a) $x \cdot (3x^2 + 4x + 10) = 3 \cdot (x^3 + 2)$ Ausmultiplizieren

$3x^3 + 4x^2 + 10x = 3x^3 + 6$ Zusammenfassen

$4x^2 + 10x - 6 = 0$

Die Lösungsformel für quadratische Gleichungen in der allgemeinen Form liefert

$x_{1/2} = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 + 4 \cdot 4 \cdot 6}}{2 \cdot 4} = \frac{-10 \pm 14}{8}$ und damit die Lösungen

$\mathbf{x_1 = -3}$ und $\mathbf{x_2 = \frac{1}{2}}$.

b) $2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$ Ausklammern

$2x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$2x = 0$ oder $x^2 - x - 2 = 0$

Daraus ergeben sich die Lösungen

$\mathbf{x_1 = 0}$; $\mathbf{x_2 = -1}$; $\mathbf{x_3 = 2}$.

a) $2x^4 - 20x^2 + 18 = 0$ Substitution: $x^2 = u$

$2u^2 - 20u + 18 = 0$ Lösungsformel

$u_1 = 1$ oder $u_2 = 9$ Rücksubstitution

$x^2 = 1$ oder $x^2 = 9$

Aus den beiden Gleichungen erhält man die Lösungen $\mathbf{x_1 = 1}$; $\mathbf{x_2 = -1}$; $\mathbf{x_3 = 3}$; $\mathbf{x_4 = -3}$.

b) Da $x = 1$ eine Lösung von $2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$ ist, kann man die Gleichung durch den Faktor $(x - 1)$ dividieren. Durch Polynomdivision erhält man $(2x^3 + 3x^2 - 3x - 2) : (x - 1) = 2x^2 + 5x + 2$.
Damit gilt $(x - 1) \cdot (2x^2 + 5x + 2) = 0$.

Die Gleichung $2x^2 + 5x + 2 = 0$ hat die Lösungen $-0{,}5$ und -2
(zu bestimmen mit der Lösungsformel).
Damit erhält man insgesamt die Lösungen $\mathbf{x_1 = 1}$; $\mathbf{x_2 = -0{,}5}$ und $\mathbf{x_3 = -2}$.

!

a) $\frac{4}{x+1} + 1 = \frac{6}{x}$; $D = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$ Multiplikation mit dem Hauptnenner $x \cdot (x + 1)$

$4x + x \cdot (x + 1) = 6 \cdot (x + 1)$ Vereinfachen

$x^2 - x - 6 = 0$ Anwenden der Lösungsformel

$$x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2}$$

$\mathbf{x_1 = 3; x_2 = -2}$

Da 3 und −2 in D liegen, sind dies die Lösungen der gegebenen Gleichung.

b) Die Definitionsmenge von f ist $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$. Die Bedingung $f(x) = 0$ führt auf die Gleichung

$-1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x-2} = 0$ Multiplikation mit dem Hauptnenner $x \cdot (x - 2)$

$-x \cdot (x - 2) + x - 2 - 6x = 0$ Vereinfachen

$x^2 + 3x + 2 = 0$ Anwenden der Lösungsformel

$x_1 = -2$; $x_2 = -1$

Da −2 und −1 in D liegen, sind $\mathbf{x_1 = -2}$; $\mathbf{x_2 = -1}$ die Nullstellen der Funktion f.

a) (Vergleich der Exponenten)

$3^{2x-3} = 27$

$3^{2x-3} = 3^3$ — Vergleich der Exponenten

$2x - 3 = 3$; $2x = 6$; $\mathbf{x = 3}$

b) (Gleichung logarithmieren)

$4 \cdot 2^x - 36 = 0$ — Vereinfachen

$2^x = 9$ — Logarithmieren

$x \cdot \log(2) = \log(9)$

$x = \frac{\log(9)}{\log(2)} \approx \mathbf{3{,}1699}$

c) (Substitution)

$4 \cdot 2^{2x} = 9 \cdot 2^{x+1} - 18$ — Auf eine Seite bringen und umformen

$4 \cdot (2^x)^2 - 9 \cdot 2^x \cdot 2^1 + 18 = 0$ — Substitution: $2^x = u$

$4u^2 - 18u + 18 = 0$ — Anwendung der Lösungsformel

$u_1 = \frac{3}{2}$; $u_2 = 3$ — Rücksubstitution

$2^x = \frac{3}{2}$; $2^x = 3$

$x_1 = \frac{\log\left(\frac{3}{2}\right)}{\log(2)} \approx \mathbf{0{,}5850}$; $x_2 = \frac{\log(3)}{\log(2)} \approx \mathbf{1{,}5850}$

a) $2 \cdot e^{3x-5} = 8$	Vereinfachen
$e^{3x-5} = 4$	„Logarithmieren“ mit dem nat. Log.
$3x - 5 = \ln(4)$	Auflösen der linearen Gleichung nach x
$3x = \ln(4) + 5$	
$x = \frac{\ln(4) + 5}{3} \approx \mathbf{2{,}1288}$	

b) $5 - 4e^{-0{,}5x} = e^{0{,}5x}$	Substitution: $e^{0{,}5x} = u$
$5 - \frac{4}{u} = u$	Multiplizieren mit u und umformen
$u^2 - 5u + 4 = 0$	Lösungsformel anwenden
$u_{1/2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2}$; $u_1 = 4$; $u_2 = 1$	Rücksubstitution

$e^{0{,}5x} = 4$ liefert $x_1 = 2 \cdot \ln(4) \approx 2{,}7726$; $e^{0{,}5x} = 1$ liefert $x_2 = 2 \cdot \ln(1) = 0$.

Mit $g(2 \cdot \ln(4)) = e^{0{,}5 \cdot 2 \cdot \ln(4)} = 4$ und $g(0) = 1$ ergeben sich die Schnittpunkte **$S_1(2 \cdot \ln(4) \mid 4)$** und **$S_2(0 \mid 1)$**.

a) $3 \cdot \cos(x) - 6 \cdot \cos^2(x) = 0$ Ausklammern

$3 \cdot \cos(x) \cdot (1 - 2 \cdot \cos(x)) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$3 \cdot \cos(x) = 0$ oder $1 - 2 \cdot \cos(x) = 0$

Es ist $\cos(x) = 0$ für $\mathbf{x_1 = \frac{1}{2}\pi}$; $\mathbf{x_2 = \frac{3}{2}\pi}$; es ist $\cos(x) = 0{,}5$ für $\mathbf{x_3 = \frac{1}{3}\pi}$; $\mathbf{x_4 = \frac{5}{3}\pi}$.

b) $2 \cdot \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$ Substitution: $\sin(x) = z$

$2z^2 + z - 1 = 0$ Lösungsformel anwenden

$z_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4}$; $z_1 = -1$; $z_2 = \frac{1}{2}$ Rücksubstitution

$\sin(x) = -1$ ergibt $\mathbf{x_1 = \frac{3}{2}\pi}$; $\sin(x) = \frac{1}{2}$ ergibt $\mathbf{x_2 = \frac{1}{6}\pi}$; $\mathbf{x_3 = \frac{5}{6}\pi}$ in $[0; 2\pi]$.

a)

$$
\begin{array}{rcll}
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 5 & [1] \\
2x_1 + 6x_2 - 7x_3 &=& 12 & [2] \\
x_1 + 4x_2 - 4x_3 &=& 3 & [3] \\
\hline
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 5 & [1] \\
2x_2 - x_3 &=& -2 & [4] = [3] - [1] \\
-2x_2 + x_3 &=& 6 & [5] = [2] - 2\cdot[3] \\
\hline
x_1 + 2x_2 - 3x_3 &=& 5 & [1] \\
2x_2 - x_3 &=& -2 & [4] \\
0 &=& 4 & [6] = [4] + [5]
\end{array}
$$

Aus [6] folgt:
Das LGS hat keine Lösung.

b)

$$
\begin{array}{rcll}
2x_1 + 3x_2 - x_3 &=& 27 & [1] \\
-x_2 + 2x_3 &=& -7 & [2] \\
2x_1 + 2x_2 + 3x_3 &=& 16 & [3] \\
\hline
2x_1 + 3x_2 - x_3 &=& 27 & [1] \\
-x_2 + 2x_3 &=& -7 & [2] \\
x_2 - 4x_3 &=& 11 & [4] = [1] - [3] \\
\hline
2x_1 + 3x_2 - x_3 &=& 27 & [1] \\
-x_2 + 2x_3 &=& -7 & [2] \\
-2x_3 &=& 4 & [5] = [2] + [4]
\end{array}
$$

Aus [5] folgt $\mathbf{x_3 = -2}$, aus [2] dann $\mathbf{x_2 = 3}$, aus [1] dann $\mathbf{x_1 = 8}$.

a)

$$
\begin{array}{rl}
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 & [1] \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7 & [2] \\
x_1 - 2x_2 + x_3 = 5 & [3] \\
\hline
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 & [1] \\
5x_2 + x_3 = -3 & [4] = [1] - [3] \\
5x_2 + x_3 = -3 & [5] = 2 \cdot [1] - [2] \\
\hline
x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 & [1] \\
5x_2 + x_3 = -3 & [4] \\
0 = 0 & [6] = [4] - [5]
\end{array}
$$

Der Gleichung [6] entnimmt man, das
das LGS **unendlich viele Lösungen** hat.
Setzt man $\mathbf{x_2 = t}$, so folgt $\mathbf{x_3 = -3 - 5t}$; $\mathbf{x_1 = 8 + 7t}$.

b)

$$
\begin{array}{rl}
x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 & [1] \\
2x_1 + x_2 - 3x_3 = 2 & [2] \\
\hline
x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 & [1] \\
x_2 - x_3 = 0 & [3] = 2 \cdot [1] - [2]
\end{array}
$$

Das LGS hat **unendlich viele Lösungen**.
Setzt man $\mathbf{x_3 = t}$, so folgt $\mathbf{x_2 = t}$; $\mathbf{x_1 = 1 + t}$.

a) Zeichnung: Siehe Fig.

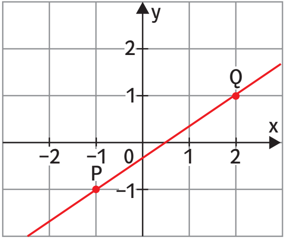
Steigung: $m = \frac{1-(-1)}{2-(-1)} = \frac{2}{3}$

Gleichung: $y = mx + c$

$y = \frac{2}{3}x + c$

Punktprobe für Q(2 | 1): $1 = \frac{2}{3} \cdot 2 + c$; $c = 1 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$

Damit ist $\mathbf{y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}}$ eine Gleichung für g.



b) Punktprobe für R(40 | 26):
Da die Koordinaten von R die Gleichung von g nicht erfüllen, **liegt R nicht auf g**.

c) Aus $\tan(\alpha) = m = \frac{2}{3}$ folgt $\boldsymbol{\alpha \approx 33{,}69°}$.

d) Die Bedingung für eine Nullstelle ist $y = 0$.

$\frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ ist erfüllt für $x = \frac{1}{2}$.

Schnittpunkt mit der x-Achse: $\mathbf{N\left(\frac{1}{2} \middle| 0\right)}$.

a) Die Gerade g durch die Punkte P und Q hat die Steigung (vgl. Karte 9)

$m_1 = \frac{-13{,}5 - 9}{-0{,}5 - (-4{,}5)} = \frac{-22{,}5}{4} = -\frac{45}{8}$.

Eine Gerade orthogonal zu g hat die Steigung $m_2 = -\frac{1}{m_1} = \frac{8}{45}$.

Für die Gerade h orthogonal zu g durch P gilt: h: $y = \frac{8}{45}x + c$.

Punktprobe für $P(-4{,}5\,|\,9)$ ergibt $9 = \frac{8}{45} \cdot (-4{,}5) + c$. Hieraus folgt $c = 9{,}8$.

Damit ist $\mathbf{y = \frac{8}{45}x + 9{,}8}$ eine Gleichung für h.

b) Für die Länge der Strecke PQ ergibt sich:

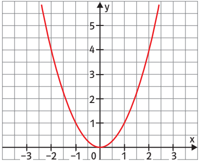
$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2} \\ &= \sqrt{(-0{,}5 - (-4{,}5))^2 + (-13{,}5 - 9)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + (-22{,}5)^2} = \sqrt{\frac{2089}{4}} \approx \mathbf{22{,}9}.\end{aligned}$$

c) Für die Mitte M der Strecke PQ ergibt sich:

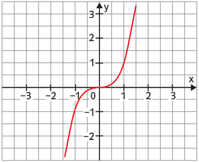
$x_M = \frac{1}{2}(-4{,}5 + (-0{,}5)) = -2{,}5$; $y_M = \frac{1}{2}(9 + (-13{,}5)) = -2{,}25$.

Damit gilt: $\mathbf{M(-2{,}5\,|\,-2{,}25)}$.

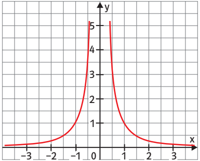
a) Graph von f mit n = 2



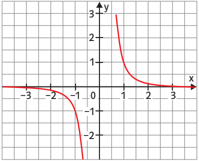
Graph von f mit n = 3



b) Graph von f mit n = −2



Graph von f mit n = −3



Eigenschaften positives n: keine Definitionslücke
negatives n: Pol mit (n ungerade), Pol ohne (n gerade) Vorzeichenwechsel
gerades n: Symmetrie bezüglich der y-Achse
ungerades n: Symmetrie bezüglich des Ursprungs

!

a) Nullstellen:

$$\frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x = 0$$

$$x\left(\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2}\right) = 0$$

$x_1 = 0$; $\quad \frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{9}{2} = 0$

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 9}}{2} = 3$$

Verlauf des Graphen:
Die Nullstellen sind 0 und 3 (doppelte Nullstelle); die höchste Potenz ist 3.
Der Graph kommt im 4. Quadranten von −∞,
geht durch den Ursprung,
hat einen Hochpunkt im 1. Quadranten,
berührt die x-Achse im 1. Quadranten an der Stelle 3 von oben,
geht gegen +∞ für x gegen +∞.

b) Nullstellen:
$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
Durch Raten erhält man $x_1 = 1$.
Polynomdivision:

$$\begin{array}{l}
(x^3 + 2x^2 - x - 2) : (x - 1) = x^2 + 3x + 2 \\
\underline{-(x^3 - x^2)} \\
\quad 3x^2 - x \\
\quad \underline{-(3x^2 - 3x)} \\
\qquad 2x - 2 \\
\qquad \underline{-(2x - 2)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Durch Probieren oder mit der Lösungsformel erhält man $\mathbf{x_2 = -1}$ und $\mathbf{x_3 = -2}$.
Verlauf des Graphen:
Die höchste Potenz ist 3.
Der Graph kommt im 4. Quadranten von −∞,
schneidet die x-Achse in drei Stellen und geht gegen +∞ für x gegen +∞.

a) Definitionsmenge: $\mathbf{D_f} = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{-2}\}$.
Verhalten für $x \to -2$: Für $x \to -2$ und $x < -2$ gilt:
$x + 2 \to 0$ und $x + 2 < 0$, folglich $\frac{1}{x+2} \to -\infty$.
Für $x \to -2$ und $x > -2$ gilt: $x + 2 \to 0$ und $x + 2 > 0$,
folglich $\frac{1}{x+2} \to +\infty$ (Pol mit Vorzeichenwechsel).
Gleichung der senkrechten Asymptote: $\mathbf{x = -2}$.
Graph: Siehe Fig. 1.

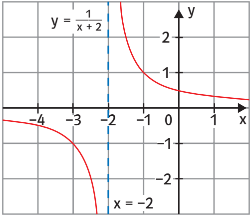


Fig. 1

b) Die Funktion g ist an der Stelle $x_0 = -2$ nicht definiert.
Definitionsmenge: $\mathbf{D_g} = \mathbb{R} \setminus \{\mathbf{-2}\}$
Es ist $g(x) = x - 2$ für $x \neq -2$ und $\lim\limits_{x \to -2} (x - 2) = -4$.

Der Graph von g hat eine **hebbare Definitionslücke** an der Stelle −2. Graph: Siehe Fig. 2.

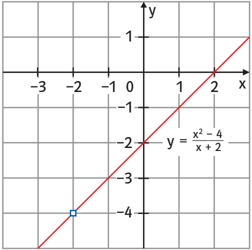


Fig. 2

a) Es ist $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. Der Zähler wird an der Stelle $-\frac{1}{2}$ nicht null.
Senkrechte Asymptote: $\mathbf{x = -\frac{1}{2}}$.

$$f(x) = \frac{4x - 3}{2x + 1} = \frac{4 - \frac{3}{x}}{2 + \frac{1}{x}}$$

Also ist die Gerade mit der Gleichung **y = 2** waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$.

b) Es ist $f(x) = \frac{3x - 1}{2(x^2 - 2)} = \frac{3x - 1}{2(x + \sqrt{2}) \cdot (x - \sqrt{2})}$

Der Zähler wird an den Stellen $+\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ nicht null.
Senkrechte Asymptoten: $\mathbf{x = +\sqrt{2}}$; $\mathbf{x = -\sqrt{2}}$.

$$f(x) = \frac{3x - 1}{2x^2 - 4} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}}{2 - \frac{4}{x^2}}$$

Also ist die x-Achse mit der Gleichung **y = 0** waagrechte Asymptote für $x \to \pm\infty$.

c) Es ist $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 2} = \frac{x(x + 2) \cdot (x - 2)}{x^2 + 2}$. Der Zähler wird null, aber der Nenner wird nie null.

Es gibt keine senkrechte Asymptote.
Polynomdivision ergibt: $f(x) = x - \frac{6x}{x^2 + 2}$.

Also ist die erste Winkelhalbierende mit der Gleichung **y = x** schiefe Asymptote für $x \to \pm\infty$.

!

Mit Hilfe der Polynomdivision kann man den Funktionsterm von f als gemischten Bruch schreiben:

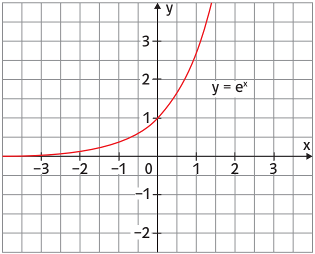
$$f(x) = \frac{x^4 + 3x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2} = x^2 + 3x - 2 + \frac{-6x + 4}{x^2 + 2}.$$

Polynomdivision:

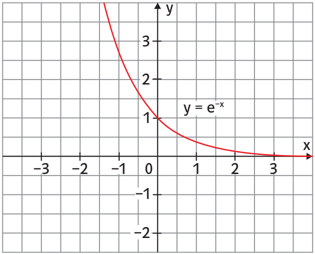
$$\begin{array}{l}
(x^4 + 3x^3 + 2x - 1) : (x^2 + 2) = x^2 + 3x - 2 + \frac{-4x + 3}{x^2 + 2} \\
\underline{-(x^4 + 2x^2)} \\
\qquad 3x^3 - 2x^2 \\
\quad \underline{-(3x^3 + 6x)} \\
\qquad\quad -2x^2 - 6x + 2x - 1 \\
\qquad \underline{-(-2x^2 - 4) \qquad\qquad} \\
\qquad\qquad\quad -4x + 3
\end{array}$$

Da für $x \to \pm\infty$ der Ausdruck $\frac{-4x + 3}{x^2 + 2}$ gegen 0 strebt (vgl. Karte 14), nähert sich der Graph von f für $x \to \pm\infty$ an die verschobene Normalparabel g mit $\mathbf{g(x) = x^2 + 3x - 2}$.

a) Graph von f_1



Graph von f_2



b) Eigenschaften von f_1:

- f_1 ist streng monoton steigend.
- Die Funktionswerte von f_1 sind für alle x positiv.
- (einziger) gemeinsamer Punkt mit den Koordinatenachsen: $P(0|1)$
- Der Graph von f_1 besitzt eine waagrechte Asymptote für $x \rightarrow -\infty$ mit der Gleichung $y = 0$.
- In jedem Punkt des Graphen entspricht die Tangentensteigung an den Graphen genau dem zugehörigen y-Wert.

c) Der Graph von f_2 entsteht aus dem von f_1 durch Spiegelung an der y-Achse.

a) Streckung des Graphen von f mit dem Faktor 5 von der x-Achse in y-Richtung.
Anschließende Verschiebung in positive y-Richtung („nach oben“) um 4 Einheiten.

$\mathbf{g(x) = 5 \cdot e^x + 4}$

b) Verschiebung um 2 Einheiten in positive x-Richtung („nach rechts“).

$\mathbf{g(x) = e^{x-2}}$

c) Stauchung des Graphen von f von der y-Achse in x-Richtung auf $\frac{1}{3}$.

$\mathbf{g(x) = e^{3x}}$

d) Man formt zunächst den Term um:

$\mathbf{g(x) = e^{\frac{1}{2}x+2} = e^{\frac{1}{2}(x+4)}}$

Stauchung des Graphen von f von der y-Achse in x-Richtung mit Streckfaktor 2;
Verschiebung um 4 Einheiten nach links.

a) Skizze: Siehe Fig. 1.
Punkte im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$:
Der Graph von f hat im Intervall $0 \leqq x \leqq 2\pi$ den Hochpunkt $H\left(\frac{\pi}{2}\middle|1\right)$ und den Tiefpunkt $T\left(\frac{3\pi}{2}\middle|-1\right)$.
Die Schnittpunkte mit der x-Achse sind $N_1(0|0)$, $N_2(\pi|0)$ und $N_3(2\pi|0)$.
Punkte für $x \in \mathbb{R}$:
Hochpunkte: $H_k\left(\frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \middle| 1\right)$; $k \in \mathbb{Z}$
Tiefpunkte: $T_k\left(\frac{3}{2}\pi + k \cdot 2\pi \middle| -1\right)$; $k \in \mathbb{Z}$
Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_k(k \cdot \pi | 0)$; $k \in \mathbb{Z}$

b) Der Graph von g entsteht aus dem Graphen von f durch Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links (Fig. 2).

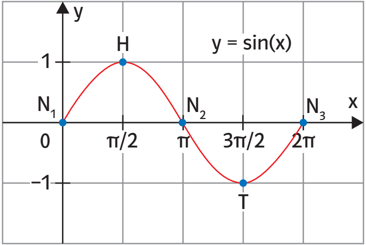


Fig. 1

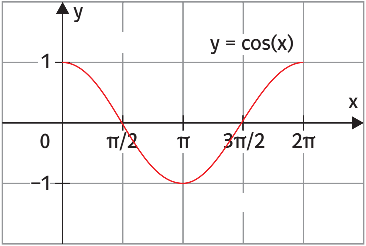
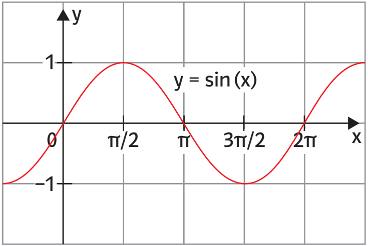


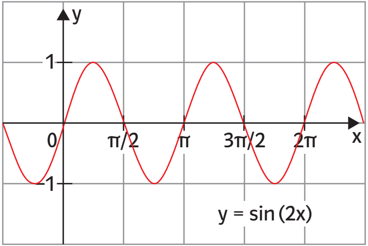
Fig. 2

a) Graph von f



f besitzt die Periode 2π

Graph von g



g besitzt die Periode π

b) Umformung des Terms von h liefert $h(x) = 2 \cdot \cos(0{,}25 \cdot (x + 2))$
Amplitude 2; Periode $\frac{2\pi}{0{,}25} = 8\pi$; Wertebereich $[-2; 2]$

Entstehung des Graphen aus dem der Kosinusfunktion:
1) Streckung in y-Richtung um den Faktor 2
2) Sreckung in x-Richtung um den Faktor 4
3) Verschiebung in x-Richtung um 2 nach links.

a) $f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} \cdot (x - \pi)\right) + 1$

b) $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{4}\pi \cdot (x + 1)\right)$

c) $f(x) = -\cos\left(\frac{1}{2} \cdot (x - 1)\right)$

d) $f(x) = \sin\left(\pi \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)\right) - 1$

!

a) Man ersetzt im Term x durch −x und erhält $4 \cdot (-x)^6 + (-x)^4 + 3 \cdot (-x)^2 - 2 = 4x^6 + x^4 + 3x^2 - 2 = f(x)$.
Die Bedingung $f(-x) = f(x)$ ist erfüllt. Damit ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.
Eine andere Möglichkeit zur Entscheidung über Symmetrie ergibt sich aus einem Satz über die Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen (vgl. Wissen).

b) Man ersetzt im Term x durch −x und erhält $-3 \cdot (-x)^3 + 2 \cdot (-x)^4 - (-x) = +3x^3 + 2x^4 + x$.
Die Bedingung $f(-x) = f(x)$ ist nicht erfüllt. Der Graph ist nicht achsensymmetrisch zur y-Achse.
Der Graph ist auch nicht symmetrisch zum Ursprung (vgl. Karte 22).

c) Man ersetzt im Term x durch −x und erhält $\frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x)$.
Die Bedingung $f(-x) = f(x)$ ist erfüllt. Damit ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse (vgl. Wissen).

d) Man ersetzt im Term x durch −x und erhält (vgl. Formelsammlung)
$\cos(-x) = +\cos(x) = f(x)$.
Die Bedingung $f(-x) = f(x)$ ist erfüllt. Damit ist der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse.

!

a) Man ersetzt im Term x durch −x und erhält
$2 \cdot (-x)^5 - \frac{1}{2} \cdot (-x)^3 + 3 \cdot (-x) = -2x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 3x = -\left(2x^5 - \frac{1}{2}x^3 + 3x\right) = -f(x)$.
Die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ ist erfüllt. Damit ist der Graph **punktsymmetrisch zum Ursprung**.
Eine andere Möglichkeit zur Entscheidung über Symmetrie ergibt sich aus einem Satz über die Symmetrie bei ganzrationalen Funktionen (vgl. Wissen).

b) Man ersetzt im Term x durch −x und erhält
$-(-x)^3 + 2 \cdot (-x)^2 + 10 = x^3 + 2x^2 + 10$.
Dieser Term ist weder $f(x)$ noch $-f(x)$. Eine Symmetrie ist also **nicht erkennbar**.

c) Man ersetzt im Term x durch −x und erhält
$(-x) - \frac{1}{(-x)} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x)$.
Die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ ist erfüllt. Damit ist der Graph **punktsymmetrisch zum Ursprung**.

d) Man ersetzt im Term x durch −x und erhält (vgl. Formelsammlung)
$\sin(-x) = -\sin(x)$.
Die Bedingung $f(-x) = -f(x)$ ist erfüllt. Damit ist der Graph **punktsymmetrisch zum Ursprung**.

a) Wegen $x^2 + 3x + 3 \neq 0$ für $x \in \mathbb{R}$ ist $D = \mathbb{R}$ die Definitionsmenge von f.
Für alle $-1{,}5 + h \in \mathbb{R}$ und $-1{,}5 - h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(-1{,}5 + h) = \frac{3}{(-1{,}5 + h)^2 + 3(-1{,}5 + h) + 3} = \frac{3}{h^2 - 3h + 2{,}25 - 4{,}5 + 3h + 3} = \frac{3}{h^2 + 0{,}75},$$

$$f(-1{,}5 - h) = \frac{3}{(-1{,}5 - h)^2 + 3(-1{,}5 - h) + 3} = \frac{3}{h^2 + 3h + 2{,}25 - 4{,}5 - 3h + 3} = \frac{3}{h^2 + 0{,}75},$$

und somit $f(-1{,}5 + h) = f(-1{,}5 - h)$.
Der Graph der Funktion f ist also **achsensymmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = -1{,}5$**.

b) Die Definitionsmenge von f ist $D = \mathbb{R}$.
Für alle $1 + h \in \mathbb{R}$ und $1 - h \in \mathbb{R}$ gilt:

$$f(1 + h) = (1 + h)^3 - 3(1 + h)^2 = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3(1 + 2h + h^2) = 1 + 3h + 3h^2 + h^3 - 3 - 6h - 3h^2$$
$$= -2 - 3h + h^3,$$

$$f(1 - h) = (1 - h)^3 - 3(1 - h)^2 = 1 - 3h + 3h^2 - h^3 - 3(1 - 2h + h^2) = 1 - 3h + 3h^2 - h^3 - 3 + 6h - 3h^2$$
$$= -2 + 3h - h^3,$$

und damit $\frac{1}{2}(f(1 + h) + f(1 - h)) = \frac{1}{2}((-2 - 3h + h^3) + (-2 + 3h - h^3)) = -2$.

Der Graph der Funktion f ist also **punktsymmetrisch zum Punkt Z(1|−2)**.

a) Der Gehzeit t (in h) wird die Höhe h (in m) über dem Meeresspiegel zugeordnet:
h: $t \mapsto h(t)$.

b) Die Änderungsrate beschreibt die **durchschnittliche Höhenzunahme** (nach dem Gipfel Höhenabnahme) in einem Zeitintervall, das innerhalb von 0 und 11,5 h (Definitionsbereich) liegen muss.

c) Änderungsrate: $\frac{h(7{,}5) - h(2)}{7{,}5 - 2} = \frac{3674 - 2558}{5{,}5} = \frac{1116}{5{,}5} \approx 202{,}9.$

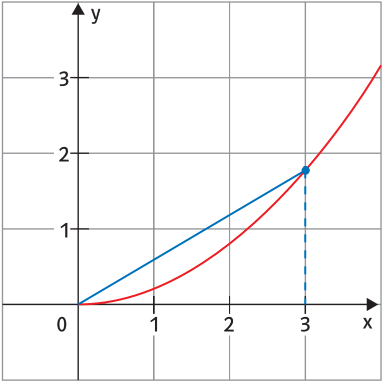
Die **durchschnittliche** Höhenzunahme beträgt **ca. 203 m pro h**.

d) $\lim\limits_{t \to 7} \frac{h(t) - h(7)}{t - 7} \approx \frac{h(7{,}5) - h(6{,}7)}{7{,}5 - 6{,}7} = \frac{3674 - 3413}{0{,}8} = \frac{261}{0{,}8} \approx 326.$

Die **momentane** Höhenzunahme bei 7 h (in der Venedigerscharte) beträgt **ca. 326 m pro h**.

!

a) x ist die **horizontale Strecke in m** (Breite),
$f(x)$ gibt die **Höhe über dem tiefsten Punkt** an.
Graph: Siehe Fig.



b) Änderungsrate in [0; 3]:

$$\frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = 0{,}6$$

Die durchschnittliche Höhenzunahme auf dem Streckenabschnitt von 0 m bis 3 m **beträgt 0,6 Höhenmeter pro Meter**. Am Graphen entspricht dieser Wert der **Steigung der Sekante** durch die Punkte $O(0\,|\,0)$ und $P(3\,|\,1{,}8)$.

c) Momentane Änderungsrate:
Für $x \neq 2$ gilt:

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 2} \frac{0{,}2x^2 - 0{,}2 \cdot 2^2}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{0{,}2(x^2 - 2^2)}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{0{,}2(x + 2)(x - 2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} 0{,}2(x + 2) = 0{,}8$$

Die momentane Höhenzunahme nach 2 m **beträgt 0,8 Höhenmeter pro Meter**.

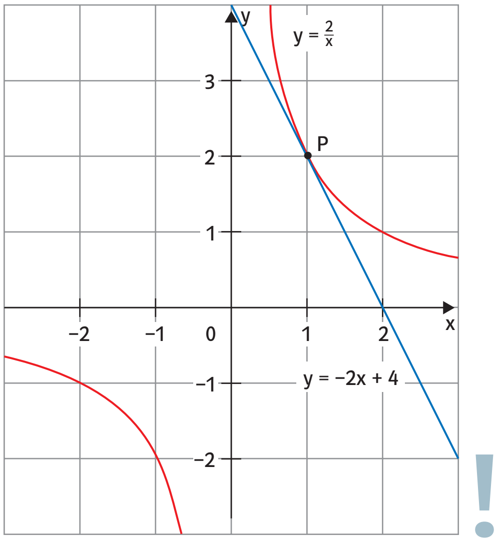
a) *Differenzenquotient m(x):*

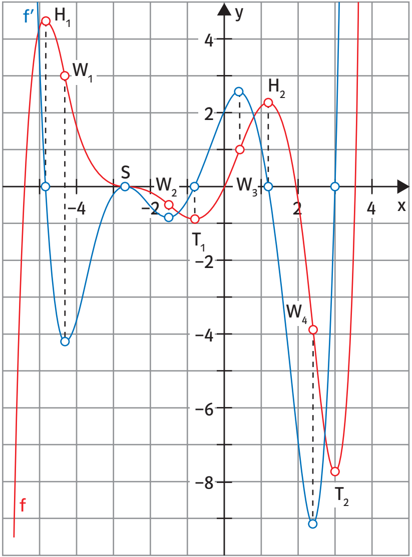
$$m(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\frac{2}{x} - 2}{x - 1} = \frac{\frac{2 - 2x}{x}}{x - 1} = \frac{2(1 - x)}{x(x - 1)} = \frac{-2}{x}$$

Grenzwert von m(x) für x → 1:

$$f'(1) = \lim_{x \to 1} m(x) = \frac{-2}{1} = \mathbf{-2}$$

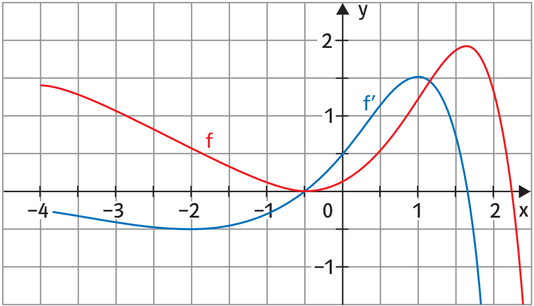
b) Siehe Fig.





f′
H1
W1
H2
S
W2
W3
T1
W4
T2
f
y
x
4
2
−2
−4
−6
−8
−4
−2
2
4

(1) Die Aussage ist wahr. f′ hat an der Stelle −0,5 einen Vorzeichenwechsel von − nach + .
(2) Die Aussage ist falsch. Für $x < -1$ ist $f'(x) < 0$. Also ist f in diesem Bereich monoton fallend.
(3) Die Aussage ist falsch. $f'(1)$ ist ein Maximum, deshalb hat f an dieser Stelle einen Wendepunkt.
(4) Die Aussage ist unentscheidbar. Da am Graphen von f′ keine Aussage über Funktionswerte von f getroffen werden kann. (Additive Konstante in der Stammfunktion).
(5) Die Aussage ist wahr. Wegen $f'(0) = 0{,}5$ hat die Steigung der Tangente an der Stelle 0 den Wert 0,5. Damit ist die Tangente parallel zur angegebenen Geraden.



Die Figur zeigt einen **möglichen** Graphen von f.
Alle in y-Richtung verschobenen Graphen von f wären auch richtig.

a) (Regeln)

$f(x) = 2x^4 + 3x + 7$ Potenz-, Summen- und Faktorregel

$\mathbf{f'(x) = 8x^3 + 3}$

b) (Grundfunktionen)

$f(x) = -\frac{5}{3}x^3 - x + \sin(x) + e^x$ Ableitungen von Grundfunktionen

$\mathbf{f'(x) = -5x^2 - 1 + \cos(x) + e^x}$

c) (Potenzregel bei rationalen Hochzahlen)

$f(x) = \frac{2}{x} - 3 \cdot \sqrt{x}$ Umschreiben erleichtert das Ableiten

$= 2 \cdot x^{-1} - 3 \cdot x^{\frac{1}{2}}$

$f'(x) = -2 \cdot x^{-2} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

$\mathbf{= -\frac{2}{x^2} - \frac{3}{2\sqrt{x}}}$

!

a) $f(x) = \left(\frac{4}{3}x^3 - 2\right) \cdot e^x$

$f'(x) = 4x^2 \cdot e^x + \left(\frac{4}{3}x^3 - 2\right) \cdot e^x$

$\quad = \boldsymbol{\left(\frac{4}{3}x^3 + 4x^2 - 2\right) \cdot e^x}$

$u(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2; \quad v(x) = e^x$

$u'(x) = 4x^2; \quad v'(x) = e^x$

Anwendung der Produktregel

b) $f(x) = (x^2 + x) \cdot \cos(x)$

$\boldsymbol{f'(x) = (2x + 1) \cdot \cos(x) - (x^2 + x) \cdot \sin(x)}$

$u(x) = x^2 + x; \quad v(x) = \cos x$

$u'(x) = 2x + 1; \quad v'(x) = -\sin x$

Anwendung der Produktregel

c) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 8}$

$f'(x) = \frac{3 \cdot (x^2 - 8) - 3x \cdot 2x}{(x^2 - 8)^2}$

$\quad = \boldsymbol{-\frac{3x^2 + 24}{(x^2 - 8)^2}}$

$u(x) = 3x; \quad v(x) = x^2 - 8$

$u'(x) = 3; \quad v'(x) = 2x$

Anwendung der Quotientenregel

!

a) $f(x) = 6 \cdot (3x - 2)^4$

$f'(x) = 6 \cdot 4 \cdot (3x - 2)^3 \cdot 3$

$\quad = \mathbf{72 \cdot (3x - 2)^3}$

Äußere Funktion: $u(x) = 6x^4$
innere Funktion: $v(x) = 3x - 2$

b) $f(x) = -4 \cdot e^{2x^3 + 3}$

$f'(x) = -4 \cdot e^{2x^3 + 3} \cdot 6x^2$

$\quad = \mathbf{-24x^2 \cdot e^{2x^3 + 3}}$

Äußere Funktion: $u(x) = -4 \cdot e^x$
innere Funktion: $v(x) = 2x^3 + 3$

c) $f(x) = \sin(4x + 1) + \cos(3x^2 + x)$

$f'(x) = [\cos(4x + 1)] \cdot 4 - [\sin(3x^2 + x)] \cdot (6x + 1)$

$\quad = \mathbf{4\cos(4x + 1) - 6x\sin(3x^2 + x) - \sin(3x^2 + x)}$

Summenregel und Kettenregel mit den äußeren Funktionen $u(x) = \sin(x)$ bzw. $u(x) = \cos(x)$

!

a) $f(x) = x^2 \cdot (6 - x^3)^2$

$u(x) = x^2; \quad u'(x) = 2x^1$

$v(x) = (6 - x^3)^2; \quad v'(x) = 2 \cdot (6 - x^3)^1 \cdot (-3x^2)$

Anwendung von Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = 2x \cdot (6 - x^3)^2 + x^2 \cdot 2 \cdot (6 - x^3) \cdot (-3x^2)$$
$$= 2x \cdot (6 - x^3)^2 - 2x \cdot (6 - x^3) \cdot 3x^3$$

Umformen und zusammenfassen

$$= 2x(6 - x^3) \cdot (6 - x^3 - 3x^3)$$
$$= \mathbf{4x(6 - x^3)(3 - 2x^3)}$$

b) $f(x) = (x - x^2) \cdot e^{2x+1}$

$u(x) = x - x^2; \quad u'(x) = 1 - 2x$

$v(x) = e^{2x+1}; \quad v'(x) = 2 \cdot e^{2x+1}$

Anwendung von Produkt- und Kettenregel

$$f'(x) = (1 - 2x) \cdot e^{2x+1} + (x - x^2) \cdot 2e^{2x+1}$$
$$= e^{2x+1} \cdot (1 - 2x + 2x - 2x^2)$$
$$= \mathbf{(1 - 2x^2) \cdot e^{2x+1}}$$

c) $f(x) = \frac{1 - 2x}{(2 - x)^2}$

$u(x) = 1 - 2x; \quad u'(x) = -2$

$v(x) = (2 - x)^2; \quad v'(x) = 2 \cdot (2 - x) \cdot (-1)$

Anwendung von Quotienten- und Kettenregel

$$f'(x) = \frac{-2 \cdot (2 - x)^2 - (1 - 2x) \cdot 2 \cdot (2 - x) \cdot (-1)}{(2 - x)^4} = \frac{-2 \cdot (2 - x) + 2 \cdot (1 - 2x)}{(2 - x)^3}$$
$$= -\frac{\mathbf{2 \cdot (1 + x)}}{\mathbf{(2 - x)^3}}$$

!

Für $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$ ist $f'(x) = x - 1$.

a) $B(5\,|\,f(5))$, also ist $f(5) = 6$ und $m = f'(5) = 4$.

Aus der Punktsteigungsform $m = f'(x_B) = \frac{y - f(x_B)}{x - x_B}$ erhält man $y = f'(x_B) \cdot (x - x_B) + f(x_B)$.

Eingesetzt ergibt sich: $\mathbf{y = 4x - 14}$.

b) Steigung $m = 1$, d.h. aus $f'(x_B) = x_B - 1 = 1$ erhält man $x_B = 2$.
Da $f(2) = -1{,}5$ ist, liefert die Punktsteigungsform die Tangentengleichung
$\mathbf{y = x - 3{,}5}$.

c) Die Tangente mit Berührpunkt $B(x_B\,|\,f(x_B))$ hat die Gleichung $y = f'(x_B) \cdot (x - x_B) + f(x_B)$.
Der Punkt $P(0\,|\,-9{,}5)$ liegt auf der Tangente. Setzt man die Koordinaten von P, $f(x_B)$ und $f'(x_B)$ ein, erhält man eine quadratische Gleichung für x_B:

$-9{,}5 = (x_B - 1)(0 - x_B) + \frac{1}{2}x_B^2 - x_B - \frac{3}{2}$, vereinfacht $x^2 - 16 = 0$.

Dann ist $x_B = 4$ oder $x_B = -4$; die Berührpunkte sind $B_1(4\,|\,2{,}5)$ und $B_2(-4\,|\,10{,}5)$.
Tangentengleichungen:
$\mathbf{y_1 = 3x - 9{,}5}$ und $\mathbf{y_2 = -5x - 9{,}5}$.

!

a) $f(x) = 2\sqrt{x}$ und $f(4) = 4$. Mit der Potenzregel ist $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

Steigung der Tangente in $P(4|4)$: $m_t = f'(4) = \frac{1}{2}$.

Mit der Punktsteigungsform (vgl. Karte 33) ergibt sich $y = \frac{1}{2}(x - 4) + 4$ bzw. **t:** $\mathbf{y = \frac{1}{2}x + 2}$.

Ist m_n die Steigung der Normalen, gilt: $m_t \cdot m_n = -1$; somit ist: $m_n = -\frac{1}{m_t} = -2$.

Mit der Punktsteigungsform ergibt sich $y = -2 \cdot (x - 4) + 4$ bzw. **n:** $\mathbf{y = -2x + 12}$.

b) Aus n: $y = -x + 3$ folgt $m_n = -1$.

Bestimmung der Schnittpunkte von n und f:

$2\sqrt{x} = -x + 3,$	Quadrieren
$4x = x^2 - 6x + 9$	Umformen
$x^2 - 10x + 9 = 0$	Lösungsformel
$x = 1$ oder $x = 9$	

Die Probe in der Ausgangsgleichung (nötig, da quadrieren keine Äquivalenzumformung ist) liefert nur $\mathbf{x = 1}$ als Lösung.

Es ist $m_t = f'(1) = 1$. Da $m_t \cdot m_n = -1$ gelten muss, zeigt der Vergleich mit $m_n = -1$, dass n eine **Normale** an den Graphen von f **im Punkt P(1|2)** ist.

!

Mit $f(x) = 2x^2 - x$ und $g_a(x) = x^3 - ax$ ist $f'(x) = 4x - 1$ und $g_a'(x) = 3x^2 - a$.

1. Bedingung: Die Funktionswerte an den Berührstellen sind gleich.

$$f(x) = g_a(x)$$
$$x^3 - 2x^2 + (1 - a)x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 2x + 1 - a) = 0$$
$$\mathbf{x_1 = 0}$$
$$x_{2/3} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 + 4a}}{2}$$
$$\mathbf{x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{a}}.$$

2. Bedingung: Die Steigungen an den Berührstellen sind gleich.

(i) $x_1 = 0$: $f'(0) = g_a'(0)$ führt auf $-1 = -a$, also $\mathbf{a_1 = 1}$;
zugehöriger Berührpunkt ist $\mathbf{B_1(0\,|\,0)}$.

(ii) $x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{a}$: $f'(1 \pm \sqrt{a}) = g_a'(1 \pm \sqrt{a})$ führt auf $4 \cdot (1 \pm \sqrt{a}) - 1 = 3 \cdot (1 \pm \sqrt{a})^2 - a$.
Umgeformt und vereinfacht ergibt sich $a = -\sqrt{a}$ bzw. $a = \sqrt{a}$.
Damit ist $\mathbf{a_2 = 0}$ eine weitere Lösung;
zugehöriger Berührpunkt ist $\mathbf{B_2(1\,|\,1)}$.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$ Ableitung bestimmen

$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x$

Bed: $f'(x) = 0$

$x^3 - x^2 - 2x = 0$ Ausklammern

$x \cdot (x^2 - x - 2) = 0$ Satz vom Nullprodukt

$\mathbf{x_1 = 0}$ oder $x^2 - x - 2 = 0$ Lösungsformel

$x_{2/3} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ weitere Lösungen

$\mathbf{x_2 = -1}$; $\mathbf{x_3 = 2}$.

An den Stellen −1; 0; 2 wechselt f′ das Vorzeichen.

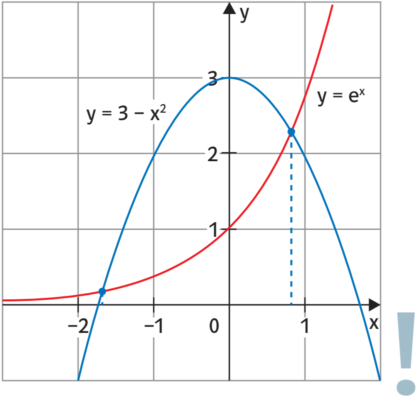
Für $x < -1$ ist $f'(x) < 0$, also ist **f für $x < -1$ streng monoton fallend**,
für $-1 < x < 0$ ist $f'(x) > 0$, also ist **f für $-1 < x < 0$ streng monoton steigend**,
für $0 < x < 2$ ist $f'(x) < 0$, also ist **f für $0 < x < 2$ streng monoton fallend**,
für $x > 2$ ist $f'(x) > 0$, also ist **f für $x > 2$ streng monoton steigend**.

!

Es gilt die Iterationsvorschrift mit Startwert x_0: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, $n \in \mathbb{N}$. (*)

a) $f(x) = x^3 + 3x - 6$; $f'(x) = 3x^2 + 3$. Mit $x_0 = 2$, $f(2) = 8$ und $f'(2) = 15$ gilt mit (*):
$x_1 = 1{,}46667$; $x_2 = 1{,}30218$: $x_3 = 1{,}28801$; $x_4 = 1{,}28791$; $x_5 = 1{,}28791$.
Die Nullstelle von f(x) ist auf 5 Dezimalen gerundet $\mathbf{x \approx 1{,}28791}$.

b) Die 2 Schnittstellen erhält man aus den Nullstellen von $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Es ist
$f(x) = e^x + x^2 - 3$ und $f'(x) = e^x + 2x$.
1. Stelle: Startwert sei $x_0 = 1$ (vgl. Fig.).
Damit ergibt sich mit (*):
$x_1 = 0{,}847766$, $x_2 = 0{,}834581$; $x_3 = 0{,}834487$; $x_4 = 0{,}834487$.
Mit $f_2(x_4) \approx 2{,}304$ erhält man $\mathbf{S_1(0{,}834 \mid 2{,}304)}$.
2. Stelle: Startwert sei $x_0 = -1$. Damit sind
$x_1 = -2$; $x_2 = -1{,}70623$;
$x_3 = -1{,}67752$;
$x_4 = -1{,}67723$;
$x_5 = -1{,}67723$.
Mit $f_2(x_5) \approx 0{,}187$ erhält man $\mathbf{S_2(-1{,}677 \mid 0{,}187)}$.

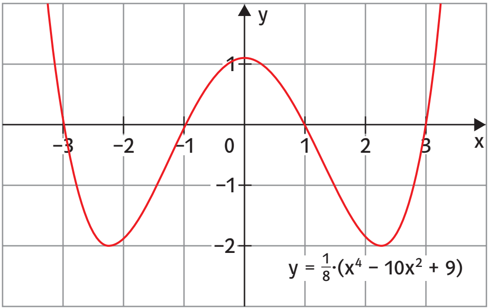


$f(x) = \frac{1}{8} \cdot (x^4 - 10x^2 + 9)$

Ableitungen: $f'(x) = \frac{1}{2}(x^3 - 5x)$, $f''(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 5)$,
$f'''(x) = 3x$

Symmetrie: Der Term enthält nur gerade Hochzahlen; der Graph ist damit **symmetrisch zur y-Achse**.

Schnittpunkte mit den Achsen:
i) y-Achse: $f(0) = \frac{9}{8}$; $\mathbf{Y\left(0 \mid \frac{9}{8}\right)}$
ii) x-Achse: $f(x) = 0$ führt auf die Gleichung $\frac{1}{8}(x^4 - 10x^2 + 9) = 0$ mit den Lösungen $x_{1/2} = \pm 3$; $x_{3/4} = \pm 1$; somit $N_1(-3 \mid 0)$; $N_2(-1 \mid 0)$; $N_3(1 \mid 0)$; $N_4(3 \mid 0)$.



Extrempunkte:
Es gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$, d.h. $\frac{1}{2}(x^3 - 5x) = 0$ führt zur Gleichung $x \cdot (x^2 - 5) = 0$ und damit zu den Lösung $x_1 = 0$ und $x_{2/3} = \pm\sqrt{5}$.
Einsetzen in f'': $f''(0) < 0$, also Maximum; $f(0) = \frac{9}{8} \approx 1{,}12$; Hochpunkt: $\mathbf{H(0 \mid 1{,}12)}$
$f''(\pm\sqrt{5}) > 0$, also Minimum; $f(\pm\sqrt{5}) = -2$; Tiefpunkte $\mathbf{T_1(-\sqrt{5} \mid -2)}$; $\mathbf{T_2(\sqrt{5} \mid -2)}$.

Wendepunkte:
$f'''(x) = 0$, d.h. $\frac{1}{2}(3x^2 - 5) = 0$ ergibt die Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}}$. Es ist $f'''\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3}}\right) \neq 0 \approx 0{,}61$;
Wendepunkte $\mathbf{W_1(-1{,}29 \mid -0{,}61)}$, $\mathbf{W_2(1{,}29 \mid -0{,}61)}$.

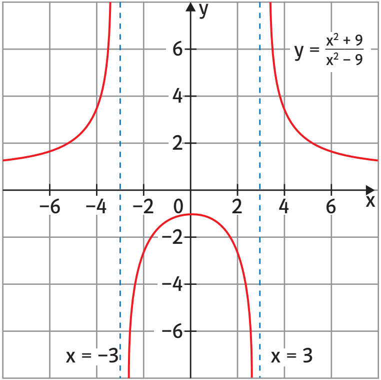
$f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 9}$, $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; +3\}$

Ableitungen: $f''(x) = \frac{-36x}{(x^2 - 9)^2}$, $f'(x) = \frac{108 \cdot (x^2 + 3)}{(x^2 - 9)^3}$

Asymptoten: **$x = -3$** (VZW von + nach −)

$x = 3$ (VZW von − nach +)

Waagrechte Asymptote: **$y = 0$**



Symmetrie: Es ist $f(-x) = f(x)$;
der Graph ist **symmetrisch zur y-Achse**.

Schnittpunkte mit den Achsen:

i) y-Achse: $f(0) = -1$; **Y (0| −1)**

ii) x-Achse: $f(x) = 0$ hat keine Lösung, also gibt es **keine Nullstellen**.

Extrempunkte: Es gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$, d.h. $f'(x) = \frac{-36x}{(x^2 - 9)^2}$
führt zur Gleichung $-36x = 0$ und damit zu der Lösung $x_1 = 0$.
Einsetzen in f'': $f''(0) < 0$, also Maximum; $f(0) = -1$; Hochpunkt: **H (0 | −1)**

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ hat keine Lösung, also gibt es **keine Wendepunkte**.

$f(x) = (2x - 3) \cdot e^{x+1}$

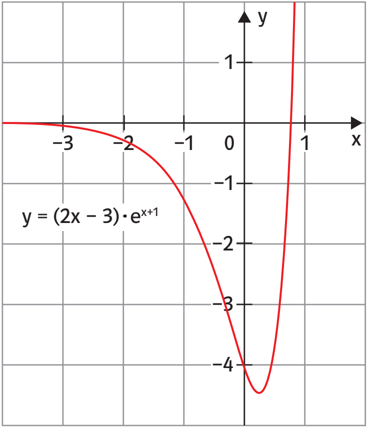
Ableitungen: $f'(x) = (2x - 1) \cdot e^{x+1}$, $f''(x) = (2x + 1) \cdot e^{x+1}$;
$f'''(x) = (2x + 3) \cdot e^{x+1}$

Asymptoten:
Für $x \to +\infty$ gilt: $f(x) \to +\infty$; für $x \to -\infty$ gilt: $f(x) \to 0$, also ist **$y = 0$** waagrechte Asymptote.

Schnittpunkte mit den Achsen:
i) y-Achse: $f(0) = -3e$; **Y(0 | −3e)**
ii) x-Achse: $(2x - 3) \cdot e^{x+1} = 0$ hat die Lösung $x_1 = 1{,}5$; **N(1,5 | 0)**.

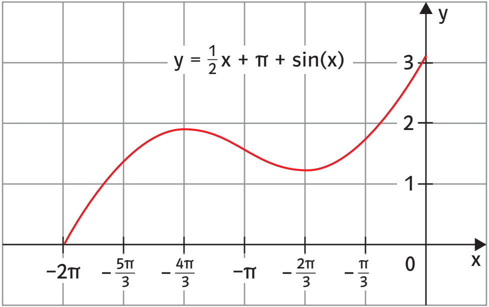
Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$;
$(2x - 1) \cdot e^{x+1} = 0$ führt auf $x_2 = 0{,}5$.
Wegen $f''(0{,}5) = 2 \cdot e^{1{,}5} > 0$ erhält man ein Minimum.
Mit $f(0{,}5) = -2 \cdot e^{1{,}5} \approx -8{,}96$ ergibt sich der Tiefpunkt T**(0,5 | −8,96)**.

Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$; $(2x + 1) \cdot e^{x+1} = 0$ liefert $x_3 = -0{,}5$. Da $f'''(-0{,}5) \neq 0$ und $f(-0{,}5) = -4 \cdot e^{0{,}5} \approx -6{,}59$ ist, erhält man den Wendepunkt **W(−0,5 | −6,59)**.



!

Nachweis:
$\mathbf{f(-2\pi)} = \frac{1}{2} \cdot (-2\pi) + \pi + \sin(-2\pi) = -\pi + \pi + 0 = \mathbf{0}$

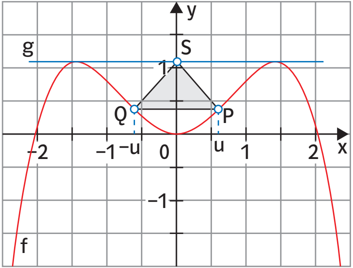


Ableitungen:
$f'(x) = \frac{1}{2} + \cos(x)$; $f''(x) = -\sin(x)$; $f'''(x) = -\cos(x)$

Extrempunkte:
Aus $f'(x) = 0$ folgt $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ und hieraus
$x_1 = -\frac{2}{3}\pi$; $x_2 = -\frac{4}{3}\pi$.
Weiterhin ist
$f(x_1) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{3}\pi\right) + \pi + \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 1{,}23$;
$f''(x_1) = -\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) < 0$;
$f(x_2) = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{4}{3}\pi\right) + \pi + \sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) = \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 1{,}91$; $f''(x_2) = -\sin\left(-\frac{4}{3}\pi\right) > 0$.
$T\left(-\frac{2}{3}\pi \,\middle|\, \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \approx$ **T (−2,09 | 1,23)** ist **Tiefpunkt**; $H\left(-\frac{4}{3}\pi \,\middle|\, \frac{1}{3}\pi + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right) \approx$ **H (−4,19 | 1,91)** ein **Hochpunkt**.

Wendepunkte:
Aus $f''(x) = 0$ folgt $-\sin(x) = 0$ und hieraus $x_1 = 0$; $x_2 = -\pi$; $x_3 = -2\pi$.
Die Stellen 0 und -2π entfallen, da Wendepunkte für Umgebungen definiert sind.
$f(-\pi) = \frac{1}{2} \cdot (-\pi) + \pi + \sin(-\pi) = \frac{1}{2}\pi$; $f'''(-\pi) = -\cos(-\pi) \neq 0$; $\mathbf{W\left(-\pi \,\middle|\, \frac{1}{2}\pi\right)}$ ist **Wendepunkt**.

a) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^2$; $f'(x) = -x^3 - 2x$; $f''(x) = -3x^2 - 2$
Hochpunkte: $\mathbf{H_1(-\sqrt{2}\,|\,1)}$ und $\mathbf{H_2(\sqrt{2}\,|\,1)}$. Tiefpunkt: $\mathbf{T(0\,|\,0)}$



b) Mit $P(u\,|\,f(u))$, $Q(-u\,|\,f(u))$ und $S(0\,|\,1)$ und $u > 0$
ergibt sich: Grundseite: $\overline{PQ} = 2\cdot u$; Höhe: $h = 1 - f(u) = 1 + \frac{1}{4}u^4 - u^2$.
Damit ist $A(u) = \frac{1}{2}\cdot 2u\cdot\left(\frac{1}{4}u^4 - u^2 + 1\right) = \mathbf{\frac{1}{4}u^5 - u^3 + u}$.

Zur Bestimmung der Extrema bildet man $A'(u) = \frac{5}{4}u^4 - 3u^2 + 1$
und $A''(u) = 5u^3 - 6u$.

Aus $A'(u) = 0$ folgt $\frac{4}{5}u^4 - 3u^2 + 1 = 0$ und mit $u^2 = z$ erhält
man $5z^2 - 12z + 4 = 0$.

Die Lösungsformel liefert $z_1 = 2$; $z_2 = \frac{2}{5}$ und damit die möglichen Lösungen $u_{1/2} = \pm\sqrt{2}$ und $u_{3/4} = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$.

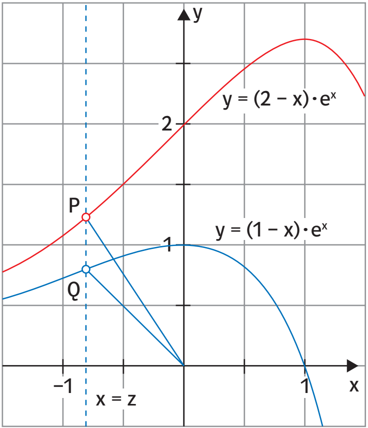
Da u positiv und $u_{1/2}$ nicht zwischen den Hochpunkten liegt, bleibt als einzige Lösung $\mathbf{u = \sqrt{\frac{2}{5}}}$.

Da $u''\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) < 0$, ergibt sich ein Maximum. Mit $f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{9}{25}$ ist $P\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\,\middle|\,\frac{9}{25}\right)$ und $Q\left(-\sqrt{\frac{2}{5}}\,\middle|\,\frac{9}{25}\right)$.

Der Flächeninhalt ist $A\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right) = \frac{4}{100}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{2}{5}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} + \sqrt{\frac{2}{5}} \approx \mathbf{0{,}40}$.

Bestimmung des Flächeninhaltes A(z) des Dreiecks OPQ:
Es ist $f'(x) = -1 \cdot e^x + (2-x) \cdot e^x = (1-x) \cdot e^x$.
Die Verbindungsstrecke der Punkte P und Q hat als Grundseite des Dreiecks OPQ die Länge $f(z) - f'(z) = (2-z)e^z - (1-z)e^z = e^z$.
Da das Dreieck OPQ die Höhe $-z$ hat, ergibt sich für den Flächeninhalt:

$A(z) = \frac{1}{2}(-z)(f(z) - f'(z)) = \mathbf{-\frac{1}{2} z \cdot e^z}$.



Extremstellen von A:
Man erhält mit der Produktregel

$A'(z) = -\frac{1}{2}e^z - \frac{1}{2}ze^z = -\frac{1}{2}(1+z)e^z$,

$A''(z) = -\frac{1}{2}e^z - \frac{1}{2}(1+z)e^z = -\frac{1}{2}(2+z)e^z$.

Aus $A'(z) = 0$ folgt $z = -1$ wegen $e^z > 0$.
Da $A''(-1) = -\frac{1}{2}e^{-1} < 0$ ist, hat A an der Stelle −1 ein relatives Maximum.
Da aber $A(z) \to 0$ für $z \to -\infty$ gilt, liegt an der **Stelle −1** auch das **absolute Maximum** von A.

Der **maximale Flächeninhalt** ist $A(-1) = -\frac{1}{2}(-1)e^{-1} = \frac{1}{2e} \approx \mathbf{0{,}184}$.

Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot c + d$; $f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$; $f''(x) = 6a \cdot x + 2b$

Bedingungen:

P(0 | −2):	$f(0) = -2$	$\Rightarrow$	$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 + d = -2$	[1]
Hochpunkt bei x = 1:	$f'(1) = 0$	$\Rightarrow$	$3a \cdot 1 + 2b \cdot 1 + c = 0$	[2]
Wendepunkt bei x = 2:	$f''(2) = 0$	$\Rightarrow$	$6a \cdot 2 + 2b = 0$	[3]
Steigung bei x =2 ist −1,5:	$f'(2) = -1{,}5$	$\Rightarrow$	$3a \cdot 4 + 2b \cdot 2 + c = -1{,}5$	[4]

Aus [1] folgt d = −2. Vereinfachen und ordnen von [2] − [4] führt auf das LGS

$$\begin{aligned} 3a + 2b + c &= 0 \\ 12a + 2b \quad &= 0 \\ 12a + 4b + c &= -1{,}5 \end{aligned} \quad \text{bzw.} \quad \begin{aligned} 3a + 2b + c &= 0 \\ 12a + 2b \quad &= 0 \\ -3a \quad &= -1{,}5. \end{aligned}$$

Aus diesem LGS erhalt man $a = 0{,}5$; $b = -3$; $c = 4{,}5$.

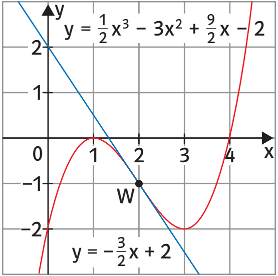
Somit gilt: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 2$

Überprüfung der Bedingungen (Probe):

$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$; $f''(x) = 3x - 6$; $f'''(x) = 3$.

Wegen $f''(1) = -3 < 0$ und $f'''(2) = 3 \neq 0$ sind H(1 | 0) Hochpunkt und W(2 | −1) Wendepunkt.

Ergebnis: $\mathbf{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}x - 2}$



a) *Wert für t:* Punktprobe für $A(1\,|\,0)$ liefert: $\frac{1}{1} - \frac{t}{1} = 0$. Hieraus folgt $\mathbf{t = 1}$.

b) *Extrempunkte:* $f_t(x) = \frac{1}{x} - \frac{t}{x^2}$; $f_t'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2t}{x^3}$; $f_t''(x) = \frac{2}{x^3} - \frac{6t}{x^4}$

Es gilt $f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$.

Die Bedingung $f_t'(x) = 0$ führt auf die Gleichung $-\frac{1}{x^2} + \frac{2t}{x^3}$ bzw. $-x + 2t = 0$ mit der Lösung $x_1 = 2t$.

Da $f_t''(x_1) = -\frac{1}{8t^3} < 0$ wegen $t > 0$, ergibt sich ein Maximum.

Mit $f_t(2t) = \frac{1}{4t}$ gilt für den Hochpunkt: $\mathbf{H_t\left(2t\,\middle|\,\frac{1}{4t}\right)}$ mit $t > 0$.

c) *Zielfunktion:* Für den Umfang des Rechtecks gilt:

$U(t) = 2 \cdot \left(2t + \frac{1}{4t}\right)$ mit $t > 0$.

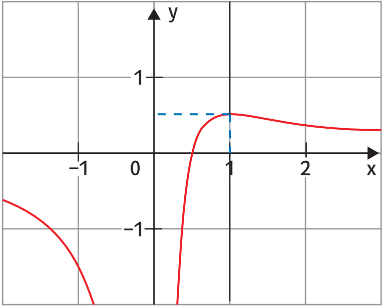
$U'(t) = 4 - \frac{1}{2t^2}$; $U''(t) = \frac{1}{t^3}$

Aus $U'(t) = 0$ ergibt sich $2 - \frac{1}{t^2} = 0$ mit der Lösung $t_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{2}}$.

Wegen $t > 0$ gilt nur $t_1 = +\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{2}}$ und es ist

$U''\left(+\sqrt{\frac{1}{4}\sqrt{2}}\right) = 16 \cdot \sqrt{2} > 0$.

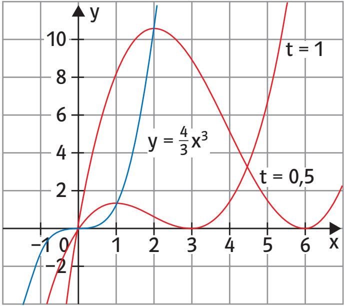
Somit ist $U(t)$ **minimal** für $t_1 = \mathbf{\frac{1}{4}\sqrt{2}}$.



Ableitungen: $f_t(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{t}x^2 + \frac{3}{t^2}x$; $f_t'(x) = x^2 - \frac{4}{t}x + \frac{3}{t^2}$; $f_t''(x) = 2x - \frac{4}{t}$

Extrempunkte:
Es gilt $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$.
Die Bedingung $f'(x) = 0$ führt auf die Gleichung $x^2 - \frac{4}{t}x + \frac{3}{t^2} = 0$ bzw. $t^2x^2 - 4tx + 3 = 0$
mit den Lösungen $x_1 = \frac{3}{t}$; $x_2 = \frac{1}{t}$.
Da $f_t''(x_1) = \frac{2}{t} > 0$, ergibt sich ein Minimum.
Mit $f_t\left(\frac{3}{t}\right) = 0$ ist $\mathbf{T_t}\left(\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{t}} \middle| \mathbf{0}\right)$.
Da $f_t''(x_2) = -\frac{2}{t} < 0$, ergibt sich ein Maximum.
Mit $f_t\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{4}{3t^3}$ ist $\mathbf{H_t}\left(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{t}} \middle| \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3t^3}}\right)$.

Ortslinie aller Hochpunkte:
Um die Ortslinie der Hochpunkte zu bestimmen, wird der Parameter t aus $x = \frac{1}{t}$ und $y = \frac{4}{3t^3}$ eliminiert.
Aus $x = \frac{1}{t}$ folgt $t = \frac{1}{x}$. Dann ist $y = \frac{4}{3}x^3$.
Also liegen die Hochpunkte von K_t auf der Ortslinie mit der Gleichung $\mathbf{y = \frac{4}{3}x^3}$.



a) Es ist $f(0) = 20 - 17 \cdot e^{-0{,}1 \cdot 0} = 20 - 17 = 3$
Bei Entnahme hatte die Flüssigkeit eine Temperatur von **3 °C**.

b) Für $t \to \infty$ geht $f(t) \to 20$.
Langfristig hat die Flüssigkeit eine Temperatur von **20 °C**.

c) Die Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeit erwärmt, ist zu dem Zeitpunkt am größten, an dem die Änderungsrate der Temperatur maximal ist.

Es ist $f'(t) = -17 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t} \cdot (-0{,}1) = 1{,}7 \cdot e^{-0{,}1 \cdot t}$.

Für $t \geq 0$ ist $f'(t)$ streng monoton fallend.
Also ist bei **Entnahme aus dem Kühlschrank** die Geschwindigkeit, mit der sich die Flüssigkeit erwärmt, am größten.

!

Bestimmung von k:
Aus $h_1(t) = 0{,}18 \cdot e^{kt}$ erhält man $h_1(0) = 0{,}18$ und $h_1(4) = 0{,}18 \cdot e^{4k}$. Wenn also die Pflanze in den ersten 4 Monaten um 0,62 wächst, ergibt sich $0{,}18 \cdot e^{4k} - 0{,}18 = 0{,}62$ bzw. $e^{4k} = \frac{40}{9}$ und hieraus $k = \frac{1}{4} \cdot \ln\left(\frac{40}{9}\right) \approx 0{,}3729$.

Also gilt: $\mathbf{h_1(t) = 0{,}18 \cdot e^{0{,}3729 \cdot t}}$.

Errechnete Höhe der Pflanze nach 6 Monaten:
Mit h_1 ergibt sich nach 6 Monaten eine Höhe von $h_1(6) = 0{,}18 \cdot e^{0{,}3729 \cdot 6} \approx 1{,}69$, d.h. die **Pflanze wäre 1,69 m hoch**.

Bestimmung von a und b:
Aus $h_2(t) = a - b \cdot e^{0{,}373 \cdot t}$ erhält man $h_2(4) = a - b \cdot e^{-0{,}373 \cdot 4} = 0{,}8$ und $h_2(6) = a - b \cdot e^{-0{,}373 \cdot 6} = 1{,}38$
Hieraus folgt $(a - b \cdot e^{-0{,}373 \cdot 6}) - (a - b \cdot e^{-0{,}373 \cdot 4}) = 1{,}38 - 0{,}80$ und somit $b = \frac{0{,}58}{e^{-0{,}373 \cdot 4} - e^{-0{,}373 \cdot 6}} \approx 4{,}9048$.

Dann ist $a = 0{,}80 + b \cdot e^{-0{,}373 \cdot 4} \approx 1{,}9032$. Also gilt $\mathbf{a \approx 1{,}90}$ und $\mathbf{b \approx 4{,}90}$ und folglich
$\mathbf{h_2(t) = 1{,}90 - 4{,}90 \cdot e^{-0{,}373 \cdot t}}$ **für $\mathbf{t \geqq 4}$**.

Langfristige Höhe der Pflanze:
Für $t \to +\infty$ strebt $h_2(t) \to 1{,}90$, d.h. die Pflanze erreicht **langfristig eine Höhe von 1,90 m**.

a) Aus $f(t) = \frac{9}{1 + 8 \cdot e^{-t}}$ folgt $\mathbf{f(0) = 1}$.

b) $f(t) = 7{,}5$ führt vereinfacht auf $e^t = 40$ mit der Lösung $t = \ln(40) \approx 3{,}689$.
Im **Laufe des 4. Tages** wird die Kresse eine Höhe von 7,5 cm erreichen.

c) Schnellstes Wachstum bedeutet größte Wachstumsgeschwindigkeit; dies wiederum bedeutet größte Änderungsrate.

$f'(t) = \frac{-9 \cdot 8 \cdot e^{-t} \cdot (-1)}{(1 + 8 \cdot e^{-t})^2} = \frac{72 \cdot e^{-t}}{(1 + 8 \cdot e^{-t})^2}$; $\quad f''(t) = \frac{-72 \cdot e^{-t} \cdot (1 + 8 \cdot e^{-t})^2 - 72 \cdot e^{-t} \cdot 2 \cdot (1 + 8 \cdot e^{-t})}{(1 + 8 \cdot e^{-t})^4} = \frac{-72 \cdot e^{-t} \cdot (1 - 8 \cdot e^{-t})}{1 + 8 \cdot e^{-t})^3}$

$f''(t) = 0$ führt auf $1 - 8 \cdot e^{-t} = 0$, d.h. $e^t = 8$ und das zur Lösung $t = \ln(8) \approx 2{,}07$.
Vorzeichenwechsel der zweiten Ableitung:
Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $-72 \cdot e^{-t} < 0$ und $(1 + 8 \cdot e^{-t})^3 > 0$.
Für $x < \ln(8)$ ist $1 - 8 \cdot e^{-t} < 0$ und für $x > \ln(8)$ ist $1 - 8 \cdot e^{-t} > 0$.
Also wechselt $f''(t)$ an der Stelle $\ln(8)$ das Vorzeichen. Damit ist $\ln(8)$ eine Wendestelle.
Nach **fast genau 2 Tagen** wächst die Kresse am schnellsten.

Es ist $f'(\ln(8)) = \frac{72 \cdot e^{-\ln(8)}}{(1 + 8 \cdot e^{-\ln(8)})^2} = \frac{9}{2^2} = \frac{9}{4} = 2{,}25$.

Die Wachstumsgeschwindigkeit ist dann **2,25 cm pro Tag**.

d) Für $t \to \infty$ geht $f(t) \to 9$. Also ist die Wachstumsgrenze bei diesem Modell **9 cm**.

a) $\mathbf{F(x) = \frac{1}{4}x^4}$ oder $F(x) + c$ für jede beliebige Zahl c.

b) Es ist $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{x^2} - 2 + \sqrt{x}$

$= \frac{1}{2}x^2 + 5 \cdot x^{-2} - 2 + x^{\frac{1}{2}}.$

Dann folgt: $\mathbf{G(x)} = \frac{1}{2 \cdot 3}x^3 + \frac{5}{-1}x^{-1} - 2x + \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}}$

$= \mathbf{\frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{x} - 2x + \frac{2}{3}x\sqrt{x}}$ oder $G(x) + c$ für jede beliebige Zahl c.

c) $\mathbf{H(x) = \ln|x|}$ oder $H(x) + c$ für jede beliebige Zahl c, wobei ln die natürliche Logarithmusfunktion ist.

!

a) $\mathbf{F(x) = -\cos(x)}$ oder $F(x) + c$ für jede beliebige Zahl c.

b) $\mathbf{G(x) = \frac{1}{2}\sin(2x + 1) - \frac{2}{5}\cos(5x)}$ oder $G(x) + c$ für jede beliebige Zahl c.

c) $\mathbf{H(x) = \frac{1}{32}\cdot(4x - 3)^8}$ oder $H(x) + c$ für jede beliebige Zahl c.

!

a) $F(x) = -5e^x + c$
$F(0) = -5 + c$
Mit der Bedingung $F(0) = -5$ ergibt sich: $-5 + c = -5$.
Also ist $c = 0$ und damit $\mathbf{F(x) = -5e^x}$.

b) $F(x) = 4 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - (-1) \cdot 3e^{-x} + c = 2e^{2x} + 3e^{-x} + c$
$F(0) = 2 + 3 + c = 5 + c$
Mit der Bedingung $F(0) = 2$ ergibt sich $5 + c = 2$.
Also ist $c = -3$ und damit $\mathbf{F(x) = 2e^{2x} + 3e^{-x} - 3}$.

c) $F(x) = 6 \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} + x + c = 2e^{3x} + x + c$
$F(\ln(2)) = 2 \cdot e^{3\ln(2)} + \ln(2) + c = 2 \cdot e^{\ln(2^3)} + \ln(2) + c = 2 \cdot 2^3 + \ln(2) + c = 2^4 + \ln(2) + c$
Mit der Bedingung $F(\ln(2)) = \ln(2)$ ergibt sich $2^4 + \ln(2) + c = \ln(2)$.
Also ist $c = -16$ und damit $\mathbf{F(x) = 2e^{3x} + x - 16}$.

Berechnung der Schnittpunkte mit der x-Achse:

Bedingung: $$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ 4 - e^{2x} &= 0 \\ 4 &= e^{2x} \\ \ln(4) &= 2x \\ 2\ln(2) &= 2x \\ \ln(2) &= x \end{aligned}$$

Stammfunktion:

Es ist F mit $F(x) = 4x - \frac{1}{2}e^{2x}$ eine Stammfunktion von f.

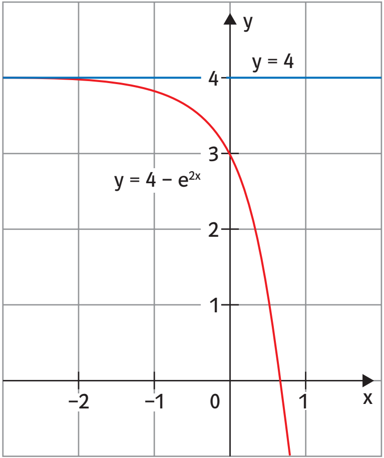
Flächenberechnung:

Die Integrationsgrenzen sind 0 und ln(2).

$$A = \int_0^{\ln(2)} f(x)\,dx = \left[4x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\ln(2)} = 4\ln(2) - \frac{1}{2}e^{2\ln(2)} - 0 + \frac{1}{2}e^0$$

$$= 4\ln(2) - \frac{1}{2}e^{\ln(4)} + \frac{1}{2} = 4\ln(2) - \frac{1}{2}\cdot 4 + \frac{1}{2}$$

$$= \mathbf{4\ln(2) - \frac{3}{2}}$$



a) *Bestimmung der Schnittstellen von K_f und K_g:*

Bedingung: $f(x) = g(x)$

$-\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2 = \frac{1}{4}x^2$ liefert $-\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2 = 0$

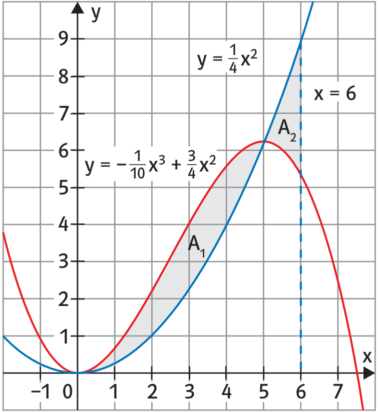
$x^2(-x + 5) = 0$; $x_1 = x_2 = 0$; $x_3 = 5$

Flächenberechnung:

$$A_1 = \int_0^5 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^5 \left(-\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^2\right) dx$$

$$= \int_0^5 \left(-\frac{1}{10}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right) dx = \left[-\frac{1}{40}x^4 + \frac{1}{6}x^3\right]_0^5$$

$$= -\frac{1}{40}\cdot 5^4 + \frac{1}{6}\cdot 5^3 = \mathbf{\frac{125}{24}}$$



b) *Flächenberechnung:*

$$A_2 = \int_5^6 (g(x) - f(x))\,dx = \int_5^6 \left(\frac{1}{4}x^2 - \left(-\frac{1}{10}x^3 + \frac{3}{4}x^2\right)\right) dx = \int_5^6 \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{10}x^3\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{40}x^4\right]_5^6$$

$$= \left(-\frac{1}{6}\cdot 6^3 + \frac{1}{40}\cdot 6^4\right) - \left(-\frac{1}{6}\cdot 5^3 + \frac{1}{40}\cdot 5^4\right) = -\frac{18}{5} + \frac{125}{24} = \mathbf{\frac{193}{120}}$$

a) $$\int_0^{8\pi} 3\cdot\sin\left(\tfrac{1}{4}x\right)dx = \left[3\cdot 4\cdot\left(-\cos\left(\tfrac{1}{4}x\right)\right)\right]_0^{8\pi}$$
$$= (12\cdot(-\cos(2\pi))) - (12\cdot(-\cos(0)))$$
$$= -12 + 12 = \mathbf{0}$$

b) Nullstellen von f im Intervall $[0;\,8\pi]$ sind: $N_1(0\,|\,0)$; $N_2(4\pi\,|\,0)$ und $N_3(8\pi\,|\,0)$.
Für den Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse gilt (vgl. Karte 53):

$$A = 2\cdot\int_0^{4\pi} 3\cdot\sin\left(\tfrac{1}{4}x\right)dx = 2\cdot\left[3\cdot 4\cdot\left(-\cos\left(\tfrac{1}{4}x\right)\right)\right]_0^{4\pi}$$
$$= 2\cdot[(12\cdot(-\cos(\pi))) - (12\cdot(-\cos(0)))]$$
$$= 2\cdot(12 + 12) = \mathbf{48}$$

c) Das Ergebnis aus a) entspricht der **Gesamtbilanz** von Wasserzu- und abfluss innerhalb etwa eines Tages: Zu- und Abfluss halten sich die Waage. Es gibt insgesamt weder einen Wasserüberschuss noch ein Wasserdefizit.

Das Ergebnis aus b) entspricht der **insgesamt transportierten Wassermenge** − unabhängig von deren Richtung. So wurden an etwa einem Tag insgesamt 48 000 m^3 Wasser bewegt (vgl. Karte 56).

!

a) Bezeichnet F eine Stammfunktion von f, die den Wasserstand (in m^3) nach t Tagen seit Beginn der Messung angibt, so gilt zum Zeitpunkt $t = 0$: $F(0) = 3000$.
Nach dem Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung gilt dann

$$F(15) = F(0) + \int_0^{15} f(t)\,dt = 3000 + \left[-\tfrac{1}{3}\cdot t^3 + 10\cdot t^2 + 120t\right]_0^{15}$$

$$= 3000 + (-1125 + 2250 + 1800) = 5925.$$

Die Wassermenge im Staubecken beträgt nach gut zwei Wochen **knapp 6000 m³**.

b) Höchststand der Wassermenge bedeutet: $F'(t) = 0$ und $F''(t) < 0$.
Dies ist gleichbedeutend mit $f(t) = 0$ und $f'(t) < 0$.

$f(t) = 0$ liefert $t^2 - 20t - 120 = 0$ bzw. $t_{1/2} = \frac{20 \pm \sqrt{400 + 480}}{2}$.

Da $t > 0$ folgt $t \approx 24{,}83$. Mit $f'(t) = -2t + 20$ ergibt sich $f'(24{,}83) < 0$. Damit gilt $F(24{,}83) \approx 7042$.

Gegen Abend des 25. Mai ist mit einem Höchststand der Wassermenge von **mehr als 7000 m³** zu rechnen.

a) *Term für die Ausflussrate:*

Ansatz: $f(t) = at^2 + bt + c$

Führt man drei Punktproben z. B. mit den ersten drei Wertepaaren durch, ergibt sich:

$3{,}9 = c$

$3{,}7 = a + b + c$

$3{,}1 = 4a + 2b + c$

Aus $-0{,}2 = a + b$ und $-0{,}4 = 2a + b$ folgt $a = -0{,}2$ und $b = 0$.

Ein möglicher Term ist damit: $\mathbf{f(t) = -0{,}2t^2 + 3{,}9}$

b) *Gesamtmenge Wasser, die in 4 Stunden ausgeflossen ist:*

Die Gesamtmenge Wasser ergibt sich als Integral:

$$G = \int_0^4 (-0{,}2t^2 + 3{,}9)\,dt = \left[-\frac{1}{15}t^3 + 3{,}9\,t\right]_0^4 = -\frac{64}{15} + 3{,}9 \cdot 4 - 0 = \frac{34}{3}.$$

In 4 Stunden sind also **rund 11,3 Liter** Wasser aus dem Tank ausgeflossen.

a) Die Integralfunktion I_{-2} ist eine Stammfunktion von f:

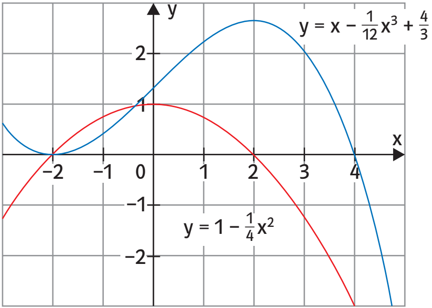
$I_{-2}(x) = x - \frac{1}{12}x^3 + c.$

Es gilt $I_{-2}(-2) = 0$.

Aus $-2 - \frac{1}{12}\cdot(-2)^3 + c = 0$ folgt $-2 + \frac{2}{3} + c = 0$ und hieraus $c = \frac{4}{3}$.

Damit gilt: $\mathbf{I_{-2}(x) = x - \frac{1}{12}x^3 + \frac{4}{3}}$.

b) Siehe Fig.



$$\overline{P} = \frac{1}{20}\int_0^{20} f(t)\,dt = \frac{1}{20}\int_0^{20}\left(5000 + 1000\cdot e^{-0{,}2t}\right)dt$$

$$= \frac{1}{20}\left[5000t - 5000\cdot e^{-0{,}2t}\right]_0^{20}$$

$$= \frac{1}{20}\left(100\,000 - \frac{5000}{e^4} + 5000\right)$$

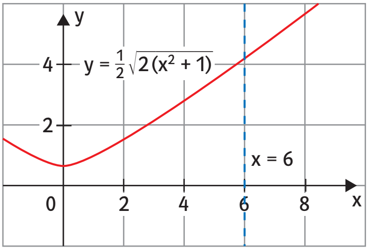
$$\approx 5245$$

Die durchschnittliche Populationsstärke in diesen 20 Jahren ist **näherungsweise 5245**.

$$V = \pi \cdot \int_0^6 (f(x))^2\,dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+1)}\right)^2 dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right) dx = \pi \cdot \left[\frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\right]_0^6 = \pi \cdot (36 + 3) = 39\pi$$

Das Volumen des entstehenden Rotationskörpers beträgt **39π**.



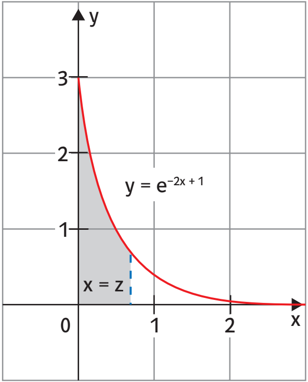
Gesucht ist die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen mit der unteren Grenze $x = 0$.
Für $z > 0$ ist:

$$A(z) = \int_0^z f(x)dx = \int_0^z e^{-2x+1}dx = \left[-\frac{1}{2}e^{-2x+1}\right]_0^z = -\frac{1}{2}e^{-2z+1} + \frac{1}{2}e\,.$$

Für $z \to \infty$ geht $A(z) = -\frac{1}{2}e^{-2z+1} + \frac{1}{2}e \to \frac{1}{2}e$.

Es ist also $\lim\limits_{z \to \infty} A(z) = \frac{1}{2}e$.

Damit hat die ins Unendliche reichende Fläche den Inhalt $\boldsymbol{\frac{1}{2}e}$.



Für $0 < z \leqq 2$ hat die gesuchte Fläche den Inhalt

$$A(z) = \int_z^2 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = [3 \cdot 2\sqrt{x}]_z^2 = 6\sqrt{2} - 6\sqrt{z}.$$

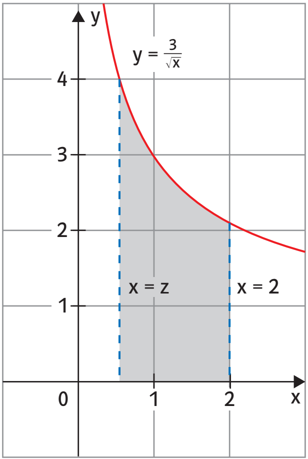
Für $z \to 0$ geht $A(z) \to 6\sqrt{2}$.

Es ist also $\lim\limits_{z \to 0} A(z) = 6\sqrt{2}$, damit ist die nach „oben ins Unendliche reichende Fläche“ endlich mit Inhalt $\mathbf{6\sqrt{2}}$.

Der Flächeninhalt unterhalb des Graphen, der von den Koordinatenachsen begrenzt wird, ist unendlich, denn für $0 < z < t$ ist

$$A = \int_z^t \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = [3 \cdot 2\sqrt{x}]_z^t = 6\sqrt{t} - 6\sqrt{z}.$$

Für $z \to 0$ und $t \to \infty$ geht $A \to \infty$.



Fassregel von KEPLER: $\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{1}{6}(b-a)\left[f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$

Mit $a = 0$ und $b = 4$ ist $\frac{a+b}{2} = 2$.

Weiterhin ist $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(2) = \frac{1}{4}$ und $f(4) = \frac{1}{10}$.

Damit gilt: $\int_0^4 \frac{2}{x^2+4}\,dx \approx \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot \left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{10}\right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{8}{5} = \frac{16}{15}$.

Der Flächeninhalt unterhalb des Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$ zwischen der y-Achse und der Geraden mit der Gleichung $x = 4$ ist **näherungsweise $\frac{16}{15} \approx 1{,}067$**.

a) Aus den Punkten $A(5|-2|1)$ und $B(7|-1|3)$ erhält

man den Vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 5 \\ -1 - (-2) \\ 3 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \end{pmatrix}$.

b) Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = \mathbf{3}$.

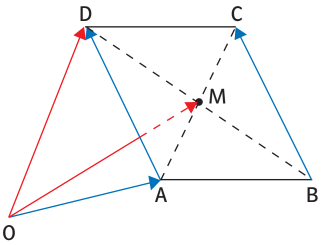
c) Es ist $\overrightarrow{u_0} = \frac{1}{|\vec{u}|} \cdot \vec{u}$. Also ergibt sich: $\boldsymbol{\overrightarrow{u_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}$.

Die gegebenen Punkte sind $A(2\,|\,-1\,|\,3)$, $B(-3\,|\,5\,|\,-2)$ und $C(-6\,|\,-7\,|\,3)$.

a) Ein Parallelogramm ist ein Viereck mit parallelen Gegenseiten.
Für den Ortsvektor des Punktes D gilt (vgl. Fig.):

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD}\\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}\\ &= \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-3\\-12\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-3\\-1-12\\3+5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-13\\8\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Eckpunkt D hat also die Koordinaten $\mathbf{D(-1\,|\,-13\,|\,8)}$.



b) Bei einem Parallelogramm halbieren sich die Diagonalen.
Für den Ortsvektor des Mittelpunktes M des Parallelogramms gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \overrightarrow{OA} + \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\ &= \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-8\\-6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-4\\-1-3\\3+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Der Mittelpunkt M des Parallelogramms hat also die Koordinaten $\mathbf{M(-2\,|\,-4\,|\,3)}$.

a) Der Vektorgleichung

$$r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

entspricht ein LGS.

$$\begin{array}{rcll} r + 2s - 3t &=& 0 & [1] \\ -2r - 2s - 8t &=& 0 & [2] \\ r + 3s + t &=& 0 & [3] \\ \hline r + 2s - 3t &=& 0 & [1] \\ s + 4t &=& 0 & [4] = [3] - [1] \\ 2s - 14t &=& 0 & [5] = 2 \cdot [1] + [2] \\ \hline r + 2s - 3t &=& 0 & [1] \\ s + 4t &=& 0 & [4] \\ 22t &=& 0 & [6] = 2 \cdot [4] - [5] \end{array}$$

Aus [6] folgt $t = 0$, aus [4] dann $s = 0$, aus [1] dann $r = 0$.
Die drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ sind **linear unabhängig.**

b) Der Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ -14 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

entspricht ein LGS.

$$\begin{array}{rcll} 6 &=& r - 2t & [1] \\ -7 &=& r + s + 3t & [2] \\ -14 &=& r + 2s + 5t & [3] \\ \hline 6 &=& r - 2t & [1] \\ 0 &=& r + t & [4] = 2 \cdot [2] - [3] \\ -7 &=& r + s + 3t & [2] \\ \hline 6 &=& -3t & [5] = [1] - [4] \\ 0 &=& r + t & [4] \\ -7 &=& r + s + 3t & [2] \end{array}$$

Aus [5] folgt $t = -2$, aus [4] dann $r = 2$, aus [2] dann $s = -3$.
Damit gilt:
$\boldsymbol{\vec{x} = 2 \cdot \vec{u} - 3 \cdot \vec{v} - 2 \cdot \vec{w}}$.

a) Es sei α der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

Aus $\cos(\alpha) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 6^2 + 4^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{2 + 12 + 4}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{9}} = \dfrac{18}{\sqrt{53} \cdot 3} = \dfrac{6}{\sqrt{53}}$ folgt $\boldsymbol{\alpha \approx 34{,}5°}$.

b) Es ist $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \cdot (-4) + (-1) \cdot 5 + 2 \cdot 3 = -11 \neq 0$.

Also sind $\vec{a}$ und $\vec{b}$ **nicht orthogonal**.

Einen Normalenvektor kann man mithilfe des Vektorproduktes ermitteln.

Für $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-1) - 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 - 10 \\ -2 + 9 \\ 15 + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{-22} \\ \mathbf{7} \\ \mathbf{19} \end{pmatrix}.$$

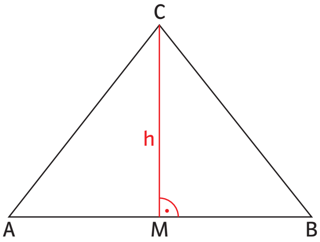
!

a) Mit A(4 | 3 | −2), B(2 | 2 | 0) und C(1 | 10,5 | 1) gilt:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$;

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9 + 56{,}25 + 9} = \sqrt{74{,}25}$;

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8{,}5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{1 + 72{,}25 + 1} = \sqrt{74{,}25}$.



Also ist das Dreieck gleichschenklig mit der Grundseite AB. Die zugehörige Höhe h ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{MC}$, wobei M die Mitte von AB ist.
Die Grundseite hat die Länge 3.

b) Die Mitte der Grundseite ist M(3 | 2,5 | −1); damit ist $\overrightarrow{MC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Für die Höhe h des Dreiecks ergibt sich: $h = |\overrightarrow{MC}| = \sqrt{4 + 64 + 4} = \sqrt{72}$.

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt{72} \approx 12{,}7$.

Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt **näherungsweise 12,7 Flächeneinheiten**.

Untersuchung der Grundfläche:

Mit A(5|4|−1), B(1|8|1), C(−1|4|5) und D(3|0|3) gilt:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$;

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{4 + 16 + 16} = 6$; $\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{DC}\right| = \sqrt{16 + 16 + 4} = 6$.

Außerdem ist $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$. Die Grundfläche ist also ein Quadrat mit dem Inhalt G = 36.

Untersuchung der Höhe:

Der Mittelpunkt des Quadrates ist M(2|4|2). Weiterhin ist $\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$; $\left|\overrightarrow{MS}\right| = \sqrt{16 + 4 + 16} = 6$

und $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$. Es handelt sich also um eine senkrechte Pyramide mit der Höhe h = 6.

Rauminhalt der Pyramide:

$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 36 \cdot 6 = \mathbf{72}$

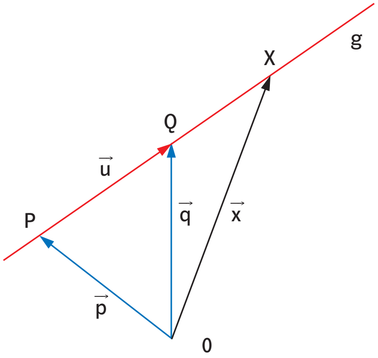
a) Eine Gleichung für die Gerade g durch die Punkte P und Q hat die Form:
$\vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \overrightarrow{PQ}$; $t \in \mathbb{R}$,
wobei $\overrightarrow{OP}$ ein Stützvektor und $\overrightarrow{PQ}$ ein Richtungsvektor von g ist (vgl. Fig.).
Damit gilt:

$$\boldsymbol{\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}.}$$

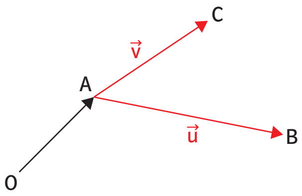
b) Durchführung einer „Punktprobe“:
Wenn A auf g liegt, muss es eine reelle Zahl t geben, welche die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 11 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bzw. das LGS } \begin{aligned} 3 - 4t &= 1 \\ -7 + 11t &= 1 \\ 5 - 3t &= 2 \end{aligned} \text{ erfüllt.}$$

Aus $3 - 4t = 1$ folgt $t = 0{,}5$, aus $5 - 3t = 2$ aber $t = 1$.
Also liegt A nicht auf g.



a) Wählt man den Ortsvektor von A als Stützvektor und $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ als Spannvektoren, so gilt (vgl. Fig.):



$$\mathbf{E:}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}.$$

b) Durchführung einer „Punktprobe“:
Wenn D in E liegt, muss es reelle Zahlen r und s geben, welche die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

bzw. das LGS

$$\begin{aligned} 1 + 2r + 3s &= 8 \quad [1] \\ -1 + 3r - s &= -7 \quad [2] \\ 2 - 3r + s &= 8 \quad [3] \end{aligned}$$

erfüllen.

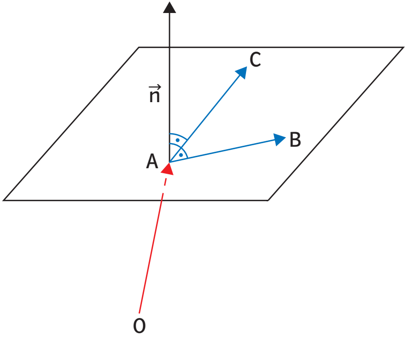
Aus [1] und [2] folgt $r = -1$; $s = 3$. Für diese beiden Werte ist Gleichung [3] auch erfüllt.
Damit liegt D in E.

Gegeben sind die Punkte A(8|6|2), B(1|7|7) und C(6|2|0). Hieraus erhält man:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Ist $\vec{n}$ ein Normalenvektor von $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ (vgl. Fig.), ergibt sich mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot (-2) - 5 \cdot (-4) \\ 5 \cdot (-2) - (-7) \cdot (-2) \\ (-7) \cdot (-4) - 1 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -24 \\ 30 \end{pmatrix}.$$



Ebenengleichung in Normalenform:

$$\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -24 \\ 30 \end{pmatrix} = 0$$

Mit $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 18 \\ -24 \\ 30 \end{pmatrix} = 0$ ergibt sich: $18x_1 - 24x_2 + 30x_3 - (8 \cdot 18 - 6 \cdot 24 + 60) = 0$

bzw. $\mathbf{3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 60 = 0}$.

Der gegebenen Gleichung entspricht das LGS

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2r - s && [1] \\ x_2 &= 2 + 3r - 4s && [2]\,. \\ x_3 &= 4 + 5r + 2s && [3] \end{aligned}$$

[2] + 2 · [3] ergibt: $x_2 + 2x_3 = 10 + 13r$ [4]

(−4) · [1] + [2] ergibt: $x_2 - 4x_1 = -2 + 11r$ [5]

11 · [4] − 13 · [5] ergibt: $52x_1 - 2x_2 + 22x_3 = 136.$

Hieraus folgt die Koordinatengleichung

E: $26x_1 - x_2 + 11x_3 = 68.$

Ansatz: $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$;
Punktprobe mit den gegebenen Punkten liefert das LGS

$$\begin{aligned} 2a + 3b - c &= d \quad [1] \\ 8a + 4b - 9c &= d \quad [2]\,. \\ 11a + 12b - 7c &= d \quad [3] \end{aligned}$$

Dieses LGS ist äquivalent zu dem LGS
$$\begin{aligned} 2a + 3b - c &= d \\ 3b + c &= 3d \\ 21c &= -45d \end{aligned}$$

mit der Lösung $a = -\frac{22}{7}d$; $b = \frac{12}{7}d$; $c = -\frac{15}{7}d$.

Setzt man $d = 7$, folgt $a = -22$; $b = 12$; $c = -15$.
Damit ergibt sich die Koordinatengleichung
E: $-22x_1 + 12x_2 - 15x_3 = 7$.

Der Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$ von g ist ein Normalenvektor von E („Rollentausch“ von Richtungsvektor und Normalenvektor; vgl. Fig.).

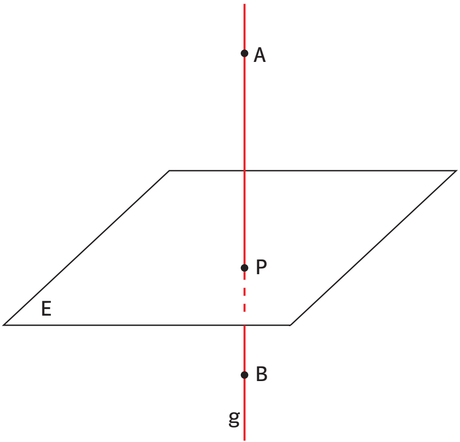
Mit $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$ als Stützvektor ergibt sich eine Gleichung für E in Normalenform:

$$E: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0\,.$$

Aber auch

$$\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{\vec{x} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} + 29 = 0}$$

sind Gleichungen in Normalenform.

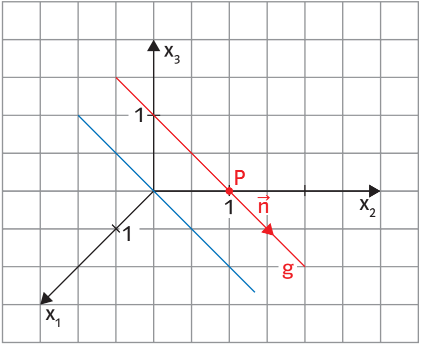


Der Punkt P mit dem Stützvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt auf der x_2-Achse und hat die Koordinaten $P(0|1|0)$.

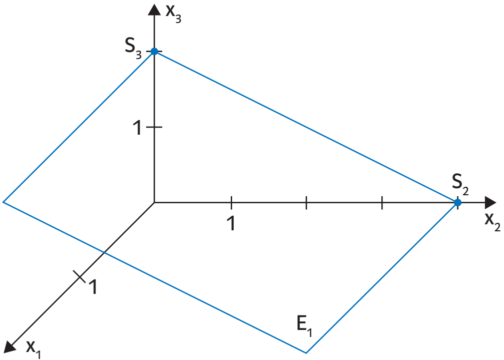
Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt in der x_1x_2-Ebene und ist parallel zu einer der Winkelhalbierenden der x_1x_2-Ebene.

Damit geht g durch P und ist parallel zu einer der Winkelhalbierenden der x_1x_2-Ebene.

Zeichnung: Siehe Fig.



a) E_1: $x_2 + 2x_3 = 4$
Da x_1 fehlt, ist die Ebene E_1 **parallel zur x_1-Achse**.
Schnittpunkt mit der x_2-Achse:
Mit $x_1 = x_3 = 0$ ergibt sich $S_2(0\,|\,4\,|\,0)$.
Schnittpunkt mit der x_3-Achse:
Mit $x_1 = x_2 = 0$ ergibt sich $S_3(0\,|\,0\,|\,2)$.
Ausschnitt von E_1; vgl. Fig.



b) Die Ebene E_2 ist parallel zur x_3-Achse.
Spurpunkte von E_2 sind: $S_1(2\,|\,0\,|\,0)$; $S_2(0\,|\,3\,|\,0)$.

Damit sind $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \overrightarrow{S_1S_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Spannvektoren von E_2. Der Ortsvektor von S_1 ist ein Stützvektor von E_2. Damit ist

$$\mathbf{E_2}\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}$$

eine Gleichung von E_2.

a) Der Richtungsvektor von h ist das (−3)-fache des Richtungsvektors von g.
Also sind g und h parallel.
Für $r = 0$ ergibt sich $P(2|-1|3)$ auf g. Punktprobe für P und h ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -12 \end{pmatrix}.$$

Aus $2 = -1 - 3s$ folgt $s = -1$. Wegen $-1 \neq 3 - 1 \cdot 3$ liegt P nicht auf h.
Damit sind g und h echt parallel.

b) Der Richtungsvektor von g ist das (−2)-fache des Richtungsvektors von h.
Also sind g und h parallel.
Für $r = 0$ ergibt sich $P(-1|-1|2)$ auf g. Punktprobe für P und h ergibt:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Alle drei Gleichungen sind für $s = 1$ erfüllt.
Also liegt P auf h. **Damit sind g und h identisch.**

a) Der Richtungsvektor von h ist kein Vielfaches des Richtungsvektors von g. Also sind g und h nicht parallel. Der Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} \quad \text{entspricht das LGS} \quad \begin{aligned} 3r - s &= -4\\ -r + s &= 2\\ 2r - 2s &= -4 \end{aligned}\ .$$

Dieses LGS hat die einzige Lösung $r = -1$; $s = 1$.
Setzt man $s = 1$ in die Gleichung für h ein, ergibt sich der Schnittpunkt **S (1 | 2 | 1)**.

b) Der Richtungsvektor von h ist kein Vielfaches des Richtungsvektors von g. Also sind g und h nicht parallel. Der Vektorgleichung

$$\begin{pmatrix}2\\2\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\5\\-7\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\7\\3\end{pmatrix} \quad \text{entspricht das LGS} \quad \begin{aligned} r - 2s &= -3\\ -3r - 7s &= 3\\ 4r - 3s &= -12 \end{aligned}\ .$$

Diese LGS hat keine Lösung.
Die Geraden g und h sind windschief.

a) Setzt man $x_1 = -3 - 8t$, $x_2 = -1 - 6t$ und $x_3 = 1 + t$ in die Gleichung für E ein, ergibt sich:
$-3 - 8t + 2(-1 - 6t) + 2(1 + t) = 6$; hieraus folgt $t = -0{,}5$.
Also schneiden sich g und E; der Schnittpunkt ist **S(1 | 2 | 0,5)**.

b) Setzt man $x_1 = 2$, $x_2 = 2 + 3t$ und $x_3 = 1 + t$ in die Gleichung für E ein, ergibt sich:
$2 + 2 + 3t - 3(1 + t) = 4$; hieraus folgt die falsche Aussage $0 = 3$.
Also sind g und E echt parallel.

Aus der Gleichung $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

folgt das LGS $\begin{array}{r} t - 4r - 2s = -6 \\ 2t + 3r - 2s = 0 \\ 2t - r + 3s = -12 \end{array}$ bzw. $\begin{array}{r} t - 4r - 2s = -6 \\ 11r + 2s = 12 \\ 9s = -12 \end{array}$.

Man erhält $s = -\frac{4}{3}$; $r = \frac{4}{3}$; $t = -\frac{10}{3}$.

Setzt man $t = -\frac{10}{3}$ in die Gleichung für g ein, erhält man den Ortsvektor des Schnittpunktes S und

somit $\mathbf{S}\left(\frac{8}{3} \middle| -\frac{11}{3} \middle| \frac{16}{3}\right)$.

a) Die beiden Gleichungen ergeben ein LGS mit 2 Gleichungen und 3 Variablen.

Das LGS $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ x_1 - 8x_2 + 2x_3 &= 6 \end{aligned}$ ist äquivalent zu $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 10x_2 &= 0 \end{aligned}$.

Es ist $x_2 = 0$; setzt man $x_3 = t$, ergibt sich $x_1 = 6 - 2t$.

Insgesamt gilt: $\begin{aligned} x_1 &= 6 - 2t \\ x_2 &= 0 \\ x_3 &= t \end{aligned}$.

Damit schneiden sich die beiden Ebenen. Eine Gleichung der Schnittgeraden ist

$$\boldsymbol{\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.}$$

b) Der Parametergleichung von E_2 entsprechen die Gleichungen:

$x_1 = 1 - 2r + s$; $x_2 = 2 + s$; $x_3 = -1 + r - 4s$.

Eingesetzt in die Gleichung für E_1 ergibt: $3(1 - 2r + s) + 2 + s - 4(-1 + r - 4s) = -1$.

Hieraus folgt: $r = 1 + 2s$. Ersetzt man in der Gleichung für E_2 den Parameter r durch $1 + 2s$, erhält man für die Schnittgerade:

$$\boldsymbol{g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + (1 + 2s) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};\ s \in \mathbb{R}.}$$

Setzt man die rechten Seiten der gegebenen Gleichungen gleich, entsteht ein LGS mit drei Gleichungen und den vier Variablen r, s, t und u. Man vermeidet dieses LGS, wenn man eine der Gleichungen in die Koordinatenform umwandelt.

Mit dem Vektorprodukt erhält man einen Normalenvektor der Ebene E_1:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - (-1) \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich eine Gleichung in Normalenform: $E_1\colon \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0.$

Hieraus folgt die Gleichung in Koordinatenform:

$E_1\colon\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 10 = 0.$

Setzt man nun $x_1 = 1 - t + 4u;\ x_2 = -1 + 2t + u;\ x_3 = 1 + 2t + 2u$ aus der Gleichung für E_2 ein, erhält man:

$1 - t + 4u - 4(-1 + 2t + u) + 2(1 + 2t + 2u) - 10 = 0$ und hieraus $u = \frac{3}{4} + \frac{5}{4}t.$

Als Gleichung der Schnittgeraden ergibt sich damit:

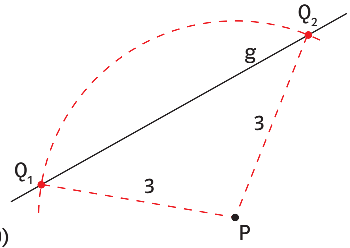
$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4}t\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{-0{,}25} \\ \mathbf{2{,}5} \end{pmatrix} \mathbf{+\ t} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} \\ \mathbf{3{,}25} \\ \mathbf{4{,}5} \end{pmatrix};\ \mathbf{t \in \mathbb{R}}.$$

Gegeben: $P(2|1|1)$; $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$ Gesucht: Punkte auf g, die von P den Abstand 3 haben.

Methode eines „laufenden“ Punktes:
Die gesuchten Punkte liegen auf g, also müssen die Koordinaten dieser Punkte die Gleichung für g erfüllen. Auf diese Weise erhält man die Koordinaten in Abhängigkeit vom Parameter t der Geradengleichung. Diesen Parameter t kann man dann z. B. durch eine zusätzliche Bedingung an die gesuchten Punkte berechnen.

1. Schritt:
Es sei Q ein Punkt auf g; es gilt also: $Q(2 + t\,|\,3\,|\,t)$.

2. Schritt:
Die Zusatzbedingung ist, dass Q von P den Abstand 3 hat.
Deshalb berechnet man zunächst den Betrag des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ in Abhängigkeit von t.

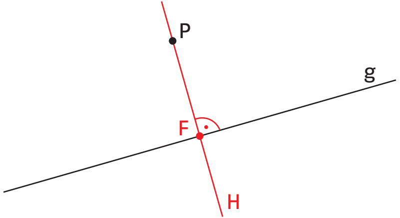


Aus $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ t-1 \end{pmatrix}$ folgt $\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{t^2 + 2^2 + (t-1)^2} = \sqrt{2t^2 - 2t + 5}$ (vgl. Karte 10)

und aus der Bedingung $\sqrt{2t^2 - 2t + 5} = 3$ dann $2t^2 - 2t + 5 = 9$ bzw. $t^2 - t - 2 = 0$
mit den Lösungen $t_1 = 2$ und $t_2 = -1$. Damit gilt $\mathbf{Q_1(4\,|\,3\,|\,2)}$, $\mathbf{Q_2(1\,|\,3\,|\,-1)}$.

Gegeben: $P(2\,|\,4\,|\,2)$; $g\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ Gesucht: Fußpunkt des Lotes von P auf g.

Methode, eine **Hilfsebene** einzuführen:
Führt man die Ebene H als Hilfsebene ein, die durch P geht und orthogonal zu g ist, so erhält man den Fußpunkt des Lotes als Schnittpunkt von H und g (siehe Fig.). Aufgrund der Lage von H bietet sich als Gleichung die Normalenform an, die dann in die Koordinatenform umgewandelt wird.



1. Schritt: Hilfsebene
Die Hilfsebene H geht durch P; ein Richtungsvektor von g ist ein Normalenvektor von H.

Damit ist $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ eine Gleichung für H in Normalenform.

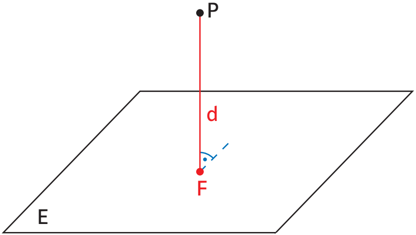
Berechnet man das Skalarprodukt der Vektoren, ergibt sich eine Koordinatenform:
$-2(x_1 - 2) + 2(x_2 - 4) + (x_3 - 2) = 0$ bzw. $H\colon 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 6 = 0$.

2. Schritt: Lotfußpunkt
Um g mit H zu schneiden, setzt man x_1, x_2 und x_3 aus der Gleichung für g in die Gleichung für H ein und erhält: $2(7 - 2t) - 2(2 + 2t) - (-2 + t) + 6 = 0$. Hieraus folgt $t = 2$ und damit $\mathbf{F(3\,|\,6\,|\,0)}$.

Gegeben: Punkt P(4 | 6 | 10); Ebene E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$
Gesucht: Abstand d(P; E) des Punktes P von der Ebene E.

1. Schritt: Hesse'sche Normalenform

Da die Ebene E in Koordinatenform gegeben ist, kann man direkt einen Normalenvektor der Ebene E angeben: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.



Betrag des Normalenvektors:

$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

Hesse'sche Normalenform von E:

$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 18 = 0$$

HNF von E: $\frac{x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 18}{3} = 0$

2. Schritt: Abstandsberechnung

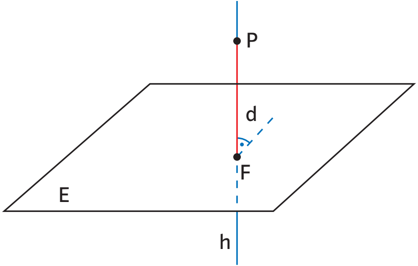
Setzt man die Koordinaten des Punktes P in die linke Seite der HNF von E ein, ergibt sich:

$$d(P; E) = \left| \frac{4 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 10 - 18}{3} \right| = \left| \frac{4 + 12 + 20 - 18}{3} \right| = 6.$$

Ergebnis: Der Punkt P(4 | 6 | 10) hat von der Ebene E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 18$ den **Abstand 6**.

1. Schritt: Hilfsgerade

Es sei h die Gerade durch P orthogonal zu E. Dann ist der Ortsvektor von P ein Stützvektor und ein Normalenvektor von E ein Richtungsvektor von h.



$$h\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

2. Schritt: Lotfußpunkt

Die Gerade h schneidet die Ebene E in F (vgl. Fig.).

Der Gleichung für h entnimmt man: $x_1 = 3 + 2t$; $x_2 = -3 - 6t$; $x_3 = 1 - 3t$.

Eingesetzt in die Gleichung für E ergibt: $2(3 + 2t) - 6(-3 - 6t) - 3(1 - 3t) + 28 = 0$. Hieraus folgt $t = -1$.

Mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ folgt $F(1\,|\,3\,|\,4)$.

3. Schritt: Abstand

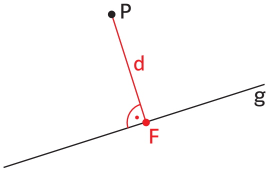
Es ist $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $d = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{4 + 36 + 9} = 7$.

Ergebnis: Es ist **F(1 | 3 | 4)**; der Punkt P hat von der Ebene E den **Abstand 7**.

Lösung (Methode eines „laufenden“ Punktes)

1. Schritt:
Es sei F der Lotfußpunkt. Da F auf g liegt, müssen die Koordinaten von F die Gleichung von g erfüllen: $F(6 + 2t \mid -1 - t \mid 3 + t)$.

2. Schritt: Lotfußpunkt



Mit $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 5 + 2t \\ -3 - t \\ -1 + t \end{pmatrix}$ folgt aus $\begin{pmatrix} 5 + 2t \\ -3 - t \\ -1 + t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

die Gleichung $2(5 + 2t) - (-3 - t) + (-1 + t) = 0$ bzw.
$6t + 12 = 0$ mit der Lösung $t = -2$.
Also gilt: $F(2 \mid 1 \mid 1)$.

3. Schritt: Abstand

Es ist $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{1 + 1 + 9} = \sqrt{11}$.

Ergebnis: Der Punkt P hat von der Geraden g den Abstand $d(P; g) = \sqrt{\mathbf{11}}$.

Lösung (mit der Formel)

Sind g und h windschiefe Geraden mit g: $\vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$; $s \in \mathbb{R}$ und h: $\vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$; $t \in \mathbb{R}$ und ist $\overrightarrow{n_0}$ ein Einheitsvektor, der orthogonal zu $\vec{u}$ und zu $\vec{v}$ ist, dann gilt für den Abstand d von g und h: $\mathbf{d(g;h)} = \left|(\vec{\mathbf{q}} - \vec{\mathbf{p}}) \cdot \overrightarrow{\mathbf{n_0}}\right|$.

1. Schritt: Ermittlung von $\overrightarrow{n_0}$

Ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$ orthogonal zu $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und orthogonal zu $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$, so gilt:

$$\begin{aligned} -n_1 + n_2 &= 0 \\ 3n_1 - 2n_2 - 2n_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Setzt man $n_2 = 2$, so ist $n_1 = 2$ und $n_3 = 1$.

Aus $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ folgt $|\vec{n}| = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3$ und somit $\overrightarrow{n_0} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Schritt: Abstand von g und h

$$d(g;h) = \left| \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \left| \frac{-6}{3} \right| = \mathbf{2}$$

Sind $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Richtungsvektoren der Geraden, so gilt für den Schnittwinkel α (vgl. Fig.):

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

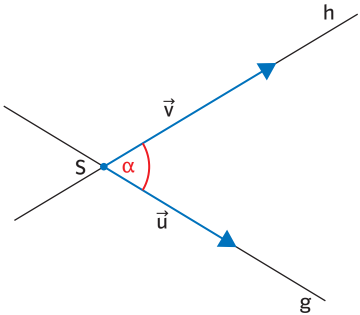
Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\vec{u}| = \sqrt{1 + 16 + 4} = \sqrt{21}$

und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $|\vec{v}| = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}$

erhält man

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} = \frac{|-2 + 4 + 6|}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} = \frac{8}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{14}} \approx 0{,}4666$$

und somit $\boldsymbol{\alpha \approx 62{,}19°}$.



Sind $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von g und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von E, so gilt für den Schnittwinkel α:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}.$$

Mit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $|\vec{u}| = \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $|\vec{n}| = \sqrt{4+1+4} = \sqrt{9} = 3$

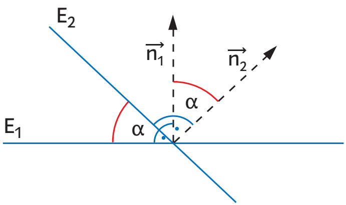
erhält man

$$\sin(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{3\cdot 3} = \frac{|4-2+2|}{9} = \frac{4}{9}$$

und somit **$\alpha \approx 26{,}39°$**.

Sind $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ Normalenvektoren der Ebenen E_1 und E_2, so gilt für den Schnittwinkel α (vgl. Fig.):

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}.$$



Mit $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $|\vec{n_1}| = \sqrt{16 + 9 + 49} = \sqrt{74}$

und $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$; $|\vec{n_2}| = \sqrt{1 + 4 + 25} = \sqrt{30}$

erhält man

$$\cos(\alpha) = \frac{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}\right|}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{30}} = \frac{|4 - 6 - 35|}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{30}} = \frac{37}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{30}}$$

und somit $\boldsymbol{\alpha \approx 38{,}25°}$.

Die Seitenfläche ABS liegt in der Ebene mit der Gleichung

$$E_1\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix};\ r, s \in \mathbb{R}.$$

Eliminiert man die Parameter r und s ergibt sich die Koordinatengleichung $x_1 + x_3 = 4$.
Die Seitenfläche BCS liegt in der Ebene mit der Gleichung

$$E_2\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix} + u\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix};\ u, v \in \mathbb{R}.$$

Eliminiert man die Parameter u und v, ergibt sich die Koordinatengleichung $x_2 + x_3 = 4$.

Normalenvektoren: $\vec{n_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ mit $\left|\vec{n_1}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\vec{n_2} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ mit $\left|\vec{n_2}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.

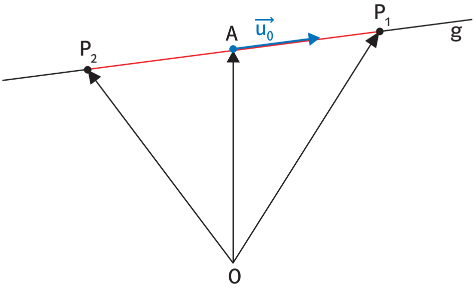
Bezeichnet β den Winkel zwischen E_1 und E_2, so gilt:

$$\cos(\beta) = \frac{\left|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right|}{\left|\vec{n_1}\right|\cdot\left|\vec{n_2}\right|} = \frac{\left|\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \text{ und } \beta = 60°.$$

Damit gilt für den Winkel α zwischen den Seitenflächen: **$\alpha = 180° - \beta = 120°$**.

Gesucht sind Punkte P_1 und P_2 auf g, die von A den Abstand 15 haben.
Ist $\vec{u}$ ein Richtungsvektor von g und $\vec{u_0}$ der Einheitsvektor von $\vec{u}$, so gilt:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad |\vec{u}| = \sqrt{16 + 9} = 5; \quad \vec{u_0} = \frac{1}{5} \cdot \vec{u} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$



Für die Ortsvektoren von P_1 und P_2 erhält man (vgl. Fig.):

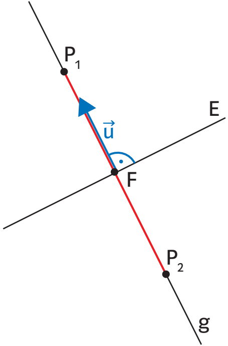
$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OA} + 15 \cdot \vec{u_0} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} + 15 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \\ 18 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OA} - 15 \cdot \vec{u_0} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} - 15 \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Also sind $\mathbf{P_1(22\,|\,-1\,|\,18)}$ und $\mathbf{P_2(-2\,|\,-1\,|\,0)}$ die gesuchten Punkte auf g.

Es sei g das Lot zu E durch F.
Gesucht sind Punkte P_1 und P_2 auf g, die von F den Abstand 12 haben.
Ein Normalenvektor von E ist ein Richtungsvektor $\vec{u}$ von g (vgl. Fig.).
Ist $\vec{u_0}$ der Einheitsvektor von $\vec{u}$, so gilt:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix};\quad |\vec{u}| = \sqrt{1+4+4} = 3;\quad \vec{u_0} = \frac{1}{3}\cdot\vec{u} = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



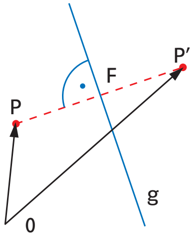
Für die Ortsvektoren von P_1 und P_2 erhält man:

$$\overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OF} + 12\cdot\vec{u_0} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 12\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{OF} - 12\cdot\vec{u_0} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 12\cdot\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -7 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Also sind $\mathbf{P_1(-1\,|\,9\,|\,9)}$ und $\mathbf{P_2(-9\,|\,-7\,|\,-7)}$ die gesuchten Punkte auf dem Lot.

Ist F der Fußpunkt des Lotes von P auf g, so gilt (vgl. Fig.):
$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$.
Berechnung der Koordinaten von F:
Es sei H die Hilfsebene, die orthogonal zu g ist und durch P geht. Ein Richtungsvektor von g ist ein Normalenvektor von H:



$$H: \left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 ,$$

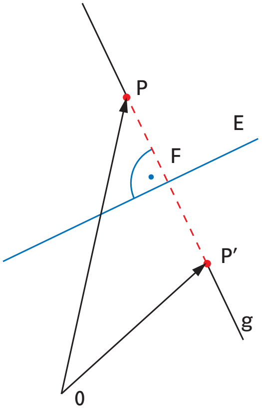
bzw. $3(x_1 - 3) + 2(x_2 - 7) - (x_3 + 2) = 0$,
ausmultipliziert: $3x_1 + 2x_2 - x_3 - 25 = 0$.
Setzt man die Koordinaten von g ein, ergibt sich:
$3(1 + 3t) + 2(-2 + 2t) - (2 - t) - 25 = 0$ mit der Lösung $t = 2$.
Damit ist $F(7|2|0)$ der Fußpunkt des Lotes von P auf g.

Mit $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich für den Ortsvektor des Bildpunktes P′: $\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Der Bildpunkt des Punktes P bei der Spiegelung an g ist **P′(11 | −3 | 2)**.

Ist F der Fußpunkt des Lotes von P auf E, so gilt (vgl. Fig.):
$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PF}$.
Berechnung der Koordinaten von F:
Es sei g die Gerade, die orthogonal zu E ist und durch P geht. Ein Normalenvektor von E ist ein Richtungsvektor von g:

$$g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.$$



Setzt man die Koordinaten von g in die Gleichung von E ein, ergibt sich:
$-5 + t - (1 - t) + 2(-4 + 2t) - 4 = 0$ mit der Lösung $t = 3$.
Damit ist $F(-2\,|\,-2\,|\,2)$ der Fußpunkt des Lotes von P auf E.

Mit $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$ ergibt sich für den Ortsvektor des Bildpunktes P′:

$$\overrightarrow{OP'} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Der Bildpunkt des Punktes P bei der Spiegelung an E ist **P′(1 | −5 | 8)**.

Man bestimmt zunächst eine Ebene E, die von zwei Geraden der Schar aufgespannt wird. Dann weist man nach, dass alle Geraden der Schar in dieser Ebene liegen.

Der Stützvektor ist unabhängig von a. Alle Geraden gehen durch den Punkt $P(1|0|-1)$.
E wird z.B. aufgespannt durch

g_0: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$ und g_1: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

Für die Ebene E gilt damit: E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; $r, s \in \mathbb{R}$.

Mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ergibt sich die Normalenform $\left[\vec{x} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

und hieraus die Koordinatenform $\mathbf{3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5 = 0}$.

Setzt man $x_1 = 1 + t(2 - a)$, $x_2 = ta$ und $x_3 = -1 + 3t$ in diese Gleichung ein, ergibt sich aus
$3(1 + t(2 - a)) + 3at - 2(-1 + 3t) = 5$ die wahre Aussage $5 = 5$.
Alle Geraden g_a liegen in der Ebene E: $3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 5 = 0$.

!

Man bestimmt zunächst die Schnittgerade zweier spezieller Ebenen der Schar.
Dann weist man nach, dass diese Gerade in allen Ebenen der Schar liegt.

E_0: $-2x_1 + x_2 + x_3 = 5$;
E_1: $-x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$.

Subtraktion beider Gleichungen ergibt: $x_1 + 2x_3 = -3$.
Setzt man $x_3 = t$, folgt $x_1 = -3 - 2t$ und dann $x_2 = -1 - 5t$.

Aus $\begin{array}{l} x_1 = -3 - 2t \\ x_2 = -1 - 5t \\ x_3 = \quad\quad\; t \end{array}$ folgt $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $t \in \mathbb{R}$.

Setzt man $x_1 = -3 - 2t$, $x_2 = -1 - 5t$ und $x_3 = t$ in die Gleichung für E_a ein, ergibt sich aus
$(a - 2)(-3 - 2t) + (-1 - 5t) + (2a + 1)t = 5 - 3a$ die wahre Aussage $5 = 5$.

Alle Ebenen E_a haben also eine Gerade g gemeinsam.
Für diese gilt:

$$\mathbf{g:}\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}.$$

!