

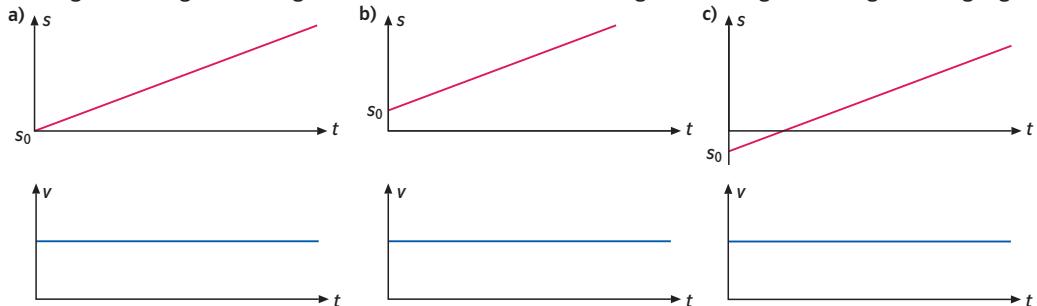
Beschreibt man eine Bewegung, so hängt es davon ab, in welchem **Bezugssystem** man sich befindet. Befinden sich zwei Beobachter in unterschiedlichen Bezugssystemen, so können diese unterschiedliche Beobachtungen machen. In der Physik unterscheiden wir zwischen zwei Bewegungsarten: der **gleichförmigen** und der **gleichmäßig beschleunigten Bewegung**.

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit konstant. Sie berechnet sich aus der Weglänge  $\Delta s$  und der zugehörigen Zeitspanne  $\Delta t$  folgendermaßen:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1}, \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Der zurückgelegte Weg berechnet sich durch:  $s = v \cdot t + s_0$  (**Zeit-Weg-Gesetz**), wobei  $s_0$  den Anfangsort zum Zeitpunkt  $t = 0$  angibt.

Die folgenden Diagramme zeigen unterschiedliche  $t$ - $s$ - und  $t$ - $v$ -Diagramme der gleichförmigen Bewegung:



Bei der gleichmäßig beschleunigten Bewegung ändert sich die Geschwindigkeit ständig bei konstanter Beschleunigung  $a$ . Die Beschleunigung berechnet sich folgendermaßen:

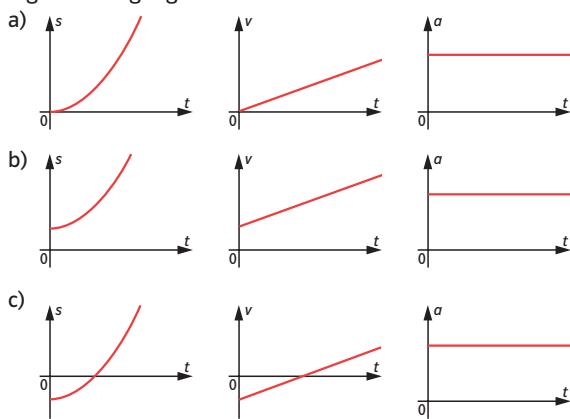
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}, \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Der zurückgelegte Weg  $s$  und die Geschwindigkeit  $v$  berechnen sich bei der geradlinigen Bewegung aus:

$$s = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2, \quad v = v_0 + a \cdot t,$$

wobei  $s_0$  den Anfangsort und  $v_0$  die Anfangsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t = 0$  angibt.

Die folgenden Diagramme zeigen unterschiedliche  $t$ - $s$ ,  $t$ - $v$  und  $t$ - $a$ -Diagramme der gleichmäßig beschleunigten Bewegung:



Ein Beispiel für eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung ist der **freie Fall**. Der freie Fall ist ein Spezialfall der Fallbewegung aus unserem Alltag, nämlich eine Fallbewegung **ohne Luftwiderstand**, d.h. im Vakuum. Dann fallen alle Körper aus der Ruhe heraus gleich schnell.

Die Gesetze des freien Fall kann man auch verwenden, wenn der Luftwiderstand gering ist, oder beim Fall aus geringer Höhe.

Beim freien Fall hängt die Beschleunigung nur vom Ort ab, d.h. am gleichen Ort ist sie für jeden Körper gleich. Man nennt diese Beschleunigung die **Fallbeschleunigung  $g$**  und verwendet an der Erdoberfläche den Wert:

$$g = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Für einen frei fallenden Körper ohne Anfangsgeschwindigkeit gelten folgende Gesetze:

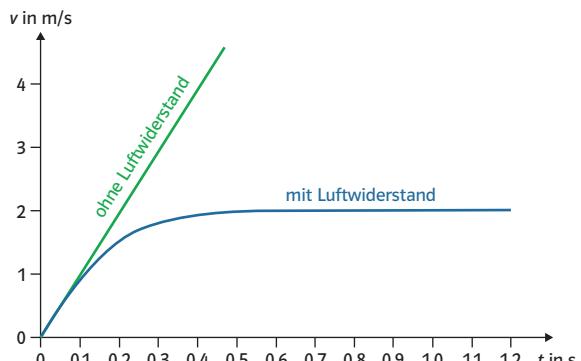
$$s(t) = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \quad (\text{Weg-Zeit-Gesetz}),$$

$$v(t) = g \cdot t \quad (\text{Geschwindigkeit-Zeit-Gesetz}),$$

$g$  = konstant.

Für den freien Fall ist der Graph im  **$t$ - $v$ -Diagramm** eine Gerade und der Körper fällt mit der Zeit immer schneller. Bezieht man den Luftwiderstand mit ein, so wird der Körper immer schneller und erreicht nach einer bestimmten Zeit eine maximale Geschwindigkeit.

Der freie Fall spielt auch beim **senkrechten Wurf nach unten** eine Rolle. Dabei wird der Körper von einem bestimmten Ort  $s_0$  mit einer Geschwindigkeit  $v_0 > 0$  nach unten abgeworfen und erfährt die konstante Gewichtskraft als beschleunigende Kraft. Es gilt:  $a = g$ . D.h. die Geschwindigkeiten  $v_F = g \cdot t$  und  $v_0$  wirken in die gleiche Richtung.



Für den senkrechten Wurf nach unten sehen somit die Bewegungsgesetze folgendermaßen aus:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2}g \cdot t^2,$$

$$v(t) = v_0 + g \cdot t.$$



Außer dem freien Fall und dem senkrechten Wurf nach unten gibt es auch den senkrechten Wurf nach oben, den waagerechten und den schießen/schrägen Wurf.

Beim **senkrechten Wurf nach oben** wirken die Abwurfgeschwindigkeit  $v_0$  und die Fallgeschwindigkeit  $v_F$  einander entgegen.

Die Bewegungsgesetze lauten:

$$s(t) = s_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

$$v(t) = v_0 - g \cdot t.$$



Zusätzlich kann man die Steighöhe  $h$  und Steigzeit  $t$  angeben:

$$h = s_0 + \frac{v_0^2}{2g}; \quad t = \frac{v_0}{g}.$$

Beim **waagerechten Wurf** wird der Körper in waagerechter Richtung abgeworfen und fällt dann senkrecht genauso schnell wie beim freien Fall. Es findet eine Überlagerung aus einer Bewegung in waagerechter Richtung mit konstanter Geschwindigkeit  $v_x$  und in senkrechter Richtung mit konstanter Beschleunigung  $g$  statt.

In x-Richtung gilt:

$$s_x = v_x \cdot t; \quad v_x = \text{konstant.}$$

In y-Richtung gilt:

$$s_y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2; \quad v_y = -g \cdot t.$$

Aus diesen beiden Richtungen ergibt sich für die Bahnkurve eine Parabel mit folgender Gleichung:

$$s_y = -\frac{g}{2v_x^2} \cdot s_x^2; \quad v = \sqrt{v_x^2 + g^2 \cdot t^2}.$$

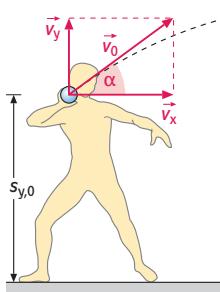
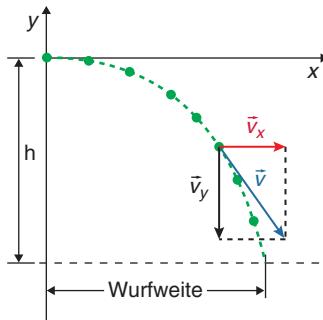
Beim **schießen/schrägen Wurf** wird der Körper unter einem Winkel  $\alpha$  abgeworfen. Es findet eine Überlagerung zwischen einer Bewegung in x-Richtung und einer Bewegung in y-Richtung statt.

$$v_x = v_0 \cdot \cos \alpha = \text{konstant}$$

$$s_x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t$$

$$v_y = v_0 \cdot \sin \alpha - g \cdot t$$

$$s_y = s_{y,0} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

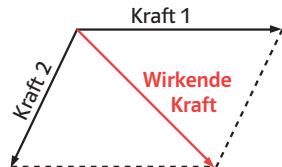


In diesem Teil der Mechanik der Dynamik geht es um Kräfte und ihre Wirkungen, d.h. um die Ursachen für Bewegungen.

Eine **Kraft** wirkt dann, wenn ein Körper seinen Bewegungszustand (durch Beschleunigung oder Richtungsänderung) ändert oder sich verformt. Die Einheit der Kraft ist 1 **Newton**. Ein Newton ist die Kraft, die man benötigt, um einen ruhenden Körper der Masse 1kg auf  $1\frac{m}{s^2}$  zu beschleunigen. Ein Newton entspricht ungefähr der Gewichtskraft, die ein 100g-Massestück auf der Erde erfährt.

Da die Kraft einen Betrag und eine Richtung besitzt, ist sie ein **Vektor**.

Kräfte kann man zusammensetzen und zerlegen.



## Newton'sche Gesetze

### 1. Trägheitsgesetz

Jeder Körper verharrt in seinem Zustand der Ruhe oder gleichförmigen geradlinigen Bewegung, wenn er nicht durch einwirkende Kräfte gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern.

Man nennt diese Eigenschaft von Körpern **Trägheit**.

### 2. Newton'sches Grundgesetz

Wirkt auf einen Körper eine Kraft, so wird er in Richtung der Kraft beschleunigt. Die Beschleunigung ist der Kraft proportional.

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

### 3. Wechselwirkungsgesetz

Kräfte treten immer paarweise auf. Übt ein Körper A auf einen anderen Körper B eine Kraft aus (actio), so wirkt eine gleichgroße, aber entgegen gerichtete Kraft von Körper B auf Körper A ( reactio).

$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B$$

Eine aus dem Alltag bekannte Kraft, ist die Reibungskraft. Man unterscheidet drei Arten von Reibungskräften die **Gleitreibungskraft**  $F_{gl}$ , **Haftriebungskraft**  $F_H$  und **Rollreibungskraft**  $F_{roll}$ .

Die Gleitreibung tritt z.B. beim Schieben einer Kiste mit konstanter Geschwindigkeit auf.

Sie wirkt der angreifenden Kraft entgegen und ist proportional zur Normalkraft  $F_N$ .

Um eine Kiste überhaupt in Bewegung zu versetzen, ist auch eine Kraft notwendig, die Haftriebungskraft.

Solange der Körper haftet, ist der Betrag der Haftkraft  $F_H$  stets gleich dem Betrag der Zugkraft  $F_z$ . Bei Vergrößerung der Zugkraft vergrößert sich auch die Haftkraft. Dies geht solange, bis die maximale Haftkraft  $F_{H,max}$  erreicht ist.

Wurde die maximale Haftkraft überschritten, kommt der Körper ins Gleiten. zieht man mit konstanter Geschwindigkeit, so sind die Beträge von Zugkraft  $F_z$  und Gleitreibungskraft  $F_{gl}$  gleich.

In der Regel ist die Gleitreibungskraft etwas kleiner als die maximale Haftkraft.

Beginnt der Körper zu rollen, so liegt Rollreibung vor.

Für Reibungskräfte gilt:  $F_R = f \cdot F_N$ , wobei  $f$  die Reibungszahl ist und von der Oberflächenbeschaffenheit des Körpers abhängt.



Die Kreisbewegung ist eine **periodische Bewegung**, da sie sich ständig wiederholt. Wir betrachten nur Kreisbewegungen mit konstanter Bahngeschwindigkeit, während sich ihre Richtung zu jedem Zeitpunkt ändert.

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r f$$

wobei  $2\pi r$  der Umfang und  $T$  die Zeit für einen Umlauf ist.

Da bei einer Kreisbewegung in der gleichen Zeit der gleiche Winkel  $\varphi$  überstrichen wird, kann man sie auch mithilfe der **Winkelgeschwindigkeit  $\omega$**  beschreiben:

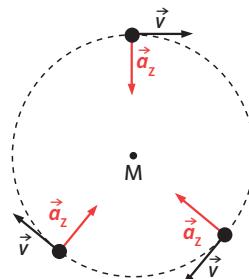
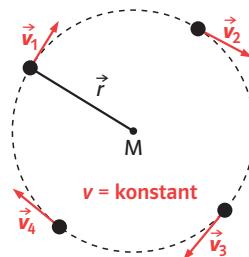
$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f.$$

Dabei wird  $\varphi$  im Bogenmaß gemessen.

Mittels der Winkelgeschwindigkeit ergibt sich für die Bahngeschwindigkeit:

$$v = \omega \cdot r.$$

Damit sich die Geschwindigkeit zu jedem Zeitpunkt ändert, ist eine Kraft notwendig. Diese Kraft wirkt zum Mittelpunkt der Kreisbewegung, also senkrecht zur Bewegungsrichtung.



Man nennt sie **Zentralkraft** oder **Zentripetalkraft**. Außerdem ruft sie eine konstante Beschleunigung mit der gleichen Richtung hervor, die **Zentralbeschleunigung** oder **Zentripetalbeschleunigung**.

Für die Zentralkraft gilt:

$$F = m \omega^2 r = m \frac{v^2}{r}.$$

Für die Zentralbeschleunigung gilt:

$$a_z = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}.$$



Stoßen zwei Kugeln aufeinander, so kann der Ausgang unterschiedlich sein. Der Ausgang hängt sowohl von der Masse der beiden Stoßpartner als auch von ihrer Geschwindigkeit ab.

Das Produkt der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers heißt **Impuls  $\vec{p}$** :

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}.$$

Man kann den Impuls eines Körpers ändern, indem man die Masse, den Betrag oder die Richtung der Geschwindigkeit ändert.

Wirkt auf einen Körper über eine bestimmte Zeitspanne eine Kraft, so führt dies auch zu einer **Änderung des Impulses**. Für die Änderung des Impulses gilt:

$$\Delta p = F \cdot \Delta t.$$

Ein weiterer Erhaltungssatz der Mechanik ist der **Impulserhaltungssatz**:

In einem abgeschlossenen System ist der Gesamtimpuls konstant.

Der Impulserhaltungssatz gilt unabhängig vom Energieerhaltungssatz. Er ist grundlegend bei der Beschreibung von **Stoßvorgängen**. Wir betrachten zentrale Stöße, d.h. Stöße, bei denen sich die Schwerpunkte der beiden Körper auf einer Geraden bewegen.

Der Impulserhaltungssatz für gerade Stöße besagt:

Der Impuls beider Stoßpartner vor dem Stoß ist gleich dem Impuls beider Stoßpartner nach dem Stoß:

$$m_A \cdot v_A + m_B \cdot v_B = m_A \cdot v'_A + m_B \cdot v'_B.$$

Man unterscheidet zwei Arten von Stößen, den **zentralen elastischen** und den **zentralen unelastischen Stoß**.

Beim zentralen elastischen Stoß gilt sowohl der Impulserhaltungssatz als auch für die kinetische Energie der Energieerhaltungssatz. Es geht keine kinetische Energie in Form von Wärme, Verformung des Körpers oder potentielle Energie verloren. Die beiden Stoßpartner bewegen sich nach dem Stoß getrennt von einander fort.

Beim zentralen unelastischen Stoß gilt der Impulserhaltungssatz, ein Energieerhaltungssatz für die kinetische Energie gibt es jedoch nicht. Ein Teil der kinetischen Energie geht verloren. Nach dem Stoß bewegen sich die beiden Körper gemeinsam mit der gleichen Geschwindigkeit fort.

Auch beim **Raketenantrieb** spielt der Impulserhaltungssatz eine wichtige Rolle.

Eine Rakete beschleunigt durch Ausstoß von Verbrennungsgasen, also nach dem sogenannten **Rückstoßprinzip**.

Die Rakete übt eine Kraft auf den Gasstrahl und das Gas übt eine entgegengesetzt gerichtete Kraft auf die Rakete aus. Der durch den Gasausstoß verlorene Impuls ist gleich dem Impuls, den die Rakete gewinnt.

$$p_{\text{Rakete}} = p_{\text{Gas}}$$

Dies gilt natürlich nur, solange man die Masse der Rakete als konstant ansehen kann, d.h. bei kurzzeitiger Beschleunigung.



Die **Gravitation** ist die wahrscheinlich älteste und rätselhafteste bekannte Kraft. Sie ist dafür verantwortlich, dass wir auf der Erde und die Himmelskörper auf ihren Bahnen bleiben. Sie wirkt über sehr große Entfernungen und hilft uns Vorgänge im Weltall zu erklären.

### Die Kepler'schen Gesetze

Johannes Kepler stellte drei Gesetze auf, mit denen man die Planetenbewegung beschreiben kann.

#### 1. Kepler'sches Gesetz:

Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen. Die Sonne steht in einem ihrer zwei Brennpunkte (Abb. 1).

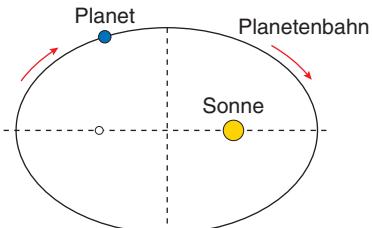


Abb. 1

#### 2. Kepler'sches Gesetz:

Der Fahrstrahl von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Abb. 2).

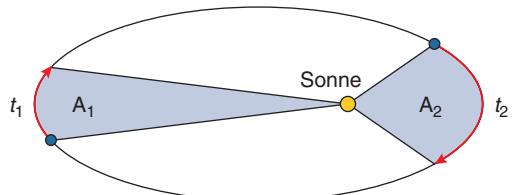


Abb. 2

#### 3. Kepler'sches Gesetz:

Die Quadrate der Umlaufzeiten zweier Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen der Planetenbahnen (Abb. 3).

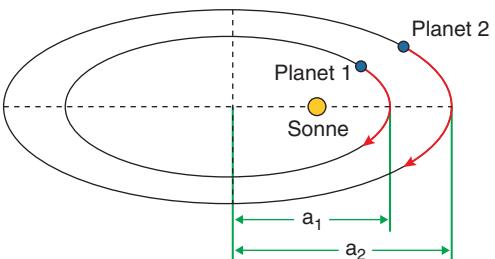


Abb. 3

Newton erklärte die Planetenbewegung mithilfe von Kräften, den **Gravitationskräften**. Dabei nahm er an, dass sich die Planeten mit konstanter Geschwindigkeit auf Kreisbahnen um die Sonne bewegen. So konnte er die bekannten Gesetze für die Kreisbewegung verwenden.

Diese führten ihn zum **Newton'schen Gravitationsgesetz**:

Zwei Körper der Massen  $m_1$  und  $m_2$  mit dem Abstand  $r$  ziehen sich an.

Je größer die Masse der beiden sich anziehenden Körper und je kleiner ihr gegenseitiger Abstand ist, umso größer ist die Anziehungskraft.

$$F = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \quad \text{wobei } \gamma \text{ die Gravitationskonstante mit dem Betrag } 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N} \cdot \text{kg}^2}{\text{m}^3 \cdot \text{s}^2} \text{ ist.}$$



In der Physik versteht man unter Energie die **Fähigkeit des Systems Arbeit zu verrichten** oder **im System zu speichern**. Man kann die Energie also nicht sehen oder anfassen, sondern nur ihre verschiedenen Wirkungen wahrnehmen, mit der sie in Erscheinung treten kann, z.B. in Form von Licht, Bewegung oder Wärme. Deshalb spricht man ganz allgemein von mechanischer, elektrischer, magnetischer, thermischer oder chemischer Energie.

In einem abgeschlossenen System gilt der **Energieerhaltungssatz**:

Die Gesamtenergie eines abgeschlossenen reibungsfreien Systems ist konstant. Es kann also keine Energie erzeugt oder vernichtet werden.

**Abgeschlossen** ist ein System dann, wenn kein Austausch mit der Außenwelt stattfindet. In der Praxis ist das natürlich fast nie der Fall, es gibt aber Fälle, in denen der Austausch gering ist und vernachlässigt werden kann.

Ist ein System nicht abgeschlossen, so kann ihm Energie entzogen oder zugeführt werden.

Die mechanische Energie ist unterteilt in:

- kinetische Energie (Bewegungsenergie),
- potentielle Energie (Lageenergie).

Die **kinetische Energie** gibt an, wie viel Arbeit man verrichten musste, um einen Körper aus der Ruhe auf eine bestimmte Geschwindigkeit zu beschleunigen. Die gleiche Arbeit braucht man auch, um den Körper wieder abzubremsen. Die kinetische Energie hängt von der Masse  $m$  und der Geschwindigkeit  $v$  des bewegten Körpers ab.

Für die kinetische Energie gilt:  $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m \cdot v^2$ .

Hebt man einen Körper der Masse  $m$  um eine Höhe  $h$ , so muss seine Gewichtskraft  $G = m \cdot g$  durch eine gleichgroße, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft aufgebracht werden. Die dazu notwendige Arbeit nennt man Hubarbeit. Da diese Arbeit nun im Körper gespeichert ist, besitzt er Energie, nämlich **potentielle Energie**.

Somit ist die potentielle Energie diejenige Energie, die ein Körper durch seine relative Lage bezgl. eines Ausgangspunktes besitzt.

Für die potentielle Energie gilt:  $E_{\text{pot}} = m \cdot g \cdot h$ .

Zur potentiellen Energie gehört auch die Spannenergie, die einer Feder durch Dehnung oder Stauchung zugeführt wird.

Für die Spannenergie gilt:  $E_{\text{Span}} = \frac{1}{2}Ds^2$       ( $D$  = Federhärte).

Unter **mechanischer Arbeit** versteht man die Energie, die ein Teilsystem auf ein anderes durch eine Kraft  $F$  längs eines Weges  $s$  überträgt.

Es gilt:  $W = F \cdot s$ .

Der Quotient aus der umgesetzten Energie  $\Delta E$  und der dazu benötigten Zeit nennt man die **Leistung P**:

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$



Es gibt **positive** und **negative** Ladungen.

Alle Körper sind aus **Atomen** aufgebaut. Ein Atom ist nach außen hin **elektrisch neutral**. Es besitzt also gleich viele positive wie negative Ladungen. Die negativen Ladungen, die **Elektronen**, befinden sich in der Atomhülle. Die positiven Ladungen, die **Protonen**, befinden sich im Atomkern.

Ein Elektron hat die kleinste negative Ladung, nämlich  $-1$  Elementarladung ( $-1e$ ).

Ein Proton hat die kleinste positive Ladung, nämlich  $+1$  Elementarladung ( $+1e$ ).

Hat ein Körper mehr positive als negative Ladungen, so ist er positiv geladen. Er hat einen sogenannten **Elektronenmangel**. Hat er mehr negative als positive Ladungen, so ist er negativ geladen. Er hat einen sogenannten **Elektronenüberschuss**.

Die **elektrische Ladung**  $Q$  gibt an, wie groß der Elektronenmangel oder der Elektronenüberschuss eines Körpers ist.

$Q = N \cdot e$ , wobei  $N$  die Anzahl der Ladungen und  $e$  die Elementarladung ist.

Die Einheit der Ladung ist das Coulomb (1C);

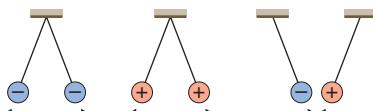
$e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

Wird Ladung transportiert, so ist **elektrischer Strom** vorhanden. Die **Stromstärke**  $I$  ist definiert als der Quotient aus der durch einen Leiterquerschnitt fließenden elektrischen Ladung  $\Delta Q$  und einer bestimmten Zeit  $\Delta t$ :

$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$ . Die Einheit der Stromstärke ist 1A (Ampere).

Zwischen geladenen Körpern wirken Kräfte.

**Gleichnamig geladene Körper** stoßen sich ab,  
**ungleichnamig geladene Körper** ziehen sich an.



Elektrische Ladungen können mit einem **Elektroskop** nachgewiesen werden.

Berührt man mit einem negativ geladenen Stab ein Elektroskop, so wandern die Elektronen des Stabes auf den Metallstab und den Zeiger des Elektroskops. Nun stoßen sich der Metallstab und der Zeiger ab und man kann einen Ausschlag erkennen. (Abb. 1)

Berührt man das Elektroskop mit einem positiv geladenen Stab, so wandern die Elektronen des neutralen Elektroskops auf den positiv geladenen Stab und es kommt zu einem Elektronenmangel im Elektroskop.

Nun ist der Metallstab und der Zeiger des Elektroskops positiv geladen und sie stoßen sich auch ab. (Abb. 2).

Nähert man den negativ geladenen Stab nur dem Elektroskop, so kommt es im Elektroskop zu einer Ladungstrennung, auch **Influenz** genannt. Die negativen Ladungen wandern im Elektroskop nach unten, während die positiven Ladungen an ihren Plätzen bleiben. Im unteren Teil überwiegen die negativen, im oberen Teil die positiven Ladungen. (Abb. 3).

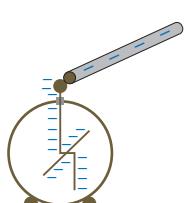


Abb. 1

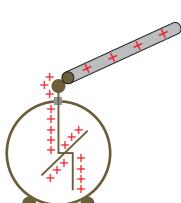


Abb. 2

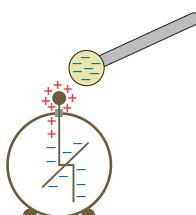


Abb. 3



Jeder elektrisch geladene Körper ist von einem **elektrischen Feld** umgeben. In ihm erfahren geladene Körper Kräfte.

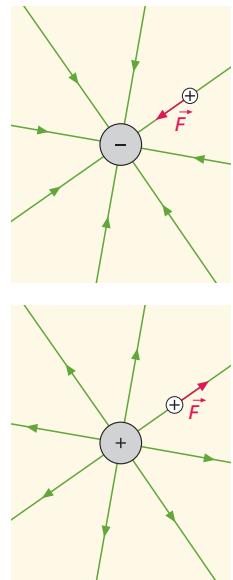
Elektrische Felder kann man nicht sehen, man kann nur ihre **Wirkungen** erkennen. Elektrische Felder werden durch **Feldlinien** beschrieben.

Eine Feldlinie ist eine Linie, deren Richtung in jedem Punkt des Feldes mit der Richtung der Kraft übereinstimmt, die ein positiv geladener Probekörper im elektrischen Feld erfährt. D.h. eine Feldlinie geht vom positiv geladenen Körper aus und endet am negativ geladenen. Eine Feldlinie beginnt nicht oder endet nicht mitten im Raum. In der Elektrostatisik gibt es keine geschlossenen Feldlinien. Außerdem überkreuzen sich Feldlinien nicht.

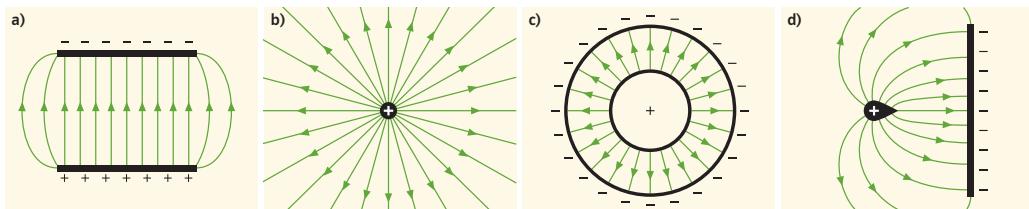
Die Richtung der Kraft auf einen geladenen Probekörper wird durch die Tangente an die Feldlinie in einem Punkt des Feldes angegeben. Positiv geladene Probekörper erfahren Kräfte in Richtung der Feldlinien, negativ geladene in entgegengesetzter Richtung.

Es gibt zwei Arten von elektrischen Feldern, **homogene** und **inhomogene** Felder.

Von einem homogenen Feld spricht man, wenn die Kraft in jedem Punkt des elektrischen Feldes in Betrag und Richtung gleich ist. Dann verlaufen die Feldlinien parallel zueinander, geradlinig und überall gleich dicht.



Bei einem inhomogenen Feld gibt es Stellen mit unterschiedlicher Stärke, d.h. die Kraft auf einen Probekörper ist nicht an allen Stellen gleich groß.



Die **elektrische Feldstärke** (Formelzeichen  $E$ ) gibt an, wie groß die Kraft  $F$  auf eine Ladung  $Q$  im elektrischen Feld ist.

$$E = \frac{F}{Q}$$

Die Einheit ist  $1\text{ N}$ .

Ladungen versuchen sich auf einem Leiter immer gleichmäßig zu verteilen. Die **Flächenladungsdichte**  $\sigma$  gibt an, wie dicht die Ladungen auf einer Fläche  $A$  sitzen. Für eine homogene Ladungsverteilung bestimmt sich  $\sigma$  wie folgt:

$$\sigma = \frac{Q}{A}.$$

Die Flächenladungsdichte ist proportional zur elektrischen Feldstärke:  $\sigma \sim E$ .

Es gilt:  $\sigma = \epsilon_0 \cdot E$ , wobei  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ C}^2/(\text{N} \cdot \text{m}^2)$  die **elektrische Feldkonstante** ist.

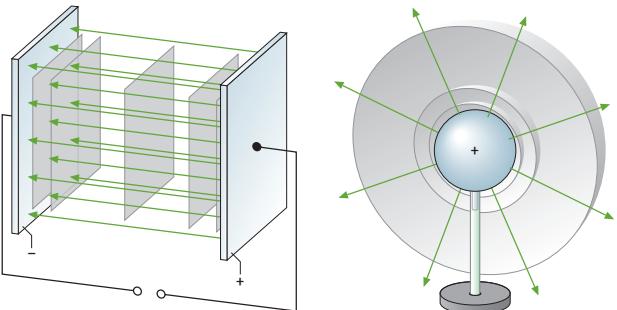


Verschiebt man einen Körper im Gravitationsfeld der Erde entgegen der Gravitationskraft, so wird ihm potentielle Energie zugeführt. Ähnlich verhält sich ein geladener Körper im elektrischen Feld.

Verschiebt man ihn entgegen der elektrischen Feldkraft entlang der Feldlinien, so wird ihm **elektrische Energie** zugeführt. Verschiebt man ihn entlang der Feldlinien in Richtung der Feldkraft, wird seine elektrische Energie in kinetische Energie umgewandelt. Keine Energieänderung erfährt der Körper, wenn man ihn senkrecht zu den Feldlinien verschiebt. Aufgrund der Analogie zur potenziellen Energie aus der Mechanik wird auch die elektrische Energie als potenzielle Energie bezeichnet.

Flächen, auf denen sich die potenzielle Energie nicht ändert, nennt man **Äquipotenzialflächen**. Sie stehen senkrecht zu den Feldlinien.

Die potenzielle Energie wird im Gravitationsfeld und im elektrischen Feld bezüglich eines Anfangspunktes angegeben. Dazu wählt man einen Bezugspunkt auf einer Äquipotenzialfläche. Dort ist die potenzielle



Energie des Körpers null. Verschiebt man nun den Körper parallel zu den Feldlinien um eine Strecke  $\Delta s$ , so beträgt seine potenzielle Energie:  $E_{\text{pot}} = F \cdot \Delta s = \pm Q \cdot E \cdot \Delta s$ .

Den Quotienten aus der potenziellen Energie und der Ladung  $Q$  nennt man **elektrisches Potenzial  $\varphi$** .

$$\varphi = \frac{E_{\text{pot}}}{Q} = E \cdot \Delta s; \quad \text{Einheit: } 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Das elektrische Potenzial hängt nur vom Ort und der elektrischen Feldstärke  $E$  ab.

Die Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten A und B eines elektrischen Feldes nennt man **elektrische Spannung**.

$$U = \varphi_B - \varphi_A = \frac{E_B - E_A}{Q} = \frac{\Delta E_{AB}}{Q}; \quad \text{Einheit: } 1 \text{V} = 1 \frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Somit ist die Spannung der Quotient aus der Energieänderung  $\Delta E_{AB}$ , die zum Transport einer Ladung  $Q$  vom Punkt A zum Punkt B erforderlich ist, und der Ladung  $Q$ .

Die Spannung hängt nicht vom Bezugspunkt des Null-Potenzials ab. Liegen die Punkte A und B auf der gleichen Äquipotenzialfläche, so besteht keine Potenzialdifferenz und somit keine Spannung zwischen ihnen.

Betrachtet man das homogene Feld zwischen zwei Metallplatten mit dem Abstand  $d$ , so gilt für die Spannung  $U$ :

$$U = \frac{\Delta E_{AB}}{Q} = \frac{Q \cdot E \cdot d}{Q} = E \cdot d.$$



Kondensatoren sind Bauelemente, die elektrische Ladung bzw. elektrische Energie speichern können. Ein Kondensator besteht aus zwei gegenüberstehenden elektrisch leitenden Körpern. Dazwischen befindet sich ein Isolator, auch Dielektrikum genannt.

Wie viel Ladung ein Kondensator speichern kann, wird durch die **Kapazität** des Kondensators gekennzeichnet.

Die Kapazität  $C$  des Kondensators ist der Quotient aus der gespeicherten Ladung  $Q$  und der anliegenden Spannung  $U$ .

$$C = \frac{Q}{U}; \quad \text{Einheit: } 1 \frac{C}{V} = 1 \text{ F (Farad).}$$

Die einfachste Form eines Kondensators ist ein **Plattenkondensator**, d.h. die beiden leitenden Körper sind Metallplatten, die einander gegenüberstehen.

Seine Kapazität wird durch seine baulichen Größen bestimmt.

Die Kapazität  $C$  ist umso größer,

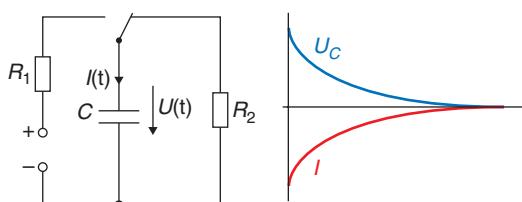
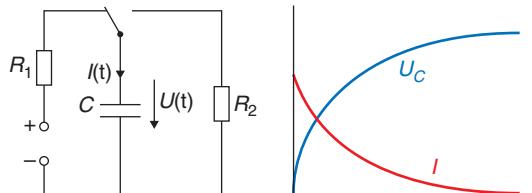
- je größer die Plattenoberfläche ( $A$ ),
- je kleiner der Plattenabstand ( $d$ ),
- je besser die Dipolbildung im Dielektrikum (je größer die relative Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$ ).

$$C = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \frac{A}{d}, \quad \text{wobei } \epsilon_0 = \text{elektrische Feldkonstante}, \epsilon_r = \text{Dielektrizitätszahl ist.}$$

Bei Luft gilt:  $\epsilon_r = 1$ .

Schließt man einen Kondensator an eine Gleichspannungsquelle an, so lädt er sich auf. Dabei fließen die Elektronen vom Minuspol der Spannungsquelle auf die eine Platte, während die freien Elektronen der anderen Platte zum Pluspol der Spannungsquelle fließen. Zwischen den beiden Platten baut sich ein **elektrisches Feld** auf, das der Polung der Spannungsquelle entgegen wirkt. Nun kann kein Strom mehr fließen. Trennt man den Kondensator von der Spannungsquelle, bleibt das elektrische Feld erhalten. Die Energie, die zum Aufbau des elektrischen Feldes benötigt wurde, ist nun im Kondensator gespeichert.

Wird der Kondensator über den elektrischen Widerstand  $R_2$  entladen, so sinkt die Spannung vom Maximalwert auf Null ab. Die Stromstärke wechselt ihre Polarität und sinkt auch vom Maximalwert auf Null ab. Der Kondensator ist dann entladen, wenn kein Strom mehr fließt.



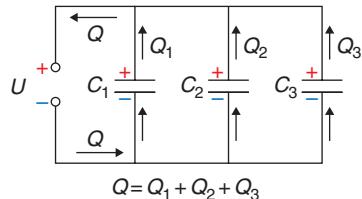
Die in einem Kondensator gespeicherte **Energie** berechnet sich durch:

$$E_{\text{el}} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2.$$



Hat ein Kondensator nicht die gewünschte Kapazität, so kann man durch Parallel- oder Reihenschaltung mehrerer Kondensatoren die benötigte Kapazität erhalten.

### Parallelschaltung von Kondensatoren



Die Pfeile zeigen die Bewegungsrichtung der Elektronen beim Aufladen des Kondensators.

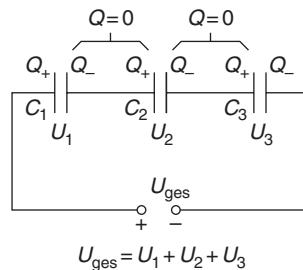
Bei der Parallelschaltung ist die Spannung konstant, während sich die Einzelladungen der Kondensatoren zur Gesamtladung  $Q$  addieren.

Somit gilt für die Gesamtkapazität  $C_{\text{gesamt}}$ :

$$C_{\text{gesamt}} = \frac{Q}{U} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots}{U} = \frac{Q_1}{U} + \frac{Q_2}{U} + \frac{Q_3}{U} + \dots = \frac{C_1 \cdot U}{U} + \frac{C_2 \cdot U}{U} + \frac{C_3 \cdot U}{U} \dots = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$$

Die **Gesamtkapazität** berechnet sich aus der **Summe der Einzelkapazitäten**.

### Reihenschaltung von Kondensatoren



Die Batterie mit der Spannung  $U$  „pumpt“ Elektronen von der linken Platte des ersten Kondensators auf die rechte Platte des dritten Kondensators.

Sind Ladungen auf den äußeren Kondensatorplatten, tritt allerdings Influenz auf und auch alle anderen Kondensatorplatten werden aufgeladen.

Die mittleren Kondensatorplatten sind nicht mit der Quelle verbunden. Ihre Gesamtladung (Vorzeichen!) ist also stets 0!

Bei der Reihenschaltung ist die Ladung konstant, während sich die Einzellspannungen der Kondensatoren zur Gesamtspannung  $U_{\text{ges}}$  addieren.

Somit gilt für die Gesamtkapazität  $C_{\text{gesamt}}$ :

$$U_{\text{ges}} = \frac{Q}{C_{\text{ges}}} = \frac{Q}{C_1 + C_2 + C_3 + \dots} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \frac{Q}{C_3} + \dots \text{ Dividiert man dies durch } Q, \text{ so gilt:}$$

$$\frac{1}{C_{\text{gesamt}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots$$

Der **Kehrwert der Gesamtkapazität** ist gleich der **Summe der Kehrwerte der Einzelkapazitäten**.

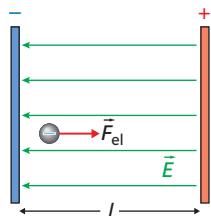


Unter einem **Ladungsträger** versteht man einen geladenen Körper. Der leichteste Ladungsträger mit der kleinsten positiven Ladung ist das Proton. Der leichteste Ladungsträger mit der kleinsten negativen Ladung ist das Elektron.

Protonen und Elektronen tragen die gleiche Ladung, nämlich die Elementarladung  
 $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ .

Befinden sich Elektronen oder Protonen in einem elektrischen Feld, so wirkt die Feldkraft auf sie. Man unterscheidet zwischen einem homogenen Längsfeld (der Ladungsträger bewegt sich parallel zu den Feldlinien) und einem homogenen Querfeld (der Ladungsträger bewegt sich senkrecht zu den Feldlinien.)

### **Elektronen im elektrischen Längsfeld**



Das Elektron beschleunigt aufgrund der elektrischen Feldkraft in Richtung der positiven Platte.

$$a = \frac{F}{m} = \frac{(E \cdot e)}{m}$$

Die elektrische Feldenergie  $E_{el}$  wird dabei in kinetische Energie des Elektrons  $E_{kin}$  umgewandelt:  $E_{el} = E_{kin}$ .

$$U \cdot e = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

Die Geschwindigkeit des Elektrons berechnet sich:

$$v = \sqrt{2U \cdot \frac{e}{m}}$$

### **Elektronen im elektrischen Querfeld**

Ein Elektron tritt mit der Anfangsgeschwindigkeit  $v_0$  in ein elektrisches Querfeld ein. Dort wird es zusätzlich aufgrund der elektrischen Feldkraft in Richtung der positiven Platte abgelenkt. Diese Bewegung ist mit dem waagerechten Wurf aus der Mechanik vergleichbar.

Die gleichförmige Bewegung in x-Richtung wird überlagert durch eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung in y-Richtung.

Es gilt:

$$v_0 = v_x = \frac{l}{t_1} \quad \text{bzw.} \quad t_1 = \frac{l}{v_x},$$

$$v_y = a_y \cdot t_1 = \frac{F_y}{m} \cdot t_1 = \frac{E \cdot e}{m} \cdot t_1 = \frac{U}{d} \cdot \frac{e}{m} \cdot t_1.$$

Somit gilt für die Ablenkung in y-Richtung:

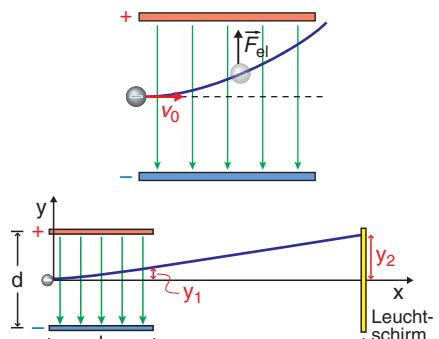
$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot t_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{l^2}{v_x^2}.$$

Außerhalb des elektrischen Feldes bewegt sich das Elektron gleichförmig und benötigt bis zum Leuchtschirm, auf dem es nachgewiesen wird, die Zeit  $t_2 = \frac{s}{v_x}$ . Dabei legt es die Strecke  $y_2$  in y-Richtung zurück.

$$y_2 = v_y \cdot t_2 = v_y \cdot \frac{s}{v_x} = \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{l \cdot s}{v_x^2}$$

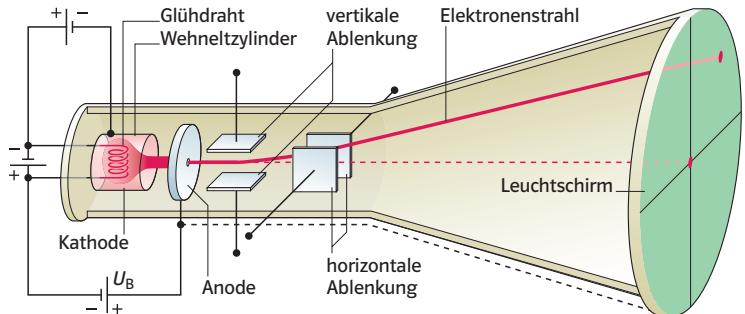
Die Gesamtablenkung in y-Richtung  $y_3$  beträgt dann:

$$y_3 = y_1 + y_2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{U}{d} \cdot \frac{l}{v_x^2} \cdot \left( \frac{1}{2} l + s \right).$$



Die Elektronenstrahlröhre oder auch Braun'sche Röhre wurde nach ihrem Erfinder K.F. Braun benannt. Ihre Anwendung findet sie z.B. in Oszilloskopen, Fernsehern und Monitoren.

In der Elektronenstrahlröhre wird ein Elektronenstrahl durch elektrische Felder beschleunigt und abgelenkt.



Die Elektronen werden in der Kathode durch **Glühemission** erzeugt. Die Spannung  $U_B$ , die zwischen der Kathode und der Anode anliegt, erzeugt ein elektrisches Feld, dass die Elektronen **beschleunigt**. Damit die Elektronen durch das Loch in der Anode fliegen, werden sie durch den negativ aufgeladenen Wehneltzylinder zu einem dünnen Strahl **gebündelt**. Nach der Anode bewegt sich der Elektronenstrahl gleichförmig. Ohne weitere Ablenkung würde er in der Mitte des Leuchtschirmes am Ende der Röhre einen Leuchtfeck bilden.

Zur weiteren **Ablenkung** in horizontaler und vertikaler Richtung dienen zwei weitere elektrische Felder. So kann jeder beliebige Punkt des Leuchtschirmes erreicht werden.

Die Kathode und Anode, die für das Beschleunigen der Elektronen verantwortlich sind, wirken wie ein elektrisches Längsfeld.

Somit verlassen die Elektronen mit der Geschwindigkeit  $v$  die Anodenöffnung:

$$v_x = \sqrt{2 U_B \cdot \frac{e}{m}}$$

Von dort fliegt der Elektronenstrahl gleichförmig weiter und wird durch zwei elektrische Querfelder in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung abgelenkt. Die dabei entstehende Parabelbahn ähnelt der Bahn des waagerechten Wurfes.

Betrachtet man die Ablenkung in  $y$ -Richtung, so erfahren die Elektronen eine Beschleunigung in diese Richtung, während sie in  $x$ -Richtung mit konstanter Geschwindigkeit weiterfliegen. Für die Ablenkung in  $y$ -Richtung gilt:

$$y = \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t_x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{U_y}{d} \cdot \frac{e}{m} \cdot \frac{l^2}{v_x^2} \quad (l = \text{Länge der Platten})$$

$$\text{Mit } v_x = \sqrt{2 U_B \cdot \frac{e}{m}} \text{ folgt für } y = \frac{l^2}{4 d U_B} \cdot U_y$$

Die Elektronenstrahlröhre in einem Oszilloskop wird dazu genutzt, um den Verlauf von Spannungen in Abhängigkeit von der Zeit auf einem Schirm darzustellen. Dabei ist der Betrag der Ablenkung proportional zur Spannung an den Ablenkplatten.



Es gibt drei Größen, durch die ein Gleichstromkreis beschrieben wird: **elektrische Stromstärke**, **elektrische Spannung** und **elektrischer Widerstand**.

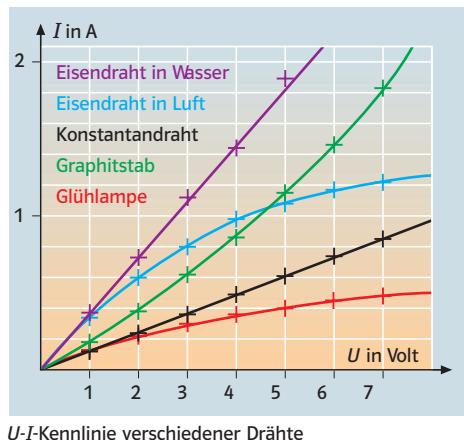
Die Stromstärke gibt an, wie viele Ladungen in einer bestimmten Zeit durch den Leiterquerschnitt fließen. Die Spannung gibt an, wie stark der elektrische Strom angetrieben wird. Der elektrische Widerstand kennzeichnet die Eigenschaft eines Bauteils, den Strom im Stromkreis zu behindern.

### Definition

Der elektrische Widerstand eines Leiters ist der Quotient aus der am Leiter anliegenden Spannung und der Stärke des durch ihn fließenden Stromes.

$$R = \frac{U}{I} \quad \text{Einheit: } 1\Omega \text{ (Ohm)} = \frac{1V}{1A}$$

Trägt man in einem Diagramm die Stromstärke gegenüber der Spannung auf, so erhält man die *U-I-Kennlinie* des Widerstandes.



Bei Leitern, bei denen die *U-I-Kennlinie* eine Ursprungsgerade ist, gilt das **Ohm'sche Gesetz**:

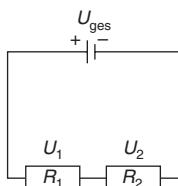
Stromstärke und Spannung sind zueinander proportional:  $U \sim I$  bzw.  $\frac{U}{I} = \text{const.}$

Der Widerstand ist konstant. Dies ist bei Konstantandraht nahezu der Fall. Bei Eisendraht ist dies nur dann der Fall, wenn man die Temperatur konstant hält. Der Widerstand hängt meistens von der Temperatur ab. D.h. mit steigender Spannung wächst die Stromstärke und die Temperatur. Deshalb gilt das ohm'sche Gesetz für metallische Leiter nur bei konstanter Temperatur.

Der elektrische Widerstand eines Körpers lässt sich mithilfe seiner geometrischen Abmessungen und einer materialspezifischen Konstanten, dem spezifischen Widerstand  $\rho$ , berechnen.

Es gilt für einen geraden Leiter mit der Länge  $l$  und der Querschnittsfläche  $A$ :  $R = \rho \cdot \frac{l}{A}$ .

### Reihenschaltung von Widerständen:

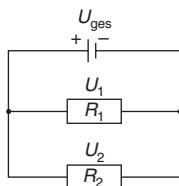


$$I = I_1 = I_2 = \dots = I_n$$

$$U = U_1 + U_2 + \dots + U_n$$

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n$$

### Parallelschaltung von Widerständen:



$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n$$

$$U = U_1 = U_2 = \dots = U_n$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}$$



Robert Andrews Millikan gelang es zwischen 1909 und 1913 die Elementarladung  $e$  zu bestimmen. Er verbesserte einen Versuch von H.A. Wilson. Millikan verwendete die sogenannte Tröpfchenmethode, heute als Millikan-Versuch bekannt.

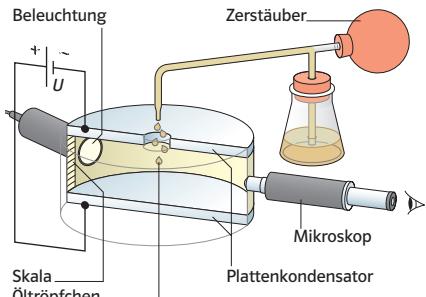
### Aufbau des Millikan-Versuchs

In einen Plattenkondensator werden parallel zu den Feldlinien Öltröpfchen gesprührt. Dabei werden sie durch die Reibung schwach geladen. Die Öltröpfchen werden seitlich durch ein Mikroskop beobachtet. Liegt am Kondensator keine Spannung an, so hängt es von der Größe der Tröpfchen ab, wie schnell sie nach unten sinken.

Legt man die Spannung  $U$  an den Kondensator, so sinken manche Tröpfchen schneller, manche langsamer, andere steigen sogar nach oben. Durch Verändern der Spannung kann man bestimmte Tröpfchen zum Schweben bringen. Umpolung der Spannung führt dazu, dass Tröpfchen, die vorher gefallen sind, nun steigen.

Auf die Tröpfchen mit der Masse  $m$ , dem Volumen  $V$  und der Ladung  $q$  wirken folgende Kräfte:

- Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g$ ,
- elektrische Kraft  $F_{el} = q \cdot E$ ,
- Stokessche Reibungskraft  $F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v$  ( $\eta$ : Zähigkeit des Stoffes,  $r$ : Tröpfchenradius;  $v$ : Geschwindigkeit).



Aufbau des Millikan-Versuchs

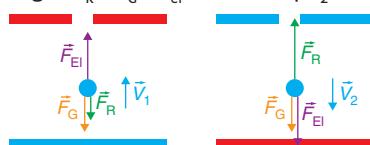
Im Plattenkondensator gilt für die Öltröpfchen beim:

1. Steigen mit Feld: Die Gravitationskraft und die elektrische Kraft sind entgegengesetzt gerichtet. Das Tröpfchen steigt mit konstanter Geschwindigkeit.

Es gilt:  $F_{el} = F_G + F_R$  bzw.  $q \cdot E = m \cdot g + 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v_1$ .

2. Fallen mit Feld: Die Gravitationskraft und die elektrische Kraft sind gleich gerichtet. Das Tröpfchen fällt mit konstanter Geschwindigkeit.

Es gilt:  $F_R = F_G + F_{el}$  bzw.  $6\pi \cdot \eta \cdot v_2 = m \cdot g + q \cdot E$ .



Um die Elementarladung  $q = n \cdot e$  zu bestimmen, löst man die beiden Gleichungen nach  $v_1$  bzw.  $v_2$  auf und bestimmt  $v_1 + v_2$  bzw.  $v_1 - v_2$ . Eliminiert man in beiden Gleichungen  $r$  und löst die erhaltene Gleichung nach  $q$  auf, erhält man mit  $E = \frac{U}{d}$  und der Teilchenmasse  $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  ( $\rho$ : Dichte des Öls>):

$$q = n \cdot e = \frac{9}{2} \pi \sqrt{\frac{\eta^3 d^2}{6 \rho g}} \cdot \frac{1}{U} (v_1 + v_2) \sqrt{v_1 - v_2}$$

Genaue Messungen ergaben für die Elementarladung:

$$e = 1,60217646 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

1923 erhielt Millikan für den Nachweis der Quantelung der elektrischen Ladung den Nobelpreis.



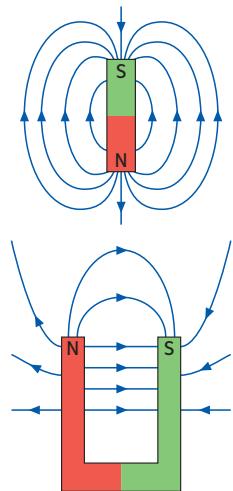
Jeder magnetische Körper ist von einem **magnetischen Feld** umgeben. In ihm erfahren magnetische Körper und Körper, die Eisen, Nickel oder Kobalt enthalten, Kräfte.

Jeder magnetische Körper besitzt zwei Pole, **Nord-** und **Südpol**, dort sind die magnetischen Kräfte am stärksten. Bricht man einen Magneten durch, so entstehen zwei Magnete mit jeweils einem Nord- und einem Südpol.

Magnetische Felder kann man nicht sehen, man kann nur ihre **Wirkungen** erkennen. Diese Wirkungen kann man durch Probemagnete nachweisen.

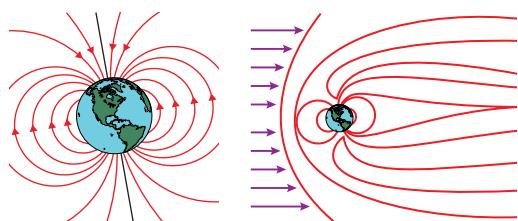
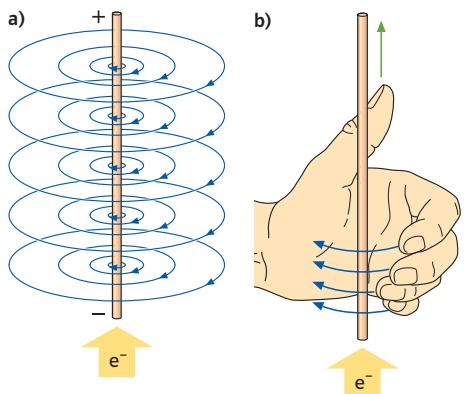
Magnetische Felder werden wie elektrische Felder durch **Feldlinien** beschrieben. Man kann sie mithilfe von Eisenfeilspänen sichtbar machen. Eine Feldlinie ist eine Linie, deren Richtung in jedem Punkt des Feldes mit der Richtung der Kraft übereinstimmt, die der Nordpol eines Probemagneten im magnetischen Feld erfährt. D.h. eine Feldlinie geht vom Nordpol aus und endet am Südpol. Eine Feldlinie beginnt nicht oder endet nicht mitten im Raum. Magnetische Feldlinien sind stets geschlossen, sie überkreuzen und verzweigen sich nicht.

Ein Magnetfeld ist **homogen**, wenn die Kraft in jedem Punkt des Feldes in Betrag und Richtung gleich ist. Dann verlaufen die Feldlinien parallel zueinander und überall gleich dicht.



Auch **elektrischer Strom** erzeugt magnetische Felder. Die Feldlinien verlaufen kreisförmig um den stromdurchflossenen Leiter. Kehrt man die Richtung des Stromes im Leiter um, so ändern die Feldlinien ihre Richtung. Die Richtung der Feldlinien wird mit der **Linken-Hand-Regel** bestimmt.

Dazu umfasst man mit der linken Hand den Leiter, wobei der Daumen in Richtung des Elektronenflusses zeigt. Die gekrümmten Finger geben dann die Feldlinienrichtung an.



Unsere Erde ist von einem Magnetfeld umgeben. Dieses Magnetfeld ähnelt in Erdnähe dem eines Stabmagneten. Die magnetischen Feldlinien treten auf der Südhalbkugel aus der Erde aus und durch die Nordhalbkugel wieder in die Erde ein. Oberhalb der Erdatmosphäre wird das Magnetfeld durch den Sonnenwind verformt.



Bringt man einen stromdurchflossenen Leiter senkrecht zu den Feldlinien in ein Magnetfeld, so übt dieses Magnetfeld eine Kraft auf ihn aus.

Diese Kraft  $F$  ist abhängig von der Stromstärke  $I$  und Länge  $s$  des Leiters.

Es gilt:

$F \sim I$ , bei  $s = \text{konstant}$ ,

$F \sim s$ , bei  $I = \text{konstant}$ ,

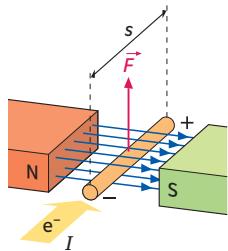
Somit gilt:  $F \sim I \cdot s$  bzw.  $\frac{F}{I \cdot s} = \text{konstant} = B$ .

$B$  nennt man die **magnetische Flussdichte**. Es handelt sich dabei um eine vektorielle Größe in Feldlinienrichtung. Sie steht sowohl zu  $F$  als auch  $s$  senkrecht.

Einheit der magnetischen Flussdichte:  $1 \text{ T (Tesla)} = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$

Steht der Leiter nicht senkrecht zu den Feldlinien, sondern unter einem Winkel  $\alpha$ , so gilt für die Kraft  $F$ :

$$F = B \cdot I \cdot s \cdot \sin \alpha.$$



Ein weitere Größe zur Angabe der Stärke des magnetischen Feldes ist die **magnetische Feldstärke  $H$** .

Es gilt:  $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot H$ , wobei  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$  die magnetische Feldkonstante und  $\mu_r$  die Permeabilitätszahl ist.

Magnetfelder werden oft durch stromdurchflossene Spulen erzeugt. Diese Magnetfelder haben den Vorteil, dass sie in Stärke und Orientierung variiert oder abgeschaltet werden können. Bei idealen Spulen, d.h. wenn die Länge  $l$  der Spule sehr viel größer ist als ihr Durchmesser  $d$ , verlaufen die Feldlinien im Spuleninneren nahezu homogen. Die Feldlinien im Inneren sind parallel zur Spulenachse und die Flussdichte ist konstant.

Für die magnetische Flussdichte einer langen Spule gilt:

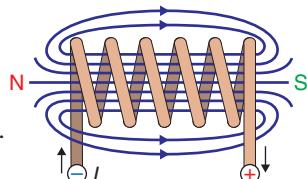
$B \sim I$ , wenn die Windungszahl  $n$  und die Länge  $l$  der Spule konstant,

$B \sim n$ , wenn die Stromstärke  $I$  und die Länge  $l$  der Spule konstant,

$B \sim 1/l$ , wenn die Stromstärke  $I$  und die Windungszahl  $n$  der Spule konstant.

Somit gilt:  $B \sim I \cdot n \cdot 1/l$  bzw.  $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \cdot n / l$ .

Die **Permeabilitätszahl  $\mu_r$**  hängt vom Material ab. So kann man z.B. durch Einfügen eines Eisenkernes in das Spuleninnere das Magnetfeld erhöhen, bei konstanter Stromstärke und Länge der Spule.

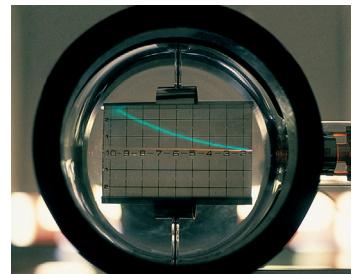


Elektrisch geladene Teilchen, wie z.B. Elektronen, die sich in einem Magnetfeld bewegen, erfahren dort eine Kraft, die **Lorentzkraft**.

Die Lorentzkraft ist am größten, wenn sich die Elektronen senkrecht zu den Feldlinien des Magnetfeldes bewegen. Bewegen sich die Elektronen parallel zu den Feldlinien, so ist die Lorentzkraft gleich null.

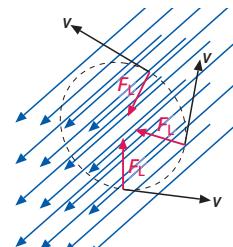
Die Richtung der Lorentzkraft wird mit der **Drei-Finger-Regel** der linken Hand bestimmt.

Dabei zeigt der Daumen in Richtung der bewegten Elektronen, der Zeigefinger in Richtung der magnetischen Feldlinien. Der Mittelfinger gibt dann die Richtung der Kraft an.



Elektronen werden im Magnetfeld abgelenkt.  
Foto: Klett-Archiv, Stuttgart

Befindet sich ein Elektronenstrahl in einer Fadenstrahlröhre, so zwingt das homogene Magnetfeld die Elektronen auf eine Kreisbahn. Auf alle Elektronen wirkt die gleiche ablenkende Kraft.



### Bestimmung der Lorentzkraft

In einem Elektronenstrahlabschnitt  $\Delta s$  befinden sich  $N$  Elektronen, die sich senkrecht zur Richtung der magnetischen Feldlinien mit der Geschwindigkeit  $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  bewegen.

Mit:  $I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N \cdot e}{\Delta t}$  ergibt sich für die Lorentzkraft  $F_L = B \cdot I \cdot \Delta s = B \cdot \frac{N \cdot e}{\Delta t} \cdot \Delta s = N \cdot e \cdot v \cdot B$ .

### Bestimmung der Elektronenmasse und spezifischen Ladung

Die Ablenkung von Elektronen dient zur Bestimmung der Elektronenmasse und der spezifischen Ladung. Da die Lorentzkraft senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen steht, bewegen sich die Elektronen auf einer Kreisbahn (Zentripetalkraft  $F_z = m \cdot \frac{v^2}{r}$  steht senkrecht zur Geschwindigkeit).

Es gilt also:  $F_L = e \cdot B \cdot v = m \cdot \frac{v^2}{r} = F_z$  bzw.  $\frac{e}{m} = \frac{v}{B \cdot r}$ .

Setzt man für  $v$  die bekannte Beziehung  $v = \sqrt{2 \cdot U_B \cdot \frac{e}{m}}$  ein, so folgt für  $\frac{e}{m} = \frac{2 \cdot U_B}{B^2 \cdot r^2}$ .

Messungen ergeben:  $\frac{e}{m} = 1,7588 \cdot 10^{11} \frac{C}{kg}$  und  $m_e = 9,109 \cdot 10^{-31} kg$ .

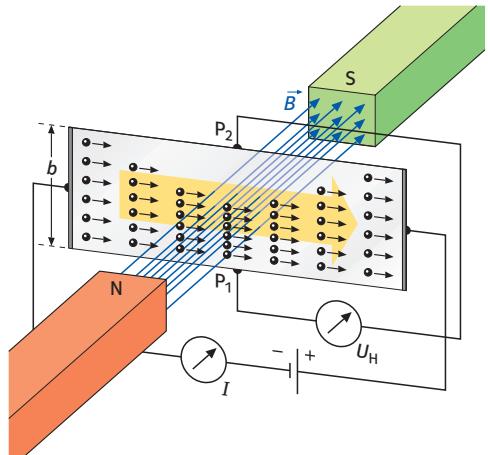


Der Halleffekt ist nach dem amerikanischen Physiker Edwin Herbert Hall benannt, der damit einen einfachen Weg zeigte, um die **Stärke magnetischer Felder** zu bestimmen.

Dazu lässt man durch ein leitfähiges Plättchen einen Strom von Elektronen fließen. Zwei einander gegenüberliegende Kontakte am Rand des Plättchens werden mit einem Spannungsmessgerät verbunden. Dabei wird es von einem Magnetfeld durchsetzt, das in das Plättchen hineinzeigt und senkrecht dazu steht.

Nun erfährt jedes Elektron eine Lorentzkraft und wird nach unten abgelenkt. Somit entsteht am oberen Ende des Plättchens ein Elektronenmangel ( $P_2$ ) und am unteren Ende ein Elektronenüberschuss ( $P_1$ ). Dadurch kann man zwischen  $P_1$  und  $P_2$  eine Spannung messen, die sog. **Hallspannung**.

Diese Spannung wächst solange, bis die Kraft auf die Elektronen im elektrischen Feld  $F_{el}$  und die Lorentzkraft gleich groß ist.



$$F_{el} = F_L$$

$$e \cdot E = e \cdot v_D \cdot B$$

$$e \cdot \frac{U_H}{b} = e \cdot v_D \cdot B$$

$$U_H = v_D \cdot B \cdot b$$

Die Hallspannung ist abhängig vom Material des Plättchens, d.h. von der Beweglichkeit und Dichte der vorhandenen Ladungsträger. Das Material des Plättchens bestimmt jedoch auch die Polung der Hallspannung. So zeigen Versuche mit Kupfer- oder Silberplättchen, dass  $P_1$  der Minuspol ist. Bei Versuchen mit Zink- oder Cadmiumplättchen hingegen ist  $P_1$  der Pluspol. Die deutet auf bewegliche positive Ladungsträger hin.

Mit Hilfe der Hallspannung lässt sich auch die mittlere Driftgeschwindigkeit von Elektronen bestimmen. Sie liegt in Metallen bei ungefähr  $1 \frac{\text{mm}}{\text{s}}$ . In Halbleitern ist sie wesentlich größer.

Aus der mittleren Driftgeschwindigkeit  $v_D$  wiederum kann man die Anzahl, Art und Dichte der Ladungsträger bestimmen.



Bewegt man einen Leiter in einem Magnetfeld, so kann man eine Spannung erzeugen, die **Induktionsspannung**.

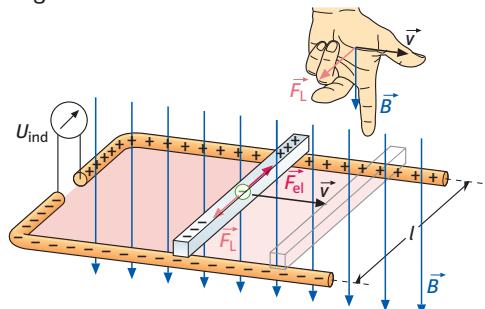
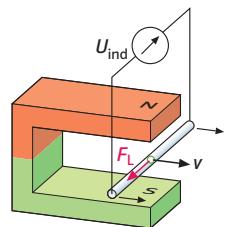
Diese Spannung ist eine Folge der Lorentzkraft. Durch die Bewegung des Leiters senkrecht zu den Magnetfeldlinien werden auch die Elektronen im Leiter senkrecht zu den Feldlinien bewegt und erfahren die Lorentzkraft  $F_L$ . Die Lorentzkraft wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung der Elektronen und verschiebt diese zusätzlich. Die Richtung der Verschiebung wird mit der Drei-Finger-Regel der linken Hand bestimmt. So entsteht am einen Ende des Leiters ein Elektronenüberschuss und am anderen Ende des Leiters ein Elektronenmangel. Zwischen den beiden Leiterenden entsteht somit ein elektrisches Feld und man kann eine Induktionsspannung  $U_{\text{ind}}$  abgreifen.

Es gilt:  $F_L = B \cdot e \cdot v$  und  $F_{\text{el}} = e \cdot E = e \cdot U_{\text{ind}} / l$  (wobei  $l$  = Leiterlänge).

Wenn  $F_L = F_{\text{el}}$  ist, ist die Ladungstrennung abgeschlossen und es ergibt sich:

$$U_{\text{ind}} = B \cdot l \cdot v.$$

Bei diesem Vorgang wird kinetische Energie in elektrische Energie umgewandelt. Dieses Prinzip benutzt man bei **Generatoren**.



Eine Induktionsspannung tritt auch auf, wenn sich die magnetische Flussdichte, die die Spule durchsetzt, ändert.

### Induktionsspannung bei sich ändernder Fläche

Liegt ein konstantes Magnetfeld vor und eine Spule mit  $n$  Windungen wird in das Magnetfeld hineinbewegt oder dort gedreht bzw. verformt, so wird eine Induktionsspannung hervorgerufen. Da sich hierbei die senkrecht durchsetzte Fläche ändert, gilt:

$$U_{\text{ind}} = n \cdot B \cdot \frac{\Delta A_s}{\Delta t}.$$

Befindet sich die Leiterschleife schief im Magnetfeld, so ist die für die Induktionsspannung wirksame Fläche kleiner als die Spulenfläche.

### Induktionsspannung bei sich ändernder magnetischer Flussdichte

Durch eine zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte bei konstanter durchsetzter Fläche kann auch eine Induktionsspannung hervorgerufen werden.

Es gilt:

$$U_{\text{ind}} = n \cdot A_s \cdot \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Dabei hängt der Betrag der Induktionsspannung von der Schnelligkeit der Änderung der magnetischen Flussdichte ab.



Der Betrag der Induktionsspannung hängt sowohl von der zeitlichen Änderung der wirksamen Fläche  $\Delta A_s$  als auch von zeitlichen Änderung der magnetischen Flussdichte  $\Delta B$  ab.

Das Produkt aus wirksamer Fläche und magnetischer Flussdichte nennt man **magnetischer Fluss  $\Phi$** :

$$\Phi = A_s \cdot B.$$

Mit Hilfe des magnetischen Fluxes erhält man das **Induktionsgesetz**:

$$U_{\text{ind}} = -n \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$$

bzw. in differentieller Form:

$$U_{\text{ind}} = -n \frac{d\Phi}{dt} = -n \cdot \left( A_s \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_s}{dt} \right).$$

Das Minuszeichen im Induktionsgesetz kommt durch die **Lenz'sche Regel**:

Die Induktionsspannung und der dadurch hervorgerufene Induktionsstrom wirken immer ihrer Ursache entgegen.

Wird eine Spule ( $n_1, l_1$ ), in dem Inneren sich eine zweite Spule ( $A_2, n_2$ ) befindet, von einem sich ändernden Strom durchflossen, so wird in der inneren Spule eine Spannung induziert.

Befindet sich die innere Spule senkrecht zum Erregerfeld so gilt:

$$U_{\text{ind}} = -n_2 \frac{d\Phi}{dt} = -n_2 \cdot \left( A_2 \frac{dB}{dt} + B \frac{dA_2}{dt} \right).$$

Da sich die durchsetzte Fläche  $A_2$  nicht ändert, ist  $\frac{dA_2}{dt} = 0$  und für die Induktionsspannung gilt:

$$U_{\text{ind}} = -n_2 \cdot A_2 \frac{dB}{dt}.$$

Da das Magnetfeld durch die äußere Spule erzeugt wird, gilt für die magnetische Flussdichte  $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \frac{n_1}{l_1}$  und damit für die Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = -n_2 \cdot A_2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \frac{dI}{dt} \cdot \frac{n_1}{l_1}.$$

Technische Anwendungen für die Lenz'sche Regel gibt es viele. Dabei tritt immer der Begriff **Wirbelströme** auf.

Wirbelströme treten bei massiven Metallkörpern auf, z.B. bei einem Aluminiumring.

Wird ein solcher Ring von einem sich ändernden Magnetfeld durchsetzt, so entsteht im Ring ein Ringstrom, der auch **Wirbelstrom** genannt wird.

Ein Wirbelstrom kann auch durch Änderung der wirksamen Fläche auftreten, wenn z.B. ein als Pendel aufgehängter Ring durch ein konstantes Magnetfeld pendelt.

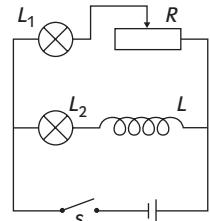
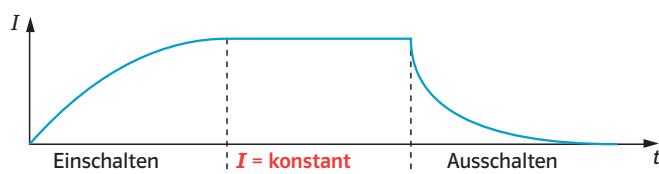
Dabei wird der Ring aufgrund der Lenz'schen Regel gebremst.



Eine Spule, die von einem Strom durchflossen wird, baut in ihrem Inneren ein Magnetfeld auf. Dieses Magnetfeld ruft eine Induktionsspannung und einen Induktionsstrom hervor, die ihrer Ursache, also der angelegten Spannung und dem Strom, entgegen wirken. Diesen Vorgang nennt man **Selbstinduktion**. Diesen Effekt beobachtet man, wenn man eine Spule  $L$  vor eine Glühlampe schaltet und in einem parallelen Stromkreis eine Glühlampe mit veränderbarem Widerstand schaltet. Dieser Widerstand dient zum Ausgleich des ohmschen Widerstandes der Spule, damit der Stromfluss durch beide Glühlampen gleich ist.

Schließt man den Stromkreis, so verzögert die Induktionsspannung der Spule den Anstieg der Stromstärke und führt dazu, dass die Lampe in diesem Stromkreis später aufleuchtet als die Glühlampe ohne Spule. Auch beim Öffnen des Stromkreises führt die Spule dazu, dass die Stromstärke langsamer abfällt und die Glühlampe mit der vorgeschalteten Spule länger leuchtet.

Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf der Stromstärke beim Einschalt- und Ausschaltvorgang:



### Induktivität einer Spule

Mithilfe der Induktivität einer Spule kann man berechnen, wie stark der Bau der Spule, also ihre Querschnittsfläche, ihre Länge und Windungszahl den Anstieg bzw. Abfall der Stromstärke durch die Induktionsspannung behindert.

Da sich bei der Spule die durchsetzte Fläche nicht ändert, ist  $\frac{dA_s}{dt} = 0$  und die Induktionsspannung vereinfacht sich zu  $U_{\text{ind}} = -nA_s \frac{dB}{dt}$ .

Mit der magnetischen Flussdichte der Spule  $B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot I \frac{n}{l}$  folgt für die Induktionsspannung

$$U_{\text{ind}} = -\mu_0 \cdot \mu_r \frac{n^2}{l} \cdot A_s \frac{dI}{dt} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Dabei heißt  $L$  die Induktivität der Spule. Ihre Einheit ist  $1 \text{ H} (1 \text{ Henry}) = 1 \frac{\text{Vs}}{\text{A}}$ .

Es gilt:

Eine Spule hat die Induktivität  $1 \text{ H}$ , wenn bei einer Stromstärkenänderung von  $1 \text{ A}$  pro Sekunde eine Induktionsspannung von  $1 \text{ V}$  entsteht.



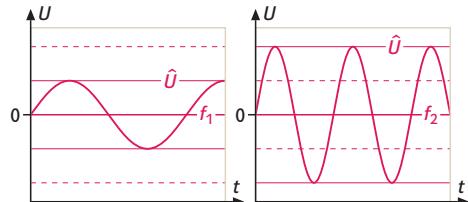
Aus unserem Alltag kennen wir den Begriff **Wechselspannung** bzw. **Wechselstrom**. Wechselspannung wird mithilfe von Generatoren erzeugt. Dabei wird die sinusförmige Wechselspannung durch Rotation einer Spule oder einer Leiterschleife in einem homogenen Magnetfeld erzeugt. Diese Rotation bewirkt eine Änderung des magnetischen Flusses und damit eine Induktionsspannung.

Rotiert die Spule mit der Frequenz  $f$  in einem homogenen Magnetfeld, so kann man mit einem Oszilloskop eine sinusförmige Wechselspannung beobachten. Es gilt:

$$U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t),$$

wobei die Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  angibt, wie schnell sich die Spannung ändert.

$\hat{U}$  ist der maximale Wert der Spannung, auch Scheitelwert genannt, und wächst proportional mit der Frequenz  $f$ .

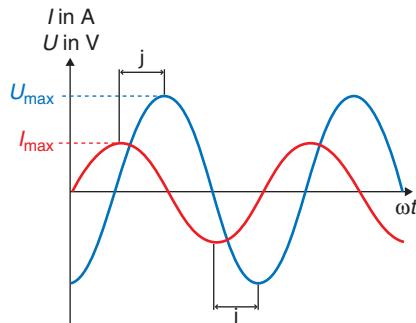
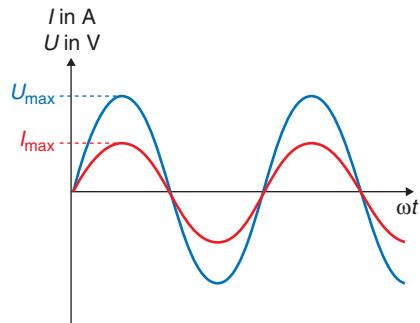


Nehmen Spannung und Stromstärke zur gleichen Zeit ihre maximalen Werte an, so ist die Phasenverschiebung  $\varphi$  zwischen ihnen null. In diesem Fall gilt:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{\hat{U}}{R} \cdot \sin(\omega \cdot t) = \hat{I} \cdot \sin(\omega \cdot t).$$

Nehmen die beiden ihre maximalen Werte zu verschiedenen Zeiten an, so gilt für die Spannung:

$$U(t) = \hat{U} \cdot \sin(\omega \cdot t - \varphi).$$



Zur Messung von Wechselspannung und Wechselstrom gibt es Messgeräte, die einen konstanten Wert anzeigen. Dies sind nicht die maximalen Werte, sondern kleinere **Effektivwerte**. Die Effektivwerte für Wechselspannung und Wechselstrom entsprechen der Spannung und der Stromstärke einer Gleichspannungsquelle, die im gleichen Stromkreis die gleiche Leistung umsetzt. Es gilt:

$$\hat{U} = \sqrt{2} \cdot U_{\text{eff}} \quad \text{und} \quad \hat{I} = \sqrt{2} \cdot I_{\text{eff}}.$$



Im Wechselstromkreis gibt es ohmsche, induktive und kapazitive Widerstände.

### Ohm'sche Widerstände

Sowohl im Gleichstromkreis als auch im Wechselstromkreis hat ein ohmscher Widerstand die Eigenschaft elektrische Energie in Wärme oder Licht umzuwandeln. Man nennt sie deshalb Wirkwiderstände  $R$ . Weil bei dieser Umwandlung die Stromrichtung unwichtig ist, gelten für Wirkwiderstände im Wechselstromkreis die gleichen Gesetze wie im Gleichstromkreis.

Es gilt:  $R = \frac{U}{I}$ .

Beim Wirkwiderstand sind Stromstärke  $I$  und Spannung  $U$  in Phase.

### Induktive Widerstände

Der Widerstand einer Spule im Wechselstromkreis ist sehr viel größer als im Gleichstromkreis. Dies kommt daher, dass die Selbstinduktionsspannung in der Spule einen Induktionsstrom hervorruft, der nach dem Lenz'schen Gesetz seiner Ursache entgegenwirkt.

Aufgrund der Induktivität  $L$  der Spule nennt man diesen Widerstand **induktiver Widerstand  $R_L$  oder  $X_L$** .

Es gilt:  $R_L = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = 2\pi \cdot f \cdot L = \omega \cdot L$ .

Beim induktiven Widerstand sind Stromstärke  $I$  und Spannung  $U$  phasenverschoben. Die Stromstärke erreicht eine Viertelperiode nach der Spannung ihren maximalen Wert.

Da in einem Stromkreis mit induktivem Widerstand die Energie erhalten bleibt, nennt man diesen Widerstand auch **Blindwiderstand**.

### Kapazitive Widerstände

Legt man an einem Kondensator Wechselspannung an, so wird er abwechselnd auf- und entladen und ruft dadurch einen Wechselstrom hervor, der durch den Widerstand des Kondensators begrenzt wird.

Aufgrund der Kapazität  $C$  des Kondensators nennt man den Widerstand **kapazitiven Widerstand  $R_C$  oder  $X_C$** .

Es gilt:  $R_C = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} = \frac{\hat{U}}{\hat{I}} = \frac{1}{2\pi \cdot f \cdot C} = \frac{1}{\omega \cdot C}$ .

Wie beim induktiven Widerstand sind auch beim kapazitiven Widerstand Stromstärke und Spannung phasenverschoben. Die Stromstärke erreicht eine Viertelperiode vor der Spannung ihren maximalen Wert. Auch dieser Widerstand ist ein Blindwiderstand.

Für das Zusammenwirken mehrerer Widerstände gilt:

Größe	Reihenschaltung	Parallelschaltung
Wirkwiderstand $R$	$R_{\text{ges}} = R_1 + R_2$	$\frac{1}{R_{\text{ges}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$
Blindwiderstand $X$	$X = \omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}$	$\frac{1}{X} = \omega \cdot C - \frac{1}{\omega \cdot L}$
Scheinwiderstand $Z$	$Z = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2}$	$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{R_C} - \frac{1}{R_L}\right)^2}$



Eine Anwendung der elektromagnetischen Induktion findet sich beim **Transformator**. Er kann mittels Induktion Wechselspannungen und Wechselströme herauf- und heruntertransformieren.

Auf einem geschlossenen Eisenkern befinden sich zwei Spulen, die **Primärspule** und die **Sekundärspule**. An den Enden der Primärspule liegt eine Wechselspannung  $U_1(t) = U_1 \cdot \sin(\omega \cdot t)$ . Diese führt in der Primärspule zu einem Wechselstrom  $I_1(t)$ , der im Eisenkern einen sich ändernden magnetischen Fluss  $\Phi_1(t)$  bewirkt. Die Änderung des magnetischen Flusses erzeugt in der Sekundärspule eine Induktionsspannung.

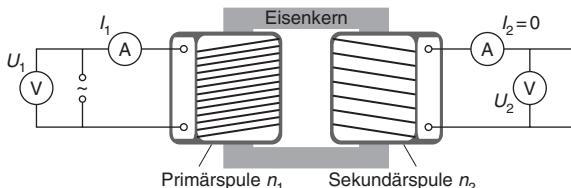
Entnimmt man der Sekundärspule keinen Strom ( $I_2 = 0$ ), so handelt es sich um einen **unbelasteten Transformator**.

Verbindet man die Sekundärspule mit einem Widerstand, so wird in ihr ein Strom erzeugt, der wiederum einen magnetischen Fluss hervorruft. Es handelt sich um einen **belasteten Transformator**.

Zusätzlich unterscheidet man noch zwischen einem **idealen** und einem **realen Transformator**. Beim idealen Transformator treten keine Energieverluste auf, d.h. die gesamte zugeführte Energie wird im Sekundärkreis genutzt. Beim realen Transformator geht hingegen ein Teil z.B. in Form von thermischer Energie verloren.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den idealen Transformator.

### Idealer unbelasteter Transformator



Der durch die Primärspule im Eisenkern erzeugte magnetische Fluss  $\Phi_1(t)$  durchsetzt auch die Sekundärspule  $\Phi_2(t) = \Phi_1(t) = \Phi(t)$ . Es entsteht eine Induktionsspannung  $U_{2,\text{ind}}$ . Wird der Sekundärspule kein Strom entnommen, so erzeugt sie kein Magnetfeld und wirkt nicht auf die Primärspule.

In der Primärspule wird eine Selbstdunktionsspannung  $U_{1,\text{ind}}$  erzeugt, die nach dem Lenz'schen Gesetz der angelegten Wechselspannung  $U_1$  entgegenwirkt.

Da bei einem idealen Transformator der ohmsche Widerstand der Primärspule null ist, gilt:

$$U_1(t) = U_{1,\text{ind}}(t) = n_1 \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \text{ In der Sekundärspule wird die Induktionsspannung } U_2(t) = n_2 \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \text{ induziert.}$$

Da es beim unbelasteten Transformator keine weiteren Induktionsvorgänge gibt, folgt:

$$\frac{U_1(t)}{U_2(t)} = -\frac{n_1}{n_2} \text{ bzw. } \frac{U_{1,\text{eff}}}{U_{2,\text{eff}}} = \frac{n_1}{n_2}.$$

### Idealer belasteter Transformator

Befindet sich im Sekundärkreis ein Verbraucher  $R$ , so fließt

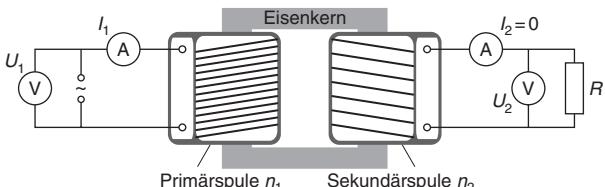
der Strom  $I_2 = \frac{U_2(t)}{R}$  durch

ihn. Beim idealen Transformator ist

dabei die vom Sekundärkreis abgegebene Wirkleistung genauso groß wie die vom Primärkreis aufgenommene Wirkleistung. Es gilt:  $P_1(t) = P_2(t)$  bzw.  $U_{1,\text{eff}} \cdot I_{1,\text{eff}} \cdot \cos(\Delta\varphi) = U_{2,\text{eff}} \cdot I_{2,\text{eff}}$ , wobei  $\varphi$  die

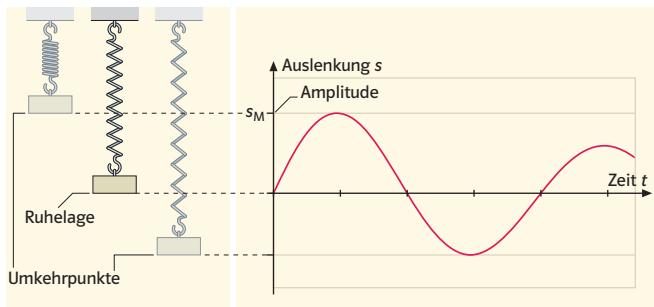
Phasendifferenz zwischen Strom und Spannung im Primärkreis ist. Für  $R = 0$  ist  $\varphi = 0$  und damit  $\cos(\Delta\varphi) = 1$ .

$$\text{Es gilt dann: } \frac{I_{2,\text{eff}}}{I_{1,\text{eff}}} = \frac{U_{1,\text{eff}}}{U_{2,\text{eff}}} = \frac{n_1}{n_2}.$$



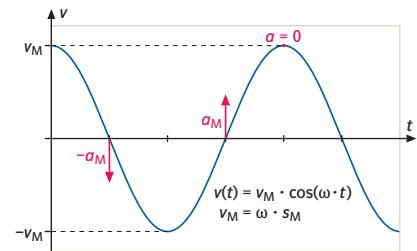
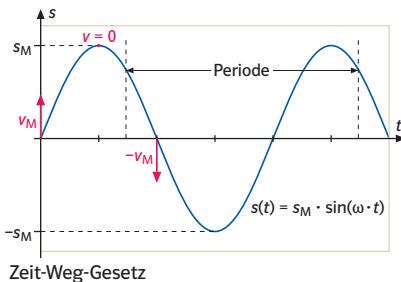
Kehrt sich bei einer sich wiederholenden Bewegung die Richtung immer wieder um, so nennt man diese Bewegung eine **Schwingung**. Das schwingungsfähige System nennt man **Oszillator**.

Zeichnet man eine Federschwingung in einem Weg-Zeit-Diagramm auf, so erhält man eine Kurve, die der Sinuskurve ähnlich ist.



Wird im Laufe der Schwingung die Amplitude kleiner, so spricht man von einer **gedämpften Schwingung**. Bleibt die Amplitude gleich, so handelt es sich um eine **ungedämpfte Schwingung** und das Weg-Zeit-Diagramm entspricht einer Sinuskurve.

In einem solchen Fall, sagt man auch, die Schwingung ist **harmonisch**. Sie wird durch folgende Bewegungsgesetze beschrieben:



Dem Zeit-Beschleunigung-Gesetz entnimmt man, dass sich die Beschleunigung in jedem Zeitpunkt ändert. Diese Veränderung wird durch eine sich ändernde Kraft hervorgerufen. Es gilt:

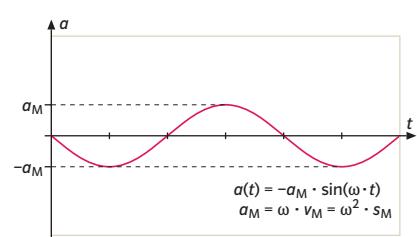
$$F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot a_M \cdot (-\sin(\omega t)) = -m \cdot \omega^2 \cdot s_M \cdot \sin(\omega t) = -m \cdot \omega^2 \cdot s(t) = -D \cdot s(t).$$

Man nennt diesen Zusammenhang zwischen Kraft und Auslenkung **lineares Kraftgesetz**. Da die Kraft den Körper immer zur Ruhelage hin beschleunigt, nennt man sie **Rückstellkraft**.

Gilt für einen Oszillatoren das lineare Kraftgesetz, so schwingt dieser harmonisch.

Für die **Periodendauer** eines harmonischen Oszillators gilt:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}.$$



Zeit-Beschleunigung-Gesetz

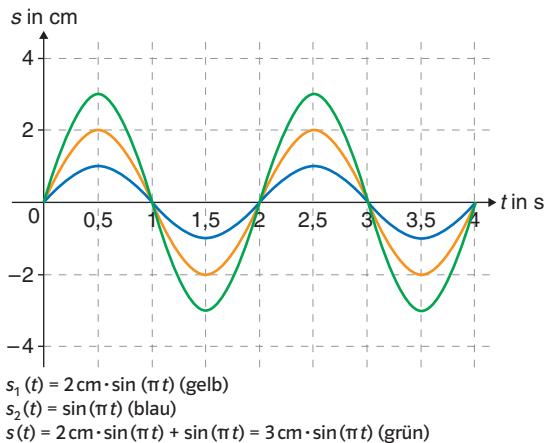


Mehrere Schwingungen können sich zu einer resultierenden Schwingung überlagern. Überlagern sich harmonische Schwingungen gleicher Frequenz, so ergibt sich wieder eine harmonische Schwingung mit der gleichen Frequenz.

Das  $t$ - $s$ -Diagramm der überlagerten Schwingung erhält man durch **Addition der Auslenkungen** der harmonischen Schwingungen.

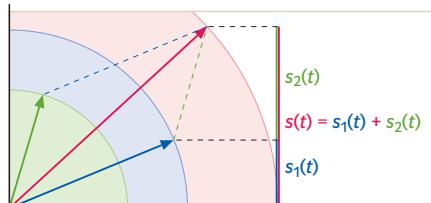
Zur Addition der Auslenkungen kann man die **Zeigerdarstellung** zur Vereinfachung verwenden.

Hierbei rotiert ein Zeiger mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit um den Ursprung des Koordinatensystems. Die Projektion des Zeigers auf die  $y$ -Achse ist die Auslenkung der Schwingung. Die Länge des Zeigers ist die Amplitude. Der Winkel, den der Zeiger mit der positiven  $x$ -Achse einschließt ist die **Phase** (der Phasenwinkel) der Schwingung.



Die Phase kennzeichnet den momentanen Schwingungszustand. Zwei Schwingungen können sich in ihrer Phase unterscheiden. Die Schwingungen sind dann phasenverschoben, sie besitzen eine **Phasendifferenz** oder **Phasenverschiebung**.

Überlagern sich zwei harmonische Schwingungen gleicher Amplitude und gleicher Frequenz, aber einer Phasenverschiebung von  $\pi$ , so löscht sich die überlagerte Schwingung aus.



Überlagern sich zwei harmonische Schwingungen mit unterschiedlichen Frequenzen, so ist die überlagerte Schwingung **nicht harmonisch**.

Unterscheiden sich zwei Schwingungen in ihrer Frequenz nur wenig, so entsteht eine **Schwebung**.



Bei einem Fadenpendel bewegt sich ein an einem Faden hängender Pendelkörper der Masse  $m$  auf einer Kreisbahn um seine Ruhelage. Dabei dient der Winkel  $\varphi$  als Maß für die Auslenkung  $s$ .

Wird  $\varphi$  im Bogenmaß gemessen, so gilt:  $\varphi = \frac{s}{l}$

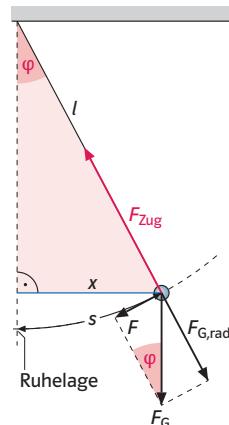
Die Rückstellkraft  $F$  wirkt tangential zur Pendelbahn. Sie ist die Gesamtkraft aus der Gewichtskraft  $F_G$  und der Zentripetalkraft  $F_Z$ :

$$F = F_G \cdot \sin \varphi = m \cdot g \cdot \sin \left( \frac{s}{l} \right)$$

Da die Kraft  $F$  nicht proportional zur Auslenkung  $s$  ist, schwingt das Fadenpendel **nicht harmonisch**.

Bei kleinen Winkeln kann jedoch mit hinreichender Genauigkeit gesagt werden, dass  $s \approx x$  gilt.

Mit  $\sin \varphi = \frac{x}{l} \approx \frac{s}{l}$  folgt  $F = \frac{m \cdot g \cdot s}{l}$  und folgt  $F \sim s$ .



Also gilt für kleine Winkel bzw. kleine Auslenkungen das lineare Kraftgesetz und das Pendel schwingt harmonisch.

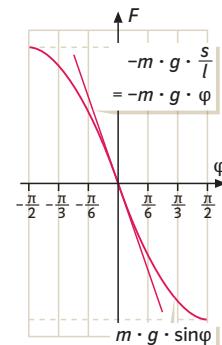
Aus dem linearen Kraftgesetz  $F = -D \cdot s$  und  $F = -\frac{m \cdot g}{l} \cdot s$  folgt:

$$D = \frac{m \cdot g}{l}.$$

Mit  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{D}}$  bei **kleinen Auslenkungen** berechnet sich die **Periodendauer T** durch:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

An der Formel erkennt man, dass im Gegensatz zum Federpendel beim Fadenpendel die Masse für die Schwingungsdauer  $T$  keine Rolle spielt. Sie hängt vielmehr von der Fadenlänge und der Fallbeschleunigung  $g$  am Ort des Versuchs ab.



Auf diese Weise hat Wilhelm Bessel 1826 die Abhängigkeit der Fallbeschleunigung von der geographischen Breite untersucht. Sie nimmt an der Erdoberfläche vom Äquator zu den Polen kontinuierlich zu.

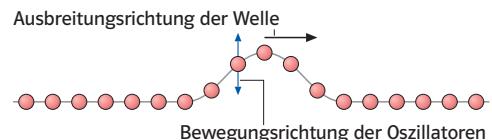
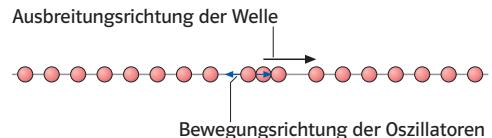


Verbindet man schwingungsfähige Teilchen miteinander, so dass Energie von einem Teilchen auf das andere Teilchen übertragen wird, so entsteht eine **Welle**, die sich im Raum ausbreitet. Bei einer Welle wird also Energie übertragen, aber kein Stoff transportiert.

Je nach Ausbreitungsrichtung unterscheidet man zwischen **Längswellen (Longitudinalwellen)** und **Querwellen (Transversalwellen)**.

Bei Längswellen stimmen Ausbreitungsrichtung der Welle und Bewegungsrichtung der Oszillatoren überein.

Bei Querwellen verlaufen Ausbreitungsrichtung der Welle und Bewegungsrichtung der Oszillatoren senkrecht zu einander.



Wie bei Schwingungen nutzt man zur Beschreibung mechanischer Wellen die Begriffe: Auslenkung  $s$ , Amplitude  $s_M$ , Schwingungsdauer  $T$  und Frequenz  $f$ .

Zusätzlich verwendet man die Begriffe **Wellenlänge** und **Ausbreitungsgeschwindigkeit**.

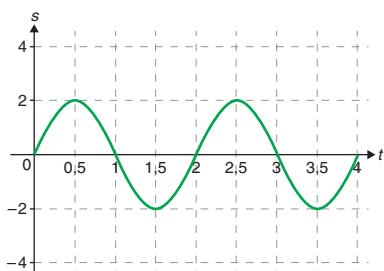
Die Wellenlänge  $\lambda$  ist die kürzeste Entfernung zwischen zwei Oszillatoren, die sich im gleichen Schwingungszustand befinden. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit  $c$  ist die Geschwindigkeit, mit der sich die Welle fortbewegt.

Für Wellen gilt:  $c = \lambda \cdot f$ .

Da sich eine Welle im Gegensatz zur Schwingung nicht nur zeitlich, sondern auch räumlich ausbreitet, verwendet man zur Darstellung zwei Diagramme:

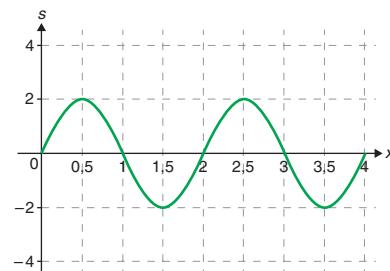
#### t-s-Diagramm

Es beschreibt den entsprechenden Oszillator an einem festen Ort.



#### x-s-Diagramm

Es beschreibt die Wellen zu einem festen Zeitpunkt.



Eine Welle wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$s(t, x) = s_M \cdot \sin\left(2\pi \cdot \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

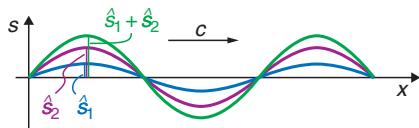


Breiten sich auf einer Wasseroberfläche zwei Wasserwellen kreisförmig aus, so durchdringen sich die beiden Wellen ungestört und überlagern sich. Nach der Überlagerung breiten sie sich wieder so aus, als sei die andere Welle nicht vorhanden. Bei der Überlagerung addieren sich die Amplituden der einzelnen Welle zu einer Amplitude der überlagerten Welle. Man nennt diese ungestörte Überlagerung von Wellen gleicher Frequenz **Interferenz**.

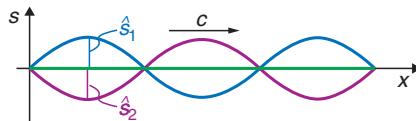
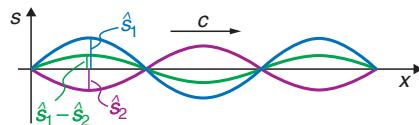
Hier betrachten wir Wellen mit gleicher Wellenlänge und Frequenz, die in die gleiche Richtung laufen.

Das Ergebnis der Überlagerung hängt nicht nur von ihrer Amplitude ab, sondern auch davon, wie stark die beiden Wellen gegeneinander verschoben sind. Diesen Wegunterschied gibt man häufig in Bruchteilen oder Vielfachen der Wellenlänge an. Man nennt ihn **Gangunterschied  $\Delta l$** .

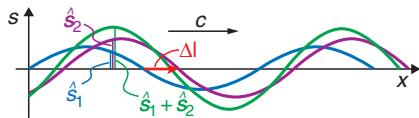
Beträgt der Gangunterschied  $\Delta l = k \cdot \lambda$ , wobei  $k = 0, 1, 2, \dots$  kommt es zu einer **Verstärkung** der Welle (**konstruktive Interferenz**). Dann haben die Auslenkungen der beiden Wellen die gleiche Richtung. Haben beide Wellen die gleichgroße Amplitude, so hat die überlagerte Welle die doppelte Amplitude.



Beträgt der Gangunterschied  $\Delta l = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$  mit  $k = 0, 1, 2, \dots$  kommt es zu einer **Abschwächung** der Welle (**destruktive Interferenz**). Dann haben die Auslenkungen entgegengesetzte Richtungen. Sind in diesem Falle die Amplituden gleich groß, so wird die Welle **ausgelöscht**.



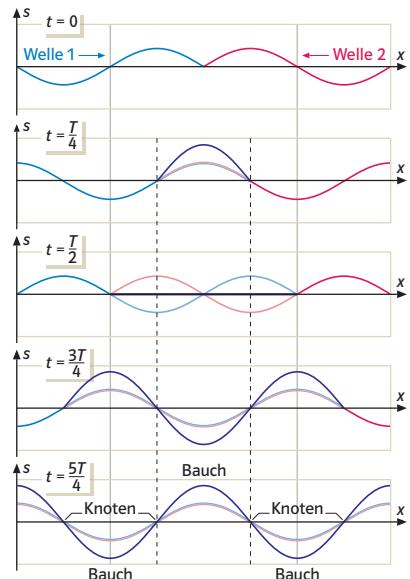
Selbstverständlich können sich auch Wellen mit beliebigem Gangunterschied und Amplitude überlagern.



Überlagern sich zwei Wellen gleicher Frequenz und gleicher Phase, die aufeinander zulaufen, so entsteht eine **stehende Welle**.

Diese beiden Wellen können aus zwei verschiedenen Erregern stammen oder durch Reflexion einer Welle an einem Hindernis entstehen.

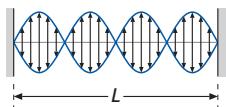
- Die Amplituden sind an jedem Ort zeitlich konstant.
- Stellen, an denen die Auslenkungen immer null sind, heißen **Knoten**.
- Stellen, an denen die Auslenkungen maximal sind, heißen **Bäuche**.
- Zwei Knoten bzw. Bäuche sind immer  $\frac{\lambda}{2}$  voneinander entfernt.
- Zwischen zwei nebeneinander liegenden Knoten schwingen die Oszillatoren gleichphasig.
- Vor und hinter einem Knoten schwingen die Oszillatoren gegenphasig.



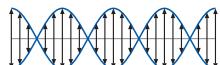
Spannt man ein Gummiband an beiden Enden ein und lenkt es an einem Ende periodisch aus, so entsteht nach Reflexion am anderen Ende eine stehende Welle. Für die Enden gibt es zwei Möglichkeiten:

1. Es kann fest gehalten werden (festes Ende).
2. Es kann mitschwingen (loses Ende).

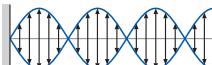
a) zwei feste Enden



b) zwei lose Enden



c) verschiedene Enden



Hat man ein Gummiband mit zwei festen Enden, so entsteht eine stehende Welle, nur wenn die Länge  $l$  ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt:

$$l = k \cdot \frac{\lambda_k}{2} \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

Bei einem Gummiband mit zwei losen Enden, entsteht eine stehende Welle, nur wenn für die Länge  $l$  gilt:

$$l = (2k - 1) \cdot \frac{\lambda_k}{4} \text{ mit } k = 1, 2, 3, \dots$$

Ist  $k = 1$ , also die Wellenlänge am größten, so nennt man diese stehende Welle **Grundwelle**.

Die anderen stehenden Wellen heißen **Oberwellen**.

Zu diesen bestimmten Wellenlängen kann man die zugehörigen Frequenzen bestimmen, man nennt sie **Eigenfrequenzen**.

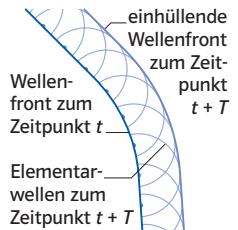
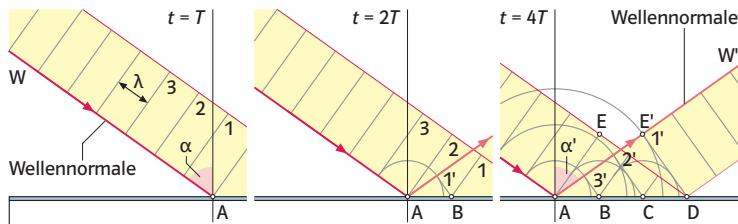
Im Gegensatz zu einer fortschreitenden Welle transportiert eine stehende Welle keine Energie.



Christian Huygens hat ein Prinzip formuliert, mit dessen Hilfe man die Eigenschaften von Wellen wie Brechung, Reflexion, Beugung und Interferenz erklären kann.

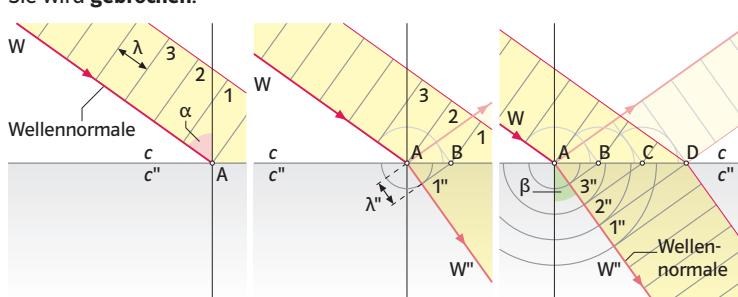
Jeder Punkt einer Wellenfront (Punkte mit gleicher Phase) lässt sich als Ausgangspunkt einer **Elementarwelle** betrachten. Wellenfronten lassen sich als **Einhüllende** dieser Elementarwellen darstellen. Die Elementarwellen haben immer gleiche Frequenz und Wellenlänge wie die Welle, aus der sie entstanden sind oder die sie erzeugen.

Werden Wellen an einem Hindernis **reflektiert**, so ändert sich die Ausbreitungsrichtung, aber nicht die Wellenlänge.



Treffen gerade Wellenfronten auf ein Hindernis, so wird zuerst die Wellenfront 1 am Punkt A reflektiert und erzeugt dort eine Elementarwelle. Bis die Wellenfront 2 am Punkt A eintrifft, hat sich die erste Elementarwelle bereits ausgebreitet und die Wellenfront 1 ist am Punkt B eingetroffen und hat dort wieder eine Elementarwelle erzeugt. Die Einhüllende dieser beiden Elementarwellen ergibt eine Wellenfront 1'. Analog erfolgt die Entstehung der Wellenfront 2', 3', usw.

Ändert sich beim Ausbreiten einer Welle die Wassertiefe, so kann sie sich nicht mehr ungestört ausbreiten. Sie wird **gebrochen**.



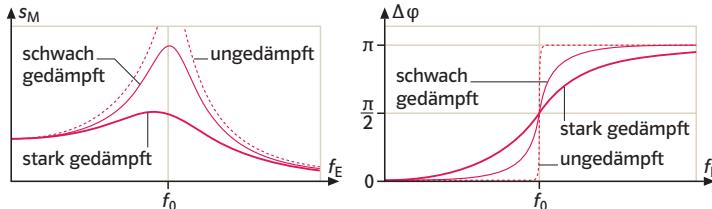
Treffen gerade Wellenfronten auf flacheres Wasser, so trifft zuerst die Wellenfront 1 am Punkt A ein und erzeugt dort eine Elementarwelle, die sich im flacheren Wasser langsamer ausbreitet. Bis die Wellenfront 2 am Punkt A eintrifft, hat sich die erste Elementarwelle bereits ausgebreitet und die Wellenfront 1 ist am Punkt B eingetroffen und hat dort wieder eine Elementarwelle erzeugt. Die Einhüllende dieser beiden Elementarwellen ergibt eine Wellenfront 1''. Analog erfolgt die Entstehung der Wellenfront 2'', 3'', usw.



Regt man einen Oszillator einmal an, dann schwingt er mit einer bestimmten Frequenz, seiner **Eigenfrequenz**  $f_0$ . Dabei gibt er Energie ab und die Amplitude wird kleiner. Es handelt sich um eine gedämpfte Schwingung.

Soll die Amplitude nicht abnehmen, so muss man von außen periodisch Energie zuführen. Man nennt eine solche Schwingung **erzwungene Schwingung**.

Wird ein Oszillator mit der Eigenfrequenz  $f_0$  von einem Erreger mit der Erregerfrequenz  $f_E$  zu Schwingungen angeregt, so gibt es Phasenunterschiede zwischen den beiden. Außerdem ändert sich abhängig von der Frequenz die Amplitude:



Phase und Amplitude einer erzwungenen Schwingung

- $f_0 \ll f_E$ : Erreger und Oszillator besitzen die gleiche Amplitude. Sie schwingen ohne Phasendifferenz.
- $f_0 \gg f_E$ : Die Amplitude des Oszillators geht gegen Null. Erreger und Oszillator haben eine Phasendifferenz von  $\pi$ .
- $f_0 = f_E$ : Die Amplitude des Oszillators wird maximal. Der Erreger und Oszillator haben eine Phasendifferenz von  $\pi/2$ . Man spricht von **Resonanz**. Ist die Schwingung ungedämpft, so wird die Amplitude immer größer.

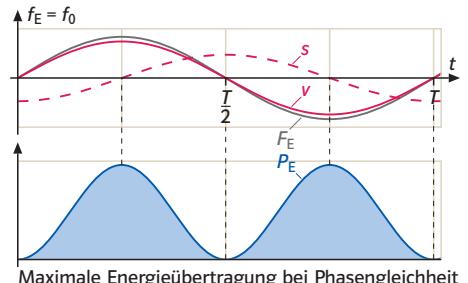
Im Resonanzfall ist die vom Erreger auf das schwingende System übertragene Energie maximal, d.h. die Amplitude erreicht ein Maximum. Für diese maximale Energieübertragung ist die Phasendifferenz  $\pi/2$  wichtig. Die vom Erreger ausgeübte Kraft  $F_E$  wird beschrieben durch  $F_E(t) = F_M \cdot \sin(\omega t)$ . Für die erzwungene Schwingung gilt:  $s(t) = s_M \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -s_m \cdot \cos(\omega t)$ . Damit gilt für die Geschwindigkeit:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = s_M \cdot \omega \cdot \sin(\omega t). \text{ Die Funktionen } s(t) \text{ und } v(t) \text{ haben eine Phasendifferenz von } \pi/2.$$

Da die Kraft  $F_E$  und die Geschwindigkeit  $v$  in Phase sind, unterstützt die Kraft die Bewegung.

Ist die zugeführte Energie größer als der abgeführte Teil, so wird die Amplitude sehr groß, der Oszillator wird zerstört. Diesen Fall nennt man **Resonanzkatastrophe**. Sie kann nur durch eine ausreichende Dämpfung verhindert werden.

Die bekannteste Resonanzkatastrophe passierte 1940 in den USA. Dort versetzten Windböen das Hauptsegment der Tacoma Narrows Bridge in Schwingungen in ihrer Eigenfrequenz. Der gleichmäßige Wind führte dazu, dass die Schwingungen immer stärker wurden, bis die Brücke schließlich einstürzte. Nicht nur durch Wind kann eine Brücke in Eigenschwingungen versetzt werden, auch durch Menschen, die im Gleichschritt darüber marschieren. Dies wurde im Jahr 2000 bei der Millennium Bridge in London beobachtet.



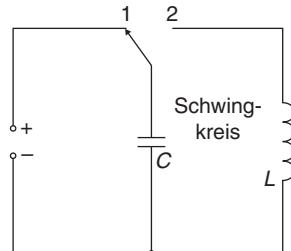
Maximale Energieübertragung bei Phasengleichheit



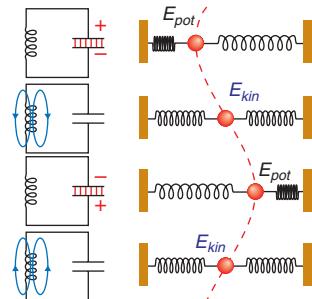
Eine Parallelschaltung aus einem Kondensator und einer Spule erzeugt eine **elektromagnetische Schwingung**. Man nennt diese Anordnung auch **Schwingkreis**.

Über eine elektrische Quelle wird in Schalterstellung 1 der Kondensator aufgeladen. Somit ist die elektrische Energie im Kondensator gespeichert. Bringt man nun den Schalter in Position 2, so wird der Kondensator entladen und ein Strom fließt durch die Spule, der ein magnetisches Feld erzeugt. An den Enden der Spule entsteht nach Lenz eine Induktionsspannung, die dem Stromanstieg entgegenwirkt. Ist der Kondensator entladen, so ist der Strom in der Spule am größten und die gesamte elektrische Energie ist in magnetische Energie umgewandelt worden. Da nun der Kondensator entladen ist, kann er den Strom nicht mehr weiter antreiben und das Magnetfeld bricht zusammen. Die Selbstinduktion der Spule bewirkt jedoch ein Weiterfließen des Stromes in gleicher Richtung und der Kondensator wird wieder aufgeladen, jedoch mit umgekehrter Polung. Nun wird die magnetische Energie in elektrische Energie umgewandelt. Sobald das magnetische Feld komplett abgebaut ist, erreicht der Kondensator seine maximale Ladung.

Der Vorgang wiederholt sich nun mit umgekehrter Stromrichtung, bis der Ausgangszustand erreicht ist. Somit entsteht eine **ungedämpfte Schwingung**.



Es besteht eine Analogie zum **harmonischen Oszillator**. Dabei entspricht der elektrischen Energie im Kondensator die potentielle Energie der Masse  $m$ , während die magnetische Energie der Spule der kinetischen Energie der Masse  $m$  entspricht.



### Thomson'sche Schwingungsgleichung

Kann in einem Schwingkreis der ohmsche Widerstand vernachlässigt werden, so liegt ein abgeschlossenes System vor. Für die Summe der Energien gilt:

$$E_{\text{ges}} = E_{\text{Kondensator}} + E_{\text{Spule}} = \frac{1}{2} C U^2 + \frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} + \frac{1}{2} L I^2 = \text{konstant.}$$

Leitet man diese Gleichung nach der Zeit ab, so folgt:

$$\frac{\partial}{\partial t} Q + L \cdot I \cdot \dot{I} = 0 \quad \text{bzw. } Q \cdot \dot{Q} + L \cdot C \cdot I \cdot \dot{I} = 0.$$

Mit  $I = \dot{Q}$  und  $\dot{I} = \ddot{Q}$  folgt  $Q \cdot \dot{Q} + L \cdot C \cdot \dot{Q} \cdot \ddot{Q} = 0$  bzw.  $Q + L \cdot C \cdot \ddot{Q} = 0$ .

Mit der Lösung  $Q(t) = \hat{Q} \cdot \cos(\omega \cdot t)$  wird  $\dot{Q}(t) = -\hat{Q} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t)$  und  $\ddot{Q}(t) = -\hat{Q} \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t)$ .

Eingesetzt in die Differentialgleichung liefert:  $\hat{Q} \cdot \cos(\omega \cdot t) = L \cdot C \cdot \omega^2 \cdot \hat{Q} \cdot \cos(\omega \cdot t)$

und mit  $\omega = \frac{2\pi}{T}$  folgt:  $T = 2\pi \cdot \sqrt{L \cdot C}$ .



Von jeder schwingenden Ladung breitet sich eine **elektromagnetische Welle** im Raum aus. Zu den elektromagnetischen Wellen gehören z.B. Radiowellen, Mikrowellen, Infrarotstrahlung, sichtbares Licht, UV-Strahlung sowie Röntgen- und Gammastrahlung. Sie unterscheiden sich in Frequenz bzw. Wellenlänge. Das elektromagnetische Wellenspektrum ist ein kontinuierliches Spektrum.

Wellenlänge		Frequenz (Hz)	Vorkommen/Nutzung
km	$3 \cdot 10^4$	$10$	
	$3 \cdot 10^3$	$10^2$	Teschnischer Wechselstrom
	$3 \cdot 10^2$	$10^3$	
	30	$10^4$	Nachrichtentechnik
	3	$10^5$	
m	$3 \cdot 10^2$	$10^6$	
	30	$10^7$	Fernseh-, Rundfunktechnik
	3	$10^8$	Diathermie
cm	30	$10^9$	
	3	$10^{10}$	Radartechnik
mm	3	$10^{11}$	Mikrowellenherde
	0,3	$10^{12}$	

Wellenlänge		Frequenz (Hz)	Vorkommen/Nutzung
nm	$3 \cdot 10^4$	$10^{12}$	
	$3 \cdot 10^3$	$10^{14}$	Wärmestrahlung (780 – 1000)
	$3 \cdot 10^2$	$10^{15}$	Sichtbares Licht (380 – 780)
	30	$10^{16}$	Ultraviolet, Höhenonne
	3	$10^{17}$	
	0,3	$10^{18}$	Röntgenstrahlen
	$3 \cdot 10^{-2}$	$10^{19}$	
	$3 \cdot 10^{-3}$	$10^{20}$	
	$3 \cdot 10^{-4}$	$10^{21}$	Radioaktive Stoffe
	$3 \cdot 10^{-5}$	$10^{22}$	
$3 \cdot 10^{-6}$	$10^{23}$		Kosmische Strahlung
	$3 \cdot 10^{-7}$	$10^{24}$	

Elektromagnetische Wellen sind Querwellen (Transversalwellen) und brauchen zur Ausbreitung kein Medium. Eine elektromagnetische Welle transportiert Energie.

Jede elektromagnetische Welle besitzt die typischen Merkmale der Wellenausbreitung, wie Beugung und Interferenz.

Für elektromagnetische Wellen gilt:  $c = \lambda \cdot f$ .

Sie breiten sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Es gilt:

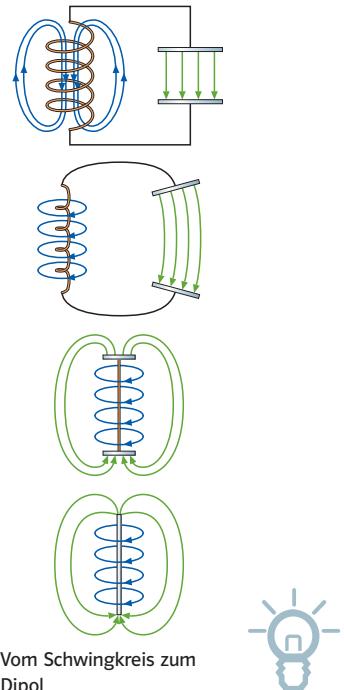
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot \mu_0 \cdot \mu_r}} \quad \text{wobei} \quad \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}} \quad \text{die elektrische Feldkonstante,}$$

$\epsilon_r$  die Permittivitätszahl,  $\mu_0 = 1,26 \cdot 10^{-6} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$  die magnetische Feldkonstante und  $\mu_r$  die Permeabilitätszahl ist.

## Entstehung

Als Quelle einer elektromagnetischen Wellen kann ein **Dipol** verwendet werden. Er entsteht, indem man einen geschlossenen Schwingkreis aufbaut.

Der Kondensator sind nun die Leiterenden und das Magnetfeld der Spule entspricht dem Magnetfeld eines geraden Leiters. Der Dipol schwingt mit sehr hoher Frequenz, da die Kapazität des Kondensators und die Induktivität der Spule sehr klein sind. Das elektrische und magnetische Feld um den Dipol breitet sich sehr weit im Raum aus.



Bereits in der Antike hat man sich für das Licht interessiert. So ging zum Beispiel Aristoteles davon aus, dass das Licht von der bloßen Anwesenheit von Objekten komme, aber nicht in Bewegung sei. Zu Beginn des 17. Jahrhunderts glaubte Johannes Kepler, dass die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum unendlich sei. Später postulierten Newton und Huygens eine endliche Lichtgeschwindigkeit. Den Nachweis dafür erbrachte Ole Römer 1676 mittels der Zahnradmethode.

Heute weiß man, dass sich Licht im Vakuum mit einer Geschwindigkeit von  $2,99 \cdot 10^8$  m/s ausbreitet.

Das Teilgebiet Optik, das die Eigenschaften von Licht untersucht, unterteilt sich in **geometrische Optik** und **Wellenoptik**.

Dabei wird Licht im Modell entweder als Strahl oder als Welle beschrieben.

### Geometrische Optik

Die geometrische Optik ist ein Gebiet der Optik, welches Alltagserscheinungen (z.B. Reflexion an Oberflächen oder Brechung an Grenzflächen) beschreibt und die Welleneigenschaften des Lichtes vernachlässigt. Dabei sind die Gegenstände, die diese Phänomene hervorrufen, groß im Vergleich zur Wellenlänge des Lichtes. Deshalb können Beugungs- und Interferenzerscheinungen vernachlässigt werden.

Beleuchtet man einen Spalt mit Licht, so existiert hinter dem Spalt ein divergentes Lichtbündel. Engt man dieses Lichtbündel immer mehr ein, so entsteht ein fast paralleles Lichtbündel. Ist dieses Lichtbündel sehr fein, so bezeichnet man es als Lichtstrahl. Ein solcher Lichtstrahl mit sehr kleinem Durchmesser existiert in Wirklichkeit nicht. Es handelt sich dabei um eine Modellvorstellung.

Für die Ausbreitung von Licht gilt das **Fermat'sche Prinzip**:

Der Weg, den das Licht nimmt, um von einem Punkt zu einem anderen Punkt zu gelangen, ist stets so, dass die benötigte Zeit dafür minimal wird.

Mit dem **Modell der Lichtstrahlen** kann man folgende Phänomene beschreiben:

- geradlinige Ausbreitung des Lichtes,
- Entstehung von Schatten hinter lichtundurchlässigen Körpern,
- Brechung und Reflexion an Grenzflächen,
- Verlauf von Lichtstrahlen durch Prismen und Linsen.

### Wellenoptik

In der Wellenoptik betrachtet man Licht als elektromagnetische Wellen. Somit ist Licht eine transversale Welle, d.h. sie schwingt senkrecht zu ihrer Ausbreitungsrichtung. Sie wird durch Wellenlänge, Amplitude und Phase beschrieben.

Christian Huygens hat erkannt, dass man Licht analog zu Wasserwellen beschreiben kann.

Jeder Punkt einer Wellenfront (Punkte mit gleicher Phase) lässt sich als Ausgangspunkt einer **Elementarwelle** betrachten. Wellenfronten lassen sich als **Einhüllende** dieser Elementarwellen darstellen. Die Elementarwellen haben immer gleiche Frequenz und Wellenlänge wie die Welle, aus der sie entstanden sind oder die sie erzeugen.

Mit dem **Modell der Wellen** kann man folgende Phänomene beschreiben:

- Interferenz,
- Beugung an sehr kleinen Spalten und Kanten,
- Polarisation.

Auch dieses Modell ist nicht in der Lage alle Phänomene des Lichtes zu beschreiben.

Dazu gehört zum Beispiel der von Einstein erklärte Fotoeffekt.



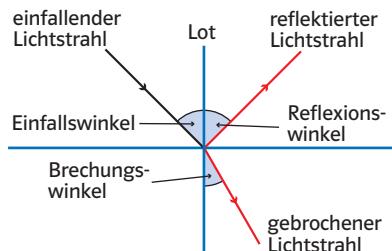
Die Reflexion von Licht kann man sowohl mit der geometrischen Optik als auch mit der Wellenoptik konstruieren. Ist das Hindernis groß gegenüber der Wellenlänge des Lichtes, so kann man die geometrische Optik oder die Wellenoptik verwenden. Ist das Hindernis hingegen in der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes, so muss man die Wellenoptik verwenden.

### Reflexion (geometrische Optik)

Trifft das Licht auf eine lichtdurchlässige Grenzfläche, so wird ein Teil **reflektiert** und ein anderer Teil wird an ihr gebrochen.

### Reflexionsgesetz

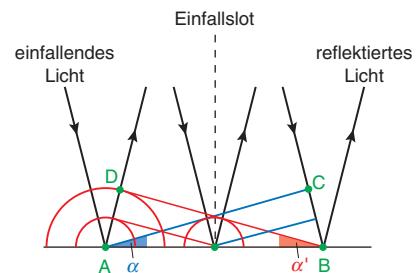
Der Einfallswinkel  $\alpha$  und der Reflexionswinkel  $\alpha'$  sind gleich groß. Einfallender, reflektierter Lichtstrahl und das Lot liegen in einer Ebene. Der Lichtweg ist umkehrbar.



### Reflexion (Wellenmodell)

Die Reflexion von Licht an einer Grenzfläche verhält sich analog zur Reflexion von Wellen. Es gilt das Huygens'sche Prinzip. Im Gegensatz zur geometrischen Optik lässt sich mit dem Wellenmodell das Reflexionsgesetz mathematisch beweisen.

Die Wellenfront trifft auf die Grenzfläche und von dort breitet sich eine Elementarwelle aus. Da sich bei der Reflexion die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle nicht ändert, sind die Dreiecke ABD und ABC kongruent. Daraus folgt, dass der Einfallwinkel genauso groß ist wie der Reflexionswinkel.



### Streuung

Trifft Licht auf einen Körper, so wird ein Teil an seiner Oberfläche reflektiert, während ein anderer Teil in den Körper eindringt und gebrochen wird. Zusätzlich tritt das Licht beim Durchlaufen des Körpers auf kleine Teilchen, die das Licht aus seiner geradlinigen Bahn ablenken. Das Licht wird **gestreut**.

Die Streuung ist dafür verantwortlich, dass wir den Himmel blau sehen. Das Licht wird bei seinem Durchgang durch die Atmosphäre an den verschiedenen Materiateilchen gestreut. Die Stärke der Streuung hängt von der Wellenlänge des Lichtes ab. Kurzwelliges Licht wird stärker gestreut als langwelliges Licht.



Die Brechung von Licht kann man sowohl mit der geometrischen Optik als auch mit der Wellenoptik konstruieren. Ist das Hindernis groß gegenüber der Wellenlänge des Lichtes, so verwendet man die geometrische Optik. Ist das Hindernis hingegen in der Größenordnung der Wellenlänge des Lichtes, so verwendet man die Wellenoptik.

### Brechung (geometrische Optik)

Ein Lichtstrahl fällt unter einem Einfallwinkel zwischen  $0^\circ$  und  $90^\circ$  auf eine halbdurchlässige Grenzfläche. Ein Teil des Lichtes wird reflektiert, während ein anderer Teil in das Medium eindringt und gebrochen wird.

### Gesetzmäßigkeiten der Brechung

- Mit wachsendem Einfallwinkel wächst auch der Brechungswinkel.
- Der Brechungswinkel  $\beta$  ist stets kleiner als  $90^\circ$ .
- Trifft der Lichtstrahl senkrecht auf die Grenzfläche ( $\alpha = 90^\circ$ ), so geht er ohne Richtungsänderung in diese über.
- Der Lichtweg ist umkehrbar.
- Der Brechungswinkel  $\beta$  hängt von den Lichtgeschwindigkeiten und damit von der Wellenlänge in den beiden Stoffen ab. Dies nennt man **Dispersion**.

- Geht das Licht von einem optisch dünneren Stoff in ein optisch dichteren Stoff über (z.B. von Luft in Glas), so wird der Strahl zum Lot hin gebrochen ( $\alpha > \beta$ ). Erfolgt der Übergang in die andere Richtung, so wird der Strahl vom Lot weg gebrochen ( $\alpha < \beta$ ).
- Nähert sich der Einfallwinkel  $\alpha$   $90^\circ$  an, so nähert sich der Brechungswinkel  $\beta$  einem für den Stoff spezifischen Winkel, dem sogenannten Grenzwinkel an.
- Ist beim Übergang von einem optisch dichteren in ein optisch dünneren Stoff der Einfallwinkel größer als der Grenzwinkel, so tritt **Totalreflexion** auf.

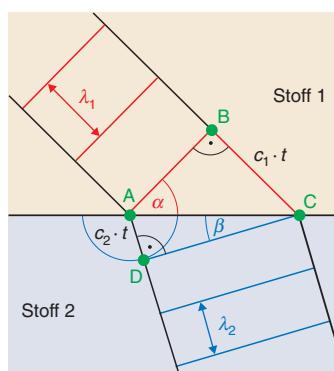
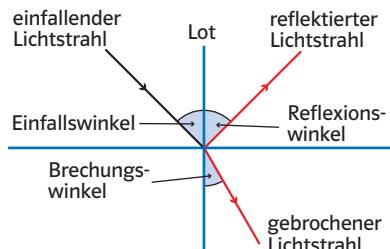
### Brechung (Wellenoptik)

Nach Huygens gilt für die Brechung: Von jedem Punkt auf der Grenzfläche, der von der Wellenfront getroffen wird, geht eine Elementarwelle aus.

Da bei unterschiedlichen Stoffen die Ausbreitungsgeschwindigkeit in dem jeweiligen Stoff unterschiedlich ist, sind die zurückgelegten Wege  $c_1 \cdot t$  und  $c_2 \cdot t$  verschieden lang. Es folgt das Brechungsgesetz:

$$\frac{c_1 \cdot t}{\sin \alpha} = \frac{c_2 \cdot t}{\sin \beta} \text{ bzw. } \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n \text{ wobei } n \text{ die materialabhängige}$$

Brechzahl ist.



## Konvexlinsen (Sammellinsen)

Kovenxlinsen sind in der Mitte dicker als am Rand. Trifft der Lichtstrahl auf die Linse, so wird er beim Eintritt in die Linse und Austritt aus der Linse gebrochen. Dabei sammeln sich die Lichtstrahlen, die von einem Punkt  $P$  vor der Linse ausgehen, hinter der Linse in einem Bildpunkt  $P'$ . Ist die Linse im Verhältnis zu ihrem Durchmesser dünn, so kann man die zweimalige Brechung des Strahles durch einmalige Brechung an der Mittellinie ersetzen.

## Abbildungen mit Sammellinsen

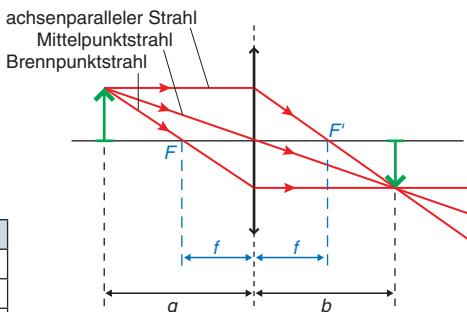
Es gilt für dünne Linsen:

$$\text{Linsengleichung} \quad \frac{1}{f} = \frac{1}{g} + \frac{1}{b}$$

$$\text{Abbildungsgleichung} \quad A = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}$$

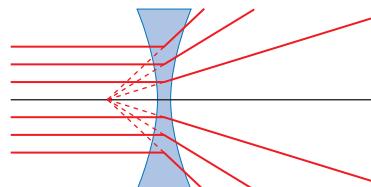
Für Sammellinsen gelten folgende Zusammenhänge:

Gegenstandsweite $g$	Bildweite $b$	Eigenschaften des Bildes
$g > 2f$	$f < b < 2f$	reell, umgekehrt, verkleinert
$g = 2f$	$b = 2f$	reell, umgekehrt, gleich groß
$f < g < 2f$	$b > 2f$	reell, umgekehrt, vergrößert
$g = f$	--	kein Bild auf dem Schirm
$g < f$	$b > g$	virtuell, aufrecht, vergrößert



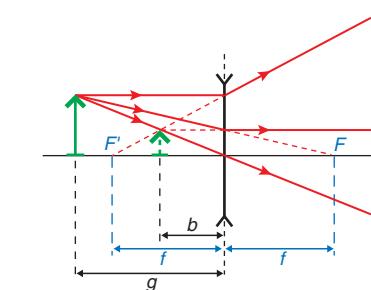
## Konkavlinsen (Zerstreuungslinsen)

Konkave Linsen sind in der Mitte dünner als am Rand. Trifft der Lichtstrahl auf die Linse, so wird er beim Eintritt in die Linse und Austritt aus der Linse gebrochen. Die Lichtstrahlen sammeln sich hinter der Linse nicht in einem Punkt, sondern die gebrochenen Strahlen laufen auseinander. Es scheint, als kämen die Strahlen von einem Punkt vor der Linse.



## Abbildungen mit Zerstreuungslinsen

Trifft ein zur optischen Achse paralleles Lichtbündel auf eine Zerstreuungslinse, so werden die Strahlen so gebrochen, als ob sie von einem Punkt  $F$  vor der Linse kämen. Ist der gebrochene Lichtstrahl parallel zur optischen Achse, so verläuft er vor der Linse, also ob er von einem Punkt  $F$  hinter der Linse käme. Der Mittelpunktstrahl läuft ungebrochen durch die Linse.



Eine Zerstreuungslinse erzeugt nur **virtuelle** Bilder innerhalb der Brennweite. Da achsenparallel einfallende Lichtstrahlen hinter der Linse von einem virtuellen Brennpunkt  $F$  ausgesehen auseinanderlaufen, rechnet man die Brennweite negativ. Das Bild ist aufrecht und verkleinert.

Für Zerstreuungslinsen gilt wie für Sammellinsen das Abbildungsgesetz und die Linsengleichung.

Der Strahlengang bei Linsen ist umkehrbar. So kann Licht, das auf einen Punkt strahlt, mithilfe einer Konvexlinse beispielsweise parallelgerichtet werden

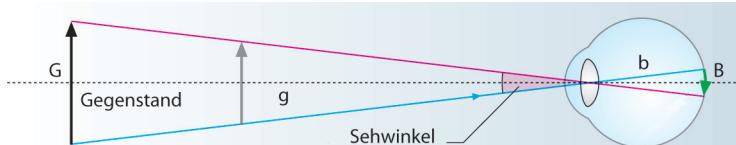


Mit Hilfe der geometrischen Optik können wir die Bildentstehung bei verschiedenen optischen Geräten erklären.

### Das Auge

Die Abbildungen, die das Auge in der Netzhaut erzeugt, ähneln den Abbildungen bei einer Kamera.

Die Pupille regelt die Helligkeit auf der Netzhaut. Diese Anpassung nennt man **Adaption**. Auf der Netzhaut entsteht ein reelles, verkleinertes und umgekehrtes Bild. Der Abstand zwischen Linse und Netzhaut ist konstant. Um bei unterschiedlich entfernten Gegenständen ein scharfes Bild zu erzeugen, ist die Linse in der Lage ihre Brennweite zu ändern. Dies nennt man **Akkommodation**. Die Bildgröße wird durch den **Sehwinkel** bestimmt. Je näher der Gegenstand sich am Auge befindet, umso größer ist der Sehwinkel und das Bild.



Häufig auftretende Sehfehler sind Kurzsichtigkeit und Weitsichtigkeit. Kurzsichtige Menschen können entfernte Gegenstände nicht scharf abbilden. Kurzsichtigkeit kann mithilfe einer Zerstreuungslinse korrigiert werden. Weitsichtige Menschen können Gegenstände in der Nähe nicht scharf abbilden. Man kann Weitsichtigkeit mittels einer Sammellinse korrigieren.

### Die Lupe

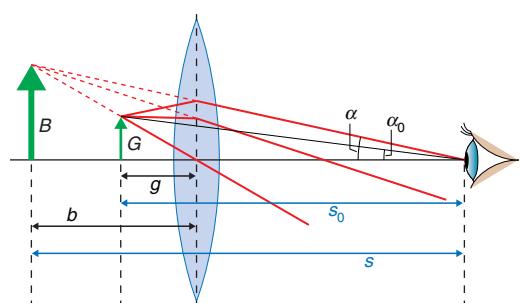
Zur Vergrößerung eines Gegenstandes führt man ihn möglichst nahe an das Auge heran. Bei einer Gegenstandsweite kleiner als 10cm ist das Auge nicht mehr in der Lage das Bild scharf abzubilden. Mit einer Lupe (Sammellinse), die eine kleine Brennweite hat, kann man die Gegenstandsweite verkleinern und das Bild vergrößern. Man erhält ein virtuelles Bild des Gegenstandes. Um den Gegenstand mit einem entspannten Auge zu betrachten, hält man die Lupe so, dass sich der Gegenstand fast im Brennpunkt der Linse befindet.

Die Vergrößerung der Lupe ist der Quotient aus dem Tangens des Sehwinkels mit Lupe  $\alpha$  durch den Tangens des Sehwinkels ohne Lupe  $\alpha_0$ .

$$V = \frac{\tan \alpha}{\tan \alpha_0}$$

Befindet sich der abzubildende Gegenstand in der Brennebene der Lupe und befinden sich die Augen ca. 25 cm vor der Lupe, so gilt für die **Normalvergrößerung**:

$$V = \frac{25 \text{ cm}}{f}$$

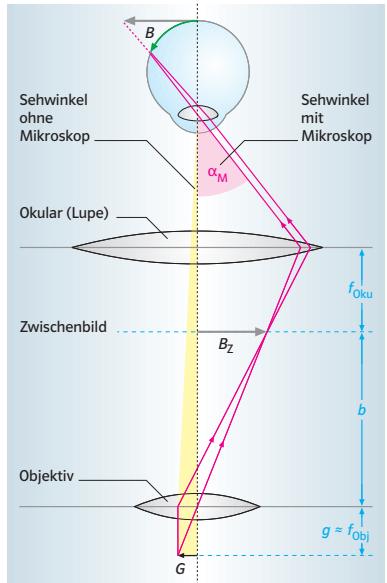


Außer dem Auge und der Lupe gibt es weitere optische Geräte, deren Funktionsweise man mithilfe der geometrischen Optik erklären kann. Im Folgenden wird die Funktionsweise des Mikroskops und des Fernrohrs betrachtet.

### Das Mikroskop

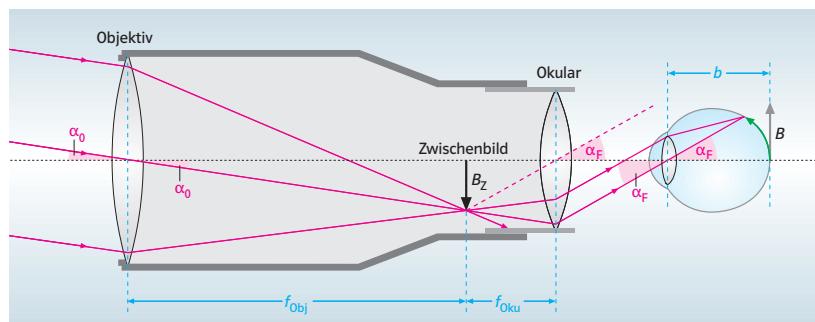
Für starke Vergrößerungen verwendet man ein Mikroskop. Es besteht aus einer dem Gegenstand zugewandten Linse (Objektiv) und einer dem Auge zugewandten Linse (Okular). Da die Gegenstandsweite fast der Brennweite des Objektivs entspricht, entsteht ein reelles, stark vergrößertes und umgekehrtes Zwischenbild. Das Zwischenbild befindet sich im Brennpunkt des Okulars und kann mit ihm wie mit einer Lupe betrachtet werden. Wäre eine Kamera, an der Position des Zwischenbildes angebracht, könnte sie dieses Bild aufnehmen. Das Okular erzeugt ein virtuelles, aufrechtes Bild. Somit steht das endgültige Bild auf dem Kopf.

$$\text{Für die Vergrößerung gilt: } V = V_{\text{Objektiv}} \cdot V_{\text{Okular}} = \frac{b}{f_{\text{Objektiv}}} \cdot \frac{25\text{cm}}{f_{\text{Okular}}}.$$



### Das astronomische Fernrohr

Im Gegensatz zum Mikroskop betrachtet man mit einem Fernrohr sehr große, weit entfernte Gegenstände. Somit muss man, damit der Gegenstand näher erscheint, den Sehwinkel vergrößern. Das astronomische Fernrohr besteht auch aus einem Okular und einem Objektiv. Da sich der Gegenstand in sehr weiter Entfernung befindet und weit außerhalb der Objektivbrennweite ist, ist das Zwischenbild stark verkleinert. Das Zwischenbild befindet sich im Brennpunkt des Okulars. Außerdem sind die Linsen so angeordnet, dass das Zwischenbild in der Brennweite des Okulars liegt. Das Zwischenbild wird mit dem Okular wie mit einer Lupe betrachtet.

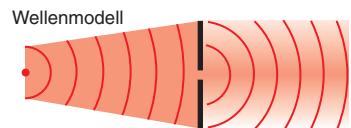
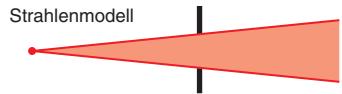


$$\text{Für die Vergrößerung gilt: } V = \frac{f_{\text{Objektiv}}}{f_{\text{Okular}}}.$$



Befindet sich eine Lichtquelle vor einem Spalt, so erwartet man nach der geometrischen Optik auf einem Schirm hinter dem Spalt einen hellen Lichtpunkt.

Ist der Spalt jedoch schmal, so beobachtet man hinter dem Spalt in allen Richtungen Licht auch dort, wo man nach dem Strahlenmodell Schatten erwartet. Dieses Phänomen ist mittels des Wellenmodells erklärbar. Nach Huygens breitet sich von jedem Punkt des Spaltes, der von der Wellenfront getroffen wird, eine Elementarwelle aus. Dabei ändert die auftreffende Wellenfront ihre Richtung und dringt dadurch in Bereiche ein, die nach der geometrischen Optik im Schattenraum liegen müssten. Man nennt dieses Phänomen Beugung am Spalt. Die Richtungsänderung ist umso stärker, je kleiner der Spalt ist.

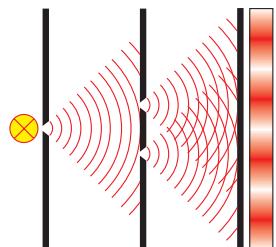


Überlagern sich zwei oder mehrere dieser Elementarwellen, so entsteht ein von den Wasserwellen her bekanntes **Interferenzmuster** mit Verstärkung und Abschwächung.

Diese Interferenzmuster sind nur bei **kohärenten** Wellenzügen zu beobachten. Wellenzüge sind kohärent bei gleicher Frequenz und fester Phasenbeziehung. Kohärente Wellenzüge erzeugt man am einfachsten, indem man Licht aus einer Quelle verwendet und es z.B. durch einen Doppelspalt in verschiedene Wege trennt und schließlich wieder zusammenführt.

### Interferenz am Doppelspalt

Trifft paralleles monochromatisches Licht auf einen Doppelspalt, so entsteht an jedem Spalt nach Huygens eine Elementarwelle (siehe auch Abbildung oben). Diese beiden Elementarwellen überlagern sich und bilden ein Interferenzmuster mit hellen (Verstärkung) und dunklen (Abschwächung) Stellen. Dabei gilt wie bei Wasserwellen: Treffen sich zwei Wellenberge bzw. Wellentäler, so verstärken sie sich (konstruktive Interferenz); treffen sich ein Wellenberg und ein Wellental, so löschen sie sich aus (destruktive Interferenz).



Solche Interferenzmaxima bzw. -minima berechnen sich wie folgt:

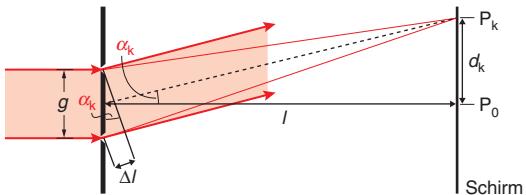
$g$ : Spaltabstand

$\Delta l$ : Gangunterschied

$P_k$ : Punkt auf dem Schirm

$P_0$ : Maximum 0. Ordnung

$l$ : Abstand Doppelspalt – Schirm



Ist der Abstand  $l$  zwischen Doppelspalt und Schirm sehr viel größer als der Spaltabstand  $g$ , so kann man annehmen, dass die Strahlen im rot unterlegten Bereich parallel verlaufen und es gilt:

$$\sin \alpha_k = \frac{\Delta l}{g} \text{ und } \tan \alpha_k = \frac{d_k}{l}. \text{ Da der Abstand } d_k \text{ sehr viel kleiner ist als } l, \text{ gilt: } \sin \alpha_k \approx \tan \alpha_k.$$

$$\text{Da für Interferenzmaxima gilt: } \Delta l = k \cdot \lambda \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \text{ folgt: } \sin \alpha_k = \frac{k \cdot \lambda}{g} = \frac{d_k}{l}.$$

$$\text{Da für Interferenzminima gilt: } \Delta l = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2} \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots) \text{ folgt: } \sin \alpha_k = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2g} = \frac{d_k}{l}.$$



## Interferenz am Gitter

Ein **optisches Gitter** erhält man, indem man zu einem Doppelspalt im gleichen Abstand weitere Spalte hinzufügt. Der Abstand zwischen zwei Spalten ist die **Gitterkonstante  $g$** .

Bestrahlt man ein optisches Gitter mit parallelem einfarbigem Licht, so kann man helle und scharfe Interferenzmaxima beobachten. Im Gegensatz zum Interferenzbild beim Doppelspalt sind beim Gitter die Maxima schärfster ausgeprägt.

Da die Gitterkonstante im Verhältnis zur Wellenlänge des Lichtes klein ist, kann man vereinfachend sagen, dass von jedem Spalt nur eine Elementarwelle ausgeht. Diese Elementarwellen überlagern sich hinter dem Spalt wieder und es entsteht ein Interferenzbild.

Für die Bestimmung der Lage der Maxima führt man die gleichen Überlegungen wie beim Doppelspalt durch.

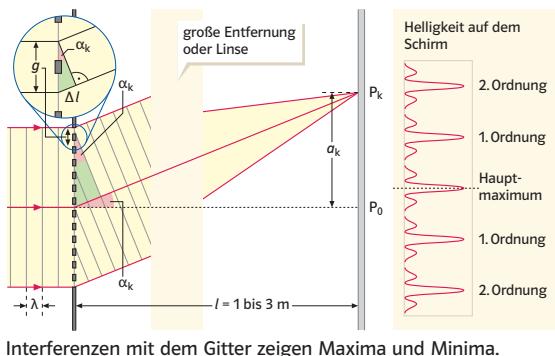
Es gilt  $l \gg a_k$ :

für Interferenzmaxima:

$$\sin \alpha_k = \frac{k \cdot \lambda}{g} = \frac{a_k}{l} \quad \text{für } k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

für Interferenzminima:

$$\sin \alpha_k = \frac{k \cdot \lambda}{2g} = \frac{a_k}{l} \quad \text{für } k = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$



Der Abstand der Interferenzmaxima ist abhängig von der Farbe. Bei blauem Licht liegen die Maxima enger beieinander als bei roten Licht. Bei weißem Licht erhält man ein farbiges Band. Der rote Lichtanteil wird stärker gebrochen als der violette Lichtanteil. Die Interferenz am Gitter kann z.B. benutzt werden, um die Wellenlänge des verwendeten Lichtes zu bestimmen.

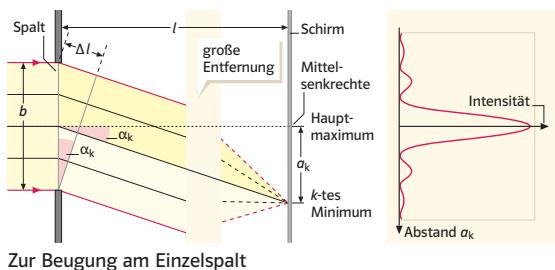
## Interferenz am Einzelspalt

Beim Einzelspalt kann man nicht mehr davon ausgehen, dass sich von dort nur eine Elementarwelle ausbreitet. Sondern man nimmt an, dass von jedem Punkt des Spaltes eine Elementarwelle ausgeht. Zur Vereinfachung teilt man dabei den Spalt in der Mitte in zwei Hälften, da man so zu jeder Welle aus einer Hälfte eine Welle aus der anderen Hälfte findet, die einen Gangunterschied von  $\lambda/2$  besitzen. D.h. alle Wellen löschen sich gerade aus.

Für das 1. Minimum gilt somit:  $\sin \alpha_k = \frac{\lambda}{b}$ .

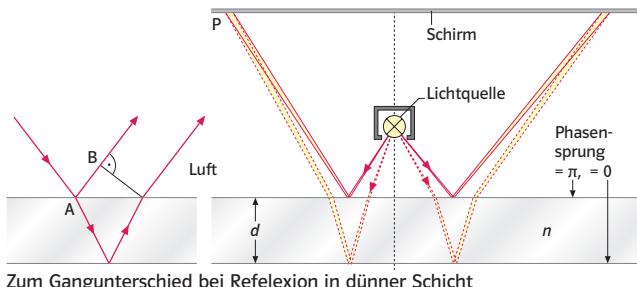
Bei einer Vergrößerung von Winkel  $\alpha$  löschen sich nur noch die Wellen aus, die einen Gangunterschied von  $\lambda$  haben. Der Rest bildet das 1. Maximum, das nicht so hell ist wie das Hauptmaximum. Erst wenn die beiden Randstrahlen einen Gangunterschied von  $\lambda$  besitzen, findet wieder Auslöschung statt und das 2. Minimum entsteht. Das  $k$ -te Minimum entsteht somit, wenn die Randstrahlen einen Gangunterschied von  $k \cdot \lambda$  haben.

Für Minima beim Einzelspalt gilt somit:  $\sin \alpha_k = \frac{k \cdot \lambda}{b}$  für  $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$



Beobachtet man eine dünne Ölschicht auf einer Wasseroberfläche oder eine Seifenblase, so sieht man diese in bunten Farben schillern. Dieses Phänomen lässt sich folgendermaßen erklären:  
Trifft das Licht auf die Ölschicht oder die dünne Haut der Seifenblase, so wird ein kleiner Teil davon reflektiert, wobei ein Phasensprung von  $\pi$  auftritt, während der Hauptteil in die Schicht eindringt und an der hinteren Seite der Schicht wieder reflektiert wird. Ein unerheblicher Teil wird nicht reflektiert, sondern verlässt die dünne Schicht. Für den an der Rückseite reflektierten Teil wiederholt sich die Aufspaltung an der Vorderseite der dünnen Schicht.

An der Vorderseite überlagert sich das dort reflektierte Licht mit dem Licht, das nach der Reflexion an der Rückseite die dünne Schicht an der Vorderseite verlässt. Es kommt zu Interferenzerscheinungen. Dabei tritt bei senkrechtem Auftreffen auf die Schicht ein Maximum auf, wenn ihr Gangunterschied  $\Delta l = 2d = k \cdot \Delta s$  beträgt und ein Minimum bei  $\Delta l = 2d = \frac{1}{2}(2k+1) \cdot \Delta s$ . Dabei ist  $\Delta s$  die Wellenlänge des Lichtes in der dünnen Schicht. Für die Wellenlänge in Luft gilt:  $\lambda = n \cdot \Delta s$  ( $n$ : Brechzahl der Schicht). Trifft das Licht hingegen unter einem Winkel, der größer ist als  $0^\circ$ , so muss zusätzlich die Strecke AB berücksichtigt werden.



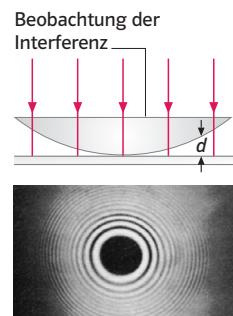
Der Gangunterschied hängt von der Dicke der Schicht und der Wellenlänge des Lichtes ab. Deshalb erscheint die dünne Schicht in verschiedenen Farben.

Die Interferenz an dünnen Schichten findet ihren Einsatz in der Entspiegelung von Glas. Da man bei Brillen und Objektiven Mehrfachreflexion vermeiden will, werden diese entspiegelt. Dazu wird eine dünne Schicht aufgedampft, deren Brechzahl kleiner als die des Glases ist. Fällt das Licht senkrecht ein, so entsteht bei einer Dicke der Schicht von  $\lambda/4$  des Lichtes des mittleren Spektralbereiches (grüner Wellenlängenbereich) ein Minimum.

### Newton'sche Ringe

Legt man eine große Sammellinse auf eine Glasplatte, so beobachtet man Interferenzerscheinungen. Diese entstehen durch die dünne Luftsicht, zwischen Glasplatte und Linse. Bei den Interferenzerscheinungen handelt es sich um helle Ringe, die **Newton'schen Ringe**.

Das auftreffende Licht wird an der Unterseite und an der Glasplatte reflektiert. Der Gangunterschied bestimmt sich durch den Phasensprung an der Platte und der Dicke der Luftsicht. Trifft das Licht senkrecht auf, so nimmt der Gangunterschied zu, je weiter die Auflagestelle entfernt ist. Deshalb sieht man abwechselnd dunkle und helle Ringe.



Newton'sche Ringe  
Foto: Klett-Archiv,  
Stuttgart

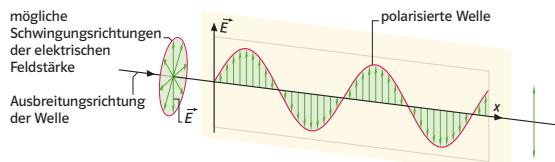


Licht ist eine elektromagnetische Welle, d.h. die Stärke des elektrischen und magnetischen Feldes ändert sich periodisch. Diese Eigenschaft und die, dass es sich um eine Transversalwelle handelt, kann mithilfe der **Polarisation** nachgewiesen werden.

Dazu verwendet man **Polarisationsfilter**.

Man kann sich ein Polarisationsfilter als sehr schmales Gitter vorstellen. Unpolarisiertes Licht schwingt in alle Richtungen. Nur der Teil des Lichtes, der parallel zu den Gitterstäben schwingt, kommt durch das Gitter hindurch.

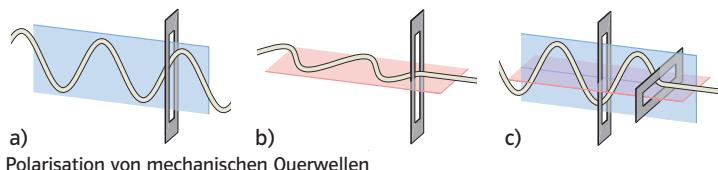
Je mehr die Schwingungsrichtung davon abweicht, umso weniger Licht kann das Gitter passieren. Licht, das unter einem Winkel von  $90^\circ$  zum Gitter schwingt, kann das Gitter nicht durchdringen.



Schwingungen in Lichtwellen

Die Polarisation des Lichtes kann folgendermaßen nachgewiesen werden:

Man stellt zwei Polarisationsfilter mit gleicher Richtung hintereinander. Die Helligkeit hinter den beiden Polarisationsfiltern hat kaum abgenommen. Ist die Richtung der beiden Filter senkrecht zueinander, dann herrscht dahinter Dunkelheit, da alle Schwingungsrichtungen herausgefiltert wurden.



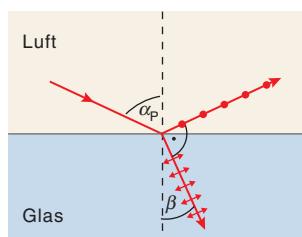
Obige Abbildung verdeutlicht dieses Verhalten:

- Nur der Anteil des Lichtes, der parallel zur Spaltöffnung, schwingt kann sie passieren.
- Der Anteil senkrecht zum Spalt passiert ihn nicht.
- Stellt man den zweiten Spalt senkrecht zum ersten Spalt, so kommt ein Teil des Lichtes durch den ersten Spalt hindurch, aber nicht mehr durch den zweiten. Dahinter herrscht Dunkelheit.

### Polarisation durch Reflexion

Trifft ein unpolarisiertes Lichtstrahl auf eine Glasoberfläche, so ist er nach der Reflexion teilweise polarisiert. Das reflektierte Licht ist vollständig polarisiert, wenn der Einfallswinkel so ist, dass der reflektierte Lichtstrahl senkrecht zur Einfallsebene und der gebrochene Lichtstrahl parallel zur Einfallsebene polarisiert ist.

Man nennt diesen Winkel **Brewster-Winkel**. Es gilt:  $\tan \alpha_p = n$ .



1671 untersuchte Newton die Zerlegung des weißen Lichtes in seine Spektralfarben. Dazu machte er vier Versuche:

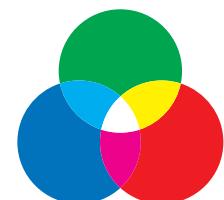
1. Versuch: Trifft weißes Licht auf ein Prisma, so wird es in seine Spektralfarben aufgefächert. Dabei handelt es sich um ein kontinuierliches Spektrum mit folgenden Spektralfarben: Rot, Orange, Gelb, Grün, Blau und Violett.  
Der blaue Anteil des Lichtes wird am stärksten, der rote Anteil am schwächsten gebrochen, da jede Farbe ihre eigene Wellenlänge besitzt.
2. Versuch: Blendet man hinter dem Prisma eine Spektralfarbe aus und lässt diese auf ein zweites Prisma treffen, wird diese Farbe nicht weiter zerlegt, sondern nur gebrochen.
3. Versuch: Lässt man die Spektralfarben aus Versuch 1 auf eine Sammellinse treffen, so vereinigen sie sich wieder zu weißem Licht.
4. Versuch: Blendet man aus dem Spektrum eine Farbe aus und vereinigt die anderen, so erhält man eine Mischfarbe. Man nennt das Paar aus ausgeblendeter Farbe und Mischfarbe **Komplementärfarben**.

Farbe	Komplementärfarbe
Rot	Cyan
Gelb	Blau
Grün	Magenta
Cyan	Rot
Blau	Gelb

Hinweis: Bei Blau, Rot, Gelb und Cyan kann es sich um eine reine Spektralfarbe oder um eine Mischfarbe handeln.

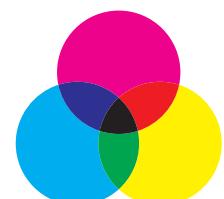
### Additive Farbmischung

Beleuchtet man eine weiße Leinwand mit verschiedenfarbigem Licht, so entstehen Mischfarben. Addiert man Rot und Grün, so entsteht Gelb. Addiert man Blau und Rot, so entsteht Magenta. Addiert man Blau und Grün, so entsteht Cyan. Man kann aus der Addition von Blau, Grün und Rot alle Farben mischen. Deshalb bezeichnet man diese drei Farben als die **Grundfarben der additiven Farbmischung**. Addiert man alle drei Grundfarben miteinander, so entsteht weiß.

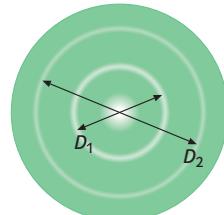
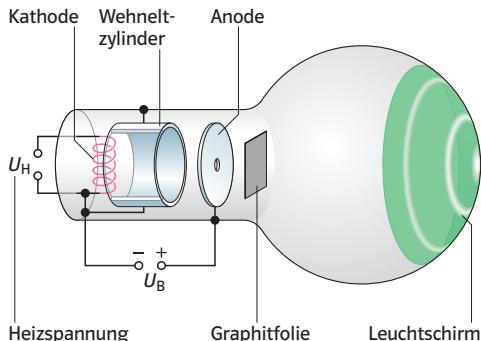


### Subtraktive Farbmischung

Lässt man weißes Licht durch einen Filter auf eine Leinwand fallen, so erscheint dort nur die Farbe, die vom Filter durchgelassen wird. Die Farbe entsteht somit durch Subtraktion (Wegnahme) der anderen Farben aus dem Spektrum. Die **Grundfarben der subtraktiven Farbmischung** sind Gelb, Magenta und Cyan. Mischt man diese drei Grundfarben zusammen, so entsteht schwarz.



Mit Hilfe der Elektronenbeugungsrohre wird in der Schule häufig die De-Broglie-Beziehung experimentell untersucht. Die Abbildung zeigt schematisch den Versuchsaufbau.



Elektronen, die aus der Glühkathode austreten, werden durch die Spannung  $U_B$  zur Anode beschleunigt. Sie durchdringen eine Schicht aus Grafitpulver und gelangen dann auf den Leuchtschirm der Röhre. Auf dem Schirm entstehen konzentrische Kreise. Diese werden als Interferenzbild einer Welle gedeutet. Die Wellenlänge kann mit Hilfe der Bragg-Bedingung und aus der Geometrie der Röhre bestimmt werden. Bei der zweiten Methode werden nur Eigenschaften einer Welle benutzt.

Aus den Abmessungen der Röhre folgt für kleine Winkel im Bogenmaß (s. Abb. unten):

$$2 \cdot \vartheta \approx \frac{D}{2l} \Rightarrow \vartheta = \frac{D}{4l} \approx \sin \vartheta.$$

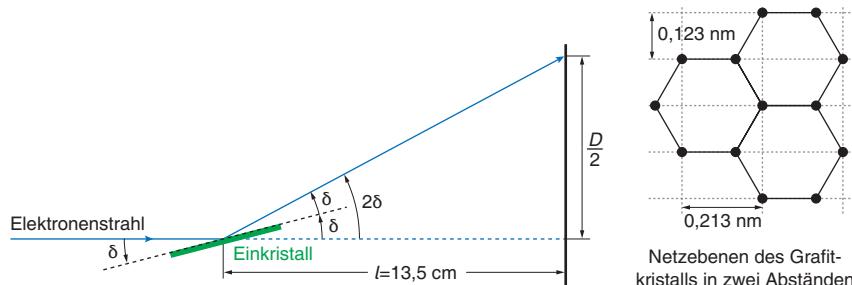
Mit der Bragg-Bedingung erhält man in guter Näherung  $k \cdot \lambda = \frac{a \cdot D}{2l}$ .

Der Kristall hat zwei Netzebenen mit den Abständen 0,123 nm und 0,213 nm. Die beiden Kreise entstehen durch Bragg-Reflektion an je einer Netzebene. Es ist jeweils  $k = 1$ .

Mit der Hypothese von De-Broglie erhält man aus der Teilcheneigenschaft Impuls die Wellenlänge eines bewegten Teilchens  $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2m e U}}$ .

Die auf beiden Wegen gemessenen Wellenlängen stimmen überein. Man kann sagen:

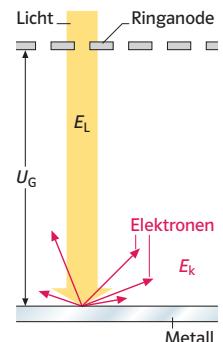
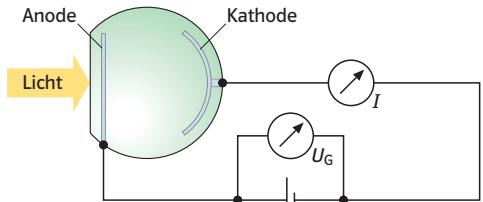
**Treten viele Elektronen durch einen Kristall, dann beobachtet man ein Interferenzbild. Dieses stimmt mit dem Interferenzbild einer Welle mit der Wellenlänge  $\lambda = \frac{h}{p}$  überein.**



Wird ein Metall mit Licht genügend hoher Frequenz bestrahlt, so werden Elektronen aus der Metalloberfläche gelöst. Die Elektronen übernehmen die Energie des Lichtes. Man spricht allgemein vom **Fotoeffekt**, wenn Lichtenergie in elektrische Energie umgesetzt wird.

Messungen zeigen, dass der Fotoeffekt nur oberhalb einer vom Metall abhängigen Grenzfrequenz  $f_{\text{Grenz}}$  eintritt. Ist die Frequenz geringer als diese **Grenzfrequenz**, dann werden selbst bei hoher Lichtintensität und langer Beleuchtungsdauer keine Elektronen aus der Metalloberfläche herausgelöst. Da die Intensität des Lichts von der Amplitude abhängt, ist dies im Wellenmodell des Lichts nicht zu verstehen. Experimentell kann der Fotoeffekt mit einer Vakuumfotozelle und der Gegenfeldmethode untersucht werden.

Die aus der Kathode austretenden Elektronen bewegen sich zur Anode. Man misst einen Strom. Legt man eine Gegenspannung  $U_G$  an, dann erreichen nur Elektronen mit einer kinetischen Energie größer als  $e \cdot U_G$  die Anode. Bei steigender Spannung sinkt die Stromstärke, bis sie den Wert null erreicht hat. Die maximale kinetische Energie der Elektronen und die elektrische Energie ist dann gleich. Es ist:  $E_{\text{kin,max}} = e \cdot U_{G,\text{max}}$



Das Diagramm stellt den Zusammenhang zwischen der Frequenz des Lichtes und der maximalen kinetischen Energie der Photoelektronen für verschiedene Metalle dar. Man erhält jeweils parallele Geraden. Die gemeinsame Steigung ist die **Planck'sche Konstante**  $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

Allgemein gilt:

$$E_{\text{kin,max}} = h \cdot f - h \cdot f_{\text{grenz}} \quad \text{bzw.}$$

$$h \cdot f = E_{\text{kin,max}} + h \cdot f_{\text{grenz}}.$$

Dabei ist  $h \cdot f_{\text{grenz}}$  die Auslösearbeit  $W_a$ .

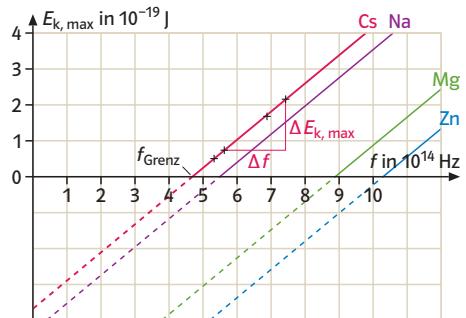
Einstein formulierte:

**Licht besteht aus einzelnen Photonen der Energie  $h \cdot f$ .**

Die Photonen bewegen sich mit Lichtgeschwindigkeit.

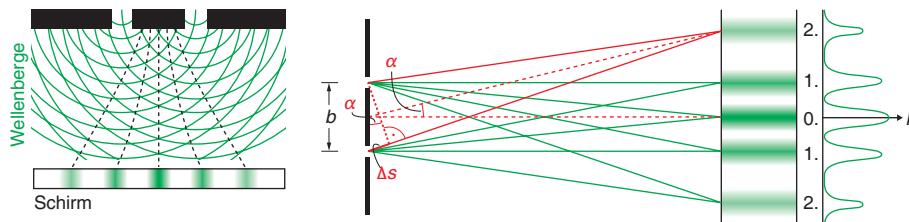
Sie besitzen den Impuls  $p_{\text{Photon}} = \frac{h}{\lambda}$  und die

$$\text{Masse } m_{\text{Photon}} = \frac{hf}{c^2}.$$



Beleuchtet man zwei dicht beieinanderliegende Spalte mit Laserlicht, so beobachtet man ein **Interferenzmuster**. Dieses Muster ist von Wasserwellen bekannt und lässt sich klassisch mit Hilfe der huygensschen Elementarwellen erklären.

Jeder Spalt ist Ausgangspunkt einer Elementarwelle. Diese beiden Wellensysteme überlagern sich zu einem Interferenzbild mit Verstärkung und Auslöschung. Somit zeigt Licht Welleneigenschaften.



Führt man dieses Experiment mit einzelnen **Photonen** durch, so erhält man nur dann ein Interferenzmuster, wenn viele Photonen nachgewiesen werden, d.h. bei Licht mit hoher Intensität und kurzer Belichtungszeit oder bei niedriger Intensität und langer Belichtungszeit.

Verwendet man hingegen wenig Photonen, so werden diese als Einzelobjekte nachgewiesen. Man beobachtet auf einem Film unregelmäßig verteilte Punkte.

Beugung und Interferenz kommen nicht durch die Wechselwirkung zwischen einzelnen Photonen zustande.

Es ist nicht möglich, das Verhalten eines Photons nur mit Wellen- oder Teilcheneigenschaften erklären. Zur Erklärung muss man beide Modelle miteinander vereinigen. Photonen sind keine Wellen und auch keine Teilchen.

Im Wellenmodell lässt sich die Intensitätsverteilung berechnen, das Photonenmodell beschreibt die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Photon registriert werden kann.



## Weitere Experimente mit dem Mach-Zehnder-Interferometer

1. Durch das folgende Experiment kann man überprüfen, ob sich Photonen im Strahlteiler teilen.

In den Weg A und in den Weg B wird je ein Detektor für Photonen gestellt. Diese werden in Koinzidenzschaltung betrieben. Schickt man Photonen durch das Interferometer, dann sprechen die Detektoren niemals gleichzeitig an. Nur ein Detektor registriert jeweils ein ganzes Photon mit der Energie  $hf$ . Die Vorstellung, dass sich Photonen teilen und „halbe“ Photonen den Weg A bzw. B wählen und beim Zusammentreffen interferieren ist nicht haltbar.

**Photonen sind nicht teilbar.**

2. Mit Hilfe von Polarisatoren kann man Informationen über den gewählten Weg eines Photons erhalten.

Das Experiment aus Teilaufgabe 4. wird erweitert.

- Sind die beiden Polarisatoren parallel eingestellt, dann ist eine Wegentscheidung nicht möglich. Das Interferenzbild bleibt erhalten.
- Stellt man im Versuch 4. vor  $D_2$  einen dritten Polarisator in  $0^\circ$ -Stellung, dann geht die Weginformation verloren. Man sieht wieder ein Interferenzbild.

**Unterscheidbarkeit und Interferenz schließen sich bei Quantenobjekten aus.**

Weg A	Weg B
$\uparrow \phi$	$\uparrow \phi$
Photonen nicht unterscheidbar	Interferenz
$\curvearrowleft \otimes$	$\curvearrowright \otimes$
Photonen unterscheidbar	keine Interferenz
	$\uparrow \phi$
	zusätzlich vor $D_2$ Unter- scheidung aufgehoben
	Interferenz

3. Geht man davon aus, dass sich immer nur ein Photon im Interferometer aufhält, dann ist folgendes denkbar:

Nachdem das Photon in das Interferometer eingetreten ist, wird nach dem Zufallsprinzip einer der beiden Wege blockiert. Bemerkt jetzt das Photon, welches den anderen Weg gewählt hat, etwas von dieser Änderung? Falls nein, dann müsste es (nach Aufgabe 1) stets im Detektor  $D_2$  nachgewiesen werden. Experimente zeigen aber, das Photonen auch in den zweiten Detektor  $D_1$  gelangen.

Auch wenn der Experimentator von der Blockierung eines Weges nichts erfährt, kann er dies auf Grund des Versuchsergebnisses erschließen. Ein Photon trifft nur dann den Detektor  $D_1$ , wenn nur ein Weg möglich ist. Damit ist auch klar, dass das Photon den nicht blockierten Weg gewählt hat. **Das Wissen über den Weg und Interferenz schließen sich gegenseitig aus.**

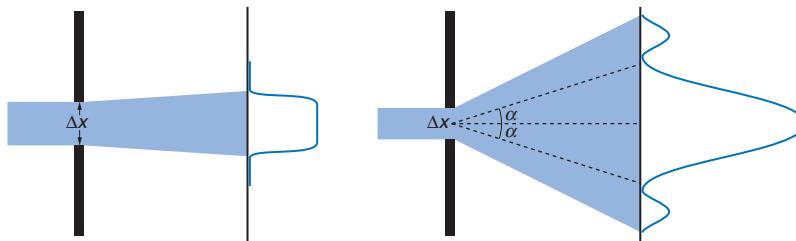
Zusätzlich hat der Experimentator ein Hindernis gemessen, ohne dass das Quantenobjekt eine Wechselwirkung mit dem Hindernis hatte (es wäre sonst von ihm absorbiert worden). Man spricht von einer **wechselwirkungsfreien Messung**.



Die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation kann mit den Mitteln der Schule nicht hergeleitet werden. Betrachtungen am Spalt können sie aber plausibel machen.

Elektronen, die aus einer Glühkathode treten, werden in einem elektrischen Feld beschleunigt und treffen senkrecht auf einen Spalt. Dort haben alle gleiche Geschwindigkeit und gleichen Impuls  $p = m \cdot v$ .

Für Elektronen, die durch den Spalt gelangen, ist die Ortskoordinate bis auf  $\Delta x = b/2$  bekannt. Bei großer Spaltbreite wird der Elektronenstrahl nur geringfügig aufgeweitet. Elektronen ändern die Bewegungsrichtung nur wenig. Die Impulsänderung  $\Delta p$  ist gering.



Je schmäler der Spalt wird, desto breiter wird das Beugungsmuster. Die Elektronen ändern ihre Bewegungsrichtung stärker. Die Impulsänderung  $\Delta p$  wächst.

Qualitativ erhält man: **Je kleiner  $\Delta x$ , desto größer  $\Delta p$ .**

Der Großteil der Elektronen gelangt nach dem Spalt in den Bereich des Hauptmaximums, d.h. ihre Impulse werden in den Winkelbereich  $-\alpha$  bis  $+\alpha$  gestreut. Daher ist die folgende Abschätzung möglich:

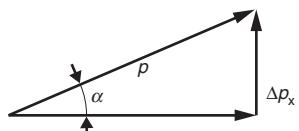
Aus der Skizze folgt:  $\Delta p_x \approx p \cdot \sin \alpha$ .

Für den Ablenkwinkel  $\alpha$  zum 1. Minimum gilt am Spalt:

$$\lambda = b \cdot \sin \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \lambda/b.$$

Mit der De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda = h/p$  erhält man schließlich

$$\Delta p_x \cdot \Delta x \approx h/2.$$



Das Ergebnis einer vollständigen Theorie ist die **Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation**:

Es nicht möglich, gleichzeitig den Ort  $x$  und den Impuls  $p$  eines Quantenobjektes mit beliebiger Genauigkeit zu bestimmen. Für die Unbestimmtheiten  $\Delta x$  des Ortes und des Impulses  $\Delta p_x$  gilt:

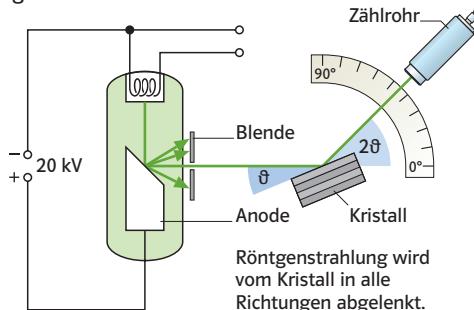
$$\overline{\Delta x \cdot \Delta p_x} \geq \frac{h}{4\pi}.$$

In der klassischen Mechanik kann die Bewegung eines Körpers durch eine Bahnkurve beschrieben werden. Diese Beschreibung gelingt nur, wenn man Ort und Impuls gleichzeitig exakt angeben kann. Nach der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation ist dies für Quantenobjekte nicht möglich. Die Angabe einer Bahnkurve ist daher für Quantenobjekten nicht möglich.

Die Auswirkungen der Unbestimmtheitsrelation in der Makrophysik sind so gering, dass sie außerhalb des Beobachtbaren liegen.



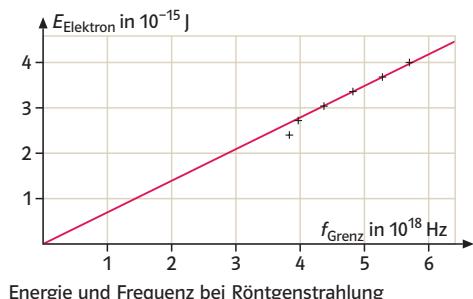
Die Abbildung zeigt schematisch einen Versuchsaufbau zur Erzeugung von Röntgenstrahlung und zur Bestimmung ihrer Wellenlängen.



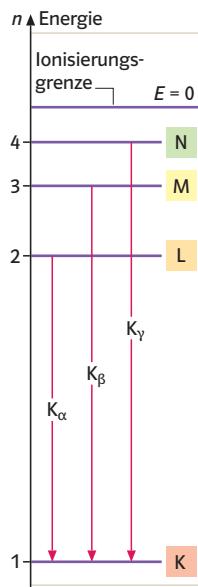
Zur Wellenlängenbestimmung nutzt man die Drehkristallmethode. Bei einem Lithium-Fluorid-Kristall kennt man z.B. den Abstand der Netzebenen, er beträgt  $a = 201\text{pm}$ . Über die Braggbedingung  $k \cdot \lambda = 2 \cdot a \cdot \sin \delta$  mit  $k = 1, 2, \dots$  kann dann vom Winkel auf die Wellenlänge der Strahlung geschlossen werden.

Beispiel: Bei einem fest eingestellten Winkel  $10^\circ$  wird die Beschleunigungsspannung langsam erhöht. Die Zählrate setzt bei  $U_B = 15,8\text{kV}$  ein. Zum Winkel  $10^\circ$  gehört  $k=1$  und die Grenzwellenlänge  $\lambda_{\text{grenz}} = 2 \cdot 201\text{pm} \cdot \sin(10^\circ) = 69,8\text{pm} = 69,8 \cdot 10^{-12}\text{m}$  bzw.  $f_{\text{grenz}} = c/\lambda_{\text{grenz}} = 4,3 \cdot 10^{18}\text{Hz}$ .

Trägt man die Energie der Elektronen in Abhängigkeit von der Grenzfrequenz in ein Diagramm, so erhält man eine Gerade mit der Planck'schen Konstanten als Steigung. Man erkennt daraus, ähnlich wie beim Photoeffekt: **Die Röntgenstrahlung tritt in Energiequanten, d.h. Photonen der Energie  $h \cdot f$  auf.**



Die charakteristische Röntgenstrahlung entsteht, wenn die Energie der Elektronen so groß ist, dass sie in der Lage sind, Elektronen aus den niedrigen Energieniveaus der Atome heraus zu lösen. An deren Stelle treten Elektronen aus höheren Niveaus. Dabei wird Strahlung emittiert, deren Energie mit der Differenz der Energieniveaus übereinstimmt. Bei Kupfer erhält man z.B. für die  $K_\alpha$ -Linie die Energie von etwa 8,0 keV.



Unter dem Compton-Effekt versteht man die Streuung von Photonen an einem freien bzw. schwach gebundenen Elektron. Die Abbildung skizziert einen möglichen Versuchsaufbau (Abb. 1).

Die Photonen der Röntgenstrahlung treffen auf einen Körper aus Graphit. Mit Hilfe der Bragg'schen Drehkristallmethode wird die Wellenlänge der gestreuten Röntgenstrahlung bestimmt. Die folgenden Diagramme sind Ergebnisse von Messungen, die Compton durchgeführt hat (Abb. 2).

Man erkennt:

- Das erste Maximum verändert seine Lage nicht. Diese Wellenlänge gehört zur Röntgenstrahlung, die den Kristall ohne Energieverlust durchdringt. Dies kann z.B. durch Streuung an einem Atom geschehen, ähnlich wie die Reflexion eines elastischen Körpers an einer festen Wand.
- Die Wellenlängenänderung nimmt mit zunehmendem Winkel zu.

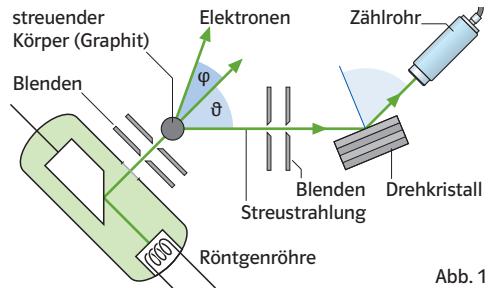


Abb. 1

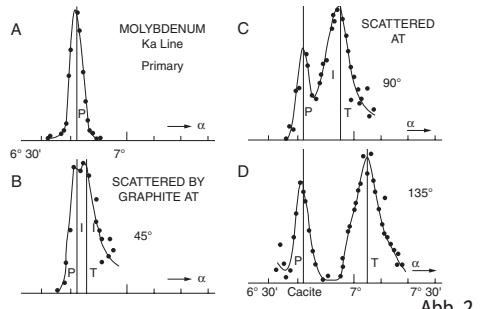


Abb. 2

Theoretisch lässt sich die Wellenlängenänderung durch die Annahme eines elastischen Stoßes zwischen einem Photon und einem freien ruhenden Elektron begründen. Mit Hilfe des Impuls- und des Energieerhaltungssatzes erhält man die Wellenlänge nach der Streuung.

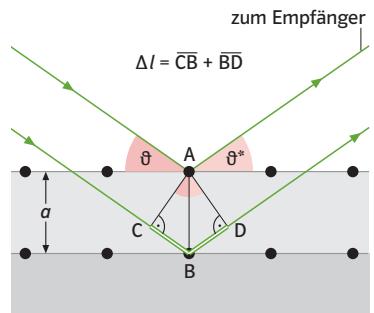
$$\vec{p}_v = \vec{p}_n + \vec{p}_{e,n}; p_v^2 + p_n^2 - 2p_v p_n \cos \theta = p_{e,n}^2 \\ h \cdot f_v + m_e \cdot c^2 = h \cdot f_n + m_{2,n} \cdot c^2$$

Die **Drehkristallmethode** nutzt die **Bragg-Bedingung** bei der Reflexion von Röntgenstrahlung an Netzebenen eines Kristalls.

Wellen, die an hintereinander liegenden Netzebenen reflektiert werden, verstärken sich, wenn der Gangunterschied ein Vielfaches der Wellenlänge  $\lambda$  ist und wenn außerdem die Winkel  $\theta_k$  und  $\theta_k^*$  gleich groß sind. Damit ergibt sich

$$\Delta s = k \cdot \lambda \text{ und } \Delta s = 2a \cdot \sin(\theta_k)$$

**Maximale Verstärkung erhält man, falls  $k \cdot \lambda = 2a \cdot \sin(\theta_k)$  ist.**



## Die Planck Konstante

Im Jahre 1900 untersuchte Max Planck den Zusammenhang zwischen der Strahlung, die von einem Körper ausgesandt wird, und dessen Temperatur. Er entwickelte eine Formel, die die experimentellen Ergebnisse gut wiedergab. Bei seinen Überlegungen gab er die klassische Vorstellung auf, dass Licht und Wärme in einen kontinuierlichen Energiestrom abgegeben werden. Seine Strahlungsformel ergab nur Sinn, wenn er annahm, dass die Energie in Portionen proportional zur Frequenz  $f$  der Strahlung abgegeben wird. Die Proportionalitätskonstante wurde später die Planck'sche Konstante  $h$  genannt.

Die Planck'sche Konstante ist ein Grundstein der modernen Physik.

- Außer der Unbestimmtheit für den Ort und Impuls gibt es weitere ähnliche Beziehungen. Wichtig ist die Unbestimmtheit für Energie und Zeit. Die Planck'sche Konstante begrenzt die Genauigkeit:

$$\overline{\Delta E} \cdot \overline{\Delta t} \geq \frac{h}{4\pi}$$

- Die Energiezustände eines Atoms sind gequantelt. Für die Energiedifferenzen gilt  $\Delta E = h \cdot f$ .
- Der Bahndrehimpuls eines Elektrons im Atom ist gequantelt und proportional zu  $h$ .
- Quantenobjekte mit der Masse  $m$ , deren Aufenthaltsbereich auf eine Strecke der Länge  $l$  eingeschränkt ist, haben eine Lokalisationsenergie (Nullpunktsenergie) proportional zu  $h^2$ :

$$E_{\text{Lokalisation}} = \frac{1}{2ml^2} \cdot h^2$$

## Messung der Planck-Konstanten mit Leuchtdioden

Ab einer Schwellenspannung  $U_0$  gibt eine Leuchtdiode (LED) Licht der Frequenz  $f$  ab. Es wird elektrische Energie  $e \cdot U_0$  in Lichtenergie  $h \cdot f$  umgesetzt.

Mit der abgebildeten Versuchsanordnung wird die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts gemessen. Eine Messreihe mit vier LED's ergibt z. B. die folgenden Werte.

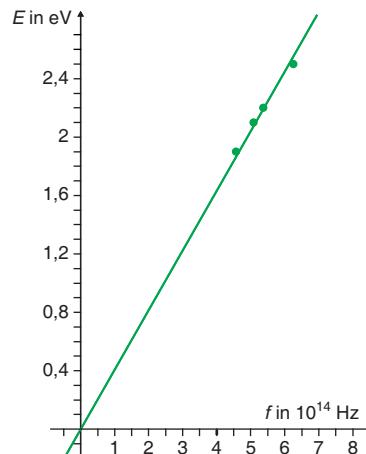
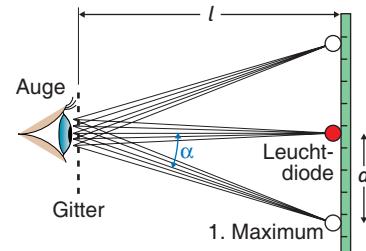
Farbe	blau	grün	gelb	rot
$U_0$ in V	2,5	2,2	2,1	1,9
$E$ in eV	2,5	2,2	2,1	1,9
$\lambda$ in nm	480	560	590	655
$f$ in $10^{14}$ Hz	6,25	5,36	5,08	4,58

In einem  $f$ - $E$ -Diagramm liegen die Messwerte mit guter Genauigkeit auf einer Ursprungsgeraden. Die Steigung dieser Geraden ergibt die Planck'sche Konstante.

Aus  $eU_0 = h \cdot f$  folgt  $h = eU_0/f$ . Der Punkt  $(2,2 \text{ eV}/5,36 \cdot 10^{14} \text{ Hz})$  liegt auf der Ausgleichsgeraden.

Damit erhält man  $h$  als Steigung der Geraden

$$h = \frac{2,2 \text{ V} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{5,36 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js.}$$



**Erwin Schrödinger** entwickelte 1926 eine Differentialgleichung, deren Lösungen Zustandsfunktionen für nichtrelativistische Quantenobjekte (z. B. für Elektronen, Protonen, Neutronen oder auch Atome) sind.  
Für Quantenobjekte in einem eindimensionale Potentialtopf lautet die Gleichung

$$\psi''(x) + \frac{8\pi^2 m}{h^2} \cdot (E - E_{\text{pot}}(x)) \cdot \psi(x) = 0.$$

$E$  ist die Gesamtenergie des Quantenobjektes und  $E_{\text{pot}}(x)$  die potenzielle Energie in Abhängigkeit des Ortes  $x$ .

Ist die potenzielle Energie konstant, dann vereinfachen sich die Lösungen.

Für  $E > E_{\text{pot}}$  hat die **Schrödinger-Gleichung** dieselbe Form wie die der harmonischen Schwingung. Lösungen sind Sinusfunktionen:

$$\psi(x) = A \cdot \sin(Bx + C) \quad \text{mit} \quad B = \frac{2\pi}{h} \sqrt{2m(E - E_{\text{pot}})}.$$

Für  $E < E_{\text{pot}}$  sind Exponentialfunktionen Lösungen der Differentialgleichung. Durch Einsetzen erhält man:

$$\psi(x) = D \cdot e^{-kx} \quad \text{mit} \quad k = \sqrt{2m(E_{\text{pot}} - E)}.$$

Es existieren also auch Lösungen für einen Bereich, in dem sich nach klassischer Vorstellung wegen zu kleiner Gesamtenergie ein Quantenobjekt nicht aufhalten kann.

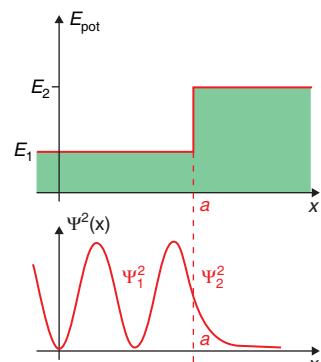
Im Beispiel ist die potenzielle Energie abschnittsweise konstant. Die Gesamtenergie  $E$  eines Elektrons sei größer als  $E_1$ , aber kleiner als  $E_2$ .

Man berechnet nun für jeden Abschnitt Lösungen der Schrödinger-Gleichung, die an den Übergangsstellen „ohne Knick“ zusammengefügt werden. D.h. es müssen folgende Anschlussbedingungen erfüllt sein:

$$\psi_1(a) = \psi_2(a) \quad \text{und} \quad \psi'_1(a) = \psi'_2(a).$$

Für qualitative Überlegungen genügt das folgende Vorgehen:

- Ist  $E - E_{\text{pot}}$  positiv, dann befindet sich das Quantenobjekt in einem klassisch erlaubten Bereich. Die Zustandsfunktionen sind Sinusfunktionen.
- Ist  $E - E_{\text{pot}}$  negativ, dann befindet sich das Quantenobjekt in einem klassisch verbotenen Bereich. Es gibt trotzdem eine geringe Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Die Zustandsfunktionen sind Exponentialfunktionen, die gegen Null streben, je weiter man in diesen Bereich eindringt.
- Die Funktionen werden ohne Knick (differenzierbar) zusammengenfügt.

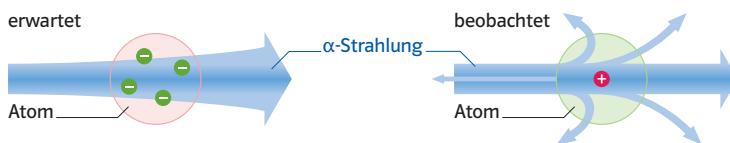
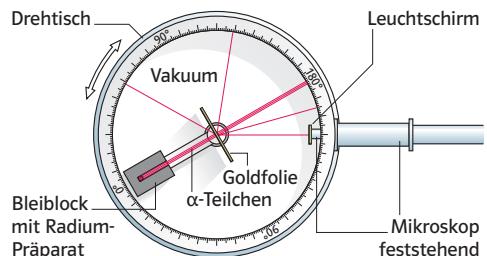


Der britische Physiker J.J. Thomson (Nobelpreis 1906) entdeckte das Elektron als Bestandteil von Atomen. Da Atome nach außen hin elektrisch neutral sind, müssen sie auch positive Ladung enthalten. Thomson stellte sich das Atom als eine kompakte Kugel vor, in der die positive Ladung gleichmäßig verteilt ist. Die Elektronen sollten in diesem Modell, wie Rosinen in einem Kuchen, angeordnet sein. Man spricht auch von dem „Rosinenkuchen-Modell“.

Genauere Kenntnisse über den Aufbau von Atomen liefern Streuexperimente. Rutherford schoss ein schmales Bündel  $\alpha$ -Teilchen (Heliumkerne) auf eine dünne Goldfolie.

Die Abbildung zeigt eine heutige Versuchsanordnung. Ein Radiumpräparat sendet  $\alpha$ -Teilchen aus, diese treffen auf eine dünne Goldfolie. Auf einem Schirm kann man  $\alpha$ -Teilchen als Lichtblitze nachweisen.

Nach den Vorstellungen von Thomson sollten die  $\alpha$ -Teilchen die Folie ohne Ablenkung durchdringen. Man beobachtete aber, dass ein Teil der  $\alpha$ -Teilchen abgelenkt und sogar zurückgestreut wurde.



Dies war völlig unerwartet. Rutherford soll gesagt haben: „Es war so unglaublich, wie wenn jemand eine 15-Zoll-Granate auf ein Stück Papier gefeuert hätte und dann von zurückprallenden Geschossteilen selbst getroffen worden wäre.“

Rutherford entwickelte ein **Kern-Hülle-Modell** des Atoms. Die Größenordnung des Kerns lässt sich aus den  $\alpha$ -Teilchen ermitteln, die zurückgestreut werden. Man erhält eine Kerndurchmesser von  $d \approx 10^{-14} \text{ m}$ .

Probleme:

- Für ein im elektrischen Feld kreisendes Elektron sind alle Kreisradien möglich. Ein fester Atomdurchmesser ist nicht erklärbar.
- Elektronen auf Kreisbahnen strahlen Energie ab. Elektronen müssten in den Kern stürzen.
- Es gibt keine Erklärung für die Absorptions- und Emissionsspektren.



Der Franck-Hertz-Versuch kann auch mit anderen Füllgasen durchgeführt werden. Das  $U_B$ - $I$ -Diagramm zeigt ein Versuchergebnis für Neon. Gleichzeitig kann man ein Leuchten des Gases beobachten. Die beschleunigten Elektronen können in diesem Versuch nur Energie in Portionen von 19 eV an die Neon-Atome abgeben.

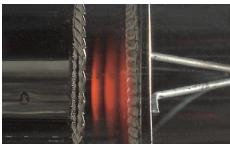
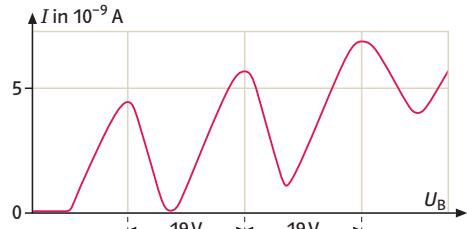
Allgemein gilt:

Atome nehmen nur ganz bestimmte Portionen an Energie auf. Der Betrag ist abhängig von der Atomsorte.

Man spricht dann von einem angeregten Atom.

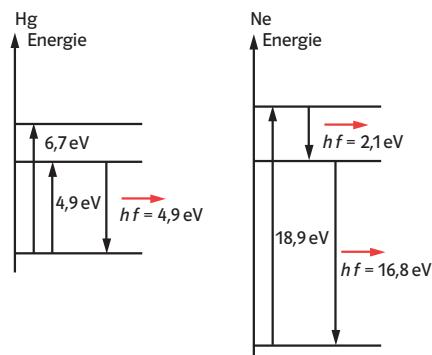
Leuchterscheinungen während des Versuches deuten daraufhin, dass die Energie wieder durch Photonen abgegeben werden kann.

Atome können durch Emission von Photonen der Energie  $hf$  in den Grundzustand zurückkehren.



Mit den Methoden von Franck und Hertz konnte man weitere Anregungsstufen von einer großen Anzahl von Elementen bestimmen.

Die Anregungsstufen stellt man mit einem Energie- bzw. Termschema dar.



Die Wellenlänge der emittierten Photonen sind in den Beispielen:

Quecksilber:  $\lambda = 254 \text{ nm}$ . Diese Strahlung liegt im ultravioletten Bereich und kann im Unterrichtsversuch nicht beobachtet werden.

Neon: Das Atom geht durch die Emission von zwei Photonen in den Grundzustand.  
Die Wellenlänge zur Energie 2,1 eV beträgt 585 nm und liegt damit im sichtbaren Bereich.



## Rechnung zum Bohr'schen Atommodell

Das Bohr'sche Atommodell liefert für wasserstoffähnliche Atome, das sind Atome mit nur einem Elektron in der Hülle, eine gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Rechnung. Die Theorie versagt aber schon beim Heliumatom.

Die folgende Rechnung gilt für wasserstoffähnliche Atome.

- Berechnung der zulässigen Bahngeschwindigkeiten  $v_n$ .

Das Elektron bewegt sich auf einer Kreisbahn. Die dafür notwendige Zentralkraft  $F_z = m_e \cdot \frac{v_n^2}{r_n}$  ist die Coulombkraft  $F_C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r_n^2}$ .

Aus  $F_z = F_C$  und dem ersten Postulat folgt:

$$(1) \quad 2\pi \cdot m_e \cdot r_n \cdot v_n \cdot v_n = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot Ze^2 \Rightarrow n \hbar v_n = \frac{1}{2\epsilon_0} \cdot Ze^2 \Rightarrow v_n = \frac{Ze^2}{2\epsilon_0 \hbar} \cdot \frac{1}{n}.$$

- Berechnung der zulässigen Bahnradien:

Man setzt die berechnete Geschwindigkeit in die linke Seite von (1) ein und erhält:  $r_n = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m_e Ze^2} \cdot n^2$ .

Den Energieterm erhält man durch folgende Überlegungen:

- Das Elektron besitzt im elektrischen Feld des Kerns die potentielle Energie.  $E_{pot} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r_n}$ .

Aus der Bedingung  $F_z = F_C$  ergibt sich die kinetische Energie  $E_{kin} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r_n}$

und damit die Gesamtenergie  $E = E_{pot} + E_{kin} = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze^2}{r_n}$ .

In diesem Ergebnis muss  $r_n$  noch durch die erlaubten Radien ersetzt werden:

$$E_n = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{1}{n^2} = -13,6 \text{ eV} \cdot \frac{Z^2}{n^2}.$$

Die in den Formeln vorkommende natürliche Zahl  $n$  heißt **Hauptquantenzahl** oder auch Energiequantenzahl.

**Leistungen und Grenzen:** Die Quantenvorstellungen von Planck und Einstein wurden von Bohr zum ersten Mal erfolgreich auf Atome angewendet. Die Spektren wasserstoffähnlicher Atome konnten genau berechnet werden. Dies gilt auch für die charakteristische Röntgenstrahlung.

Im Wasserstoffatom bewegt sich das Elektron auf einer Kreisbahn in einer festen Ebene. Danach müsste das Atom eine dünne Scheibe sein.

Nach der Heisenberg'schen Unbestimmtheitsrelation ist die Anwendung des Bahnbegriffs nicht möglich.



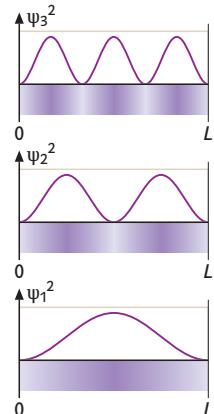
## Eindimensionaler Potenzialtopf

Ein Atommodell, welches die Ergebnisse der Quantenphysik berücksichtigt, muss ohne den Bahnbegriiff auskommen. Ein stark vereinfachtes Modell ist der eindimensionale Potenzialtopf. Man geht davon aus, dass sich ein Elektron längs einer Strecke  $L$  frei bewegen, diese aber nicht verlassen kann. Beschrieben wird das Elektron mit einer vom Ort  $x$  abhängigen **Zustandsfunktion  $\psi(x)$** . Diese Funktion hat keine direkte physikalische Bedeutung. Geht man aber zum Quadrat  $\psi^2(x)$  dieser Funktion über, so erhält man die **Wahrscheinlichkeitsdichte** für den Aufenthalt des Elektrons.

Multipliziert man die Wahrscheinlichkeitsdichte mit einer Intervalllänge  $\Delta x$ , so gibt dieses Produkt die Wahrscheinlichkeit an, ein Elektron im Intervall  $[x - \Delta x, x + \Delta x]$  zu finden.

Die räumliche Verteilung der Wahrscheinlichkeitsdichte heißt Orbital des Elektrons. Das Bild zeigt die ersten drei Orbitale für ein Elektron im eindimensionalen Potenzialtopf.

Im Potenzialtopf kann ein Elektron nur ganz bestimmte Energien  $E_n$  annehmen. Dieser Zusammenhang ist allgemein gültig.



**Ein begrenzter Raumbereich für den Aufenthalt eines Elektrons führt immer zu diskreten Energieniveaus.**

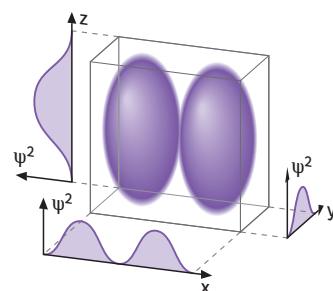
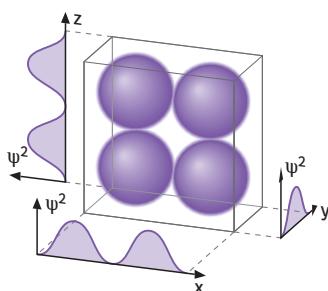
## Dreidimensionaler Potenzialtopf

Atome sind räumlich ausgedehnt. Deshalb ist es sinnvoll, die Überlegungen des eindimensionalen Potenzialtopfes auf drei Dimensionen zu übertragen. Der Aufenthaltsbereich für das Elektron sei nun ein Quader mit den Abmessungen  $L_1, L_2, L_3$ . Für jede Raumrichtung gilt die Bedingung des linearen Potenzialtopfes:

$$L_i = \frac{n_i \cdot \lambda_{n_i}}{2} \Rightarrow \lambda_{n_i} = \frac{2 \cdot L_i}{n_i} \Rightarrow p_i = \frac{\hbar}{\lambda_{n_i}} = \frac{n_i \hbar}{2 \cdot L_i} \text{ mit } i = 1, 2, 3.$$

Für die Gesamtenergie  $E$  ist dann:  $E = \frac{\hbar^2}{8m_e} \left( \frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} + \frac{n_3^2}{L_3^2} \right)$ .

Ist der Quader ein Würfel ( $L_1 = L_2 = L_3$ ), dann können verschiedene Zustände gleiche Energien haben. Dieses Phänomen bezeichnet man als Entartung.

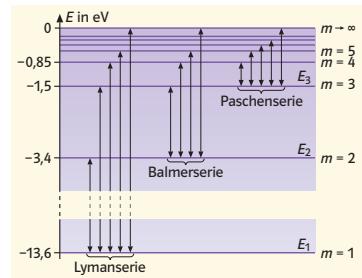


$E$	.....	2, 2, 1	2, 1, 2	1, 2, 2
	.....	2, 1, 1	1, 2, 1	1, 1, 2
	.....	1, 1, 1		



## Das Wasserstoffspektrum

Das Bohr'sche Atommodell beschreibt das Wasserstoffatom mit großer Genauigkeit. Aus den möglichen Energieniveaus  $E_n = -13,6 \text{ eV} \cdot 1/n^2$  folgen die Frequenzen  $f = f_R \cdot (1/n^2 - 1/m^2)$  mit der Rydbergfrequenz  $f_R = 3,2888 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$ .



## Verbessertes Atommodell

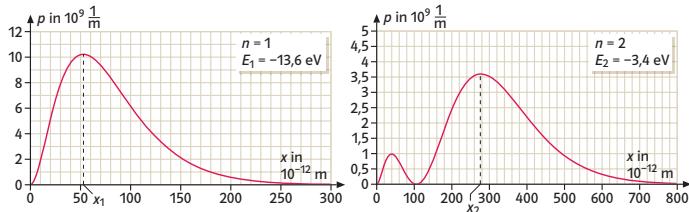
Aus dem Modell des eindimensionalen Potenzialtopf folgt  $E_n \sim n^2$ . Für das Wasserstoffatom gilt jedoch  $E_n \sim 1/n^2$ .

Ein verbessertes Atommodell muss das Coulombpotenzial berücksichtigen.

Die Zustandsfunktionen sind Lösungen einer Differentialgleichung, die von Erwin Schrödinger 1926 entwickelt wurde.

Die Wahrscheinlichkeitsdichte  $p = \psi_n^2(x)$  für  $n = 1$  besitzt ein absolutes Maximum bei  $x_1$ . Bei diesem Abstand, er stimmt mit

dem ersten Bohr'schen Radius überein, ist das Elektron am wahrscheinlichsten anzutreffen. Für größere  $n$  ist die Übereinstimmung mit den Radien nach Bohr nicht mehr gegeben.



Eine vollständige Lösung der Schrödinger-Gleichung zeigt, dass es neben rotationssymmetrischen s-Orbitalen noch weitere gibt, die komplexere Symmetrien aufweisen. Die zugehörigen Zustandsfunktionen können durch drei Quantenzahlen beschrieben werden.

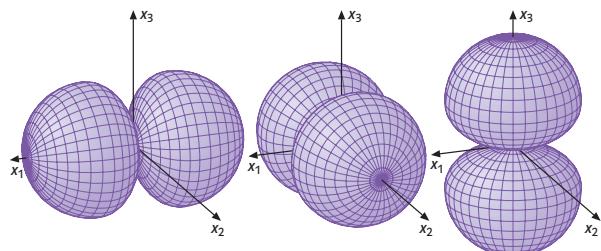
**Hauptquantenzahl  $n$ :** Sie kennzeichnet das Energieniveau.

**Nebenquantenzahl:  $l = 0, 1, \dots, n - 1$ :** Sie gibt die Anzahl der Knotenebenen an.

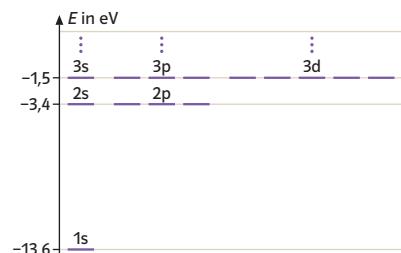
$l = 0$  kennzeichnet s-Orbitale,  $l = 1$  kennzeichnet p-Orbitale usw.

**Orientierungsquantenzahl:  $m = -l, \dots, -1, 0, 1, \dots, l$ :** Sie unterscheidet die Orbitale nach ihrer Rotationssymmetrie.

Das Energieschema zeigt, dass die Energieniveaus des H-Atoms entartet sind.



2p-Orbitale ( $l = 1$ )



Termschema des Wasserstoffatoms

Auch Atome mit mehr als einem Elektron lassen sich durch die obigen Quantenzahlen beschreiben.

Hinzu kommt noch die **Spinquantenzahl  $s = 1/2$  bzw.  $s = -1/2$** . Diese Zahl beschreibt eine Eigenschaft eines Elektrons, die vergleichbar mit dem klassischen Eigendrehimpuls ist.

Es gilt das **Pauli Prinzip**:

**Elektronen eines Atoms unterscheiden sich in mindestens einer Quantenzahl.**



Das Periodensystem lässt sich mit dem quantenmechanischen Aufbau der Atome erklären, wenn man neben dem Pauli-Prinzip noch die folgende Regel berücksichtigt:

**Elektronen besetzen beim Aufbau der Atomhülle immer das niedrigste noch freie Energieniveau.**

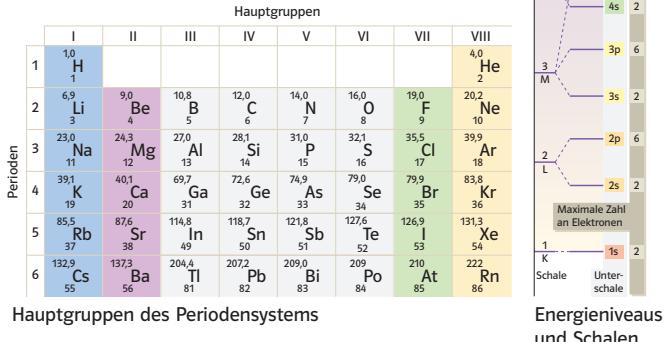
Das 1s-Orbital ( $n = 1$ ) kann maximal zwei Elektronen aufnehmen, dem entsprechen Wasserstoff und Helium. Die zwei Elektronen des He-Atoms sind durch die Quantenzahlen

( $n = 1; l = 0; s = \frac{1}{2}$ ) und ( $n = 1; l = 0;$

$s = -\frac{1}{2}$ ) gekennzeichnet.

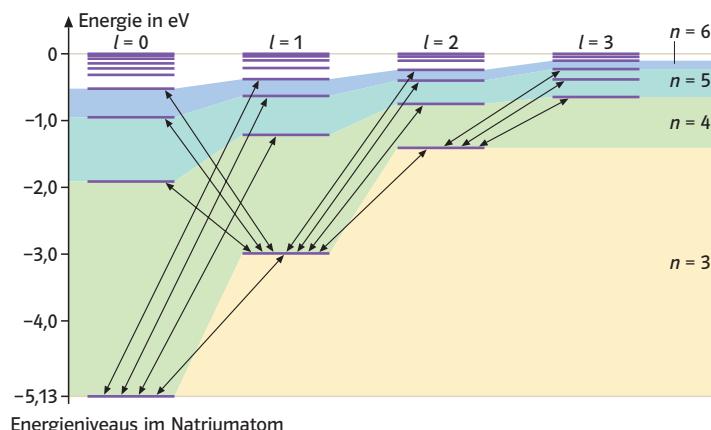
Für  $n = 2$  ergeben sich acht mögliche Kombinationen der Quantenzahlen. Diese ergeben die Elemente Natrium bis Neon der 2. Periode.

Für die 3. Periode sollte man  $2 \cdot 3^2 = 18$  erwarten, tatsächlich besteht sie jedoch nur aus acht Elementen. Der Grund dafür ist, dass die Niveaus für  $n = 3$  teilweise höher sind als Niveaus für  $n = 4$ .



Die Elektronen in einem Atom können mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit von einem Energieniveau  $E_1(n_1; l_1; m_1; s_1)$  auf ein Niveau  $E_2(n_2; l_2; m_2; s_2)$  übergehen. Die Energiedifferenz wird entweder durch ein Photon abgegeben oder es wird ein Photon mit der entsprechenden Energie absorbiert.

Es sind jedoch nicht alle Übergänge erlaubt. Es müssen zusätzliche Auswahlregeln beachtet werden. Eine der möglichen Auswahlregeln besagt, dass sich bei optischen Übergängen die Quantenzahl  $l$  nur um  $+1$  oder  $-1$  ändern darf. Im Energieschema bedeutet dies, dass nur Übergänge zwischen benachbarten „Spalten“ möglich sind.



## Das Moseley'sche Gesetz

Energiereiche Elektronen können Atome mit größerer Ordnungszahl ionisieren. Es ist möglich, dass sie Elektronen aus den niedrigsten Energieniveaus der Atomhülle herauslösen. Andere Elektronen aus höheren Niveaus können den freien Platz einnehmen. Es entsteht ein Quant der charakteristischen Röntgenstrahlung.

Die Energie des Photons berechnet sich aus dem **Moseley'sche Gesetz**

$$\Delta E = h \cdot f = 13,6 \text{ eV} \cdot (Z - \alpha)^2 \cdot (1/m^2 - 1/n^2).$$

Ein Vergleich mit wasserstoffähnlichen Atomen zeigt, dass hier die Kernladungszahl  $Z$  durch  $Z - \alpha$  ersetzt wurde. Die Korrektur berücksichtigt, dass die Elektronen der Atomhülle einen Teil der Kernladung abschirmen.  $\alpha$  heißt daher auch **Abschirmfaktor**.

Für die  $K_\alpha$ -Linie ist  $\alpha = 1$ .

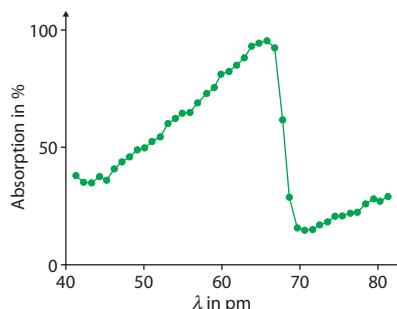
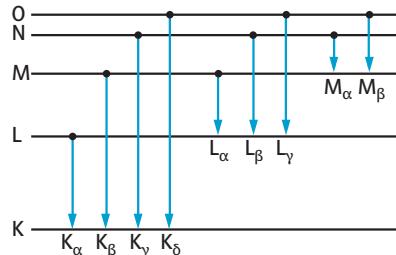
Moseley bestimmte durch systematische Messungen die Röntgenspektrallinien von ca. 40 Elementen. Mit Hilfe des obigen Gesetzes konnte er die zugehörigen Kernladungszahlen bestimmen und so Lücken im Periodensystem nachweisen.

## Absorption von Röntgenstrahlung

Trifft Röntgenstrahlung auf Materie, so wird ein Teil der Strahlung absorbiert. Die Schwächung der Strahlung ist von ihrer Energie  $E = hf = hc/\lambda$  und von der Kernladungszahl  $Z$  der durchstrahlten Materie abhängig. Die Abbildung zeigt ein Messergebnis für Zirkon-40. Nach einem Anstieg der Absorption erfolgt bei  $\lambda \approx 65 \text{ pm}$  eine sprunghafte Abnahme der Absorption. Man spricht von der Absorptionskante. Diese Absorptionskante ist charakteristisch für den durchstrahlten Stoff.

Röntgenstrahlung hoher Energie, d.h. kleiner Wellenlänge, kann ein Elektron der K-Schale auf eine höheres freies Energieniveau heben oder es kann dieses aus dem Atom entfernen. Dabei verliert die Röntgenstrahlung Energie. Daher steigt zunächst der Anteil der absorbierten Strahlung mit zunehmender Wellenlänge, also abnehmender Energie.

An der Absorptionskante reicht die Energie der Röntgenphotonen für den beschriebenen Vorgang nicht mehr aus. Diese Möglichkeit Energie abzugeben entfällt. Deshalb sinkt das Absorptionsvermögen plötzlich bzw. die „Durchlässigkeit“ steigt. Danach steigt der Anteil der absorbierten Strahlung wieder. Für die L-Schale wiederholt sich der Vorgang.

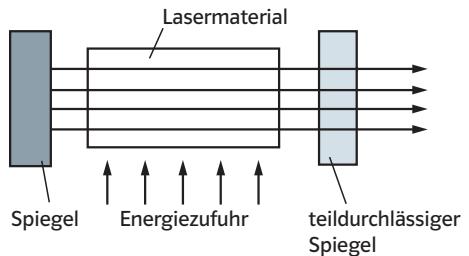


Das Bild zeigt schematisch den Aufbau eines Lasers. Das Lasermaterial zwischen den Spiegeln kann ein Gas, ein Festkörper, eine Flüssigkeit oder ein Halbleiter sein. In diesem Material wird durch Energiezufuhr Besetzungsinvolution erzeugt.

Von einem Gaslaser spricht man, wenn die Involution durch Elektronenstoß in einer Gasentladung erzeugt wird. Zu dieser Gruppe gehören z.B. der Argon-Ionen-Laser und der Helium-Neon-Laser.

Bei einem Festkörper oder bei einer Flüssigkeit erfolgt die Energiezufuhr durch Photonen. Bekannte Laser dieses Typs sind der Rubinlaser, der Neodym-Glas-Laser und der Farbstofflaser.

Bei einem Halbleiterlaser wird die Involution direkt durch einen elektrischen Strom in einem p-n-Übergang erzeugt. Die Elektronen im Leitungsband rekombinieren mit den Löchern im Valenzband.



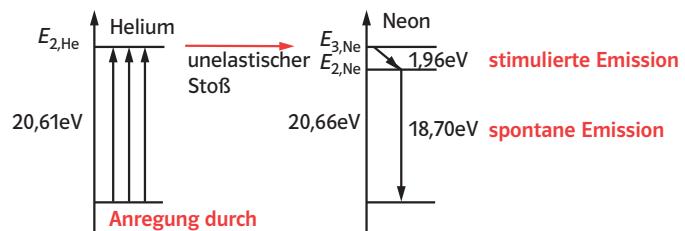
Die ausgelösten Photonen werden an Spiegeln reflektiert. Sie durchqueren das Lasermaterial mehrfach; dadurch kommt es zu weiteren stimulierten Emissionen von Photonen. Das Licht wird intensiver. Durch den teildurchlässigen Spiegel kann das Licht abgestrahlt werden.

Bei einem **Helium-Neon-Laser** stoßen in einer Gasentladung Elektronen auf He-Atome und führen ihnen Energie zu. Das mit  $E_{2,\text{He}} = 20,61\text{eV}$  angeregte Helium-Atom befindet sich in einem metastabilen Zustand. Ein optischer Übergang in den Grundzustand ist nicht möglich. Durch einen unelastischen Stoß

kann es aber die Energie auf ein Neon-Atom übertragen und ein Elektron auf das metastabile Niveau  $E_{3,\text{Ne}} = 20,66\text{eV}$  heben. Die geringe Energiedifferenz von  $20,66\text{eV} - 20,61\text{eV} = 0,05\text{eV}$  wird durch die kinetische Energie der Teilchen ausgeglichen.

Das Mischungsverhältnis von He-Atomen zu Ne-Atomen ist ungefähr 10:1. Die Energieübertragung führt daher zu einer Besetzungsinvolution beim Neon. Der beschriebene Vorgang wird Pumpen genannt.

Das angeregte Neon-Gas sendet beim Übergang vom Energieniveau  $E_{3,\text{Ne}}$  auf das Niveau  $E_{2,\text{Ne}}$  die bekannte rote Laserlinie mit der Wellenlänge 633 nm aus. Das Energieniveau  $E_{2,\text{Ne}}$  „entleert“ sich schnell durch spontane Emission.



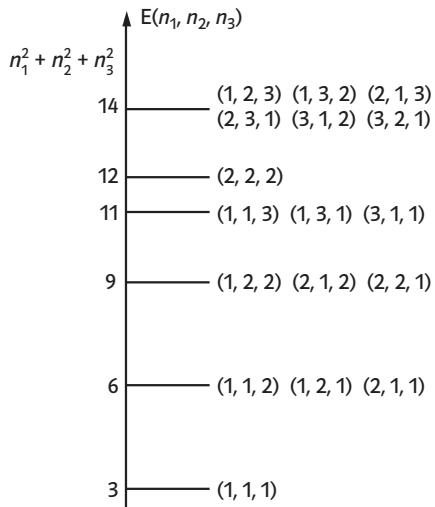
Der Aufenthaltsbereich frei beweglicher Elektronen in einem Festkörper ist auf das Volumen des Körpers beschränkt. Dies führt dazu, dass für diese Elektronen nur diskrete Energieniveaus möglich sind. Recht gut lassen sich die energetischen Eigenschaften mit dem Modell des dreidimensionalen Potenzialtopfes beschreiben. Für einen würfelförmigen Festkörper der Kantenlänge  $L$  ergeben sich die Energiestufen

$$E(n_1, n_2, n_3) = \frac{\hbar^2}{8m_e L^2} (n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Dabei sind  $n_1$ ,  $n_2$  und  $n_3$  natürliche Zahlen. Wendet man dieses Ergebnis auf einen Würfel mit der Kantenlänge 1cm an, so erhält man für den Grundzustand

$$\begin{aligned} E(1, 1, 1) &= \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (0,01 \text{ m})^2} \cdot (1+1+1) = 6,03 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot 3 \\ &= 3,77 \cdot 10^{-15} \text{ eV} \cdot 3 = 1,13 \cdot 10^{-14} \text{ eV}. \end{aligned}$$

Alle weiteren Energien sind Vielfache von  $3,77 \cdot 10^{-15}$  eV. Dabei kann es vorkommen, dass verschiedene Quantenzustände gleiche Energien haben. Bis zum 14-fachen dieser Energie gehören 17 Quantenzustände, die mit 17 · 2 Elektronen besetzt werden können.



Für höhere Energien  $E$  lässt sich die Anzahl der möglichen Zustände durch  $Z = \frac{4\pi \cdot L^3}{3h^3} \cdot (2m_e E)^{3/2}$  abschätzen.

Jeder Zustand kann nach dem Pauli-Prinzip zwei Elektronen aufnehmen. Bei einer Temperatur  $T = 0 \text{ K}$  sind die Energieniveaus vom Grundzustand aufwärts bis zur Fermi-Energie  $E_F$  besetzt. Bei  $T = 0 \text{ K}$  und bei  $N$  freien Elektronen ist also  $Z = N/2$  und  $E = E_F$ . Damit kann man aus der Zahl der Zustände die Fermi-Energie berechnen. Bei der Rechnung wird noch berücksichtigt, dass  $N/L^3 = N/V$  die Dichte  $n_e$  der freien Elektronen ist. Diese Größe kann experimentell aus dem Hall-Effekt bestimmt werden.

$$Z = \frac{N}{2} = \frac{4\pi \cdot L^3}{3h^3} \cdot (2m_e E_F)^{3/2} \Leftrightarrow \frac{3h^3}{8\pi} \cdot n_e = (2m_e E_F)^{3/2} \Leftrightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{8m_e} \cdot \left(\frac{3}{\pi} \cdot n_e\right)^{2/3}$$

Die Fermi-Energie hängt nur von der Elektronendichte ab, sie ist unabhängig vom Körpervolumen. Für Kupfer ist  $n_e = 8,47 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Hieraus ergibt sich die Fermi-Energie

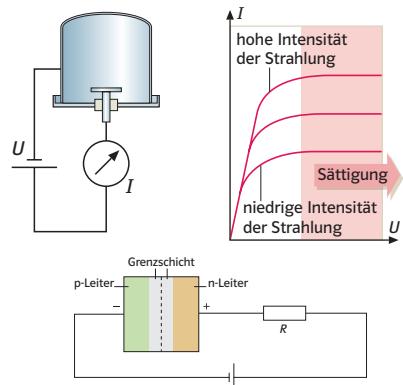
$$E_F = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js})^2}{8 \cdot 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} \cdot \left(\frac{3}{\pi} \cdot 8,47 \cdot 10^{28} \cdot \frac{1}{\text{m}^3}\right)^{2/3} = 11,28 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 7,05 \text{ eV}.$$

Metall	Dichte der Elektronen $n_e$ in $\text{m}^{-3}$	Fermi-Energie in eV
Kupfer	$8,47 \cdot 10^{28}$	7,05
Silber	$5,86 \cdot 10^{28}$	5,50
Gold	$5,90 \cdot 10^{28}$	5,53



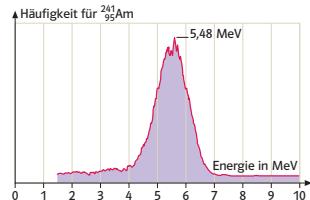
Die **Ionisationskammer** ist eine Metallkammer. Zwischen Gehäuse und Präparat besteht ein elektrisches Feld. Bei hinreichend großer Feldstärke tragen alle erzeugten Ionen zum Strom bei. Die Stromstärke bleibt dann konstant.

**Die Sättigungsstromstärke ist ein Maß für die Intensität der Strahlung.**



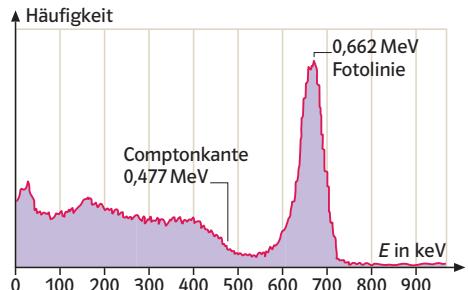
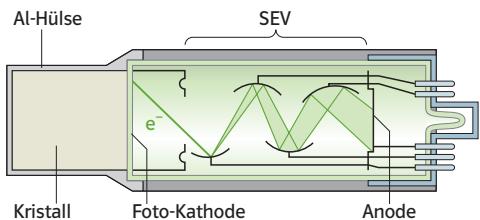
Beim **Halbleiterdetektor** ist die p-n-Schicht breit. Die Betriebsspannung ist so gepolt, dass die Diode sperrt. Ionisierende Strahlung kann in der Grenzschicht Elektronen-Loch-Paare erzeugen. Es kommt zum Stromstoß und damit am Widerstand zum Spannungsimpuls. Wird in der Grenzschicht die Strahlung absorbiert, dann ist die Höhe des Spannungsimpulses ein Maß für die Energie der Strahlung.

**Der Halbleiterdetektor eignet sich zur Messung der Energie der Strahlung.**



Im **Szintillationszähler** erzeugt radioaktive Strahlung durch Anregung der Moleküle Lichtblitze. Diese treffen auf eine Fotokathode. Dort lösen sie eine zur Anzahl der Lichtblitze proportionale Zahl von Elektronen aus (Fotoeffekt). Diese werden beschleunigt, treffen auf Dynoden (Sekundärelektronenvervielfacher, SEV), aus denen sie weitere Elektronen herauslösen. Auf diese Weise wird der Elektronenstrom um einen Faktor von etwa  $10^8$  verstärkt. Der Strom führt zu einem Spannungsimpuls an einem Widerstand. Die Höhe des Impulses ist proportional zur Energie der ionisierenden Strahlung.

**Der Szintillationszähler eignet sich zur Messung der Energie der Strahlung.**



Die Abbildung zeigt das **Energiespektrum einer  $\gamma$ -Strahlung**. Beim Fotoeffekt überträgt ein Photon der  $\gamma$ -Strahlung seine gesamte Energie  $h \cdot f$  auf ein Elektron. Das Maximum bei 0,662 MeV gehört zu diesem Vorgang. Beim Comptoneffekt ist die übertragene Energie stets kleiner als  $h \cdot f$ , sie ist vom Streuwinkel abhängig. Bei einer Rückwärtsstreuung ist die Energieübertragung maximal, diese Energie nennt man **Comptonkante**.

Ist der Streuwinkel kleiner als  $180^\circ$ , dann ist die Energieübertragung geringer. Im Energiespektrum ist dies das **Comptonkontinuum**.



## Wechselwirkung der $\alpha$ - und $\beta$ -Strahlung mit Materie

Geladene Teilchen wechselwirken mit Materie im Wesentlichen durch:

- Stöße mit den Elektronen der Atomhülle. Dabei wird ein Atom angeregt oder ionisiert.
- Ablenkung im elektrischen Feld der Atomkerne. Es entsteht Röntgenbremsstrahlung.

Die He-Kerne der  $\alpha$ -Strahlung wirken stark ionisierend. Wegen der großen Masse der He-Kerne wird die Strahlung kaum abgelenkt.

Die Elektronen der  $\beta$ -Strahlung ionisieren und regen Atome an. Wegen ihrer geringen Masse können sie leichter abgelenkt werden. Es kommt zur Bremsstrahlung

## Wechselwirkung der $\gamma$ -Gammastrahlung mit Materie.

Als Wechselwirkung kommen im Wesentlichen drei Prozesse in Betracht:

- Fotoeffekt, Comptoneffekt und Paarbildung.

Die Paarbildung erfordert eine Mindestenergie von 1,02 MeV. Das Photon erzeugt im elektrischen Feld des Atomkerns ein Elektron-Positron-Paar.

Die Wechselwirkung der  $\gamma$ -Strahlung mit Materie ist geringer als die der geladenen Teilchen. Messungen zeigen:

Bei der Absorption von  $\gamma$ -Strahlung nimmt die Zählrate exponentiell mit der Dicke des Materials ab. Es ist:

$$z(d) = z_0 \cdot e^{-\mu d}$$

$\mu$  heißt Schwächungskoeffizient. Für Blei ist dieser Koeffizient groß, d.h. es eignet sich besonders zur Abschirmung.

## Dosimetrische Größen

– Ionisierende Strahlung kann lebende Zellen schädigen oder zerstören.

Der Quotient aus der im Körper erzeugten Ladung  $\Delta Q$  und der bestrahlten Masse  $\Delta m$  heißt **Ionendosis  $D_I$** .  
 $D_I = \Delta Q / \Delta m$  in 1C/kg

– Für die Erzeugung von Ionen wird Energie benötigt. Der Quotient aus der absorbierten Energie  $\Delta E$  und der bestrahlten Masse  $\Delta m$  heißt **Energiedosis  $D_E$**  mit der Einheit 1Gray (1Gy).  $D_E = \Delta E / \Delta m$  mit 1Gy = 1J/kg

– Die biologische Wirkung hängt von der Art der Strahlung ab. 1Gy  $\alpha$ -Strahlung ist mit der biologischen Wirkung von 20Gy  $\beta$ - bzw.  $\gamma$ -Strahlung gleichzusetzen. Ein Qualitätsfaktor berücksichtigt die unterschiedliche Wirkung. Das Produkt  $q \cdot D_E$  heißt **Äquivalenzdosis  $D_q$** . Sie wird in der Einheit **1 Sievert (1Sv)** angegeben.

$$D_q = q \cdot D_E \text{ mit } 1\text{Sv} = 1\text{J/kg}$$

– Die **effektive Äquivalenzdosis** berücksichtigt die unterschiedliche Empfindlichkeit der verschiedenen Stoffe. Dies geschieht durch die Multiplikation der Äquivalenzdosis mit Wichtungsfaktoren.

## Grundregeln für den Strahlenschutz

- großer Abstand zur Quelle
- kurzer Aufenthalt in der Strahlung
- Abschirmung der Strahlung
- Aufnahme in den Körper durch Nahrung und Atmung vermeiden
- Kontakt mit der Haut und Kleidung vermeiden



## Zerfallsgesetze

Das radioaktive Zerfallsgesetz erfasst eine statistische Größe. Der Zeitpunkt des Zerfalls eines Atoms ist völlig unbestimmt. Das Verhalten einer großen Anzahl radioaktiver Kerne lässt sich jedoch mathematisch beschreiben. Man geht davon aus, dass die Änderungsrate  $\Delta N / \Delta t$  proportional der Anzahl  $N(t)$  der zum Zeitpunkt  $t$  vorhandenen Kerne ist. Damit ist:  $-\Delta N / \Delta t = \lambda \cdot N(t)$ . Da die Zahl der Kerne abnimmt, ist  $\Delta N$  negativ. Für  $\Delta t \rightarrow 0$  erhält man die Differentialgleichung  $\dot{N}(t) = -\lambda \cdot N(t)$  mit der Lösung  $N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t}$ . Die Zahl  $N(t)$  der noch nicht zerfallenen Kerne nimmt exponentiell ab.

Die Halbwertszeit  $T_{1/2}$  gibt an, in welcher Zeitspanne sich die Zahl der radioaktiven Kerne halbiert. Aus  $N(T_{1/2}) = \frac{1}{2} \cdot N_0$  folgt  $\ln 2 = \lambda \cdot T_{1/2}$  bzw.  $T_{1/2} = \ln 2 / \lambda$ .

Verschiedene Isotope zerfallen in gleichen Zeitspannen unterschiedlich. Dies beschreibt man durch die Aktivität.

Der Quotient aus der Zahl  $|\Delta N|$  der zerfallenden Kerne und der zugehörigen Zeitspanne  $\Delta t$  heißt

**Aktivität A.** Lässt man auch hier  $\Delta t$  gegen Null streben, dann erhält man  $A(t) = \lambda \cdot N(t) = \lambda \cdot N_0 e^{-\lambda t}$ .

Die Aktivität wird in der Einheit Becquerel (Bq) angegeben. Für sie gilt:

$$1 \text{ Bq} = 1 \frac{\text{Kernzerfall}}{\text{Sekunde}}$$

## Altersbestimmung (C14-Methode)

In der Atmosphäre besteht ein fast konstantes Verhältnis zwischen dem radioaktiven Kohlenstoff C14 und dem stabilen C12. Lebende Organismen nehmen ständig Kohlenstoff aus der Atmosphäre auf. Ihre C14-Konzentration ist somit gleich der in der Atmosphäre. Nach dem Absterben sinkt der C14-Gehalt mit der Halbwertszeit von  $5730 \text{ a} = 1,81 \cdot 10^{11} \text{ s}$ . Heute befinden sich in der Atmosphäre pro 1g Kohlenstoff etwa  $7,5 \cdot 10^{10}$  radioaktive C14-Nuklide. Misst man z.B. in 1g Kohlenstoff einer Fossilie eine Aktivität von 0,18 Bq, so kann man ihr Alter durch die folgende Rechnung abschätzen.

Man nimmt an, dass sich der C14-Anteil im Laufe der Zeit nicht verändert hat. Mit dieser Annahme kann die Aktivität kurz vor dem Absterben ( $t = 0$ ) mit dem heutigen C14-Anteil berechnen werden.

Es ist also:  $A(0) = \lambda \cdot N(0) = (\ln 2 / T_{1/2}) \cdot N(0)$ .

Heute (Zeitpunkt  $t$ ) ist die Aktivität  $A(t) = 0,18 \text{ Bq}$ .

Damit ergibt sich:

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot \ln \left( \frac{A(t)}{A_0} \right) = -\frac{T_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{A(t) \cdot T_{1/2}}{\ln 2 \cdot N_0} = -\frac{5730 \text{ a}}{\ln 2} \cdot \ln \left( \frac{0,18 \frac{1}{\text{s}} \cdot 1,81 \cdot 10^{11} \text{ s}}{7,5 \cdot 10^{10} \cdot \ln 2} \right) \approx 3900 \text{ a.}$$

Das Alter der Fossilie beträgt etwa 3900 Jahre.

Die C14-Methode erfordert eine sehr genaue Kenntnis der C14-Konzentration. Abweichungen von nur 1% bedeuten eine Änderung im Alter von etwa 85 Jahren.



## Kernkraft und Tröpfenmodell

Die Nukleonen im Atomkern werden durch eine starke Kraft, die **Kernkraft**, zusammengehalten. Sie ist durch folgende Eigenschaften charakterisiert:

- Sie ist unabhängig von der Ladung.
- Sie ist sehr viel stärker als die Coulombkraft zwischen den Protonen.
- Ihre Reichweite ist in der Größenordnung von  $10^{-15}$  m. Sie wirkt also nur zwischen benachbarten Nukleonen.

Ein Flüssigkeitstropfen wird durch Kohäsionskräfte, die nur auf benachbarte Moleküle wirken, zusammengehalten. Diese Eigenschaft ist vergleichbar mit der Kernkraft.

Im **Tröpfenmodell des Atomkerns** geht man davon aus, dass die Nukleonen im Atomkern so zusammengefügt sind wie die Moleküle in einem Flüssigkeitstropfen.

In diesem Modell lassen sich z.B. Kernradien recht gut vorhersagen.

Geht man von einer Kugelgestalt für Nukleon und Kern aus, so erhält man für das

$$\text{Kernvolumen bzw. für das Volumen eines Nukleons } V_{\text{Kern}} = \frac{4}{3} \pi R^3 \text{ bzw. } V_{\text{Nukleon}} = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

Ein Kern besteht aus  $A$  Nukleonen, es gilt daher  $V_{\text{Kern}} = A \cdot V_{\text{Nukleon}}$ :

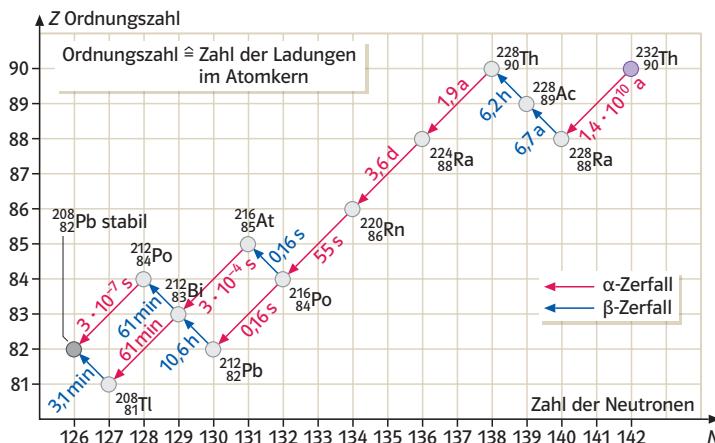
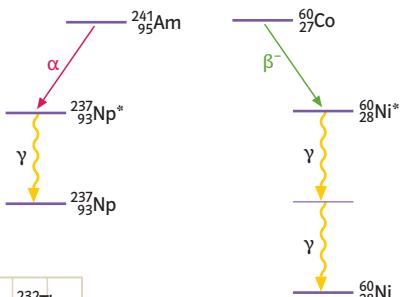
$$\Rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 = A \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \Rightarrow R = r \cdot \sqrt[3]{A}$$

Streuexperimente ergeben für  $r$  etwa  $1,5 \cdot 10^{-15}$  m.

## Zerfallsschemata und Zerfallsreihen

Der radioaktive Zerfall eines Kerns kann durch ein Energieschema dargestellt werden. Die Abbildungen zeigen je ein Beispiel für den  $\alpha$ - bzw.  $\beta$ -Zerfall.

Bei der  $\gamma$ -Strahlung nimmt nur die Energie des Kerns ab. Es entstehen dabei keine neuen Elemente. Anders ist dies bei der  $\alpha$ - und  $\beta$ -Strahlung. Hier entstehen neue Elemente. Die neu



entstandenen Kerne sind häufig nicht stabil, sie zerfallen weiter. Es entstehen Zerfallsreihen, die durch ihre Massenzahl  $A$  bestimmt sind. Die Thorium-Zerfallsreihe endet beim stabilen Blei.



Die Masse von Atomen bzw. Atomkernen werden oft in der **atomaren Masseneinheit**  $1u = 1,6605402 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$  angegeben. Sie entspricht etwa der Masse eines Wasserstoffatoms. Definiert ist sie als 1/12 der Masse des Kohlenstoffisotops  $^{12}\text{C}$ .

Vergleicht man die Masse eines Atomkerns mit der Gesamtmasse seiner Nukleonen, so ist die Masse des Kerns stets kleiner als die Summe aller Nuklidmassen. Dieser Massenunterschied  $\Delta m$  nennt man **Massendefekt**.

Es gilt:  $\Delta m = Z \cdot m_{\text{Proton}} + (A - Z) \cdot m_{\text{Neutron}} - m_{\text{Kern}}$  und  $m_{\text{Kern}} = m_{\text{Atom}} - Z \cdot m_{\text{Elektron}}$

Nach der Relativitätstheorie entspricht der Massendifferenz ein Energiebetrag von  $\Delta m \cdot c^2$ . Beim Aufbau eines Kerns aus seinen Nukleonen wird dieser Energiebetrag frei. Diese **Bindungsenergie**  $E_B$  wird negativ angegeben, da sie vom System Kern abgegeben wird. Derselbe Energiebetrag muss dem Kern zugeführt werden, wenn er wieder in seine Nukleonen zerlegt werden soll. In diesem Fall wird die Energie positiv gezählt.

Die Bindungsenergie  $E_B$  ist abhängig von der Zahl  $A$  der Nukleonen. Der Quotient  $E_B/A$  heißt mittlere Bindungsenergie pro Nukleon. Für fast alle Kerne (mit Ausnahme der leichten) liegt sie in der Größenordnung von  $\sim -8 \text{ MeV}$ . Die Bindungsenergie pro Nukleon besitzt im Bereich der Massenzahl  $A = 60$  ein Minimum. Bei der Spaltung schwerer Kerne bzw. bei der Verschmelzung leichter Kerne nimmt die Bindungsenergie pro Nukleon ab. Bei diesen Vorgängen wird Energie freigesetzt.

Aus dem Tröpfchenmodell leitete C. F. v. Weizsäcker eine Formel her, die die Bindungsenergie pro Nukleon in weiten Bereichen befriedigend beschrieb. Bei sehr leichten und bei sehr schweren Kernen sind quantenmechanische Korrekturen notwendig. Die Bindungsenergie setzt sich im Wesentlichen aus drei Anteilen zusammen.

- Die **Volumenenergie**  $E_V$  ist proportional zum Volumen und damit auch proportional zur Massenzahl. Also ist  $E_V \sim A$ .

- Nukleonen an der Kernoberfläche sind weniger fest gebunden als innere Nukleonen.

Die Oberflächenenergie  $E_O \sim 4\pi r^2$  vermindert die Gesamtenergie.

- Die abstoßenden Kräfte zwischen den Protonen

haben eine weitere Energieabsenkung zur Folge.

Dies berücksichtigt die **Coulombenergie**  $E_C \sim (Ze)^2/r$

Mit  $r = r_0 A^{1/3}$  erhält man schließlich

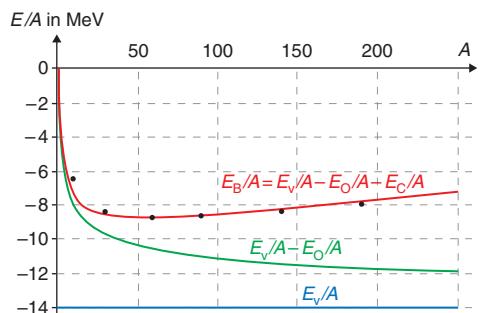
$$E_B = a \cdot A - b \cdot A^{2/3} - c \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} \text{ bzw.}$$

$$E_B/A = a - b \cdot A^{-1/3} - c \cdot Z^2 \cdot A^{-4/3}.$$

Die Konstanten haben die Werte  $a = 14 \text{ MeV}$ ,

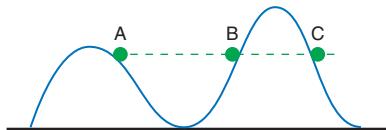
$b = 13 \text{ MeV}$  und  $c = 0,59 \text{ MeV}$ .

Die Abbildung zeigt, dass die theoretischen Überlegungen gut mit den experimentellen Daten übereinstimmen.



## Ein klassisches „Teilchen“ in einer Mulde

Eine Kugel startet im Punkt A mit der Geschwindigkeit 0m/s. Sieht man von der Reibung ab, dann erreicht sie den Punkt B am zweiten Hügel. Sie kann die Mulde nicht verlassen. Ohne zusätzliche Energie ist der Punkt C nicht erreichbar, obwohl dort die potenzielle Energie mit der am Ort A übereinstimmt.

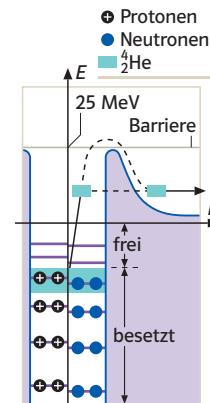


## Ein $\alpha$ -Teilchen in einer „Energiemulde“

Zwei Protonen und zwei Neutronen eines Atomkerns können sich zu einem Heliumkern ( $\alpha$ -Teilchen) verbinden, dabei wird Bindungsenergie frei. Die Energie eines solchen Heliumkerns kann größer als Null werden. Er ist dann, ähnlich wie die Kugel, in einer „Energiemulde“ eingesperrt.

Würde sich das  $\alpha$ -Teilchen wie die Kugel in der Mulde verhalten, dann könnte es den Potenzialtopf nur mit einer Energie von etwa 25 MeV verlassen. Diese Energie müsste das  $\alpha$ -Teilchen in großer Entfernung von Kern als kinetische Energie besitzen, im Widerspruch zu den zu deutlich geringeren Messergebnissen.

$\alpha$ -Teilchen sind keine klassischen Teilchen, sondern Quantenobjekte. Für sie gilt die Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrela-



tion in der Form  $\Delta E \cdot \Delta t \geq h/4\pi$ . Sie besagt, dass bei kleinem  $\Delta t$  die Energieunbestimmtheit groß sein kann. Damit kann ein Quantenobjekt eine Energiebarriere durchdringen, auch wenn seine Energie nicht reicht.

Diese Eigenschaft nennt man **Tunneleffekt**.

Das Durchtunnellen ist um so wahrscheinlicher, je schmäler die Energiebarriere ist. Dies erklärt auch, warum die Energie von  $\alpha$ -Teilchen im allgemeinen um so größer ist, je kleiner die Halbwertszeit des  $\alpha$ -Strahlers ist.



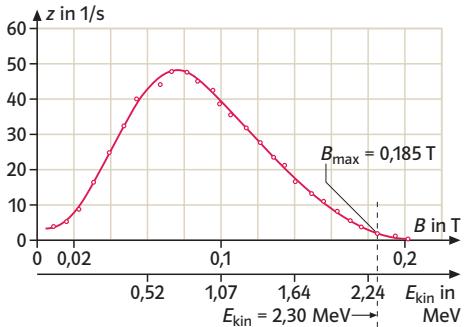
Das Energiespektrum eines  $\alpha$ - oder  $\gamma$ -Strahlers ist diskret. Dies sollte auch bei der  $\beta$ -Strahlung so sein, denn aus dem Massedefekt von Mutter- und Tochterkern sollte man die Energie der Elektronen bzw. Positronen in der  $\beta$ -Strahlung berechnen können. Messungen zeigen aber ein kontinuierliches Energiespektrum.

Die Spektren besitzen eine für den Strahler charakteristische maximale Energie. Diese selten vorkommende Energie stimmt mit der aus dem Massedefekt berechneten Energie überein. Bei der Emission eines Elektrons bzw. Positrons mit geringerer Energie stimmt die Bilanz nicht mehr. Dies führte zu einer Krise bei den mit dem Phänomen beschäftigten Physikern, da in ersten Deutungsversuchen vermutet wurde, dass der Energieerhaltungssatz beim  $\beta$ -Zerfall nicht gelten könnte.

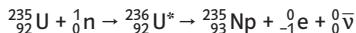
Wolfgang Pauli vermutete, dass bei der  $\beta$ -Strahlung neben dem Elektron ein weiteres neutrales Teilchen auftritt. Dieses Teilchen heißt heute Antineutrino  $\bar{\nu}$ . Die maximale Energie wird dabei auf Elektron und Antineutrino aufgeteilt. Die Energiebilanz blieb jetzt erhalten. Mit dem Antineutrino konnte auch die Impulserhaltung gesichert werden. Experimentell nachgewiesen wurde das Antineutrino erst 1956.

Die Zerfallsgleichung zum  $\beta^-$ -Zerfall ist vollständig:  ${}^A_Z Z \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_1 e^- + \bar{\nu}$ .

Entsprechendes gilt für den  $\beta^+$ -Zerfall. Das zusätzlich auftretende Teilchen heißt Neutrino  $\nu$ . Damit erhält man  ${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + {}^0_1 e + \nu$  als Zerfallsgleichung.

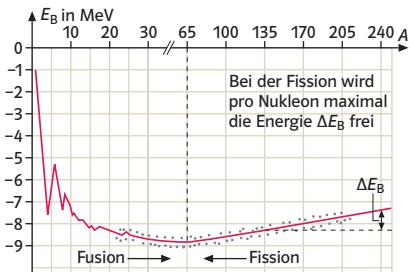
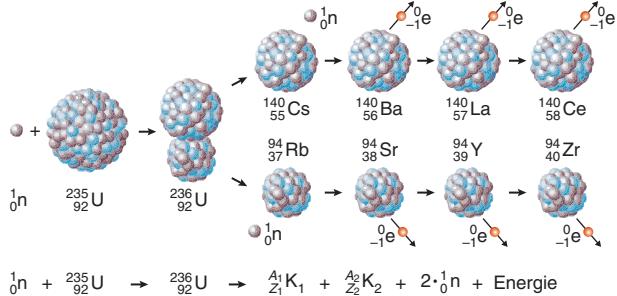


Im Labor von Otto Hahn und Fritz Straßmann wurde natürliches Uran, welches zu 99,3% U-238 und 0,7% U-235 enthält, mit langsamem Neutronen beschossen. Sie erwarteten nach



ein Element mit größerer Kernladungszahl, ein Transuran. Stattdessen fanden sie im Experiment Barium. Lise Meitner und ihr Neffe Otto Robert Frisch deuteten die Beobachtung als Kernspaltung.

- Bei einer Kernspaltung entstehen aus einem schweren Kern zwei größere Bruchstücke.
- U-235 ist das einzige natürlich vorkommende Nuklid, das durch ein langsames Neutron spaltbar ist. Nur bei diesem Nuklid ist die Aktivierungsenergie kleiner als die freiwerdende Bindungsenergie. Die Spaltprodukte sind nicht eindeutig bestimmt. Das Verhältnis der Nukleonenzahlen der Spaltprodukte ist häufig etwa 2:3.



Die folgende Abschätzung gibt ungefähr den Energiegewinn je Spaltung an. Aus dem Diagramm entnimmt man: Der Betrag der mittleren Bindungsenergie pro Nukleon ist für Uran-235 etwa 7,5 MeV und für die Bruchstücke etwa 8,4 MeV. Damit erhält man  $(8,4 \text{ MeV} - 7,5 \text{ MeV}) \cdot 235 \approx 200 \text{ MeV}$ . Davon entfallen etwa 170 MeV auf die kinetische Energie der Spaltprodukte. Diese kinetische Energie erhöht die innere Energie und damit die Temperatur des Spaltmaterials.

Bei einer Kernspaltung entstehen zusätzlich zwei bis drei freie Neutronen. Wenn diese weitere Kernspaltungen auslösen, dann kann ihre Anzahl exponentiell ansteigen. Es kann zu einer **unkontrollierten Kettenreaktion** kommen. Dazu ist es aber notwendig, dass die Neutronen wieder auf einen spaltbaren Atomkern treffen. Dies bedeutet, die Masse des spaltbaren Materials muss groß genug sein. Die **kritische Masse** beträgt bei Uran-235 bei kugelförmiger Anordnung ca. 50 kg.

In Reaktoren der Kernkraftwerke findet eine **kontrollierte Kettenreaktion** statt. Durch Regelstäbe werden so viele Neutronen absorbiert, dass nur noch ein Neutron für eine weitere Spaltung übrig bleibt. Uran-235-Kerne werden durch langsame Neutronen gespalten. Da die bei der Spaltung entstehenden Neutronen hohe Geschwindigkeiten haben, werden sie mittels elastischer Stöße mit so genannten Moderatoren abgebremst. Haben die Stoßpartner gleiche Masse, dann ist die Energieübertragung optimal. Deshalb verwendet man als **Moderatoren** z. B. leichtes Wasser, schweres Wasser oder Grafit, deren Kerne eine relativ geringe Masse haben und die technisch leicht zu handhabende Stoffe darstellen.



Beim Verschmelzen zweier leichter Kerne zu einem neuen Kern wird Bindungsenergie frei. Diesen Vorgang bezeichnet man als **Kernfusion**.

In Fusionsreaktoren soll die Kernfusion kontrolliert ablaufen.

Die Forschungsarbeiten konzentrieren sich zur Zeit darauf, die beiden Wasserstoffisotope Deuterium und Tritium zum Helium zu verschmelzen.



Damit die Fusion möglich wird, müssen sich die beiden Wasserstoffisotope gegen die Coulombkraft bis in den Bereich der Kernkraft annähern. Wegen der kurzen Reichweite der Kernkräfte bedeutet dies, dass ihr Abstand nur  $r_1 + r_2 \approx 1,8 \cdot 10^{-15} \text{ m} + 2,0 \cdot 10^{-15} \text{ m} = 3,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  betragen darf. Dabei sind  $r_1$  bzw.  $r_2$  die Kernradien von Deuterium bzw. Tritium. Ihre potentielle Energie beträgt in dieser Entfernung:

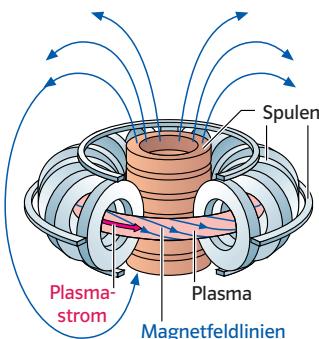
$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r_1 + r_2} = \frac{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot e}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{Vm}} \cdot 3,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}} \approx 0,4 \text{ MeV}.$$

Dabei ist die Elementarladung  $e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  und die elektrische Feldkonstante  $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V} \cdot \text{m}}$ .

Betrachtet man die Teilchen näherungsweise als ein Gas, dann bedeutet dies eine Gastemperatur von ca.  $3 \cdot 10^9 \text{ K}$ . Diese berechnete Obergrenze muss aber nicht erreicht werden. Für einen Deuterium-Tritium-Reaktor genügt „schon“ eine Mindesttemperatur von  $10^8 \text{ K}$  entsprechend 13 keV. Obwohl diese Energie deutlich niedriger ist als der Coulombwall, kommt es zu Fusionen. Begründet werden kann dies mit dem Tunneleffekt und der Tatsache, dass die 13 keV eine mittlere Energie darstellt. D.h. es gibt einige Ionen mit deutlich höherer Energie.

Bei den hohen Temperaturen sind alle Atome vollständig ionisiert, es liegt ein nach außen neutrales Gemisch von freien Elektronen und Ionen vor. Diesen Zustand der Materie nennt man **Plasma**.

Die bisher erfolgreichsten Experimente wurden in Tokamak-Anlagen durchgeführt. Das heiße Plasma wird mit starken Magnetfeldern in einen Torus berührungslos eingeschlossen. Zugleich entsteht durch diese magnetische Kompression eine hohe Plasmadichte und eine hohe Temperatur. Ein zweites Magnetfeld erzeugt durch Induktion einen ringförmigen Induktionsstrom von mehreren Millionen Ampere. Durch Einschuss energiereicher Teilchen, durch Laserbestrahlung oder durch Einstrahlung von Mikrowellen soll die Temperatur weiter erhöht werden. Schließlich soll ein Fusionsplasma entstehen, welches mehr Energie liefert, als zu seiner Aufrechterhaltung nötig ist.



Die Nebelkammer zeigt auch, dass die folgenden Alternativen nicht zutreffen können.

- (1) Das  $\alpha$ -Teilchen schlägt ein Proton aus dem Stickstoffkern. Das  $\alpha$ -Teilchen und der neue Kern verlassen die Kollisionszone.

In diesem Fall müsste man nach dem Zusammenstoß drei Nebelpuren beobachten können.

- (2) Das  $\alpha$ -Teilchen wird durch einen elastischen Stoß am Stickstoffkern gestreut.

Die berechneten Impulse müssten dann in folgender Weise den Stoßpartnern zugeordnet werden:

Vor dem Stoß:  $p_\alpha = 9,11 \cdot 10^{-20} \text{ kgms}^{-1}$

Nach dem Stoß:  $p'_\alpha = 2,54 \cdot 10^{-20} \text{ kgms}^{-1}$  und  $p_K = 10,33 \cdot 10^{-20} \text{ kgms}^{-1}$

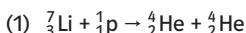
Unter dieser Voraussetzung kann aus dem Energiesatz die Masse  $m_K$  des Atomkerns bestimmt werden.

Es ist:  $\frac{p_\alpha^2}{2m_\alpha} = \frac{p'_\alpha^2}{2m_\alpha} + \frac{p_K^2}{2m_K} \Rightarrow m_K = \frac{p_K^2}{p_\alpha^2 - p'^2_\alpha} \cdot m_\alpha \approx 5,6 u.$

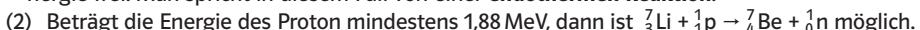
D.h. der Stoßpartner kann kein Stickstoffkern sein.

Künstliche Kernreaktionen lassen sich mit allen bekannten Teilchen auslösen, z.B. mit Protonen, Deuteronen, Neutronen sowie mit schwereren Kernen und auch mit  $\gamma$ -Strahlung.

Beispiele:



Bei dieser Reaktion ist die Summe der Massen vor der Reaktion größer als nachher. Es wird Bindungsenergie frei. Man spricht in diesem Fall von einer **endothermen Reaktion**.



Da die Summe der Massen vor der Reaktion kleiner ist als nachher, muss zusätzlich Energie aufgebracht werden. Eine solche Reaktion nennt man **exotherm**.

- (3) 1994 wurde bei der Gesellschaft für Schwerionenforschung erstmals eine Atom mit der Ordnungszahl 111 erzeugt.



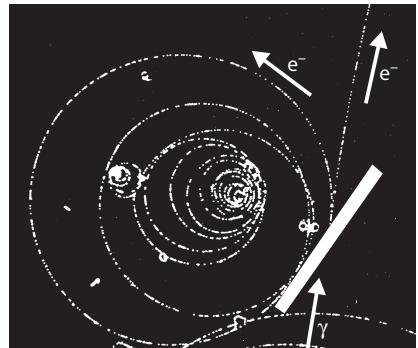
Spuren der Elementarteilchen in Nebel- oder Blasenkammern lassen Schlüsse auf ihre Eigenschaften zu.

Eine Bleiplatte wird mit Röntgenphotonen hoher Energie beschossen. Oberhalb der Platte beobachtet man in der Nebelkammer zwei Kurven mit entgegengesetzter Krümmung. Die Nebelkammer befindet sich in einem Magnetfeld. Deshalb müssen die Spuren von Teilchen mit entgegengesetzter Ladung stammen. Aus einem Gammaquant entsteht ein Elektron-Positron-Paar.

Der Impulserhaltungssatz zeigt, dass eine Paarerzeugung im Vakuum nicht möglich ist. Wenn beide Teilchen in die gleiche Richtung fliegen, dann haben sie zusammen den Impuls  $2mv$ . (Der Betrag des Gesamtimpulses ist bei unterschiedlichen Richtungen kleiner als  $2mv$ .) Ihre Gesamtenergie  $2mc^2$  stimmt mit der Energie  $hf$  des Photons überein.

Es ist dann:  $p_{\text{photon}} = hf/c = 2mc^2/c = 2mc > 2mv$ .

Es muss daher mindestens ein drittes Teilchen bei der Paarerzeugung beteiligt sein. Im Experiment sind es die Bleiatome.



Die Vielzahl der Elementarteilchen fasst man zu Teilchenfamilien zusammen. In Richtung zunehmender Masse unterscheidet man: Photonen (Ruhemasse Null), Leptonen (leichte Teilchen) und Hadronen (schwere Teilchen). Die Hadronen werden noch in Mesonen (mittelschwere Teilchen) und Baryonen unterteilt. In der Tabelle sind einige wichtige Elementarteilchen zusammengestellt.

Statt der Masse der Teilchen gibt man häufig die zugehörige Ruheenergie  $E = mc^2$  an und spricht wegen der Äquivalenz trotzdem von der Masse des Teilchens.

Die **Erhaltungssätze** für Ladung, Energie, Impuls und Drehimpuls gelten auch für Zerfallsprozesse.

Darüber gibt es weitere Erhaltungsgrößen, so ändern sich z.B. Leptonenzahl  $L$  und Baryonenzahl  $B$  nicht. Antiteilchen haben entgegengesetzte Leptonen- und Baryonenzahlen.

Daraus folgt, dass der Zerfall  $p \rightarrow e^+ + \gamma$  nicht möglich ist. Denn vor dem Zerfall ist  $L(p) = 0$  und nach dem Zerfall  $L(e^+) + L(\gamma) = -1 + 0$

Gruppe	Name	Masse in MeV	Ladung in $1,6 \cdot 10^{-19} C$	Lebensdauer in s	nachgewiesen
	Photon $\gamma$		-	$\infty$	1905
Leptonen	Elektron $e^-$	0,511	-1	stabil	1897
	Myon $\mu^-$	105,7	-1	$2,2 \cdot 10^{-6}$	1937
	Anti-Elektronneutrino $\bar{\nu}_e$	0	0	stabil	1956
	Myonneutrino $\nu_\mu$	0	0	stabil	1962
	Pion $\pi^-$	139,6	-1	$2,6 \cdot 10^{-8}$	1947
Mesonen	Kaon $K^+$	493,7	+1	$1,2 \cdot 10^{-8}$	1949
	Eta-Null $\eta^0$	548,8	0	$2,5 \cdot 10^{-19}$	1960
	Proton $p$	938,28	+1	stabil	1886
	Neutron $n$	939,57	0	918	1932
	Lambda-Null $\Lambda^0$	1115,6	0	$2,6 \cdot 10^{-10}$	1953
Hadronen	Sigma-Plus $\Sigma^+$	1189,4	+1	$0,8 \cdot 10^{-10}$	1953
	Sigma-Stern-Minus $\Sigma^{*-}$	1385	-1	$1,3 \cdot 10^{-23}$	1960
	Delta-Null $\Delta^0$	1235	0	$0,4 \cdot 10^{-23}$	1952
	Xi-Stern-Minus $\Xi^{*-}$	1385	-1	$0,5 \cdot 10^{-22}$	1962
	Omega-Minus $\Omega^-$	1672	-1	$1,3 \cdot 10^{-10}$	1964



Die Beschreibung von Wechselwirkungen zwischen den Elementarteilchen geschieht ohne Felder. Die Wechselwirkungen werden durch Austauschteilchen vermittelt. Für die graphische Veranschaulichung von Wechselwirkungen benutzt man Zeit-Raum-Diagramme, die **Feynman-Diagramme**. Die Tabelle enthält die Bausteine dieser Diagramme.

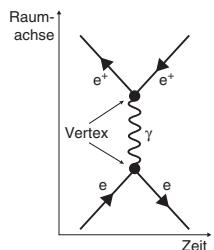
Bei der elektromagnetischen Wechselwirkung ist das Photon das Austauschteilchen. Das nebenstehende Feynman-Diagramm beschreibt die Wechselwirkung zwischen einem Positron und einem Elektron. Die Zeitachse zeigt nach rechts, die Raumachse nach oben.

(In der Literatur findet man auch die umgekehrte Anordnung.)

Das Diagramm beschreibt den folgenden Sachverhalt: Je ein einlaufendes Elektron und Positron tauschen ein Photon aus. Nach der Wechselwirkung hat man je ein auslaufendes Elektron und Positron. Man spricht von einer Elektron-Positron-Streuung.

Es ist zu beachten, dass die „Pfeile“ keine Bahnen der Teilchen darstellen. Dies wäre mit den Eigenschaften der Quantenobjekte nicht vereinbar.

Photon $\gamma$	
Teilchen, z.B. Elektron	
Antiteilchen, z.B. Positron	
Gluon g	
Bosonen	



Die Stelle im Feynman-Diagramm, an denen eine Emission bzw. Absorption eines Austauschteilchens stattfindet, heißt Vertex.

Berührt nur der Anfang oder nur das Ende einer Linie einen Vertex, dann spricht man von einer äußeren Linie. Diese stellen **beobachtbare** Teilchen dar. Im Beispiel sind dies das Elektron und das Positron.

Innere Linien beginnen und enden bei einem Vertex. Sie stellen **virtuelle** d.h. **nicht beobachtbare** bzw. **im Endzustand nicht vorhandene Teilchen** dar. Im Beispiel ist dies das Photon.

Der Austausch eines virtuellen Teilchens kann man mit Hilfe der Unbestimmtheitsrelation  $\Delta E \cdot \Delta t \geq h/4\pi$  verstehen. Die Emission eines Austauschteilchens der Energie  $\Delta E = mc^2$  ist ohne Verletzung des Energiesatzes möglich, wenn dieses in der Zeitspanne  $\Delta t = h/(4\pi\Delta E) = h/(4\pi m c^2)$  wieder absorbiert wird. In der Zeit  $\Delta t$  kann das virtuelle Teilchen höchstens die Strecke

$$r = c \cdot \Delta t = c \cdot h/(4\pi m c^2) = h/(4\pi m c)$$

zurücklegen. Dies entspricht der Reichweite. Man erhält also, dass Kräfte mit kurzer Reichweite von Austauschteilchen mit relativ großer Masse vermittelt werden. Weiter erkennt man, dass Photonen mit der Ruhemasse Null eine unbegrenzte Reichweite haben.



In der Makrophysik ist der Spin der Drehimpuls eines Teilchens, wenn es sich wie ein Kreisel um seine eigene Achse dreht. In der Elementarteilchenphysik ordnet man den Teilchen ebenfalls einen Eigendrehimpuls zu. Dieser ist aber gequantelt, er kann nur ganzzahlige oder halbzahlige Vielfache von  $h/4\pi$  sein.  
 Für **Fermionen** (Quarks und Leptonen), dies sind Teilchen mit halbzahligen Spin, gilt das **Pauli-Prinzip**.  
 Für **Bosonen** (Photon,  $W^+$ ,  $W^-$ ,  $Z^0$ , Gluon, Graviton), dies sind Teilchen mit ganzzahligen Spin, gilt das Pauli-Prinzip nicht. Es können also mehrere Austauschteilchen im gleichen Quantenzustand sein.

Einige Eigenschaften der Quarks sind in der Tabelle zusammengestellt.

Quarks nehmen an allen Wechselwirkungen teil.

Die entsprechenden Anti-Quarks bezeichnet man mit einem Querstrich.

Nach dem Pauli-Prinzip müssen sich die Quarks uuu in  $\Delta^{++}$ -Teilchen in mindestens einer Quantenzahl unterscheiden. Die Quantenzahlen Ladung und Spin genügen daher nicht. Man führte eine weitere Quantenzahl ein, die **Farbladung** oder einfach Farbe. Die Farbladung ist die „Ladung“ der starken Kraft (im elektromagnetischen Fall ist es die elektrische Ladung).

Flavour		Massen in MeV	Ladung in e	Spin
up	u	$\approx 5$	+2/3	$\frac{1}{2}$
down	d	$\approx 10$	-1/3	$\frac{1}{2}$
strange	s	$\approx 100$	-1/3	$\frac{1}{2}$
charm	c	$\approx 1500$	+2/3	$\frac{1}{2}$
bottom	b	$\approx 4200$	-1/3	$\frac{1}{2}$
top	t	$\approx 120\,000$	+2/3	$\frac{1}{2}$

Man unterscheidet die drei Farben Rot, Grün, Blau bzw. die Antifarben Antirot (Cyan), Antigrün (Magenta), Antiblau (Gelb). Mischt man in der Realität Farbe, Antifarbe bzw. die drei Farben Rot (r), Gelb (g), Blau bzw. die drei Antifarben dann erhält man Weiß. Es gilt:

Alle möglichen Quarkkombinationen der Hadronen sind weiß.

Beispiel: Folgende Farbe sind für  $\pi$ -Mesonen ( $d\bar{d}$ ) möglich:

Rot + Cyan = Weiß oder Grün + Magenta = Weiß oder Blau + Gelb = Weiß.

Es zeigt sich, dass die Quarks in Hadronen ständig ihre Farbe wechseln. Es bleibt aber immer Weiß. Ein Farbwechsel ist nur möglich, wenn die Quarks ihre Farbe abgeben und eine neue Farbe aufnehmen können. Diese Aufgabe übernehmen die Austauschteilchen, die **Gluonen**. Die Gluonen tragen eine Farbe und eine Antifarbe. Deshalb können Gluonen an der starken Wechselwirkungen teilnehmen, zum Unterschied zu den Photonen, die an der elektromagnetischen Wechselwirkung wegen fehlender Ladung nicht teilnehmen können.

Quarks in sehr geringem Abstand können sich fast frei bewegen. Versucht man sie zu trennen, dann wächst mit steigendem Abstand die notwendige Energie. Schließlich reicht die Energie zur Erzeugung eines neuen Quark-Antiquark-Paars.

Es entstehen neue gebundene Mesonen oder Baryonen.

In unmittelbarer Nähe eines weißen Nukleons ist noch etwas von der Farbladung der Gluonen zu spüren, dies ist die Ursache für die **Kernkraft**.



Ein Gas wird durch die **Zustandsgrößen** Volumen  $V$ , Druck  $p$ , und Temperatur  $T$  beschrieben.

Für ein ideales Gas gilt die **allgemeine Gasgleichung**  $\frac{pV}{T} = \text{konst.}$

Es zeigt sich, dass die Konstante proportional zur betrachteten Stoffmenge ist. Wird die Stoffmenge  $n$  in der Einheit mol angegeben ( $1\text{mol} = 6,0221341 \cdot 10^{23}$  Teilchen), dann erhält man:

$$pV = nRT \text{ mit der } \mathbf{\text{universellen Gaskonstanten}} R = 8,31 \text{ J/(K} \cdot \text{mol)}$$

Vielfach benutzt man auch die Anzahl der Gasteilchen  $N$  zur Beschreibung der Stoffmenge. Dann erhält die allgemeine Gasgleichung die folgende Form:

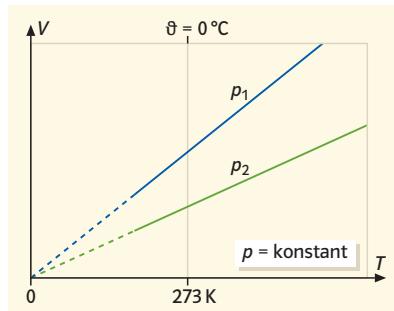
$$pV = NkT \text{ mit der } \mathbf{\text{Boltzmann-Konstanten}} k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$

Drei Sonderfälle der Gasgesetze sind:

– **Gesetz von Gay-Lussac** (isobare Zustandsänderung)

Bei konstantem Druck  $p$  ist das Volumen  $V$  proportional zur Temperatur  $T$ .

$$V = \text{konst} \cdot T$$



– **Gesetz von Amontons** (isochore Zustandsänderung)

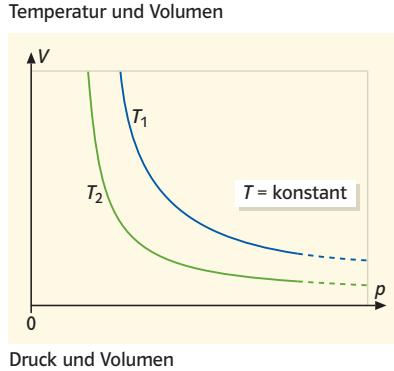
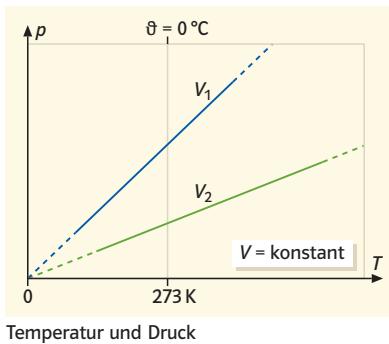
Bei konstantem Volumen  $V$  ist der Druck  $p$  proportional zur Temperatur  $T$

$$p = \text{konst} \cdot T$$

– **Gesetz von Boyle-Mariotte** (isotherme Zustandsänderung)

Bei konstanter Temperatur  $T$  ist der Druck  $p$  antiproportional zum Volumen  $V$ .

$$p \cdot V = \text{konst}$$

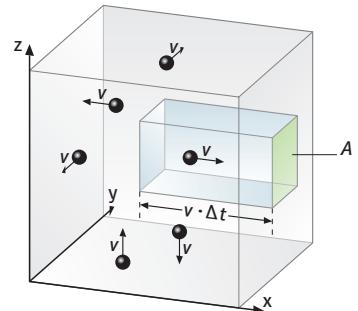


Für die theoretische Herleitung des Gasdrucks werden noch die folgenden Idealisierungen vorgenommen.

- Ein würfelförmiges Gasvolumen  $V$  enthält  $N$  Teilchen mit der Masse  $m$ .
- Je ein Sechstel der Teilchen bewegt sich senkrecht zu einer Würffelfläche.
- Der Geschwindigkeitsbetrag  $v$  ist für alle Teilchen gleich.
- Es kommt nur zu elastischen Stößen mit den Wänden.

Im Volumen  $V' = A v \Delta t$  befinden sich  $N'$  Teilchen. Ein Sechstel davon erreicht in der Zeitspanne  $\Delta t$  die Fläche  $A$ . Dies sind:

$$\frac{1}{6} N' = \frac{1}{6} \cdot \frac{N}{V} \cdot V' = \frac{1}{6} \cdot \frac{N A v \Delta t}{V}$$



Mit jedem Stoß überträgt ein Teilchen den Impuls  $2mv$  auf die Wand.

Der gesamte in der Zeitspanne  $\Delta t$  übertragende Impuls  $\Delta p$  ist demnach  $\Delta p = 1/6 \cdot N' \cdot 2 \cdot mv$ .

Damit ergibt sich für den Druck  $p = \frac{F}{A} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t}$

$$p = \frac{1}{A} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{A} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{N A v \Delta t}{V} \cdot 2 m v = \frac{N}{V} \cdot \frac{1}{3} m v^2$$

(Beachten Sie:  $p$  bezeichnet den Druck und  $\Delta p$  die Impulsänderung)

Berücksichtigt man die Geschwindigkeitsverteilung, dann muss  $v^2$  durch das mittlere Geschwindigkeitsquadrat  $\bar{v}^2$  ersetzt werden. Hieraus ergibt sich mit der mittleren kinetischen Energie  $\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$  schließlich  $p V = \frac{2}{3} N \bar{E}_{\text{kin}}$ .

Vergleicht man das Ergebnis mit  $p V = N k T$ , so erhält man einen Zusammenhang zwischen der Temperatur  $T$  und der mittleren kinetischen Energie.

**Die Teilchen eines idealen Gases haben bei der Temperatur  $T$  die mittlere kinetischen Energie  $\bar{E}_{\text{kin}} = \frac{3}{2} k T$ .**

Da alle drei Raumrichtungen gleichberechtigt sind, beträgt die mittlere kinetische Energie je Richtung (je Freiheitsgrad)  $\frac{1}{2} k T$ .

Atome eines idealen Gases haben je Bewegungsrichtung einen Freiheitsgrad, also insgesamt drei. Bei zweiatomigen Gase kommen zwei Freiheitsgrade für die Rotation hinzu, es sind also fünf.

Der **Gleichverteilungssatz** besagt, dass im thermodynamischen Gleichgewicht ein Teilchen je Freiheitsgrad die mittlere Energie  $\frac{1}{2} k T$  besitzt.



Ändert sich die Temperatur eines festen, flüssigen oder gasförmigen Körpers der Masse  $m$  um  $\Delta T$ , dann ändert sich die innere Energie  $U$  um  $\Delta U$ . Ändert sich der Aggregatzustand des Körpers nicht und finden keine chemischen Reaktionen statt, dann gilt  $\Delta U = c m \Delta T$ .

$c$  heißt spezifische Wärmekapazität.

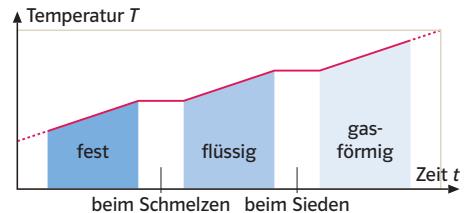
(Für die innere Energie eines Körpers benutzt man auch den Formelbuchstaben  $E_{\text{innere}}$  statt  $U$ .)

Beim Schmelzen und beim Verdampfen ändert sich, trotz Energiezufuhr, die Temperatur des Körpers nicht.

Mit der **Schmelzenergie** wird der feste Teilchenverband aufgelöst. Die potentielle Energie der Teilchen wird dadurch erhöht. Beim Verdampfen erhält man frei bewegliche Gasteilchen. Die potentielle Energie erhöht sich weiter. Das Volumen nimmt erheblich zu, hierfür muss Arbeit verrichtet werden. Zusammen ergibt dies die **Verdampfungsenergie**.

Die umgekehrten Vorgänge Kondensieren bzw.

Verfestigen setzen dieselbe Energie frei.



t-T-Diagramm für konstante Energiezufuhr: Während der Änderungen der Aggregatzustände ändert sich die Temperatur nicht.

Misst man die Energie, die man benötigt, um die Temperatur eines Gases um  $\Delta T$  zu erhöhen, dann stellt man fest, dass diese bei konstantem Volumen kleiner ist als bei konstantem Druck. Die spezifische Wärmekapazität  $c_v$  ist kleiner als die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p$ . Der Grund dafür ist, dass im zweiten Fall das Gasvolumen vergrößert werden muss. Dies bedeutet, dass eine Gefäßwand gegen den äußeren Luftdruck verschoben werden muss. Dazu ist die Energie  $\Delta E = p \Delta V$  erforderlich. Um diesen Betrag reduziert sich die innere Energie des Gases.

Bezieht man alles auf die Stoffmenge  $n$  eines Gases, so zeigt eine Rechnung, dass  $C_{p,m} - C_{v,m} = R$  ist. Dabei sind  $C_{p,m}$  und  $C_{v,m}$  die molaren Wärmekapazitäten.

Rechnung:

$$\Delta U_{V-\text{konst}} = C_{Vm} \cdot n \cdot \Delta T$$

$$\Delta U_{p-\text{konst}} = C_{pm} \cdot n \cdot \Delta T$$

$$\begin{aligned} \text{Somit ist: } p \cdot \Delta V &= C_{pm} \cdot n \cdot \Delta T - C_{Vm} \cdot n \cdot \Delta T \\ &= n \cdot R \cdot \Delta T \Rightarrow C_{pm} - C_{Vm} = R \end{aligned}$$

Molare Wärmekapazitäten

Gas	$C_{Vm}$	$C_{pm}$	$C_{pm} - C_{Vm}$
in J/(mol · K)			
He	12,6	20,9	8,3
Ne	12,6	20,8	8,2
$N_2$	20,8	29,2	8,4
$O_2$	21,1	29,3	8,2
$CO_2$	28,5	36,8	8,3



Arbeit  $W$  und Wärmeenergie  $Q$  erhalten ein Vorzeichen.

- $W$  oder  $Q$  sind positiv, wenn die innere Energie des Systems steigt.
- $W$  oder  $Q$  sind negativ, wenn die innere Energie des Systems sinkt.

Der erste Hauptsatz der Thermodynamik lautet:

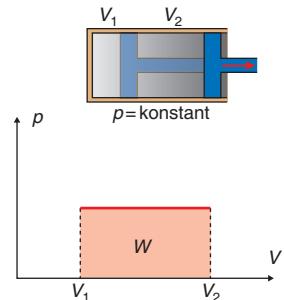
**Die Änderung  $\Delta U$  der inneren Energie eines Systems ist gleich der Summe aus verrichteter Arbeit und umgesetzter Wärmeenergie:  $\Delta U = W + Q$ .**

Der erste Hauptsatz ist die Erweiterung des Energiesatzes der Mechanik. Es können jetzt auch Reibungsvorgänge berücksichtigt werden. Allgemein gilt der **Satz der Energieerhaltung: In einem thermisch und mechanisch abgeschlossenen System ist die Gesamtenergie konstant.**

Als Volumenarbeit (Volumenänderungsarbeit) bezeichnet man die Arbeit, die das Gas bei der Expansion verrichtet, bzw. die Arbeit, die bei der Kompression am Gas verrichtet wird.

Man unterscheidet:

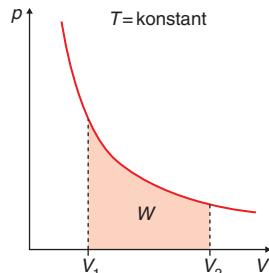
- Isobare Zustandsänderung ( $p = \text{konst}$ ). Das Gas expandiert von  $V_1$  nach  $V_2$ . Die Arbeit wird daher negativ gerechnet.  
 $W = -F \cdot \Delta s = -p A \cdot \Delta s = -p \Delta V$   
 $\Delta U = Q + (-p \Delta V)$



- Isotherme Zustandsänderung ( $T = \text{konst}$ ). Bei konstanter Temperatur ist  $\Delta U = 0$ . Es gilt das Gesetz von Boyle-Mariotte.

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p dV = -NkT \int_{V_1}^{V_2} \frac{1}{V} dV = -NkT \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)$$

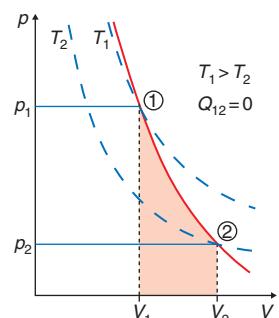
$$\Delta U = Q + (-NkT \cdot \ln(V_2/V_1)) = 0$$



- Adiabatische Zustandsänderung ( $Q = 0$ ). Es findet keine Wärmeübertragung statt.

Es gilt  $p \cdot V^\alpha = \text{konst}$  mit  $\alpha = c_p/c_V$ . Der Exponent hängt von der Gassorte ab. Für einatomige Gase ist  $\alpha = 5/3$ , für zweiatomige ist  $\alpha = 7/5$ .

$$\Delta U = W$$



- Isochore Zustandsänderung ( $V = \text{konst}$ ). Es findet keine Volumenänderung statt. Es ist also  $\Delta U = 0$ .



Gleichwertige Formulierungen des zweiten Hauptsatzes sind:

- Es gibt keine periodisch arbeitende Maschine, die innere Energie ausschließlich in Arbeit umsetzt (Kelvin 1851).
- Zustandänderungen eines Systems laufen von selbst stets so ab, dass der neue Zustand wahrscheinlicher ist als der alte (Boltzmann).
- Wärme geht niemals von selbst von einem System niedriger zu einem System höherer Temperatur über (Clausius 1850).

Die Theorie der Wärmekraftmaschinen zeigt, dass die periodische Umwandlung von Wärmeenergie in mechanische Energie immer mit einer Wärmeabgabe an ein kälteres Reservoir verknüpft ist.

Der Wirkungsgrad  $\eta$  eines Energieumwandlerprozesses ist das Verhältnis von nutzbarer Energie zu aufgewendeter Energie. Für die Umwandlung von Wärmeenergie  $Q_{zu}$  in mechanische Energie  $E$  ist der Wirkungsgrad gegeben durch  $\eta = |E|/Q_{zu}$ . Bei einer idealen Wärmekraftmaschine kann der Wirkungsgrad durch die Temperaturen  $T_1$  (hohe Temperatur) und  $T_2$  (niedrige Temperatur) der Wärmereservoire ausgedrückt werden. Es ist  $\eta = 1 - T_2/T_1$ .

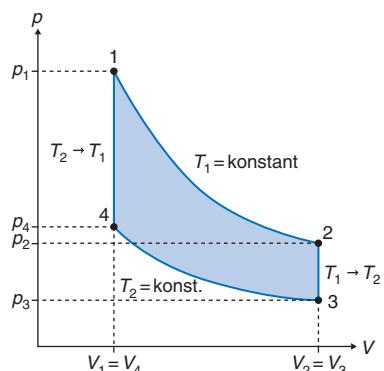
Der vom schottischen Erfinder R. Sterling angegebene Kreisprozess erreicht den maximalen Wirkungsgrad.

Die Zustandsänderungen und die zugeführten bzw. abgeführten Wärmeenergien sind in der Tabelle zusammengestellt.

Für den Wirkungsgrad erhält man:

$$\eta = \frac{Q_{zu} - |\mathcal{Q}_{ab}|}{Q_{zu}} = \frac{NkT_1 \ln(V_2/V_1) - NkT_2 \ln(V_2/V_1)}{NkT_1 \ln(V_2/V_1)},$$

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = 1 - \frac{T_2}{T_1}.$$



1 → 2	2 → 3	3 → 4	4 → 1
Isotherme Expansion bei konstanter hoher Temperatur $T_1$ $Q_{zu} = NkT_1 \ln(V_2/V_1)$	Isochor Abkühlung von $T_1$ auf $T_2$ $Q_{ab} = -mc_v \Delta T$	Isotherme Kompression bei konstanter niedriger Temperatur $T_2$ $Q_{ab} = -NkT_2 \ln(V_2/V_1)$	Isochor Erwärmung von $T_2$ auf $T_1$ $Q_{zu} = mc_v \Delta T$



## Wärmepumpe

Der technische Wirkungsgrad der Wärmepumpe ist:

$$\eta_{\text{Wärmepumpe}} = \frac{\text{abgegebene Wärmeenergie } Q_1}{\text{aufgewandte mechanische Energie } E} = \frac{Q_1}{|Q_1| - |Q_2|} = \frac{1}{\eta_{\text{Wärmekraftmaschine}}},$$

$$\eta_{\text{Wärmepumpe}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}.$$

Bei der Bewertung dieses Ergebnisses ist zu berücksichtigen, dass eine elektrische betriebene Wärmepumpe gerade den Energieanteil wieder nutzbar macht, der bei der Stromerzeugung verloren wurde.

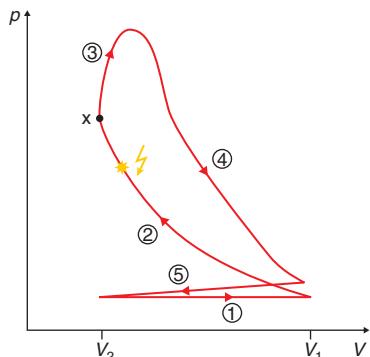
Technisch erreichbar sind Wirkungsgrade von etwa 4,5.

Günstiger sind Wärmepumpen, die mit Gasmotoren betrieben werden.

## Benzinmotor

Die Abbildung zeigt ein reales Arbeitendiagramm für einen Otto-Motor.

(1) Gas-Luft-Gemisch wird angesaugt.



(2) Gasgemisch wird vom Anfangsvolumen  $V_1$  auf das Volumen  $V_2$  verdichtet.

(3) Heizung durch Zündung und explosionsartige Verbrennung. Das Volumen  $V_2$  bleibt annähernd konstant (isochorer Vorgang).

(4) Expansion unter Verrichtung mechanischer Arbeit.

(5) Ausstoßen des verbrannten Gases.

Bei der theoretischen Beschreibung des Otto-Motors geht man davon aus, dass die Kompression (2) und die Expansion (4) adiabatisch, also ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung, erfolgen.

Unter dieser Voraussetzung ist der theoretische Wirkungsgrad  $\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}$

Für zweiatomige Gase ist  $\kappa = 1,4$ .

Der Wirkungsgrad hängt bei dem idealisierten Motor nur von der Verdichtung  $V_2/V_1$  ab. Aus mehreren Gründen lässt sich die Verdichtung aber nicht beliebig erhöhen.

- Bei hoher Verdichtung steigen der Druck und die Temperatur. Die Materialien dürfen dadurch nicht beschädigt werden. Es gibt Dichtungsprobleme.
- Bei hohen Temperaturen kann es zu einer vorzeitigen Verbrennung kommen.

Bei Ottomotoren liegen die Verdichtungen zwischen 9:1 bis 14:1. Bei Dieselmotoren erreicht man höhere Verdichtungen bis etwa 19:1 und damit einen besseren Wirkungsgrad.



Der Energieerhaltungssatz erlaubt keine Aussage darüber, ob ein Vorgang reversibel oder irreversibel ist. Mit Hilfe der Entropie  $S$  kann man diese Vorgänge unterscheiden.

Makroskopisch lässt sich die Entropieänderung wie folgt definieren:

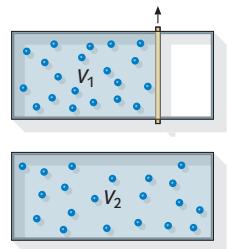
**Führt man einem System bei konstanter Temperatur die Wärme  $Q$  zu, so ändert sich seine Entropie um  $\Delta S = Q/T$ .**

Eine statistische Definition der Entropie  $S$  formulierte Ludwig Boltzmann. Die Definitionsgleichung lautet  $S = k \cdot \ln(w)$ .

Dabei ist  $k = 1,380658 \cdot 10^{-23}$  J/K die Boltzmannkonstante und  $w$  die Wahrscheinlichkeit für einen Makrozustand. Diese Wahrscheinlichkeit ergibt sich aus der Anzahl  $z$  der zu diesem Zustand gehörenden und der Anzahl  $z_0$  aller möglichen Mikrozustände,  $w = z/z_0$ . Findet in einem abgeschlossenen System ein irreversibler Vorgang statt, dann wächst die Wahrscheinlichkeit  $w$ . Ist die Wahrscheinlichkeit  $w_2$  für einen zweiten Zustand größer als die Wahrscheinlichkeit  $w_1$  für den ersten, dann ist

$$\Delta S = k \cdot \ln(w_2) - k \cdot \ln(w_1) = k \cdot \ln(w_2/w_1) \text{ größer als Null.}$$

Obwohl die zweite Definition nicht unmittelbar auf einen Zusammenhang mit Größen wie Wärme und Energie hinweist, besteht ein solcher. Als Beispiel soll die **isotherme Expansion** eines idealen Gases dienen.



Nach dem Entfernen der Trennwand verteilen sich alle Gasteilchen im größeren Volumen  $V_2$ .

Die Wahrscheinlichkeit, ein beliebiges Teilchen nach der Expansion im rechten Teilvolumen zu finden, ist  $w_1/w_2 = V_1/V_2$ . Für  $N$  Teilchen ergibt sich die Wahrscheinlichkeit  $w_1/w_2 = (V_1/V_2)^N$ . Dies liefert eine Entropieänderung von  $\Delta S = k \cdot \ln(w_2/w_1) = k \cdot \ln((V_2/V_1)^N) = k \cdot N \cdot \ln(V_2/V_1)$ .

Der makroskopische Weg führt ebenfalls zu diesem Ergebnis. Bei einer isothermen Expansion eines Gases wird die Wärme  $Q = N \cdot k \cdot T \cdot \ln(V_2/V_1)$  zugeführt. Damit ist  $Q/T = N \cdot k \cdot \ln(V_2/V_1) = \Delta S$ .

Weitere Eigenschaften der Entropie:

- Die Entropie eines abgeschlossenen Systems nimmt nie ab. Nur bei reversiblen Vorgängen gilt  $\Delta S = 0$ .
- In einem abgeschlossenen System laufen Vorgänge so lange ab, bis die Entropie ihr Maximum erreicht hat.
- Zustandsänderungen eines Systems laufen von selbst stets so ab, dass der neue Zustand wahrscheinlicher ist als der alte.
- Läuft ein Vorgang so ab, dass Entropie entsteht, dann wird Energie entwertet. Die entwertete Energie ist  $\Delta S \cdot T_0$ , dabei ist  $T_0$  die momentane Umgebungstemperatur.
- Bilden sich Strukturen, z.B. Kristalle, dann entsteht „Ordnung“ und damit nimmt die Anzahl der möglichen Mikrozustände ab. Die Entropie sinkt. Dem System wird Entropie entzogen und der Umgebung zugeführt. Es liegt also kein abgeschlossenes System vor.

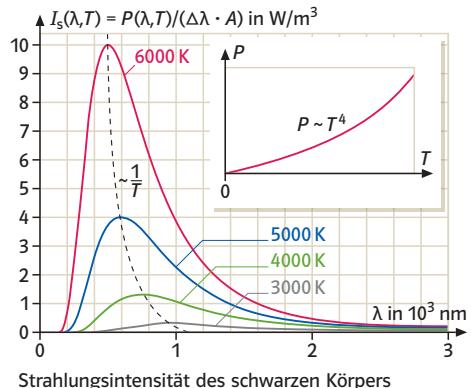


Die Strahlungsgesetze setzen einen idealen schwarzen Körper (schwarzen Strahler) voraus.

Die Intensitätsverteilung wird durch das Planck'sche Strahlungsgesetz beschrieben. Aus der grafischen Darstellung lässt sich entnehmen, dass eine von der Temperatur abhängige Wellenlänge  $\lambda_{\max}$  existiert, bei der die Intensität maximal ist.  $\lambda_{\max}$  wird mit steigender Temperatur kleiner.

Der gesamte Strahlungsstrom in  $\text{W/m}^2$  wird durch die Fläche charakterisiert, die der Graph mit der Rechtsachse einschließt.

Zwei Gesetze lassen sich aus dem Diagramm herleiten.



### **Wien'sches Verschiebungsgesetz**

Die Wellenlänge  $\lambda_{\max}$  mit der größten Leistung eines schwarzen Körpers ist antiproportional zu dessen Temperatur  $T$ .

$$\lambda_{\max} = a/T \text{ mit } a = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{K}$$

### **Stefan-Boltzmann'sches Gesetz**

Die Strahlungsleistung  $P(\lambda, T)$  eines schwarzen Körpers ist proportional zum Produkt aus seiner Oberfläche  $A$  und der vierten Potenz seiner Temperatur  $T$ .  $P(\lambda, T) = \sigma \cdot A \cdot T^4$  mit  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$ .

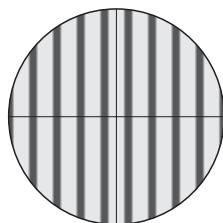
Ohne Atmosphäre wäre die mittlere Temperatur der Erde etwa  $-20^\circ\text{C}$ . Der Treibhauseffekt sorgt für eine angenehmere Temperatur. Dieser Effekt lässt sich vereinfacht wie folgt erklären:

Die von der Sonne eingestrahlte Energie hat wegen der hohen SonnenTemperatur hauptsächlich kurze Wellenlängen. Hierfür ist die Atmosphäre gut durchlässig. Die langwellige Wärmestrahlung wird aber zum großen Teil von ihr absorbiert. Die von der Sonne und von der Erde aufgeheizte Atmosphäre strahlt auf den Boden zurück, so dass die Bodentemperatur weiter erhöht wird. Das geschieht so lange, bis sich eine neue Gleichgewichtstemperatur eingestellt hat. Diese liegt heute bei etwa  $15^\circ\text{C}$ .

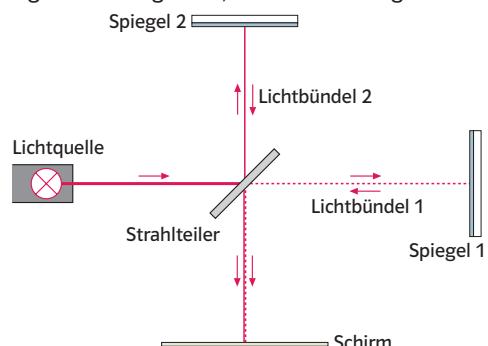


## Das Experiment von Michelson und Morley

Lange Zeit ging man davon aus, dass das Licht ein Medium, den Äther, für seine Ausbreitung benötigt. Michelson und Morley wollten diesen Äther nachweisen. Dazu untersuchten sie, welchen Einfluss die Bahngeschwindigkeit der Erde  $v = 30 \text{ km/s} = 3 \cdot 10^4 \text{ m/s}$  auf die Lichtgeschwindigkeit hat. Die Abbildung zeigt den Versuchsaufbau. Im **Michelson-Interferometer** wird ein schmales Lichtbündel durch einen Strahlteiler aufgeteilt. Nach der Reflektion am Spiegel 1 bzw. 2 gelangen beide Lichtbündel auf den Schirm. Die Überlagerung erzeugt ein Interferenzmuster. Die Anordnung wird so aufgestellt, dass die Lichtwege senkrecht und parallel zur Erdbahn verlaufen. Die Bahn- geschwindigkeit sollte sich auf die beiden Licht- wege unterschiedlich aus- wirken, falls sich die Erde durch einen in Ruhe befindlichen Äther bewegt. Dieser Einfluss müsste sich durch eine Verschiebung des Interferenzmusters bemerkbar machen, wenn man die Anordnung um  $90^\circ$  dreht.



Auf dem Schirm zu beobachtendes Interferenzmuster, das sich beim Drehen der Anordnung verschieben sollte.



Ein Beobachter außerhalb der Erde (er ruht bezüglich des Äthers) berechnet die Laufzeit für den Weg 1 wie bei den Schallsignalen in Aufgabe 2

$$t_1 = \frac{l_1}{c-v} + \frac{l_1}{c+v} = \frac{2l_1 c}{c^2 - v^2}, \text{ dabei ist } c \text{ die Lichtgeschwindigkeit.}$$

Für den Weg 2 ermittelt er zweimal die Geschwindigkeit  $\sqrt{c^2 - v^2}$ .

Für diesen Weg erhält er die Laufzeit

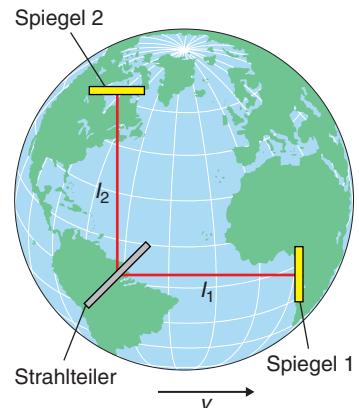
$$t_2 = \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} + \frac{l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2l_2}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

Die beiden Lichtbündel haben unterschiedliche Laufzeiten. Das Interferenzmuster müsste sich verschieben, wenn man die Anordnung um  $90^\circ$  dreht. Dies wurde nie beobachtet.

Michelson (1881):

„Die Hypothese eines stationären Äthers erweist sich als unhaltbar.“

**Die Lichtgeschwindigkeit in Vakuum ist unabhängig von der Bewegung der Quelle.**



Weg 2

$$v_{\text{hin}} = \sqrt{c^2 - v^2} \quad \begin{matrix} v \\ c \\ v \end{matrix} \quad v_{\text{zurück}} = \sqrt{c^2 - v^2}$$



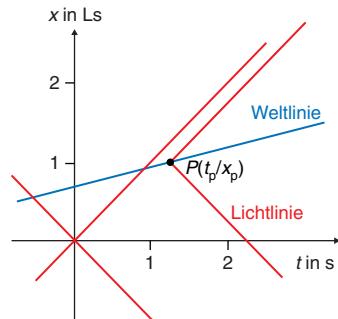
Ein **Minkowski-Diagramm** ist ein Zeit-Ort-Diagramm. Als Zeiteinheit wird eine Sekunde und als Ortseinheit eine Lichtsekunde ( $1 \text{ Ls} = 3 \cdot 10^8 \text{ m}$ ) gewählt bzw.  $1 \mu\text{s}$  für die Zeit und  $1 \mu\text{Ls} = 300 \text{ m}$  für den Ort. Dabei wird auf beiden Achsen für die Einheiten jeweils die gleiche Strecke abgetragen.

Ein Punkt im Diagramm heißt **Ereignis**, eine Zeit-Ort-Kurve **Weltlinie**. Die Weltlinie eines Lichtsignals heißt auch **Lichtlinie**. Die Lichtlinien sind parallel zu den Winkelhalbierenden des Minkowski-Diagramms.

Ereignisse, die für den Beobachter gleichzeitig stattfinden, liegen auf einer Parallelens zur Ortsachse.

Ereignisse, die am gleichen Ort stattfinden, liegen auf einer Parallelens zur Zeitachse.

Eine Gerade im Minkowski-Diagramm kennzeichnet eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit (im Beispiel ist  $v = 0,6c$ ). Für einen bezüglich des Systems  $(t_A; x_A)$  ruhenden Beobachter A entfernt sich ein Beobachter B mit  $v = 0,6c$  in Richtung der positiven x-Achse. Entsprechend sagt B, dass sich A von ihm in Richtung der negativen x-Achse mit gleichem Geschwindigkeitsbetrag entfernt.



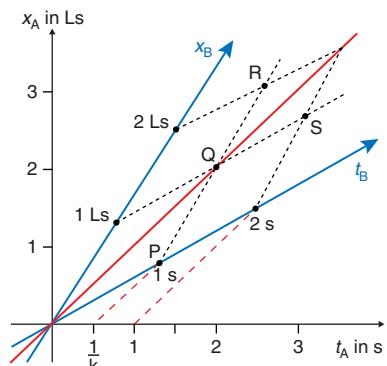
Ein Minkowski-Diagramm für B erhält man durch die folgenden Konstruktionsschritte.

- Die Weltlinie von B wird seine Zeitachse  $t_B$ .
- Berechnen Sie den Dopplerfaktor  $k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$  (für  $v = 0,6c$  ist  $k = 2$ ) und tragen Sie die Zeiten  $1s/k$ ,  $2s/k$  auf der  $t_A$ -Achse ein.
- Die Lichtlinien von diesen Punkten markieren die B-Zeiten. (Sendet ein Beobachter A nach der Zeit  $t_A = 1s/k$  dem bewegten Beobachter B ein Lichtsignal hinterher, so erreicht es B nach der Zeit  $t_B = k \cdot 1s/k = 1s$ )
- Wegen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit muss die Weltlinie des Lichtsignals die Winkelhalbierende zwischen der Orts- und Zeitachse sein.

Die Achsen des Minkowski-Diagramms für B sind nicht orthogonal. Die „Ableselinien“ eines Ereignisses verlaufen parallel zu den  $t_B$ - und  $x_B$ -Achsen. Für das gewählte Beispiel gilt:

Ein Beobachter im System B stellt fest, dass die Ereignisse  $P(1s/0)$ ,  $Q(1s/1Ls)$ ,  $R(1s/2Ls)$  gleichzeitig stattfinden und dass  $Q(1s/1Ls)$ ,  $S(2s/1Ls)$  zwei Ereignisse am gleichen Ort sind. Für einen Beobachter im System A gilt dies offensichtlich nicht. P, Q, R sind für ihn Ereignisse, die nacheinander stattfinden.

**Über die zeitliche Abfolge von Ereignissen machen gegeneinander bewegte Beobachter unterschiedliche Aussagen.**



## Zeitdilatation

Eine Lichtuhr ruht in einem Inertialsystem  $S'$ . Dieses bewegt sich mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  gegenüber einem Inertialsystem  $S$  an einem Satz synchronisierter Lichtuhren vorbei. Die synchronisierten Uhren ruhen im System  $S$ .

Ein Beobachter im System  $S'$  stellt fest:

$$c \cdot \Delta t' = d' = d \Leftrightarrow \Delta t' = d/c.$$

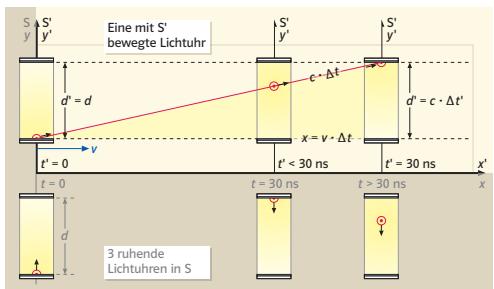
Dabei wurde ausgenutzt, dass sich Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung nicht ändern.

Für einen Beobachter im System  $S$  hat sich die

Uhr in der Zeitspanne  $\Delta t$  um die Strecke  $v \cdot \Delta t$  nach rechts bewegt und das Lichtsignal hat die Strecke  $c \cdot \Delta t$  zurückgelegt.

Für ihn gilt  $(v \cdot \Delta t)^2 + (c \cdot \Delta t')^2 = (c \cdot \Delta t)^2 \Leftrightarrow v^2 \cdot \Delta t^2 + c^2 \Delta t'^2 = c^2 \cdot \Delta t^2 \Leftrightarrow c^2 \cdot \Delta t'^2 = (c^2 - v^2) \cdot \Delta t^2 \Leftrightarrow$

$$\Delta t'^2 = \frac{c^2 - v^2}{c^2} \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \Delta t$$



**Eine bewegte Uhr geht gegenüber ruhenden Uhren nach. Man spricht von der Zeitdehnung bzw. Zeitdilatation.**

## Längenkontraktion

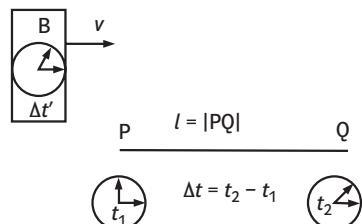
Eine unmittelbare Folge der Zeitdilatation ist die Längenkontraktion. Unter der **Eigenlänge** eines Körpers versteht man die Länge, die ein relativ zum Körper ruhender Beobachter misst. In einem relativ zum Körper bewegten Bezugssystem stellt man eine verkürzte Länge  $l'$  fest.

Ein Zusammenhang zwischen beiden Längen liefert die folgende Überlegung.

- An den Enden eines Stabes mit der Eigenlänge  $l = |PQ|$  befinden sich synchronisierte Uhren. Ein Beobachter B fährt mit der Geschwindigkeit  $v$  am Stab entlang.
- Ein relativ zum Stab ruhender Beobachter A misst mit den Uhren an P und Q die Zeitspanne  $\Delta t$ , die B zum Zurücklegen der Strecke  $l$  benötigt. Er erhält  $l = v \cdot \Delta t$ .
- Für den Beobachter B kommt der Stab mit der Geschwindigkeit  $v$  auf ihn zu. Er misst mit seiner Uhr die Zeitspanne  $\Delta t'$ , die der Stab für den „Vorbeiflug“ benötigt. Aus seiner Sicht erhält er  $l' = v \cdot \Delta t'$ .
- Die einzelne Uhr des Beobachters B geht gegenüber den ruhenden Uhren nach.

Schließlich erhält man

$$l' = v \cdot \Delta t' = v \cdot \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = l \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{mit} \quad \Delta t' = \Delta t \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$



**Die Eigenlänge  $l$  eines Körpers wird in einem Inertialsystem, welches sich in Längsrichtung mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, mit einer verkürzten Länge  $l'$  gemessen.**



Das Minkowski-Diagramm beschreibt die folgende

Situation:

Ein Beobachter B entfernt sich vom Beobachter A mit der Geschwindigkeit  $v$ . A sendet zum Zeitpunkt  $t_1$  ein Lichtsignal an B, das dort zur Zeit  $t_B = k \cdot t_1$  ankommt und sofort reflektiert wird. Das reflektierte Signal erreicht A zum Zeitpunkt  $t_2$ . Da die Bezugssysteme bei den Beobachtern nach dem Relativitätsprinzip gleichwertig sind gilt  $t_2 = k \cdot t_B = k^2 \cdot t_1$ .

Beobachter A kann aus den Zeiten den Reflexionsort auf zwei Arten berechnen.

– Die Reflexion fand zum Zeitpunkt  $t_R = \frac{1}{2} \cdot (t_1 + t_2) =$

$$\frac{1}{2} \cdot (t_1 + k^2 t_1) = \frac{1}{2} \cdot (1 + k^2) \cdot t_1 \text{ statt.}$$

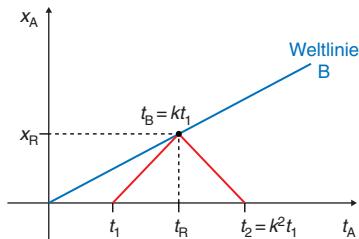
In dieser Zeit hat der Beobachter B die Strecke  $x_R = v \cdot t_R = \frac{1}{2} \cdot (1 + k^2) v t_1$  zurückgelegt.

– Die Laufzeit des Lichtsignals bis zur Reflexion betrug  $t_{\text{Licht}} = \frac{1}{2} \cdot (t_2 - t_1) = \frac{1}{2} \cdot (k^2 - 1) t_1$ .

Das Licht legte in dieser Zeit die Strecke  $x_R = c \cdot t_{\text{Licht}} = \frac{1}{2} \cdot (k^2 - 1) c t_1$  zurück.

Setzt man die berechneten Strecken gleich, dann erhält man

$$\frac{1}{2} \cdot (1 + k^2) v t_1 = \frac{1}{2} \cdot (k^2 - 1) c t_1 \Leftrightarrow (1 + k^2) v = (k^2 - 1) c.$$



Aus dieser Gleichung folgt:  $k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ .

**Sendet ein Beobachter A nach der Zeit  $t$  dem bewegten Beobachter B ein Lichtsignal hinterher, so erreicht**

**es B nach der Zeit  $k \cdot t$  mit  $k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ .**

$k$  heißt **Dopplerfaktor**.

Eine wichtige Anwendung des Dopplerfaktors ist die Berechnung von Schwingungsdauern in gegeneinander bewegten Bezugssystemen. Eine Schwingungsdauer  $T_A$  kann durch zwei Lichtsignale im Abstand  $\Delta t_A = T_A$  mitgeteilt werden. Aus dem Minkowski-Diagramm folgt:

**Sendet ein Beobachter A zwei Lichtsignale im Abstand  $\Delta t_A = T_A$  in Richtung eines bewegten Beobachters B, so empfängt dieser sie im Abstand  $k \cdot \Delta t_A = k \cdot T_A = T_B$  mit  $k = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}$ .**

Falls sich beide Beobachter voneinander entfernen, ist  $v$  positiv und  $k > 1$ ; falls sich die beiden Beobachter einander nähern, ist  $v$  negativ und  $k < 1$ .

Für Schwingungsdauer  $T$ , Frequenz  $f$  und Wellenlänge  $\lambda$  gilt allgemein  $f = 1/T$  und  $\lambda = c/f = c \cdot T$ .

Entsprechend erhält man für einen bewegten Beobachter  $f_B = (1/k) \cdot f_A$  und  $\lambda_B = k \cdot \lambda_A$ .



## Koordinatentransformation

Sind die Raum- und Zeitkoordinaten  $(x, t)$  eines Ereignisses in einem Inertialsystem S bekannt, so lassen sich die entsprechenden Koordinanten  $(x'/t')$  für ein zweites Inertialsystem S' mit Hilfe der **Lorentz-Transformationen** berechnen.

Für die Umrechnung von S'  $\Rightarrow$  S muss man  $v$  durch  $-v$  ersetzen sowie die Orts- und Zeitkoordinaten vertauschen.

	Inertialsystem S	Das Inertialsystem S' bewegt sich relativ zu S mit der Geschwindigkeit v.
Ort	$x$	$x' = \frac{x + vt}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$
Zeit	$t$	$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}}$

Mit Hilfe der Lorentz-Transformation lassen sich relativistische Effekte wie die Relativität der Gleichzeitigkeit, die Längenkontraktion und Zeitedilatation erneut herleiten.

Die beiden Ereignisse  $E_1(x_1/t)$  und  $E_2(x_2/t)$  finden z.B. im System S gleichzeitig, aber an verschiedenen Orten statt. Im System S' sind wegen  $v x_1 \neq v x_2$  die zugehörigen Zeiten  $t'_1$  und  $t'_2$  verschieden. Die beiden Ereignisse  $E_1(x'_1/t'_1)$  und  $E_2(x'_2/t'_2)$  finden für den zweiten Beobachter also nicht mehr gleichzeitig statt.

Das **Additionsge setz der Geschwindigkeiten** folgt ebenfalls aus der Lorentz-Transformation.

Ein Bezugssystem S' entferne sich mit der Geschwindigkeit  $v_1$  von einem Bezugssystem S. Im Bezugssystem S' bewege sich ein Körper mit der Geschwindigkeit  $v_2$ .

Das Bezugssystem S' könnte ein Raumschiff sein, das sich vom Bezugssystem Erde (System S) mit der Geschwindigkeit  $v_1$  entfernt. Innerhalb des Raumschiffes bewegt sich ein Körper mit der Geschwindigkeit  $v_2$ . Im System S hat der Körper die Geschwindigkeit  $v = x/t$ . Bei der Anwendung der Lorentz-Transformation ist zu beachten, dass hier ein Übergang von S nach S' vorliegt und dass sich das Bezugssystem S' mit der Geschwindigkeit  $v_2$  entfernt. Der gemeinsame Nenner in den Transformationsgleichungen kann sofort gekürzt werden. Außerdem wird bei der Rechnung noch  $v_1 = x'/t'$  benutzt.

$$v = \frac{x}{t} = \frac{x' + v_2 t'}{t' + \frac{v_2 x'}{c^2}} = \frac{t' \left( \frac{x'}{t'} + v_2 \right)}{t' \left( 1 + \frac{v_2 x'}{c^2 t'} \right)} = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Sind die Geschwindigkeiten  $v_1$  und  $v_2$  sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , dann ist  $v_1 \cdot v_2 / c^2 \approx 0$  und die Geschwindigkeiten können klassisch addiert werden.



Kaufmann und Bucherer untersuchten Anfang des letzten Jahrhunderts die spezifische Ladung schneller Elektronen. Es zeigte sich, dass  $e/m$  mit steigender Geschwindigkeit kleiner wurde. Bei konstanter Ladung musste daher die Masse zunehmen.

**Die träge Masse eines Körpers nimmt mit seiner Geschwindigkeit zu und es gilt  $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$ .**

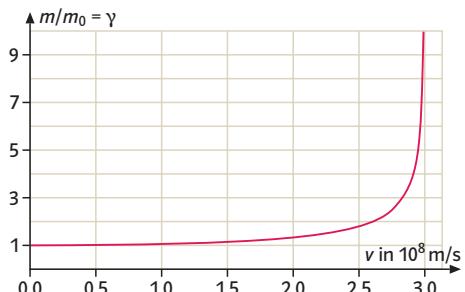
Die von einem mitbewegten Beobachter gemessene Ruhemasse  $m_0$  ist die kleinste Masse, die gemessen werden kann. Kein Körper mit einer von null verschiedenen Ruhemasse kann Lichtgeschwindigkeit erreichen.

Die Abbildung zeigt, dass die Zunahme der Masse erst bei höheren Geschwindigkeiten an Bedeutung gewinnt. Für Geschwindigkeiten kleiner als  $0,1c$  kann sie in der Regel vernachlässigt werden. Eine Rechnung für  $v = 0,1c$  bestätigt dies:

$$m(0,1c) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - 0,01c^2/c^2}} = 1,005 m_0.$$

Die Masse erhöht sich also nur um 0,5%.

Die Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit beeinflusst auch den Impuls. Den **relativistischen Impuls** definiert man als Produkt  $\mathbf{p} = m(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}$ .



Um ein schnelles Teilchen zu beschleunigen, ist eine Kraft notwendig, die längs eines Weges wirkt. In der Nähe der Lichtgeschwindigkeit wird ein Teilchen kaum schneller, seine Masse kann aber über alle Grenzen steigen. Diese Massenzunahme wird als Energiezunahme gedeutet.

Nach Albert Einstein gilt die Masse-Energie-Beziehung:

**Die Gesamtenergie  $E$  und die träge Masse  $m$  eines Körpers sind zueinander proportional.**

$$E = m(v) \cdot c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Jede Masse  $m$  besitzt Energie und jede Energie eine Masse. Experimentell wird dies z.B. bei der Paarerzeugung in der Elementarteilchenphysik oder bei der Kernspaltung in der Kernphysik deutlich.

Für die Größen Energie und Impuls liefert eine Rechnung die **Energie-Impuls-Beziehung  $E^2 - p^2 c^2 = m_0^2 c^4$ .**

Diese Gleichung bezeichnet man auch als **relativistischen Energiesatz**. Wendet man ihn auf Photonen (ihre Ruhemasse ist null) an, so erhält man  $E = p \cdot c$  bzw.  $p = h f/c$ .

Wird ein Teilchen aus der Ruhe auf die Endgeschwindigkeit  $v$  beschleunigt, dann nimmt seine Energie um  $\Delta E = (m - m_0)c^2$  zu. Dies ist der relativistische Ausdruck für die kinetische Energie eines Teilchens. Ist  $v$  sehr viel kleiner als  $c$ , dann geht diese Gleichung in  $E_{\text{kin}} = 1/2 \cdot m v^2$  über.



## Trigonometrische Entfernungsbestimmung.

Während sich die Erde von E nach E' bewegt, wandert die Projektion des Sterns an der Sphäre von S nach S'. Man beobachtet während eines Halbjahres die Position eines nahen Sternes vor dem Hintergrund des weit entfernten Fixsternhimmels. Der auf diese Weise ermittelte Winkel  $\Pi$  heißt **Parallaxe** des Sterns.

Aus der Skizze entnimmt man  $\tan(\Pi) = a/r$ .

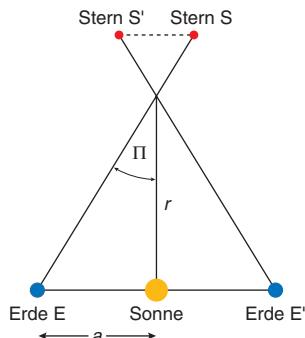
Im Bogenmaß gilt für kleine Winkel  $\tan(\Pi) \approx \Pi$ . Damit erhält man für die Entfernung die Beziehung  $r = a/\Pi$ . Dabei ist  $a$  der Erdbahnradius  $a = 1,496 \cdot 10^{11} \text{ m}$  und  $\Pi$  die Parallaxe im Bogenmaß. Für die Umrechnung in Bogensekunden gilt:

$1''$  entspricht  $\pi/(180 \cdot 3600) \text{ rad} = 1/206\,265 \text{ rad}$ .

Damit ergibt sich für die Messung in Bogensekunden

$r = 206\,265'' \cdot a/\Pi$ . Berücksichtigt man, dass  $1 \text{ pc} = 206\,265'' a/1''$  gilt, dann vereinfacht sich Entfernungsberechnung zu  $r = 1''/\pi \text{ pc}$ .

Mit erdgebundenen Teleskopern kann  $\Pi$  auf etwa  $\pm 0,01''$  bestimmt werden. Entfernungsbestimmungen können mit dieser Methode nur bis etwa 100 Lichtjahren durchgeführt werden.



## Photometrische Entfernungsbestimmung

Unter der scheinbaren Helligkeit eines Sterns versteht man die Helligkeit, mit der man einen Stern bei uns sieht. Diese Helligkeit ist von der Leuchtkraft und von der Entfernung des Sterns abhängig.

Zwischen den Strahlungsströmen (Strahlungsleistung pro Flächeneinheit)  $S_1$  und  $S_2$ , die im Auge (oder auf dem Fernrohrobjektiv) scheinbare Helligkeiten  $m_1$  und  $m_2$  hervorrufen, gilt bei gleichbleibender Größe der Pupille das **psychophysische Grundgesetz**  $m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \lg(S_1/S_2)$ .

Multipliziert man den Strahlungsstrom  $S$  an der Sternoberfläche mit der Kugeloberfläche  $4\pi r^2$  (dabei ist  $r$  die Entfernung Stern-Erde), so erhält man dessen Leuchtkraft  $L = 4\pi r^2 S$  bzw.  $S = L/4\pi r^2$ .

Die Helligkeit, mit der uns ein Stern in der Normalentfernung 10 pc erscheinen würde, nennt man **absolute Helligkeit M**.

Setzt man in das Grundgesetz für  $S_1$  den Strahlungsstrom  $L/4\pi r^2$  und für  $S_2$  den Strahlungsstrom  $L/(4\pi \cdot (10 \text{ pc})^2)$  im Normalabstand 10 pc ein, so ergibt sich

$$m - M = -2,5 \cdot \lg\left(\frac{(10 \text{ pc})^2}{r^2}\right) = 5 \cdot \lg\left(\frac{r}{10 \text{ pc}}\right).$$



Die Emissions- und Absorptionslinien bekannter Elemente in den Spektren der Galaxien zeigen eine Verschiebung zu größeren Wellenlängen, man spricht von einer **Rotverschiebung**. Diesen Effekt deutet man als Doppler-Verschiebung. Dabei geht man davon aus, dass sich Beobachter und Lichtquelle relativ zu einander mit der Geschwindigkeit  $v$  entfernen.

Ist  $\lambda_{\text{Labor}} = \lambda_0$  die im Labor gemessene Wellenlänge und  $\lambda_{\text{beobachtet}} = \lambda$  die im Spektrum der Galaxie beobachtete Wellenlänge, so gilt:

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

Aus dieser Beziehung folgt:

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} = \frac{\lambda + (\lambda_0 - \lambda)}{\lambda_0} = 1 + \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0}.$$

Die relative Wellenlängenänderung  $(\lambda_0 - \lambda)/\lambda_0 = \Delta\lambda/\lambda_0$  heißt **Dopplerverschiebung** und wird mit  $z$  bezeichnet. Es ist daher:

$$z = \Delta\lambda/\lambda = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1.$$

Aus dieser Beziehung erhält man bei bekanntem  $z$  die Fluchtgeschwindigkeit  $v$ . Ist  $v$  sehr viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit  $c$ , dann gilt die Näherung  $z = v/c$ .

Hubble untersuchte systematisch die Rotverschiebung in Sternspektren. Er erkannte eine Proportionalität zwischen der Entfernung  $r$  und der Geschwindigkeit  $v$  von Galaxien. Den proportionalen Zusammenhang  $v = H \cdot r$  nennt man das **Hubble-Gesetz**. Die Hubble-Konstante  $H$  liegt zwischen 55 km/(sMpc) und 75 km/(sMpc).

Nimmt man vereinfacht eine gleichförmige Expansion an, so hätte sich die Fluchtgeschwindigkeit  $v$  einer Galaxie nicht geändert. Hat eine Galaxie heute die Entfernung  $r$  von uns, dann hätte sie für das Zurücklegen dieser Strecke die Zeit  $T_0 = r/v = 1/H$  benötigt. Die Expansionsdauer  $T_0 = 1/H$  heißt **Hubble-Zeit**.

Mit  $H = 65 \text{ km/sMpc}$  ergibt sich  $T_0 = 1 \text{ sMpc}/65 \text{ km} = 3,086 \cdot 10^{19} \text{ skm}/65 \text{ km} \approx 15 \cdot 10^9 \text{ a}$ . Diese Zeit kann als eine Abschätzung für das Alter des Universums gelten.

Wenn die Expansion durch Gravitationskräfte gebremst wird, dann ist die heutige Geschwindigkeit kleiner als beim Start. Die Hubble-Konstante muss im Laufe der Zeit kleiner geworden sein, d.h. im Mittel ist sie größer als heute. Die berechnete Hubble-Zeit wäre dann zu groß.

Neue Messungen zeigen, dass die Expansionsgeschwindigkeit nicht kleiner, sondern größer wird. Entsprechend wäre jetzt die berechnete Hubble-Zeit für das Alter des Universums zu klein.

Die Gravitationskraft hat nur bremsende Wirkung. Es muss also noch ein Antrieb vorhanden sein. Man spricht in diesem Zusammenhang von dunkler Energie. Eine Erklärung für diese Energie hat die Physik noch nicht.



Die Größen zur Beschreibung der Sterneigenschaften werden oft in Vielfachen der entsprechenden Größen der Sonne angegeben. Für die Sonne gilt:

Oberflächentemperatur  $T_0 = 5780 \text{ K}$ , Leuchtkraft  $L_0 = 3,85 \cdot 10^{26} \text{ W}$ , mittlerer Radius  $R_0 = 6,96 \cdot 10^5 \text{ km}$ , Masse  $M_0 = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ , mittlere Dichte  $\rho_0 = 1,409 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ .

Sterne unterscheiden sich in ihrer Leuchtkraft um mehrere Zehnerpotenzen:

$10^{-4} L_0 < L_{\text{Stem}} < 10^5 L_0$ . Die Oberflächentemperaturen liegen zwischen 3000 K und 30 000 K.

Im Hertzsprung-Russel-Diagramm (HRD) ist die Leuchtkraft in Abhängigkeit der Oberflächentemperatur (bzw. Spektralklasse) aufgetragen. Die Sternpunkte sind auf bestimmte Bereiche des HRD beschränkt. Die stark besetzte Diagonale heißt Hauptreihe. Oben links befinden sich die bläulich weißen Sterne hoher Leuchtkraft und hoher Temperatur. Die sonnenähnlichen gelben Sterne sind in der Mitte. Unten rechts sind die roten Zwerge, Sterne mit geringer Temperatur und geringer Leuchtkraft.

Oberhalb der Hauptreihe befinden sich die Riesensterne. Bei gleicher Leuchtkraft wie die entsprechenden Hauptreihensterne haben sie einen wesentlich größeren Radius ( $R_{\text{Stem}} > 10 R_0$ ). Riesensterne mit einer Leuchtkraft größer als  $1000 \cdot L_0$  heißen Überriesen.

Die Sterne unterhalb der Hauptreihe sind die weißen Zwerge, deren Radius ist etwa  $0,01 R_0$ .

Mit Hilfe des Stefan-Boltzmann'schen Gesetzes kann man eine Gesetzmäßigkeit zwischen dem Radius  $R$  eines Sternes, seiner Oberflächentemperatur  $T$  und seiner Leuchtkraft  $L$  herleiten. Es ergibt sich:

$$R = R_0 \sqrt{\frac{L}{L_0}} \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^2$$

Trägt man für die Hauptreihensterne den Logarithmus der Leuchtkraft  $L/L_0$  in Abhängigkeit vom Logarithmus der Masse  $M/M_0$  auf, so liegen die Punkte im Diagramm in guter Näherung auf einer Geraden mit der Steigung 3. Für Hauptreihensterne gilt die **Masse-Leuchtkraft-Beziehung**  $L/L_0 = (M/M_0)^3$ .

Die Zeit  $t_H$ , die ein Stern auf der Hauptreihe verbringt, heißt Lebensdauer. Sie gibt an, wie lange es etwa dauert, bis 10% seines Wasserstoff-Vorrates in Helium umgewandelt ist.

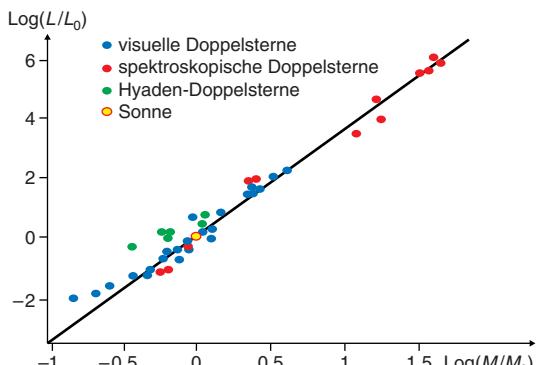
Die Lebensdauer  $t_H$  lässt sich durch folgende Überlegungen abschätzen:

- $t_H$  ist proportional zum Brennstoffvorrat, also zur Masse  $M$  des Sterns.

- $t_H$  ist antiproportional zur Energieabstrahlung und damit zur Leuchtkraft  $L$ .

Mit  $L \sim M^3$  folgt  $t_H \sim M/L \sim M/M^3 \sim 1/M^2$ . Damit ergibt sich relativ zur Sonne die Lebensdauer

$t_H = t_{H0} \cdot (M_0/M)^2$ . Geht man bei der Sonne von einer Lebensdauer von 8 Mrd. Jahren aus, dann hat ein Stern mit drei Sonnenmassen eine Lebensdauer von  $8 \cdot 10^9 \text{ a}/9 = 8,9 \cdot 10^8 \text{ a}$ .

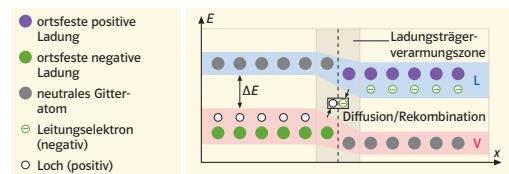


Kombiniert man einen n-dotierten und einen p-dotierten Halbleiter, so erhält man eine Diode. Dieser **p-n-Übergang** bestimmt die Wirkungsweise der Diode. Entlang der **Grenzschicht** eines p-n-Übergangs entsteht eine ladungsträgerarme Zone, da Elektronen aus dem n-Leiter in den p-Leiter und Löcher aus dem p-Leiter in den n-Leiter wandern. Im n-Leiter bildet sich eine positive Ladungsschicht, im p-Leiter eine negative Ladungsschicht, so dass ein elektrisches Feld entsteht. Dieses elektrische Feld verhindert, dass weitere Elektronen in den p-Leiter gelangen und somit wirkt der p-n-Übergang wie eine **Sperrschicht**. Außerdem führt das elektrische Feld zu einer Verschiebung der Bänder am p-n-Übergang.

Legt man an die Diode eine äußere Spannung  $U$  an, so kann man dies auf zwei Arten tun.

1. Möglichkeit: Der Pluspol liegt an der p-dotierten Schicht, der Minuspol an der n-dotierten Schicht.

Bei geringer Spannung fließt kein Strom, da das elektrische Feld in der Grenzschicht dem äußeren genwirkt. Erst ab einer bestimmten Spannung  $U_s$ , genannten Schwellenspannung, überwiegt das äußere Feld und die Verschiebung der Bänder wird aufgehoben. Nun können Elektronen aus dem Leitungsband der n-dotierten Schicht die Grenzschicht überwinden und wandern in das Leitungsband der p-dotierten Schicht. Die Elektronen rekombinieren mit den Löchern des Valenzbandes. Der Pluspol ersetzt die aufgefüllten Löcher und es erscheint so, als ob die Löcher aus dem Valenzband des p-dotierten Teils in das Valenzband des n-dotierten Teils laufen. Dort werden sie von

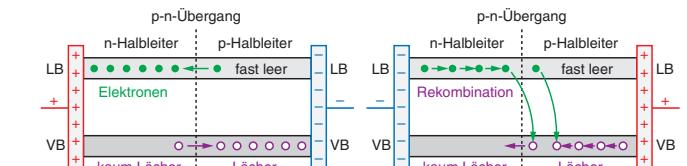


p-n-Übergang im Bandmodell

Feld entgeg-  
der soge-

Elektronen besetzt, die vom Minuspol der äußeren Spannungsquelle geliefert werden. Somit fließt ein Strom und die Diode ist in **Durchlassrichtung** gepolt.

2. Möglichkeit: Der Pluspol liegt an der n-dotierten Schicht, der Minuspol an der p-dotierten Schicht. Nun verstärkt das von außen angelegte elektrische Feld das elektrische Feld in der Grenzschicht. Beide Felder versuchen die wenigen Elektronen, die sich im Leitungsband der p-dotierten Schicht befinden, zum Minuspol zu ziehen. Sie wandern ohne Widerstand in das Leitungsband der n-dotierten Schicht. Da im Valenzband der n-dotierten Schicht fast keine Löcher vorhanden sind, fehlt es an geeigneten Ladungsträgern. Die p-n-Grenzschicht wird breiter. Die Diode ist in **Sperrrichtung** gepolt.



Strom ist vorhanden.  
Die Diode ist in  
**Durchlassrichtung** gepolt.

Kein Strom ist vorhanden.  
Die Diode ist in  
**Sperrrichtung** gepolt.

Verwendet man anstelle der Gleichspannung, die den Strom nur in einer Richtung durchlässt und somit die Diode wie ein Ventil wirken lässt, Wechselstrom, so entsteht ein pulsierender Gleichstrom und die Diode wird zum Gleichrichter.



Die geringe, von der Temperatur abhängige Eigenleitung ist für die Anwendung der Halbleiter zu gering, macht braucht Halbleiter mit höherer Leitfähigkeit. Dies kann man erreichen, indem man den Halbleiter gezielt verunreinigt, d.h. indem man Fremdatome in das Kristallgitter einbaut. Man nennt diese Vorgehensweise **Dotieren**. Dabei werden in den Halbleiter durch Diffusion oder Ionenbeschuss zusätzliche Ladungsträger eingefügt. Bei der Diffusion wird der Halbleiter, z.B. Silicium in einem Diffusionsofen durch Gaszufuhr erhitzt. Das zugeführte Gas enthält dabei die Fremdatome. Diese diffundieren in die Kristalloberfläche und bilden dotierte Gebiete. Beim Ionenbeschuss beschießt man den Halbleiter mit Elektronen, die den Halbleiter an den vorgesehenen Stellen dotieren.

Silicium und Germanium gehören zur IV. Hauptgruppe des Periodensystems. Zur Dotierung verwendet man Elemente der III. oder V. Hauptgruppe. Man unterscheidet zwischen **p- und n-Dotierung**.

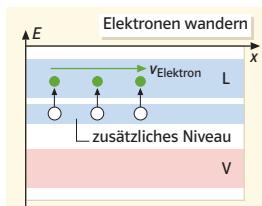
Bei der p-Dotierung verwendet man ein Element der III. Hauptgruppe, z.B. Bor, Gallium oder Aluminium, das den Platz eines Silicium-Atoms einnimmt. Das Fremdatom hat ein Elektron weniger, zurück bleibt ein Loch. Dieses Loch kann durch ein Elektron eines Nachbaratoms besetzt werden, wodurch wieder ein Loch entsteht, das wieder besetzt werden kann. Es entsteht eine sogenannte **Löcherleitung**, auch **p-Leitung** genannt. Fremdatome, die zur p-Dotierung verwendet werden, heißen auch **Akzeptoren**.

Bei der n-Dotierung hingegen verwendet man Elemente der V. Hauptgruppe, z.B. Phosphor oder Arsen. Das Fremdatom hat im Gegensatz zum Halbleiteratom ein Elektron mehr, das nicht gebunden werden kann und als freies Elektron zur Verfügung steht. Diese Art der Leitung nennt man **Elektronenleitung** oder **n-Leitung**. Fremdatome für die n-Dotierung nennt man **Donatoren**.

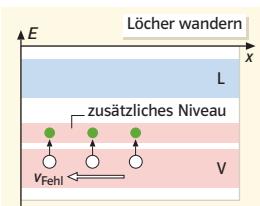
Mit dem Bändermodell lässt sich die Elektronen- und Löcherleitung folgendermaßen deuten:

**p-Dotierung:** Durch Dotierung mit einem Element der III. Hauptgruppe entstehen oberhalb des Valenzbandes zusätzliche leere Energieniveaus. Diese werden bei Zimmertemperatur (also bei geringer Energiezufuhr) durch Elektronen aus dem Valenzband vollständig besetzt. Dadurch entstehen im Valenzband Löcher und es erfolgt Löcherleitung. Legt man eine Spannung an den Halbleiter an, so fließen die Elektronen im Valenzband vom Minuspol in die Löcher und dann zum Pluspol. Die Löcher wandern somit vom Pluspol zum Minuspol.

**n-Dotierung:** Durch Dotierung mit einem Element der V. Hauptgruppe entstehen unterhalb des Leitungsbandes zusätzliche Energieniveaus. Bei Zimmertemperatur reicht die innere Energie nicht aus, um alle Elektronen, die sich in diesen Niveaus befinden, den Übergang ins Leitungsband zu ermöglichen. Legt man eine Spannung an den Halbleiter an, so fließen die Elektronen im Leitungsband zum Pluspol, während vom Minuspol neue Elektronen nachgezogen werden.



n-Dotierung: Elektronen erhöhen die Leitfähigkeit.



p-Dotierung: Fehlstellen erhöhen die Leitfähigkeit.

Die Leitfähigkeit von speziellen Halbleitern kann auch durch Temperaturerhöhung oder Temperaturverringerung sowie durch Bestrahlung mit Licht verändert werden. Man unterscheidet Heißleiter, Kaltleiter und Fotowiderstände.



Es gibt Stoffe, die den elektrischen Strom sehr gut leiten, und solche, die ihn gar nicht leiten. Gute Leiter sind die Metalle und Elektrolyte. Sehr schlechte Leiter, also **Isolatoren**, sind z.B. Plastik, Keramik und Glas. **Halbleiter** sind Stoffe, die sich bei tiefen Temperaturen wie Isolatoren und bei hohen Temperaturen wie Leiter verhalten. Der Grund liegt in ihrem spezifischen Widerstand. Dieser ist im Gegensatz zu Metallen sehr groß, nimmt aber mit steigender Temperatur ab. Der spezifische Widerstand ist abhängig von der Dichte und der Beweglichkeit der Ladungsträger ( $\rho = \frac{1}{n \cdot e \cdot \mu}$ ;  $n$ : Dichte der Ladungsträger;  $\mu$ : Beweglichkeit der Ladungsträger). Bei Halbleitern sind im Gegensatz zu Metallen die Ladungsträger beweglicher, die Dichte jedoch ist geringer. Erhöht man nun die Temperatur, so nimmt die Beweglichkeit der Ladungsträger ab, die Dichte nimmt jedoch sehr stark zu, so dass der spezifische Widerstand kleiner wird. Der spezifische Widerstand hängt bei Halbleitern zusätzlich von der Reinheit des Halbleiters ab. Beispiele für Halbleiter sind Germanium, Silizium, Selen und Tellur.

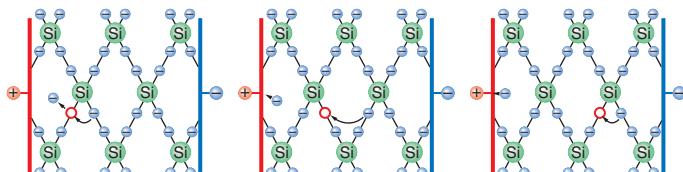
### Eigenleitung in Halbleitern

Die Eigenschaften eines Halbleiters erklären sich durch ihren atomaren Aufbau. Bei tiefen Temperaturen sind nahezu alle Elektronen an die Gitteratome gebunden. Führt man Energie in Form von Wärme oder Licht zu, so lösen sich weitere Elektronen aus ihren Bindungen und stehen als Ladungsträger zur Verfügung. Zurück bleibt jeweils eine **Elektronenfehlstelle**, auch als Loch bezeichnet. Dieses Loch wirkt wie eine positive Ladung, da die Stelle vorher neutral war. Nur können Nachbarelektronen zu dem entstandenen Loch wandern und es besetzen. Dadurch entsteht an einer anderen Stelle ein Loch, das wieder durch ein Elektron besetzt werden kann. So erhält man den Eindruck, als ob die Löcher durch den Halbleiter wandern und zwar in entgegengesetzter Richtung zu den Elektronen.

Man nennt die Entstehung der Löcher und der freien beweglichen Elektronen **Paarbildung**.

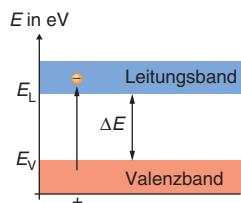
Der umgekehrte Vorgang heißt **Rekombination**.

Legt man eine Spannungsquelle an den Halbleiter, so bewegen sich die Löcher in Richtung des negativen Pols, die Elektronen in Richtung des positiven Pols.



Die Leitfähigkeit von Stoffen kann man mittels des **Bändermodells** verdeutlichen.

Dabei werden die Elektronen durch ihre Energiezustände beschrieben. Dicht benachbarte Energieniveaus bilden ein **Energieband**. Energieniveaus zwischen den Bändern können die Elektronen nicht annehmen. Das oberste, energiereichste Band nennt man **Valenzband V**, es ist vollständig mit Elektronen besetzt. Das darüber liegende Band ist nicht mehr vollständig mit Elektronen besetzt, es kann auch leer sein. Man nennt es **Leitungsband L**. Die Elektronen in diesem Band sind beweglich und dienen zur Leitfähigkeit.



Bei einem Halbleiter ist das Leitungsband bei 0 K leer. Bereits Zimmertemperatur reicht aus, um einige Elektronen aus dem Valenzband in das Leitungsband übergehen zu lassen. Wird die Temperatur größer, so gelangen immer mehr Elektronen in das Leitungsband und die Leitfähigkeit nimmt zu.



Erweitert man eine Diode um eine p-dotierte oder n-dotierte Schicht, so erhält man einen weiteren p-n-Übergang. Ein Bauelement mit zwei p-n-Übergängen nennt man einen **bipolaren Transistor**. Es gibt zwei Arten von bipolaren Transistoren, den npn- und den pnp-Transistor.

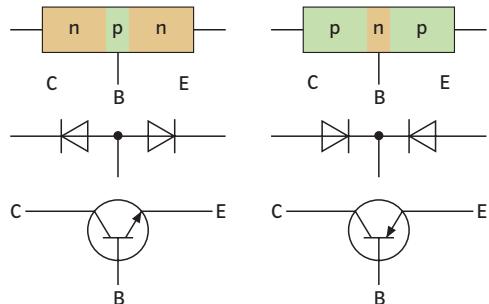
Im Vergleich zu den beiden äußeren Schichten ist die mittlere Schicht sehr dünn. Die mittlere Schicht nennt man **Basis** (B), die beiden äußeren Schichten **Kollektor** (C) und **Emitter** (E). Die einzelnen Schichten sind mit Anschlüssen versehen.

Jeweils die zwei Anschlüsse Emitter-Basis und Basis-Kollektor funktionieren wie eine Diode. Sie leiten in einer Richtung, während sie in der anderen sperren.

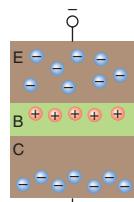
Bei einem Transistor handelt es sich um ein Bauelement, das den Strom verstärken soll oder als Schalter wirkt. Eine Diode funktioniert dagegen wie ein Gleichrichter.

### Funktionsweise

Im Folgenden beschränken wir uns auf einen npn-Transistor. Der pnp-Transistor funktioniert genauso, nur dass bei ihm die Polarität vertauscht ist, da die Schichten eine umgekehrte Reihenfolge aufweisen.

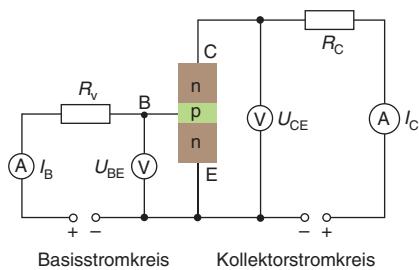


Transistoren: Aufbau und Schaltzeichen



Schließt man den Kollektor an den Pluspol und den Emitter an den Minuspol an, während man den Anschluss an die Basis offen lässt, so fließt kein Strom. Der Transistor wirkt wie eine Diode, die in Sperrrichtung gepolt ist.

Schaltet man zusätzlich die Basis und den Emitter in Durchlassrichtung, so fließt ab der Schwellenspannung  $U_{BE}$  ein Basisstrom  $I_B$ . Nun bewegen sich die Elektronen vom Emitter zur Basis. Da diese sehr dünn ist und das im Kollektor vorhandene elektrische Feld sehr groß ist, schaffen viele Elektronen den Übergang zum positiv geladenen Kollektor. Damit nicht die meisten der Elektronen über den Anschluss der Basis abfließen, muss die Basis sehr dünn sein. Es entsteht ein Strom, der Kollektorstrom  $I_C$ . Diesen Effekt nennt man **Transistor-Effekt**.



Basisstromkreis  
(Steuerstromkreis)

Kollektorstromkreis  
(Arbeitsstromkreis)

