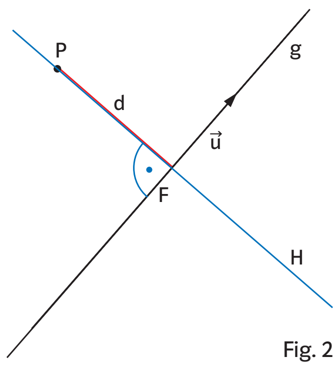



Fig. 2

**1. Schritt:** Hilfsebene
Es sei H die Hilfsebene durch P orthogonal zu g. Dann ist ein Richtungsvektor von g ein Normalenvektor von H.

H: $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Hieraus folgt $2(x_1 - 1) - (x_2 - 2) + (x_3 - 4) = 0$ bzw.
H: $2x_1 - x_2 + x_3 - 4 = 0$.

**2. Schritt:** Lotfußpunkt
Die Gerade g schneidet die Hilfsebene H in F (vgl. Fig. 2).
Der Gleichung für g entnimmt man: $x_1 = 6 + 2t$; $x_2 = -1 - t$; $x_3 = 3 + t$.
Eingesetzt in die Gleichung für H ergibt: $2(6 + 2t) - (-1 - t) + (3 + t) - 4 = 0$. Hieraus folgt $t = -2$.

Mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $F(2\,|\,1\,|\,1)$.

**3. Schritt:** Abstand

Es ist $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$.

Ergebnis: Der Punkt P hat von der Geraden g den Abstand $d(P;\ g) = \boldsymbol{\sqrt{11}}$.

Den **Abstand zweier windschiefer Geraden** kann man berechnen:

a) mit der Formel $d(g;h) = \left|(\vec{q} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}\right|$

b) mit der Methode eines „laufenden“ Punktes

c) mit einer Hilfsebene.

Die Möglichkeiten b) und c) sind dann wichtig, wenn Ihnen die Formel nicht geläufig ist oder wenn Sie beschreiben sollen, wie man den Abstand windschiefer Geraden berechnen kann.

### Methode eines „laufenden“ Punktes

Ist der Vektor $\overrightarrow{AB}$ mit $A \in g$ und $B \in h$ orthogonal zu den Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, ergibt sich der **Abstand von g und h als Betrag des Vektors $\overrightarrow{AB}$.**
Da $A \in g$ ist, erhält man die Koordinaten von A in Abhängigkeit von s; entsprechend die Koordinaten von B in Abhängigkeit von t.
Aus den Bedingungen $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$ und $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 0$ erhält man ein LGS für s und t (vgl. Fig. 1).
Damit kennt man die Koordinaten der Lotfußpunkte A und B.

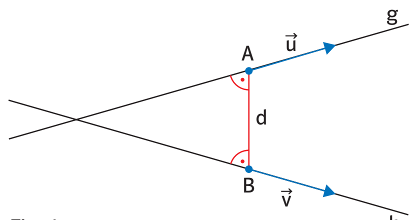


Fig. 1

Bemerkung: Bei diesem Verfahren „laufen“ sogar zwei Punkte, A auf g und B auf h.

### Methode, eine Hilfsebene einzuführen

**Der Abstand von g und h ergibt sich als Abstand eines Punktes Q auf h von der Hilfsebene H, die g enthält und parallel zu h ist** (vgl. Fig. 2).
Bei gegebenen Gleichungen für g und für h sind zwei Spannvektoren von H bekannt.
Damit bietet sich als Gleichung für H die Parameterform an.
Zur Abstandsberechnung wird die Gleichung für H zunächst in die Koordinatenform und dann in die Hesse’sche Normalenform umgewandelt. Der gesuchte Abstand von g und h ergibt sich als Abstand eines beliebigen Punktes Q auf h von H.

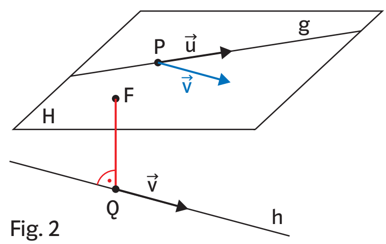


Fig. 2

Zwei **Vektoren** $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden zwei Winkel.
Unter dem Winkel α zwischen den Vektoren versteht man den **kleineren der beiden**.
Also gilt (vgl. Fig. 1): $0 \leqq \alpha \leqq 180°$.
Für den Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Da Winkel bis 180° möglich sind, enthält die Formel im Zähler **keinen Betrag** (vgl. Fig. 2), denn für $0 \leqq \alpha \leqq 180°$ gilt $1 \leqq \cos(\alpha) \leqq -1$.

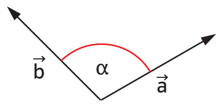


Fig. 1

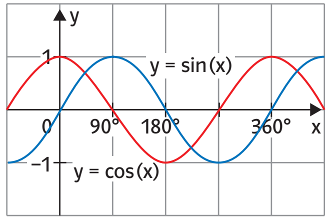


Fig. 2

Schneiden sich zwei **Geraden**, entstehen vier Winkel, von denen jeweils zwei gleich groß sind. Unter dem **Schnittwinkel α** von Geraden (vgl. Fig. 3) versteht man den Winkel, der **kleiner oder gleich 90°** ist. Daher enthält die Formel im Zähler einen **Betrag**. Sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ Richtungsvektoren der Geraden, so gilt:

$$\mathbf{\cos(a) = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}.$$

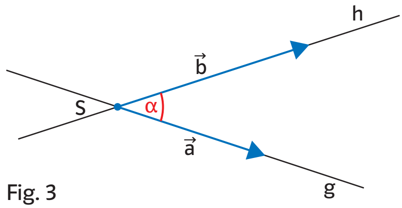


Fig. 3

### Tipps

**Überprüfen** Sie, ob bei Berechnungen von Schnittwinkeln der Rechner auf „Degree“ eingestellt ist.

Nur Geraden, die sich **schneiden, haben einen Schnittwinkel**.
Vor Berechnung eines Schnittwinkels muss man also prüfen, ob ein **Schnittpunkt existiert**. Die angegebene Formel, in der nur die Richtungsvektoren eingehen, liefert auch dann eine Zahl, wenn kein Schnittpunkt vorhanden ist.

In der **Ebene** ist die Situation anders:
Hier haben zwei Geraden **stets einen Schnittpunkt oder sie sind parallel**.

Unter dem Schnittwinkel α zwischen der Geraden g und der Ebene E versteht man den Schnittwinkel von g und s (vgl. Fig. 1). Dabei ist s die Schnittgerade der Ebene F, die orthogonal zu E ist und g enthält, mit E. Da die Bestimmung einer Gleichung für s mühsam ist, sucht man nach einer einfacheren Möglichkeit zur Berechnung von α.

Ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von g und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E, so gilt (vgl. Fig. 2):

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}.$$

Mit $\cos(90° - \alpha) = \sin(\alpha)$ ergibt sich:

$$\boldsymbol{\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}}.$$

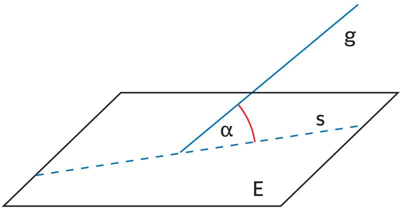


Fig. 1

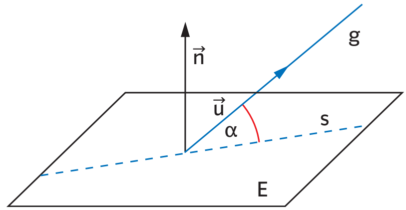


Fig. 2

**Tipps**

**Überprüfen** Sie, ob bei Berechnungen von Schnittwinkeln der Rechner auf „Degree" eingestellt ist.

Beachten Sie, dass bei den Formeln zur Berechnung von Schnittwinkeln nur bei der für den Schnittwinkel einer **Geraden und einer Ebene die Sinusfunktion** auftritt.

Zur Berechnung von α nach der Formel benötigt man neben einem Richtungsvektor von g einen **Normalenvektor** von E. Aus einer Gleichung für E in Koordinatenform kann man direkt einen Normalenvektor ablesen. Ist die Gleichung in Parameterform gegeben, muss man zunächst einen Normalenvektor ermitteln. Dies geschieht am einfachsten mit dem **Vektorprodukt** (vgl. Karte 73).

Unter dem Schnittwinkel $\alpha$ zwischen zwei Ebenen $E_1$ und $E_2$ versteht man den Schnittwinkel der Geraden $s_1$ und $s_2$ (vgl. Fig. 1). Da die Bestimmung von Gleichungen für $s_1$ und $s_2$ mühsam ist, sucht man nach einer einfacheren Möglichkeit zur Berechnung von $\alpha$.
Fig. 2 zeigt, dass die Winkel zwischen $s_1$ und $s_2$ bzw. zwischen $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ gleich sind.
Ist $\vec{n_1}$ ein Normalenvektor von $E_1$ und $\vec{n_2}$ ein Normalenvektor von $E_2$, so gilt:

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}.$$

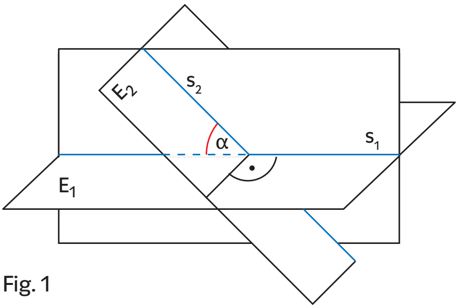



Fig. 1

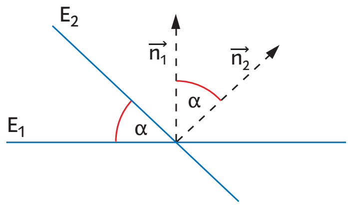



Fig. 2

## Tipps

**Überprüfen** Sie, ob bei Berechnungen von Schnittwinkeln der Rechner auf „Degree“ eingestellt ist.

Zur Berechnung von $\alpha$ nach der Formel benötigt man einen **Normalenvektor $\vec{n_1}$** von $E_1$ und einen **Normalenvektor $\vec{n_2}$** von $E_2$. Aus Gleichungen für $E_1$ und $E_2$ in Koordinatenform kann man direkt Normalenvektoren ablesen. Sind eine oder beide Gleichungen in Parameterform gegeben, muss man zunächst Normalenvektoren ermitteln. Dies geschieht am einfachsten mit dem **Vektorprodukt** (vgl. Karte 73).

Um bei Körpern Winkel zwischen Flächen vektoriell berechnen zu können, muss man Ebenen einführen; **Ebenen**, in denen die **Flächen** liegen.
Mit den angegebenen Formeln erhält man immer Winkel, die kleiner oder gleich 90° sind.
Bei Körpern kann es aber sein, dass ein gesuchter Winkel **größer als 90°** ist.
So ist z. B. in Fig. 1 der Winkel zwischen den Seitenflächen ABS und BCS größer als 90° (vgl. Aufgabe), während der Winkel zwischen der Grundfläche OABC und der Seitenfläche ABS kleiner als 90° ist.
Man muss sich also stets überlegen, ob der gesuchte Winkel größer als 90° ist. Ist dies der Fall, berechnet man zunächst ß und erhält $\alpha$ als Nebenwinkel: $\alpha = 180° - \beta$

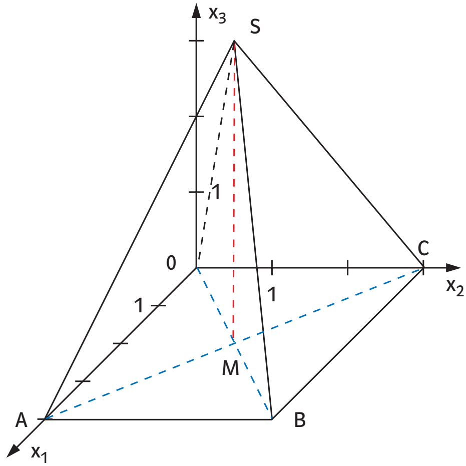


Fig. 1

**Tipps**

- In manchen Fällen kann man bei Körpern Winkel auch **ohne Vektoren** berechnen.
  Ist z. B. bei der gegebenen Pyramide (vgl. Aufgabe) der Winkel $\gamma$ zwischen der Seitenfläche ABS und der Grundfläche OABC gesucht, betrachtet man das „Stützdreieck“ $M_1M_2S$, wobei $M_1$ die Mitte von AB und $M_2$ die Mitte der Grundfläche ist (vgl. Fig. 2).

  Aus $\tan(\gamma) = \frac{\overline{M_2S}}{\overline{M_1M_2}} = \frac{2}{2} = 1$ folgt $\gamma = 45°$.

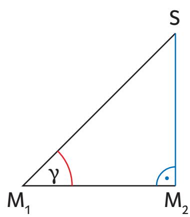


Fig. 2

- Bei der Berechnung eines Winkels zwischen zwei **Kanten eines Körpers**, sollten Sie direkt die zugehörigen **Vektoren** verwenden (und nicht Geraden).

Mit der Hesse'schen Normalenform kann man den Abstand eines Punktes von einer Ebene berechnen. Bei einer sogenannten „umgekehrten“ Abstandsaufgabe ist ein **Abstand gegeben und Punkte gesucht**, die von einem bestimmten Objekt diesen Abstand haben.

Solche Abstandsaufgaben kann man bearbeiten

a) mithilfe von Einheitsvektoren (vgl. Lösung der Aufgabe)
b) mithilfe der Methode eines „laufenden“ Punktes (vgl. Karte 85).

### Lösung der Aufgabe mit der Methode eines „laufenden“ Punktes

Die Gerade g hat die Gleichung

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.$$

Für Punkte auf g gilt also: $P(2 + 4t \mid -1 \mid 3 + 3t)$.

Damit ist $\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -8 + 4t \\ 0 \\ -6 + 3t \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-8 + 4t)^2 + (-6 + 3t)^2} = \sqrt{25(t^2 - 4t + 4)} = 5 \cdot |t - 2|$. (1)

Die Bedingung ist $5 \cdot |t - 2| = 15$. (2)

Sie ist erfüllt für $t_1 = 5$; $t_2 = -1$. Die gesuchten Punkte sind also $\mathbf{P_1(22 \mid -1 \mid 18)}$ und $\mathbf{P_2(-2 \mid -1 \mid 0)}$.

### Allgemeine Beschreibung und Hinweise auf Schwierigkeiten

Arbeitet man mit Einheitsvektoren, muss man beachten, dass **oft verschiedene Richtungen** möglich sind. Hierdurch erhält man dann z. B. **zwei Punkte**, die die Bedingung erfüllen.

Bei der Methode eines „laufenden“ Punktes berechnet man zunächst den Abstand allgemein. Der sich ergebende Term enthält einen Betrag und einen Parameter (vgl. Zeile (1)). Setzt man den ermittelten Term gleich dem gegebenen Abstand, erhält man eine Betragsgleichung (vgl. Zeile (2)) mit mehreren Lösungen. Die Durchführung dieser Methode ist häufig begrifflich schwieriger.

Die vorgelegte „umgekehrte“ Abstandsaufgabe kann man bearbeiten
a) mithilfe von Einheitsvektoren (vgl. Lösung der Aufgabe und Karte 64)
b) mithilfe der Methode eines „laufenden“ Punktes (vgl. Karte 85).

**Lösung der Aufgabe mit der Methode eines „laufenden“ Punktes**

Die Lotgerade g hat die Gleichung

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.$$

Für Punkte auf g gilt also: $P(-5 + t \,|\, 1 + 2t \,|\, 1 + 2t)$.

Damit ist $\overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 2t \end{pmatrix};\ \left|\overrightarrow{FP}\right| = \sqrt{t^2 + 4t^2 + 4t^2} = \sqrt{9t^2} = 3 \cdot |t|$. (1)

Die Bedingung ist $3 \cdot |t| = 12$. (2)

Sie ist erfüllt für $t_1 = 4;\ t_2 = -4$.
Die gesuchten Punkte sind also $\mathbf{P_1(-1\,|\,9\,|\,9)}$ und $\mathbf{P_2(-9\,|\,-7\,|\,-7)}$.

**Hinweise auf Schwierigkeiten**

Man erhält **zwei Punkte** auf dem Lot, da von F aus **zwei Richtungen** möglich sind.
Rechnerisch werden Vielfache des Einheitsvektors addiert bzw. subtrahiert.

Bei der Methode eines „laufenden“ Punktes erhält man zwei Punkte auf dem Lot dadurch, dass $\sqrt{9t^2} = 3 \cdot |t|$ ist und die Betragsgleichung $3 \cdot |t| = 12$ **zwei Lösungen** hat.
Die Lösung der Aufgabe mit dieser Methode ist also begrifflich schwieriger, da bei der Rechnung Beträge auftreten.

Häufige Spiegelungen sind:

a) Spiegelung eines Punktes P an einem Punkt Q (vgl. Fig. 1),
b) Spiegelung eines Punktes P an einer Geraden g (vgl. Fig. 2 und Aufgabe),
c) Spiegelung eines Punktes P an einer Ebene E (vgl. Fig. 3),
d) Spiegelung einer Geraden g an einer Ebene E (vgl. Fig. 4).

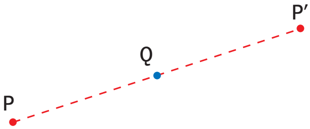



Fig. 1

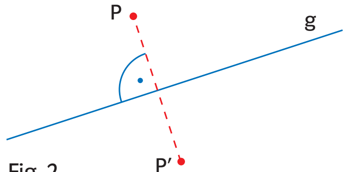



Fig. 2

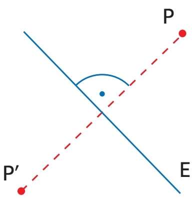



Fig. 3

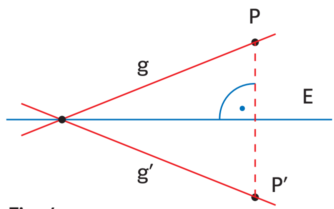



Fig. 4

**Hinweise zur Durchführung der Spiegelungen**

a) $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PQ}$

b) $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$
F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf die Gerade g (vgl. Aufgabe).

c) $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$
F ist der Fußpunkt des Lotes von P auf die Ebene E (vgl. Karte 86).

d) Die Bildgerade g' geht durch S und P'.
S ist der Schnittpunkt von g und E; P' ist der Bildpunkt eines Punktes P auf g bei der Spiegelung an E.
Diese Spiegelung wird wie in c) durchgeführt.

Zu einzelnen Spiegelungen in der Ebene und im Raum vgl. **Karte 97**.

Bei manchen dort genannten Spiegelungen kann man das Problem auch wie folgt **umkehren**:

zu a) Gegeben sind P und P′. Gesucht ist der Punkt Q, an dem P gespiegelt wurde.
Der Punkt Q ergibt sich direkt als **Mittelpunkt der Strecke PP′**.

zu b) Da die Gerade nicht eindeutig ist, kann diese bei gegebenen Punkten P und P′ **nicht** ermittelt werden.

zu c) Gegeben sind P und P′. Gesucht ist die Ebene, an der P gespiegelt wurde (vgl. Beispiel).

zu d) Gegeben sind g′ und g. Gesucht ist die Ebene, an der g gespiegelt wurde. Ein Stützvektor von E ist der Ortsvektor des Schnittpunktes S von g und g′.
Sind $\vec{u_1}$ und $\vec{u_2}$ Einheitsvektoren in Richtung von g bzw. g′, so sind $\vec{u_1} + \vec{u_2}$ und ein Vektor $\vec{n}$ mit $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{u_1}$ und zu $\vec{u_2}$ Spannvektoren von E.
(Eine **Probe ist unerlässlich**, da eventuell die Richtung eines Einheitsvektors **umgekehrt** werden muss.)

**Beispiel:**

Der Punkt P′(1 | 5 | 1) ist der Bildpunkt des Punktes P(3 | 3 | 9) an einer Ebene E.
Ermitteln Sie eine Gleichung von E.

**Lösung:**

Der Mittelpunkt M der Strecke PP′ liegt in E.
Weiterhin ist der Vektor $\overrightarrow{PP'}$ ein Normalenvektor von E.
Mit P′(1 | 5 | 1) und P(3 | 3 | 9) ergibt sich M(2 | 4 | 5) (vgl. Karte 65).

Mit $\overrightarrow{PP'} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix}$ ergibt sich als Gleichung von E in Normalenform:

$$\mathbf{E:}\ \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} = 0.$$

In einer Geradenschar wie $g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1-a \\ 2a \end{pmatrix};\ t, a \in \mathbb{R}$ nennt man a einen **Scharparameter** oder kurz **Parameter**.

Häufige Aufgabenstellungen bei Geradenscharen sind:

a) **Alle Geraden** liegen in einer Ebene E; ermitteln Sie eine **Koordinatengleichung für E** (vgl. Aufgabe).

b) Für **welchen Wert des Parameters** hat die zugehörige Gerade eine vorgegebene Eigenschaft (vgl. Beispiel).

Methoden zur Lösung von a):

1) Man **wählt zwei spezielle Werte** für den Parameter, notiert die zugehörigen Gleichungen, stellt eine Gleichung von E in Parameterform auf, wandelt diese in die Koordinatenform um und macht eine **„Punktprobe" mit $g_a$**.
Diese Methode wurde oben in der Lösung gewählt.

2) Man notiert das zu $g_a$ gehörende LGS und formt dieses so um, dass in einer Gleichung die **Parameter a und t wegfallen**.

Da das LGS neben $x_1$, $x_2$ und $x_3$ noch die Parameter a und t enthält, ist das Verfahren 2) oft schwieriger.

**Beispiel:**

Für welchen Wert von a ist die Gerade aus der Schar

$g_a\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2-a \\ a \\ 3 \end{pmatrix};\ t, a \in \mathbb{R}$

parallel zur Ebene H: $4x_1 - x_2 + 4x_3 - 1 = 0$?

**Lösung:**

Die Gerade $g_a$ ist parallel zur Ebene H, wenn ein Richtungsvektor von $g_a$ orthogonal zu einem Normalenvektor von H ist.

Aus $\begin{pmatrix} 2-a \\ a \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$ folgt $4(2-a) - a + 12 = 0$ und hieraus $\mathbf{a = 4}$.

In einer Ebenenschar wie $E_a$: $3ax_1 + 2x_2 - (a-1)x_3 = 4$; $a \in \mathbb{R}$ nennt man a einen **Scharparameter** oder kurz **Parameter**.

Häufige Aufgabenstellungen bei Ebenenscharen sind:

a) **Alle Ebenen** haben eine gemeinsame Schnittgerade g; ermitteln Sie eine **Gleichung für g** (vgl. Aufgabe).

b) Für **welchen Wert des Parameters** hat die zugehörige Ebene eine vorgegebene Eigenschaft (vgl. Beispiel).

Methode zur Lösung von a):
Man **wählt zwei spezielle Werte** für den Parameter und notiert die zugehörigen Gleichungen.
Aus den beiden Gleichungen kann man eine Koordinate eliminieren.
Setzt man eine der verbleibenden Koordinaten gleich t, kann man die übrigen durch t ausdrücken.
Das zugehörige LGS kann man dann in eine **Gleichung für g in Vektorform umschreiben** (vgl. Aufgabe).

Methode zur Lösung von b):
Hier kommt es natürlich auf die Bedingung an, die eine oder mehrere Ebenen der Schar erfüllen sollen.
Soll die Ebene

1) durch einen vorgegebenen Punkt gehen, hilft eine **Punktprobe** (vgl. Beispiel 1),
2) parallel zu einer vorgegebenen Geraden sein, arbeitet man mit dem **Skalarprodukt** (vgl. Beispiel 2).

**Beispiel 1:**

Für welchen Wert von a geht die Ebene $E_a$ (vgl. Aufgabe) durch den Punkt $P(3\,|\,-7\,|\,4)$?

**Lösung:**

Punktprobe liefert: $(a-2)\cdot 3 - 7 + (2a+1)\cdot 4 = 5 - 3a$.
Aus dieser Gleichung ergibt sich $\mathbf{a = 1}$.
Die Ebene $E_1$: $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$ geht durch den Punkt P.

**Beispiel 2:**

Für welchen Wert von a ist die Ebene $E_a$ (vgl. Aufgabe) parallel zur Gerade

g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$?

**Lösung:**

Eine Ebene und eine Gerade sind parallel, wenn das Skalarprodukt aus einem Richtungsvektor von g und einem Normalenvektor von E gleich null ist.

Aus $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a-2 \\ 1 \\ 2a+1 \end{pmatrix} = 0$ folgt $\mathbf{a = 0}$.

Die Ebene $E_0$: $-2x_1 + x_2 + x_3 = 5$ ist parallel zu g.