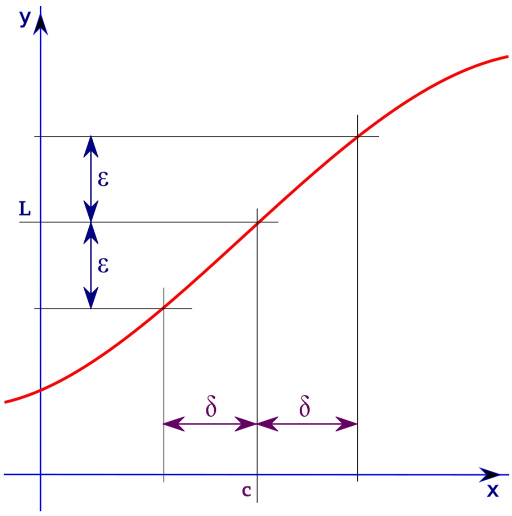
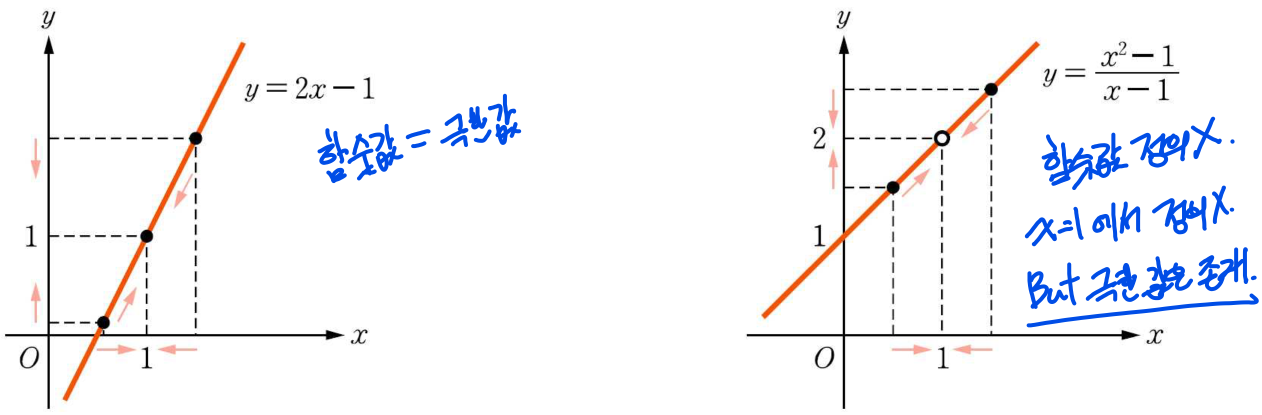
미분

극한

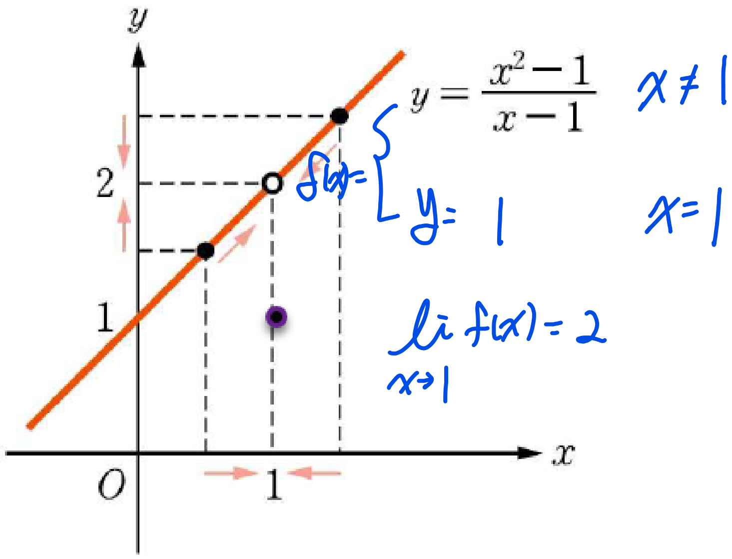
- x가 한없이 a에 가까워질 때 $f\,(x)$가 한없이 L에 가까워지면, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ 이라 표기하고 L 은 $f(x)$의 a의 극한값 이라 한다.
- 임의의 $\epsilon > 0$에 대하여, 어떤 $\delta > 0$가 존재하여, 임의의 $x \in E$에 대하여, $0 < |x - a| < \delta$는 $|f(x) - L| < \epsilon$ 을 함의한다.
- $\forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in E\colon \; 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon$





(a) $x = 1$에서 정의되는 경우

(b) $x = 1$에서 정의되지 않는 경우

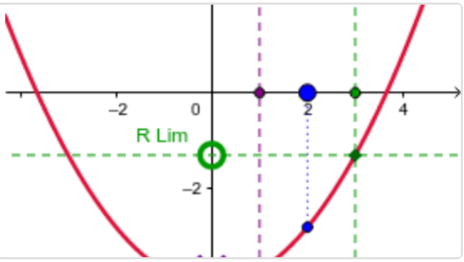


[그림 5-2] 극한과 함숫값이 다른 경우

Review - Limits & Continuity

blue dot to the value of "" where the limit and continuity are to be evaluated. As you move the slider (or run the animation), two values of will approach : one from the left (negative side), and

https://www.geogebra.org/m/p3qXFH35



미분

극한

두점과 직선

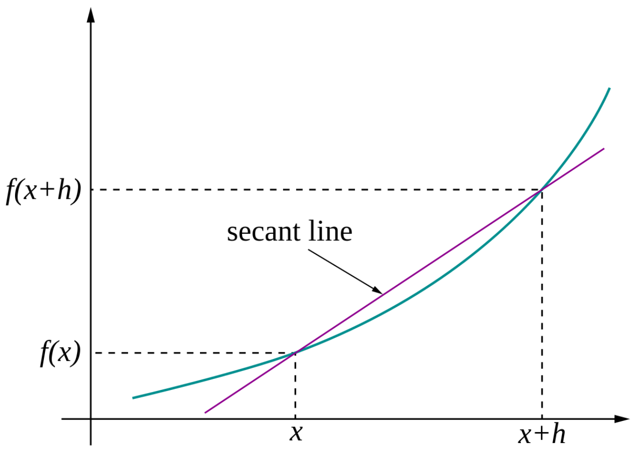
- 서로 다른 두점 $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$ 을 지나는 직선의 방정식은 $(y-y_1)(x_2-x_1) = (x-x_1)(y_2-y_1)$ 이다.
- 이때 직선의 기울기는 $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ 이다.

도입

- 오민엽이 A 에서 B 15km 거기를 걸어서 이동하는데 1시간 30분이 걸렸다. 이때 오민엽의 평균 속도는?
    - 평균속도 $v = \frac{15km}{1.5h} = 10km/h$
    - 시간당 10km를 이동했다.
- 10 분동안 몇 km를 이동할수 있을까?
- 1초에 몇 km를 이동할수 있을까?

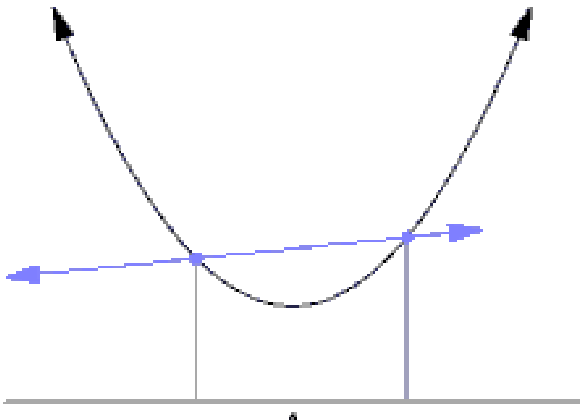
평균 변화율

- $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$



순간 변화율

- $\dfrac{dy}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$



정의

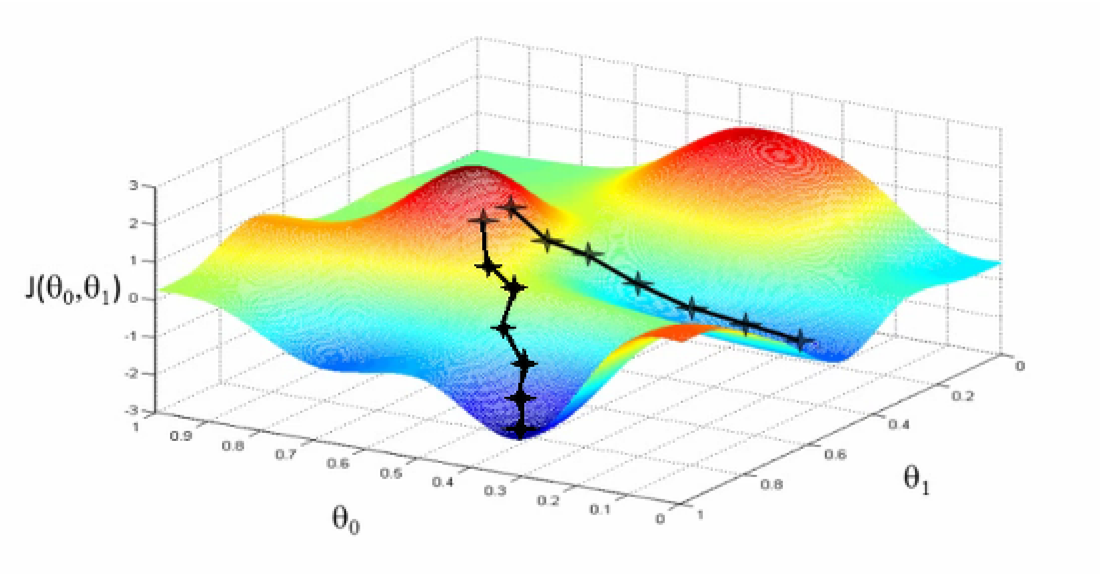
함수 $f\colon I \to \mathbb{R}$(I 는 개구간)의 점 $a \in I$ 에서의 **미분** $f'(a)$ 은 다음과 같은 극한이다.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} \end{aligned}$$

이러한 극한은 존재하지 않을 수 있다. 이 극한이 존재하는 경우, f가 a 에서 **미분가능** 하다고 한다.

$f'(a), Df(a), \dfrac{df}{dx}(a)$ 와 같이 여러 가지가 있다.

최적화



미분 공식

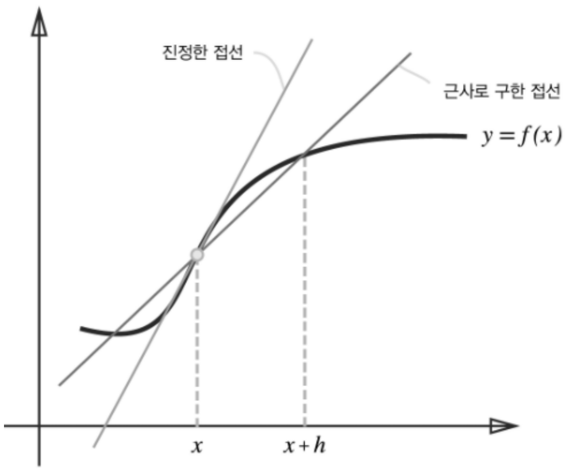
- (상수 함수) $(C)' = 0$
- (멱함수) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
- (지수 함수) $(e^x)' = e^x$
- (지수 함수) $(a^x)' = a^x \ln a \qquad (a > 0)$
- (로그 함수) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
- (로그 함수) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \qquad (a > 0,\ a \neq 1)$

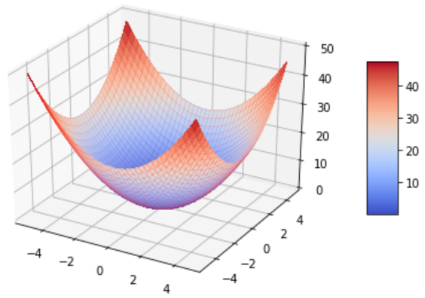
미분 법칙

- (합의 법칙) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
- (곱의 법칙) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- (몫의 법칙) $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
- (연쇄 법칙) $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$

수치 미분

- h는 시간을 의미한다. 시간을 한없이 줄인다.
  - 0에 가까운 아주 작은 값을 컴퓨터로 완벽하게 구현할수 없다. 왜냐면 무한대의 개념이기 때문
  - 따라서 해석적 미분이 아닌 수치미분을 이용해 미분의 근사값을 구하게 된다.





$f(x_0, x_1) = x_0^2 + x_1^2$

연쇄법칙

실변수 실수 함수

- 함수 g가 x_0에서 미분 가능하며, 함수 f가 $g(x_0)$에서 미분 가능하다고 하자. 그렇다면, $f \circ g$는 x_0 에서 미분 가능하며, 그 미분은 다음과 같다.
  - $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$
- 특히, 만약 g가 구간 I에서, f가 $g(I)$에서 미분 가능하다면, $f \circ g$는 I에서 미분 가능하며, 그 미분은 다음과 같다.
  - $(f \circ g)' = (f' \circ g) \cdot g'$

- 이를 라이프니츠 표기법 및 표기 $y = f(u)$, $u = g(x)$를 사용하여 다시 쓰면 다음과 같다.
    - $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

편미분

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h, x_2, \ldots, x_n) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + h) - f(\boldsymbol{x})}{h}$$

Example 5.6 (Partial Derivatives Using the Chain Rule)
For $f(x, y) = (x + 2y^3)^2$, we obtain the partial derivatives

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 2(x + 2y^3)\frac{\partial}{\partial x}(x + 2y^3) = 2(x + 2y^3)\,, \tag{5.41}$$