第六章　极限定理

　　概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的学科. 随机现象的规律性只有在相同的条件下进行大量重复试验时才会呈现出来. 也就是说，要从随机现象中去寻求必然的法则，应该研究大量随机现象.

研究大量的随机现象，常常采用极限形式，由此导致对极限定理进行研究. 极限定理的内容很广泛，其中最重要的有两种:

大数定律　与　中心极限定理

1. 切比雪夫不等式

设随机变量 X 的期望$E(X)$与方差 $D(X)$ 存在，则对于任意实数 $\varepsilon > 0$,

$$\boxed{P(|X-E(X)|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}$$

或 $$\boxed{P(|X-E(X)|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}}$$

2. 大数定律

贝努里大数定律

设 n_A 是 n 次独立重复试验中事件 A 发生的次数, p 是每次试验中 A 发生的概率, 则

$\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{n_A}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1$$

贝努里大数定律的意义

在概率的统计定义中, 事件 A 发生的频率"稳定于"事件A在一次试验中发生的概率

在 n 足够大时, 可以用频率近似代替 p . 这种稳定称为依概率稳定.

切比雪夫大数定律

设 r.v. 序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 相互独立，且具有相同的数学期望和方差

$$E(X_k) = \mu, D(X_k) = \sigma^2, \quad k = 1,2,\cdots$$

则 $\forall \varepsilon > 0$ 有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mu \right| < \varepsilon \right) = 1$$

定理的意义

具有相同数学期望和方差的独立 r.v.序列的算术平均值依概率收敛于数学期望.

当 n 足够大时, 算术平均值几乎是一常数.

数学期望 可被 算术均值 近似代替

3. 中心极限定理

中心极限定理的客观背景:

在实际问题中，常常需要考虑许多随机因素所产生总影响.

观察表明，如果一个量是由大量相互独立的随机因素的影响所造成，而每一个别因素在总影响中所起的作用不大. 则这种量一般都服从或近似服从正态分布.

定理一 林德伯格-列维中心极限定理

[独立同分布的中心极限定理]

设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$

独立同一分布, 且有期望和方差:

$$E(X_k) = \mu, \quad D(X_k) = \sigma^2 > 0, \quad k = 1,2,\cdots$$

则对于任意实数 x,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le x \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad = \Phi(x)$$

Jarl Waldemar Lindeberg (August 4, 1876, Helsinki[1] – December 24, 1932, Helsinki) was a Finnish mathematician known for work on the central limit theorem.

注 记 $$Y_n = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma}$$

$$\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le x) = \Phi(x)$$

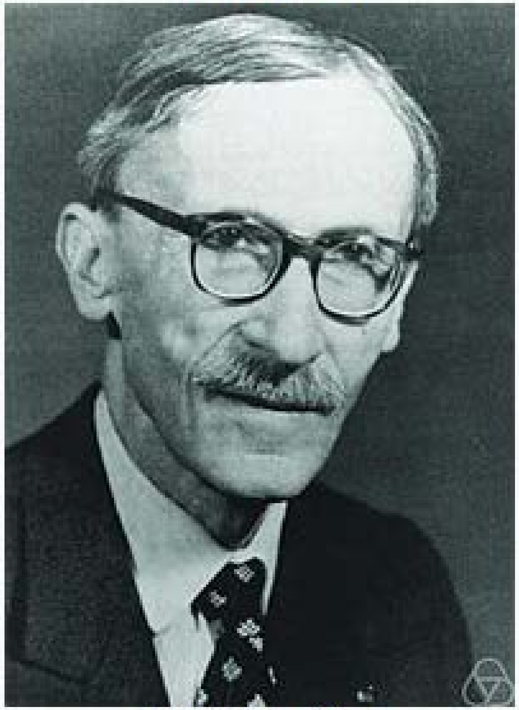
即 n 足够大时，Y_n 的分布函数近似于标准正态随机变量的分布函数

$$\boldsymbol{Y_n \overset{\text{近似}}{\sim} N(0,1)}$$

$\sum_{k=1}^{n} X_k$ 近似服从 $N(n\mu, n\sigma^2)$

它表明:当n充分大时，n个具有期望和方差的独立同分布的r.v之和近似服从正态分布.

Paul Lévy



Paul Pierre Lévy

Born	15 September 1886 Paris, France
Died	15 December 1971 (aged 85) Paris, France
Nationality	French
Alma mater	University of Paris
Known for	Lévy process Lévy flight Lévy measure Lévy's constant Lévy distribution Lévy C curve

Scientific career

Fields	Mathematics
Institutions	École Polytechnique École des Mines
Doctoral advisor	Jacques Hadamard Vito Volterra
Doctoral students	Wolfgang Doeblin Michel Loève Benoît Mandelbrot Georges Matheron

定理二

棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理

[二项分布以正态分布为极限分布]

设 $Y_n \sim B(n, p)$，$0 < p < 1$，$n = 1,2,\ldots$

则对任一实数 x，有

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{Y_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \le x\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt = \Phi(x)$$

即 n 足够大时，

$Y_n \sim N(np, np(1\text{-}p))$ (近似)

Pierre-Simon Laplace

Pierre-Simon Laplace (1749–1827). Posthumous portrait by Jean-Baptiste Paulin Guérin, 1838.

Born	23 March 1749 Beaumont-en-Auge, Normandy, Kingdom of France
Died	5 March 1827 (aged 77) Royal College, Glasgow Bourbon France
Nationality	French
Alma mater	University of Caen

Known for	[show]

Scientific career

Fields	Astronomer and mathematician
Institutions	École Militaire (1769–1776)
Academic advisors	Jean d'Alembert Christophe Gadbled Pierre Le Canu
Doctoral students	Siméon Denis Poisson

Signature

French Newton or Newton of France,

例 设有一大批种子，其中良种占1/6. 试估计在任选的 600 粒种子中, 良种所占比例与1/6 比较上下小于2%的概率.

解 设 X 表示 600 粒种子中的良种数 ,

$$X \sim B(600, 1/6)$$

$$E(X) = 100, D(X) = \frac{500}{6}$$

$$P\left(\left|\frac{X}{600} - \frac{1}{6}\right| < 0.02\right) = P(|X - 100| < 12)$$

$$\geq 1 - \frac{V(X)}{12^2} = 0.4213$$

由德莫佛—拉普拉斯中心极限定理,

有 $X \overset{\text{近似}}{\sim} N\left(100, \frac{500}{6}\right)$

$$P\left(\left|\frac{X}{600}-\frac{1}{6}\right|<0.02\right)=P(|X-100|<12)$$

$$=\Phi(1.3145)-\Phi(-1.3145)$$

$$=2\Phi(1.3145)-1 \quad \approx 0.8114$$

例 某单位有200台电话分机，每台分机使用外线的概率为0.05, 假定每台分机是相互独立的，问要安装多少条外线，才能以95%以上的概率保证分机用外线时不等待？

解：设有X部分机同时使用外线，则有

$$X \sim B(200,0.05),$$

设有N条外线。由题意有 $P(X \le N) \ge 0.95$

由拉普拉斯定理 $X \overset{\text{近似}}{\sim} N(10, 9.5)$

$$P(X \le N) \approx \Phi\left(\frac{N-10}{\sqrt{9.5}}\right) \qquad N \ge 16$$