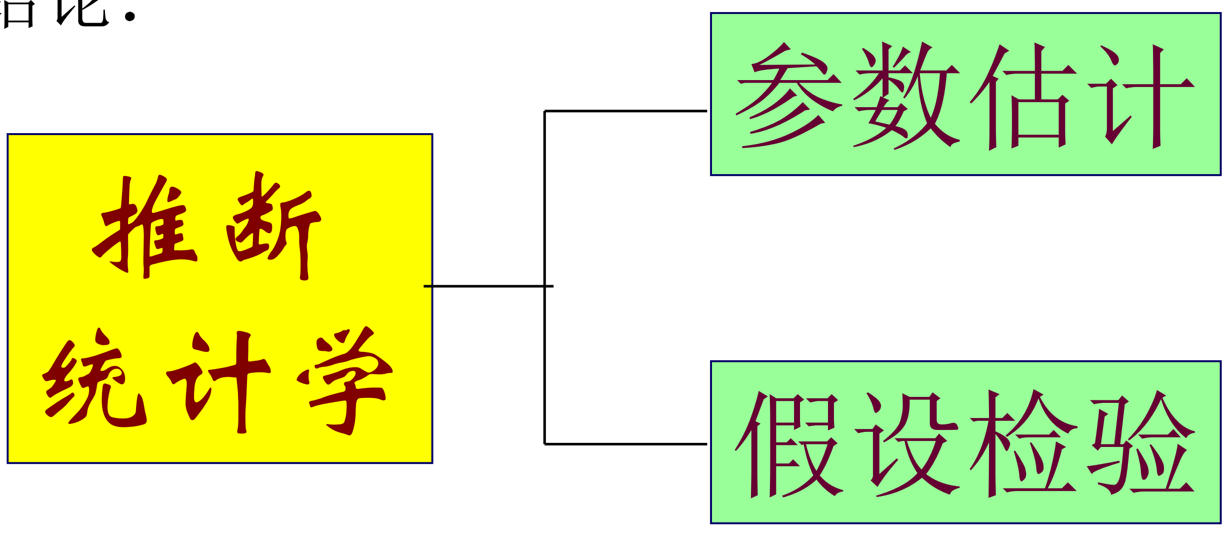
第8章　参数估计

第8章　参数估计

统计推断是由样本推断总体,其目的是利用问题的基本假定及包含在观测数据中的信息，得出尽量精确和可靠的结论.



§1 参数的点估计

定义 总体 X 的分布 $F(x;\theta)$ 中包含的未知的参数 θ，称为**待估参数**. 参数 θ 所有可能取值构成的集合称为**参数空间**（Parameter Space），记为 Θ .

定义 利用样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 去估计总体 X 中的未知参数的问题，称为**参数估计问题**.

点估计的概念

定义　用来估计总体中的待估参数 θ 的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，称为 θ 的一个**估计量**(Estimation)，

称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 θ 的**估计值**．通常我们统称估计量和估计值为**估计**，并简记为 $\hat{\theta}$．

$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为$\theta$的估计量.

$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为$\theta$的估计值.

定义 用样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个合适的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的观测值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来估计总体的未知参数 θ，称为参数 θ 的**点估计**(Point Estimation).

矩估计法

基本思想：设总体的 l 阶原点矩 $\mu_l = E(X^l)$ 存在，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本，$A_l = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l$ 为 l

阶样本原点矩，对于任意的 $\varepsilon > 0$，则

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l - E(X^l)\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

定义 设样本$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$来自总体X，总体X中包含有未知参数θ，若用样本矩替换总体矩，进而得到参数θ的点估计，这样的估计方法称为**矩法估计**(Square Estimation)，简称**矩估计**．由矩法得到的参数θ的估计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，称为**矩估计量**(Square Estimator)，相应的估计值$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，**称为矩估计值**.

求矩估计量的步骤：

（1）计算总体 X 的 l 阶原点矩 $\mu_l = E(X^l)$

◆对连续总体， $E(X^l)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^l p(x;\theta)dx$ ；

◆对离散总体， $E(X^l)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i^l p(x_i;\theta)$.

（2）令

$$\begin{cases} \mu_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i \\ \mu_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mu_k(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \cdots, \hat{\theta}_k) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^k \end{cases}$$

（3）解方程（组）得

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(X_1, X_2, \cdots, X_n) \end{cases}$$

（4）矩估计值

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

求参数的矩估计的步骤

计算总体X矩

↓

令总体X矩等于样本矩

↓

解出参数得到参数的矩估计量

↓

代入观测值得到参数的矩估计值

例　设总体 X 的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

，又设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本，求 θ 的矩估计.

例　设总体 X 的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

，又设 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，求 θ 的矩估计.

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot p(x;\theta)dx=\int_{0}^{\theta} x\cdot\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}dx=\dfrac{\theta}{3}$

令 $\dfrac{\hat{\theta}}{3}=\bar{X}$ ⟹ $\hat{\theta}=3\bar{X}$

例　设 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中θ为未知参数，$0<\theta<1$，已知取得一个样本观测值

$(x_1, x_2, x_3)=(1, 2, 1)$，求参数$\theta$的矩估计值.

例　设 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 θ 为未知参数，$0<\theta<1$，已知取得一个样本观测值

$(x_1, x_2, x_3) = (1, 2, 1)$，求参数 θ 的矩估计值.

解　$E(X) = 1\cdot\theta^2 + 2\cdot 2\theta(1-\theta) + 3\cdot(1-\theta)^2 = 3-2\theta$

$$\overline{x} = \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{3}(1+2+1) = \frac{4}{3}$$

令 $3-2\hat{\theta} = \dfrac{4}{3}$ $\Longrightarrow$ $\hat{\theta} = \dfrac{5}{6}$

例　设总体 X 的均值与方差分别为 μ 与 σ^2，且均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的样本，求 μ 与 σ^2 的矩估计量.

例　设总体 X 的均值与方差分别为 μ 与 σ^2，且均未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体的样本，求 μ 与 σ^2 的矩估计量.

解
$$\begin{cases} \mu_1 = E(X) = \mu \\ \mu_2 = E(X^2) = D(X) + \left[E(X)\right]^2 = \sigma^2 + \mu^2 \end{cases}$$

令
$$\begin{cases} \hat{\mu} = A_1 \\ \hat{\sigma}^2 + \hat{\mu}^2 = A_2 \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} \hat{\mu} = A_1 \\ \hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 \end{cases}$$

矩估计量

$$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X} \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \bar{X}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \end{cases}$$

极大似然估计法

最大似然的直观想法：一个随机试验如果有若干个可能结果 $A, B, C, \cdots$，如果在一次试验中结果 A 出现了，则认为 A 出现的概率最大；且认为试验的所有条件中（$\theta \in \Theta$），应该是某个条件（$\tilde{\theta} \in \Theta$）使事件 A 发生的概率为最大.

定义　设总体 X 的概率函数为 $p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本观测值，则样本的联合概率函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

称为参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的**似然函数** (Likelihood Function).

定义 在已经取得的样本观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的条件下，若点 $\tilde{\theta}_i = \tilde{\theta}_i(x_1, x_2, \cdots, x_n),\ (i=1,2,...,k)$ 使似然函数 $L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$ 达到最大值，即

$$L(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_k) = \max_{(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)\in\Theta} L(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

则称 $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_k$ 为参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的最大似然估计值. 相应地称估计量 $\tilde{\theta}_i = \tilde{\theta}_i(X_1, X_2, \cdots, X_n),\ (i=1,2,...,k)$ 为参数 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$ 的**最大似然估计量**(Maximum Likelihood Estimator).

求参数的最大似然估计就是求似然函数的最大值点.

求最大似然估计的一般步骤：

(1)似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta)$

(2)对数似然函数 $\ln L(\theta)$

(3)求导数 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=f(\theta)$

(4)解似然方程 $f(\tilde{\theta})=0$

解此方程得极大似然估计值 $\tilde{\theta}=\tilde{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$

求参数的最大似然估计的步骤

求参数的似然函数

↓

对似然函数求导得到似然方程

↓

解似然方程得到参数的最大似然估计值

↓

用样本代替观测值得到参数的最大似然估计量

例　设 X 的分布律为

X	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

其中 θ 为未知参数，$0<\theta<1$，已知取得一个样本观测值 $(x_1, x_2, x_3)=(1, 2, 1)$，求参数 θ 的最大似然估计值.

解 似然函数

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{3}p(x_i;\theta)=p(x_1=1,;\theta)\cdot p(x_2=2,;\theta)\cdot p(x_3=1;\theta)$$

$$=\theta^2\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2=2\theta^5(1-\theta)$$

$$\frac{dL(\theta)}{d\theta}=10\theta^4-12\theta^5=2\theta^4(5-6\theta)$$

$$2\tilde{\theta}^4(5-6\tilde{\theta})=0$$

最大似然估计值 $\tilde{\theta}=\dfrac{5}{6}$

例 设总体 X 服从参数为 λ 的指数分布，其中 λ 未知，概率密度函数为

$$p(x;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0\quad, & x\le 0\end{cases}$$

$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的观测值，试求参数 λ 的最大似然估计值和估计量.

解

$$p(x_i;\lambda)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x_i}, & x_i>0\\ 0\quad, & x_i\le 0\end{cases}$$

似然函数

$$L(\lambda)=\lambda^n e^{-\lambda\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

对数似然函数 $\ln L(\lambda)=n\ln\lambda-\lambda\sum_{i-1}^{n}x_i$

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i$$

$$\frac{d}{d\lambda}\ln L(\lambda)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{i=1}^{n}x_i$$

似然方程 $$\frac{n}{\tilde{\lambda}}-\sum_{i=1}^{n}x_i=0$$

解得最大似然估计值 $$\tilde{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}$$

最大似然估计量 $$\tilde{\lambda}=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}X_i}=\frac{1}{\bar{X}}$$

例　设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, 其中 μ,σ^2 为未知的参数,

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，其一组观测值为

$x_1, x_2, \cdots, x_n$，试求 μ,σ^2 的最大似然估计量.

例 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ,σ^2 为未知的参数，

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的样本，其一组观测值为

$x_1, x_2, \cdots, x_n$，试求 μ,σ^2 的最大似然估计量.

解

$$p(x_i;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

似然函数

$$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\sigma^2)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2}$$

对数似然函数

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2$$

对数似然方程求导

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\mu\right) \\ \dfrac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\dfrac{n}{2\sigma^2} + \dfrac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \end{cases}$$

对数似然方程

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tilde{\sigma}^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\tilde{\mu}\right) = 0 \\ -\dfrac{n}{2\tilde{\sigma}^2} + \dfrac{1}{2(\tilde{\sigma}^2)^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \tilde{\mu})^2 = 0 \end{cases}$$

最大似然估计值

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}, \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$$

最大似然估计量

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}, \quad \tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

例　设总体 X 服从区间 $[0,\theta]$ 上的均匀分布, θ 为未知参数， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体 X 的一个样本，其观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，试求参数 θ 的最大似然估计.

例　设总体 X 服从区间 $[0,\theta]$ 上的均匀分布, θ 为未知参数， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自该总体 X 的一个样本，其观测值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，试求参数 θ 的最大似然估计.

解

$$p(x_i;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0\le x_i\le\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

似然函数

$$L(\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta^n}, & 0\le x_1, x_2, \cdots, x_n\le\theta\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

每一个 x_i 都小于或等于 θ $\Leftrightarrow \max\limits_{1\le i\le n}\{x_i\}\le\theta$

最大似然估计量

$$\tilde{\theta}=\max_{1\le i\le n}\{X_i\}$$

点估计优劣的评价标准

用于估计θ的估计量有很多，那么究竟采用哪一个估计量作为总体参数的估计更好呢？自然要用估计效果较优的那种估计量，这就涉及到用什么标准来评价估计量的优劣.

无偏性

定义　设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为未知参数$\theta$的一个估计量，若$\hat{\theta}$的数学期望存在，记

$$E(\hat{\theta})-\theta=b_n$$

则称b_n为估计量$\hat{\theta}$的**偏差**（Affect），或**系统误差**.

（1）若 $b_n = 0$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一个**无偏估计量**(Unbiased estimator)，称统计量 $\hat{\theta}$ 具有**无偏性**（**Unbiased**）;

（2）若 $b_n \neq 0$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一个**有偏估计**；

（3）若 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一个**渐近无偏估计**(Approximation unbiased estimator).

无偏估计的意义：

取多个样本 $(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k), k=1,2,\cdots$，得到 θ 的多个估计值 $\hat{\theta}(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k), k=1,2,\cdots$，这些估计值围绕参数 θ 的真值上下波动，则

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\hat{\theta}(x_1^k, x_2^k, \cdots, x_n^k)=\theta$$

例　设总体 X 的期望为 μ，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，试判断下列统计量是否为 μ 的无偏估计.

（1）$X_i,\ i=1,2,\cdots,n$；

（2）$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$；

（3）$\dfrac{1}{2}X_1+\dfrac{1}{3}X_2+\dfrac{1}{4}X_3$.

解 $E(X_i)=E(X)=\mu$

$$E(\bar{X})=E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\frac{1}{n}n\mu=\mu$$

无偏估计

$$E(\frac{1}{2}X_1+\frac{1}{3}X_2+\frac{1}{4}X_3)$$

$$=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)+\frac{1}{4}E(X_3)=\frac{13}{12}\mu\neq\mu$$

不是无偏估计

有效性

定义　设$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$都是θ的无偏估计量，如果

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称$\hat{\theta}_1$是较$\hat{\theta}_2$**有效**的估计.

例　设 $E(X)=\mu$，$D(X)=\sigma^2$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，试验证 μ 的无偏估计 $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ 比 X_i，$i=1,2,\cdots,n$ 更有效.

例　设 $E(X)=\mu$， $D(X)=\sigma^2$ $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，试验证 μ 的无偏估计 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 比 X_i, $i=1,2,\cdots,n$ 更有效.

解　$D(X_i)=D(X)=\sigma^2$

$$D(\overline{X})=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}D(X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$$

⇒ μ 的无偏估计 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$ 比 X_i, $i=1,2,\cdots,n$ 更有效.

例 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自该总体 X 的一个样本，其中 $n > 2$．证明：

（1）$\hat{\lambda}_1 = \overline{X}$ 和 $\hat{\lambda}_2 = \dfrac{1}{2}(X_1 + X_2)$ 都是 λ 的无偏估计量；

（2）$\hat{\lambda}_1$ 比 $\hat{\lambda}_2$ 更有效.

证明 $E(X)=\lambda \qquad D(X)=\lambda$

$$E(\hat{\lambda}_1)=E(\bar{X})=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right)$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\underline{E(X_i)}=\frac{1}{n}\,\underline{n\lambda}\;=\lambda$$

$$E(\hat{\lambda}_2)=E\left(\frac{X_1+X_2}{2}\right)=\lambda$$

$$D(\hat{\lambda}_1) = D(\overline{X}) = \frac{D(X)}{n} = \frac{\lambda}{n}$$

$$D(\hat{\lambda}_2) = \frac{D(X)}{2} = \frac{\lambda}{2}$$

$$n > 2 \Rightarrow D(\hat{\lambda}_1) < D(\hat{\lambda}_2)$$

$\hat{\lambda}_1$比$\hat{\lambda}_2$更有效.

一致性

定义　设 $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为总体未知参数 θ 的估计，若当 $n \to \infty$ 时，$\hat{\theta}_n \xrightarrow{p} \theta$，即对任给 $\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\hat{\theta}_n - \theta\right| < \varepsilon\right\} = 1$$

则称 $\hat{\theta}_n$ 为 θ 的**一致估计**，即统计量 $\hat{\theta}_n$ 具有**一致性**（或**相合性**）.

定理 设$\hat{\theta}_n=\hat{\theta}_n(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的一个估计量，若

$$\lim_{n\to\infty}E(\hat{\theta}_n)=\theta,\qquad \lim_{n\to\infty}D(\hat{\theta}_n)=0$$

则$\hat{\theta}_n$是参数θ的一致估计.

例 设总体 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一个样本，则样本方差 S^2 是 σ^2 的一致估计.

例　设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$， $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一个样本，则样本方差 S^2 是 σ^2 的一致估计.

证明　$E(S^2) = \sigma^2, \ \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$$D\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2(n-1) \qquad D(S^2) = \frac{2\sigma^4}{n-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} D(S^2) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\sigma^4}{n-1} = 0$$

S^2 是 σ^2 的一致估计.

参数的区间估计

区间估计的概念

定义　以区间的形式给出参数θ一个范围，同时给出该区间包含参数θ真实值的可靠程度. 这种形式的估计称之为**区间估计**(Interval Estimation).

定义　设总体 X 的分布含有未知参数 θ，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自 X 的样本．对于给定值 α $(0<\alpha<1)$，如果有

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} \geq 1\text{-}\alpha$$

置信区间(Confidence Interval)

$$\left(\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right)$$

置信上限(Confidence upper limit)

置信下限(Confidence lower limit)

$\left(\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right)$ 是随机区间，其意义为：$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 包含参数 θ 真值的概率为 1-α . 由于参数 θ 不是随机变量，所以不能说参数 θ 以 1-α 的概率落入随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$，只能说随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 以 1-α 的概率包含参数 θ .

对于一次具体抽样得到一组观测值 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 从而得到的置信区间（观测区间）$\left(\hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right)$ 的意义在于：若重复抽样多次，每个样本确定一个观测区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$，有时它包含 θ 的真值，有时不包含．按大数定律，在这样多的区间中，包含 θ 真值的约占 $100(1-\alpha)\%$.

通常用估计的精度和信度来评价区间估计的优劣. 其精度可以用区间长度$\hat{\theta}_2-\hat{\theta}_1$来衡量, 长度越长, 精度越低；信度可以用置信水平$1-\alpha$来衡量，置信水平越大，信度越高. 在样本容量不变的情况下，精度和信度是一对矛盾关系，当一个增大时，另一个将会减小. 通过增加样本容量可以提高区间估计的精度和信度.

单侧置信区间

定义 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为从总体X中抽取的样本，

θ为总体中的未知参数，对给定的$0<\alpha<1$.

$$P\{\theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha$$

单侧置信下限

单侧置信上限

$$P\{\theta > \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} = 1-\alpha$$

寻求未知参数的置信区间的步骤

设总体 X 的分布中含有未知参数 θ，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为来自 X 的样本. 对于给定值 α $(0<\alpha<1)$，满足下式的区间 $\left(\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right)$ 称为 θ 的置信水平为1-α 的置信区间.

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} \geq 1\text{-}\alpha$$

1．先取θ的一个“好的”点估计量$\hat{\theta}$，以$\hat{\theta}$为基础构造样本函数$g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$.

（1）含有未知参数θ；

（2）不含有其他未知参数；

（3）已知其分布或近似分布.

$$\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

$$\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1).$$

正态总体下的抽样分布

定理 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的

样本， $\bar{X} = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$， $S^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$， 则

（1） $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立；

（2） $\bar{X} \sim \underline{N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)}$； $\Longleftrightarrow$ $\dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim \underline{N(0,1)}$

（3） $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \underline{\chi^2(n-1)}$.

定理 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim \underline{t(n-1)}$

证明 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ $\qquad \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$

$\bar{X}$ 与 S^2 相互独立，显然 $\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ 与 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ 也相互独立.

$$\frac{\dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)}} \sim t(n-1) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim \underline{\quad N(0,1) \quad}$$

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}} \sim \underline{\quad t(n_1+n_2-2) \quad}$$

$$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim \underline{\quad F(n_1-1,n_2-1) \quad}$$

定理 $$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma_1^2/n_1+\sigma_2^2/n_2}} \sim \underline{N(0,1)}$$

证明 $\bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1})$ $\bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2})$ 相互独立

$$E(\bar{X}-\bar{Y})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=\mu_1-\mu_2$$

$$D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$$

定理 当σ_1^2, σ_2^2未知，但两者相等时，

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim \underline{\quad t(n_1+n_2-2) \quad}$$

其中 $S_W^2=\dfrac{(n_1-1)S_1^2+(n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}$.

证明 设σ_1^2, σ_2^2都等于σ^2 $\quad \dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2/n_1+\sigma^2/n_2}} \sim N(0,1)$

$\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1) \qquad \dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$ 相互独立

$$\frac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\frac{(n^2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1+n_2-2)$$

$$\frac{\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\sigma^2/n_1+\sigma^2/n_2}}}{\sqrt{\left[\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2}+\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2}\right]/(n_1+n_2-2)}} \sim t(n_1+n_2-2)$$

化简整理即得

定理 $\dfrac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$

证明 $\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1-1)$ $\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_2-1)$ 相互独立

$$\frac{\dfrac{(n_1-1)S_1^2}{\sigma_1^2}/(n_1-1)}{\dfrac{(n_2-1)S_2^2}{\sigma_2^2}/(n_2-1)} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

$$\frac{S_1^2}{S_2^2}\cdot\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$$

2. 对给定的置信水平 $1-\alpha$，根据 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n;\theta)$ 的分布，按精度最高的原则（实际应用中按照“等尾”原则）定出分位点 a 和 b，使得

$$P\{a < g(X_1, X_2, \cdots, X_n;\theta) < b\} \geq 1-\alpha$$

3. 从不等式 $a < g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 中解出 θ，得

$$P\left\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\right\} \geq 1-\alpha$$

于是 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为：

$$\left(\hat{\theta}_1\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right), \hat{\theta}_2\left(X_1, X_2, \cdots, X_n\right)\right)$$

求未知参数的区间估计的过程

找 a 与 b，使得

$$P\{a < g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} \ge 1-\alpha$$

解出 θ 得

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} \ge 1-\alpha$$

从而得 θ 的区间估计值

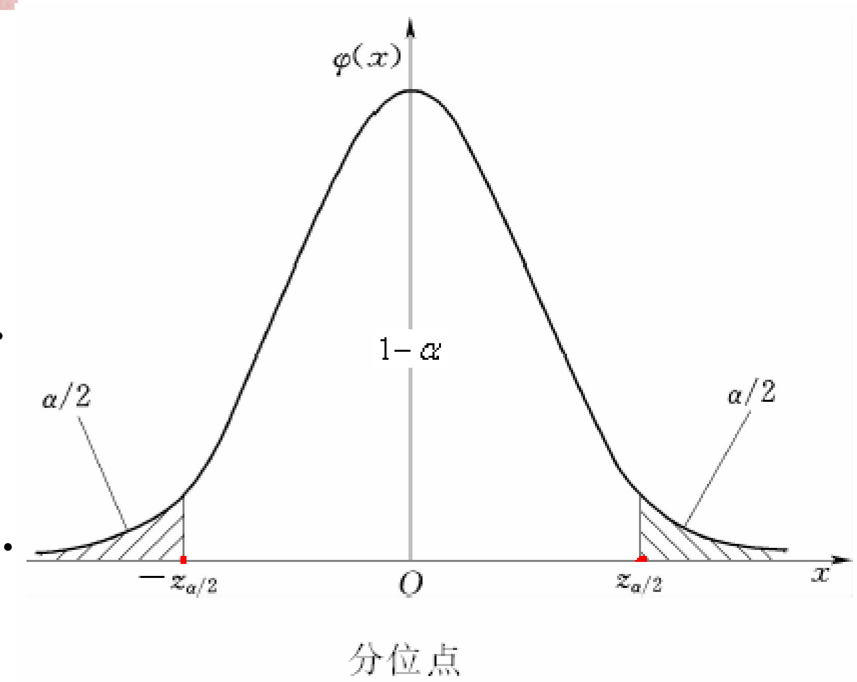
$$(\hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

正态总体均值的置信区间

提问 设 $Z \sim N(0,1)$，则

（1）$b =$ $\underline{z_{\alpha/2}}$ 时， $P(Z \geq b) = \alpha/2$.

（2）$a =$ $\underline{-z_{\alpha/2}}$ 时， $P(Z \leq a) = \alpha/2$.



（3）$a =$ $\underline{-z_{\alpha/2}}$，且 $b =$ $\underline{z_{\alpha/2}}$ 时， $P(a < Z < b) = 1-\alpha$.

（4）$a =$ $\underline{-z_{\alpha/2}}$，且 $b =$ $\underline{z_{\alpha/2}}$ 时， $P\left(a < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < b\right) = 1-\alpha$.

例　已知某工厂生产的某种零件其长度 $X \sim N(\mu, 0.06)$，现从某日生产的一批零件中随机抽取 6 只，测得直径的数据（单位：mm）为

14.6,　15.1,　14.9,　14.8,　15.2,　15.1

试求该批零件长度的置信水平为0.95置信区间.

解 $P\left\{\frac{|\bar{X}-\mu|}{\sigma/\sqrt{n}}<z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha$

$\bar{x}=14.95$

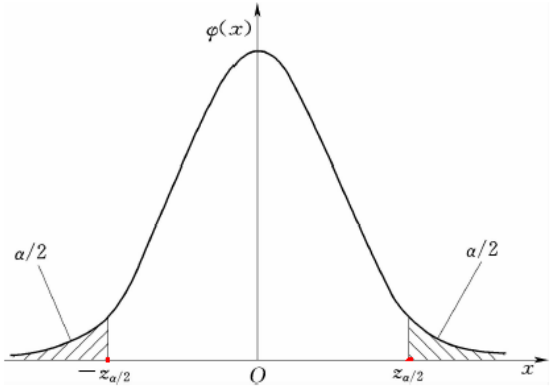
$z_{\alpha/2}=z_{0.025}=1.96,$

$$P\left\{\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

$$\bar{x}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=14.95-\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}\times 1.96=14.75$$

$$\bar{x}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}=14.95+\frac{\sqrt{0.06}}{\sqrt{6}}\times 1.96=15.15$$

故所求置信区间为 $(14.75, 15.15)$

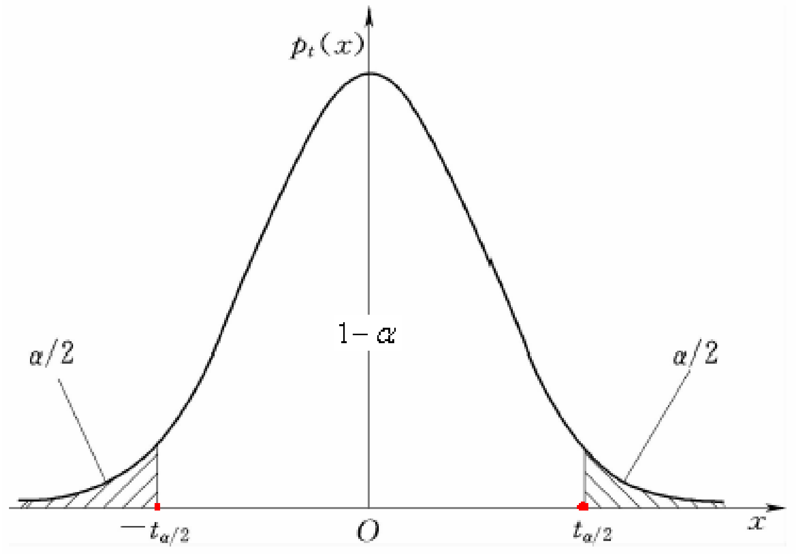


分位点

提问 设 $T \sim t(n-1)$，则

（1）$b=\underline{\quad t_{\alpha/2}(n-1) \quad}$ 时，$P(T \geq b)=\alpha/2$.

（2）$a=\underline{\quad -t_{\alpha/2}(n-1) \quad}$ 时，$P(T \leq a)=\alpha/2$.

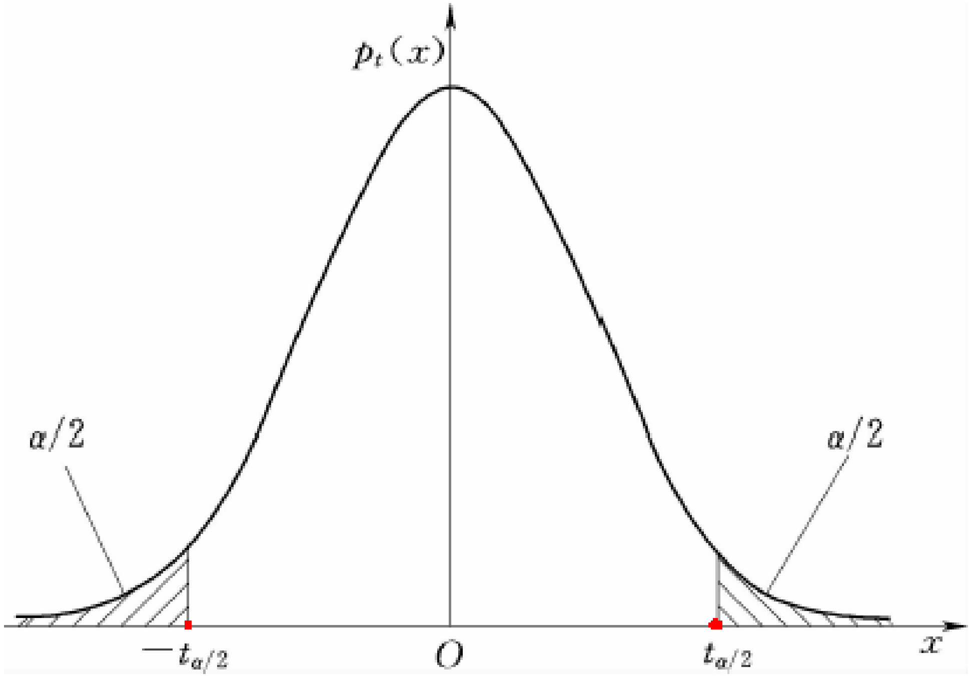


分位点

（3）$a=\underline{\quad -t_{\alpha/2}(n-1) \quad}$，且 $b=\underline{\quad t_{\alpha/2}(n-1) \quad}$ 时，$P(a<T<b)=1-\alpha$.

（4）$a=\underline{\quad -t_{\alpha/2}(n-1) \quad}$，且 $b=\underline{\quad t_{\alpha/2}(n-1) \quad}$ 时，$P\left(a<\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<b\right)=1-\alpha$.

例　设有一批胡椒粉，每袋净重 X（单位：克）服从正态分布.从中任取 8 袋，测得净重分别为：13.1，11.9，12.4，12.3，11.9，12.1 12.4，12.1.试求 μ 的置信度为 0.99 的置信区间.



分位点

解 $P\left\{\frac{|\bar{X}-\mu|}{S/\sqrt{n}}<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$ $\bar{x}=12.15,\ s^2=0.04$

$$P\left\{\bar{X}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}<\mu<\bar{X}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S}{\sqrt{n}}\right\}=1-\alpha$$

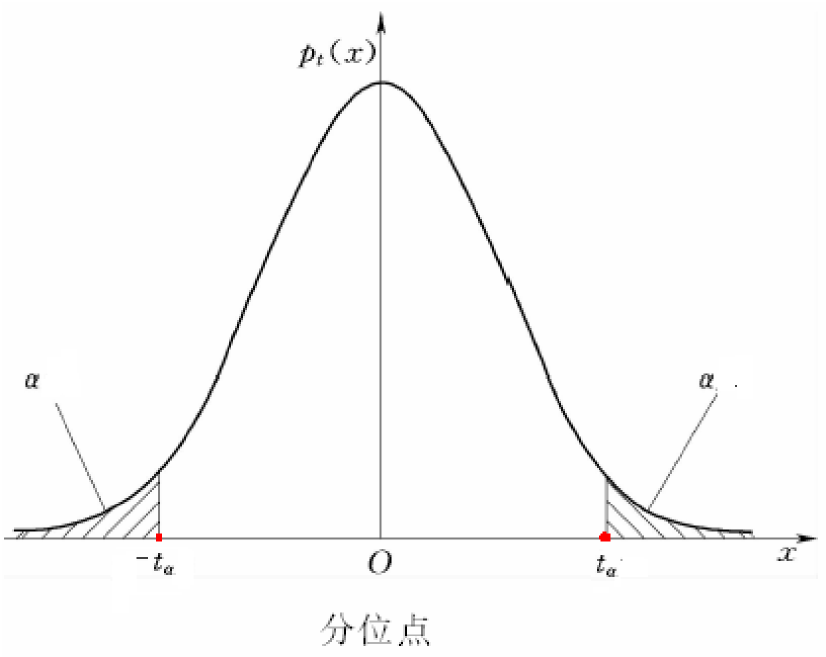
$$t_{0.005}(7)=3.4995$$

$$\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)=12.15-\frac{\sqrt{0.04}}{\sqrt{8}}\times 0.4995=11.90$$

$$\bar{x}+\frac{s}{\sqrt{n}}t_{\alpha/2}(n-1)=12.15+\frac{\sqrt{0.04}}{\sqrt{8}}\times 0.4995=12.40$$

所以μ的置信度为0.99置信区间是 $(11.90,\ 12.40)$

提问 设$T \sim t(n-1)$，则



（1）$b=$ $\underline{t_\alpha(n-1)}$ 时，$P(T<b)=1-\alpha$.

（2）$a=$ $\underline{-t_\alpha(n-1)}$ 时，$P(T>a)=1-\alpha$.

（3）$b=$ $\underline{t_\alpha(n-1)}$ 时，$P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<b\right)=1-\alpha$.

（4）$a=$ $\underline{-t_\alpha(n-1)}$ 时，$P\left(\dfrac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}>a\right)=1-\alpha$.

例　从一批灯泡中随机地取 5 只做寿命测试，测得寿命（以小时计）为

1050，1100，1120，1250，1280.

设灯泡寿命服从正态分布，求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解 $$P\left\{\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}<t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\mu>\bar{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)\right\}=1-\alpha$$

$1-\alpha=0.95$, $n=5$, $\bar{x}=1160$, $s^2=9950$, $t_{0.05}(4)=2.1318$

灯泡寿命平均值的置信水平为0.95的单侧置信下限

$$\underline{\hat{\mu}}=\bar{x}-\frac{s}{\sqrt{n}}t_\alpha(n-1)=1160-\frac{\sqrt{9950}}{\sqrt{5}}\times 2.1318=1065$$

正态总体方差与标准差的置信区间

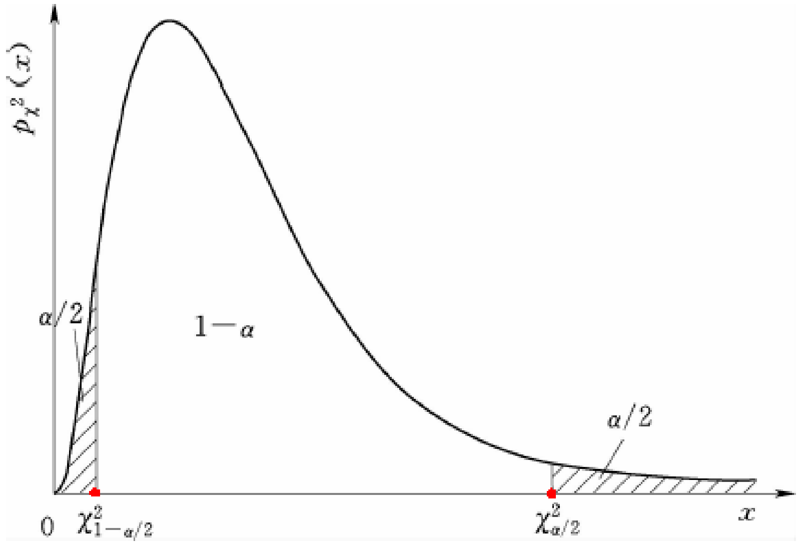
提问 设 $\chi^2 \sim \chi^2(n-1)$，则

（1）$b=$ $\underline{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$ 时，$P(\chi^2 \geq b)=\alpha/2$.

（2）$a=$ $\underline{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$ 时，$P(\chi^2 \leq a)=\alpha/2$.

（3）$a=$ $\underline{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$，且 $b=$ $\underline{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$ 时，$P(a<\chi^2<b)=1-\alpha$.

（4）$a=$ $\underline{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}$，且 $b=$ $\underline{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}$ 时，$P\left(a<\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}<b\right)=1-\alpha$.



分位点

例　某胶合板厂以新的工艺生产胶合板以增强抗压强度，现抽取 10 个试件，做抗压力试验，获得数据（单位：kg/cm^2）如下

48.2　49.3　51.0　44.6　43.5　41.8　39.4　46.9　45.7　47.1

设胶合板抗压力服从正态分布，试求总体方差σ^2和标准差σ的置信水平为 0.95 的置信区间.

解

$$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(\mathrm{n}-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1\text{-}\alpha$$

σ^2 的置信区间为 $\bar{x} = 45.75,\ s = 3.522,\ s^2 = 12.40$

$$\left(\frac{9\times 12.40}{19.02}, \frac{9\times 12.40}{2.70}\right) = （5.868，41.333）$$

σ 的置信区间为 $\chi^2_{0.975}(9) = 2.70,\quad \chi^2_{0.025}(9) = 19.02$

$$\left(\sqrt{\frac{9\times 12.40}{19.02}}, \sqrt{\frac{9\times 12.40}{2.7}}\right) = （2.422，6.291）$$

两个正态总体参数的置信区间

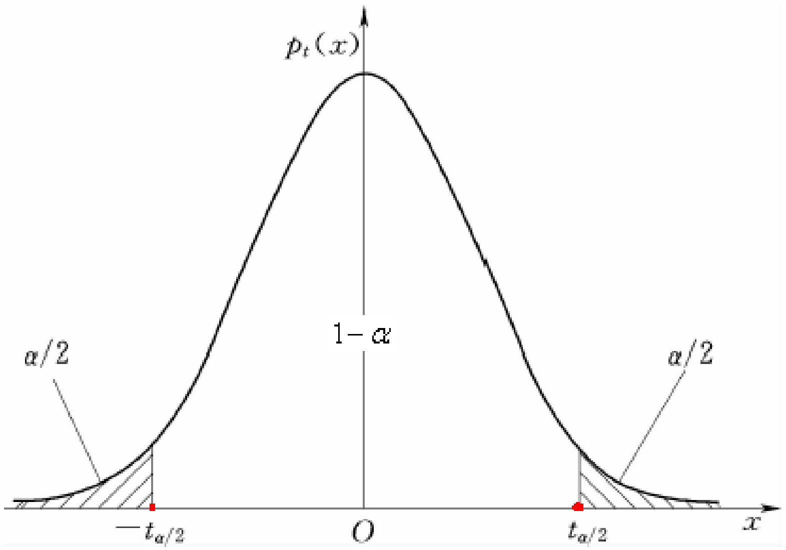
$$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \Longrightarrow (X_1, X_2, \cdots, X_{n_1})$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n_1}\sum_{i=1}^{n_1} X_i, \quad S_1^2 = \frac{1}{n_1 - 1}\sum_{i=1}^{n_1}(X_i - \bar{X})^2$$

$$Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \Longrightarrow (Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2})$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n_2}\sum_{j=1}^{n_2} Y_j, \quad S_2^2 = \frac{1}{n_2 - 1}\sum_{j=1}^{n_2}(Y_j - \bar{Y})^2$$

提问 设$T \sim t(n-1)$，则



分位点

（1）$b=$ $\underline{t_{\alpha/2}(n-1)}$ 时，$P(T \geq b)=\alpha/2$.

（2）$a=$ $\underline{-t_{\alpha/2}(n-1)}$ 时，$P(T \leq a)=\alpha/2$.

（3）$a=$ $\underline{-t_{\alpha/2}(n-1)}$，且$b=$ $\underline{t_{\alpha/2}(n-1)}$ 时，$P(a<T<b)=1-\alpha$.

（4）$c=$ $\underline{t_{\alpha/2}(n-1)}$ 时，$P\{\frac{|\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)|}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}<c\}=1-\alpha$.

例　随机地从甲、乙两厂生产的蓄电池中抽取一些样本，测得蓄电池的电容量（$A\cdot h$) 如下：

甲厂：144，141，138，142，141，143，138，137；

乙厂：142，143，139，140，138，141，140，138，142，136

设两厂生产的蓄电池电容量分别服从正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^{\ 2})$，$N(\mu_2,\sigma_2^{\ 2})$，两样本独立，若已知 $\sigma_1^{\ 2}=\sigma_2^{\ 2}=\sigma^2$，但 σ^2 未知. 求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信水平为0.95的置信区间.

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - (\mu_1 - \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$$

$$S_W{}^2 = \frac{(n_1 - 1)S_1{}^2 + (n_2 - 1)S_2{}^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

解

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\bar{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}\right|<t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\begin{array}{l}\bar{X}-\bar{Y}-t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}<\mu_1-\mu_2\\ <\bar{X}-\bar{Y}+t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_W\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\end{array}\right\}=1-\alpha$$

求得 $\bar{x}=140.5,\quad s_1{}^2=6.57 \qquad \bar{y}=139.9,\quad s_2{}^2=4.77$

$$s_w=\sqrt{\frac{7s_1{}^2+9s_2{}^2}{16}}=2.36,\quad \alpha=0.05,\quad t_{0.025}(16)=2.1199$$

故 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间为 $(-1.77, 2.97)\,(A\cdot h)$.

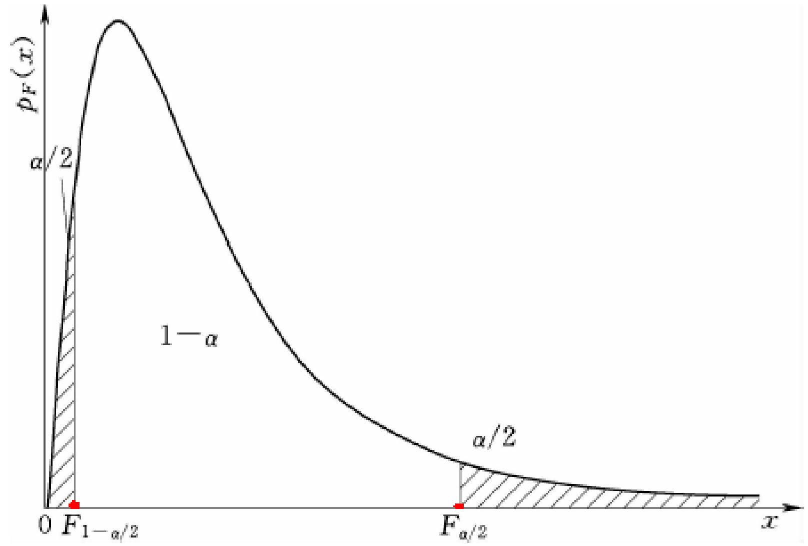
提问 设 $F \sim F(n_1-1, n_2-1)$，则

$F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

（1）$b=$____时，$P(F \geq b)=\alpha/2$.

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

（2）$a=$____时，$P(F \leq a)=\alpha/2$.



分位点

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ $F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

（3）$a=$____，且 $b=$____时，$P(a<F<b)=1-\alpha$.

$F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ $F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$

（4）$a=$____，且 $b=$____时，$P\left(a<\dfrac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<b\right)=1-\alpha$.

例　随机地从甲、乙两厂生产的蓄电池中抽取一些样本，测得蓄电池的电容量（$A\cdot h$）如下：

甲厂：144，141，138，142，141，143，138，137；

乙厂：142，143，139，140，138，141，140，138，142，136

设两厂生产的蓄电池电容量分别服从正态总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，两样本独立，试求 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信水平为0.95的置信区间.

解 $$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)<\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2}<F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)\right\}=1-\alpha$$

$$P\left\{\frac{s_1{}^2/s_2{}^2}{F_{\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}<\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}<\frac{s_1{}^2/s_2{}^2}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1,n_2-1)}\right\}=1-\alpha$$

$\bar{x}=140.5,\quad s_1{}^2=6.57$ $\qquad\bar{y}=139.9,\quad s_2{}^2=4.77$

$F_{0.025}(7,9)=4.20\qquad \boldsymbol{F_{0.975}(7,9)=\frac{1}{F_{0.025}(9,7)}=\frac{1}{4.82}=0.21}$

故此算得 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的置信度为 0.95 的置信区间为

(0.33, 6.56).

定义 设样本 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 来自总体 X，总体 X 中包含有未知参数 θ，若用样本矩替换总体矩，进而得到参数 θ 的点估计，这样的估计方法称为**矩法估计** (Square Estimation)，简称**矩估计**. 由矩法得到的参数 θ 的估计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，称为**矩估计量**(Square Estimator)，相应的估计值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，**称为矩估计值**.

求参数的矩估计的步骤

计算总体X矩

↓

令总体X矩等于样本矩

↓

解出参数得到参数的矩估计量

↓

代入观测值得到参数的矩估计值

定义　设总体 X 的概率函数为 $p(x;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 X 的样本观测值，则样本的联合概率函数

$$p(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k)$$

称为参数 $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_k$ 的**似然函数** (Likelihood Function).

求参数的最大似然估计就是求似然函数的最大值点.

求最大似然估计的一般步骤：

(1)似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)$

(2)对数似然函数 $\ln L(\theta)$

(3)求导数 $\frac{d}{d\theta}\ln L(\theta)=f(\theta)$

(4)解似然方程 $f(\tilde{\theta})=0$

解此方程得极大似然估计值 $\tilde{\theta}=\tilde{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

求参数的最大似然估计的步骤

求参数的似然函数

↓

对似然函数求导得到似然方程

↓

解似然方程得到参数的最大似然估计值

↓

用样本代替观测值得到参数的最大似然估计量

定义 设$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为未知参数$\theta$的一个估计量，若$\hat{\theta}$的数学期望存在，且

$$E(\hat{\theta})=\theta$$

则称$\hat{\theta}$为θ的无偏估计.

定义 设$\hat{\theta}_1$与$\hat{\theta}_2$都是θ的无偏估计量，如果

$$D(\hat{\theta}_1) < D(\hat{\theta}_2)$$

则称$\hat{\theta}_1$是较$\hat{\theta}_2$**有效**的估计.

寻求未知参数的置信区间的步骤如下：

1．先取θ的一个“好的”点估计量$\hat{\theta}$，以$\hat{\theta}$为基础构造样本函数$g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$.

（1）含有未知参数θ；

（2）不含有其他未知参数；

（3）已知其分布或近似分布.

2. 对给定的置信水平$1-\alpha$，根据$g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$的分布，按精度最高的原则（实际应用中按照“等尾”原则）定出分位点a和b，使得

$$P\left\{a < g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\right\} \geq 1-\alpha$$

3. 从不等式$a<g(X_1,X_2,\cdots,X_n;\theta)<b$中解出$\theta$，得

$$P\left\{\hat{\theta}_1(X_1,X_2,\cdots,X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1,X_2,\cdots,X_n)\right\}\geq 1-\alpha$$

于是θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为：

$$\left(\hat{\theta}_1\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right),\hat{\theta}_2\left(X_1,X_2,\cdots,X_n\right)\right)$$

求未知参数的区间估计的过程

找 a 与 b，使得

$$P\{a < g(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} \geq 1-\alpha$$

解出 θ 得

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n) < \theta < \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\} \geq 1-\alpha$$

从而得 θ 的区间估计值

$$(\hat{\theta}_1(x_1, x_2, \cdots, x_n), \hat{\theta}_2(x_1, x_2, \cdots, x_n))$$

典型例题

题型1 求参数的矩估计量

例 设总体 X 的密度函数为

$$p(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{2(\theta-x)}{\theta^2}, & 0<x<\theta\\ 0, & 其他\end{cases}$$

又设 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的样本，求 θ 的矩估计.

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot p(x;\theta)dx=\int_0^{\theta} x\cdot\frac{2(\theta-x)}{\theta^2}dx$$

$$=\int_0^{\theta}\frac{2x}{\theta}dx-\int_0^{\theta}\frac{2x^2}{\theta^2}dx=\frac{\theta}{3}$$

令 $$\frac{\hat{\theta}}{3}=\bar{X}$$

$$\Rightarrow\quad \hat{\theta}=3\bar{X}$$

例　设 X 具有在区间 $[a,b]$ 上的均匀分布，其分布密度为 $p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，其中 a,b 是未知参数，试用矩法求 a 与 b 的估计量。

解 $E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx$

$$=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Big|_a^b=\frac{1}{b-a}\frac{b^2-a^2}{2}=\frac{a+b}{2}=\bar{X}$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x)dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}=S^2$$

于是，a,b的估计量为

$$\hat{a}=\bar{X}-\sqrt{3}S \qquad \hat{b}=\bar{X}+\sqrt{3}S$$

题型2 求参数的最大似然估计量

例 设总体 $X \sim B(m, p)$，$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 是来自总体 X 的样本，求 p 的最大似然估计量.

解 似然函数 $L(p)=\prod_{i=1}^{n}[C_m^{x_i} p^{x_i}(1-p)^{m-x_i}]$

$$L(p)=(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i})\cdot p^{\sum_{i=1}^{n} x_i}\cdot(1-p)^{\sum_{i=1}^{n}(m-x_i)}$$

$$\ln L(p)=\ln(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i})+(\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln p+(\sum_{i=1}^{n}(m-x_i))\ln(1-p)$$

$$\ln L(p) = \ln(\prod_{i=1}^{n} C_m^{x_i}) + (\sum_{i=1}^{n} x_i)\ln p + (\sum_{i=1}^{n}(m - x_i))\ln(1-p)$$

$$\frac{d\ln L(p)}{dp} = \frac{1}{p}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p}\cdot\sum_{i=1}^{n}(m - x_i)$$

令 $$\frac{1}{\tilde{p}}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-\tilde{p}}\cdot\sum_{i=1}^{n}(m - x_i) = 0$$

$\Rightarrow$ $$\tilde{p} = \frac{1}{mn}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i$$ $\Rightarrow$ $$\tilde{p} = \frac{1}{m}\bar{X}$$

考研（2002，7 分） 设总体 X 的概率分布为：

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $0<\theta<\dfrac{1}{2}$ 是未知参数，利用总体 X 的如下样本值

3，1，3，0，3，1，2，3

求 θ 的矩估计值和最大似然估计值.

解 $$E(X) = 0\cdot\theta^2 + 1\cdot 2\theta(1-\theta) + 2\cdot\theta^2 + 3\cdot(1-2\theta)$$

$$= 3 - 4\theta$$

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(3+1+3+0+3+1+2+3) = 2$$

$$3 - 4\hat{\theta} = 2 \quad \Longrightarrow \quad \hat{\theta} = \frac{1}{4}$$

$$L(\theta) = P(X_1 = 3)P(X_2 = 1)P(X_3 = 3)P(X_4 = 0)$$

$$\cdot P(X_5 = 3)P(X_6 = 1)P(X_7 = 2)P(X_8 = 3)$$

$$= (1-2\theta)\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot(1-2\theta)\cdot\theta^2$$

$$\cdot(1-2\theta)\cdot 2\theta(1-\theta)\cdot\theta^2\cdot(1-2\theta)$$

$$= 4(1-\theta)^2(1-2\theta)^4\theta^6$$

$$\ln L(\theta) = \ln 4 + 2\ln(1-\theta) + 4\ln(1-2\theta) + 6\ln\theta$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = -\frac{2}{1-\theta} - \frac{8}{1-2\theta} + \frac{6}{\theta}$$

$$-\frac{2}{1-\tilde{\theta}} - \frac{8}{1-2\tilde{\theta}} + \frac{6}{\tilde{\theta}} = 0 \Longrightarrow \tilde{\theta} = \frac{7-\sqrt{10}}{13}$$

例 已知随机变量 X 的密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}(\theta+1)(x-5)^{\theta} & 5<x<6\\ 0 & \text{其他}\end{cases}\quad(\theta>0),$$

其中 θ 均为未知参数，求 θ 的矩估计量与极大似然估计量.

解 $E(X)=\int_5^6 x(\theta+1)(x-5)^{\theta}dx=\int_5^6 x d(x-5)^{\theta+1}$

$$=6-\int_5^6 (x-5)^{\theta+1}dx=6-\frac{1}{\theta+2}$$

故 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{6-\bar{X}}-2$

似然函数 $L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} p(x_i;\theta)=(\theta+1)^n\prod_{i=1}^{n}(x_i-5)^{\theta}$

$$\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)$$

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i-5)=0$$

θ的极大似然估计量为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum_{i=1}^{5}\ln(X_i-5)}-1$

题型3 参数估计量的评选

例 设 X_1, X_2 是来自总体 $X \sim N(\mu,1)$ 的样本，试判定下列 4 个统计量的无偏性，并确定参数 μ 的最有效统计量.

$$\hat{\mu}_1 = \frac{2}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2；\quad \hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{3}{4}X_2$$

$$\hat{\mu}_3 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{2}X_2；\quad \hat{\mu}_4 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{2}{5}X_2$$

解

$$E(\hat{\mu}_1)=\frac{2}{3}E(X_1)+\frac{1}{3}E(X_2)=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_2)=\frac{1}{4}E(X_1)+\frac{3}{4}E(X_2)=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_3)=\frac{1}{2}E(X_1)+\frac{1}{2}E(X_2)=\mu$$

$$E(\hat{\mu}_4)=\frac{1}{5}E(X_1)+\frac{2}{5}E(X_2)=\frac{3}{5}\mu\neq\mu$$

$\hat{\mu}_1$， $\hat{\mu}_2$， $\hat{\mu}_3$是μ的无偏估计量;

$\hat{\mu}_4$不是μ的无偏估计量.

$$D(\hat{\mu}_1) = \frac{4}{9}E(X_1) + \frac{1}{9}D(X_2) = \frac{5}{9}$$

$$D(\hat{\mu}_2) = \frac{1}{16}D(X_1) + \frac{9}{16}D(X_2) = \frac{5}{8}$$

$$D(\hat{\mu}_3) = \frac{1}{4}D(X_1) + \frac{1}{4}D(X_2) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad D(\hat{\mu}_3) < D(\hat{\mu}_1) < D(\hat{\mu}_2)$$

故 $\hat{\mu}_3$ 是 μ 的最有效估计量.

例　设总体服从参数为λ的泊松分布 $X \sim P(\lambda)$，试证 $\bar{X}$ 为 λ 的一致估计量.

证明　$P\{|\bar{X}-\lambda| \geq \varepsilon\} = P\{|\bar{X}-E(\bar{X})| \geq \varepsilon\}$

$$\leq \frac{D(\bar{X})}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

⇨ $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\bar{X}-\lambda| \geq \varepsilon\} = 0$

$\bar{X}$ 为 λ 的一致估计量.

题型4 正态总参数的区间估计

例 已经某种材料的抗压强度 X~N（μ, σ^2）,现随机抽 10 个试件进行抗压试验，测得数据如下： 482 493 457 471 510 446 435 418 394 469

（1）求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95%区间；

（2）若已知 $\sigma=30$，求平均抗压强度 μ 的置信水平为 95%区间；

解　计算得$\bar{x}=457.5$，　$s=35.2176$

（1）在 σ 未知时

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|<t_{\alpha/2}(n-1)\right\}=1-\alpha$$

μ 的置信水平为 95%区间为

$$\left(\bar{x}-t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}},\bar{x}+t_{\alpha/2}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

查表得$t_{0.025}(9)=2.2622$，　因而 μ 的置信水平为 95%

区间为$(438.3064, 482.6936)$.

（2）在 $\sigma = 30$ 时

$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| < z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

μ 的置信水平为 95%区间为

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

查表得 $z_{0.025} = 1.96$，因而 **μ** 的置信水平为 **95%**区间

为 $(438.9058, 476.0942)$.

题型5 两个正态总参数的区间估计

例 设一种纺织机纺纱的断裂强度 X 服从 N(μ_1,2.18^2),另一种纺织机所纺纱的断裂强度 Y 服从 N(μ_2,1.76^2).现对前者抽取容量为 n_1=200 的样本 $X_1,X_2,\cdots,X_{200}$,由观测值算得 $\bar{x}=5.32$;对后者抽取容量为 n_2=100 的样本 $Y_1,Y_2,\cdots,Y_{100}$,由观测值算得 $\bar{y}=5.76$.试求 $\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间.

解 两种纺织机所纺纱的断裂强度 X,Y 可看成是相互独立的.因

$$E(\bar{X}-\bar{Y})=E(\bar{X})-E(\bar{Y})=\mu_1-\mu_2$$

$$D(\bar{X}-\bar{Y})=D(\bar{X})+D(\bar{Y})=\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}$$

$$\bar{X}-\bar{Y}\sim N(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

$$Z=\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}}\sim N(0,1)$$

$$P\left\{-Z_{\alpha/2} \le Z \le Z_{\alpha/2}\right\} = 1-\alpha$$

由此可得$\mu_1-\mu_2$的置信度为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\bar{X}-\bar{Y}-Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}, \bar{X}-\bar{Y}+Z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$$

得$\mu_1-\mu_2$ 的置信度为 0.95 的置信区间为

$$\left(-0.44-1.96\sqrt{\frac{2.18^2}{200}+\frac{1.76^2}{100}}, -0.44+1.96\sqrt{\frac{2.18^2}{200}+\frac{1.76^2}{100}}\right)$$

$$=(-0.899, 0.019)$$