第四章 随机变量的数字特征

在前面的课程中，我们讨论了随机变量及其分布，如果知道了随机变量X的概率分布，那么X的全部概率特性也就知道了.

然而，在实际问题中，概率分布一般是较难确定的. 而且在一些实际应用中，人们并不需要知道随机变量的一切概率性质，只要知道它的某些数字特征就够了.

例如

考察一射手的水平: 既要看他的平均环数是否高, 还要看他弹着点的范围是否小, 即数据的波动是否小.

考察某型号电视机的质量:
平均寿命18000小时±200小时.

由上面例子看到，与随机变量有关的某些数值，虽不能完整地描述随机变量但能清晰地描述随机变量在某些方面的重要特征，这些数字特征在理论和实践上都具有重要意义.

随机变量某一方面的概率特性都可用数字来描写

本章内容

- r.v.的平均取值 —— 数学期望
- r.v.取值平均偏离均值的情况 —— 方差

4.1 随机变量的数学期望

例 甲、乙两人各射击100次，他们的射击结果如下：

X：甲击中的环数， Y：乙击中的环数.

X	8	9	10
次数	10	30	60

Y	8	9	10
次数	20	50	30

试问哪一个人的射击水平较高？

甲、乙的平均环数可写为

$$\frac{8\times10+9\times30+10\times60}{100}=8\times0.1+9\times0.3+10\times0.6=9.5$$

$$\frac{8\times20+9\times50+10\times30}{100}=8\times0.2+9\times0.5+10\times0.3=9.1$$

因此，从平均环数上看，甲的射击水平要比乙的好.

用分布列表示

X	8	9	10
P	0.1	0.3	0.6

Y	8	9	10
P	0.2	0.5	0.3

$$EX = 8\times0.1+9\times0.3+10\times0.6=9.5$$

$$EY = 8\times0.2+9\times0.5+10\times0.3=9.1$$

1. 数学期望的定义

定义1 设 X 为离散 r.v. 其分布列为

$$P(X=x_k)=p_k,\quad k=1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$ 绝对收敛，则称其和为 X 的数学期望，记作 $E(X)$，即

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty} x_k p_k$$

定义2 设连续 r.v. X 的 d.f. 为 $f(x)$

若广义积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

绝对收敛, 则称此积分为 X 的数学期望

记作 $E(X)$, 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx$$

P86.1 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0. 3	0.3

求 $E(X)$

$$EX=-2\times0.4+0\times0.3+2\times0.3=-0.2$$

例 $X \sim B(n, p)$, 求 $E(X)$.

解 $$E(X) = \sum_{k=0}^{n} k C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} p^{k-1} (1-p)^{(n-1)-(k-1)}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k (1-p)^{(n-1)-k} = np$$

特例 若$X \sim B(1, p)$, 则 $E(X) = p$

例 $X \sim P(\lambda)$, 求 $E(X)$.

$$X \sim P(\lambda)$$

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots, \lambda>0,$$

$$E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}kp_k=\sum_{k=0}^{\infty}k\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$=\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}=\lambda e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=\lambda$$

例3 设*r.v X*服从几何分布，

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\ldots,$$

其中$0<p<1$,求$E(X)$

解：记$q=1-p$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=p\sum_{k=1}^{\infty}(q^k)'$$

等比级数

求和公式

求和与求导

交换次序

$$=p\left(\sum_{k=1}^{\infty}q^k\right)'=p\left(\frac{q}{1-q}\right)'=\frac{1}{p}$$

例　$X \sim E(\lambda)$，求 $E(X)$．

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases}$$

$$E(X)=\int_0^{+\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$=-[xe^{-\lambda x}|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-\lambda x}dx]$$

$$=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}|_0^{+\infty}=\frac{1}{\lambda}$$

例 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E(X)$.

解 $$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=u}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} (u\sigma + \mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \mu$$

常见分布的数学期望

分布	概率分布	期望
0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	p
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	np
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	期望
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ

注意 不是所有的 r.v.都有数学期望

例如：柯西(Cauchy)分布的密度函数为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)},\quad -\infty<x<+\infty$$

但 $\int_{-\infty}^{+\infty}|x|f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{|x|}{\pi(1+x^2)}dx$ 发散

它的数学期望不存在!

2.随机变量函数的数学期望

设已知随机变量X的分布，我们需要计算的不是X的期望，而是X的某个函数的期望，比如说$g(X)$的期望. 那么应该如何计算呢？

如何计算随机变量函数的数学期望?

一种方法是：因为$g(X)$也是随机变量，故应有概率分布，它的分布可以由X的分布求出来. 一旦我们知道了$g(X)$的分布，就可以按照期望的定义把$E[g(X)]$计算出来.

使用这种方法必须先求出随机变量函数$g(X)$的分布，一般是比较复杂的 .

是否可以不求$g(X)$的分布而只根据X的分布求得$E[g(X)]$呢？

下面的基本公式指出，答案是肯定的.

公式的重要性在于: 当我们求$E[g(X)]$时，不必知道$g(X)$的分布，而只需知道X的分布就可以了. 这给求随机变量函数的期望带来很大方便.

(1) $Y=g(X)$ 的数学期望

- 设离散 r.v. X 的概率分布为

$$P(X=x_i)=p_i, \quad i=1,2,\cdots$$

若无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$ 绝对收敛，则

$$E(Y)=\sum_{i=1}^{\infty} g(x_i)p_i$$

- 设连续 r.v. X 的 d.f. 为 $f(x)$

若广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$ 绝对收敛, 则

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

P86.1 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0. 3	0.3

求 $E(3X^2+5)$

$$E(3X^2+5)$$

$$=[3\cdot(-2)^2+5]\cdot 0.4+[3\cdot 0^2+5]\cdot 0.3+[3\cdot 2^2+5]\cdot 0.3$$

$$=13.4$$

例 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x>0 \\ 0, & x\le 0 \end{cases}$$

求 $Y=e^{-2X}$ 的数学期望.

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2x} f(x)dx=\int_{0}^{+\infty} e^{-2x}e^{-x}dx$$

$$=-\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_{0}^{\infty}=\frac{1}{3}$$

P78. 13 市场上对某种产品每年需求量为 X 台，$X \sim U(2000,4000)$, 每出售一台可赚3万元，若售不出去，则每台需保管费1万元，问应该组织多少货源, 才能使平均利润最大？最大期望值为多少？

解
$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2000}, & 2000<x<4000,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

设组织n 台货源，利润为 Y

显然，$2000< n < 4000$

$$Y = g(X) = \begin{cases} 3n, & n \le X, \\ 3X - (n - X), & n > X \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3n, & n \le x, \\ 4x - n, & n > x \end{cases}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$

$$= \frac{1}{2000}\left[\int_{2000}^{n} (4x - n) dx + \int_{n}^{4000} 3n dx\right]$$

$$= \frac{1}{2000}(-2n^2 + 1400n - 8 \times 10^6)$$

$$\frac{dE(Y)}{dn}=\frac{1}{2000}(-4n+14000)\overset{令}{=}0$$

$$n=3500$$

故 $n=3500$ 时，$E(Y)$最大

$$E(Y)_{\max}=8250$$

3. 数学期望的性质

(1) 设C是常数，则$E(C)=C$;

(2) 若C是常数，则$E(CX)=CE(X)$;

(3) $E(X+Y) = E(X)+E(Y)$;

推广： $$E[\sum_{i=1}^{n} X_i] = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

已知随机变量 $X \sim N(5,10^2)$,

求 $Y=3X+5$ 的数学期望 EY.

由于 X 服从正态分布，则 $EX=5$,

所以 $EY=E(3X+5)=3EX+5=20$

例 求二项分布的数学期望

若 X表示n重贝努里试验中的“成功” 次数 $X\sim B(n, p)$，

设 $$X_i=\begin{cases}1 & \text{如第}i\text{次试验成功}\\ 0 & \text{如第}i\text{次试验失败}\end{cases}$$ $i=1,2$，…，n

则 $X= X_1+X_2+\dots+X_n$

因为 $P(X_i=1)=p,\quad P(X_i=0)=1-p$

$$E(X_i)=1\cdot p+0\cdot(1-p)=p$$

所以 $E(X)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=np$

可见服从参数为n和p的二项分布的随机变量X的数学期望是np.

4.2 方差

我们已经介绍了随机变量的数学期望，它体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的一个重要的数字特征.

但是在一些场合，仅仅知道平均值是不够的.

引例 甲、乙两射手各打了6 发子弹，每发子弹击中的环数分别为：

甲	10, 7, 9, 8, 10, 6,
乙	8, 7, 10, 9, 8, 8,

有五个不同数

有四个不同数

问哪一个射手的技术较好？

解 首先比较平均环数

$\overline{\text{甲}} = 8.3, \quad \overline{\text{乙}} = 8.3$

再比较稳定程度

甲：$2\times(10-8.3)^2+(9-8.3)^2+(8-8.3)^2$

$+(7-8.3)^2+(6-8.3)^2=13.34$

乙：$(10-8.3)^2+(9-8.3)^2+3\times(8-8.3)^2$

$+(7-8.3)^2=5.34$

乙比甲技术稳定，故乙技术较好.

为此需要引进另一个数字特征,用它来度量随机变量取值在其中心附近的离散程度.

这个数字特征就是我们要介绍的

方差

1. **方差概念**

定义 若$E[X-E(X)]^2$存在, 则称其为随机变量 X 的**方差**, 记为$D(X)$ 或 $V(X)$

即 $D(X)=E[X-E(X)]^2$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为 X 的**均方差或标准差.**

$D(X)$ —— 描述 r.v. X 的取值偏离平均值的平均偏离程度

由定义知，方差是随机变量*X*的函数*g*(*X*)=[*X*-*E*(*X*)]²的数学期望 .

若 X 为离散型 **r.v.**，分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1,2,\cdots$$

$$D(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(x_k - E(X)\right)^2 p_k$$

若 X 为连续型**r.v.**，概率密度为 $f(x)$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)dx$$

计算方差的一个简化公式

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)$$

证：$D(X)=E[X-E(X)]^2$

展开

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

期望性质

$$=E(X^2)-2[E(X)]^2+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

例 设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0. 3	0.3

求$D(X)$.

$$E(X)=-0.2,$$

$$E(X^2)=(-2)^2\cdot 0.4+2^2\cdot 0.3=2.8,$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=2.76.$$

例 设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.

例 设$X \sim P(\lambda)$, 求$D(X)$.

解 $E(X)=\lambda$

$$\left.\begin{aligned} E(X^2) &= E(X(X-1))+E(X) \\ E(X(X-1)) &= \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)\cdot\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}=\lambda^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow E(X^2)=\lambda^2+\lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-E^2(X)=\lambda$$

设$r.v$ X服从几何分布，求$D(X)$

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\dots,$$

2. 设*r.v X*服从几何分布，求*D*(*X*)

$$P(X=k)=p(1-p)^{k-1},\ k=1,2,\ldots,$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}kpq^{k-1}=\frac{1}{p}$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}$$

$$=p\left[\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}\right]$$

$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{\infty}k^2pq^{k-1}$$

$$=p[\sum_{k=1}^{\infty}k(k-1)q^{k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}kq^{k-1}]$$

$$=qp(\sum_{k=1}^{\infty}q^k)''+E(X)=qp(\frac{q}{1-q})''+\frac{1}{p}$$

$$=qp\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{p}\quad=\frac{2q}{p^2}+\frac{1}{p}\ =\frac{2-p}{p^2}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\frac{2-p}{p^2}-\frac{1}{p^2}=\frac{1-p}{p^2}$$

例 设 $X \sim \mathrm{U}\,[a，b]$，求DX.

例 设 $X \sim U[a, b]$，求 DX.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$E(X)=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{a+b}{2},$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_a^b x^2\cdot\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

例 $X \sim E(\lambda)$，求 $D(X)$.

例　$X \sim E(\lambda)$，求 $D(X)$.

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, x>0\\ 0, \quad x\le 0\end{cases} \qquad E(X)=\frac{1}{\lambda}$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$=\int_0^{+\infty} x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

例　设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $D(X)$

解 $D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$

$$\overset{令\frac{x-\mu}{\sigma}=t}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 t^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$= \sigma^2$$

常见随机变量的方差

分布	概率分布	方差
参数为p 的0-1分布	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$	$p(1-p)$
$B(n,p)$	$P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ $k=0,1,2,\cdots,n$	$np(1-p)$
$P(\lambda)$	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k=0,1,2,\cdots$	λ

分布	概率密度	方差
区间(a,b)上的均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
$E(\lambda)$	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & 其它\end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	σ^2

2. 方差的性质

(1) 设C是常数,则$D(C)=0$;

(2) 若C是常数,则$D(CX)=C^2 D(X)$;

(3) 若a,b是常数,则$D(aX+b)=a^2 D(X)$;

设随机变量 X 的分布律为

X	-2	0	2
P	0.4	0. 3	0.3

求$D(\sqrt{10}X-5)$.

$$D(\sqrt{10}X-5)=10D(X)=27.6.$$

例.设随机变量X的数学期望为$E(X)$，方差为$D(X)>0$，引入新的随机变量

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

验证$E(X^*)=0$，$D(X^*)=1$

$$E(X^*) = E[\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}] = \frac{1}{\sqrt{D(X)}}[E(X) - E(X)] = 0$$

$$D(X^*) = \frac{1}{D(X)} D[X - E(X)] = \frac{1}{DX} \cdot D(X) = 1$$

标准化随机变量

设随机变量 X 的期望$E(X)$、方差$D(X)$都存在, 且$D(X) \neq 0$, 则称

$$X^* = \frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}$$

为 X 的标准化随机变量.

$$E(X^*) = 0, \quad D(X^*) = 1$$