

# 离散型随机变量

## 第二章

# 随机变量概念的产生

上一章中，随机试验的结果用基本事件的集合表示。

局限性

在实际问题中，随机试验的结果可以用数量来表示，由此就产生了随机变量的概念。

全面性

为更好地揭示随机现象的规律性并利用数学工具描述其规律，有必要引入随机变量来描述随机试验的不同结果。

1、有些试验结果本身与数值有关（本身就是一个数）。

例如，掷一颗骰子面上出现的点数；

七月份济南的最高温度；

电脑的使用寿命.....

2、在有些试验中，试验结果看来与数值无关，但我们可以引进一个变量来表示它的各种结果。也就是说，把试验结果数值化。

**例** 检测一件产品可能出现的两个结果，也可以用—个离散变量来描述

$$X(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{次品} \\ 0, & \text{正品} \end{cases}$$

这种对应关系

随 机 变 量

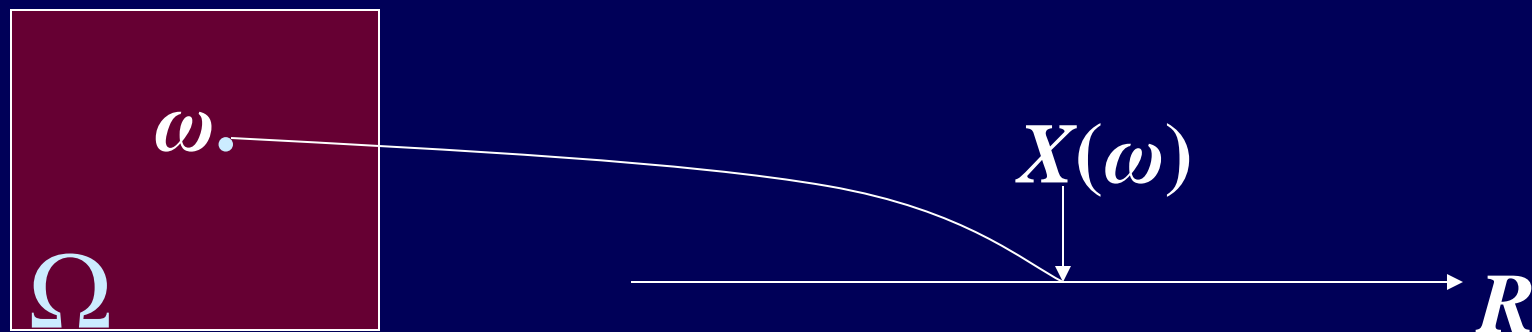
## 2.1 随机变量

随机变量 ( random variable )

**定义** 设  $\Omega$  是试验  $E$  的样本空间, 若

$$\forall \omega \in \Omega \xrightarrow{\text{按一定法则}} \exists \text{ 实数 } X(\omega)$$

则称  $X(\omega)$  为  $\Omega$  上的 **随机变量**





随机变量通常用大写字母  
 $X, Y, Z$ 或希腊字母 $\xi, \eta, \zeta$ 等表示

而表示随机变量所取的值  
时,一般采用小写字母 $x, y, z$ 等.

## 引入随机变量的意义

(1) 任何随机现象可被 r.v. 描述

有了随机变量，随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来。

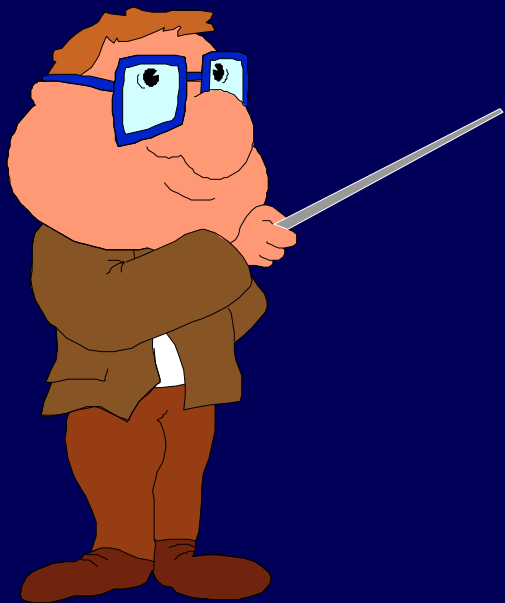
如：单位时间内某电话交换台收到的呼叫次数用  $X$  表示，它是一个随机变量。

事件{收到不少于1次呼叫}  $\Leftrightarrow \{X \geq 1\}$

{没有收到呼叫}  $\Leftrightarrow \{X = 0\}$

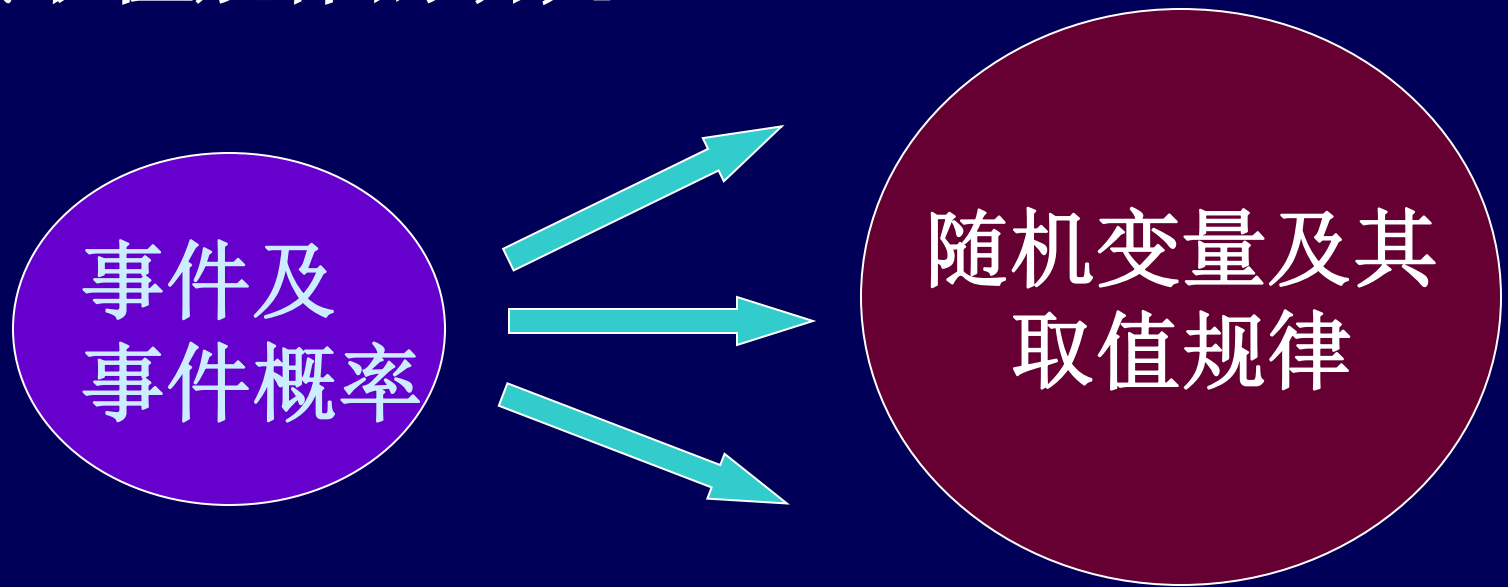
(2) 借助微积分方法研究规律

可见，随机事件这个概念实际上是包容在随机变量这个更广的概念内。也可以说，随机事件是从静态的观点来研究随机现象，而随机变量则是一种动态的观点，就象数学分析中常量与变量的区别那样。





随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件. 引入随机变量后, 对随机现象统计规律的研究, 就由对事件及事件概率的研究扩大为对随机变量及其取值规律的研究.



# 随机变量的分类

随机变量

{ 离散型

{ 非离散型 ----- 连续型

所有取值可以  
逐个一一列举

有无穷多取值  
不能一一列举  
充满一个区间

## 2.2 离散型随机变量的概率分布

### 1. 分布律

**定义** 若随机变量  $X$  的可能取值是有限个或可列个, 则称  $X$  为离散型随机变量  
描述  $X$  的概率特性常用概率分布或分布律

即 
$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

或

$X$	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_k$	$\dots$
$P$	$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_k$	$\dots$

或  $X \sim \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k & \cdots \end{bmatrix}$

## 分布律的性质

□  $p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$  ————— 非负性

□  $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$  ————— 归一性

用性质可以判断  
是否为分布律

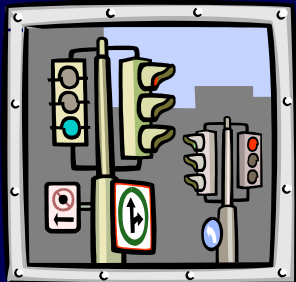
## P26例3

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.16 & \frac{a}{10} & a^2 & \frac{2a}{10} & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 \quad a = -0.9, a = 0.6$$

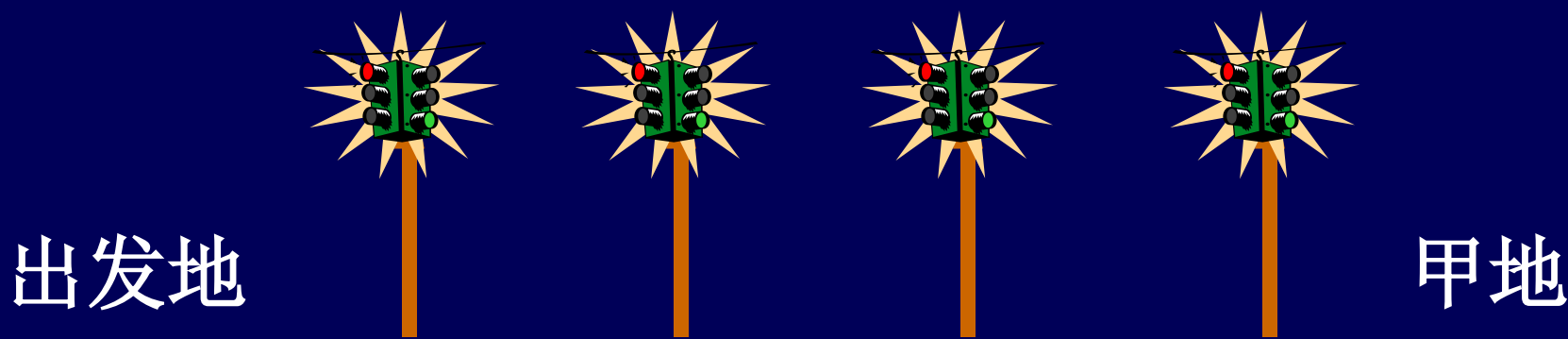
$$p_k \geq 0$$

$$X \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0.16 & 0.06 & 0.36 & 0.12 & 0.3 \end{pmatrix}$$



**例4** 设汽车在开往甲地途中需经过 4 盏信号灯, 每盏信号灯独立地以概率  $p$  允许汽车通过. 令  $X$  表示首次遇到红灯时已通过的路口个数, 求  $X$  的概率分布.

**解**



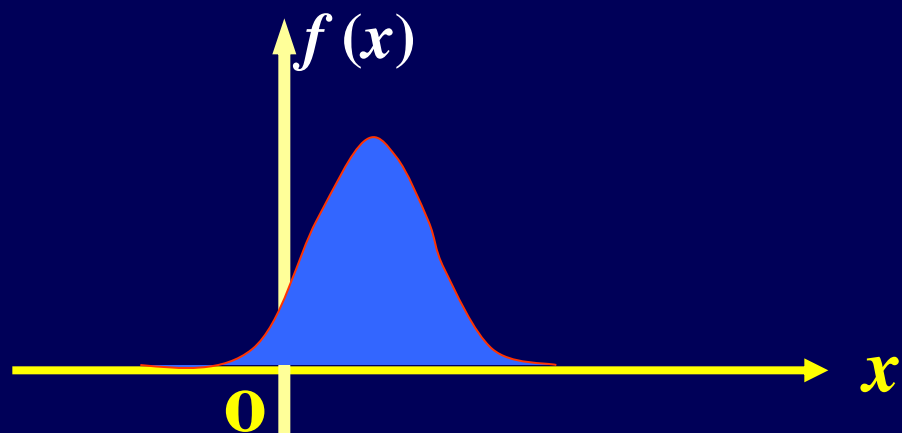
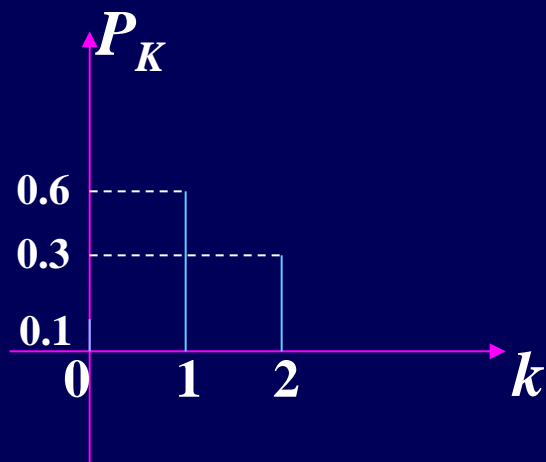
$$P(X = k) = p^k (1 - p), \quad k = 0, 1, 2, 3$$

$$P(X = 4) = p^4,$$

$$p = \frac{2}{3} \quad \text{代入}$$

$k$	0	1	2	3	4
$p_k$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^4$

为了对离散型的和连续型的  $r.v$  以及更广泛类型的  $r.v$  给出一种统一的描述方法，引进了**分布函数**的概念。





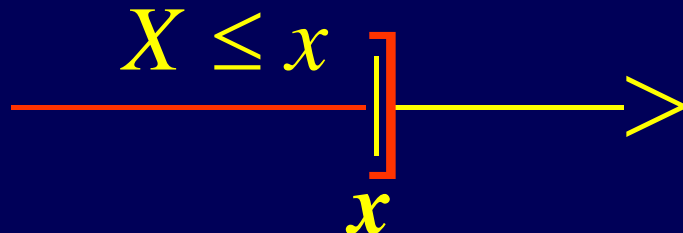
## 2. 随机变量的分布函数

**定义**

设  $X$  为 r.v.,  $x$  是任意实数, 称函数

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < +\infty$$

为  $X$  的分布函数.



如果将  $X$  看作数轴上随机点的坐标,  
那么分布函数  $F(x)$  的值就表示  $X$  落在区间  
 $(-\infty, x]$  的概率.

用分布函数计算  $X$  落在  $(a, b]$  里的概率:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

因此，只要知道了随机变量 $X$ 的分布函数，它的统计特性就可以得到全面的描述.

$$F(x) = P(X \leq x), \quad -\infty < x < \infty$$

分布函数是一个普通的函数，正是通过它，我们可以用数学分析的工具来研究 随机变量.



# 分布函数的性质

(1)  $F(x)$  单调不减, 即

$$\forall x_1 < x_2, F(x_1) \leq F(x_2)$$

(2)  $0 \leq F(x) \leq 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

(3)  $F(x)$  右连续, 即  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} F(x) = F(x_0)$

如果一个函数具有上述性质, 则一定是某个  $r.v$   $X$  的分布函数. 也就是说, 性质(1)--(3)是鉴别一个函数是否是某  $r.v$  的分布函数的充分必要条件.

用分布函数计算  $X$  落在  $(a, b]$  里的概率:

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

因此，只要知道了随机变量 $X$ 的分布函数，它的统计特性就可以得到全面的描述.

## 用分布函数表示概率

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

$$P(X > a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$$

$$P(X = a) = F(a) - F(a-0)$$

请填空

$$\left\{ \begin{array}{l} P(a \leq X \leq b) = \underline{F(b) - F(a-0)} \\ P(a < X < b) = \underline{F(b-0) - F(a)} \\ P(a \leq X < b) = \underline{F(b-0) - F(a-0)} \end{array} \right.$$

## ● 离散型随机变量的分布函数

$$F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x_k \leq x} p_k$$

$$p_k = P(X = x_k) = F(x_k) - F(x_{k-1})$$

其中  $x_{k-1} < x_k$  .

$F(x)$  是分段阶梯函数, 在  $X$  的可能取值  $x_k$  处发生间断, 间断点为第一类跳跃间断点, 在间断点处有跃度  $p_k$  .

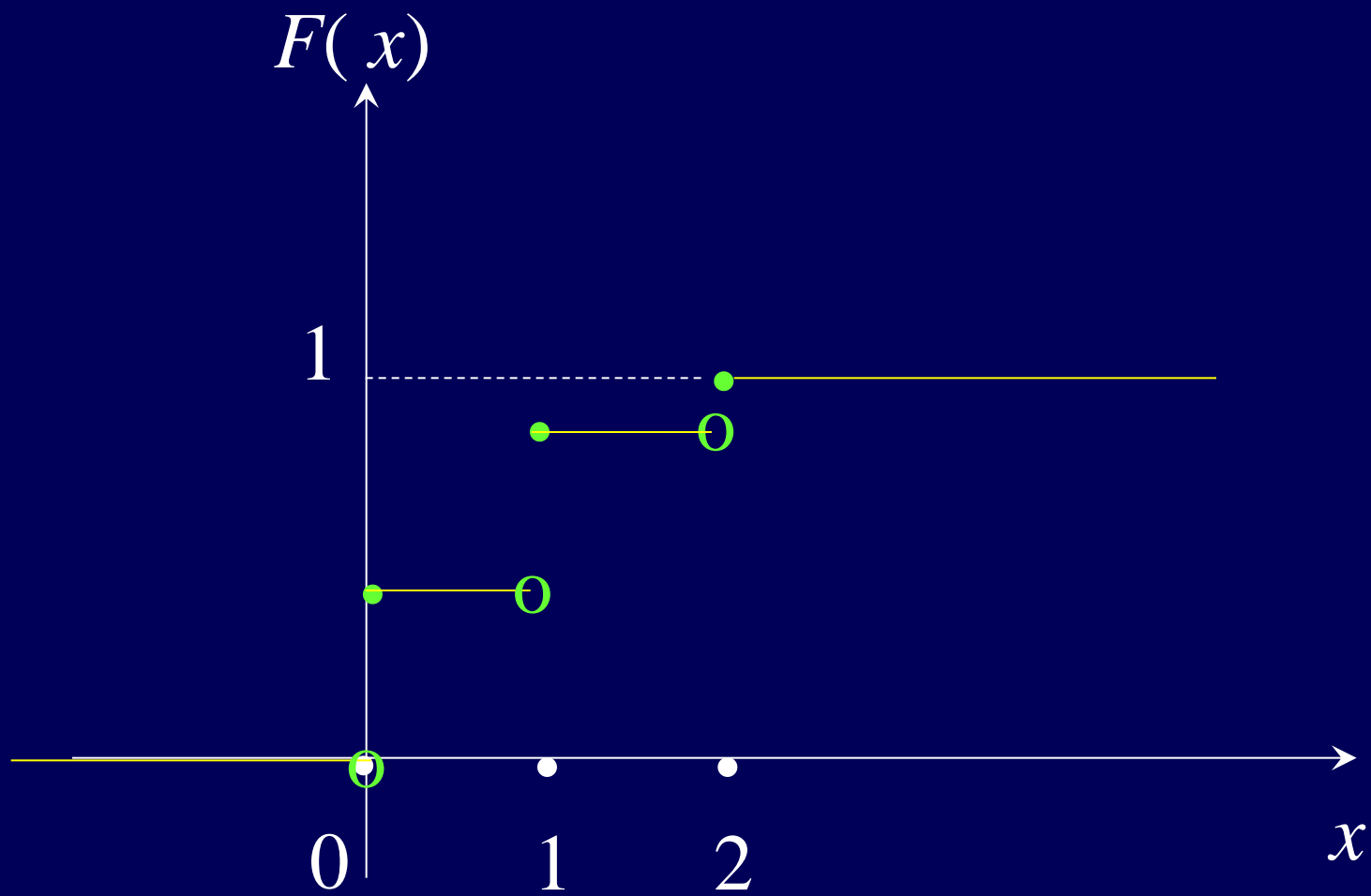
P23例1

P25例2

$X$	0	1	2
$p_k$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{7}{15} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{7}{15} + \frac{7}{15} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$





$X$	0	1	2
$p_k$	$\frac{7}{15}$	$\frac{7}{15}$	$\frac{1}{15}$

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{7}{15} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{14}{15} & 1 \leq x < 2 \\ 1 & x \geq 2 \end{cases}$$

$$P(X \leq 1.5) = \frac{14}{15}$$

$$P(0 < X \leq 2) = F(2) - F(0) = \frac{8}{15}$$

$$\text{或者 } = P(X=1) + P(X=2)$$

$$P(0 \leq X < 2)?$$

## 2.3 二项分布

### 伯努利概型

$n$  重伯努利 (Bernoulli) 试验:

- ◆ 试验可重复  $n$  次
- ◆ 每次试验只有两个可能的结果:

$$A, \bar{A} \text{ 且 } P(A) = p, 0 < p < 1$$

- ◆ 每次试验的结果互不影响——  
称为这  $n$  次试验是相互独立的

$n$  重 Bernoulli 试验中事件  $A$  出现的次数  
记为  $X$ .

二项分布

## 二项分布

$n$  重Bernoulli 试验中,  $X$  是事件 $A$  在  $n$  次试验中发生的次数,  $P(A) = p$ , 若

$$P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

则称  $X$  服从参数为 $n, p$  的**二项分布**, 记作

$$X \sim B(n, p)$$

0-1 分布是  $n = 1$  的二项分布

## 两点分布 (0-1 分布)

$X$	0	1
$P_k$	$1 - p$	$p$

$$0 < p < 1$$

或  $P(X = k) = p^k (1 - p)^{1-k}, \quad k = 0, 1$

### 应用 场合

凡试验只有两个结果, 常用0-1分布描述, 如产品是否合格、人口性别统计、系统是否正常、电力消耗是否超标等等.

## 二项分布中最可能出现次数

记  $p_k = P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$

$$\left. \begin{aligned} \frac{p_{k-1}}{p_k} &= \frac{(1-p)k}{p(n-k-1)} \leq 1 \\ \frac{p_k}{p_{k+1}} &= \frac{(1-p)(k+1)}{p(n-k)} \geq 1 \end{aligned} \right\} \rightarrow (n+1)p - 1 \leq k \leq (n+1)p$$

当  $(n+1)p = \text{整数}$  时, 在  $k = (n+1)p$  与  $(n+1)p - 1$  处的概率取得最大值

当  $(n+1)p \neq \text{整数}$  时, 在  $k = [(n+1)p]$  处的概率取得最大值

$[x]$  表示不超过  $x$  的最大整数

## P32 例3

令 $X$ 表示使用外线的人数,则  $X \sim B(99, 0.05)$

$$(1) \quad k = (n + 1)p = (99 + 1)0.05 = 5$$

$$\therefore X = 4, \quad 5$$

$$P(X = 4) = P(X = 5) = C_{99}^4 (0.05)^4 (0.95)^{95}$$

$$\approx 0.18$$

**P30 例1** 产品100件,废品率为0.05,

求 (1) 最多一件废品的概率;

(2) 最少一件废品的概率.

令 $X$ 表示废品数,则  $X \sim B(100, 0.05)$

$$(1) P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$$

$$= \sum_{k=0}^1 C_{100}^k (0.05)^k (0.95)^{100-k} \approx 0.0371$$

$$(2) P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{100} P(X = k) = 1 - P(X = 0)$$

$$\approx 0.9941$$

**问题** 如何计算

$P(X \geq 50)$ ?

泊松近似



## 2.4 泊松分布

若  $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$

其中  $\lambda > 0$  是常数, 则称  $X$  服从参数为  $\lambda$  的泊松 (Poisson) 分布. 记作  $X \sim \pi(\lambda)$  或  $P(\lambda)$

**应用场合** 在某个时段内:

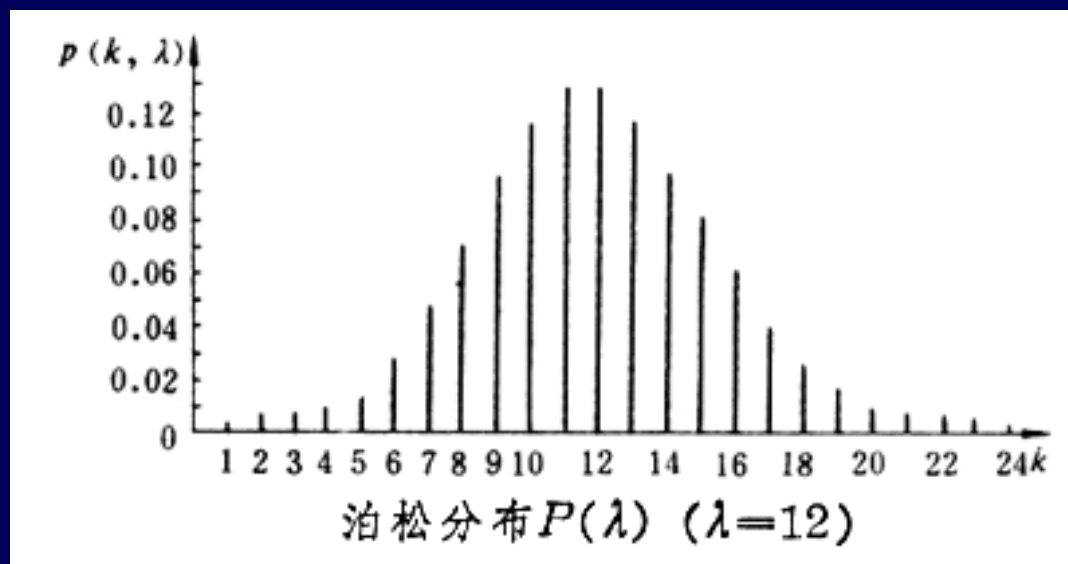
市级医院急诊病人数;

某地区拨错号的电话呼唤次数;

某地区发生的交通事故的次数.

一本书一页中的印刷错误数.

## 泊松分布的图形特点：



## 泊松分布中最可能出现次数

当 $\lambda =$  整数时,在 $\lambda$ 与 $\lambda-1$  处的概率取得最大值

当 $\lambda \neq$  整数时,在  $[\lambda]$ 处的概率取得最大值

## 二项分布的泊松近似

当试验次数 $n$ 很大时，计算二项概率变得很麻烦，必须寻求近似方法.

历史上，泊松分布是作为二项分布的近似，于1837年由法国数学家泊松引入的.

我们先来介绍二项分布的泊松近似，后面我们将介绍二项分布的正态近似.

## Possion定理

设  $np_n = \lambda > 0$ , 则对固定的  $k$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_n^k p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

## 结论

二项分布的极限分布是 Poisson 分布

若  $X \sim B(n, p)$ , 则当  $n$  较大,  $p$  较小, 则

$$C_n^k p^k (1 - p)^{n-k} \approx e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad np = \lambda$$

$n > 20, np < 5$  时近似效果较好

证 记  $np_n = \lambda_n$

$$\begin{aligned} & C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \left(\frac{\lambda_n^k}{k!}\right) \left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}\cdot(-\lambda_n)\left(\frac{n-k}{n}\right)} \\ &\rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \qquad k=1,2,\cdots \end{aligned}$$

## P34 例1

令 $X$ 表示废品数,则  $X \sim B(1000, 0.005)$

$$\lambda = np = 5$$

泊松近似

查附表2泊松分布表

$$(2) P(X \geq 1) = \sum_{k=1}^{1000} P(X = k) \approx \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5^k}{k!} e^{-5} = 0.9933$$

$$(1) P(X = 1) = P(X \geq 1) - P(X \geq 2)$$

$$(3) P(X = 5) = P(X \geq 5) - P(X \geq 6)$$

## P35.2

设同类型设备100台，每台工作相互独立，每台设备发生故障的概率都是 0.01. 一台设备发生故障可由一个人维修. 问至少要配备多少维修工人，才能保证当设备发生故障时不能及时维修的概率小于0.01?

解 设需要配备  $N$  个维修工人，

设  $X$  为同时发生故障的设备台数，  
则  $X \sim B(100, 0.01)$

泊松近似

$$P(X > N) = \sum_{k=N+1}^{100} C_{100}^k (0.01)^k (0.99)^{100-k} < 0.01$$

$$\lambda = 100 \times 0.01 = 1$$

$$P(X > N) \approx \sum_{k=N+1}^{\infty} e^{-1} \frac{1^k}{k!} < 0.01$$

查附表2得  $N+1=5$

$$N = 4$$

至少要配备4名维修工人



## 2.5 超几何分布

**例** 设有  $N$  件产品，其中有  $M$  件次品，现从中任取  $n$  件，用  $X$  表示其中的次品数，求其分布律。

超几何公式

$$P(X = k) = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k = 0, 1, 2, \dots, l.$$

$$l = \min(M, n)$$

超几何分布

$N$  很大， $n$  很小时，超几何分布近似于二项分布

## P38 例2

**例** 设有 500 人，其中有 50 人患病，现从中任取 10 人，用  $X$  表示其中的病人数，其分布律。

超几何分布

$$P(X = k) = \frac{C_{50}^k C_{450}^{10-k}}{C_{500}^{10}}, k = 0, 1, 2, \dots, 10.$$

$N$  很大， $n$  很小时，超几何分布近似于二项分布

$$P(X = k) \approx C_{10}^k \left(\frac{50}{500}\right)^k \left(\frac{450}{500}\right)^{10-k}, \quad k = 0, 1, \dots, 10$$

## 2.6 负二项分布

$n$  重Bernoulli 试验中,  $P(A) = p$ , 事件 $A$  第 $r$ 次成功出现在 第 $X$  次试验,

$$P(X = k) = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r},$$

则称  $X$  服从**负二项分布**.

特例:  $r = 1$  的负二项分布

**几何分布**

**例** 一门大炮对目标进行轰击,假定此目标必须被击中 $r$ 次才能被摧毁. 若每次击中目标的概率为 $p$  ( $0 < p < 1$ ), 且各次轰击相互独立,一次次地轰击直到摧毁目标为止.求所需轰击次数  $X$  的概率分布.

**解**  $P(X = k) = P(\text{前 } k-1 \text{ 次击中 } r-1 \text{ 次, 第 } k \text{ 次击中目标})$

$$= C_{k-1}^{r-1} p^{r-1} (1-p)^{k-r} \cdot p$$

$$= C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r} \quad k = r, r+1, \dots$$

帕斯卡  
分 布



# 几何分布

例 某射手连续向一目标射击，直到命中为止，已知他每发命中率是  $p$ ，求所需射击发数  $X$  的分布律.

解: 显然,  $X$  可能取的值是  $1, 2, \dots$ ,

$$A_k = \{\text{第}k\text{发命中}\}, k = 1, 2, \dots,$$

$$P(X=1)=P(A_1)=p,$$

$$P(X=2)=P(\bar{A}_1 A_2)=(1-p) \cdot p$$

$$P(X=3)=P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3)=(1-p)^2 \cdot p$$

$\dots\dots\dots$

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1} \cdot p \quad k=1, 2, \dots\dots$$

$$P(X=k)=(1-p)^{k-1} \cdot p \quad k=1,2,\dots$$

若随机变量 $X$ 的概率分布如上式，  
则称 $X$ 具有几何分布。

不难验证：

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p = 1$$

## 2.7 随机变量函数的分布

**问题** 设随机变量 $X$  的分布已知,  
 $Y=g(X)$  (设 $g$ 是连续函数),  
如何由 $X$  的分布求出 $Y$  的分布?

**方法** 将与 $Y$  有关的事件转化成  $X$  的事件

## ● 离散型随机变量函数的分布

设 r.v.  $X$  的分布律为

$$P(X = x_k) = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

由已知函数  $g(x)$  可求出 r.v.  $Y$  的所有可能取值, 则  $Y$  的概率分布为

$$P(Y = y_i) = \sum_{k: g(x_k) = y_i} p_k, \quad i = 1, 2, \dots$$



一般, 若 $X$ 是离散型  $r.v$  ,  $X$ 的分布律为

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_k \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } Y=g(X) \sim \begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots & g(x_k) \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_k \end{pmatrix}$$

如果 $g(x_k)$ 中有一些是相同的, 把它们作适当并项即可.

**例1** 已知  $X$  的概率分布为

$X$	-1	0	1	2
$p_k$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

求  $Y_1 = 2X - 1$  与  $Y_2 = X^2$  的分布律

**解**

$Y_1$	-3	-1	1	3
$p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$Y_2$	1	0	1	4
$p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

$Y_2$	0	1	4
$p_i$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$