第五章

多维随机变量及其分布

一维随机变量及其分布

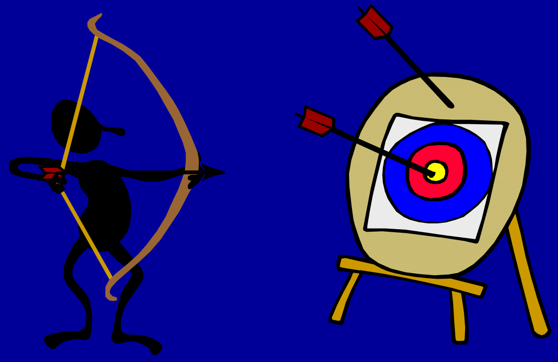
↓

多维随机变量及其分布

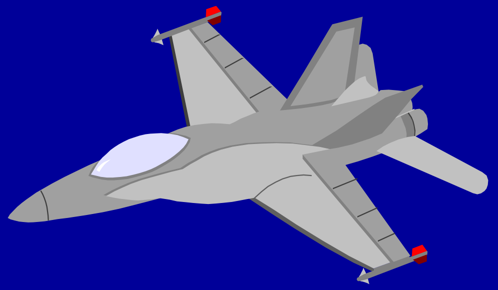
由于从二维推广到多维一般无实质性的困难，我们重点讨论二维随机变量．

到现在为止，我们只讨论了一维*r.v*及其分布. 但有些随机现象用一个随机变量来描述还不够，而需要用几个随机变量来描述.

在打靶时,命中点的位置是由一对*r.v*(两个坐标)来确定的.



飞机的重心在空中的位置是由三个*r.v* (三个坐标）来确定的等等.



一般地，我们称n个随机变量的整体$X=(X_1, X_2, \ldots, X_n)$为$n$维随机变量或随机向量. 以下重点讨论二维随机变量.

请注意与一维情形的对照 .

5.1 二维随机变量的联合分布

定义 设Ω为随机试验的样本空间，

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{一定法则}} \exists \left(X(\omega), Y(\omega) \right) \in R^2$$

则称(X, Y)为**二维*r.v.***或**二维随机向量**

1. 联合分布函数

定义 设(X, Y)为二维 *r.v.* 对任何一对实数(x, y), 事件

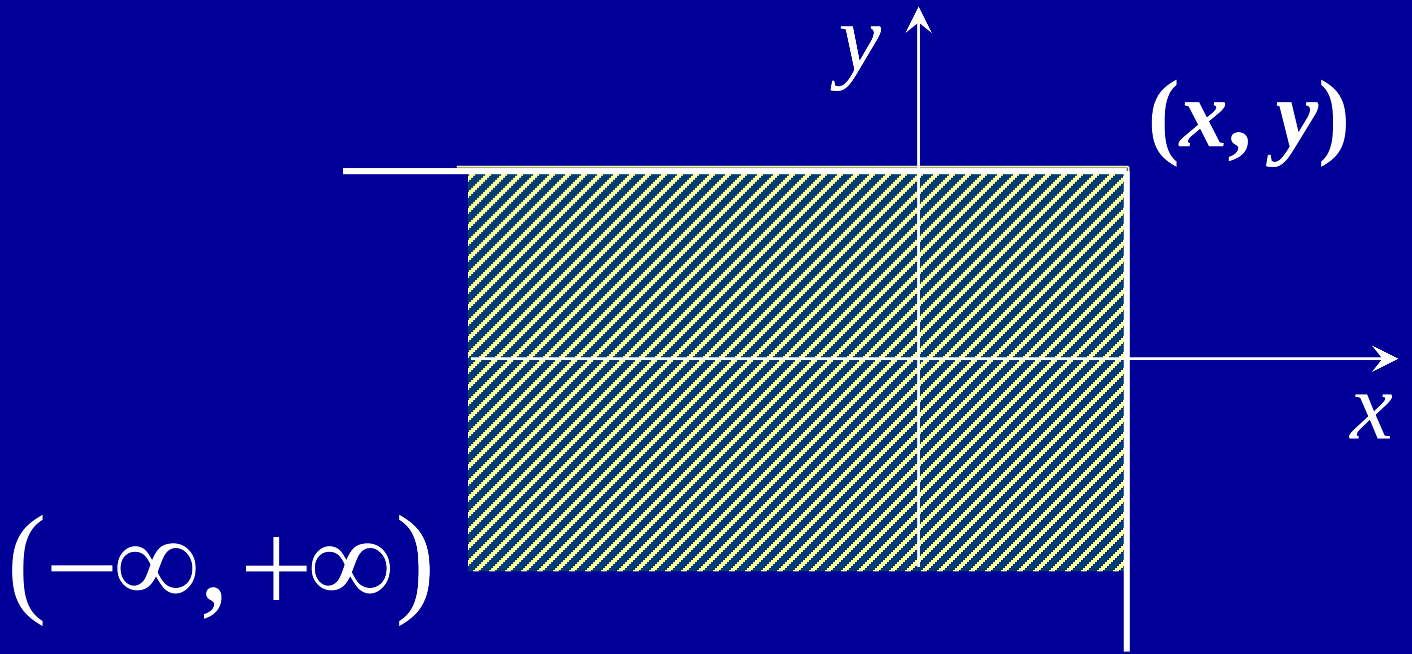
$$(X \le x) \cap (Y \le y) \quad (\text{记为}(X \le x, Y \le y))$$

的概率 $P(X \le x, Y \le y)$定义了一个二元实函数 $F(x, y)$，称为二维 *r.v.*(X, Y)的分布函数，即

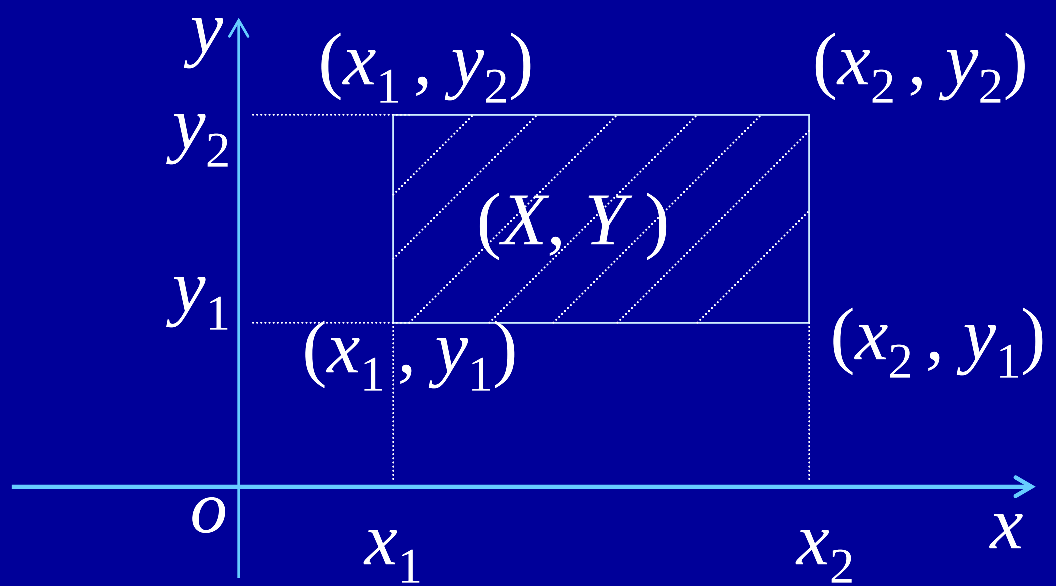
$$F(x, y) = P(X \le x, Y \le y)$$

分布函数的几何意义

如果用平面上的点 (x, y) 表示二维*r.v.* (X, Y)的一组可能的取值，则 $F(x, y)$ 表示 (X, Y) 的取值落入图所示角形区域的概率.



(X,Y) 落在矩形区域 $[x_1 < x \le x_2; y_1 < y \le y_2]$ 内的概率可用分布函数表示

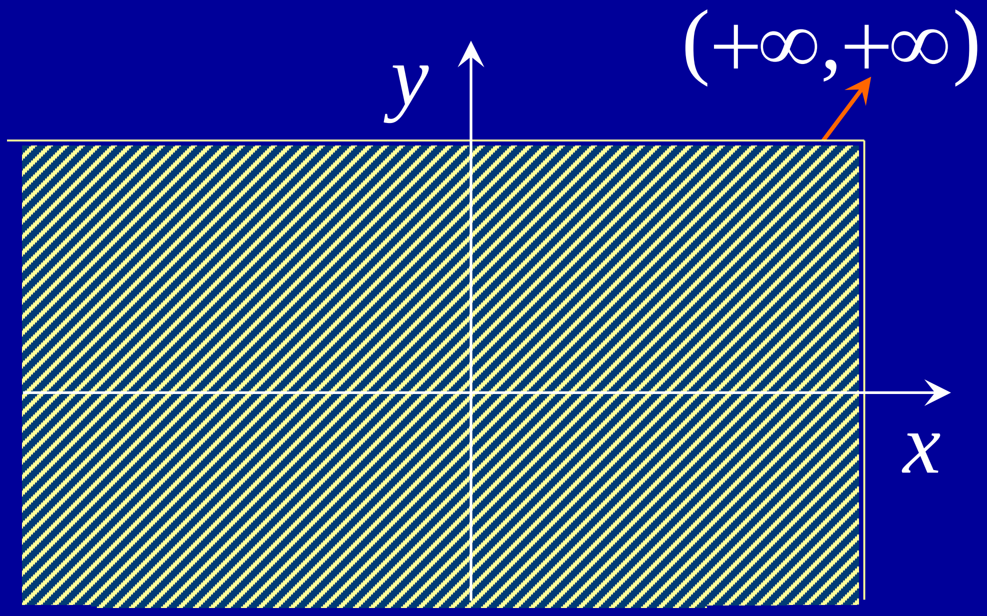


$$P(x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2)$$

$$= F(x_2, y_2) - F(x_2, y_1) - F(x_1, y_2) + F(x_1, y_1).$$

联合分布函数的性质

① $0 \le F(x,y) \le 1$

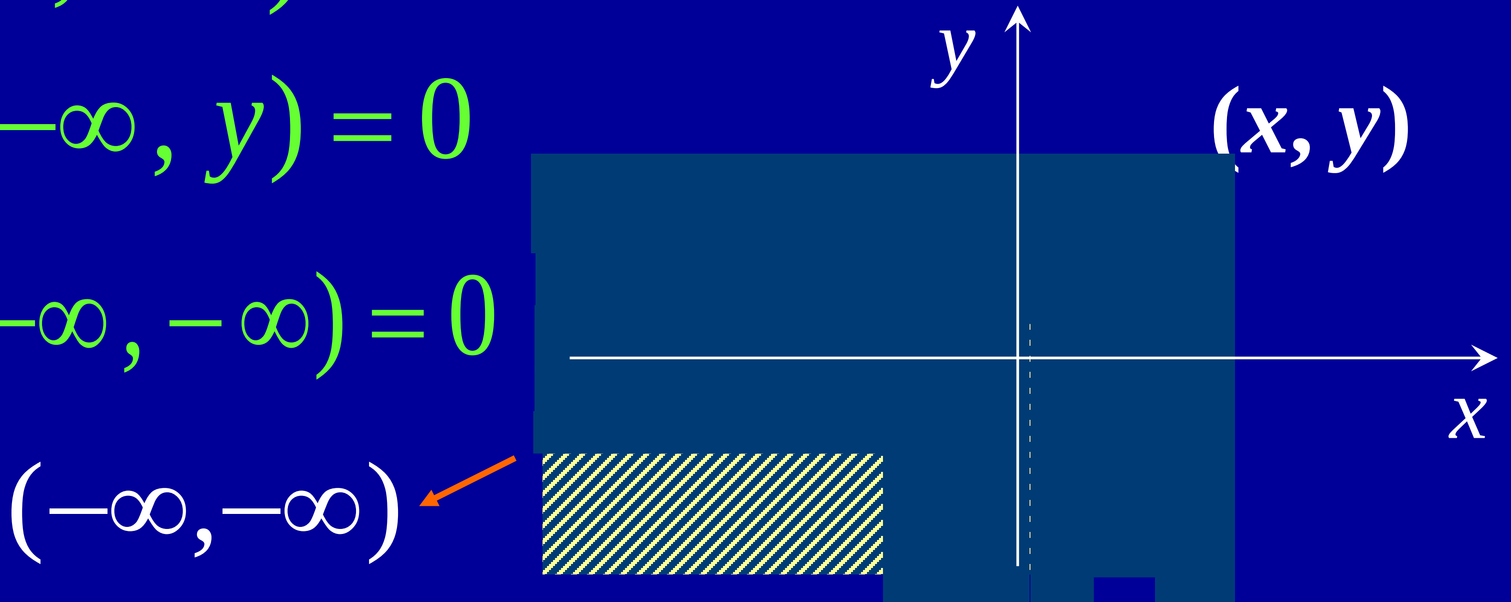


$$F(+\infty, +\infty) = 1$$

$$F(x, -\infty) = 0$$

$$F(-\infty, y) = 0$$

$$F(-\infty, -\infty) = 0$$



② 对每个变量单调不减

固定 x，对任意的 $y_1 < y_2$，

$$F(x, y_1) \le F(x, y_2)$$

固定 y，对任意的 $x_1 < x_2$，

$$F(x_1, y) \le F(x_2, y)$$

③ 对每个变量右连续

$$F(x_0, y_0) = F(x_0 + 0, y_0)$$

$$F(x_0, y_0) = F(x_0, y_0 + 0)$$

2. 二维离散型 *r.v.*及其概率分布

定义 若二维 *r.v.*(X,Y)所有可能的取值为有限多个或无穷可列多个, 则称(X,Y) 为二维离散型 *r.v.*

要描述二维离散型 *r.v.*的概率特性及其与每个 *r.v.*之间的关系常用其联合分布律和边缘分布律

联合分布律

设(X,Y)的所有可能的取值为

$$(x_i, y_j), \qquad i, j = 1,2,\cdots$$

则称

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1,2,\cdots$$

为二维 $r.v.(X,Y)$ 的联合概率分布
也简称 概率分布 或 分布律

显然， $p_{ij} \geq 0, \qquad i, j = 1,2,\cdots$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} = 1$$

(X,Y) 的联合分布律

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$

已知联合分布律可以求出其联合分布函数

二维离散 *r.v.*的联合分布函数

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

$$-\infty < x\ ,\ y < +\infty .$$

$p_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$ 的求法

(1) 利用古典概型直接求；

(2) 利用乘法公式

$$p_{ij} = P(X = x_i) P(Y = y_j \mid X = x_i).$$

例 箱子里装有4只白球和6只红球，在其中随机地取两次，每次取一只。考虑两种试验：（1）有放回抽样，（2）不放回抽样。我们定义随机变量 X，Y 如下，写出X和Y的联合分布律。

$$X=\begin{cases}1, & \text{若第1次取出的是红球,}\\ 0, & \text{若第1次取出的是白球.}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{若第2次取出的是红球,}\\ 0, & \text{若第2次取出的是白球.}\end{cases}$$

（1）有放回抽样

X \ Y	0	1
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$

（2）不放回抽样

X \ Y	0	1
0	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

3. 二维连续型随机变量

定义 设二维 *r.v.*(X ,Y)的分布函数为 $F(x,y)$,若存在非负可积函数 $f(x,y)$,

使得对于任意实数 x , y 有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}f(u,v)dvdu$$

则称(X ,Y) 为二维连续型 *r.v.*

$f(x,y)$ 为(X ,Y) 的联合概率密度函数

简称概率密度函数简记 *p.d.f.*

联合密度的性质

(1) $f(x,y) \ge 0$

(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dydx = 1$

(3) 在 $f(x,y)$ 的连续点处

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = f(x,y)$$

(4) 若**G** 是平面上的区域，则

$$P((X,Y)\in G) = \iint_G f(x,y)dxdy$$

例 设 **r.v.**(X,Y) 的联合 $d.f.$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数k； (2) 求 $P\{(X,Y)\in D_1\}$.

$$D_1: x^2\le y\le x, 0\le x\le 1$$

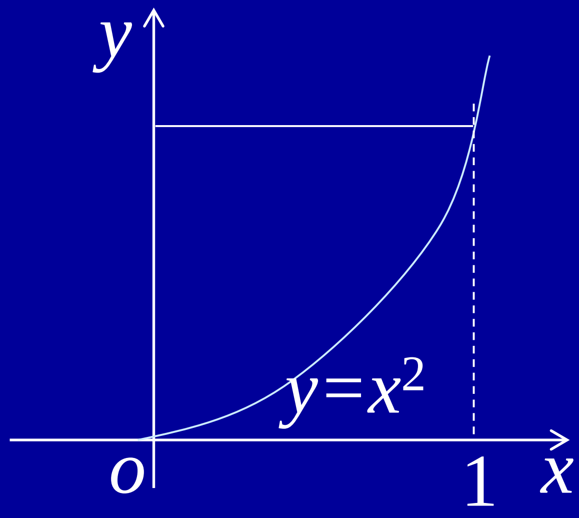
例 设 **r.v.**(X,Y) 的联合 $d.f.$ 为

$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 求常数k；　　(2) 求 $P\{(X,Y)\in D_1\}$.

解：(1) 由密度函数的性质，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy=\frac{k}{6}=1$$



所以，$k=6$.

例 设 ***r.v.***(X,Y) 的联合 *d.f.* 为

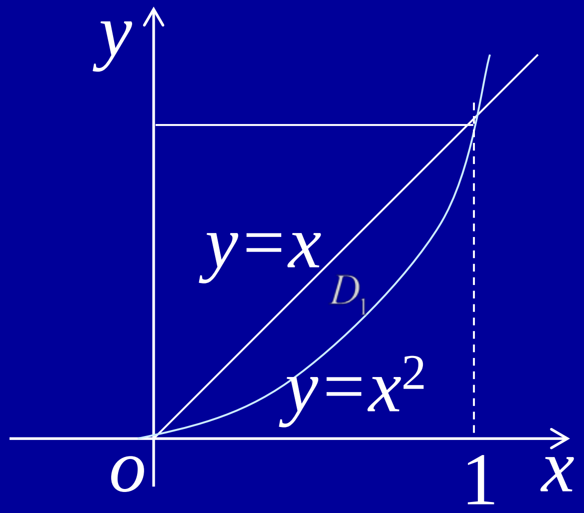
$$f(x,y)=\begin{cases} kxy, & 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(2) $P\{(X,Y)\in D_1\}$

$$=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x} 6xy\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}$$



常用连续型二维随机变量分布

- 区域G上的均匀分布，记作$U(G)$

  G是平面上的有界区域, 面积为A

  若$r.v.(X,Y)$的联合$d.f.$为

$$f(x,y)=\begin{cases} 1/A, & (x,y)\in G \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则称(X,Y)服从区域G上的均匀分布

若(X, Y)服从区域G上的均匀分布,

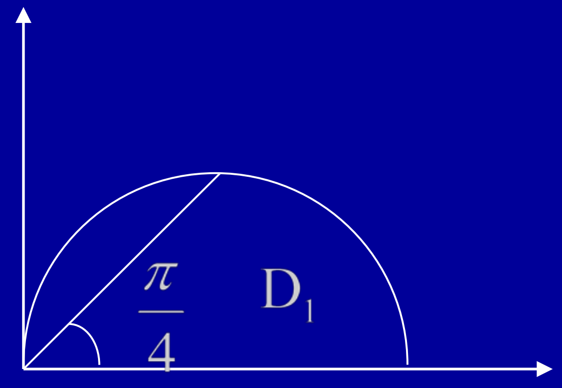
则 $\forall G_1 \subseteq G$, 设G_1的面积为A_1,

$$P((X,Y) \in G_1) = \frac{A_1}{A}$$

随机地向半圆$0 < y < \sqrt{2ax - x^2}$ （a为正常数） 内掷一点，点落在半圆内任何区域的概率与区域的面积成正比，求原点和该点的连线与x轴的夹角小于$\frac{\pi}{4}$的概率.

$$P((X,Y) \in G_1) = \frac{A_1}{A}$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}$$



二维正态分布

若$r.v.(X,Y)$的联合$d.f.$为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\times$$

$$e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^{\,2}}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^{\,2}}\right]}$$

$$-\infty<x<+\infty,-\infty<y<+\infty$$

则称(X,Y)服从参数为$\mu_1,\sigma_1^{\,2},\mu_2,\sigma_2^{\,2},\rho$的正态分布，记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^{\,2};\mu_2,\sigma_2^{\,2};\rho)$

其中$\sigma_1,\sigma_2>0$, $-1<\rho<1$.

5.2 边缘分布

- 边缘分布函数
- 边缘分布律
- 边缘概率密度

边缘分布

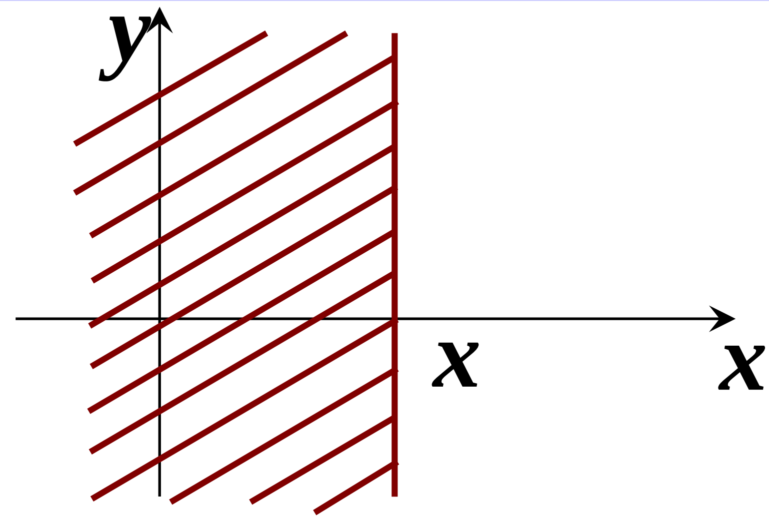
如果$(X，\ Y)$是一个二维随机变量，则它的分量$X$$(\text{或者}Y)$是一维随机变量，因此，分量$X$$(\text{或者}Y)$也有分布．我们称$X$$(\text{或者}Y)$的分布为$X$$(\text{或者}Y)$关于二维随机变量$(X，\ Y)$的边缘分布．

边缘分布也称为边沿分布或边际分布

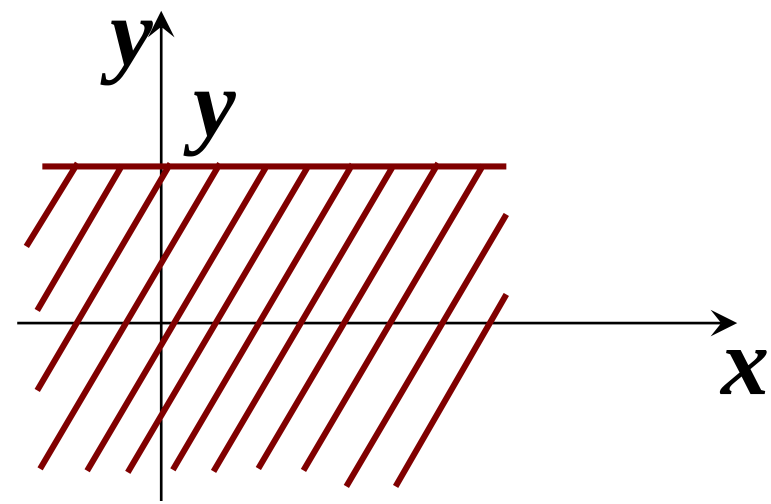
二维随机变量的边缘分布函数

由联合分布函数 $\Longrightarrow$ 边缘分布函数, 逆不真.

$$F_X(x) = P(X \le x) = P(X \le x, Y < +\infty) = F(x, +\infty)$$



$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(X < +\infty, Y \le y) = F(+\infty, y)$$



二维离散型随机变量的边缘分布

$$P(X=x_i)=\sum_{j=1}^{+\infty} p_{ij} \overset{\text{记作}}{=} p_{i\bullet}, \quad i=1,2,\cdots$$

$$P(Y=y_j)=\sum_{i=1}^{+\infty} p_{ij} \overset{\text{记作}}{=} p_{\bullet j}, \quad j=1,2,\cdots$$

由联合分布律可确定边缘分布律

联合分布律 及边缘分布律

$Y \backslash X$	x_1	$\cdots$	x_i	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
y_1	p_{11}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$	$p_{\cdot 1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
y_j	p_{1j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{\cdot j}$
$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
$p_{i\cdot}$	$p_{1\cdot}$	$\cdots$	$p_{i\cdot}$	$\cdots$	1

例 箱子里装有4只白球和6只红球，在其中随机地取两次，每次取一只。考虑两种试验：（1）有放回抽样，（2）不放回抽样。我们定义随机变量 X，Y 如下，写出X和Y的边缘分布律 。

$$X=\begin{cases}1, & \text{若第1次取出的是红球,}\\ 0, & \text{若第1次取出的是白球.}\end{cases}$$

$$Y=\begin{cases}1, & \text{若第2次取出的是红球,}\\ 0, & \text{若第2次取出的是白球.}\end{cases}$$

（1）有放回抽样

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{6}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

（2）不放回抽样

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\bullet}$
0	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{5}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$	$\frac{3}{5}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

二维连续型随机变量的边缘分布

$$F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dvdu$$

$$F_Y(y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u,v)dudv$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx$$

已知联合密度可以求得边缘密度

例 设随机变量$(X, \quad Y)\sim$

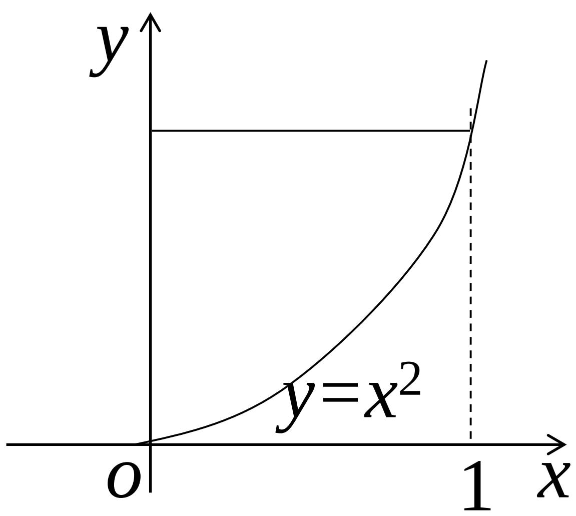
$$f(x,y)=\begin{cases}6xy, & 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求随机变量$(X, \quad Y)$的边缘密度函数.

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

当$x<0$或$x>1$时,

$$f_X(x)=0$$



例 设随机变量$(X,\quad Y)$~

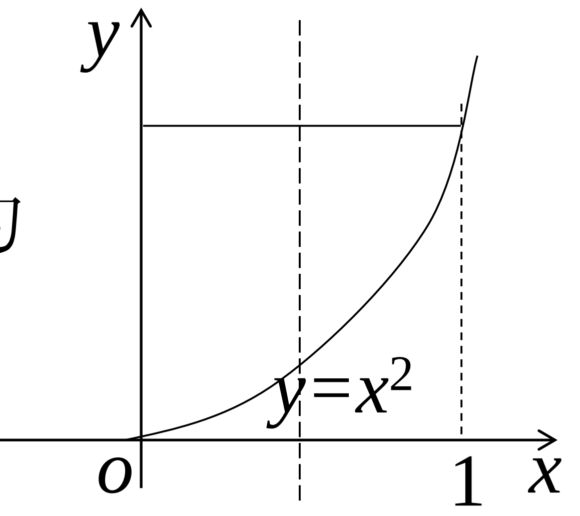
$$f(x,y)=\begin{cases}6xy, & 0\le x\le 1, x^2\le y\le 1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

试求随机变量$(X,\quad Y)$的边缘密度函数.

当$0 \le x \le 1$时,

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad y) dy = \int_{-\infty}^{x^2} 0 dy + \int_{x^2}^{1} 6xy dy + \int_{1}^{+\infty} 0 dy$$

$$= 3x(1 - x^4)$$



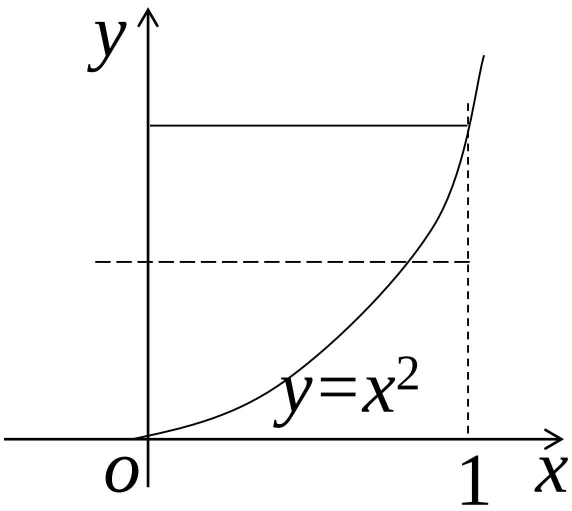
随机变量X的边缘密度函数为

$$f_X(x) = \begin{cases} 3x(1 - x^4) & 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

同理，随机变量Y的边缘密度函数为

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)dx$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} 3y^2, & 0 \le y \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$



例 设二维随机变量 $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 试求 X 及 Y 的边缘密度函数.

解：(X, Y) 的联合密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad y)dy$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}} \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \qquad (-\infty < y < +\infty)$$

这表明，$X \sim N\left(\mu_1, \quad \sigma_1^2\right)$

$Y \sim N\left(\mu_2, \quad \sigma_2^2\right)$

结论（一）

二维正态分布的边缘分布是一维正态分布.

即若$(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 则有，

$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \qquad Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

结论（二）

上述的两个边缘分布中的参数与二维正态分布中的常数ρ无关.

5.3 条件分布

- 条件分布律
- 条件分布函数
- 条件概率密度

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念．

在事件B发生的条件下事件A发生的概率

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

设有两个随机变量 X, Y， 在给定 Y 取某个值的条件下，求 X 的概率分布.

这个分布就是条件分布.

一．离散型随机变量的条件分布律

设 (X,Y) 是离散型随机变量，其分布律为

$$P(X=x_i, Y=y_j)=p_{ij}, \quad i, j=1,2,\ldots$$

(X, Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律分别为:

$$P(X=x_i)=p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, \quad i=1,2,\cdots$$

$$P(Y=y_j)=p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, \quad j=1,2,\cdots$$

由条件概率公式自然地引出如下定义：

定义： 设(X,Y)是二维离散型随机变量，

对于固定的j，若$P(Y=y_j)>0$，则称

$$P(X=x_i \mid Y=y_j)=\frac{P(X=x_i, Y=y_j)}{P(Y=y_j)}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}, i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$条件下随机变量X的条件分布律.

同样对于固定的 i, 若$P(X = x_i) > 0$, 则称

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(X = x_i)} = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, \ j = 1, 2, \cdots$$

为在 $X = x_i$ 条件下随机变量Y 的条件分布律.

$X \backslash Y$	1	2	3	$p_{i\bullet}$
1	$\frac{1}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{3}$
3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
$p_{\bullet j}$	$\frac{11}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{2}{18}$	1

联合分布与边缘分布

$$P(X=i \mid Y=1)=\frac{P(X=i, Y=1)}{P(Y=1)}$$

$$=\frac{P(X=i, Y=1)}{11/18} \quad i=1,2,3$$

将表中第一列数据代入得条件分布

X	1	2	3
$P(X=i \mid Y=1)$	6/11	3/11	2/11

二.连续型随机变量的条件分布

设 (X, Y) 是二维连续型随机变量，由于

$$P(X=x)=0,\ P(Y=y)=0$$

所以不能直接代入条件概率公式，先利用极限的方法来引入条件分布函数的概念。

由条件分布函数可以引出条件概率密度

在条件$Y=y$下X的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x \mid y)=\int_{-\infty}^{x} \frac{f(u, y)}{f_Y(y)} du,$$

$$f_{X|Y}(x \mid y)=\frac{f(x, y)}{f_Y(y)}.$$

称为随机变量X在$Y=y$条件下的条件密度函数

定义

$f_Y(y)>0$时，X 在$Y=y$条件下的条件密度函数为

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}$$

$f_X(x)>0$时，Y 在 $X=x$条件下的条件密度函数为

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}}$$

例 已知 $(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho\right)$

求 $f_{X|Y}(x|y)$

解

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}e^{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[(x-\mu_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right]}$$

$$f_{X|Y}(x|y)\sim N\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2),\sigma_1^2(1-\rho^2)\right)$$

同理,

$$f_{Y|X}(y|x)\sim N\left(\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1),\sigma_2^2(1-\rho^2)\right)$$

5.4 随机变量的独立性

两随机变量独立的定义是:

设 X,Y是两个$r.v$，若对任意的x,y,有

$$P(X\leq x,Y\leq y)=P(X\leq x)P(Y\leq y)$$

则称X,Y相互独立 .

两事件A, B独立的定义是:

若 $P(AB)=P(A)P(B)$

则称事件A, B独立 .

用分布函数表示,即

设 X,Y 是两个$r.v$，若对任意的x, y, 有

$$F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$$

则称 X, Y 相互独立 .

它表明，两个$r.v$相互独立时，联合分布函数等于两个边缘分布函数的乘积 .

离散型

X与Y独立 $\Longleftrightarrow$ 对一切 i, j 有

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j)$$

即 $$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}$$

连续型

X与Y独立 $\longleftrightarrow$ 对任何 x, y 有

$$f(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$$

二维随机变量（X, Y）相互独立,
则边缘分布完全确定联合分布

二维连续 r.v. (X,Y) 相互独立

$$\Longrightarrow \quad f_X(x) = f_{X|Y}(x|y) \quad (f_Y(y) > 0)$$

$$f_Y(y) = f_{Y|X}(y|x) \quad (f_X(x) > 0)$$

设$(X,\ Y)$的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数A;

(2) 求$f_{X|Y}$和$f_{Y|X}$，判断X,Y独立性;

(3) 求$P(X\le 2\,|\,Y\le 1)$;　(4) 求$P(X\le 2\,|\,Y=1)$.

设$(X, \quad Y)$的密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)} & x>0,\ y>0 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

(1) 求常数A；

(2) 求$f_{X|Y}$和$f_{Y|X}$，判断X,Y独立性；

(3) 求$P(X\le 2|Y\le 1)$；(4) 求$P(X\le 2|Y=1)$.

解：(1) 由密度函数的性质，得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \quad y)dxdy \;=A\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx\cdot\int_0^{+\infty} e^{-y}\,dy \;=\frac{A}{2}$$

所以，$A=2$.

(2) 求$f_{X|Y}$和$f_{Y|X}$，判断X,Y独立性；

$$f_X(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0.\end{cases} \quad f_Y(y)=\begin{cases}e^{-y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0.\end{cases}$$

$$\boxed{f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}}=\begin{cases}2e^{-2x}, x>0,\\ 0, \quad x\le 0.\end{cases}$$

$$\boxed{f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}}=\begin{cases}e^{-y}, y>0,\\ 0, \quad y\le 0.\end{cases}$$

X 和 Y 相互独立

或者由独立性 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$

X 和 Y 相互独立

$$\Longrightarrow \quad f_X(x)=f_{X|Y}(x|y) \quad (f_Y(y)>0)$$

$$f_Y(y)=f_{Y|X}(y|x) \quad (f_X(x)>0)$$

(3) $P(X\le 2|Y\le 1)$ $=P(X\le 2)=\int_{-\infty}^{2} f_X(x)dx$

(4) $P(X\le 2|Y=1)$

5.5 多维随机变量简述

分布函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n)$$

边缘分布

$$F_{x_i}(x_i) = P(X_i \le x_i) = F(+\infty, +\infty, \cdots, x_i, \cdots, +\infty)$$

独立

$$P(X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n) = \mathrm{P}(X_1 \le x_1) \cdots P(X_n \le x_n)$$

5.6 二维随机变量函数的分布

问题

已知$r.v.(X,Y)$的概率分布，

$g(x,y)$ 为已知的二元函数，

求 $Z=g(X,Y)$的概率分布

方法

转化为(X,Y)的事件

离散型二维 r.v.的函数

当(X,Y)为离散r.v.时, Z 也离散

$$Z = z_k = g(x_i, y_j)$$

$$P(Z = z_k) = \sum_{g(x_i, y_j) = z_k} P(X = x_i, Y = y_j) \quad k = 1, 2, \cdots$$

设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且独立，

则 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

设 $X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 且独立,

则 $X + Y \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$

$X \sim P(\lambda_1)$, $Y \sim P(\lambda_2)$, 则

$Z = X + Y$ 的可能取值为 0,1,2, …,

$$P(Z=k)=\sum_{i=0}^{k}P(X=i,Y=k-i),$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\lambda_1^i e^{-\lambda_1}}{i!}\cdot\frac{\lambda_2^{k-i}e^{-\lambda_2}}{(k-i)!}$$

$$=\frac{e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda_1^i\lambda_2^{k-i}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k e^{-\lambda_1-\lambda_2}}{k!} \qquad k=0,1,2,\cdots$$

则 $X+Y\sim P(\lambda_1+\lambda_2)$

二维连续r.v.函数的分布

问题 已知$r.v.(X,Y)$的密度函数，求$Z=g(X,Y)$的密度函数.

方法 (1) 先求Z 的分布函数：

$$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(g(X,Y)\le z)$$

$$=\iint_{D_z} f(x,y)dxdy$$

$D_z:\{(x,y)\mid g(x,y)\le z\}$

(2)再求Z的密度函数：$f_Z(z)=F_Z'(z)$

1. 和的分布：$Z = X + Y$

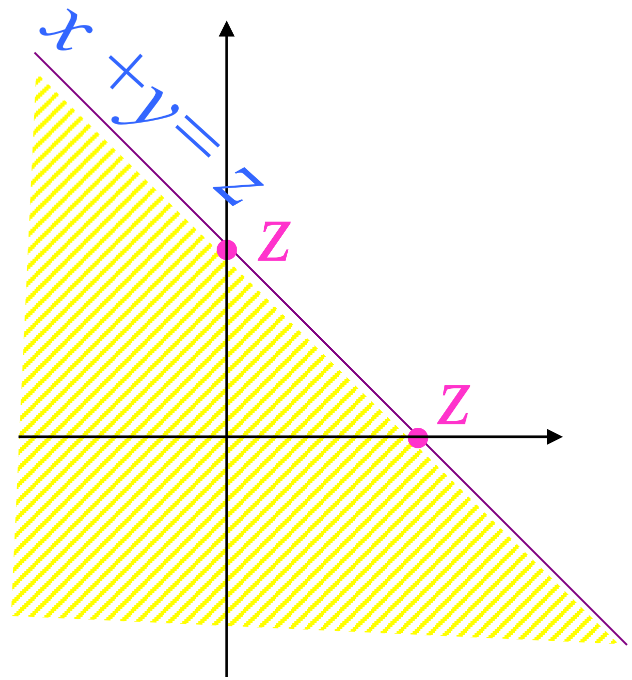
设(X, Y)的联合密度为 $f(x,y)$, 则

$$F_Z(z) = P(Z \le z) = P(X + Y \le z)$$

$$= \iint_{x+y\le z} f(x, y)\,dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\,dy$$

或 $$= \int_{-\infty}^{+\infty} dy \int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\,dx$$



$-\infty < z < +\infty$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)dx$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)dy$$

特别地，若X ,Y相互独立，则

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx \overset{\text{记作}}{=} f_X(z)*f_Y(z)$$

或 $$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy \overset{\text{记作}}{=} f_X(z)*f_Y(z)$$

称之为函数$f_X(z)$与$f_Y(z)$的**卷积**

设$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，X与Y相互独立，求$Z = X + Y$的密度函数.

设$X \sim N(0,\ 1)$，$Y \sim N(0,\ 1)$，X 与Y相互独立，求$Z = X + Y$的密度函数.

解：$f_X(x) = f_Y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad x \in (-\infty,\ +\infty)$

设$Z = X + Y$的密度函数为$f_Z(z)$，则有

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

在上式中e的指数上对x作配方法，得

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}dx$$

作积分变换$\frac{u}{\sqrt{2}}=x-\frac{z}{2}$，则有$\frac{du}{\sqrt{2}}=dx$，代入上式，有

$$f_Z(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}}e^{-\frac{z^2}{2\cdot\left(\sqrt{2}\right)^2}}$$

这表明，$Z\sim N\left(0,\ 2\right)$.

一般地，我们有如下结论：

正态随机变量的结论

如果随机变量 X 与 Y 相互独立，且

$$X \sim N\left(\mu_1, \ \sigma_1^2\right) \quad Y \sim N\left(\mu_2, \ \sigma_2^2\right)$$

$$Z = X + Y,$$

则 $Z \sim N\left(\mu_1 + \mu_2, \ \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$

更一般地，我们有如下结论：

如果随机变量 $X_1, \quad X_2, \quad \cdots, \quad X_n$ 相互独立，

$$X_i \sim N\left(\mu_i, \quad \sigma_i^2\right) \qquad (i=1, \quad 2, \quad \cdots, \quad n)$$

又 $a_1, \quad a_2, \quad \cdots, \quad a_n$ 为 n 个实常数，

令： $Z=\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$，

则 $Z \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \mu_i, \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sigma_i^2\right)$

2. 线性和的分布：$Z = aX + bY$

$(X,Y) \sim f(x,y) \quad Z = aX + bY \quad$ 求 $f_Z(z)$

$$f_Z(z) = \frac{1}{|b|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, \frac{z-ax}{b}\right)dx$$

$$\overset{\text{或}}{=\!=} \frac{1}{|a|}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{z-by}{a}, y\right)dy$$

3. M=max(X,Y)及N=min(X,Y)的分布

问题

设连续型随机变量X, Y 相互独立, X, Y的分布函数分别为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$, $M=\max\{X,Y\}$, $N=\min\{X,Y\}$, 求 M, N 的分布函数.

$$F_M(z)=P(\max\{X,Y\}\le z)$$

$$=P(X\le z,Y\le z)=P(X\le z)P(Y\le z)$$

$$=F_X(z)F_Y(z)$$

$$F_N(z) = P(\min\{X, Y\} \le z)$$

$$= 1 - P(\min\{X, Y\} > z)$$

$$= 1 - P(X > z, Y > z)$$

$$= 1 - P(X > z)P(Y > z)$$

$$= 1 - [1 - F_X(z)][1 - F_Y(z)].$$

推广

设$X_1,\ldots,X_n$是n个相互独立的随机变量，它们的分布函数分别为

$$F_{X_i}(x) \quad (i=0,1,\ \ldots,n)$$

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为:

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

N=min(X_1,…,X_n)的分布函数是

$$F_N(z)=1-[1-F_{X_1}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

特别，当X_1,…,X_n相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，有

$$F_M(z)=[F(z)]^n$$

$$F_N(z)=1-[1-F(z)]^n$$

注意

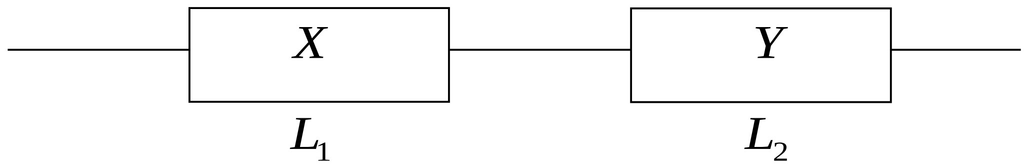
若$X_1,\ldots,X_n$是连续型随机变量，在求得$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$和$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数后，不难求得M和N的密度函数.

例. 设系统 L 是由2个相互独立的子系统L_1，L_2 连接而成，并且 L_1，L_2 的寿命分别为 X, Y，它们的密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases},\quad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y} & y>0\\ 0 & y\le 0\end{cases}$$

求 L 在串联和并联方式下寿命 Z 的密度函数.

解 (1) 串联的情况



因为有一个损坏时，系统 **L**就停止工作，
所以 **L**的寿命为 $Z=\min\{X,Y\}$,

X,Y都服从指数分布，分布函数为

$$F_X(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, x>0;\\ 0, x\le 0,\end{cases} \quad , \quad F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\beta y}, y>0;\\ 0, y\le 0,\end{cases}$$

故Z 的分布函数

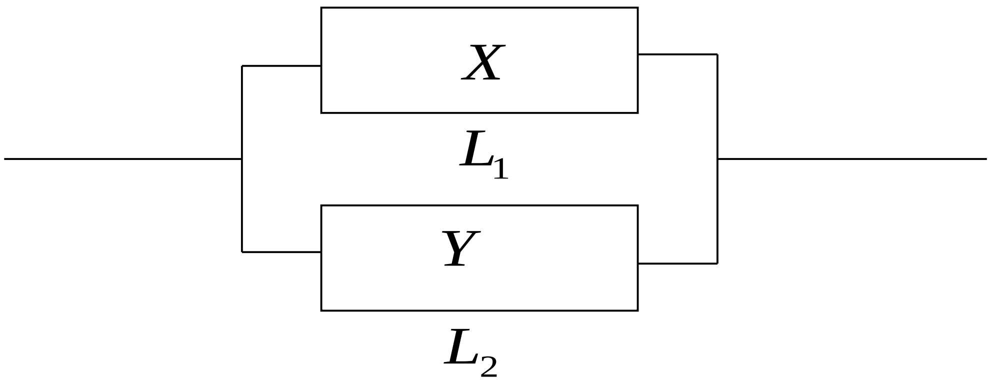
$$F_Z(z)=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$$

$$=\begin{cases}1-e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}$$

于是，得Z的密度函数

$$f_Z(z)=\begin{cases}(\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, & z>0;\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

(2) 并联的情况



因为当且仅当都损坏时，系统 ***L*** 才停止工作，所以***L***的寿命***Z***为

$$\boldsymbol{Z = \max\{X, Y\}}$$

Z的分布函数

$$F_Z(z) = F_X(z)F_Y(z)$$

$$= \begin{cases} (1-e^{-\alpha z})(1-e^{-\beta z}), z > 0, \\ 0, z \le 0. \end{cases}$$

Z的密度函数

$$f_Z(z) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha z} + \beta e^{-\beta z} - (\alpha+\beta)e^{-(\alpha+\beta)z}, z > 0; \\ 0, \qquad z \le 0. \end{cases}$$

5.7 二维随机变量的期望与方差

5.7.1 期望

1. 期望定义 $E(X)$ $E(Y)$

2. $Z = g(X, Y)$的数学期望

- 设离散 r.v. (X, Y) 的概率分布为

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots$$

若级数 $\sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$ 绝对收敛，则

$$E(Z) = \sum_{i,j=1}^{\infty} g(x_i, y_j) p_{ij}$$

- 设连续 r.v. (X,Y)的联合 d.f. 为

$$f(x,y)$$

若广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

绝对收敛，则

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y)f(x,y)dxdy$$

3. 数学期望的性质

设X、Y独立，则 $E(XY)=E(X)E(Y)$.

推广： $$E[\prod_{i=1}^{n} X_i] = \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$$

（诸 X_i 独立时）

5.7.2 方差

原公式

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$V(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)$$

例 设二维 r.v. (X,Y) 的 d.f. 为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<1, 0<y<x,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X), E(Y), V(X), V(Y).$

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x x\cdot 8xydy = \frac{4}{5}$$

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} yf(x,y)dxdy$$

例 设二维 r.v. (X, Y) 的 d.f. 为

$$f(x,y)=\begin{cases}8xy, & 0<x<1, 0<y<x, \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求$E(X), E(Y), V(X), V(Y)$.

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^1 dx\int_0^x x^2\cdot 8xydy=\frac{2}{3}$$

$$V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{2}{75}$$

$$V(Y)=E(Y^2)-E^2(Y)$$

设 X , Y 是两个相互独立且服从正态分布 $N(0,\frac{1}{2})$ 的随机变量，则 $E\left|X-Y\right|=$ ______，$D\left|X-Y\right|=$ ______

设 X, Y 是两个相互独立且服从正态分布$N(0,\frac{1}{2})$的随机变量，则$E|X-Y| =$ ____，$D|X-Y| =$ ____

法2 $Z = |X-Y|, \quad E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} g(x,y) f(x,y)dxdy$?

法1 $T = X - Y \sim N(0,1), Z = |T|,$

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) f(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$$

$$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = E(T^2) - \frac{2}{\pi} = 1 - \frac{2}{\pi}.$$

5.8 协方差和相关系数

前面我们介绍了随机变量的数学期望和方差，对于多维随机变量，反映分量之间关系的数字特征中，最重要的，就是现在要讨论的

协方差和相关系数

1. 协方差和相关系数的概念

定义 $E\left([X-E(X)][Y-E(Y)]\right)$

称为 X,Y 的协方差. 记为

$$\boxed{\operatorname{cov}(X,Y)=E\left([X-E(X)][Y-E(Y)]\right)}$$

若$D(X)>0, D(Y)>0$,称

$$\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}$$

为X,Y的 相关系数，记为

$$\boxed{\rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}}}$$

若 $\rho_{XY}=0$, 称 X,Y不相关.

计算协方差的一个简单公式

由协方差的定义及期望的性质，可得

$$Cov(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)-E(Y)E(X)+E(X)E(Y)$$

$$=E(XY)-E(X)E(Y)$$

即 $$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$$

可见，若X与Y独立， $Cov(X,Y)=0$.

例 设 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$，求 ρ_{XY}

解 $\operatorname{cov}(X,Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu_1)(y-\mu_2)f(x,y)dxdy$

$$=\sigma_1\sigma_2\rho$$

$$\boxed{\rho_{XY}=\rho}$$

若 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2,\mu_2,\sigma_2^2,\rho)$,

则 X,Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ X,Y 不相关

(Why?)

2. 协方差和相关系数的性质

(1) $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$

(2) $\operatorname{cov}(aX, bY) = ab\operatorname{cov}(X, Y)$

(3) $\operatorname{cov}(X + Y, Z) = \operatorname{cov}(X, Z) + \operatorname{cov}(Y, Z)$

(4) $\operatorname{cov}(X, X) = D(X)$

(5) $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\operatorname{cov}(X, Y)$

(6) $|\rho_{XY}| \leq 1$

(7) $|\rho_{XY}| = 1 \Longleftrightarrow$ 存在常数***a*, *b*(*a*≠0)**，

使***P*(*Y*=*aX*+*b*)=1**，

即***X***和***Y***以概率**1**线性相关.

X, Y 相互独立 $\overset{\Longrightarrow}{\not\Longleftarrow}$ X, Y 不相关

因为 $\rho_{XY} = 0 \Longleftrightarrow$ X, Y 不相关

$\Longleftrightarrow$ $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$

若 (X, Y) 服从二维正态分布，

X, Y 相互独立 $\Longleftrightarrow$ X, Y 不相关

例 设 X ,Y 相互独立, 且都服从 $N(0, \sigma^2)$, $U = aX + bY$，$V= aX - bY$，a,b 为常数, 且都不为零，求ρ_{UV}

例 设 X ,Y 相互独立, 且都服从 $N(0, \sigma^2)$, $U = aX + bY$，$V = aX - bY$，a,b 为常数，且都不为零，求ρ_{UV}

解 $\text{cov}(U,V) = E(UV) - E(U)E(V)$

$$= a^2E(X^2) - b^2E(Y^2)$$

$$-\left[aE(X) + bE(Y)\right]\left[aE(X) - bE(Y)\right]$$

由 $\left.\begin{array}{l} E(X) = E(Y) = 0, \\ D(X) = D(Y) = \sigma^2 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} E(X^2) = \sigma^2 \\ E(Y^2) = \sigma^2 \end{array}$

$\longrightarrow$ $\text{cov}(U,V) = (a^2 - b^2)\sigma^2$

而 $D(U)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$

$D(V)=a^2D(X)+b^2D(Y)=(a^2+b^2)\sigma^2$

故 $\rho_{UV}=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

思考：还有其他方法吗？

利用协方差的性质

$$\operatorname{cov}(aX+bY, aX-bY)$$

$$=a^2\operatorname{cov}(X,X)-b^2\operatorname{cov}(Y,Y)$$

$$=a^2D(X)-b^2D(Y)$$

$$\Longrightarrow \quad \operatorname{cov}(U,V)=(a^2-b^2)\sigma^2$$

5.9 矩

$E(X^k)$ —— X 的 k 阶原点矩

$E((X-E(X))^k)$ —— X 的 k 阶中心矩

$E(X^kY^l)$ —— X,Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩

$E\left((X-E(X))^k(Y-E(Y))^l\right)$

—— X,Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩