第三章 连续型随机变量及其分布

连续型随机变量X所有可能取值充满一个区间，对这种类型的随机变量，不能象离散型随机变量那样，以指定它取每个值概率的方式，去给出其概率分布，而是通过给出所谓“概率密度函数”的方式.

3.1 连续型随机变量

定义 设 X 是随机变量, 若存在一个非负可积函数 $f(x)$, 使得

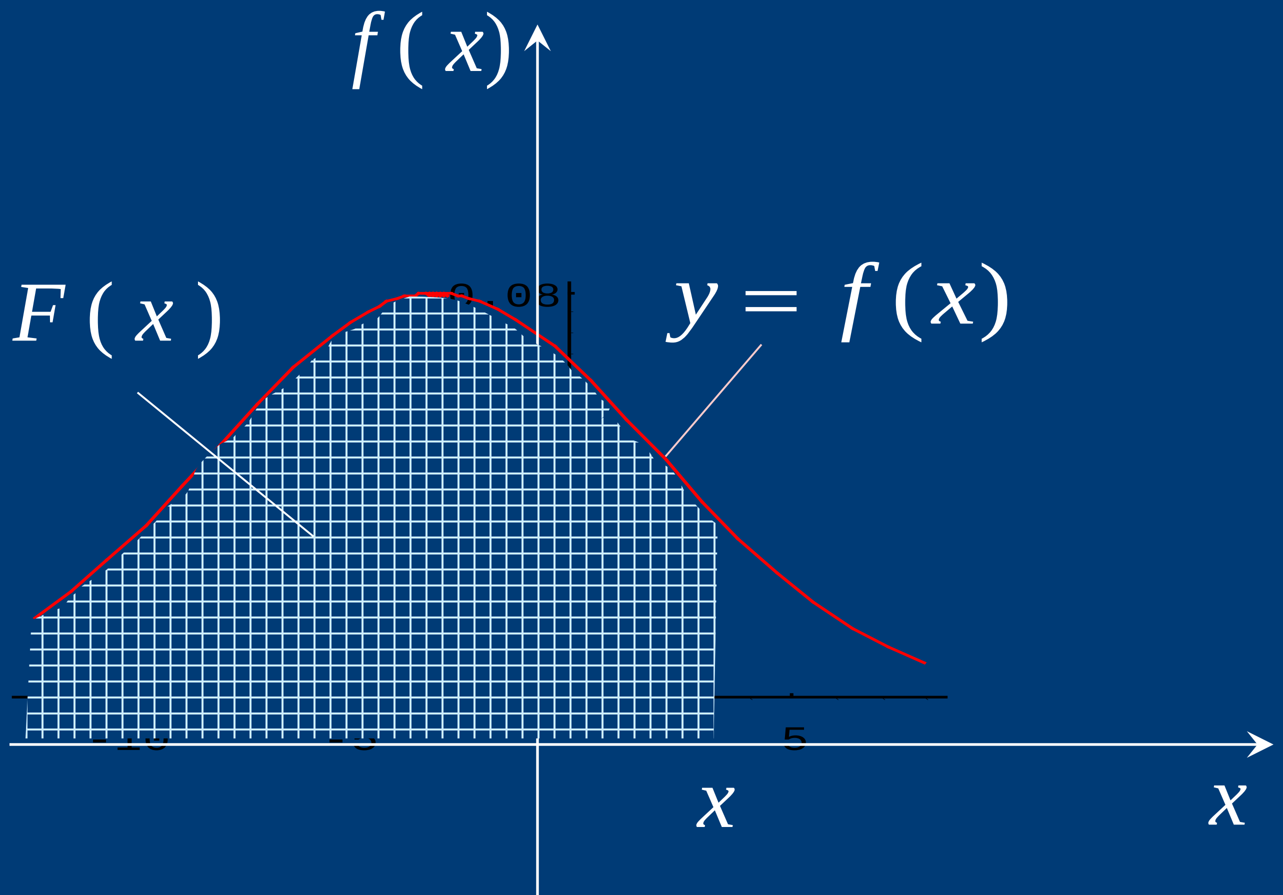
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t \qquad -\infty < x < +\infty$$

其中$F(x)$是它的分布函数

则称 $f(x)$是X 的概率密度函数.

分布函数与密度函数

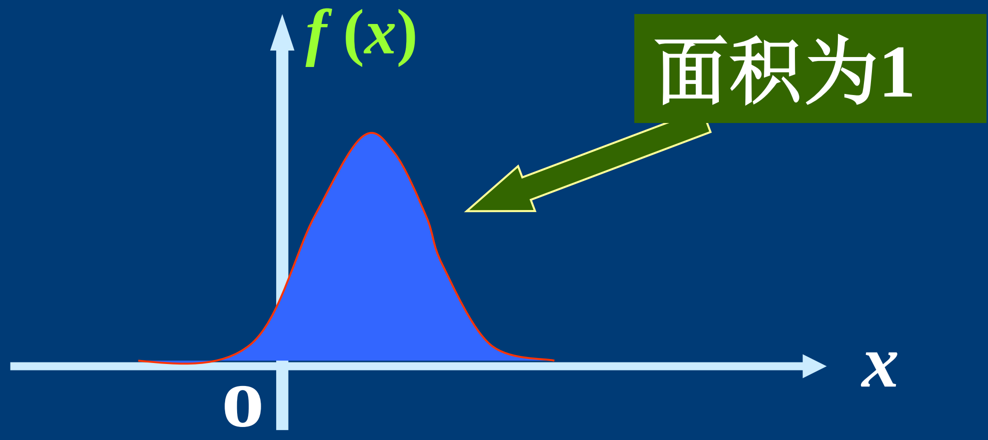
几何意义



p.d.f. $f(x)$的性质

- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = F(+\infty) = 1$

判定函数 $f(x)$是否为r.vX的概率密度函数的充要条件.



- 在 $f(x)$ 的连续点处，

$$f(x) = F'(x)$$

需要指出的是:

连续型*r.v*取任一指定值的概率为0

即： $P(X=a)=0,\quad a$为任一指定值

这是因为

$$P(X=a)=\lim_{\Delta x\to 0}P(a-\Delta x<X\le a)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{a-\Delta x}^{a}f(x)dx=0$$

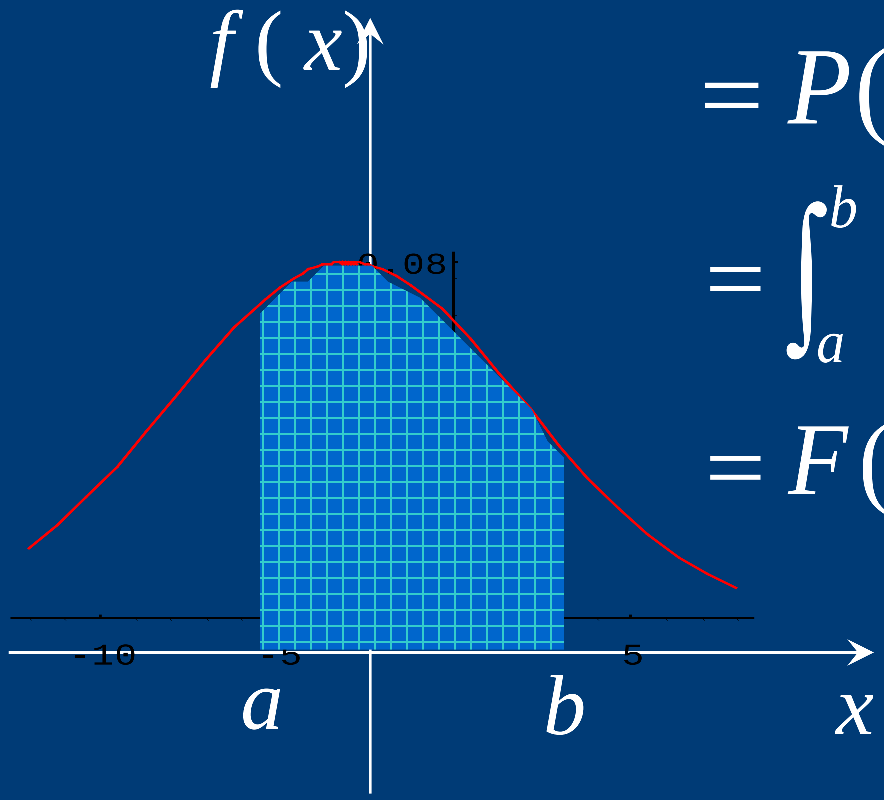
注意：概率为0 (1) 的事件未必不发生(发生)

由$P(A)=0$，不能推出 $A=\phi$

由$P(B)=1$，不能推出 $B=S$

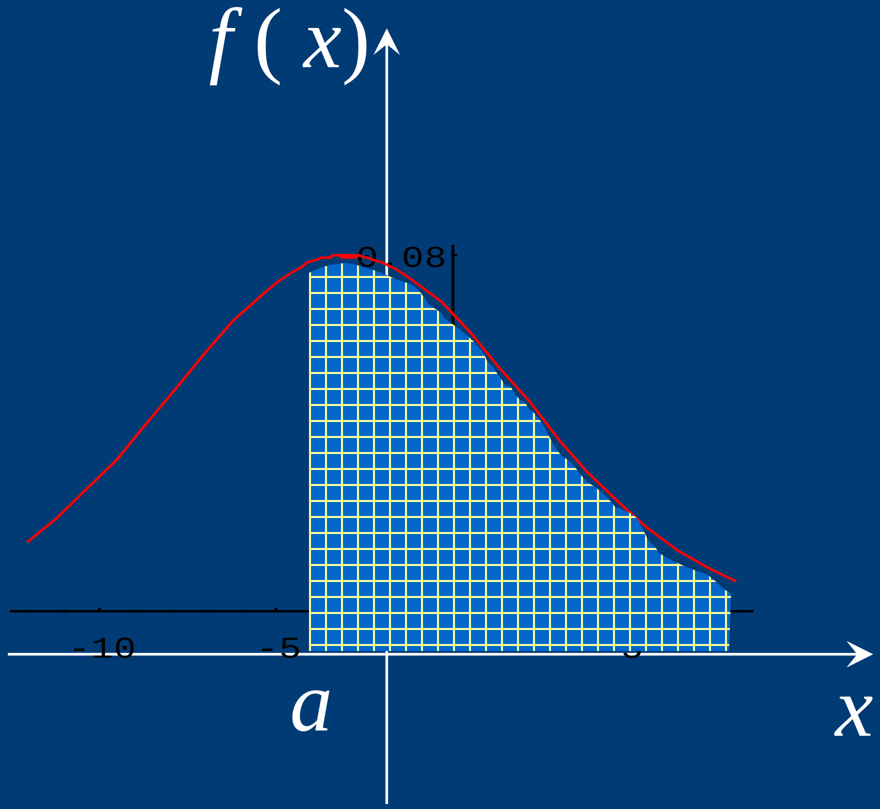
对于连续型 *r.v. X*

$$P(a<X\le b)=P(a\le X\le b)$$
$$=P(a<X<b)$$
$$=P(a\le X<b)$$
$$=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$
$$=F(b)-F(a)$$



$$P(X \le b) = P(X < b) = F(b)$$

$$P(X > a) = P(X \ge a) = 1 - F(a)$$



由上述性质可知，对于连续型随机变量，关心它在某一点取值的问题没有太大的意义；我们所关心的是它在某一区间上取值的问题.

若已知连续型随机变量 X 的密度函数 $f(x)$，则 X 在任意区间G（G可以是开区间,也可以是闭区间，或半开半闭区间；可以是有限区间，也可以是无穷区间）上取值的概率为，

$$P\{X \in G\} = \int_G f(x)dx$$

例 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-3x}, & x\geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

求：(1)系数k; (2)分布函数$F(x)$; (3) $P(X\leq 0.1)$.

例 设随机变量 X 的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases} k\mathrm{e}^{-3x}, & x\ge 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

求：(1)系数k; (2)分布函数$F(x)$; (3) $P(X\le 0.1)$.

解　(1)由于 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{0}^{\infty} ke^{-3x}dx=\frac{k}{3}=1$

所以得 $k=3$

(2)　$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$

当 $x<0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=0$

当 $x \geq 0$ 时，$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{0}^{x} 3e^{-3t}dt=1-e^{-3x}$

于是所求分布函数为

$$F(x)=\begin{cases} 1-e^{-3x}, & x \geq 0 \\ 0, & x<0 \end{cases}$$

(3) $P(X \leq 0.1)=\int_{-\infty}^{0.1} f(x)dx=\int_{0}^{0.1} 3e^{-3x}dx$

$$=1-e^{-0.3} \approx 0.2592$$

或者 $P(X \leq 0.1)=F(0.1)=1-e^{-0.3} \approx 0.2592$

例 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=A+B\arctan x\ (-\infty<x<+\infty),$$

求 (1) A 及 B; (2) X 的概率密度; (3) $P(X^2>1)$.

例 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = A + B\arctan x \ (-\infty < x < +\infty),$$

求 (1) A 及 B; (2) X 的概率密度; (3) $P(X^2 > 1)$.

解 (1) 由 $F(+\infty) = 1$ 及 $F(-\infty) = 0$, 可得

$$\begin{cases} A + \dfrac{\pi}{2}B = 1 \\ A - \dfrac{\pi}{2}B = 0 \end{cases}, \quad \text{即} \quad A = \frac{1}{2} \quad B = \frac{1}{\pi}$$

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

(2) 设 X 的密度函数为$f(x)$，则

$$f(x)=F'(x)$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2} \qquad \left(-\infty<x<+\infty\right)$$

(3) $P(X^2>1)=1-P(-1\le X\le 1)$

$$=1-[F(1)-F(-1)]=\frac{1}{2}$$

3.2 正态分布

若X 的 $d.f.$ 为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad -\infty<x<+\infty$$

μ,σ 为常数, $\sigma>0$

则称 X 服从参数为 μ , σ^2 的正态分布

记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

亦称高斯
(Gauss)分布

德莫佛最早发现了二项概率的一个近似公式，这一公式被认为是正态分布的首次露面.

正态分布在十九世纪前叶由高斯加以推广，所以通常称为高斯分布.

Abraham de Moivre

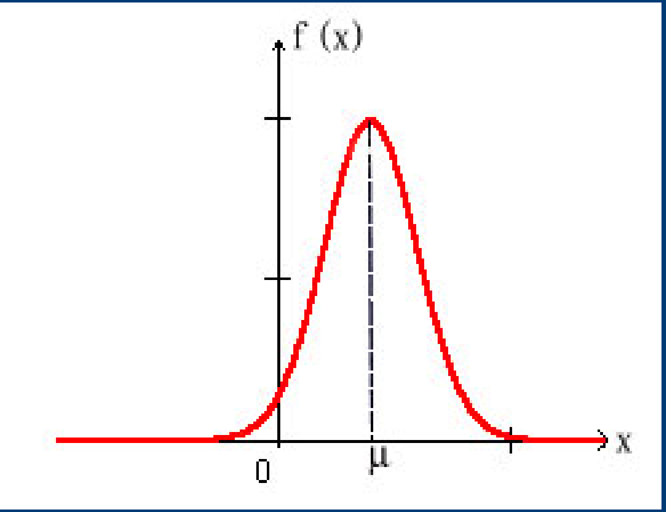
Abraham de Moivre

Born	26 May 1667 Vitry-le-François, Champagne, France
Died	27 November 1754 (aged 87) London, England
Residence	England
Nationality	French
Alma mater	Academy of Saumur Collège d'Harcourt (fr)
Known for	De Moivre's formula Theorem of de Moivre–Laplace

Scientific career

Fields	Mathematics
Academic advisors	Jacques Ozanam
Influences	Isaac Newton

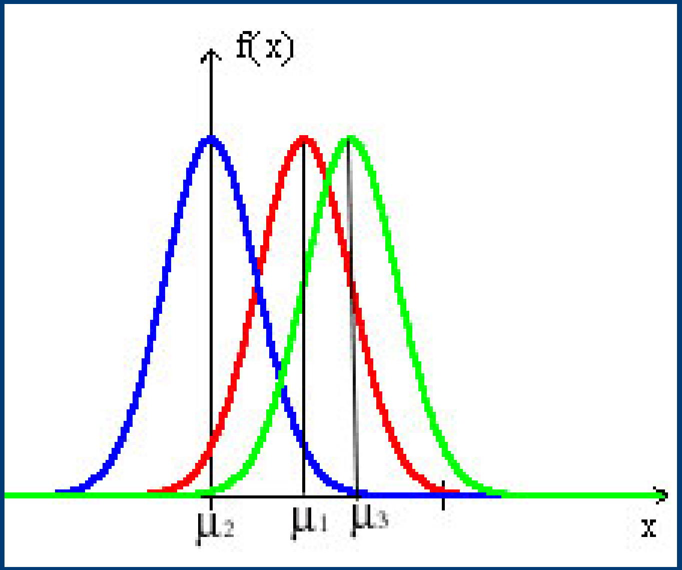
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ 的图形特点

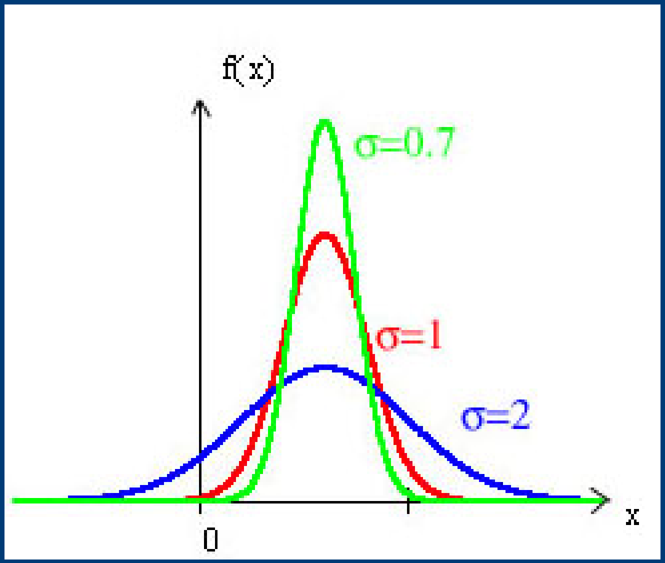


正态分布的密度曲线是一条关于 μ 对称的钟形曲线.

特点是“两头小，中间大，左右对称”.

正态分布$N(\mu,\sigma^2)$ 的图形特点





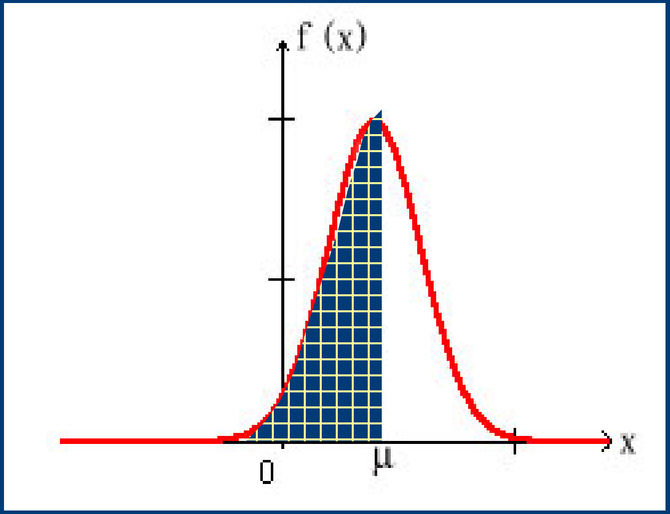
μ 决定了图形的中心位置，σ 决定了图形中峰的陡峭程度.

μ — 位置参数　　　σ — 形状参数

$$P(X \le \mu) = F(\mu)$$

$$= 1 - F(\mu) = P(X > \mu)$$

$$= \frac{1}{2}$$



正态分布是应用最广泛的一种连续型分布

各种测量的误差；　人体的生理特征；

工厂产品的尺寸；　农作物的收获量；

海洋波浪的高度；　金属线抗拉强度；

热噪声电流强度；　学生的考试成绩；

……　　……

正态分布的重要性

正态分布是概率论中最重要的分布，这可以由以下情形加以说明：

(1). 正态分布是自然界及工程技术中最常见的分布之一，大量的随机现象都是服从或近似服从正态分布的. 可以证明，如果一个随机指标受到诸多因素的影响，但其中任何一个因素都不起决定性作用，则该随机指标一定服从或近似服从正态分布.

(2). 正态分布有许多良好的性质，这些性质是其它许多分布所不具备的.

(3). 正态分布可以作为许多分布的近似分布.

正态分布由它的两个参数μ和σ唯一确定，当μ和σ不同时，是不同的正态分布.

下面我们介绍一种最重要的正态分布

标准正态分布

一种重要的正态分布

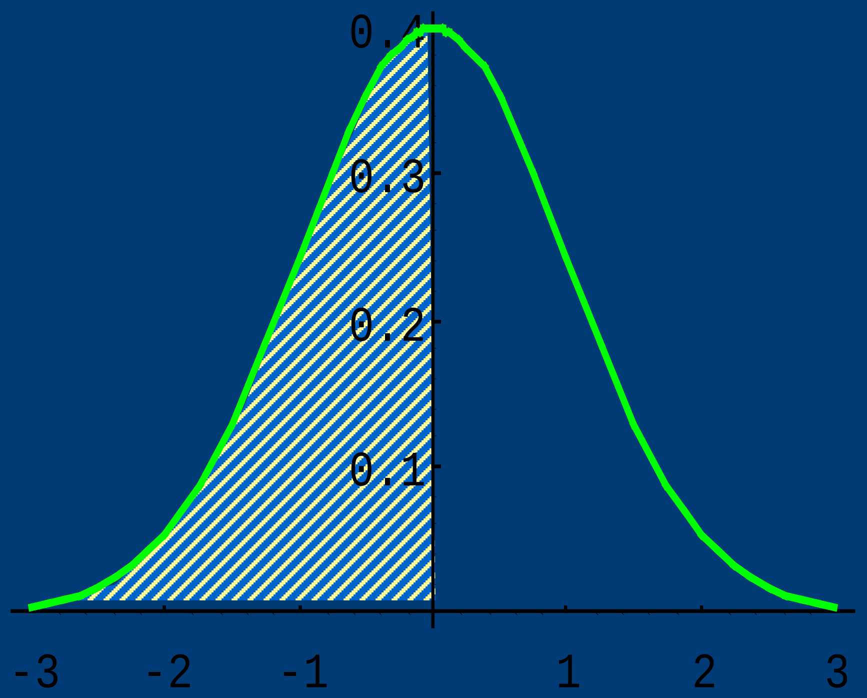
—— 标准正态分布$N\,(0,1)$

密度函数 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ $\quad -\infty<x<+\infty$

是偶函数，分布函数记为

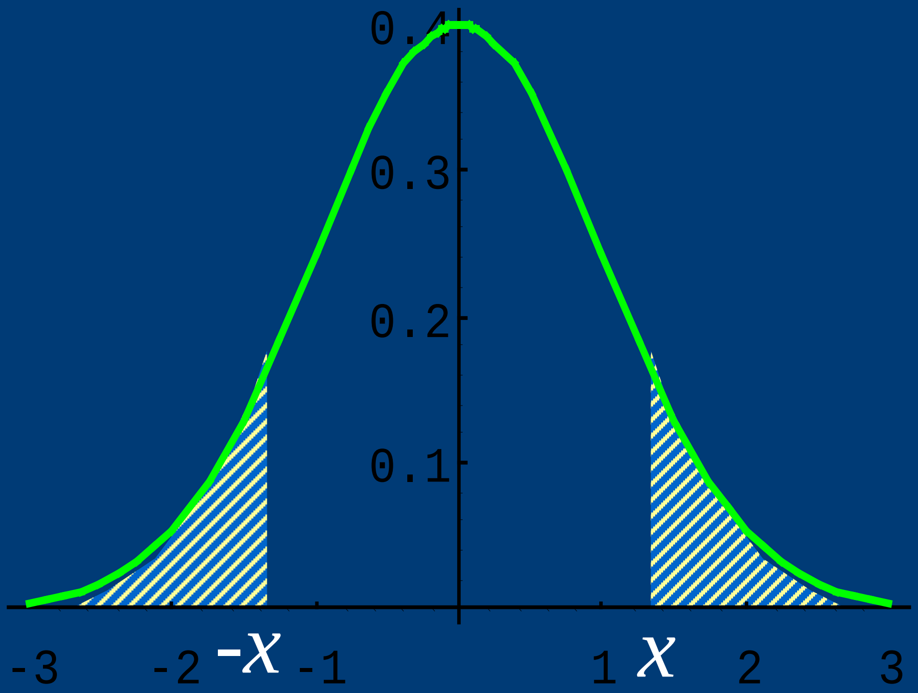
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t \qquad -\infty<x<+\infty$$

其值有专门的表供查.



$$\Phi(0) = 0.5 \qquad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$P(|X| < a) = 2\Phi(a) - 1$$



$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

$$P(|X| < a) = 2\Phi(a) - 1$$

标准正态分布的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

根据定理, 只要将标准正态分布的分布函数制成表，就可以解决一般正态分布的概率计算问题.

对一般的正态分布：$X \sim N(\mu, \sigma^2)$

其分布函数 $$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$

作变量代换 $s=\dfrac{t-\mu}{\sigma}$ $\longrightarrow$ $\boxed{F(x)=\Phi\left(\dfrac{x-\mu}{\sigma}\right)}$

$\longrightarrow$ $$P(a<X<b)=F(b)-F(a)$$

$$=\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$P(X>a)=1-F(a)$$

$$=1-\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

例 设随机变量 $X \sim N(0,\ 1)$，试求：

(1). $P\{1 \le X < 2\}$; (2). $P\{-1 < X < 2\}$.

解：(1). $P\{1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(1)$

附表1

$$= 0.97725 - 0.84134 = 0.13591$$

(2). $P\{-1 \le X < 2\} = \Phi(2) - \Phi(-1)$

$$= \Phi(2) - [1 - \Phi(1)]$$

$$= 0.97725 - 1 + 0.84134$$

$$= 0.81859$$

例 设 $X \sim N(1,4)$, 求 $P\,(0 \le X \le 1.6)$

解 $P(0 \le X \le 1.6) = \Phi\left(\frac{1.6-1}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-1}{2}\right)$

$$= \Phi(0.3) - \Phi(-0.5)$$

附表1

$$= \Phi(0.3) - [1 - \Phi(0.5)]$$

$$= 0.6179 - [1 - 0.6915]$$

$$= 0.3094$$

例 3σ 原理

设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $P(|X-\mu| < 3\sigma)$

解 $P(|X-\mu| < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$

$$= \Phi\left(\frac{\mu + 3\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - 3\sigma - \mu}{\sigma}\right)$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-3)$$

$$= 2\Phi(3) - 1 = 2 \times 0.9987 - 1 = 0.9974$$

一次试验中, X 落入区间$(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$的概率为 0.9974, 而超出此区间可能性很小

例 设测量的误差 $X \sim N(0,100)$,
进行100次独立测量，求误差的绝对值超过19.6次数不少于3的概率.

P52 例3 设测量的误差 $X \sim N(0,100)$，进行100次独立测量，求误差的绝对值超过19.6次数不少于3的概率.

解 $p = P(|X| > 19.6) = 1 - [\Phi\left(\frac{19.6}{10}\right) - \Phi\left(\frac{-19.6}{10}\right)]$

$= 0.05 \qquad Y \sim B(100, p)$

$$P(Y = k) = C_{100}^{k} p^{k} (1 - p)^{100-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, 100$$

$\lambda = np = 5$ 泊松近似 查附表2泊松分布表

$$P(Y \geq 3) \approx 0.87$$

3.3 指数分布

若 X 的 $d.f.$ 为

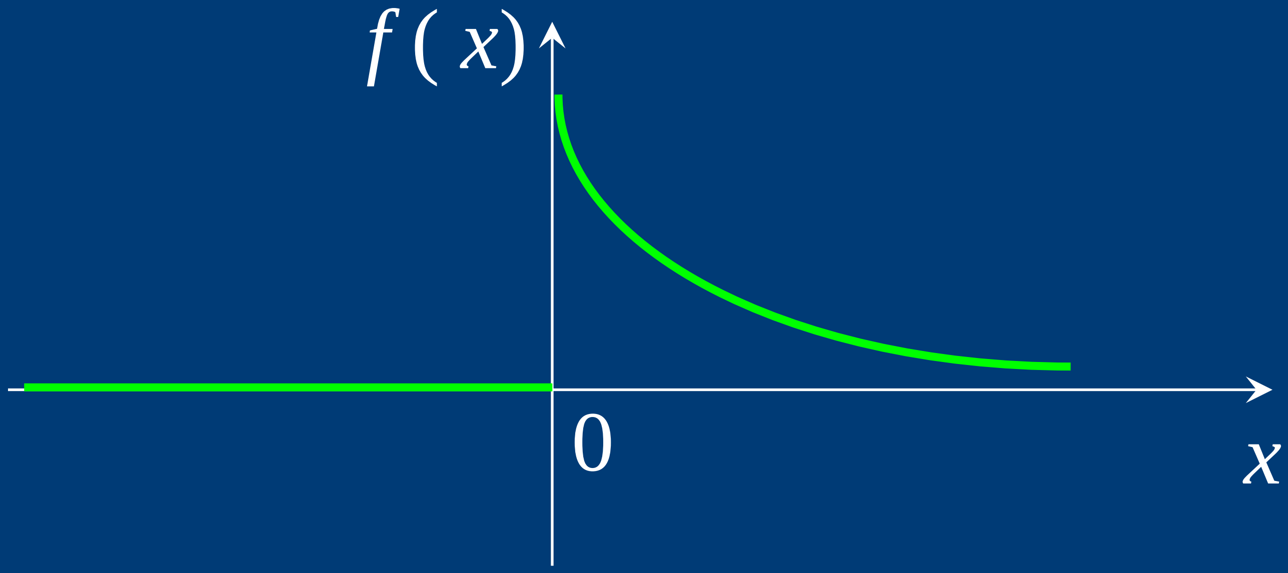
$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$$

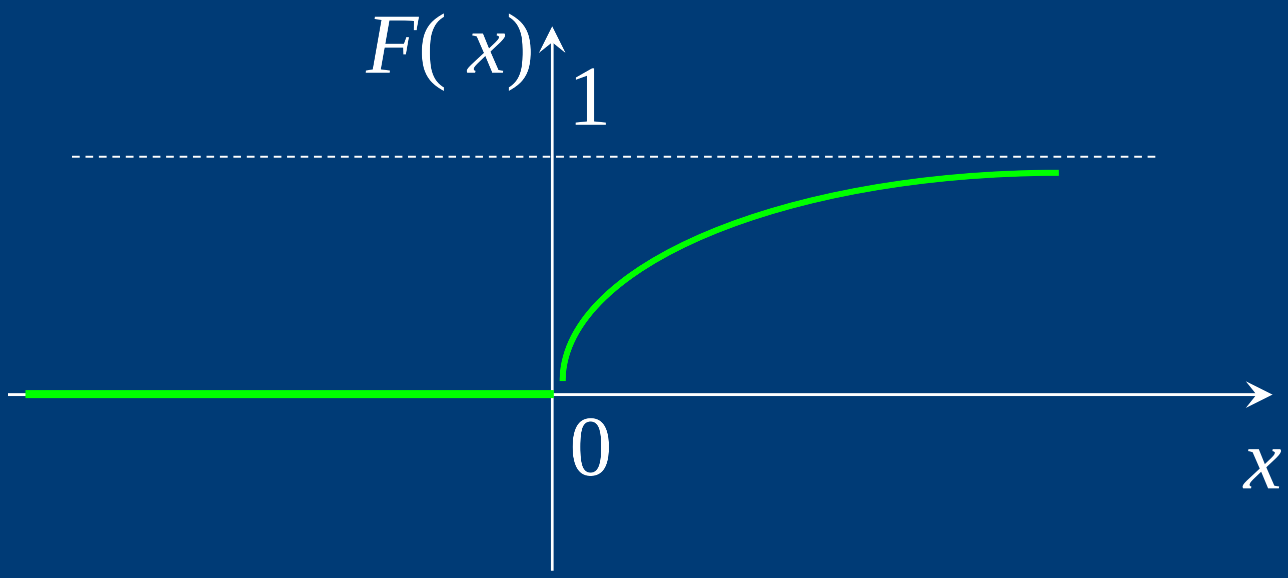
$\lambda>0$ 为常数

则称 X 服从 参数为 λ 的指数分布

记作 $X\sim E(\lambda)$

X 的分布函数为 $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0\end{cases}$


f (x)
0
x


F(x)
1
0
x

应用场合 用指数分布描述的实例有：

随机服务系统中的服务时间

电话问题中的通话时间

无线电元件的寿命

动物的寿命

指数分布常作为各种“寿命”分布的近似

指数分布的“无记忆性”

命题 若 $X \sim E(\lambda)$,则

$$P(X > s+t \mid X > s) = P(X > t)$$

事实上

$$P(X > s+t \mid X > s) = \frac{P(X > s+t, X > s)}{P(X > s)} = \frac{P(X > s+t)}{P(X > s)}$$

$$= \frac{1 - P(X \le s+t)}{1 - P(X \le s)} = \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t} = P(X > t)$$

故又把指数分布称为“永远年轻”的分布

例 顾客在某银行窗口等待服务的时间T(分钟)服从参数为1/10的指数分布，若等待时间超过15分钟，则他就离开.设他一个月内要来银行10次，以X表示一个月内他没有等到服务而离开的次数，求X的分布律及至少有两次没有等到服务的概率.

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{10}e^{-t/10}, & t>0;\\ 0, & t\le 0.\end{cases}$$

$$p=P(T>15)=\int_{15}^{+\infty}\frac{1}{10}e^{-t/10}dt=0.2231.$$

$$X \sim B(10, p)$$

$$P(X = k) = C_{10}^{k} p^{k} (1 - p)^{10-k}, \quad k = 0, 1, \cdots, 10$$

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1).$$

例 设一大型设备在任何长为t的时间内发生故障的次数$N(t)$服从参数为λt的泊松分布，求:

(1) 相邻两次故障之间的时间间隔T的概率分布;

(2) 设备无故障运行8小时的概率Q_1;

(3) 在设备已经无故障工作8小时的情况下，再无故障运行8小时的概率Q_2

例 设一大型设备在任何长为t的时间内发生故障的次数$N(t)$服从参数为λt的泊松分布，求：

(1) 相邻两次故障之间的时间间隔T的概率分布；

(2) 设备无故障运行8小时的概率Q_1;

(3) 在设备已经无故障工作8小时的情况下，再无故障运行8小时的概率Q_2

$$F(t) = P(T \le t)$$

$$= \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1 - P(T > t) = 1 - P\{N(t) = 0\} = 1 - e^{-\lambda t}, & t \ge 0 \end{cases}$$

$$T \sim E(\lambda)$$

$$(2)\ Q_1 = P(T > 8) = 1 - F(8)$$

指数分布的“无记忆性”

$$P(X > s + t \mid X > s) = P(X > t)$$

$$(3)\ Q_2 = P(T > s + 8 \mid T > s) = P(T > 8)$$

3.4 均匀分布

若 X 的 $d.f.$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则称 X 服从区间(a , b)上的**均匀分布**

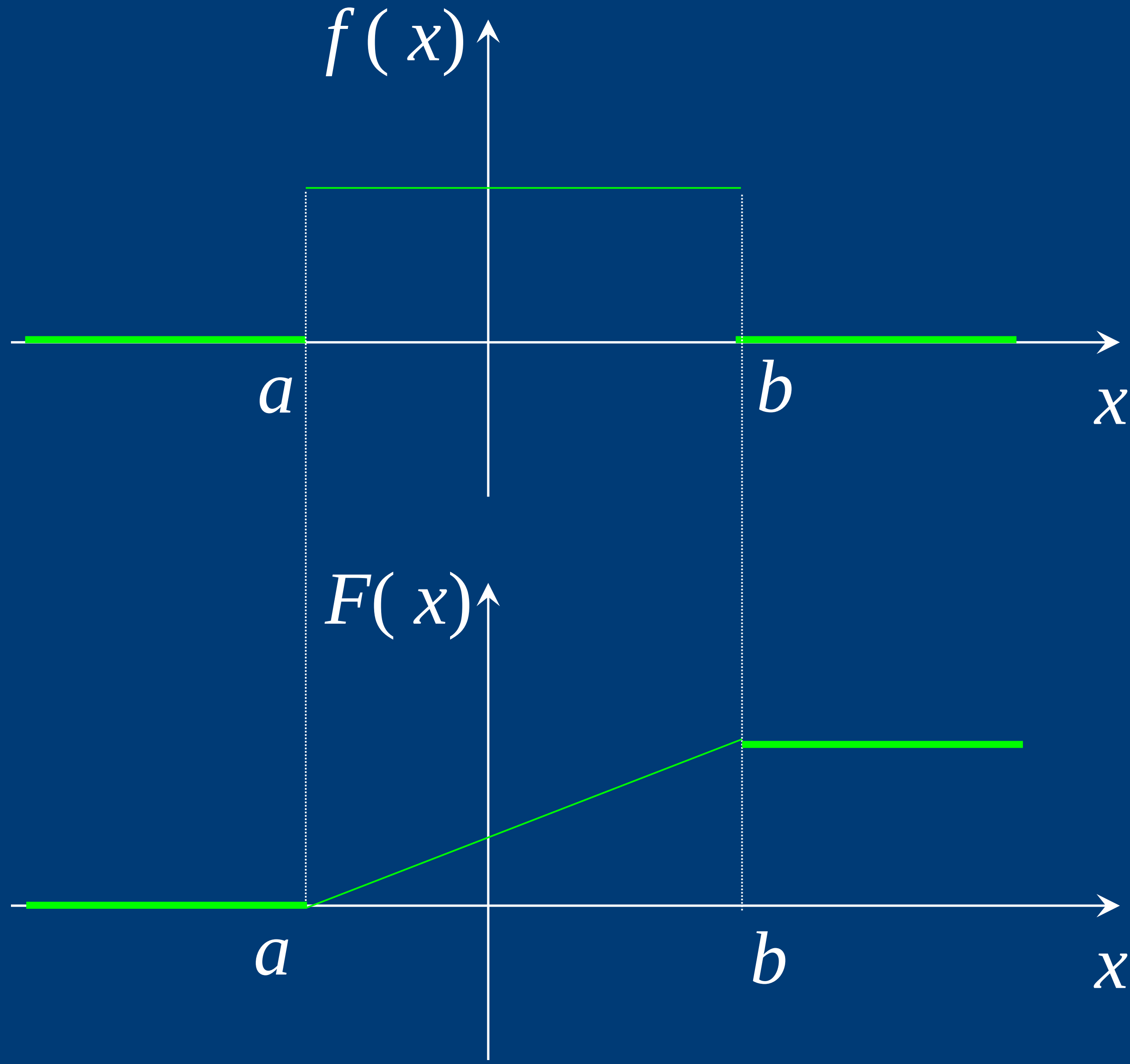
记作 $$X\sim U(a,b)$$

X 的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \;=\begin{cases} 0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b, \\ 1 & x\ge b \end{cases}$$

$$\forall (c,d)\subset(a,b),\;\; P(c<X<d)=\int_{\mathrm{c}}^{\mathrm{d}} \frac{1}{b-a}\mathrm{d}\,x=\frac{d-c}{b-a}$$

即 X 落在(a,b)内任何长为 $d-c$ 的小区间的概率与小区间的位置无关, 只与其长度成正比. 这正是几何概型的情形.



f (x)
a
b
x
F(x)
a
b
x

例 设随机变量X服从区间$(-1, 1)$上的均匀分布，试求方程 $t^2 - 3Xt + 1 = 0$ 有实根的概率.

例 设随机变量X服从区间$(-1,1)$上的均匀分布，

试求方程 $t^2-3Xt+1=0$ 有实根的概率.

解: 随机变量X的密度函数为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & -1<x<1\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

设：$A=\{\text{方程有实根}\}$

则 $P(A)=P(9X^2-4\geq 0)$

$$=P(X\geq\frac{2}{3})+P(X\leq-\frac{2}{3})$$

$$=\int_{\frac{2}{3}}^{1}\frac{1}{2}dx+\int_{-1}^{-\frac{2}{3}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{3}$$

3.5 伽玛分布

若 X 的$d.f.$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^{\gamma}}{\Gamma(\gamma)}x^{\gamma-1}e^{-\lambda x}, & x\geq 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases} \qquad \lambda>0,\gamma>0$$

则称 X 服从**伽玛分布**

记作 $X\sim G(\lambda,\gamma)$

3.6 威布尔分布

若 X 的$d.f.$ 为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\theta}\left(\dfrac{x-\delta}{\theta}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x-\delta}{\theta}\right)^{\beta}}, & x\ge\delta\ge 0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\beta>0,\theta>0$$

则称 X 服从威布尔分布

3.7 随机变量函数的分布

问题 设随机变量X 的分布已知，

$Y=g(X)$（设g是连续函数），

如何由X 的分布求出Y 的分布？

方法 将与Y 有关的事件转化成 X 的事件

连续型随机变量函数的分布

已知 X 的密度或分布函数，

求 $Y = g(X)$ 的密度或分布函数

方法：

（1） 从分布函数出发

（2）用公式直接求密度

方法一 从分布函数出发

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y)$$

$$f_Y(y) = F_Y'(y)$$

对于连续型随机变量，在求**$Y=g(X)$** 的分布时，关键的一步是把事件 { $g(X) \le y$ } 转化为X在一定范围内取值的形式，从而可以利用 X 的分布来求 P { $g(X) \le y$ }.

方法二 用公式

定理 设连续型**r.v** X具有概率密度 $f_X(x)$,

又设$y=g(x)$单调可导，其反函数为$x=g^{-1}(y)$,

则$Y=g(X)$是一个连续型**r.v**，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

其中，$\alpha=\min\limits_{a\le x\le b} g(x),\ \beta=\max\limits_{a\le x\le b} g(x),$

例 设 $X \sim f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

解：设Y的分布函数为 $F_Y(y)$，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P(2X+8\le y)$$

$$=P\{X\le \frac{y-8}{2}\}=F_X(\frac{y-8}{2})$$

于是Y的密度函数

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X(\frac{y-8}{2})\cdot\frac{1}{2}$$

$$f_X(x)=\begin{cases} x/8, & 0<x<4 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}$$

Y=2X+8

注意到 $0<x<4$ 时， $f_X(x)\neq 0$

即 $8<y<16$ $\qquad f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)\neq 0$

此时 $f_X\left(\frac{y-8}{2}\right)=\frac{y-8}{16}$

故 $$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{y-8}{32}, & 8<y<16 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

公式 设 $X \sim f_X(x) = \begin{cases} x/8, & 0 < x < 4 \\ 0, & 其它 \end{cases}$

求 $Y=2X+8$ 的概率密度.

$$x = \frac{y-8}{2}, \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha < y < \beta \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{y-8}{32}, & 8 < y < 16 \\ 0, & 其它 \end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例1 若 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，

$$Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\rightarrow X=\sigma Y+\mu,\quad X'=\sigma$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty$$

则 $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[g^{-1}(y)]\left|\dfrac{dg^{-1}(y)}{dy}\right|, & \alpha<y<\beta \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例2 $X \sim U(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}), Y=\tan X$

$$X=\arctan Y, \quad X'=\frac{1}{1+y^2}$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

柯西分布

例3 设 $X\sim N(0,1)$,其概率密度为:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\qquad -\infty<x<\infty$$

则 $Y=X^2$ 的概率密度为:

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\\ 0, & y\le 0\end{cases}$$

例 已知 $X \sim N(0,1)$, $Y = X^2$, 求 $f_Y(y)$

例3 已知 $X \sim N(0,1)$，$Y = X^2$，求 $f_Y(y)$

解 从分布函数出发

$$F_Y(y) = P(Y \le y)$$

当 $y < 0$ 时，$F_Y(y) = 0$

当 $y > 0$ 时，

$$F_Y(y) = P(X^2 \le y)$$

$$= P(-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y})$$

$$= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y})$$

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ F_X(\sqrt{y})-F_X(-\sqrt{y}), & y>0\end{cases}$$

故

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{2\sqrt{y}}\left(f_X(\sqrt{y})+f_X(-\sqrt{y})\right), & y>0\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\begin{cases}0, & y\le 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{2\pi y}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0\end{cases}$$