a) $x \cdot (3x^2 + 4x + 10) = 3 \cdot (x^3 + 2)$ Ausmultiplizieren

$3x^3 + 4x^2 + 10x = 3x^3 + 6$ Zusammenfassen

$4x^2 + 10x - 6 = 0$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen in der allgemeinen Form liefert

$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4} = \frac{-10 \pm 14}{8}$ und damit die Lösungen

$\mathbf{x_1 = -3}$ und $\mathbf{x_2 = \frac{1}{2}}$.

b) $2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$ Ausklammern

$2x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$2x = 0$ oder $x^2 - x - 2 = 0$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$\mathbf{x_1 = 0}$; $\mathbf{x_2 = -1}$; $\mathbf{x_3 = 2}$.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot (x - \pi)\right) + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi \cdot (x + 1)\right)$

c) $f(x) = -\cos\left(\frac{1}{2} \cdot (x - 1)\right)$

d) $f(x) = \sin\left(\pi \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) - 1$

a) Es ist $f(0) = 20 - 17 \cdot e^{-0,1 \cdot 0} = 20 - 17 = 3$
Bei Entnahme hatte die Flüssigkeit eine Temperatur von **3 °C**.

b) Für $t \to \infty$ geht $f(t) \to 20$.
Langfristig hat die Flüssigkeit eine Temperatur von **20 °C**.

c) Die Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeit erwärmt, ist zu dem Zeitpunkt am größten, an dem die Änderungsrate der Temperatur maximal ist.

Es ist $f'(t) = -17 \cdot e^{-0,1 \cdot t} \cdot (-0,1) = 1,7 \cdot e^{-0,1 \cdot t}$.

Für $t \geq 0$ ist $f'(t)$ streng monoton fallend.
Also ist bei **Entnahme aus dem Kühlschrank** die Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeit erwärmt, am größten.

Einen Normalenvektor kann man mithilfe des Vektorproduktes ermitteln.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 10 \\ -2 + 9 \\ 15 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-22} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{19} \end{pmatrix}.$$

!

Man bestimmt zunächst eine Ebene E, die von zwei Geraden der Schar aufgespannt wird. Dann weist man nach, dass alle Geraden der Schar in dieser Ebene liegen.

Der Stützvektor ist unabhängig von a. Alle Geraden gehen durch den Punkt $P(1\,|\,0\,|\,-1)$.
E wird z. B. aufgespannt durch

$$g_0\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.$$

Für die Ebene E gilt damit: $E\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}.$

Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Normalenform $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

und hieraus die Koordinatenform $\mathbf{3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5 = 0}$.

Setzt man $x_1 = 1 + t(2 - a)$, $x_2 = ta$ und $x_3 = -1 + 3t$ in diese Gleichung ein, ergibt sich aus
$3(1 + t(2 - a)) + 3at - 2(-1 + 3t) = 5$ die wahre Aussage $5 = 5$.
**Alle Geraden $g_a$ liegen in der Ebene E: $3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5 = 0$.**