선형(linear) 대수학(Algebra)

선형대수학

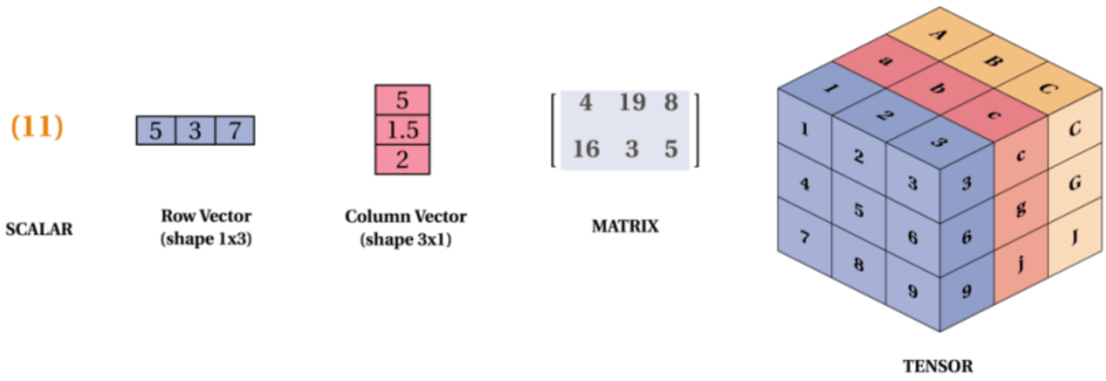
- 연립선형방정식의 해법
- 벡터공간, 차원

선형과 선형방적식

- 최고차항의 차수가 1인 방정식(=일차방정식)

스칼라 벡터 행렬 텐서

- 스칼라 : $x \in R$
- 벡터 : $x \in R^n$(단, $n \in N$)
- 행렬 : $x \in R^{n \times m}$(단, $n, m \in N$은 자연수)



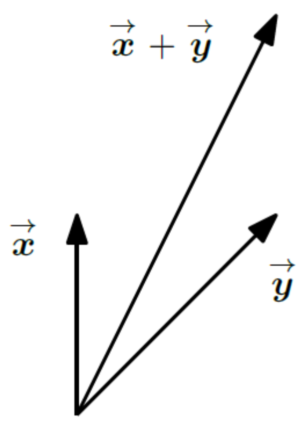
스칼라

(스칼라 배)임의의 체 F에 대하여 함수 $f : F \times V \to V, f(a, v) = a \cdot v$(스칼라 배)가 존재하고 임의의 $a, b \in Fu, v \in V$에 대해 다음이 성립한다.

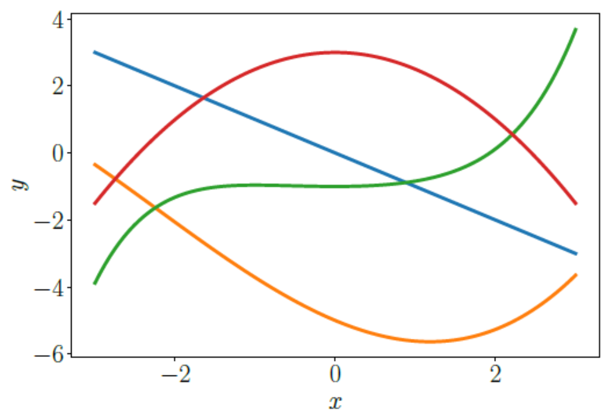
- $a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
- $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
- $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$
- $1 \cdot v = v$

벡터

표현



(a) Geometric vectors.



(b) Polynomials.

행백터 와 열백터

- 행벡터

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_m \end{bmatrix}$$

- 열벡터

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

벡터공간

- (가환군)V 위에 $+$가 정의되어 있으며, $(V, +)$는 가환군(아벨군)이다. 즉 다음의 4가지 성질을 만족한다.임의의 $u, v, w \in V$에 대하여
  - 덧셈에 대한 항등원 존재: VV에는 특정한 원소 0이 존재하여 모든 $v \in V$에 대하여
  - 덧셈에 대한 역원 존재: V의 임의의 원소 v에 대하여 $v + u = u + v = 0$을 만족하는 $u \in V$가 존재한다.
  - 교환법칙 성립: $u + v = v + u$
  - 결합법칙 성립: $(u + v) + w = u + (v + w)$

연산

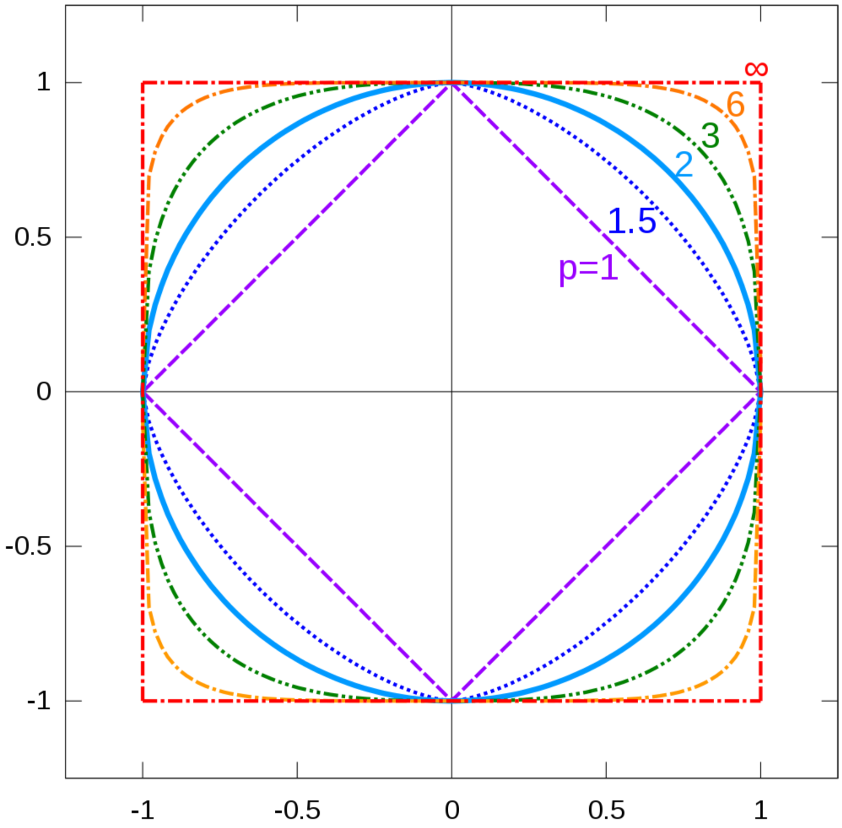
- 덧셈
  - $a + b = (a1 + b1,\ a2 + b2,\ a3 + b3)$
- 실수배 (scalar multiplication)
  - $ka = (ka1, ka2, ka3)$
- 내적(dot product)
  - $a \cdot b =< a, b >= \|a\|\|b\|cos\theta = det(a * b) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
  - 벡터의 연산결과로 스칼라가 나온다.
  - $< a, b >= 0$ 이면 벡터 a, b가 서로 직교한다.
- 외적

거리

- norm 이란 벡터의 크기를 의미한다.

- 실수 에 대해 p ≥ 1, the **p-norm** or **Lp-norm** 은 다음과 같이 정의 한다.

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{1/p}$$



L1 norm

- 정의

  $$L_1 = \|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + |x_3| + \ldots. + |x_n|$$

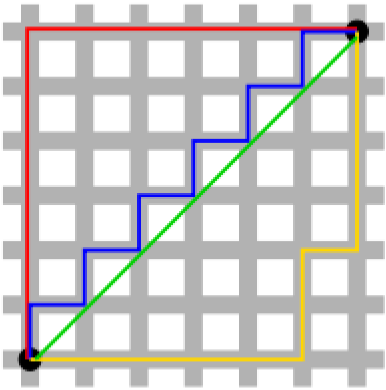
- 절댓값으로 두 벡터 간의 거리를 구한다.
- 맨해튼 거리

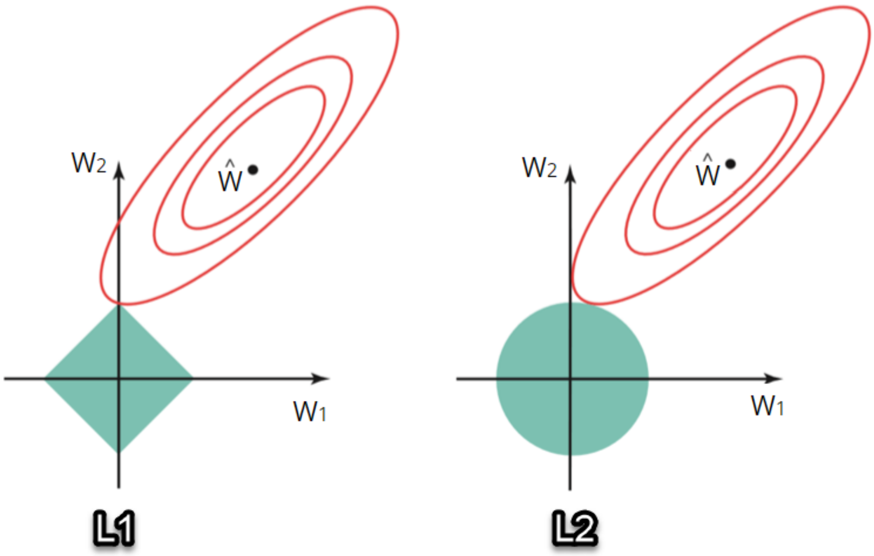
L2 norm

- 정의

  $$L_2 = \|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2}$$

- 유클리드거리



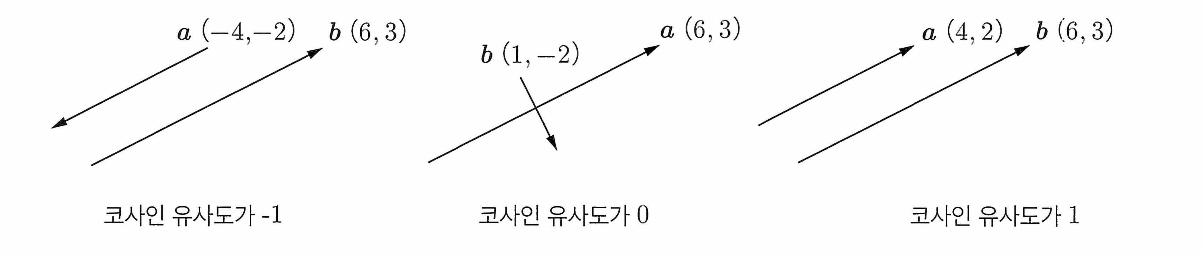

W2
Ŵ
W1
L1
W2
Ŵ
W1
L2

구분	릿지회귀	라쏘회귀	엘라스틱넷
제약식	L_2 norm	L_1 norm	L_1+L_2 norm
변수선택	불가능	가능	가능
solution	closed form	명시해 없음	명시해 없음
장점	변수간 상관관계가 높아도 좋은 성능	변수간 상관관계가 높으면 성능↓	변수간 상관관계를 반영한 정규화
특징	크기가 큰 변수를 우선적으로 줄임	비중요 변수를 우선적으로 줄임	상관관계가 큰 변수를 동시에 선택/배제

유사도

코사인 유사도

- 두 벡터가 이루는 각도를 통해 유사도 측정
- 최대 1, 최소 -1의 값을 갖는다.
- $$\text{similarity} = \cos(\theta) = \frac{A \cdot B}{\|A\|\|B\|} = \frac{\sum_{i=1}^{n} A_i \times B_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(A_i)^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(B_i)^2}}$$

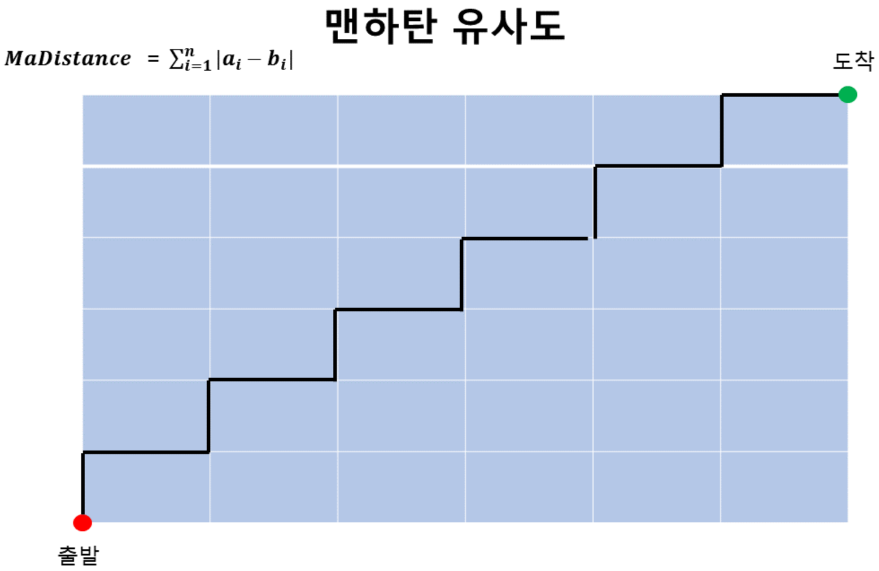


▲ 그림 3.8.1 코사인 유사도의 개념

- 두 벡터의 코사인 유사도가 높을수록 비슷한 벡터 이다.

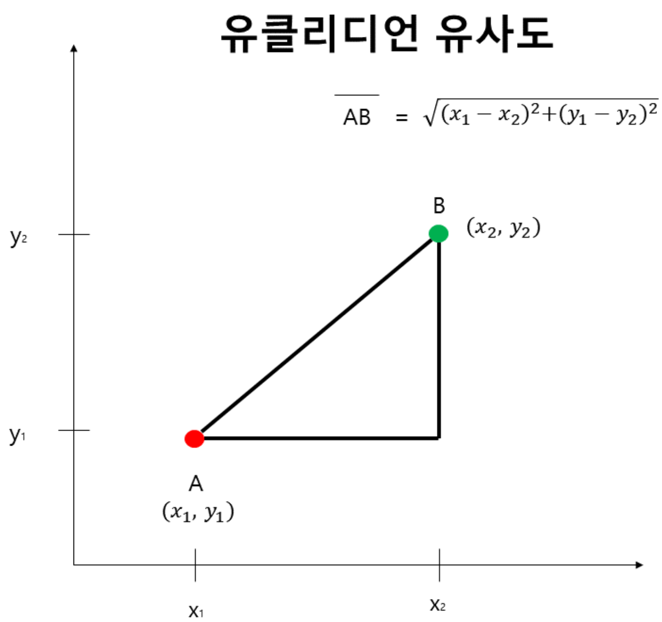
멘하탄 유사도

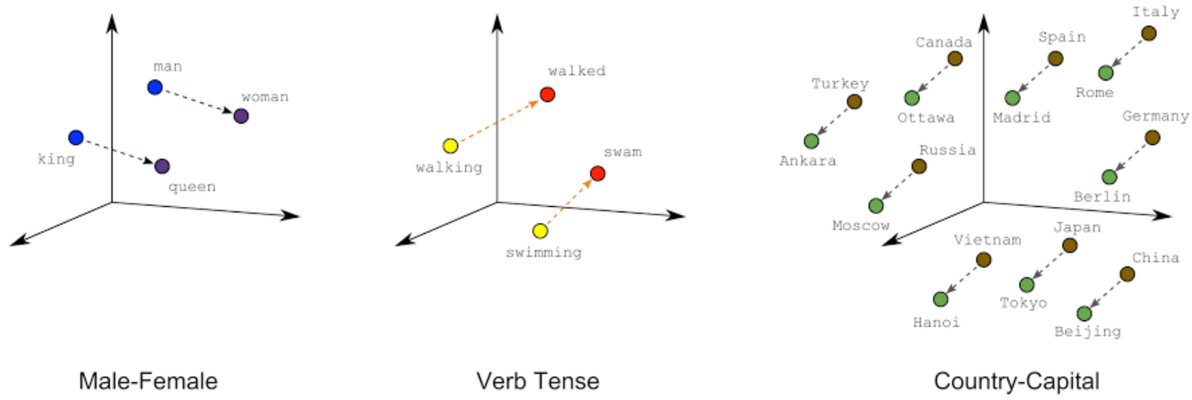
- L_1거리 측정에 의한 유사도 측정법



유클라디언 유사도

- L_2거리 측정에 의한 유사도 측정법
-





행렬

- 수나 식을 사각형 모양으로 배열하고 괄호로 묶어 놓은것

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} a & a^2 & a^3 \\ a+b & a & 2b^2 \\ b^2 & ab & 3b \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{R}.$$

주요 용도

- 연립 일차 방정식의 해법
- 많은 데이터들의 동시연산

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

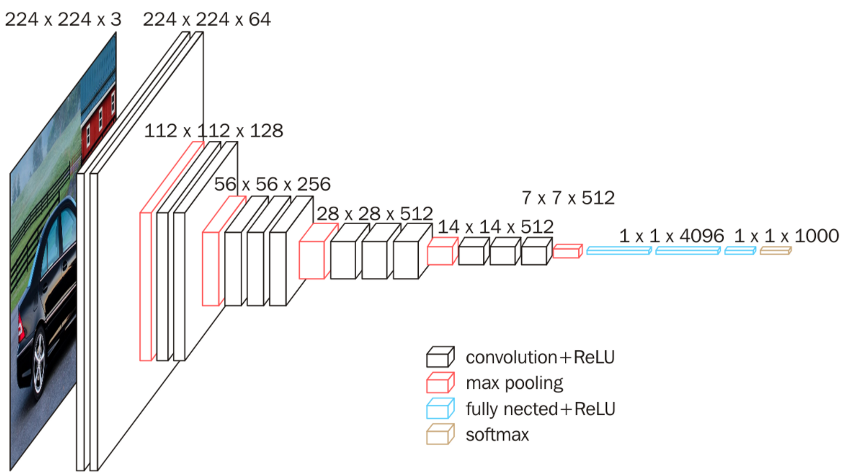
$$\iff \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

표현

- 정형화된 데이터의 처리

	1월	2월	3월	4월	5월	6월	7월	8월	9월	10월	11월	12월
2014	7.2	11.1	9.3	7.9	8	11.2	15	17.9	7.3	6.6	8.5	10.9
2015	10.2	6.4	5.5	14.3	6.3	10.2	15	11.2	7.1	6.4	16.2	11
2016	6.2	7.5	8.4	12	9.2	10.1	12.5	7.8	13.2	11.1	9.1	8.5
2017	7.8	7	6.7	9	5.5	8.1	17	14.7	6	7.2	5.6	7
2018	7.2	2.8	11	10.5	12	9.4	8	10.7	11	6	12	7.3
2019	3.9	7	8.2	11.1	6	6.9	10.7	12.8	9.5	4	8	7.4

- 영상및 사진의 처리



- 텍스트 처리

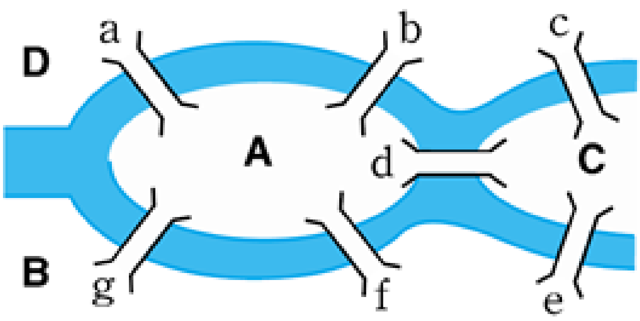
[표 1-1] 텍스트 데이터의 예

문서	내용
c_1	Human machine interface for Lab ABS computer application
c_2	A survey of user opinion of computer system response time
c_3	The EPS user interface management system
c_4	System and human system engineering testing of EPS
c_5	Relation of user-perceived response time to error measurement
m_1	The generation of random, binary, unordered trees
m_2	The intersection graph of paths in trees
m_3	Graph minors TV : Widths of trees and well-quasi-ordering
m_4	Graph minors: A survey

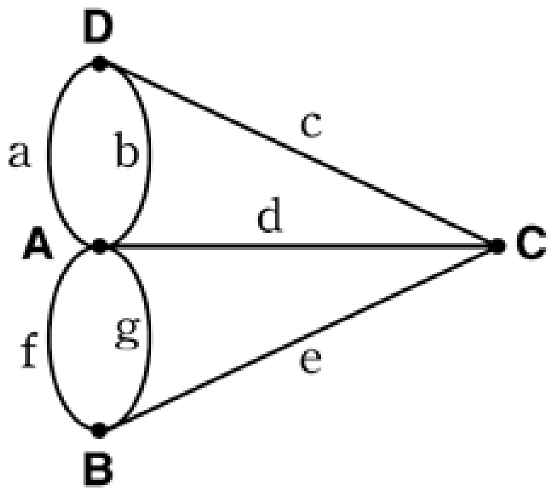
[표 1-2] 텍스트 데이터의 행렬 표현

단어	문서								
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	m_1	m_2	m_3	m_4
computer	1	1	0	0	0	0	0	0	0
EPS	0	0	1	1	0	0	0	0	0
human	1	0	0	1	0	0	0	0	0
interface	1	0	1	0	0	0	0	0	0
response	0	1	0	0	1	0	0	0	0
system	0	1	1	2	0	0	0	0	0
time	0	1	0	0	1	0	0	0	0
user	0	1	1	0	1	0	0	0	0
graph	0	0	0	0	0	0	1	1	1
minors	0	0	0	0	0	0	0	1	1
survey	0	1	0	0	0	0	0	0	1
trees	0	0	0	0	0	1	1	1	0

- 그래프 데이터 처리



(a) 쾨니히스베르크 다리 지도

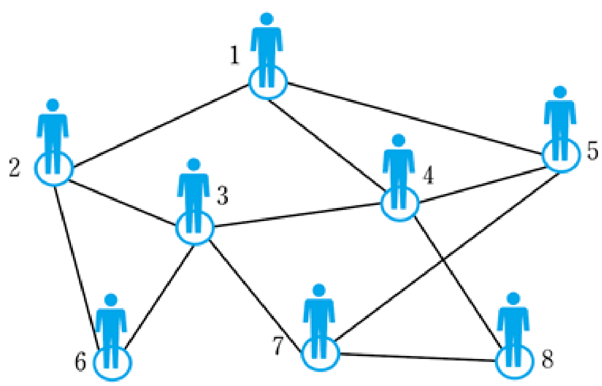


(b) 그래프 표현

$$
\begin{array}{c}
 \\ A \\ B \\ C \\ D
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

(c) 행렬 표현

- Relationship



(a) 소셜 네트워크의 예

$$
\begin{array}{c|cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8
\end{array}
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
$$

(b) 행렬 표현

구성요소

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} \phantom{a_{11}} & \text{열} & & \phantom{a_{1n}} \end{array} \\
\text{행} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}
$$

행벡터

$$
\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}
$$

열벡터

- 성분(원소, element)
- 행(row)
- 열(column)

행렬의 덧셈 뺄셈, 곱셈

The sum of two matrices $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ is defined as the element-wise sum, i.e.,

$$
\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} := \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{2.12}
$$

For matrices $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times k}$, the elements c_{ij} of the product $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AB} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ are computed as

$$
c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}, \qquad i = 1,\dots,m, \quad j = 1,\dots,k. \tag{2.13}
$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad AB = C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mp} \end{bmatrix}$$

- 주의사항

Remark. Matrices can only be multiplied if their "neighboring" dimensions match. For instance, an $n \times k$-matrix $\boldsymbol{A}$ can be multiplied with a $k \times m$-matrix $\boldsymbol{B}$, but only from the left side:

$$\underbrace{\boldsymbol{A}}_{n\times k}\underbrace{\boldsymbol{B}}_{k\times m} = \underbrace{\boldsymbol{C}}_{n\times m} \tag{2.14}$$

The product $\boldsymbol{BA}$ is not defined if $m \neq n$ since the neighboring dimensions do not match. $\diamondsuit$

- 예제

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8 \\ 3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

Example 2.3

For $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times3}$, $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times2}$, we obtain

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times2}, \tag{2.15}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times3}. \tag{2.16}$$

- 교환법칙, 분배법칙 성립가능

- *Associativity:*

$$\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times p}, \boldsymbol{C} \in \mathbb{R}^{p\times q} : (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) \tag{2.18}$$

- *Distributivity:*

$$\forall \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in \mathbb{R}^{n\times p} : (\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC} \tag{2.19a}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C} + \boldsymbol{D}) = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{AD} \tag{2.19b}$$

- Multiplication with the identity matrix:

$$\forall \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n} : \boldsymbol{I}_m \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{A} \tag{2.20}$$

Note that $\boldsymbol{I}_m \neq \boldsymbol{I}_n$ for $m \neq n$.

예

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- 덧셈

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+6 & 2+5 \\ 3+4 & 4+3 \\ 5+2 & 6+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

- 뺄셈

$$A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-6 & 2-5 \\ 3-4 & 4-3 \\ 5-2 & 6-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ -1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

- 스칼라곱

$$10A = 10 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\times 10 & 2\times 10 \\ 3\times 10 & 4\times 10 \\ 5\times 10 & 6\times 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 20 \\ 30 & 40 \\ 50 & 60 \end{bmatrix}$$

단위행렬

Definition 2.2 (Identity Matrix)**.** In $\mathbb{R}^{n\times n}$, we define the *identity matrix*

$$\boldsymbol{I}_n := \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n} \tag{2.17}$$

역행렬

Example 2.4 (Inverse Matrix)

The matrices

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -7 & -7 & 6 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 5 & -4 \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

are inverse to each other since $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{I} = \boldsymbol{BA}$.

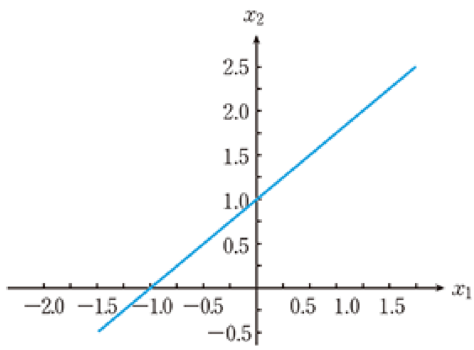
전치행렬

- 행과 열을 바꾼 행렬

Definition 2.4 (Transpose)**.** For $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ the matrix $\boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ with $b_{ij} = a_{ji}$ is called the *transpose* of $\boldsymbol{A}$. We write $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^\top$.

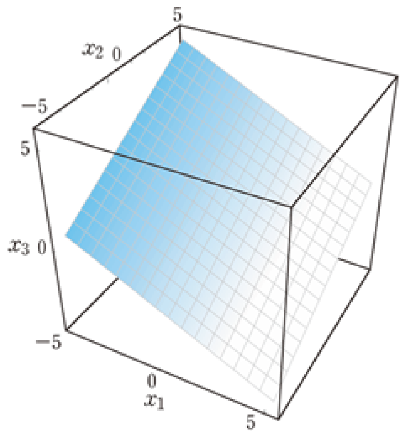
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 5 & 7 & 2 \end{bmatrix}, \quad A^\top = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

연립선형 방정식의 해결



(a) $x_1 - x_2 + 1 = 0$ 의 그래프

미지수가 2개인 선형방정식



(b) $x_1 - x_2 + 2x_3 - 2 = 0$ 의 그래프

미지수가 3개인 선형방정식

In (2.3), we introduced the general form of an equation system, i.e.,

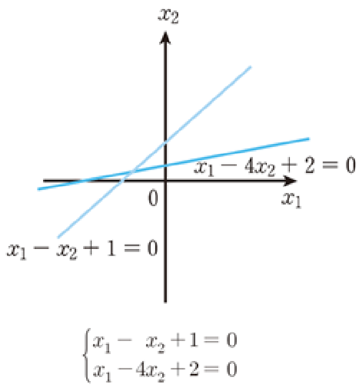
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m\,, \end{aligned} \tag{2.37}$$

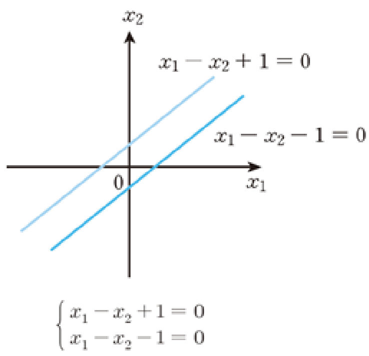
where $a_{ij} \in \mathbb{R}$ and $b_i \in \mathbb{R}$ are known constants and x_j are unknowns, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Thus far, we saw that matrices can be used as a compact way of formulating systems of linear equations so that we can write $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, see (2.10). Moreover, we defined basic matrix operations, such as addition and multiplication of matrices. In the following, we will focus on solving systems of linear equations and provide an algorithm for finding the inverse of a matrix.

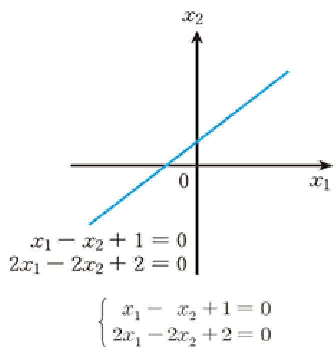
해집합

- 연립선형방정식의 모든 방정식을 만족하는 미지수의 값
- 연립 선형방정식의 해를 모아놓은 집합

해의 형태







하나의 해를 갖는 경우 해가 존재하지 않는 경우 해가 무수히 많은 경우

예

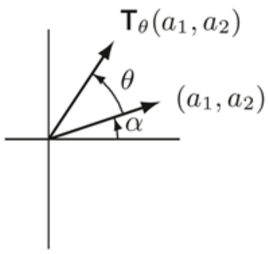
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 9 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

행렬의 응용

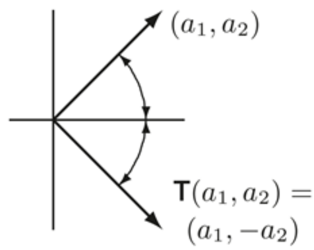
선형 변환

- 체 K 위의 두 벡터 공간 V, W 사이의 함수 $T: V \to W$ 에 대하여, 다음 조건들이 서로 동치 이며, 이를 만족시키는 T 를 **선형 변환** 이라고 한다
- 다음 두 조건을 만족시킨다.
  - 임의의 두 벡터 $u, v \in V$에 대하여, $T(u+v) = T(u) + T(v)$
  - 임의의 스칼라 및 벡터 $v \in V$에 대하여, $T(av) = aT(v)$

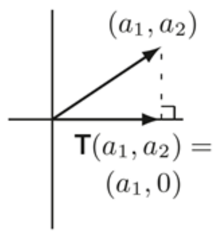
$$
\begin{tikzcd}
\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2 \arrow[r, "T"] \arrow[d, "+"] & T(\mathbf{u}_1),\ T(\mathbf{u}_2) \arrow[d, "+"] \\
\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \arrow[r, "T"] & T(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) = T(\mathbf{u}_1) + T(\mathbf{u}_2)
\end{tikzcd}
$$



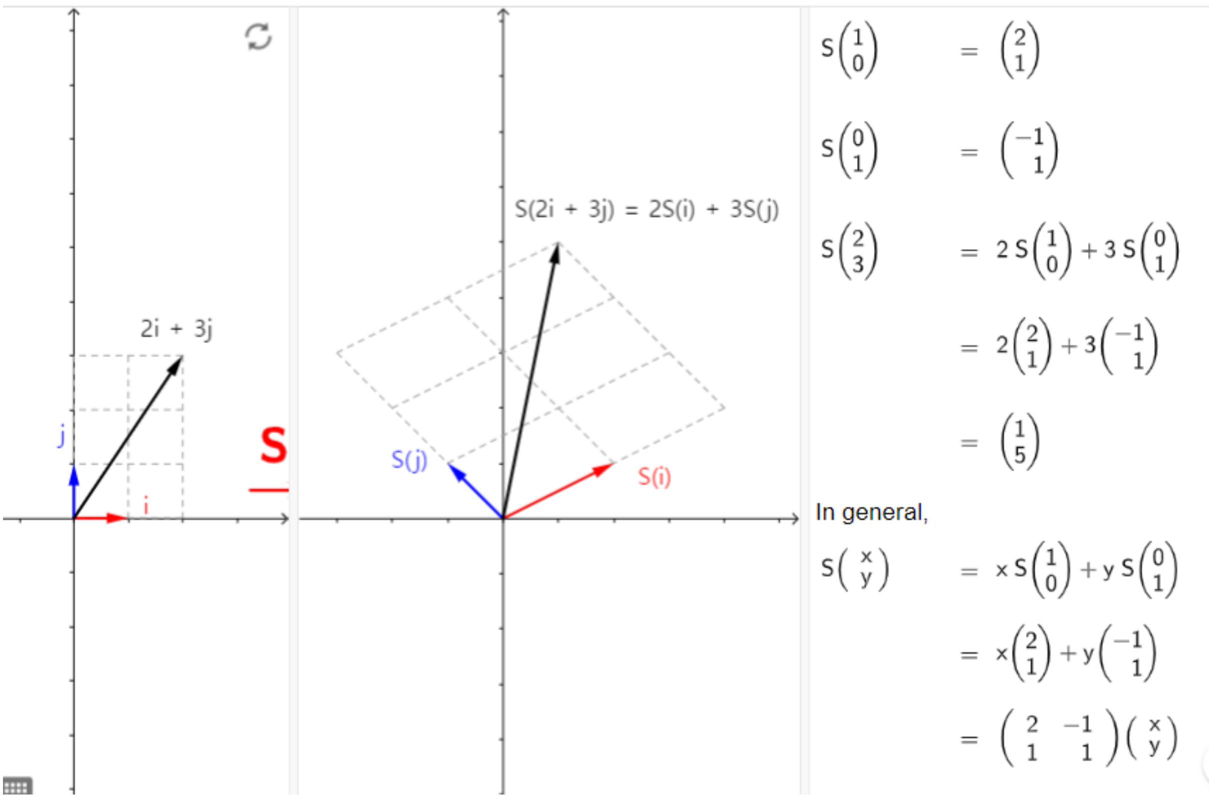
(a) 회전



(b) 대칭



(c) 사영



참고

- 선형변환과 비선형 변환

https://www.youtube.com/watch?v=kYB8IZa5AuE

```
선형변환의 例)
     -기하학적인 경우                                                ☞기하학적 선형변환 참조
        . 비례 변환 (확대 및 축소, dilation and contraction)
           .. T(cu) = cT(u)
        .회전 변환
        .반사 변환
        .층밀림 변환
        .사영 변환

     -연산의 경우 :미분연산자,적분연산자 등                                ☞선형연산자 참조

  ㅇ선형변환이 아닌 例)
     - 성분제곱 변환
        . 각 성분을 제곱하는연산은선형연산이 아님
           ..  T(x1,x2) = (x12,x22)
     - 이동 변환
        . 단지벡터를평행이동하는연산은선형연산이 아님 (평행이동 변환)
           ..  T(x) =x +x0
     -아핀 변환 (Affine Transformation)
        .행렬 A에 의한행렬변환 후평행이동
           ..  T(u) = Ax +xo

     * 비록,
        .평행이동 및아핀 변환은,선형변환이 아니지만,
        .행렬변환으로 취급이 가능
```

Affine 변환

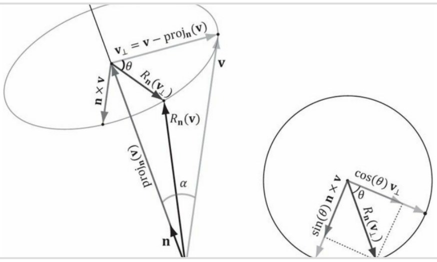
선형변환에 이동변환(translation transformation)을 **결합**한 것이다. 아핀변환은 선형변환에 이동벡터 b를 더한 것이다. 이를 수식으로 표현하면 다음과 같다.

- 벡터 $u, b \in V$에 대하여, 아핀변환 A는 선형변환 T에 대하여 다음과 같이 정의 한다.
  $A(u) = T(u) + b$

3. 변환-선형변환, 아핀변환, 함성, 좌표 변경 변환

함수 τ에 대하여 아래와 같은 성질이 성립하면, 그리고 오직 그럴 때에만 τ를 가리켜 선형변환(linear transformation)이라 부른다 $$\tau (u + v) = \tau (u) + \tau (v)$$ $$\tau(ku) = k \tau(u)$$ 여..

https://codingfarm.tistory.com/377



Neural Networks, Manifolds, and Topology

Posted on April 6, 2014 topology, neural networks, deep learning, manifold hypothesis Recently, there's been a great deal of excitement and interest in deep neural networks because they've achieved breakthrough results in areas such as computer vision. However, there remain a number of concerns about

https://colah.github.io/posts/2014-03-NN-Manifolds-Topology/

ambiguity	DOF	transformation	invariants
projective	15	$\mathbf{T}_P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$	cross-ratio
affine	12	$\mathbf{T}_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	relative distances along direction parallelism *plane at infinity*
metric	7	$\mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} \sigma r_{11} & \sigma r_{12} & \sigma r_{13} & t_x \\ \sigma r_{21} & \sigma r_{22} & \sigma r_{23} & t_y \\ \sigma r_{31} & \sigma r_{32} & \sigma r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	relative distances angles *absolute conic*
Euclidean	6	$\mathbf{T}_E = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	absolute distances

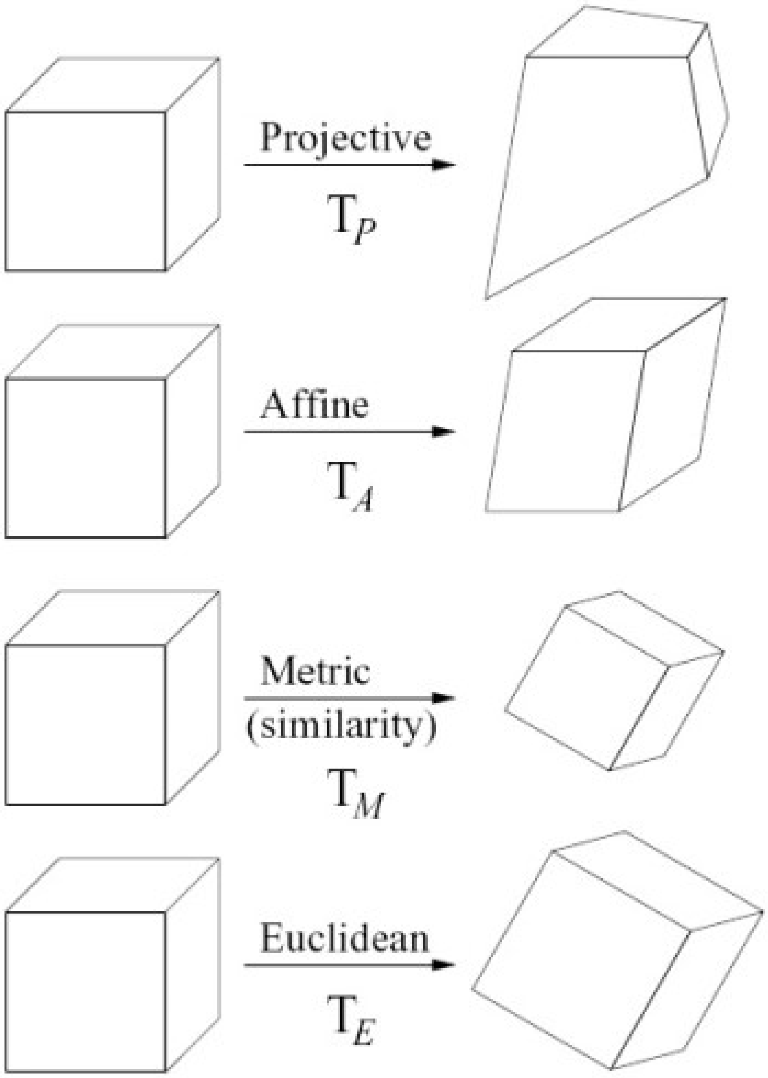
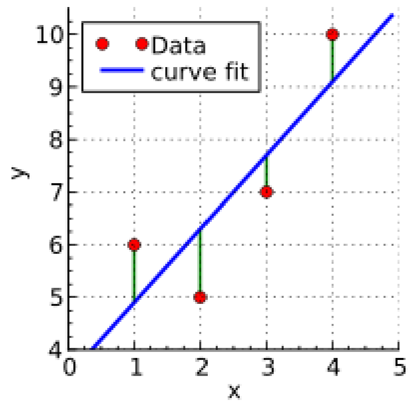
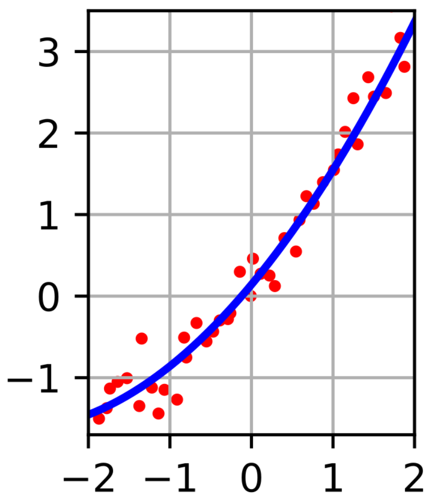


Figure 2.5: *Shapes which are equivalent to a cube for the different geometric ambiguities*

최소자승법

- **최소제곱법**, 또는 **최소자승법**, **최소제곱근사법**, **최소자승근사법** (method of least squares, least squares approximation)은 어떤 계의 해방정식을 근사적으로 구하는 방법으로, 근사적으로 구하려는 해와 실제 해의 오차의 제곱의 합 (SS)이 최소가 되는 해를 구하는 방법이다.





Linear least squares - Wikipedia

Linear least squares (LLS) is the least squares approximation of linear functions to data. It is a set of formulations for solving statistical problems involved in linear regression, including variants for ordinary (unweighted), weighted, and generalized (correlated) residuals. Numerical methods for linear least squares

W https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_least_squares