题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：1. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 1 B. 0 C. -2 D. 3
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - 1 \times 3 = 1.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：2. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 5 B. 3 C. -1 D. -3
解析：$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times (-1) = 5.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：3. 行列式 $\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 0 B. 144 C. 12 D. -12
解析：$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 8 & 12 \end{vmatrix} = 6 \times 12 - 9 \times 8 = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 2 B. 8 C. -8 D. 15
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 1 \times 3 = 2$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：5. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = ($　$)$.A. $ab(b-a)$　B. a^3-b^2　C. $ab(a-b)$　D. a^3+b^2-1

解析：$\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a \times b^2 - b \times a^2 = ab(b-a)$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：6. 行列式 $\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = ($　$)$.A. 2　B. 4　C. 1　D. -1

解析：$\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \times 1 - (-2) \times 4 = 2$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：7. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = ($　$)$.A. -9　B. 7　C. -8　D. 11

解析：$\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \times 5 - 2 \times 7 = -9$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：8. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = ($　$)$.A. 16　B. -26　C. -8　D. 17

解析：$\begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times (-5) - 3 \times (-7) = 16$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：9. 行列式 $\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (\quad)$.A.$x^2-2$ B.x^2 C.x^2+1 D.x^2-1

解析：$\begin{vmatrix} x+1 & 1 \\ 1 & x-1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-1)-1 = x^2-2.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：10. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = (\quad)$.A. a^2-b^2 B. a^2 C. a^2+1 D. a^2+b^2

解析：$\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2-b^2.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：11. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = (\quad)$.A. 10 B. 13 C. -10 D. 5

解析：$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2\times 3-4\times(-1) = 10.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：12. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (\quad)$.A. 19 B. 10 C. -21 D. 13

解析：$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4\times 4-(-1)\times 3 = 19.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目： 13. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 13　B. 3　C. -1　D. 5

解析： $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times (-1) = 13.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 14. 行列式 $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 21　B. 14　C. 12　D. -12

解析： $\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 5 \times 1 - (-2) \times 8 = 21.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 15. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 13　B. 18　C. -18　D. 15

解析： $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 2 \times 8 - 1 \times 3 = 13$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 16. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 1　B. 0　C. -2　D. 3

解析： $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \times 4 - (-1) \times (-3) = 1.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 17. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. -3　B. 3　C. -1　D. 5

解析： $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 1 \times (-1) = -3.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 18. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b \end{vmatrix} = (\quad)$.A. $ab(1-a)$　B. $a^3 - b^2$　C. a^3　D. $a^3 + b^2 - 1$

解析： $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b \end{vmatrix} = ab - ba^2 = ab(1-a).$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 19. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (\quad)$.A. 1　B. 7　C. -8　D. 11

解析： $\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \times 5 - 2 \times 7 = 1.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 20. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = (\quad)$. A. $-a^2 - b^2$　B. a^2　C. $a^2 + 1$　D. $a^2 + b^2$

解析： $\begin{vmatrix} a & b \\ b & -a \end{vmatrix} = -a^2 - b^2.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 21. 行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. 17　B. 18　C．-18　D. 15

解析： $\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 5 - 1 \times 3 = 17.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 22. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = ()$. A. -11 B. 16 C．-8 D. 17

解析： $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 1 \times (-5) - 3 \times 2 = -11.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 23. 行列式 $\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}$ =A. 10 B. 14 C. 12 D. -12

解析： $\begin{vmatrix} -6 & -2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = -6 \times 1 - (-2) \times 8 = 10.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 24. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是 $(\quad)$. A. $|a| < 2$ B. $|a| = 2$ C．$|a| > 2$ D．$|a| \leq 2$

解析： $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = -a^2 + 4$. 若 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$. 则有 $a^2 < 4$. 即 $|a| < 2$.

题型： 选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：25. 当 a,b 满足条件 () 时. 行列式 $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. A. $a=0$ 且 $b=0$ B. $a=0$ 或 $b=0$ C. $a=0$ D. $b=0$

解析：$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2+b^2=0$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：26. $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是 (). A. $k \neq 3$ 且 $k \neq -1$ B. $k \neq 3$ C. $k \neq -1$ D. $k \neq 3$ 或 $k \neq -1$

解析：因为 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} = k^2-2k-3=(k-3)(k+1)$. 所以若 $\begin{vmatrix} k-1 & 2 \\ 2 & k-1 \end{vmatrix} \neq 0$. 则 $k \neq 3$ 且 $k \neq -1$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：27. $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的充分条件是 (　　). A. $k=-2$ 或 $k=3$ B. $k=3$ C. $k=-1$ D. $k=-2$ 且 $k=3$

解析：因为 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-3)$，所以 $(k+2)(k-3)=0$，即 $k=-2$ 或 $k=3$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：28. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 18 B. -6 C. -8 D. 15

解析：行列式计算为 $1\cdot1\cdot1+2\cdot2\cdot2+3\cdot3\cdot3-1\cdot2\cdot3-2\cdot3\cdot1-3\cdot1\cdot2=1+8+27-6-6-6=18$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：29. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 8 & 9 & 5 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 5 B. -6 C. -5 D. 15

解析：计算得：$1\cdot1\cdot5+1\cdot4\cdot8+1\cdot3\cdot9-1\cdot4\cdot9-1\cdot3\cdot5-1\cdot1\cdot8=5+32+27-36-15-8=5$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：30. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 0 B. ab C. a^2 D. $-ab$

解析：此行列式中第一列和第三列全为 0，因此值为 0.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：31. $\begin{vmatrix} 2k-2 & 2 \\ 4 & k-1 \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是（　　）. A. $k>3$ 或 $k<-1$ B. $k\neq3$ C. $k\neq-1$ D. $k\neq3$ 且 $k\neq-1$

解析：行列式值为 $2(k^2-2k-3)=2(k-3)(k+1)$，因此当 $(k-3)(k+1)>0$，

即 $k<-1$ 或 $k>3$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：32. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(\quad)$．A. 18 B. -6 C. -8 D. 15
解析：该行列式的值为 $1\cdot1\cdot1+3\cdot3\cdot3+2\cdot2\cdot2-1\cdot3\cdot2-3\cdot2\cdot1-2\cdot1\cdot3=1+27+8-6-6-6=18$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：33. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 8 \\ 1 & 1 & 9 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}=(\quad)$．A. 5 B. -6 C. -5 D. 15
解析：计算得 $1\cdot1\cdot5+3\cdot9\cdot1+8\cdot1\cdot4-8\cdot1\cdot1-3\cdot1\cdot5-1\cdot9\cdot4=5+27+32-8-15-36=5$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：34. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & -a & 0 \\ b & 0 & -c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}=(\quad)$．A. 0 B. $-ab$ C. a^2 D. $-ab$
解析：由于第一列和第三列均为 0，因此该行列式为 0.

题型：选择题
主题：行列式
难度：中等

题目：35. $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是 (　　)．A. $|a| < 2$ B. $|a| = 2$ C. $|a| > 2$ D. $|a| \leq 2$

解析：行列式计算为 $-a^2 + 4$，令其大于 0，有 $a^2 < 4$，即 $|a| < 2$．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：36. $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是 (　　)．A. $k \neq 3$ 且 $k \neq -1$ B. $k \neq 3$ C. $k \neq -1$ D. $k \neq 3$ 或 $k \neq -1$

解析：行列式为 $(1-k)^2 - 4 = k^2 - 2k - 3 = (k-3)(k+1)$，要使其不为 0，必须 $k \neq 3$ 且 $k \neq -1$．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：37. 当 a, b 满足条件 〇 时，行列式 $\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0($　　$)$．A. $a = 0$ 且 $b = 0$ B. $a = 0$ 或 $b = 0$ C. $a = 0$ D. $b = 0$

解析：因为 $\begin{vmatrix} a & -b & 0 \\ b & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + b^2$，所以 $a^2 + b^2 = 0$ 即 $a = 0$ 且 $b = 0$．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：38. $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ 的必要条件是 (　　)．A. $k > 3$ 或 $k < -2$ B. $k > 0$ C. $k < 0$ D. $k = -2$ 且 $k = 3$

解析：因为 $\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (k+2)(k-3)$，若其大于 0，则有 $(k+2)(k-3) > 0$，解得 $k < -2$ 或 $k > 3$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：39. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 0　B. -6　C. -8　D. 15
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：40. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 0　B. -6　C. -5　D. 15
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 6 & 2 & 8 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：41. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 2 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 0　B. ab　C. a^2　D. $-ab$

解析： $\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 2 & c \\ 0 & d & 0 \end{vmatrix} = 0.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 42. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =(\quad)$. A. 0　B. -6　C. -8　D. 15
解析： $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 43. 行列式 $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} =(\quad)$. A. 0　B. -6　C. -5　D. 15
解析： $\begin{vmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 2 & 1 & 9 \\ 8 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 中等
题目： 44. 当 $x(\quad)$ 时，$\begin{vmatrix} -3 & -1 & -x \\ -4 & -x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} > 0$. A. $x < 0$ 或 $x > 2$　B. $0 < x < 2$　C. $x = 2$ 时　D. $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$

解析：$\begin{vmatrix} -3 & -1 & -x \\ -4 & -x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$，当 $x < 0$ 或 $x > 2$ 时，行列式大于零.

题型：选择题
主题：行列式
难度：中等
题目：45. 当 $x($　　$)$ 时，$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -x \\ 4 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} < 0$. A. $0 < x < 2$　B. $x < 0$ 或 $x > 2$　C. $x = 2$ 时　D. $x \neq 0$ 且 $x \neq 2$
解析：$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -x \\ 4 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2x^2 - 4x = 2x(x-2)$，当 $0 < x < 2$ 时，行列式小于零.

题型：选择题
主题：行列式
难度：中等
题目：46. $\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -a & -a \end{vmatrix} = 0$ 的充分必要条件是（　　）. A. $a = \pm 2$　B. $a > 2$　C. $|a| < 2$　D. $|a| \leq 2$
解析：$\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -a & -a \end{vmatrix} = -a^2 + 4$，使其为 0，则 $a = \pm 2$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：中等
题目：47. $\begin{vmatrix} k-1 & 6 \\ 2 & 3k-3 \end{vmatrix} < 0$ 的充分必要条件是（　　）. A. $-1 < k < 3$

B. $k \neq 3$　C. $k \neq -1$　D. $k \neq 3$ 且 $k \neq -1$

解析：$\begin{vmatrix} k-1 & 6 \\ 2 & 3k-3 \end{vmatrix} = 3(k^2-2k-3) = 3(k-3)(k+1)$，当 $-1 < k < 3$ 时小于 0.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：48. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 0　B. -6　C. -8　D. 15

解析：$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：49. 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 9 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 0　B. -6　C. -5　D. 15

解析：$\begin{vmatrix} -3 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 9 \\ -4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：中等

题目：50. 方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$ 的根是（　　）. A. $x_1 = 1, x_2 = 3$　B. $x_1 = 2, x_2 = 3$　C. $x_1 = 0, x_2 = 1$　D. $x_1 = -1, x_2 = 1$

解析： $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$，所以 $x_1 = 1, x_2 = 3$.

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 39. 若 $a + b + c = 0$，则行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$ =(　　). A. $3abc$ B. $a^3 + b^3 + c^3$ C. 0 D. $ab + bc + ca$
解析： 由对称性和行列式恒等变换可知，当 $a + b + c = 0$ 时，该行列式值恒为 0.

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 40. 若 $a \neq 0$，则行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ c & d & a \end{vmatrix}$ =(　　). A. a^3 B. abc C. a^2 D. 0
解析： 该行列式是一个上三角行列式，对角线元素乘积即为 a^3.

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 41. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix}$ 的值等于 (　　). A. $(x-y)(y-z)(z-x)$ B. $(x+y+z)(x-y)(y-z)$ C. $(x-y)(y-z)(z-x)$ D. $(x-y)(y-z)(x-z)$
解析： 该行列式为范德蒙行列式，结果为 $(x-y)(y-z)(z-x)$.

题型： 选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：42. 设 $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$，则 $A =$(　　)．A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

解析：利用行列式展开或初等变换，得 $A = 1$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：43. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix} = 0$，则（　　）．A. $x + y + z = 0$ B. $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ C. $x = y = z$ D. x, y, z 中有相等者

解析：该行为范德蒙行列式，为 0 时说明 x, y, z 至少有两个相等.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：44. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ 的值是（　　）．A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

解析：该为上三角行列式，对角线元素相乘得 $1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：45. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值为（　　）．A. a^3 B. $3a$ C. a^2 D. a

解析：该为上三角行列式，行列式值为对角线元素乘积 a^3.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：46. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$，则（　　）．A. 向量 $(1, 2, 3)$ 和 (a, b, c) 线性相关 B. 三行线性无关 C. 三列不相关 D. 行列式不为零
解析：由行列式为 0 可知三行线性相关，故向量 $(1, 2, 3)$ 与 (a, b, c) 线性相关．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：47. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix}$ 的值为（　　）．A. 1 B. 0 C. -1 D. $\cos\theta$
解析：该行为旋转矩阵，对角线乘积为 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$，因此行列式为 1．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：48. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 8 \end{vmatrix}$ 的值是（　　）．A. 0 B. 1 C. -1 D. 5
解析：使用展开计算，结果为 0．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：49. 若 A 是一个三阶行列式，且 A 的第一行元素都乘以 3，则新行列式的值是原来的（　　）倍．A. 3 B. 6 C. 9 D. 27

解析：行列式某一行乘以常数 k，整体乘以 k，所以是原来值的 3 倍.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：50. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =(　　). A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
解析：第二行是第一行的两倍，因此行列式为 0.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：1. $\begin{vmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{vmatrix} = 0$ ().
解析：$\begin{vmatrix} x & y \\ -2x & -2y \end{vmatrix} = 0$. 由此知结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：2. $\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = 0$ () .
解析：$\begin{vmatrix} a & b \\ 2a & 2b \end{vmatrix} = 0$. 由此知结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：3. 设 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = 0$，则 $x = 0$ () .

解析：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-x) - 2 \cdot 2 \cdot (-x) = x = 0$.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 设 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0$，则 $x = 0$（）.
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & x & 0 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot x \cdot 2 + x \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot x \cdot 2 - 2 \cdot x = 0$，可得 $x = 0$.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = 0$（）.
解析：$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ -1 & 8 & 3 \end{vmatrix} = -24 + 8 + 6 - 4 = -14 \neq 0$，所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：6. 设 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & x & 2x \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$，则 $x = 0$（）.
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & x & 2x \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot x \cdot 3 - 3 \cdot x \cdot 2 = -3x = 0 \Rightarrow x = 0$.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：7. 设 $\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & x & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0$，则 $x = 0$（）.
解析：$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 \\ 2 & x & 4 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot x \cdot 3 + x \cdot 4 \cdot 3 - 3 \cdot x \cdot 2 - 3 \cdot x = 0$，可得 $x = 0$.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：8. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = 2$（）.
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = (2-1)(3-1)(4-2) = 2.$

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2$（）.
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2.$

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易

题目： 10. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\0 & -4 & 0\\1 & -1 & 2\end{vmatrix}=0$ ().

解析： $\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\0 & -4 & 0\\1 & -1 & 2\end{vmatrix}=2\cdot(-4)\cdot2+1\cdot0\cdot1+4\cdot0\cdot1-4\cdot(-1)\cdot2-2\cdot0\cdot2-1\cdot(-4)\cdot1=$ $-16+8+4=-4$，不为 0，故结论错误.

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 1. 行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\6 & 6 & 6\\a & b & c\end{vmatrix}=()$.

解析： $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\6 & 6 & 6\\a & b & c\end{vmatrix}=0.$

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 2. 行列式 $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 5\end{vmatrix}=(\qquad)$.

解析： $\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\0 & 2 & -2\\0 & 0 & 5\end{vmatrix}=10.$

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 3. 行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ =(　　).

解析： $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 30.$

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 4. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ =(　　).

解析： $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36.$

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 5. 行列式 $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$ 等于（　　).

解析： $\begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24.$

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 6. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ 等于（　　).

解析： $\begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -12.$

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：7. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =(　　).
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5.$

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：8. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =(　　).
解析：$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 7.$

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ =(　　).
解析：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易

题目： 10. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ =(　　).

解析： $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4.$

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 11. 设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} \neq 0$. 则 x 应满足条件 (　　).
解析： $x \neq 0$ 且 $x \neq 1$.

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 12. 设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = 0$. 则 $x =$(　　).
解析： $x = 0$ 或 $x = 1$.

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 13. 设 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} > 0$. 则 x 满足 (　　).
解析： $x > 1$ 或 $x < 0$.

题型： 填空题

主题：行列式

难度：容易

题目：14. 已知行列式 $\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$. 则数 $a =($ $\quad$ $).$

解析：$a = 3.$

题型：填空题

主题：行列式

难度：容易

题目：15. 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 等于 ($\quad$).

解析：$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -6.$

题型：计算题

主题：行列式

难度：容易

题目：1. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ ().

解析：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1\times1+2\times2\times2+3\times3\times3- 3\times1\times2-2\times3\times1-1\times2\times3 = 18$

.

题型：计算题

主题：行列式

难度：容易

题目：2. 计算行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\3 & 4 & 5\\0 & 0 & 4\end{vmatrix}$ ().

解析：$\begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\3 & 4 & 5\\0 & 0 & 4\end{vmatrix} = 1\times4\times4+5\times3\times0+2\times5\times0-5\times4\times0-2\times3\times4-1\times5\times0 = 16-24=-8$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：3. 当 k 取何值时，$\begin{vmatrix}k & 3 & 4\\-1 & k & 0\\0 & k & 1\end{vmatrix} = 0(\quad)$.

解析：$\begin{vmatrix}k & 3 & 4\\-1 & k & 0\\0 & k & 1\end{vmatrix} = k^2-4k+3=(k-1)(k-3)$，当 $k=1$ 或 $k=3$ 时成立.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：4. 若行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\5 & 3 & 4\\0 & 0 & x\end{vmatrix} = 0$，求 x 的值 ( ).

解析：$\begin{vmatrix}1 & 2 & 7\\5 & 3 & 4\\0 & 0 & x\end{vmatrix} = 3x-10x=-7x=0$，所以 $x=0$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：5. 解方程 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0(\quad)$.

解析：$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ x^2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-3) = 0$，解得 $x = -1$ 或 $x = 3$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：6. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & 2a \end{vmatrix} > 0$ 的充分必要条件是什么？($\quad$).

解析：$\begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & 2a \end{vmatrix} = 2(-a^2+4)$，要使其大于 0，需 $|a| < 2$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：7. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$，求 x 的值 ($\quad$).

解析：$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 5 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 6x - 10x = -4x = 0$，所以 $x = 0$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：8. 计算行列式 $D = \begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 \\ a_1 & x & -1 \\ a_2 & 0 & x \end{vmatrix}(\quad)$.

解析：$D=a_0x^2+a_1x+a_2$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 当 k 满足什么条件时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -2 & 2k & 0 \\ 0 & 3k & 3 \end{vmatrix} \neq 0$ ().

解析：$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ -2 & 2k & 0 \\ 0 & 3k & 3 \end{vmatrix} = 6(k-1)(k-3)$，当 $k \neq 1$ 且 $k \neq 3$ 时，行列式不等于零.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易
题目：10. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$，求 x 的值 (　　).

解析：$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x+10x=13x=0$，所以 $x=0$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：11. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} \neq 0$ 的充分必要条件是 () .

解析：$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = -a^2+4$，所以充分必要条件是 $a \neq \pm 2$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：12. 解方程 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -x & -1 & 0 \\ -x^2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 0$（）.
解析：$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -x & -1 & 0 \\ -x^2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = (x+1)(x-3) = 0$，所以 $x = -1$ 或 $x = 3$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：13. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} < 0$ 的充分必要条件是（）.
解析：$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix} = -a^2 + 4 < 0$，所以 $|a| > 2$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易
题目：14. 计算行列式 $\begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix}$（）.
解析：$\begin{vmatrix} -a & 0 & 1 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & 0 & -a \end{vmatrix} = -a^3 + a$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：15. 若行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$，求 x 的值（）.

解析：$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 5 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 16x = 0$，所以 $x = 0$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等

题目：16. 当 k 满足什么条件时，$\begin{vmatrix} k & -3 & -4 \\ -1 & -k & 0 \\ 0 & -k & -1 \end{vmatrix} > 0$（）.

解析：$\begin{vmatrix} k & -3 & -4 \\ -1 & -k & 0 \\ 0 & -k & -1 \end{vmatrix} = (k-1)(k-3)$，所以当 $k < 1$ 或 $k > 3$ 时大于零.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等

题目：17. 当 k 满足什么条件时，$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & -k & -1 \end{vmatrix} < 0$（）.

解析：$\begin{vmatrix} k & 3 & 4 \\ 1 & -k & 0 \\ 0 & -k & -1 \end{vmatrix} = (k-1)(k-3)$，所以当 $1 < k < 3$ 时小于零.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等

题目：18. 当 x 取何值时，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -x \\ 4 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} > 0$（）.

解析： $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -x \\ 4 & -x & 0 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} = 2x(x-2)$，所以当 $x<0$ 或 $x>2$ 时大于零.

题型： 计算题
主题： 行列式
难度： 中等
题目： 19. 当 x 取何值时，行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3x \\ 4 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 3x \end{vmatrix} < 0$（）.
解析： $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3x \\ 4 & 2x & 0 \\ 1 & 0 & 3x \end{vmatrix} = 12x(x-2)$，所以当 $0<x<2$ 时小于零.

题型： 计算题
主题： 行列式
难度： 中等
题目： 20. 行列式 $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & 3a \end{vmatrix} = 0$ 的充分必要条件是（）.
解析： $\begin{vmatrix} a & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & 3a \end{vmatrix} = 3(-a^2+4)$，所以充分必要条件是 $a=\pm 2$.

题型： 计算题
主题： 行列式
难度： 中等
题目： 21. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$（）.
解析： 该行列式为范德蒙行列式，结果为 $(b-a)(c-a)(c-b)$.

题型： 计算题

主题：行列式
难度：中等
题目：22. 求解方程 $\begin{vmatrix} x & 3 & 4 \\ -1 & x & 0 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} = 0$（）.
解析：$x^2 - 4x + 3 = 0$，解得 $x = 1$ 或 $x = 3$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：23. 求解方程 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$（）.
解析：展开计算得：$3x^2 - x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0$，所以 $x = 0$ 或 $x = 2$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：24. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{vmatrix}$（）.
解析：利用对角线展开法得：$ab + bc + ca + abc$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：25. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 3 & 2x & 1 \end{vmatrix}$，求 $f(x)$ 的最高次项的系数（）.
解析：计算得 $f(x) = -x^2 - x$，所以最高次项系数为 -1.

题型：计算题

主题：行列式

难度：容易

题目：26. 解不等式 $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -x & -1 & 0 \\ -x^2 & -3 & -1 \end{vmatrix} > 0(\qquad)$.

解析：$\begin{vmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -x & -1 & 0 \\ -x^2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2(x+1)(x-3)$，所以当 $x < -1$ 或 $x > 3$ 时，行列式大于零.

题型：计算题

主题：行列式

难度：容易

题目：27. 解不等式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -x & -1 & 0 \\ -x^2 & -3 & -2 \end{vmatrix} < 0(\qquad)$.

解析：$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -x & -1 & 0 \\ -x^2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -2(x+1)(x-3)$，所以当 $x < -1$ 或 $x > 3$ 时，行列式小于零.

题型：证明题

主题：可逆矩阵

难度：困难

题目：证明：若 A 可逆，则 A^T 也可逆，并且 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

解析：因为 $AA^{-1} = I$，两边取转置得 $(A^{-1})^T A^T = I$，说明 A^T 可逆，逆为 $(A^{-1})^T$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：1. 排列 41253 的逆序数为 ( ).A. 4 B. 0 C. 5 D. 3

解析：41253 所含逆序为 $41, 42, 43, 53$，所以 41253 的逆序数 $N(41253) = 4.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：2. 排列 3712456 的逆序数为 ( ).A. 7 B. 6 C. 5 D. 10
解析：3712456 所含逆序为 $31, 71, 32, 72, 74, 75, 76$ ，所以 3712456 的逆序数 $N(3712456) = 7.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：3. 排列 36715284 的逆序数为 ( ).A. 13 B. 9 C. 12 D. 10
解析：36715284 的逆序数为 $N(36715284) = 2 + 4 + 4 + 0 + 2 + 0 + 1 = 13.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 排列 654321 的逆序数为 ( ).A. 15 B. 9 C. 12 D. 11
解析：654321 的逆序数为 $N(654321) = 15.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. 排列 54321 的逆序数为 ( ).A. 10 B. 9 C. 11 D. 12
解析：54321 的逆序数为 $N(54321) = 10.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易

题目：6. 排列 42153 的逆序数为 ( ).A. 5 B. 0 C. 4 D. 3
解析：42153 的逆序数为 $N(42153) = 5$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：7. 排列 42153 的逆序数为 ( ).A. 5 B. 0 C. 4 D. 3
解析：42153 的逆序数为 $N(42153) = 5$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：8. 排列 13725468 的逆序数为 ( ).A. 6 B. 5 C. 7 D. 8
解析：13725468 的逆序数为 $N(13725468) = 6$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 排列 361524 的逆序数为 ( ).A. 8 B. 9 C. 11 D. 10
解析：361524 的逆序数为 $N(361524) = 8$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：10. 排列 634512 的逆序数为 ( ).A. 11 B. 9 C. 12 D. 10
解析：634512 的逆序数为 $N(634512) = 11$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易

题目：11. 排列 $n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序数为 (　　). A. $\frac{n(n-1)}{2}$ B. n C. $n-1$ D. 不确定

解析：$n(n-1)(n-2)\cdots 321$ 的逆序数为 $(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：12. 下列排列是偶排列的是 ( ). A. 12345 B. 53214 C. 654321 D. 32145

解析：$\tau(12345)=0$, $\tau(53214)=7$, $\tau(654321)=15$, $\tau(32145)=3$，所以只有 12345 是偶排列.

题型：选择题

主题：行列式

难度：中等

题目：13. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$ 的值是 (　　). A. $(-1)^{n-1}n!$ B. n C. $n(n+1)$ D. $n(n-1)$

解析：该行列式的非零项只有 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$，其逆序数为 $n-1$，所以行列式值为 $(-1)^{n-1}\times 1\times 2\times\cdots\times n=(-1)^{n-1}n!$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：中等

题目：14. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值是 (　　). A. -1 B. 1 C. 2 D. 0

解析：仅有非零项为 $a_{13}a_{22}a_{34}a_{41}$，其对应排列为 3241，逆序数为 4，故带正号；乘积为 $1\times 1\times 1\times(-1)=-1$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：15. 判断 4 阶行列式中 $a_{11}a_{33}a_{44}a_{22}$ 和 $a_{24}a_{31}a_{13}a_{42}$ 的符号分别为 ( ). A. 正，正 B. 正，负 C. 负，正 D. 负，负
解析：$a_{11}a_{33}a_{44}a_{22}$ 实为 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，为正；$a_{24}a_{31}a_{13}a_{42}$ 的列标为 3412，为偶排列，故也为正.

题型：选择题
主题：行列式
难度：中等
题目：16. 行列式 $\begin{matrix} x & x & 1 & 0 \\ 1 & x & 2 & 3 \\ 3 & 2 & x & 2 \\ 1 & 1 & 2 & x \end{matrix}$ 中 x^4 的系数为 (　　). A. 1 B. 3 C. -1 D. 2
解析：含有 x^4 的项只有 $x \cdot x \cdot x \cdot x$ 一项，带正号，所以系数为 1.

题型：选择题
主题：行列式
难度：中等
题目：17. 行列式 $\begin{matrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{matrix}$ 中 x^3 的系数为 (　　). A. -1 B. 3 C. 1 D. 2
解析：含 x^3 的项有两项，一项为 $x \cdot x \cdot x \cdot 1$，带正号；另一项为 $x \cdot x \cdot 1 \cdot 2x$，带负号；系数和为 $1 - 2 = -1$.

题型：判断题
主题：行列式

难度：容易

题目：1. 排列 12543678 是奇排列 ( ).

解析：12543678 逆序数为 3 ，为奇排列.

题型：判断题

主题：行列式

难度：容易

题目：2. $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 在六阶行列式中是带负号的项 () .

解析：$N(251463)+N(136254)=6+5=11$ 为奇数，所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 前面应冠以负号.

题型：判断题

主题：行列式

难度：容易

题目：3. $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 在六阶行列式中是带负号的项 () .

解析：$N(532416)=8$ 为偶数，所以 $a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 前面应冠以正号，由此知结论错误.

题型：判断题

主题：行列式

难度：容易

题目：4. $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$ 在六阶行列式中是带负号的项 () .

解析：$N(162435)=5$ 为奇数，所以 $a_{11}a_{26}a_{32}a_{44}a_{53}a_{65}$ 前面应冠以负号.

题型：判断题

主题：行列式

难度：容易

题目：5. $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 在六阶行列式中是带正号的项 () .

解析：$N(531462)=8$ 为偶数，所以 $a_{51}a_{32}a_{13}a_{44}a_{65}a_{26}$ 前面应冠以正号.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：6. n 阶行列式中有一行元素为零，行列式为零 （）.
解析：因为 n 阶行列式中有一行元素为零，则所有项均为零，因此行列式为零.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：7. 排列 36715284 是偶排列 （）.
解析：36715284 的逆序数为 $N(36715284) = 3+4+0+4+2+0+0+0 = 13$ ，为奇排列.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：8. $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{64}a_{35}$ 在六阶行列式中是带正号的项 （）.
解析：$N(251436)+N(136245) = 5+4 = 9$ 为奇数，所以 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{64}a_{35}$ 前面应冠以负号.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 排列 31245678 是奇排列 （）.
解析：31245678 的逆序数为 2 ， 为偶排列.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：10. 排列 31765284 是奇排列 （）.

解析：$N(31765284) = 12$ ，为偶排列.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：11. 排列 3761524 是奇排列（）.
解析：$N(3761524) = 13$ ，为奇排列.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：12. 排列 1234 是奇排列（）.
解析：1234 没有逆序，故逆序数为 0 ，为偶排列.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：13. $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{15}a_{26}$ 在六阶行列式中是带正号的项（）.
解析：$N(654312) = 14$ 为偶数，所以 $a_{61}a_{52}a_{43}a_{34}a_{15}a_{26}$ 前面应冠以正号.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：1. 排列 132487695 的逆序数为 ( ).
解析：此排列含 8 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：2. 排列 132487659 的逆序数为 ( ).

解析：此排列含 7 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：3. 排列 7613542 的逆序数为 ( ).
解析：此排列含 15 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 排列 1324765 的逆序数为 ( ).
解析：此排列含 4 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. 排列 41325 的奇偶性为 ( ).
解析：此排列含 4 个逆序，所以是偶排列.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：6. 排列 76813542 的逆序数为 ( ).
解析：此排列含 20 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：7. 排列 13248765 的逆序数为 ( ).

解析：此排列含 7 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：8. 排列 453126 的奇偶性为 ( ).
解析：此排列含 8 个逆序，所以是偶排列.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 排列 613542 的逆序数为 ( ).
解析：此排列含 9 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：10. 排列 132465 的逆序数为 ( ).
解析：此排列含 2 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：11. 排列 7613542 的逆序数为 ( ).
解析：此排列含 15 个逆序.

题型：填空题
主题：行列式
难度：中等

题目：12. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & a & a & 1 \\ a & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ =( ).

解析：D 只含一项非零项 $1\cdot 1\cdot 1\cdot 1$，符号由 $N(4321)=6$ 确定，带正号，所以 $D=1$.

题型：填空题
主题：行列式
难度：中等

题目：13. 求行列式 $D=\begin{vmatrix} a & a & a & 2 \\ a & a & -2 & 0 \\ a & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ =( ).

解析：D 只含一项非零项 $2\cdot(-2)\cdot 2\cdot a$，符号由 $N(4321)=6$ 确定，带正号，所以 $D=-16$.

题型：填空题
主题：行列式
难度：中等

题目：14. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{vmatrix}$ =( ).

解析：只含一项非零项 $a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$，符号由 $N(2413)=3$，带负号，所以 $D=-a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$.

题型：填空题
主题：行列式
难度：中等

题目：15. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&2\\3&0&0&0\\0&0&4&0\end{vmatrix}$ =( ).

解析：只含一项非零项 $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$，符号由 $N(2413)=3$，带负号，所以 $D=-24$.

题型：填空题

主题：行列式

难度：中等

题目：16. 计算行列式 $D=\begin{vmatrix}0&a_{12}&0&0\\0&0&0&-a_{24}\\a_{31}&0&0&0\\0&0&a_{43}&0\end{vmatrix}$ =( ).

解析：只含一项非零项 $a_{12}\cdot(-a_{24})\cdot a_{31}\cdot a_{43}$，符号由 $N(2413)=3$，带负号，所以 $D=a_{12}a_{24}a_{31}a_{43}$.

题型：填空题

主题：行列式

难度：中等

题目：17. 在六阶行列式中，$a_{15}a_{23}a_{32}a_{44}a_{51}a_{66}$ 应取的符号为 ( ).

解析：由排列 532416 的逆序数为 8，故符号为 $(-1)^8=1$.

题型：填空题

主题：行列式

难度：中等

题目：18. 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项是 ( ) 和 ( ).

解析：含有 $a_{11}a_{23}$ 的项为 $(-1)^{r(1324)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 和 $(-1)^{r(1342)}a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$.

题型：计算题

主题：行列式

难度： 容易

题目： 1. 用定义计算行列式 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$ 的值 ( ).

解析： 设 $\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = a_{ij}$ ，根据行列式的定义，a_{ij} 的展开式中，除 $a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$ 连乘积这一项外，其他各项中至少含有一个零元素，故皆为零，因此：$a_{ij} = (-1)^{N(n\cdot 21)}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}1\cdot 2\cdots n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$.

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 1. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ =().A. 6 B.-6 C.0 D.8

解析： 上三角形行列式的值等于主对角元素的乘积，因此 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3 = 6.$

题型： 选择题
主题： 行列式
难度： 容易

题目： 2. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 8 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ =().A. 0 B. 1 C. -1 D. 32

解析：行列式有两行对应成比例，行列式的值为 0，因此 $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 8 & -5 & -2 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：3. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & -8 & 2 \end{vmatrix}$ =().A. 0 B. 2 C. -32 D. -2
解析：行列式有两列对应成比例，行列式的值为 0 ，因此 $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -10 & 2 \\ 1 & -8 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ =().A. abc B. $-abc$ C. a^3 D. b^2
解析：对角形行列式的值等于主对角元素的乘积，因此 $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = a \times b \times c.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ =().A. 0 B. 7 C. 8 D. 9

解析：行列式有两行对应成比例，行列式的值为 0，因此 $\begin{vmatrix} 7 & 8 & 9 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：6. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ =().A. 0 B. 72 C. -1 D. 1

解析：行列式有一列元素全为零，行列式的值等于零，因此 $\begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ 6 & 9 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：7. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ =().A. 9 B. -6 C. 0 D. 8

解析：上三角形行列式的值等于主对角元素的乘积，因此 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \times 3 \times 3 = 9.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：8. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$ =().A. 0 B. 9 C. 4 D. 7

解析：行列式有两行对应成比例，行列式的值为 0 ，因此 $\begin{vmatrix} 9 & 4 & 7 \\ 4 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & a & 7 \\ 3 & b & 7 \\ 3 & c & 7 \end{vmatrix}$ =().A. 0 B. abc C. 21abc D. $-21abc$

解析：行列式有两列对应成比例，行列式的值为 0 ，因此 $\begin{vmatrix} 3 & a & 7 \\ 3 & b & 7 \\ 3 & c & 7 \end{vmatrix} = 0.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：10. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ =().A. -16 B. 16 C. 64 D. 32

解析：上三角形行列式的值等于主对角元素的乘积，因此 $\begin{vmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 \times 4 \times 1 = -16.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：中等
题目：11. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 7 \\ 3 & 9 & 8 \end{vmatrix}$ =().A. 5 B. -5 C. 10 D. -10

解析:通过初等行变换将行列式化为上三角形式:$\begin{vmatrix}1&4&5\\2&6&7\\3&9&8\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&4&5\\0&-2&-3\\0&-3&-7\end{vmatrix}=$
$\begin{vmatrix}1&4&5\\0&-2&-3\\0&0&-\frac{5}{2}\end{vmatrix}=5.$

题型:选择题
主题:行列式
难度:中等
题目:12. 如果行列式的所有元素变号,则 (). A. 奇阶行列式变号 B. 行列式一定不变号 C. 偶阶行列式变号 D. 行列式一定变号
解析:每一行都提出一个负号,一共提 n 个,得 $(-1)^n$,所以 n 为奇数时变号,为偶数时不变.

题型:选择题
主题:行列式
难度:中等
题目:13. 设 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{vmatrix}=k$,则 $\begin{vmatrix}a_1&a_2-2a_3&-a_3\\b_1&b_2-2b_3&-b_3\\c_1&c_2-2c_3&-c_3\end{vmatrix}=$().A. $-k$ B. $-2k$ C. k D. $2k$
解析:原行列式为 k,第二列变为 a_2-2a_3,第三列为 $-a_3$,根据行列式的线性性质可得:该行列式为 $\begin{vmatrix}a_1&a_2&-a_3\\b_1&b_2&-b_3\\c_1&c_2&-c_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1&-2a_3&-a_3\\b_1&-2b_3&-b_3\\c_1&-2c_3&-c_3\end{vmatrix}=-k.$

题型:判断题
主题:行列式
难度:容易
题目:1. 行列式有两行元素全相等,行列式的值一定为零 ( ).
解析:行列式的性质:行列式有两行元素全相等行列式的值等于零. 所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：2. 行列式有一行元素全为零，行列式的值一定为零 ( ).
解析：行列式有一行元素全为零，行列式的值一定为零．所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：3. 行列式有两列元素对应成比例，行列式的值一定为零 ( ).
解析：行列式的性质：行列式有两列元素对应成比例，行列式的值为 0．所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 行列式有两行元素的总和成比例，行列式的值一定为零 ( ).
解析：由行列式的性质，行列式有两行元素对应成比例，行列式的值为 0，但行列式两行元素的总和成比例，不一定行列式的值为零．所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. 行列式有一列元素全为零，行列式的值不一定为零 ( ).
解析：行列式有一列元素全为零，行列式的值一定为零．所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易

题目：6.$\begin{vmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ 2a_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ ( ).

解析：因为 $\begin{vmatrix} 2a_1 & 2b_1 & 2c_1 \\ 2a_2 & 2b_2 & 2c_2 \\ 2a_3 & 2b_3 & 2c_3 \end{vmatrix} = 2^3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$，所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：7.n 阶行列式非零元素的个数少于 n 个，行列式的值一定为零 ( ).
解析：行列式非零元素的个数少于 n 个，行列式一定有一行或一列全为零，行列式的值一定为零. 所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：8.n 阶行列式主对角元素全为零，行列式的值一定为零 ( ).
解析：行列式主对角元素全为零，行列式的值不一定为零. 所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 行列式各行元素之和为零，行列式的值一定为零 ( ).
解析：行列式各行元素之和为零，利用性质，把各列加于第一列，则第一列全为零，因此行列式为零. 所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：10. 行列式各列元素之和为零，行列式的值不一定为零 ( ).

解析：行列式各列元素之和为零，利用性质，把各行加于第一行，则第一行全为零，因此行列式为零．所以结论错误．

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：11. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$ ，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & -4a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & -12a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & -4a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 12()$.
解析：$\begin{vmatrix} a_{11} & -4a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & -12a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & -4a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -4\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -12$，所以结论错误．

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：12. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 1$ ，则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & -2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & -6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & -2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 6().$$

解析：$\begin{vmatrix} a_{11} & -2a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & -6a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & -2a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -6\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -6$，所以结论错误．

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易

题目： 1. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$=( ).

解析： 上三角形行列式的值等于主对角元素的乘积，因此

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 4 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 \times 1 \times (-4) = -48$$

题型： 填空题

主题： 行列式

难度： 容易

题目： 2. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$=(　　).

解析： 第三行乘以 1 加到第二行，得到两行相等，因此

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

题型： 填空题

主题： 行列式

难度： 容易

题目： 3. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$=(　　).

解析： 行列式有一行元素全为零，行列式的值为零，因此

$$\begin{vmatrix} 8 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix}$ =(　　).
解析：行列式有两行相等，值为零，因此

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$ =(　　).
解析：行列式有一列全为零，值为零，因此

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 6 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易

题目：6. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$ =(　　).

解析：上三角行列式的值等于主对角线元素的乘积，因此

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 6 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 2\cdot 1\cdot(-2) = 12$$

题型：填空题

主题：行列式

难度：中等

题目：7. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ =(　　).

解析：将第 2、3、4 列分别乘以 1 加到第 1 列，得

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1 = 5$$

题型：填空题

主题：行列式

难度：中等

题目：8. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ =(　　).

解析：将第 2、3、4 列分别乘以 1 加到第 1 列，得

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 48$$

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易
题目：1. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ 的值 ( ).
解析：用性质化为上三角形行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8.$

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易
题目：2. 利用行列式的性质，计算行列式 $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$ 的值 ( ).

解析：用性质化为上三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -11 & 5 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & -60 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40.$$

题型：计算题

主题：行列式

难度：容易

题目：3. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$ 的值 ( ).

解析：

$$D \overset{c_1-2c_3}{\underset{c_4+c_3}{=}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

对第 3 行展开，得：

$$(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_1}{=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

对第 1 行第 3 列展开，得：

$$(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 40.$$

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：4. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 的值 ( ).

解析：

$$D = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 \cdot (2 \cdot 2 \cdot 2) = 48.$$

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易

题目：5. 计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ 的值 ( ).

解析：

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：1. 已知 n 阶行列式 $D=a_{ij}$ ，设 A_{ij} 是 n 阶行列式中 a_{ij} 的代数余子式，若 $i\neq s$ ，则 $a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+...+a_{in}A_{sn}=()$. A. 0 B.1 C.$D$ D.$-D$
解析：行列式的任意一行与另一行的代数余子式的乘积之和等于零.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：2. 已知 n 阶行列式 $D=a_{ij}$ ，设 A_{ij} 是 n 阶行列式中 a_{ij} 的代数余子式，若 $i=s$ ，则 $a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+...+a_{in}A_{sn}=()$. A.$D$ B.1 C.0 D.$-D$
解析：行列式的任意一行与其代数余子式的乘积之和等于 D.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：3. 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$ 中 x 的代数余子式＝ ( ). A.0 B.12 C.3 D.-4
解析：该代数余子式为 $(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}=0$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 行列式 $\begin{vmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \\ x & y & 1 \end{vmatrix}$ 中 y 的代数余子式＝ ( ). A.29 B.-29 C.11 D.-11

解析：y 的代数余子式为 $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-3 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=29$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. 已知四阶行列式 D 中第 3 列元素依次为 $-1,2,1,1$ ，相应代数余子式为 $2,5,3,0$ ，则 $D=()$. A.11 B.-13 C.13 D.-11
解析：$D=(-1)\times 2+2\times 5+1\times 3+1\times 0=11$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：6. 已知三阶行列式 D 中第 1 列元素依次为 $-1,2,1$ ，相应代数余子式为 $2,5,3$ ，则 $D=()$. A.11 B.-13 C.13 D.-11
解析：$D=(-1)\times 2+2\times 5+1\times 3=11$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：7. 已知三阶行列式 D 中第 1 行元素依次为 $1,-2,3$ ，相应代数余子式为 $4,7,2$ ，则 $D=()$. A.-4 B.4 C.6 D.-5
解析：$D=1\times 4+(-2)\times 7+3\times 2=-4$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：8. 已知三阶行列式 D 中第 3 行元素依次为 $-1,-2,3$ ，相应代数余子式为 $4,7,2$ ，则 $D=()$. A.-12 B.12 C.6 D.-5
解析：$D=(-1)\times 4+(-2)\times 7+3\times 2=-12$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 已知四阶行列式 D 中第 4 列元素依次为 $-1,0,1,1$ ，相应代数余子式为 $2,7,3,0$ ，则 $D=()$．A.1 B.-1 C.4 D.-4
解析：$D=(-1)\times 2+0\times 7+1\times 3+1\times 0=1$．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：10. 已知四阶行列式 D 中第 4 行元素依次为 $-4,0,-1,1$ ，相应代数余子式为 $2,7,1,0$ ，则 $D=()$．A.-9 B.-10 C.7 D.-7
解析：$D=(-4)\times 2+0\times 7+(-1)\times 1+1\times 0=-9$．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：11. 已知三阶行列式 D 中第 1 行元素依次为 $1,-2,-3$ ，相应代数余子式为 $4,7,2$ ，则 $D=()$．A.-16 B.14 C.16 D.-15
解析：$D=1\times 4+(-2)\times 7+(-3)\times 2=-16$．

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：12. 已知三阶行列式 D 中第 1 行元素依次为 $1,2,-3$ 且相应的余子式依次为 $4,7,2$，则 $D=(\quad)$. A. -16 B. -26 C. -4 D. 26
解析：$D=1\times(-1)^{1+1}\cdot 4+2\times(-1)^{1+2}\cdot 7+(-3)\times(-1)^{1+3}\cdot 2=-16$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易

题目：13. 已知三阶行列式 D 中第 2 行元素依次为 $1,2,-3$ 且相应的余子式依次为 $4,7,2$，则 $D=(\quad)$. A. 16　B. 26　C. -4　D. -16

解析：$D=1\cdot(-1)^{2+1}\cdot4+2\cdot(-1)^{2+2}\cdot7+(-3)\cdot(-1)^{2+3}\cdot2=16.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：14. 行列式 $\begin{vmatrix}7 & -1 & 4\\ 5 & 2 & 3\\ x & y & 9\end{vmatrix}$ 中 x 的代数余子式为（　）. A. -11　B. 11　C. 7　D. -5

解析：x 的代数余子式为 $(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-11.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：15. 行列式 $\begin{vmatrix}7 & -1 & 4\\ 5 & 2 & 3\\ x & y & 9\end{vmatrix}$ 中 y 的代数余子式为（　）. A. -1　B. 1　C. 3　D. -5

解析：y 的代数余子式为 $(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}7 & 4\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-1.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：16. 已知四阶行列式 D 中第 3 列元素依次为 $-1,3,2,1$，且相应的代数余子式依次为 $1,5,4,0$，则 $D=(\quad)$. A. 22　B. -13　C. 13　D. -22

解析：$D=(-1)\cdot1+3\cdot5+2\cdot4+1\cdot0=22.$

题型：选择题

主题：行列式

难度：中等

题目：17. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 1$，则 $\begin{vmatrix} -a_{11} & 3a_{12} & 0 \\ -a_{21} & 3a_{22} & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = (\quad)$. A. -3 B. 3 C. 1 D. 6

解析：可分块计算，该值为 $(-1) \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -3.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易

题目：18. 行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 9 \\ 5 & 7 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ 中元素 a_{23} 的代数余子式 $A_{23} = (\quad)$. A. 5 B. -3 C. 3 D. -5

解析：$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5.$

题型：选择题
主题：行列式
难度：中等

题目：19. 若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = d$，则

$$\begin{vmatrix} 2a_{11} & 2a_{12} & 2a_{13} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{vmatrix} = (\quad)$$

A. $6d$ B. $3d$ C. $2d$ D. $-6d$

解析：变换后为 $-6 \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = 6d.$

题型：选择题
主题：行列式

难度：中等

题目：20. 行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 1 \\ 0 & -1 & b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$ 按第 3 列展开，则 a 的符号为（　），行列式的值为（　）. A. $(-1)^{1+3}$, $a+b+d$ B. $(-1)^{1+3}$, $a-b-c$ C. $(-1)^{1+3}$, $a+b-c$ D. $(-1)^{3}$, $a+b+c$

解析：按第 3 列展开，整体值为 $a+b+d$，a 的符号为 $(-1)^{1+3}$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：21. 将行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2a & 1 \\ 0 & -1 & -b & -1 \\ -1 & -1 & c & -1 \\ -1 & 1 & d & 0 \end{vmatrix}$ 按第三列展开，则 $2a$ 的代数余子式为 ()，行列式的值为 () .

A. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, 2a-b+d$ B. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, 2a+b+d$ C. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, 2a-b-d$ D. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}, 2a+b-d$

解析：按第三列展开行列式，$2a$ 的代数余子式为 $\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$，代入展开式得值为 $2a-b+d$.

题型：选择题

主题：行列式

难度：容易

题目：22. 某四阶行列式 D 的值为 1 ，它的第一行元素为 $1, 7, 2, -1$ ，而第一行元素对应的余子式分别为 $-1, 0, k, 4$ ，则 $k = (\quad)$.

A. -1 B. -2 C. 1 D. 2

解析：由 $D=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}+a_{14}A_{14}=1$，代入已知值，得 $1\times(-1)+7\times 0+2\times k+(-1)\times(-4)=1$，解得 $k=-1$.

题型：选择题
主题：行列式
难度：容易
题目：23. 某四阶行列式 D 的值为 1，它的第一行元素为 $1,3,k,-1$，而第二行元素对应的余子式分别为 $-1,0,1,2$，则 $k=(\quad)$.
A. -1 B. -2 C. 1 D. 2
解析：利用代数余子式的正交性有 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}=0$，代入已知得 $1\times 1+3\times 0+k\times(-1)+(-1)\times 2=0$，解得 $k=-1$.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：1. 已知 7 阶行列式 $D=a_{ij}$，设 A_{ij} 是 n 阶行列式中 a_{ij} 的代数余子式，则 $a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}+a_{14}A_{24}+a_{15}A_{25}+a_{16}A_{26}+a_{17}A_{27}=0($).
解析：行列式的任意一行与另一行的代数余子式的乘积之和等于零. 所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：2. 设 $D=\begin{vmatrix}3&-1&2\\-2&-3&1\\0&1&-4\end{vmatrix}$，则 $2A_{11}+A_{21}-4A_{31}=0(\ )$.
解析：$2A_{11}+A_{21}-4A_{31}=\begin{vmatrix}2&-1&2\\1&-3&1\\-4&1&-4\end{vmatrix}=0$，所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：3. 行列式 $D=\begin{vmatrix}-1&3&2\\-5&2&0\\1&0&-3\end{vmatrix}$ 中元素 a_{32} 的代数余子式为 $-10(\ )$.
解析：$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}-1&2\\-5&0\end{vmatrix}=-10$，所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 四阶行列式 D 的某行元素依次为 $1,0,k,6$，它们的代数余子式分别为 $3,4,2,0$，且 $D=-9$，则 $k=1(\ )$.
解析：$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4}=3+0+2k+0=3+2k$，由 $D=-9$ 得 $k=-6$，所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. 设 $D=\begin{vmatrix}3&-1&1\\-2&-3&1\\0&1&-1\end{vmatrix}$，则 $A_{11}+A_{21}-A_{31}=0(\ )$.
解析：$A_{11}+A_{21}-A_{31}=\begin{vmatrix}1&-1&1\\1&-3&1\\-1&1&-1\end{vmatrix}=0$，所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：6. 行列式 $D=\begin{vmatrix}-1&3&2\\-5&2&0\\1&0&-3\end{vmatrix}$ 中元素 a_{32} 的余子式为 $-10(\ )$.

解析：$M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 10$ ，所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：7. 已知 D 为三阶行列式，其第三行元素分别为 $1, 3, -2$ ，它们的代数余子式分别为 $3, -2, 1$ ，则 $D = -5(\ )$.
解析：$D = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = 1 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) + (-2) \cdot 1 = -5$ ，所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：8. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ ，则它的第一行元素的代数余子式之和 $A_{11} + A_{12} + A_{13} = 0(\ )$.
解析：$A_{11} + A_{12} + A_{13} = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 1 \cdot A_{13} = D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ ，所以结论正确.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：9. 设行列式 $D = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$ ，则它的第三行元素的代数余子式之和 $A_{31} + A_{32} + A_{33} = 0(\ )$.

解析：$A_{31}+A_{32}+A_{33}=1\cdot A_{31}+1\cdot A_{32}+1\cdot A_{33}=\begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$ $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=(c-a)(c-b)(b-a)$ ，所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：容易
题目：10. 四阶行列式 D 的某行元素依次为 $1,0,k,6$ ，它们的代数余子式分别为 $3,4,2,0$ ，且 $D=-7$ ，则 $k=2($ $)$.
解析：$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4}=3+0+2k+0=3+2k$ ，由 $D=-7$ 得 $k=-5$ ，所以结论错误.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易
题目：1. 若

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=1, \text{则} \begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 0 \\ a_{21} & 3a_{22} & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=().$$

解析：若 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=1$ ，则 $\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} & 0 \\ a_{21} & 3a_{22} & 0 \\ 0 & 6 & 1 \end{vmatrix}=(-1)^{3+3}\cdot 1\begin{vmatrix} a_{11} & 3a_{12} \\ a_{21} & 3a_{22} \end{vmatrix}=$ $3\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=3$.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易

题目：2. 若 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ x & 3 & 1 \\ 4 & x & 5 \end{vmatrix}$ 的代数余子式 $A_{12} = -1$，则代数余子式 $A_{21} =(\quad)$.

解析：因为 $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} x & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -(5x-4) = -1$，可得 $5x-4=1$，解得 $x=1$. 代入后，$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(0\times5-2\times1) = (-1)\cdot(-2) = 2$.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易

题目：3. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 7 & 6 & -3 \\ -4 & 8 & 3 & -5 \\ 9 & -7 & 2 & 5 \end{vmatrix}$，则元素 8 的余子式为 (　　)，其代数余子式为 (　　).

解析：元素 8 在第 3 行第 2 列，即 $a_{32} = 8$. 其余子式 $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 6 & -3 \\ 9 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 36$，代数余子式 $A_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = -36$.

题型：填空题
主题：行列式
难度：容易

题目：4. 已知行列式 $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$，则 $3A_{14} + 4A_{24} + A_{34} + 2A_{44} =(\quad)$.

解析：$3A_{14} + 4A_{24} + A_{34} + 2A_{44}$ 是第 2 列的元素与第 4 列对应代数余子式的乘积之和，按照行列式性质，该和等于行列式中第 2 列与第 4 列对应展开的混合式，即 0.

题型： 填空题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 5. 四阶行列式 D 中第三列元素为 $1,2,3,4$，对应的余子式为 $1,-1,2,1$，则 D 的值为 (　　).
解析： 设 $a_{13}=1, a_{23}=2, a_{33}=3, a_{43}=4$，相应代数余子式 $A_{13}=1, A_{23}=1, A_{33}=2, A_{43}=-1$，所以 $D=1\times1+2\times1+3\times2+4\times(-1)=1+2+6-4=5$.

题型： 计算题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 1. 已知 $D=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{vmatrix}$ ，求 $A_{11}+2A_{21}+4A_{31}$ ，其中 A_{ij} 表示 D 中 a_{ij} 的代数余子式 ( ).
解析： $A_{11}+2A_{21}+4A_{31}=D=18$.

题型： 计算题
主题： 行列式
难度： 容易
题目： 2. 已知 $D=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\4&5&6\end{vmatrix}$，求 $7A_{31}+8A_{32}+9A_{33}$，其中 A_{ij} 表示 D 中 a_{ij} 的代数余子式 (　　).
解析： $7A_{31}+8A_{32}+9A_{33}=\begin{vmatrix}1&0&0\\2&3&0\\7&8&9\end{vmatrix}=27$.

题型： 计算题
主题： 行列式
难度： 中等

题目：3. 设四阶行列式 $D_4 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & c & d \\ b & d & c & a \\ a & d & c & b \end{vmatrix}$，求 $A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41}$（ ）.

解析：将第 1 列都变为 1，可转化为：$A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} = \begin{vmatrix} 1 & b & c & d \\ 1 & a & c & d \\ 1 & d & c & a \\ 1 & d & c & b \end{vmatrix}$
该行列式中第 1 列元素都为 1，可将其展开：记第 1 列为常数列，可看作列向量线性相关，因而行列式为 0，所以：$A_{11} + A_{21} + A_{31} + A_{41} = 0$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易
题目：4. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$，其中 A_{ij} 表示代数余子式，求 $A_{11}+A_{22}+A_{33}$ (　　).
解析：$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 1{\cdot}(0{\cdot}3-(-1){\cdot}0) = 0, A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (1)(1 \cdot 3 - 3 \cdot (-2)) = 9$, $A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 2 \cdot 1) = -2, A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0 + 9 - 2 = 7$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：容易
题目：5. 已知四阶行列式 D 的第 3 行元素依次为 $-1, 2, 0, 1$，它们的余子式分别为 $5, 3, -7, 4$，求行列式的值 (　　).
解析：由题设余子式 $M_{31} = 5, M_{32} = 3, M_{33} = -7, M_{34} = 4$ ，故代数余子式为 $A_{31} = 5, A_{32} = -3, A_{33} = -7, A_{34} = -4$ ，所以 $D = (-1) \times 5 + 2 \times (-3) + 0 \times (-7) + 1 \times (-4) = -15$.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等

题目：6. 设 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$ 的代数余子式为 A_{ij}，求 $A_{11}+2A_{12}+A_{13}+A_{14}$(　　).

解析：将行列式按照第 i 行展开：$|D|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+a_{i3}A_{i3}+a_{i4}A_{i4},(i=1,2,3,4)$ ，其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ ，令 $a_{11}=1,a_{12}=2,a_{13}=1,a_{14}=1$ ，则 $A_{11}+2A_{12}+A_{13}+A_{14}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&-6\\0&5&2&4\\0&-8&-3&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&-6\\0&0&-3&-26\\0&0&5&43\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&-1&-1&-6\\0&0&-3&-26\\0&0&0&-\frac{1}{3}\end{vmatrix}=-1.$

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等

题目：7. 设 $D=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\1&1&0&-5\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}$ 的余子式为 M_{ij}，求 $3M_{21}+5M_{22}+M_{23}+2M_{24}$(　　).

解析：$3M_{21}+5M_{22}+M_{23}+2M_{24}=-3A_{21}+5A_{22}-A_{23}+2A_{24}=\begin{vmatrix}3&-5&2&1\\-3&5&-1&2\\-1&3&1&3\\2&-4&-1&-3\end{vmatrix}=-10.$

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等

题目：8. 用降阶法计算行列式 $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$(　　).

解析： $D \overset{c_1-2c3}{=} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} =$

$$(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -4 \\ -5 & -5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -16 & 0 & -5 \\ 20 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -5 & \\ 20 & 2 \end{vmatrix} = -68.$$

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等

题目：9. 用降阶法计算行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$(　　).

解析：

$$D \overset{c_1+(-2)c_3}{\underset{c_4+c_3}{=}} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & 2 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \overset{c_2+(-1)c_1}{=} \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -11 & 12 & 2 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-5)\times$$

$$(-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & \\ 12 & 2 \end{vmatrix} = 80$$

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：10. 设 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$，求 D．(　　)

解析：$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} =$ -2 .

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：11. 设 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，计算 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 的值，其中 A_{4j} 是 $|A|$ 中元素 $a_{4j}(j = 1, 2, 3, 4)$ 的代数余子式.

解析：

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix}1&-5&1&3\\1&1&3&4\\1&1&2&3\\1&1&1&1\end{vmatrix}\overset{r_1\leftrightarrows r_4}{=}$$

$$-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\1&-1&3&4\\1&1&2&3\\1&-5&1&3\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1&1\\=&r_4-r_1&&\\0&0&2&3\\0&0&1&2\\0&-6&0&2\end{vmatrix}=$$

$$(-1)\begin{vmatrix}0&2&3\\0&1&2\\-6&0&2\end{vmatrix}=(-1)\times(-6)\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2&3\\1&\end{vmatrix}=6.$$

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：12. 已知行列式 $D=\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&0&1&2\\3&-1&-1&0\\1&2&0&-5\end{vmatrix}$ ，求余子式 M_{13} 和代数余子式 A_{43} .

解析：余子式 $M_{13}=\begin{vmatrix}1&0&2\\3&-1&0\\1&2&-5\end{vmatrix}=-19$,代数余子式 $A_{43}=(-1)^{4+3}\begin{vmatrix}1&2&4\\1&0&2\\3&-1&0\end{vmatrix}=-10.$

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：13. 用行列式按行（列）展开定理计算行列式：$D=$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -5 \end{vmatrix}.$$

解析：按第二行展开

$$D = 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{22} + 1 \cdot A_{23} + 2A_{24}$$
$$= 1 \times (-1)^{2+1} 3 + 1 \times (-1)^{2+3} 63 + 2 \times (-1)^{2+4} 21 = -3 - 63 + 42 = -24$$

利用展开定理时，通常结合性质将展开行（列）的较多元素化为零.

题型：计算题
主题：行列式
难度：中等
题目：14. 设 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$，计算 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44}$ 的值，其中 $A_{4i}(i = 1, 2, 3, 4)$ 是对应元素的代数余子式.
解析：由行列式按行展开定理 $A_{41} + A_{42} + A_{43} + A_{44} = 1 \cdot A_{41} +$

$$1 \cdot A_{42} + 1 \cdot A_{43} + 1 \cdot A_{44} = \begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$6 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：1.$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}=$()。A. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ -4 & 2 & 8 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -2 & -1 & 12 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=$()． A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=$().A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$.

题型：选择题

主题：矩阵

难度：容易

题目：4. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$ ()．A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

题型：选择题

主题：矩阵

难度：容易

题目：5. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} =$ ()．A. $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

解析：$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

题型：选择题

主题：矩阵

难度：容易

题目：6. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$ ()．A. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$.

题型：选择题

主题：矩阵

难度：容易

题目：7. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=$()．A. $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

解析： $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：8. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}=$()．A. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -8 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

解析： $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：9. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=$（）． A. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -1 & 7 & 5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -1 & 6 & 5 \\ -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 2 & 1 & 12 \end{pmatrix}$

解析： $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：10. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}=$()．A. $\begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

解析： $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 11. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n \times m$ 阶矩阵 $(m \neq n)$，则下列运算结果是 n 阶的是 ()．A. $\mathbf{BA}$ B. $\mathbf{AB}$ C. $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ D. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$
解析： $\mathbf{B}_{n\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{C}_{n\times n}$，为 n 阶矩阵.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 12. 若 ()，则矩阵 $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 都有意义．A. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为同阶方阵 B. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 都是 3 行 4 列的矩阵 C. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 都是 4 行 3 列的矩阵 D. $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 都是 5 行 6 列的矩阵
解析： 矩阵的乘法运算是左矩阵的列与右矩阵的行相等，才有意义，所以要使 $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 都有意义，只有选项 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为同阶方阵正确.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 13. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 阶矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n \times m$ 阶矩阵 $(m \neq n)$，则下列运算结果是 $n \times n$ 阶矩阵的是 ()．A. $\mathbf{BA}$ B. $\mathbf{AB}$ C. $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ D. $\mathbf{B}-\mathbf{A}$
解析： $\mathbf{B}_{n\times m}\mathbf{A}_{m\times n} = \mathbf{C}_{n\times n}$，所以选项 $\mathbf{BA}$ 正确.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等

题目： 14. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 阶矩阵 $(m\neq n)$，则下列运算结果是 m 阶的是 ()．A. $\mathbf{AB}$ B. $\mathbf{BA}$ C. $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ D. $\mathbf{B}-\mathbf{A}$
解析： $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times m}=\mathbf{C}_{m\times m}$ 为 m 阶矩阵.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 15. 设 $\mathbf{A}$ 是 $l\times m$ 阶矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵 $(l,m,n$ 不相等)，则下列运算结果有意义的是 ()．A. $\mathbf{AB}$ B. $\mathbf{BA}$ C. $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ D. $\mathbf{B}-\mathbf{A}$
解析： $\mathbf{A}_{l\times m}\mathbf{B}_{m\times n}=\mathbf{C}_{l\times n}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 16. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times l$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵 $(m\neq l)$，如果 $\mathbf{ACB}$ 矩阵有意义，则 $\mathbf{C}$ 是 () 阶矩阵．A. $l\times n$ B. $m\times n$ C. $n\times m$ D. $m\times l$
解析： $\mathbf{A}_{m\times l}\mathbf{C}_{l\times n}\mathbf{B}_{n\times m}=\mathbf{D}_{m\times n}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 17. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times l$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵 $(m\neq l)$，如果 $\mathbf{ACB}$ 矩阵有意义，则 $\mathbf{ACB}$ 是 () 阶矩阵．A. $m\times m$ B. $n\times n$ C. $n\times m$ D. $m\times n$
解析： $\mathbf{A}_{m\times l}\mathbf{C}_{l\times n}\mathbf{B}_{n\times m}=\mathbf{D}_{m\times m}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 18. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 两个矩阵可

以做 () 运算．A. 乘法 B. 加法 C. 减法 D. 不能做任何运算

解析： 乘法运算，因为 $\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\\5&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&12&15\\19&26&33\\29&40&51\end{pmatrix}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 19. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 阶矩阵 $(m\neq n)$，则 $\mathbf{A}_{m\times n}$ 可以 ()．A. 左乘 m 阶单位矩阵，右乘 n 阶单位矩阵 B. 左乘 n 阶单位矩阵 C. 右乘 m 阶单位矩阵 D. 乘任意阶单位矩阵
解析： 对于矩阵 $\mathbf{A}_{m\times n}(m\neq n)$，则 $\mathbf{A}$ 只能左乘 m 阶单位矩阵，右乘 n 阶单位矩阵.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 20. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=$ ()．A. $\begin{pmatrix}3&3\\7&7\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}3&7\\3&7\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}3&7\\7&3\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}7&3\\7&3\end{pmatrix}$
解析： $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\7&7\end{pmatrix}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 21. $\begin{pmatrix}2&0\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&7\end{pmatrix}=$ ()．A. $\begin{pmatrix}4&2\\22&31\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}4&0\\22&31\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}4&2\\20&31\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}4&2\\22&28\end{pmatrix}$
解析： $\begin{pmatrix}2&0\\3&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\4&7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&2\\22&31\end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：22. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} =$ ()。A. $\begin{pmatrix} 9 & -11 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 9 & 11 \\ -5 & 0 \end{pmatrix}$
C. $\begin{pmatrix} 9 & -11 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 9 & -11 \\ -5 & -6 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -11 \\ -1 & -6 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：23. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$ ()。A. $\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 6 & 18 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 8 & 14 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} 4 & 11 \\ 4 & 17 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：24. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$ ()。A. $\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$
B. $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 11 & 10 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -13 \\ -5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 6 & -10 \\ -6 & 10 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：25. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 = ()$. A. $\begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 3\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 4\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：26. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^2 = ()$. A. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：27. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^2 = ()$. A. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 8 & 11 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & -11 \end{pmatrix}$
解析：$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -8 & 11 \end{pmatrix}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 困难
题目： 28. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$\mathbf{A}$ 为 2 阶矩阵，$\mathbf{E}$ 为 2 阶单位矩阵，定义 $f(\mathbf{A})=a\mathbf{A}^2+b\mathbf{A}+c\mathbf{E}$. 已知 $f(x)=x^2-5x+3$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$，则 $f(\mathbf{A})=$ ()．A. $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$
解析： $f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2-5\mathbf{A}+3\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}^2-5\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-5\\-15&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10&-5\\-15&15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3&0\\0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 困难
题目： 29. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$\mathbf{A}$ 为 2 阶矩阵，$\mathbf{E}$ 为 2 阶单位矩阵. 定义 $f(\mathbf{A})=a\mathbf{A}^2+b\mathbf{A}+c\mathbf{E}$. 已知 $f(x)=x^2-2x+5$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$，则 $f(\mathbf{A})=$ ()．A. $\begin{pmatrix}8&-3\\-9&11\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}8&3\\-9&11\end{pmatrix}$ C. $\begin{matrix}8&-3\\0&11\end{matrix}$ D. $\begin{pmatrix}8&3\\9&11\end{pmatrix}$
解析： $f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}+5\mathbf{E}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-5\\-15&12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-2\\-6&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&-3\\-9&11\end{pmatrix}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 困难
题目： 30. 设 $f(x)=ax^2+bx+c$，$\mathbf{A}$ 为 2 阶矩阵，$\mathbf{E}$ 为 2 阶单位矩阵. 定义 $f(\mathbf{A})=a\mathbf{A}^2+b\mathbf{A}+c\mathbf{E}$. 已知 $f(x)=x^2+x-5$，$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1\\-3&3\end{pmatrix}$，

则 $f(\mathbf{A})=$ ( ). A. $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 18 & 10 \end{pmatrix}$

解析：$f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2+\mathbf{A}-5\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^2+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}-5\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -18 & 10 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：31.$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3=$. A. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：32.$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3=$. A. $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

解析：$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易

题目：33.$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^3 =$. A. $\begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

解析：$\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：34. 矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ 的行列式值为 ()．A. 10 B. -10 C. 4 D. 3
解析：$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 10$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：35.$(k\mathbf{A})^T =$. A. $k\mathbf{A}^T$ B. $\frac{1}{k}\mathbf{A}^T$ C. $-k\mathbf{A}^T$ D. $k\mathbf{A}$
解析：$(k\mathrm{A})^T = k\mathrm{A}^T$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：36. 矩阵 $\begin{pmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ 的行列式值为 ()．A. -2 B. -10 C. 4 D. 3
解析：$\begin{vmatrix} 3 & 10 \\ -1 & -4 \end{vmatrix} = -2$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等

题目：37.$(\mathbf{AB})^T =$ ． A. $\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$ B. $\mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ C. $\mathbf{AB}$ D. $\mathbf{BA}$
解析：$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：38. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，$|\mathbf{A}| = -2$，则 $|2\mathbf{A}| =$ ()．A. -16 B. -4 C. -2 D. 16
解析：$|2\mathbf{A}| = 2^3|\mathbf{A}| = -16$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：困难
题目：39. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$|\mathbf{A}| = 2$，则 $|3\mathbf{A}^2| =$ ()．A. $3^n \cdot 4$ B. 12 C. $3^n 2$ D. 6
解析：$|3\mathbf{A}^2| = 3^n|\mathbf{A}|^2 = 3^n \cdot 4$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：困难
题目：40. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，$|\mathbf{A}| = 2$，则 $|3\mathbf{A}^2| =$ ． A. 108 B. 12 C. 6 D. 54
解析：$|3\mathbf{A}^2| = 3^3|\mathbf{A}|^2 = 108$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：41. 设 A 与 B 都是同阶方阵，则下列运算错误的是 ()．A. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ B. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ C. $(k\mathbf{A})^T = k\mathbf{A}^T$ D. $\left(\mathbf{A}^T\right)^T = \mathbf{A}$
解析：因为 $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$，所以选项 $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{A}^T\mathbf{B}^T$ 是错误的.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：42. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，$|\mathbf{A}| = 2$，则 $|2\mathbf{A}^2| =$ ()．A. 32 B. 12 C. 8 D. 6
解析：$|2\mathbf{A}^2| = 2^3|\mathbf{A}|^2 = 32$．

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：43. 设 $\mathbf{A}$ 为 2 阶方阵，$|\mathbf{A}| = 2$，则 $|3\mathbf{A}^2| =$ ()．A. 36 B. 12 C. 6 D. 54
解析：$|3\mathbf{A}^2| = 3^2|\mathbf{A}|^2 = 36$．

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：44. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，$|\mathbf{A}| = -1$，则 $|2\mathbf{A}^2| =$ ()．A. 8 B. 10 C. 12 D. 6
解析：$|2\mathbf{A}^2| = 2^3|\mathbf{A}|^2 = 8$．

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：45. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，$|\mathbf{A}| = -1$，则 $|\mathbf{A}^2| =$ ()．A. 1 B. 10 C. 12 D. 6
解析：$|\mathbf{A}^2| = |\mathbf{A}|^2 = 1$．

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：46. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，$|\mathbf{A}| = 1$，则 $|-2\mathbf{A}| =$ ()．A. -8 B. 10 C. 12 D. 6
解析：$|-2\mathbf{A}| = -2^3|\mathbf{A}| = -8$．

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：47. 设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶方阵，$|\mathbf{A}|=-1$，则 $|2\mathbf{A}^2|=$ ()．A. 16 B. 10 C. 12 D. 6
解析：$|2\mathbf{A}^2|=2^4|\mathbf{A}|^2=16$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：容易
题目：48. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$|\mathbf{A}|=2$，则 $|\mathbf{A}^2|=$ ()．A. 4 B. 10 C. 12 D. 6
解析：$|\mathbf{A}^2|=|\mathbf{A}|^2=4$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：困难
题目：49. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 n 阶方阵，$\mathbf{AB}$ 不可逆，则下列正确的是 ()．A. $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 中至少有一个不可逆 B. $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都不可逆 C. $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都可逆 D. $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 中至少有一个可逆
解析：由 $\mathbf{AB}$ 不可逆知 $|\mathbf{AB}|=0\Rightarrow|\mathbf{A}||\mathbf{B}|=0\Rightarrow|\mathbf{A}|=0$ 或 $|\mathbf{B}|=0$，故 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 中至少有一个不可逆.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：困难
题目：50. 下列矩阵中，可逆的是 ()．A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&1&0\\2&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ C.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解析：因为 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$，故 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：51. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则下列各式中不正确的是（）. A. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ B. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$ C. $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ D. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$
解析：$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都可逆，$\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 不一定可逆，故 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{B}^{-1}$ 不正确.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：困难
题目：52. 若三阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $|\mathbf{A}| = 3$，则 $|\mathbf{A}^*| =$ （）. A. 9 B. 27 C. 6 D. -9
解析：由 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 知 $|\mathbf{A}^*| = ||\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^3 \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = \frac{|\mathbf{A}|^3}{|\mathbf{A}|} = |\mathbf{A}|^2 = 9$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：53. 若 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 都是方阵且 $|\mathbf{A}| = 2, |\mathbf{B}| = -1$，则 $|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| =$ （）. A. $-\frac{1}{2}$ B. 2 C. $\frac{1}{2}$ D. -2
解析：$|\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}| = |\mathbf{A}^{-1}| \cdot |\mathbf{B}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot |\mathbf{B}| = -\frac{1}{2}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等

题目： 54. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*=$ ()．A. $\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}4&2\\3&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}4&-3\\-2&1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}-4&2\\3&-1\end{pmatrix}$

解析: 因为 $A_{11}=4, A_{21}=-2, A_{12}=-3, A_{22}=1$，故 $\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}\\A_{12}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 困难
题目： 55. 若矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&3\\4&0&0\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵 $\mathbf{A}^*=$ ()．A. $\begin{pmatrix}0&0&6\\12&0&0\\0&8&0\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}0&12&0\\0&0&8\\6&0&0\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}0&-12&0\\0&0&-8\\-6&0&0\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}0&0&-6\\-12&0&0\\0&-8&0\end{pmatrix}$
解析： 因为 $A_{11}=0, A_{21}=0, A_{31}=6, A_{12}=12, A_{22}=0, A_{32}=0, A_{13}=0, A_{23}=8, A_{33}=0$，故 $\mathbf{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&6\\12&0&0\\0&8&0\end{pmatrix}$.

题型： 选择题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 56. 若矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}=$ ()．A. $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&\frac{1}{2}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&0&0\\0&\frac{1}{3}&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

解析: 因为 $|\mathbf{A}| = 6 \neq 0$,故 $\mathbf{A}$ 可逆. 又 $\mathbf{A}$ 是对角阵,故 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

题型: 选择题
主题: 矩阵
难度: 中等
题目: 57. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶方阵,$\mathbf{A}$ 可逆,则下列命题正确的是 ()．A. 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$,则 $\mathbf{B} = \mathbf{O}$ B. 若 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{O}$,则 $\mathbf{B}$ 可逆 C. 若 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{O}$,则 $\mathbf{B}$ 不可逆 D. 若 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$,则 $\mathbf{B} = \mathbf{E}$
解析: 因为 $\mathbf{A}$ 可逆且 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$,故 $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}$.

题型: 选择题
主题: 矩阵
难度: 困难
题目: 58. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵,$\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵,则下列正确的是 ()．A. $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$ B. $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|$ C. $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^n$ D. $|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}^{-1}|$
解析: 1. $\mathbf{A}$ 为可逆矩阵时,$|\mathbf{A}^*| = |\mathbf{A}|^{n-1}$;2. $\mathbf{A}$ 为不可逆矩阵时,$|\mathbf{A}^*| = 0 = |\mathbf{A}|^{n-1}$.

题型: 选择题
主题: 矩阵
难度: 困难
题目: 59. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶可逆矩阵 $(n \geq 2)$,$\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵,则下列正确的是 ()．A. $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$ B. $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-1}\mathbf{A}$ C. $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n+1}\mathbf{A}$ D. $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n+2}\mathbf{A}$
解析: 由 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 知 $(\mathbf{A}^*)^* = |\mathbf{A}|^{n-2}\mathbf{A}$.

题型: 选择题
主题: 矩阵
难度: 中等

题目：60. 设 $\mathbf{A}$ 为任意 n 阶矩阵 $(n \geq 3)$，k 为常数且 $k \neq 0, \pm 1$，则必有 $(k\mathbf{A})^* =$ ()．A. $k^{n-1}\mathbf{A}^*$ B. $k\mathbf{A}^*$ C. $k^n\mathbf{A}^*$ D. $\frac{1}{k}\mathbf{A}^*$

解析：由 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 知 $(k\mathbf{A})^* = k^{n-1}\mathbf{A}^*$.

题型：选择题

主题：矩阵

难度：中等

题目：61. 若三阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A} = -2$，则 $|2\mathbf{A}^{-1}| =$ ()．A. -4 B. -1 C. 4 D. 1

解析：因为 $|\mathbf{A}^{-1}| = \frac{1}{|\mathbf{A}|} = -\frac{1}{2}$，所以 $|2\mathbf{A}^{-1}| = 2^3\,|\mathbf{A}^{-1}| = -4$.

题型：选择题

主题：矩阵

难度：中等

题目：62. 若矩阵 x 满足 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$，则 $X =$ ()．A. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

解析:由 $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ 知 $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 可逆,所以 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

题型：选择题

主题：矩阵

难度：困难

题目：63. 若矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1} =$ ()．A. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

解析：因为 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$，所以 $\mathbf{A}$ 可逆，又 $A_{11} = -1, A_{21} = 0, A_{31} = 0, A_{12} = 0, A_{22} = 4, A_{32} = 2, A_{13} = 0 A_{23} = -2, A_{33} = -2$ 故 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$，所以 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：64. 若 $\mathbf{A}$ 是二阶可逆方阵且 $\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A} =$ ()． A. $\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
解析：因为 $|\mathbf{A}^{-1}| = \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$，又 $\mathbf{A}^{-1}$ 的伴随矩阵 $(\mathbf{A}^{-1})^* = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$，所以 $\mathbf{A} = \frac{(\mathbf{A}^{-1})^*}{|\mathbf{A}^{-1}|} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：65. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶 $(n \geq 2)$ 方阵，$|\mathbf{A}| = a \neq 0$，则 $\mathbf{A}^* \,|=$ ()． A. a^{n-1} B. a^{-1} C. a D. a^n
解析：由 $\mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 知 $|\mathbf{A}^*| = ||\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^n \cdot |\mathbf{A}^{-1}| = \frac{|\mathbf{A}|^n}{|\mathbf{A}|} = |\mathbf{A}|^{n-1} = a^{n-1}$.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：困难
题目：66. 若三阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}$，则 $|(2\mathbf{A})^{-1} - 5\mathbf{A}^*| =$ ()． A. -16 B. $-\frac{1}{16}$ C. 16 D. $\frac{1}{16}$

解析:因为 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$,所以 $|(2\mathbf{A})^{-1}-5\mathbf{A}^*|=\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}-\frac{5}{2}\mathbf{A}^{-1}\right|=|-2\mathbf{A}^{-1}|=(-2)^3\frac{1}{|\mathbf{A}|}=-16$.

题型:选择题
主题:矩阵
难度:困难
题目:67. 若三阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $|\mathbf{A}|=\frac{1}{4}$，则 $|(3\mathbf{A})^{-1}-4\mathbf{A}^*|=$ ()．A. $-\frac{32}{27}$ B. $\frac{16}{27}$ C. $\frac{8}{9}$ D. $-\frac{8}{9}$
解析:因为 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$，所以 $|(3\mathbf{A})^{-1}-4\mathbf{A}^*|=\left|-\frac{2}{3}\mathbf{A}^{-1}\right|=\left(-\frac{2}{3}\right)^3\frac{1}{|\mathbf{A}|}=-\frac{32}{27}$.

题型:选择题
主题:矩阵
难度:容易
题目:68. 克莱姆法则适用于下面哪种类型的方程组 ()．A. 方程的个数等于未知数的个数 B. 方程的个数小于未知数的个数 C. 方程的个数大于未知数的个数 D. 任意
解析:克莱姆法则适用于方程的个数等于未知数的个数的方程组.

题型:选择题
主题:矩阵
难度:容易
题目:69. 以下不能用克莱姆法则求解的方程组是().A. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_4=-5 \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=6 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \end{cases}$
B. $\begin{cases} 6x_1-4x_2=10 \\ 5x_1+7x_2=29 \end{cases}$ C. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_4=-5 \\ 3x_1+2x_2-x_3-2x_4=6 \\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4=0 \\ 2x_1-x_3=0 \end{cases}$ D. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3 \\ 5x_1-2x_2+7x_3=22 \\ 2x_1-5x_2+4x_3=4 \end{cases}$

解析：因为 $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_4 = -5 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 6 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$ 中方程个数与未知数的个数不相等，所以不能用克莱姆法则.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：70. 当（）时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ \quad x + kz = 0 \end{cases}$ 仅有零解. A. $k \neq -3$ B. $k \neq 3$ C. $k = -3$ D. $k = 3$
解析：方程组的系数行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & k \end{vmatrix} = -k - 3 \neq 0 \Rightarrow k \neq -3$，方程组仅有零解.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：71. 当（）时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x - z = 0 \\ kx + y - 2z = 0 \\ -y + 3z = 0 \end{cases}$ 有非零解. A. $k = -3$ B. $k \neq 6$ C. $k \neq -6$ D. $k = -6$
解析：方程组的系数行列式 $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ k & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 + k$，当 $k = -3$ 时，$\det A = 0$，方程组有非零解.

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等

题目：72. 当 () 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} x+z=0 \\ 2x+ky-2z=0 \\ -y+2z=0 \end{cases}$ 仅有零解．A. $k\neq 2$ B. $k\neq -2$ C. $k=2$ D. $k=-2$

解析：方程组的系数行列式 $\det A=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & k & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2k-4$，当 $k\neq 2$ 时，$\det A\neq 0$，方程组仅有零解．

题型：选择题
主题：矩阵
难度：困难
题目：73. 当 () 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ kx+7y-2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ 仅有零解．A. $k\neq \frac{63}{5}$ B. $k=\frac{63}{5}$ C. $k\neq -\frac{63}{5}$ D. $k=-\frac{63}{5}$

解析：方程组的系数行列式 $\det A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}=63-5k$，当 $k\neq \frac{63}{5}$ 时，$\det A\neq 0$，方程组仅有零解．

题型：选择题
主题：矩阵
难度：中等
题目：74. 当 () 时，齐次线性方程组 $\begin{cases} kx+2y=0 \\ x+2y-2z=0 \\ 2x+z=0 \end{cases}$ 仅有零解．A. $k\neq 5$ B. $k=5$ C. $k\neq -5$ D. $k=-5$

解析：方程组的系数行列式 $\det A=\begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2k-10$，当 $k\neq 5$ 时，$\det A\neq 0$，方程组仅有零解．

题型：判断题
主题：矩阵
难度：容易
题目：1. 任意两个矩阵都能相减（）.
解析：两个同型矩阵才能相减，由此知结论错误.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：容易
题目：2. 两个同型矩阵一定相等（）.
解析：两个同型矩阵所有对应元素都对应相等，这两矩阵一定相等，所以结论错误.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：容易
题目：3. 两个同型矩阵相加，是所有对应位置元素对应相加（）.
解析：两个同型矩阵相加，是所有对应位置元素对应相加，所以结论正确.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：容易
题目：4. 同型矩阵才能相加（）.
解析：两个同型矩阵才能相加，所以结论正确.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：容易
题目：5. 同型矩阵相加不满足交换律（）.
解析：同型矩阵相加满足交换律，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 6. 同型矩阵相加不满足结合律（）.
解析： 同型矩阵相加满足结合律，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 7. 两个同型矩阵不一定相等（）.
解析： 两个同型矩阵所有对应元素都对应相等，这两矩阵一定相等，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 8. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 7 & y \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ y & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ x & -2 \end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$，则 x, y 的值为 $x=5, y=6$（）.
解析： 由 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$ 得 $\begin{pmatrix} x+5 & 0 \\ 7+2y-x & y+6 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$，有 $x=-5, y=-6$，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 9. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} x & 0 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}, \mathbf{B}=\begin{pmatrix} u & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C}=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ x & -2 \end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$，则 x, u 的值为 $x=5, u=-4$（）.
解析： 由 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$ 得 $\begin{pmatrix} x+2u-3 & 0 \\ -5-x & 0 \end{pmatrix}=\mathbf{0}$，有 $x=-5, u=4$，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 困难
题目： 10. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-5&0\\7&y\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}u&v\\y&2\end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix}3&-4\\-5&v\end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$，则 v,u,y 的值为 $v=-2,u=4,y=-6$（）.
解析： 由 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$ 得 $\begin{pmatrix}-8+2u&2v+4\\12+2y&y+4-v\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，所以 $v=-2,u=4,y=-6$，结论正确.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 11. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}x&0\\7&y\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}u&-2\\y&2\end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix}3&-4\\x&-2\end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$，则 x,y 的值为 $x=-5,y=-6,u=4$（）.
解析： 由 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$ 得 $\begin{pmatrix}x+2u-3&0\\7+2y-x&y+6\end{pmatrix}=\mathbf{0}$，有 $x=-5,y=-6,u=4$，所以结论正确.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 12. $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}x&0\\7&y\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&-2\\y&2\end{pmatrix},\mathbf{C}=\begin{pmatrix}3&-4\\x&-2\end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$，则 x,y 的值为 $x=5,y=6$（）.
解析： 由 $\mathbf{A}+2\mathbf{B}-\mathbf{C}=\mathbf{O}$ 得 $\begin{pmatrix}x+5&0\\7+2y-x&y+6\end{pmatrix}=\mathbf{O}$，有 $x=-5,y=-6$，所以结论错误.

题型： 判断题

主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 13. 矩阵乘法满足交换律（）.
解析： 矩阵乘法不满足交换律，例如 $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 14. 矩阵乘法不满足结合律（）.
解析： 矩阵乘法满足结合律，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 15. 矩阵乘法不满足分配律（）.
解析： 矩阵乘法满足分配律，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 16. 两同阶矩阵不能相乘（）.
解析： 两同阶矩阵不一定不能相乘，例如同阶方阵可以相乘，所以结论错误.

题型： 判断题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 17. 两同阶下三角矩阵乘积仍为下三角矩阵（）.
解析： 两同阶下三角矩阵乘积仍为下三角矩阵，所以结论正确.

题型： 判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：18. 两同阶上三角形矩阵乘积不一定是上三角形矩阵（）.

解析：两同阶上三角形矩阵乘积仍为上三角形矩阵，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：容易

题目：19. 因为 $m \neq n$，所以 $\mathbf{A}_{m\times s}, \mathbf{B}_{s\times n}$ 不同阶，因此不能相乘（）.

解析：可以相乘，$\mathbf{A}_{m\times s}\mathbf{B}_{s\times n} = \mathbf{C}_{m\times n}$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：20. 若 $\mathbf{AB}$ 与 $\mathbf{BA}$ 都有意义，则 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$ 一定为同阶方阵（）.

解析：不一定为同阶方阵，例如 $\mathbf{A}_{n\times 1}$ 与 $\mathbf{B}_{n\times 1}$ 的情况，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：21. 两个矩阵如果可以相乘的话，其结果不可能是一个常数（）.

解析：例如 $\mathbf{A}_{1\times n}\mathbf{B}_{n\times 1}$ 的结果是 1×1 矩阵（常数），所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：容易

题目：22. 单位矩阵乘任何矩阵仍为任何矩阵（）.

解析：单位矩阵不一定能乘任何矩阵（需满足乘法条件），所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：23. $\mathbf{AX}=\mathbf{AY}$，则 $\mathbf{X}=\mathbf{Y}$（）.

解析：矩阵乘法不满足消去律，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：24. 两同阶对角矩阵乘积仍为对角矩阵（）.

解析：两同阶对角矩阵乘积仍为对角矩阵，所以结论正确.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：困难

题目：25. 对于矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 有 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$（）.

解析：仅当 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ 时成立，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：26. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 都是 n 阶矩阵，若 $\mathbf{AB}=\mathbf{B}$，则 $\mathbf{A}$ 是常数 1（）.

解析：由 n 阶矩阵 $\mathbf{AB}=\mathbf{B}$，则 $\mathbf{A}$ 是 n 阶单位矩阵，由此知结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：27. $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}$ 一定为零矩阵（）.

解析：由 $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$，$\mathbf{A}$ 不一定为零矩阵，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：28. $(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{B}^2$（）.

解析：$(\mathbf{AB})^2 = \mathbf{ABAB}$，$\mathbf{AB}$ 不一定可交换，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：29. $(\mathbf{AB})^k = \mathbf{A}^k\mathbf{B}^k$（）.

解析：$(\mathbf{AB})^k = \overbrace{\mathbf{AB}\cdots\mathbf{AB}}^{k}$，$\mathbf{AB}$ 不一定可交换，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：容易

题目：30. $\mathbf{E}$ 为单位阵，k 为正整数，$\mathbf{E}^k = \mathbf{E}$（）.

解析：$\mathbf{E}^k = \mathbf{E}$，$k$ 为正整数，所以结论正确.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：31. $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$，则 $\mathbf{A}$ 一定为零矩阵或单位阵（）.

解析：由 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$，$\mathbf{A}$ 不一定为零矩阵或单位阵，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：32. $\mathbf{A}^2 - \mathbf{E}^2 = (\mathbf{A}+\mathbf{E})(\mathbf{A}-\mathbf{E})$（）.

解析：矩阵乘法满足此展开式，所以结论正确.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：33. $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}$ 不一定为零矩阵（）.

解析：由 $\mathbf{A}^2=\mathbf{O}$，$\mathbf{A}$ 不一定为零矩阵，所以结论正确.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：34. $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$，则 $\mathbf{A}$ 一定为单位阵（）.

解析：由 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$，$\mathbf{A}$ 不一定为单位阵，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：困难

题目：35. $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$，$\mathbf{E}$ 为单位矩阵，则 $\mathbf{A}=\mathbf{E}$（）.

解析：反例：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 满足 $\mathbf{A}^2=\mathbf{E}$ 但 $\mathbf{A}\neq\mathbf{E}$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：困难

题目：36. $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2-2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$ 成立的充要条件为 $\mathbf{A}=\mathbf{E}$（）.

解析：充要条件是 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：困难

题目：37. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$ 成立的充要条件为 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$（）.

解析：当且仅当 $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ 时成立，所以结论正确.

题型：判断题

主题：行列式

难度：中等

题目：38. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $|-2\mathbf{A}|=-2|\mathbf{A}|$ ()．

解析：$|-2\mathbf{A}|=(-2)^n|\mathbf{A}|$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：行列式

难度：中等

题目：39. 设 $\mathbf{A}$ 为 2 阶矩阵，k 为常数，则 $|k\mathbf{A}|=2k|\mathbf{A}|$ ()．

解析：$|k\mathbf{A}|=k^2|\mathbf{A}|$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：行列式

难度：中等

题目：40. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，$\mathbf{A}^T$ 为 $\mathbf{A}$ 的转置矩阵，则 $|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|^2$ ()．

解析：$|\mathbf{A}\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}||\mathbf{A}^T|=|\mathbf{A}|^2$，所以结论正确.

题型：判断题

主题：行列式

难度：中等

题目：41. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，k 为常数，则 $|k\mathbf{A}|=k|\mathbf{A}|$ ()．

解析：$|k\mathbf{A}|=k^n|\mathbf{A}|$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：容易

题目：42. 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为同阶矩阵，则 $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$ ()．

解析：转置运算的线性性质，所以结论正确.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：容易

题目：43. 设 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 为同阶矩阵，则 $(\mathbf{A}-\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T-\mathbf{B}^T$ （）.

解析：转置运算的线性性质，所以结论正确.

题型：判断题

主题：行列式

难度：困难

题目：44. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，k 为常数，则 $|k\mathbf{A}^{-1}|=k^n|\mathbf{A}|^{-1}$ （）.

解析：逆矩阵行列式性质，所以结论正确.

题型：判断题

主题：行列式

难度：中等

题目：45. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，则 $|2\mathbf{A}|=2|\mathbf{A}|$ （）.

解析：$|2\mathbf{A}|=2^n|\mathbf{A}|$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：行列式

难度：中等

题目：46. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶矩阵，k 为常数，则 $|k\mathbf{A}|=k|\mathbf{A}|$ （）.

解析：$|k\mathbf{A}|=k^3|\mathbf{A}|$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：行列式

难度：容易

题目：47. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，则矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{A}$ 的行列式相等，即 $\mathbf{A}=|\mathbf{A}|$ （）.

解析：矩阵与行列式是不同概念，所以结论错误.

题型：判断题

主题：行列式
难度：困难
题目：48. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶矩阵，$\mathbf{E}$ 为 n 阶单位阵，则 $|\mathbf{A}+\mathbf{E}|=|\mathbf{A}|+1$ （）.
解析：反例存在不成立情况，所以结论错误.

题型：判断题
主题：行列式
难度：困难
题目：49. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 为 n 阶矩阵，$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|\geq|\mathbf{A}|-|\mathbf{B}|$ （）.
解析：存在反例使不等式不成立，所以结论错误.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：中等
题目：50. 若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $\mathbf{A}^*$ 也可逆 （）.
解析：由 $|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}\neq 0$ 可知结论正确.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：困难
题目：51. 若 $\mathbf{A}\mathbf{A}^T=\mathbf{E}$，则 $(\mathbf{A}^*)^T=(\mathbf{A}^*)^{-1}$ （）.
解析：通过伴随矩阵与逆矩阵关系可证，所以结论正确.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：中等
题目：52. 若 $\mathbf{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则 $(\mathbf{A}^*)^T=(\mathbf{A}^T)^*$ （）.
解析：通过伴随矩阵定义可证，所以结论正确.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：53. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶方阵，若 $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ 均可逆，则 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 一定可逆 () .

解析：不能推出 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 可逆的结论，所以结论错误.

题型：判断题

主题：行列式

难度：中等

题目：54. 若三阶方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$，则 $|\mathbf{A}^*|=4$ () .

解析：计算得 $|\mathbf{A}|=2$，$|\mathbf{A}^*|=|\mathbf{A}|^{n-1}=4$，所以结论正确.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：55. 若矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆，则 $(\mathbf{A}^T)^{-1}=(\mathbf{A}^{-1})^T$ () .

解析：通过逆矩阵性质可证，所以结论正确.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：容易

题目：56. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均可逆，则 $\mathbf{AB}$ 也可逆，且 $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1}$ () .

解析：正确关系应为 $(\mathbf{AB})^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$，所以结论错误.

题型：判断题

主题：矩阵

难度：中等

题目：57. 若方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}-4\mathbf{E}=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}-2\mathbf{E}}{2}$ () .

解析：正确逆矩阵应为 $\frac{\mathbf{A}-2\mathbf{E}}{4}$，所以结论错误.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：中等
题目：58. 若方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$，则 $\mathbf{A}$ 不可逆（）.
解析：$\mathbf{A}$ 实际可逆且 $\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}-\mathbf{E}}{2}$，所以结论错误.

题型：判断题
主题：矩阵
难度：中等
题目：59. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}$ 均为 n 阶方阵，若 $\mathbf{ABC}=\mathbf{E}$，则 $\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$（）.
解析：正确关系应为 $\mathbf{C}^{-1}=\mathbf{AB}$，所以结论错误.

题型：填空题
主题：矩阵
难度：容易
题目：1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=()$.
解析：$3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

题型：填空题
主题：矩阵
难度：容易
题目：2. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}=()$.
解析：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}-4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -7 & -2 & -16 \end{pmatrix}$.

题型：填空题
主题：矩阵

难度：容易

题目：3.3$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = ()$.

解析：$3\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：容易

题目：4.$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = ()$.

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -7 & -10 & -16 \end{pmatrix}$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：中等

题目：5.$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ()$.

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 6$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：中等

题目：6.$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = ()$.

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 5$.

题型：填空题
主题：矩阵
难度：中等
题目：7. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = ()$.
解析：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 4 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$.

题型：填空题
主题：矩阵
难度：中等
题目：8. $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = ()$.
解析：$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

题型：填空题
主题：矩阵
难度：困难
题目：9. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = ()$.
解析：$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

题型：填空题
主题：矩阵
难度：中等

题目： 10. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = ()$.

解析： $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 7$.

题型： 填空题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 11. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^2 = ()$.

解析： $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

题型： 填空题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 12. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = ()$.

解析： $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

题型： 填空题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 13. $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = ()$.

解析： $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{pmatrix}$.

题型： 填空题
主题： 矩阵

难度：中等

题目：14. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 为偶数阶矩阵，则 $|-\mathbf{A}|=()$.

解析：$|-\mathbf{A}|=(-1)^{2n}|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}|$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：困难

题目：15. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶方阵，$|\mathbf{A}|=2$，则 $\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\right|=()$.

解析：$\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3|\mathbf{A}|^2=\frac{1}{2}$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：中等

题目：16. 设 $\mathbf{A}$ 为 2 阶方阵，$|\mathbf{A}|=3$，则 $\left|\frac{1}{3}\mathbf{A}^2\right|=()$.

解析：$\left|\frac{1}{3}\mathbf{A}^2\right|=\left(\frac{1}{3}\right)^2|\mathbf{A}|^2=1$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：困难

题目：17. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$|\mathbf{A}|=2$，则 $\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\right|=()$.

解析：$\left|\frac{1}{2}\mathbf{A}^2\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^n|\mathbf{A}|^2=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot 4$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：中等

题目：18. 设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶方阵，$|\mathbf{A}|=2$，则 $\left|2\mathbf{A}^T\right|=()$.

解析：$\left|2\mathbf{A}^T\right|=2^n|\mathbf{A}|=2^{n+1}$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：中等

题目：19. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 且 $ad-bc\neq 0$，则 $\mathbf{A}^{-1}=()$.

解析：$\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：中等

题目：20. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}^{-1}=()$.

解析：$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：困难

题目：21. 设二阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $|\mathbf{A}|=\frac{1}{2}$，则 $|2\mathbf{A}^{*}|=()$.

解析：$|2\mathbf{A}^{*}|=2$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：困难

题目：22. 设四阶方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $|\mathbf{A}|=-2$，则 $|-\mathbf{A}^{*}|=()$.

解析：$|-\mathbf{A}^{*}|=-8$.

题型：填空题

主题：矩阵

难度：困难

题目：23. 若方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^{2}+\mathbf{A}+\mathbf{E}=\mathbf{0}$，则 $\mathbf{A}^{-1}=()$.

解析：$\mathbf{A}^{-1}=-\mathbf{A}-\mathbf{E}$.

题型：填空题
主题：矩阵
难度：困难
题目：24. 若矩阵 $\mathbf{X}$ 满足 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{X} = ()$.
解析：$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 2 \end{pmatrix}$.

题型：填空题
主题：矩阵
难度：困难
题目：25. 已知矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, 则 $\mathbf{B}^2 - \mathbf{A}^2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = ()$.
解析：$\mathbf{B}^2 - \mathbf{A}^2\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 22 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：容易
题目：1. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$，若 $(2\mathbf{A} - \mathbf{X}) + 2(\mathbf{B} - \mathbf{X}) = \mathbf{O}$，则 $\mathbf{X} = ()$.
解析：$\mathbf{X} = \frac{2}{3}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{2}{3}\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right] = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{10}{3} & \frac{10}{3} & 2 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 2 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：容易

题目： 2. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}4&3&2\\-2&1&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}$ ，若 $\frac{1}{2}\mathbf{X}-\mathbf{B}=\mathbf{A}$ ，则 $\mathbf{X}=()$.

解析: $\mathbf{X}=2(\mathbf{A}+\mathbf{B})=2\left[\begin{pmatrix}1&2&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&3&2\\-2&1&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}10&10&6\\0&4&0\\2&2&6\end{pmatrix}$.

题型： 计算题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 3. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&3&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\3&1&4\end{pmatrix}$ ，若 $3(\mathbf{X}-\mathbf{A})=3\mathbf{B}+2\mathbf{X}$ ，则 $\mathbf{X}=()$.

解析: $\mathbf{X}=3(\mathbf{A}+\mathbf{B})=3\left[\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&3&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&2\\3&1&4\end{pmatrix}\right]=3\begin{pmatrix}3&-2&5\\7&4&3\end{pmatrix}$.

题型： 计算题
主题： 矩阵
难度： 中等
题目： 4. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&3&-1\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2&0&2\\3&-1&4\end{pmatrix}$ ，若 $2(\mathbf{A}-\mathbf{X})=3\mathbf{B}-\mathbf{X}$ ，则 $\mathbf{X}=()$.

解析: $\mathbf{X}=2\mathbf{A}-3\mathbf{B}=2\begin{pmatrix}1&-2&3\\4&3&-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}2&0&2\\3&-1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4&-4&0\\-1&9&-14\end{pmatrix}$.

题型： 计算题
主题： 矩阵
难度： 容易
题目： 5. 计算 $\begin{pmatrix}1&-3&3&1\\2&1&2&-1\\4&7&-2&3\\-2&0&-4&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=()$.

解析： $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：6. 已知 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ ，令 $\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ ，求 $\mathbf{A}^{\mathbf{n}} =$ （） .
解析：因为 $\mathbf{A}^n = \left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right)\cdots\left(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}\right) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\underbrace{\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)\cdots\left(\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\right)}_{n-1}\boldsymbol{\beta}$ ，其中 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 3$,所以 $\mathbf{A}^n = 3^{n-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 3 & \frac{3}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：困难
题目：7. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶矩阵，$\mathbf{A}^*$ 为 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，且已知 $|\mathbf{A}| = \frac{1}{2}$ ，求行列式 $|(3\mathbf{A})^{-1} - 2\mathbf{A}^*| =$ （） .
解析：因 $(3\mathbf{A})^{-1} = \frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1}, |\mathbf{A}^{-1}| = |\mathbf{A}|^{-1}, \mathbf{A}^* = |\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$,故 $|(3\mathbf{A})^{-1} - 2\mathbf{A}^*| = \left|\frac{1}{3}\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\right| = \left|-\frac{2}{3}\mathbf{A}^{-1}\right| = \left(-\frac{2}{3}\right)^3|\mathbf{A}|^{-1} = -\frac{16}{27}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：8. 判断矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ 是否可逆，若可逆，利用伴随矩阵求出其逆矩阵.

解析：因为 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$ ，所以 $\mathbf{A}$ 可逆. $\mathbf{A}$ 中各元素的代数余子式为：

$A_{11} = -3, \quad A_{12} = -4, \quad A_{13} = 5, \quad A_{21} = 3, \quad A_{22} = 0, \quad A_{23} = -1, \quad A_{31} = 1, \quad A_{32} = 4, \quad A_{33} =$

所以 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 4 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$，则

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\mathbf{A}^* = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：9. 若方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{E} = \mathbf{O}$，求 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $(\mathbf{A} - 4\mathbf{E})^{-1} = ()$.
解析：由 $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{E} = \mathbf{O} \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E}) = 10\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{A}\left(\frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})\right) = \mathbf{E}$，
所以 $\mathbf{A}$ 可逆且 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}(\mathbf{A} - 3\mathbf{E})$.
再由 $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} - 10\mathbf{E} = \mathbf{O} \Rightarrow (\mathbf{A} + \mathbf{E})(\mathbf{A} - 4\mathbf{E}) = 6\mathbf{E} \Rightarrow \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{E})(\mathbf{A} - 4\mathbf{E}) = \mathbf{E}$，
所以 $\mathbf{A} - 4\mathbf{E}$ 可逆，$(\mathbf{A} - 4\mathbf{E})^{-1} = \frac{1}{6}(\mathbf{A} + \mathbf{E})$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：10. 若矩阵 $\mathbf{X}$ 满足 $\mathbf{AXB} = \mathbf{C}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$，$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$，求矩阵 $\mathbf{X} = ()$.

解析：由于 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 可逆，故 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{B}^{-1}$.

计算可得：$\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&3\\0&2&-5\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}^{-1}=\begin{pmatrix}-5&-3\\3&2\end{pmatrix}$，

因此 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}1&0\\-4&-4\\7&7\end{pmatrix}$.

题型：计算题

主题：矩阵

难度：中等

题目：11. 若矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&-2\\0&1&4\\0&0&1\end{pmatrix}$ 且 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{E}$，求矩阵 $\mathbf{B}=()$.

解析：由 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}\mathbf{B}=\mathbf{E}\Rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{B})=\mathbf{E}\Rightarrow\mathbf{A}-\mathbf{B}=\mathbf{A}^{-1}\Rightarrow\mathbf{B}=\mathbf{A}-\mathbf{A}^{-1}$.

又因为 $|\mathbf{A}|=1\Rightarrow\mathbf{A}^{-1}=\frac{\mathbf{A}^*}{|\mathbf{A}|}=\begin{pmatrix}1&-2&10\\0&1&-4\\0&0&1\end{pmatrix}$，

故 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&4&-12\\0&0&8\\0&0&0\end{pmatrix}$.

题型：计算题

主题：矩阵

难度：中等

题目：12. 已知三阶方阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵为 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{pmatrix}$，求 $(\mathbf{A}^*)^{-1}=()$.

解析：由 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 得：$(\mathbf{A}^*)^{-1}=(|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1})^{-1}=\frac{1}{|\mathbf{A}|}(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$.

由 $|\mathbf{A}^{-1}|=\frac{1}{|\mathbf{A}|}$，可得 $|\mathbf{A}|=\frac{1}{|\mathbf{A}^{-1}|}$.

计算 $|\mathbf{A}^{-1}|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&3\end{vmatrix}=2$，故 $|\mathbf{A}|=\frac{1}{2}$，

于是 $(\mathbf{A}^*)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot\mathbf{A}=2\mathbf{A}=2\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1}=2\begin{pmatrix}\frac{5}{2}&-1&-\frac{1}{2}\\-1&1&0\\-\frac{1}{2}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1&-1\\-2&2&0\\-1&0&1\end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：13. 若矩阵 $\mathbf{X}$ 满足 $\mathbf{X}\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\2&-2&5\end{pmatrix}$，求 $\mathbf{X}=()$.
解析：由于右乘矩阵可逆，故 $\mathbf{X}=\mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}$，
其中 $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&3&2\\2&-2&5\end{pmatrix}$，$\mathbf{N}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&1\\3&2&1\end{pmatrix}$.
计算得 $\mathbf{N}^{-1}=\begin{pmatrix}-1&-3&2\\2&5&-3\\-1&-1&1\end{pmatrix}$，
所以 $\mathbf{X}=\mathbf{M}\mathbf{N}^{-1}=\begin{pmatrix}-6&-11&8\\0&1&1\\-11&-21&15\end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：14. 设矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{A}\mathbf{B}=2\mathbf{B}+\mathbf{A}$，且 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$，求矩阵 $\mathbf{B}=()$.
解析：由题意 $\mathbf{A}\mathbf{B}=2\mathbf{B}+\mathbf{A}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B}=\mathbf{A}$，
即 $\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}$.
计算 $\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\-1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，

其逆为 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

则 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -\frac{1}{2} & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：15. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ，求矩阵 $\mathbf{B}$ 使其满足 $\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}$.
解析：$\mathbf{AB}=\mathbf{A}+2\mathbf{B}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{B}=\mathbf{A}$ ，即 $\mathbf{B}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}$. 由 $\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，计算其逆矩阵 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

从而得 $\mathbf{B}=\begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：16. 若方阵 $\mathbf{A}$ 满足 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}$，求 $\mathbf{A}^{-1}$ 和 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}$.
解析：由 $\mathbf{A}^2-\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\mathbf{O}\Rightarrow\mathbf{A}(\mathbf{A}-\mathbf{E})=2\mathbf{E}$，所以 $\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{E})$. 又有 $(\mathbf{A}+2\mathbf{E})(\mathbf{A}-3\mathbf{E})=-4\mathbf{E}\Rightarrow(\mathbf{A}+2\mathbf{E})^{-1}=-\frac{1}{4}(\mathbf{A}-3\mathbf{E})$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：容易
题目：17. 用克莱姆法则求解方程组 $\begin{cases} 2x+5y=1 \\ 3x+7y=2 \end{cases}$.

解析：$D=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=-1$, $D_1=\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=-3$, $D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=1$，解得 $x=\frac{D_1}{D}=3$, $y=\frac{D_2}{D}=-1$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：容易
题目：18. 用克莱姆法则求解方程组 $\begin{cases} 4x_1+5x_2=0 \\ 3x_1-7x_2=0 \end{cases}$.
解析：$D=\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix}=-43$, $D_1=\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix}=0$, $D_2=\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}=0$，故 $x_1=\frac{D_1}{D}=0$, $x_2=\frac{D_2}{D}=0$，解为零解.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：中等
题目：19. 用克莱姆法则求解方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=-3 \\ 5x_1-2x_2+7x_3=22 \\ 2x_1-5x_2+4x_3=4 \end{cases}$.
解析：$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 5 & -2 & 7 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}=63$, $D_1=\begin{vmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 22 & -2 & 7 \\ 4 & -5 & 4 \end{vmatrix}=63$, $D_2=\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 22 & 7 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix}=126$, $D_3=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & -2 & 22 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix}=189$，解为 $x_1=\frac{D_1}{D}=1$, $x_2=\frac{D_2}{D}=2$, $x_3=\frac{D_3}{D}=3$.

题型：计算题
主题：矩阵
难度：困难

题目：20. 用克莱姆法则求解方程组 $\begin{cases} bx - ay = -2ab \\ -2cy + 3bz = bc \\ cx + az = 0 \quad (abc \neq 0) \end{cases}$.

解析：$D = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -5abc,\ D_1 = \begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = 5a^2bc,$

$D_2 = \begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = -5ab^2c,\ D_3 = \begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = -5abc^2$，因此

$x = \frac{D_1}{D} = -a,\ y = \frac{D_2}{D} = b,\ z = \frac{D_3}{D} = c.$

题型：填空题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = ()$.
解析：$3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：2. 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ 则 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1} = ()$. A. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

解析:由 $(\mathbf{A} \mid \mathbf{E}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[r_3 \times (-1)]{r_2 + r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{(r_1+r_2)\times\frac{1}{2}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\\1&1&0&0&-1&-2\end{array}\right)\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&0&1&1\end{array}\right)$$

知 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{5}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&1\end{pmatrix}$.

题型：选择题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：3. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$ 则 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}=$（）. A. $\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&3&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix}1&-3&2\\\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix}1&3&-2\\\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\-1&1&0\end{pmatrix}$

解析：$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&3&1&0&0\\1&0&-2&-1&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$

$$\xrightarrow[(-1)\times r_3]{\substack{r_1+3r_3\\r_2-2r_3}}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&2&0&-2&-3&3\\1&0&0&1&3&-2\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}(r_1-r_2)}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&0&0&1&3&-2\\0&0&1&1&1&-1\end{array}\right)\rightarrow$$

$\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$ 知 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-\frac{3}{2}&-3&\frac{5}{2}\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

题型：选择题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：4. 设矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{X}$ 满足 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,$\mathbf{B}=$

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$,则矩阵 $\mathbf{X}=$()．A. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ B. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ C. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ D. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

解析: 可知 A 可逆,则 $\mathbf{X}=\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ 故由 $(\mathbf{A}\mid\mathbf{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-r_2-r_1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{r_2+2r_3 \\ r_1-3r_3}]{r_3\times(-1)} \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{(r_1-r_2)\times\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ & & 1 & 3 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{知 } X=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

题型： 选择题
主题： 线性方程组
难度： 困难
题目： 5. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶矩阵，$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价，则下列命题中错误的是 () . A. 若 $|\mathbf{A}|>0$ ，则 $|\mathbf{B}|>0$ B. 若 $|\mathbf{A}|\neq 0$ ，则 $\mathbf{B}$ 也可逆 C. 若 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{E}$ 等价，则 $\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{E}$ 等价 D. 存在可逆矩阵 $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ ，使得 $\mathbf{PAQ}=\mathbf{B}$
解析： 因为 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价，所以存在可逆矩阵 $\mathbf{P},\mathbf{Q}$ ，使得 $\mathbf{PAQ}=\mathbf{B}$ ，从而 $|\mathbf{PAQ}|=|\mathbf{B}|\Rightarrow|\mathbf{P}|.\ |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{Q}|=|\mathbf{B}|$ ，可知 $|\mathbf{A}|$ 与 $|\mathbf{B}|$ 相差一个非零倍数，故若 $|\mathbf{A}|\neq 0$ ，则 $|\mathbf{B}|\neq 0$ ，即 B 也可逆. 由等价的传递性知选项 C 正确. 故选 A.

题型： 选择题
主题： 线性方程组
难度： 中等
题目： 6. 设 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为 $\boldsymbol{n}$ 阶非零矩阵，且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ ，则 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的秩 () . A. 均小于 n B. 均等于零 C. 一个小于 n ，一个等于 n D. 均等于 n

解析：因为 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 均为非零矩阵，如 $r(\mathbf{A})=n$ ，则 A 可逆，由 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$ ，则 $\mathbf{B}=\mathbf{O}$. 矛盾，所以只能是 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的秩均小于 n.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：7. 设 $\mathbf{A}$ 为三阶方阵，$r(\mathbf{A})=1$ ，则下列正确的是 () . A. $r\left(\mathbf{A}^{*}\right)=0$ B. $r\left(\mathbf{A}^{*}\right)=1$ C. $r\left(\mathbf{A}^{*}\right)=2$ D. $r\left(\mathbf{A}^{*}\right)=3$
解析：因为 $r(\mathbf{A})=1$ ，所以 $\mathbf{A}$ 的任意二阶子式都为零，从而 $\mathbf{A}$ 的任意元素的代数余子式都为零，故 $r\left(\mathbf{A}^{*}\right)=0$.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：8. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=r$ ，则下列正确的是 () . A. $\mathbf{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式均等于零 B. $\mathbf{A}$ 中所有 r 阶子式均不等于零 C. $\mathbf{A}$ 中所有 $r-1$ 阶子式均不等于零 D. $\mathbf{A}$ 中只有一个 $r-1$ 阶子式不等于零
解析：由矩阵的秩的定义可知，$\mathbf{A}$ 中所有 $r+1$ 阶子式均等于零.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：9. 若矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-2&3&4\\0&0&0&5\end{pmatrix}$ ，则 $\mathbf{A}$ 中 () . A. 存在一个三阶子式不等于零 B. 所有二阶子式都不等于零 C. 所有二阶子式都等于零 D. 所有三阶子式都不等于零
解析：由 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&-2&3&4\\0&0&0&5\end{pmatrix}$ 知 $r(\mathbf{A})=3$ ，所以 $\mathbf{A}$ 中存在一个三阶子式不等于零.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：10. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ ，则 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=$ ()．A. 2 B. 1 C. 3 D. 0
解析：因为 $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0$ ，所以 $r(\mathbf{A})=2$.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：11. 设 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价，则必有 ()．A. 当 $|\mathbf{A}|=0$ 时，$|\mathbf{B}|=0$ B. 当 $|\mathbf{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\mathbf{B}|=a$ C. 当 $|\mathbf{A}|=a(a\neq 0)$ 时，$|\mathbf{B}|=-a$ D. 当 $|\mathbf{A}|\neq 0$ 时，$|\mathbf{B}|=0$
解析：因为当 $|\mathbf{A}|=0$ 时，$r(\mathbf{A})<n$ 又 A 与 B 等价，故 $r(\mathbf{B})<n$，即 $|\mathbf{B}|=0$.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：12. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵，$\mathbf{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵，则下列正确的是 ()．A. 当 $m>n$ 时，必有 $|\mathbf{AB}|=0$ B. 当 $m>n$ 时，必有 $|\mathbf{AB}|\neq 0$ C. 当 $n>m$ 时，必有 $|\mathbf{AB}|=0$ D. 当 $n>m$ 时，必有 $|\mathbf{AB}|\neq 0$
解析：由 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times m}$ 是 $m\times m$ 方阵，而 $r(\mathbf{AB})\leq\min\{r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})\}\leq n<m\Rightarrow r(\mathbf{AB})<m$，所以 $|\mathbf{AB}|=0$.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：13. 设矩阵 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价，A 有一个 k 阶子式不等于零，则 $r(\mathbf{B})$ 与

k 的大小关系是 ( ) . A. $r(\mathbf{B}) \geq k$ B. $r(\mathbf{B}) < k$ C. $r(\mathbf{B}) = k$ D. $r(\mathbf{B}) \leq k$

解析：因为 A 有一个 k 阶子式不等于零，所以 $r(\mathbf{A}) \geq k$，又由 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价知 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$，故 $r(\mathbf{B}) \geq k$.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：14. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，$\mathbf{C}$ 与 n 阶单位矩阵等价，$\mathbf{B} = \mathbf{AC}$，则 $r(\mathbf{A})$ 与 $r(\mathbf{B})$ 的大小关系为 ( ) . A. $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$ B. $r(\mathbf{A}) > r(\mathbf{B})$ C. $r(\mathbf{A}) < r(\mathbf{B})$ D. $r(\mathbf{A})$ 与 $r(\mathbf{B})$ 的大小关系依 $\mathbf{C}$ 而定
解析：因为 $\mathbf{C}$ 与 n 阶单位矩阵等价，所以 $r(\mathbf{C}) = n \Rightarrow \mathbf{C}$ 可逆，从而 $r(\mathbf{B}) = r(\mathbf{AC}) \leq r(\mathbf{A})$，又 $r(\mathbf{A}) = r\left(\mathbf{ACC}^{-1}\right) = r\left(\mathbf{BC}^{-1}\right) \leq r(\mathbf{B})$，故 $r(\mathbf{A}) = r(\mathbf{B})$.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：15. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A}) =$ ( ) . A. 3 B. 1 C. 2 D. 0
解析：因为 $|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18 \neq 0$，所以 $r(\mathbf{A}) = 3$.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：16. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 2 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A}) =$ ( ) . A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

解析： 由 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&1\\4&-2&2\\6&-3&3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}2&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 知 $r(\mathbf{A})=1$.

题型： 选择题
主题： 线性方程组
难度： 中等
题目： 17. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&\lambda+1\end{pmatrix}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=2$，则 $\lambda=$（）. A. 1 B. 2 C. 0 D. -1
解析： 由 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\2&3&\lambda+1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&\lambda-1\end{pmatrix}$ 和 $r(\mathbf{A})=2$ 知 $\lambda=1$.

题型： 选择题
主题： 线性方程组
难度： 中等
题目： 18. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&3&-2\\2&1&1\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=$（）. A. 2 B. 1 C. 3 D. 0
解析： 由 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&3&-2\\2&1&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-r_1]{r_3-2r_1}\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&5&-5\\0&5&-5\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&5&-5\\0&0&0\end{pmatrix}$ 知 $r(\mathbf{A})=2$.

题型： 选择题
主题： 线性方程组
难度： 困难

题目：19. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ 的秩 $r(\mathbf{A})=3$，则 $a=$ （）. A. -3 B. 2 C. 0 D. 3

解析：因为 $r(\mathbf{A})=3$，所以 $\mathbf{A}$ 中非零子式的最高阶数是 3，从而有 $|\mathbf{A}|=(a+3)(a-1)^3=0 \Rightarrow a=1$ 或 $a=-3$. 当 $a=1$ 时，显然有 $r(\mathbf{A})=1$；而当 $a=-3$ 时，A 中存在不为零的三阶子式且不存在更高阶的非零子式，故当且仅当 $a=-3$ 时，$r(\mathbf{A})=3$.

题型：选择题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：20. 非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 求解时，对增广矩阵 $\mathbf{B}=(\mathbf{A} \mid \mathbf{b})$ 施行初等变换（）. A. 只能施行初等行变换 B. 允许进行随意的一种初等列变换 C. 允许行及列的初等变换 D. 允许进行初等列变换

解析：对于增广矩阵，允许进行初等行变换. 故选 A.

题型：选择题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：21. 若方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=3 \\ x_1+ax_2+3x_3=2 \end{cases}$ 有无穷多解，则 a 的取值为（）. A. 2 B. 1 C. 3 D. 4

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{pmatrix}$，当 $a=2$ 时，$R(A)=R(\bar{A})=2<3$，方程组有无穷多解.

题型：选择题

主题：线性方程组

难度：容易

题目：22. 线性非齐次方程组 $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解的充要条件为（）. A. $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{A}\mid\mathbf{b})$ B. $R(\mathbf{A})>R(\mathbf{A}\mid\mathbf{b})$ C. $R(\mathbf{A})<R(\mathbf{A}\mid\mathbf{b})$ D. $R(\mathbf{A})=R(\mathbf{b})$

解析：由线性非齐次方程组解的判定法则可得.

题型：选择题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：23. 若 $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+3x_4=4 \\ x_1+x_2-3x_3+5x_4=5 \\ x_2+2x_3-2x_4=2\lambda \end{cases}$ ，则方程组有解的条件是 λ 等于（）. A. $-\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. -1 D. 1

解析：$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 2\lambda \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\lambda+1 \end{array}\right)$ 若方程组有解，则 $\lambda=-\frac{1}{2}$.

题型：选择题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：24. 若 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2-ax_3=0 \\ x_1-2x_2+3x_3=0 \end{cases}$ 有非零解的充要条件是 a 的取值为（）. A. -4 B. -3 C. -2 D. -1

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -a \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -a-2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -a-2 \\ 0 & 0 & a+4 \end{pmatrix}$ 则当 $a=-4$ 时，方程组有非零解.

题型：选择题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：25. 若方程组 $\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1 \\ 2x_1+3x_2+ax_3=3 \\ x_1+ax_2+3x_3=2 \end{cases}$ 无解，则 a 的取值为（）. A. -3 B. -2 C. -1 D. -4

解析：$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & a & 3 \\ 1 & a & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & a-1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & a+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(a+3)(a-2) & 2-a \end{pmatrix}$，
当 $a=-3$ 时，$R(\mathbf{A})=2<R(\overline{\mathbf{A}})=3$，方程组无解.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：26. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3=0 \\ 3x_1-4x_2+7x_3=0 \\ -x_1+2x_2+kx_3=0 \end{cases}$ 有非零解，则 k 的取值为（）. A. -3 B. -2 C. -4 D. -1

解析：对于方程组的系数矩阵作初等变换 $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & -4 & 7 \\ -1 & 2 & k \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & -k \\ 0 & 2 & 3k+7 \\ 0 & 3 & 2k+3 \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -k \\ 0 & 1 & \frac{3k+7}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{5k+15}{2} \end{pmatrix}$ 当 $k=-3$ 时，$\det\mathbf{A}=0$，方程组有非零解.

题型：选择题
主题：线性方程组
难度：困难
题目：27. 若齐次线性方程组 $\begin{cases} 3x+2y-z=0 \\ kx+7y-2z=0 \\ 2x-y+3z=0 \end{cases}$ 仅有零解，则 k 应满足（）. A. $k\neq\frac{63}{5}$ B. $k=\frac{63}{5}$ C. $k\neq-\frac{63}{5}$ D. $k=-\frac{63}{5}$

解析：若齐次线性方程组仅有零解，则只需方程组的系数行列式 $|\mathbf{A}|\neq$

0. 即 $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ k & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ k & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 7-3k & -2+4k \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} \end{vmatrix} =$
$7\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{5}{7}k+9 \end{vmatrix}$.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：1.n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\mathbf{A}$ 可以表示为若干初等矩阵的乘积（）.
解析：因为初等矩阵是可逆的,故充分性显然.反之,设 $\mathbf{A}$ 可逆,则 $\mathbf{A}$ 可以经过有限次初等变换变为单位矩阵 $\mathbf{E}$,即存在初等矩阵 $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_s \mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_t$ 使得 $\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2\ldots\mathbf{P}_s\mathbf{A}\mathbf{Q}_1\mathbf{Q}_2\ldots\mathbf{Q}_\mathbf{t} = \mathbf{E}$ 所以,$\mathbf{A} = \mathbf{P}_1^{-1}\mathbf{P}_2^{-1}\ldots\mathbf{P}_s^{-1}\mathbf{E}\mathbf{Q}_1^{-1}\mathbf{Q}_2^{-1}\ldots\mathbf{Q}_\mathbf{t}$ 即 A 可以表示为若干初等矩阵的乘积.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：2. 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 n 阶矩阵，$\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价，若 $|\mathbf{A}| = 0$，则 $|\mathbf{B}| = 0$（）.
解析：因为 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 等价，所以存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{PAQ} = \mathbf{B}$，从而 $|\mathbf{PAQ}| = |\mathbf{B}| \Rightarrow |\mathbf{P}| \cdot |\mathbf{A}| \cdot |\mathbf{Q}| = |\mathbf{B}|$，可知 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$ 相差一个非零倍数，故若 $|\mathbf{A}| = 0$，则 $|\mathbf{B}| = 0$.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：3. 初等矩阵的乘积仍然是初等矩阵（）.
解析：举例：若 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 是初等矩阵，但 $\mathbf{AB} =$

$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ 不是初等矩阵，故结论错误.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：4. 初等矩阵的伴随矩阵仍然是初等矩阵（）.
解析：举例：若 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是初等矩阵，但其伴随矩阵为 $\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，不是初等矩阵，故结论错误.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：5. 可逆矩阵只经过列初等变换就可化为单位矩阵（）.
解析：因为可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 与单位矩阵 $\mathbf{E}$ 等价，所以存在可逆矩阵 $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$，使得 $\mathbf{PAQ} = \mathbf{E}$，即 $\mathbf{AQ} = \mathbf{P}^{-1}$，再乘以 $\mathbf{P}$ 得 $\mathbf{AQP} = \mathbf{E}$. 由于 $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$ 可逆，所以 $\mathbf{A}$ 只经过列初等变换即可化为单位矩阵 $\mathbf{E}$.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：6. 矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 是初等矩阵（）.
解析：不能通过一次初等变换将单位矩阵变为该矩阵，故 $\mathbf{A}$ 不是初等矩阵.

题型：判断题
主题：线性方程组

难度：容易

题目：7. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$ 是初等矩阵（）.

解析：交换单位矩阵的第 1 行与第 3 行可以得到该矩阵，故该矩阵是初等矩阵，结论正确.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：容易

题目：8. 初等矩阵 $\mathbf{E}(i,j)$ 的行列式等于 -1（）.

解析：初等矩阵 $\mathbf{E}(i,j)$ 是由互换单位矩阵的第 i 列与第 j 列得到，互换列会使行列式变号，故 $|\mathbf{E}(i,j)|=-1$.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：容易

题目：9. 单位矩阵是初等矩阵（）.

解析：单位矩阵可以看作把单位矩阵的某列的 0 倍加到另一列上，属于初等变换，故单位矩阵是初等矩阵.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：10. 初等矩阵 $\mathbf{A}$ 的逆矩阵是初等矩阵 $\mathbf{A}$（）.

解析：只有交换单位矩阵第 i 行与第 j 行所得到的初等矩阵的逆等于其本身，其余两类初等矩阵的逆不等于本身．例如，$\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$ 是初等矩阵，但其逆为 $\begin{pmatrix}1&0\\-2&1\end{pmatrix}$，不是其本身.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：容易

题目：11. 初等矩阵的之和仍然是初等矩阵（）.

解析：举例：设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ 是初等矩阵，但 $\mathbf{A}+\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$，不是初等矩阵.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：12. n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\mathbf{A}$ 可以表示为若干初等矩阵之和（）.

解析：正确命题应为：n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\mathbf{A}$ 可以表示为若干初等矩阵的乘积.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：困难

题目：13. 设矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{X}$ 满足 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$，其中 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$，则矩阵 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$（）.

解析：由于 $\mathbf{A}$ 可逆，$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$，可通过对增广矩阵 $(\mathbf{A} \mid \mathbf{B})$ 进行初等行变换得到结果，计算可得 $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -15 & -3 \\ 12 & 4 \end{pmatrix}$，故判断正确.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：中等

题目： 14. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&-3\\4&0&0\end{pmatrix}$，则 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$ () .

解析: 将增广矩阵 $(\mathbf{A}\mid\mathbf{E})$ 进行初等行变换后可得逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{4}\\\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{1}{3}&0\end{pmatrix}$，判断正确.

题型： 判断题
主题： 线性方程组
难度： 困难
题目: 15. 设 $\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\mathbf{B}$ 是 $n\times s$ 矩阵,若 $r(\mathbf{B})=n$,则 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{A})$ () .
解析： 因为 $r(\mathbf{B})=n$，说明 $\mathbf{B}$ 的列向量线性无关，$\mathbf{B}$ 可化为标准形，存在可逆矩阵 $\mathbf{Q}$ 使得 $\mathbf{BQ}=\begin{pmatrix}\mathbf{E}_n & \mathbf{B}_1\end{pmatrix}$，于是 $\mathbf{ABQ}=(\mathbf{A},\ \mathbf{AB}_1)$，故 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{A})$. 判断正确.

题型： 判断题
主题： 线性方程组
难度： 容易
题目： 16. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$\mathbf{B}=\mathbf{A}-\mathbf{E}$，则 $r(\mathbf{B})=1$ () .
解析： 由 $\mathbf{B}=\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$，行简化得 $r(\mathbf{B})=2$，判断错误.

题型： 判断题
主题： 线性方程组
难度： 中等
题目： 17. 设 $\mathbf{A}^*$ 是 n 阶方阵 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵，若 $r(\mathbf{A})=n$ ，则 $r\left(\mathbf{A}^*\right)=n$ ().

解析：当 $r(\mathbf{A})=n$ 时，$\mathbf{A}$ 可逆，且 $\mathbf{A}^*=|\mathbf{A}|\mathbf{A}^{-1}$ 也可逆，所以 $r\left(\mathbf{A}^*\right)=n$.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：18. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 阶方阵，则 $r(\mathbf{AB})=r(\mathbf{BA})()$.
解析：举例：设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，则 $r(\mathbf{AB})=0,r(\mathbf{BA})=1$ ，由此知结论错误.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：19. 若 $\mathbf{A}$ 的所有 r 阶子式都为零，则 $\mathbf{A}$ 的所有 $r+1$ 阶子式也都为零 () .
解析：对 $\mathbf{A}$ 的任一 $r+1$ 阶子式按第一行展开，等于若干个 r 阶子式的线性组合，所以等于零.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：20. 凡是秩相等的矩阵一定是等价矩阵 ().
解析：正确命题应该是：凡是秩相等的同阶矩阵一定是等价矩阵.

题型：判断题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：21. 设 $\mathbf{A}$ 为三阶方阵，若 $r(\mathbf{A})=1$ ，则 $r\left(\mathbf{A}^*\right)=0()$.
解析：因为 $r(\mathbf{A})=1$ ，所以 $\mathbf{A}$ 的任意二阶子式都为零，从而 $\mathbf{A}$ 的任意元素的代数余子式都为零，故 $r\left(\mathbf{A}^*\right)=0$.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：22. 若三阶方阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}$，则 $r(\mathbf{A})=2()$.

解析：由 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&-5\\4&7&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_2-2r_1]{r_3-2r_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-11\\0&-1&-11\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&-11\\0&0&0\end{pmatrix}$，故 $r(\mathbf{A})=2$.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：容易

题目：23. 如果 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解（）.

解析：如果 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 只有零解.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：容易

题目：24. 齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 可能没有解（）.

解析：齐次方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 恒有解（零解）.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：25. 若 $\mathbf{Ax}=0$ 只有零解，且 $\mathbf{A}$ 是 n 阶矩阵，则 $R(\mathbf{A})=n-1()$.

解析：若 $\mathbf{Ax}=0$ 只有零解，则 $R(\mathbf{A})=n$.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：26. 若 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 仅有零解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 无解（）.

解析：$r(\mathbf{A})=n$ ，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有唯一解.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：27. 若 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 有非零解，则 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 有无穷多个解（）.

解析：由题设条件不能判定方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩是否相等，故 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 可能无解.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：容易

题目：28. 非齐次线性方程组 $\mathbf{AX}=\mathbf{b}$ 求解时，对增广矩阵 $\mathbf{B}=(\mathbf{A}\mid\mathbf{b})$ 只能施行初等行变换，得到的仍是等价方程（）.

解析：对于增广矩阵，允许进行初等行变换.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：容易

题目：29. 当线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的系数矩阵的秩小于增广矩阵的秩时，方程组无解（）.

解析：根据线性方程组解的判定易得该结论正确.

题型：判断题

主题：线性方程组

难度：中等

题目：30. 线性方程组 $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3=5 \\ 3x_1+2x_2+3x_3=3 \\ x_2+2x_3=0 \end{cases}$ 有解（）.

解析: 由于 $\overline{\mathbf{A}}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&5\\3&2&3&3\\0&1&2&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&5\\0&1&2&-2\\0&1&2&0\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}3&1&1&5\\0&1&2&-2\\0&0&0&2\end{array}\right)$ ，$r(\mathbf{A})=2\neq r(\overline{\mathbf{A}})=3$ ，所以方程组无解.

题型： 判断题
主题： 线性方程组
难度： 容易
题目： 31. 当线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{b}$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩相等时，方程组有唯一的解（）.
解析： 由方程组系数与解的关系可知该结论错误，此时方程组有解，但不一定唯一，需进一步判断未知数个数与秩是否相等.

题型： 填空题
主题： 线性方程组
难度： 容易
题目： 1. 设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ 则 A 的逆矩阵 $\mathbf{A}^{-1}=()$.
解析：

$$(\mathbf{A}\mid\mathbf{E})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&2&3&1&0&0\\1&-1&0&0&1&0\\-1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_1-2r_2]{r_3+r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&4&3&1&-2&0\\1&-1&0&0&1&0\\0&1&1&0&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_1-3r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}0&1&0&1&-5\\1&-1&0&-3&\\0&1&1&1&0\\0&1&1&&\end{array}\right)\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2+r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&0&1&-5&-3\\1&0&0&1&-4&-3\\0&0&1&-1&6&4\end{array}\right)$$ 知$\mathbf{A}^{-1}=$

$$\begin{pmatrix}1&-4&-3\\1&-5&-3\\-1&6&4\end{pmatrix}.$$

题型：填空题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：2. 若矩阵 $\mathbf{X}$ 满足 $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ ，则 $\mathbf{X} = ()$.
解析：

$$\left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 5 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_1-3r_2} \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & -1 & -5 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-r_1} \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 5 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{r_2-2r_1} \left(\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & 5 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & -7 & -2 & 9 \end{array}\right)$$

故$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 9 \\ 5 & 1 & -5 \end{pmatrix}$.

题型：填空题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：3. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix}$ 的秩 $r(\mathbf{A}) = 2$ ，则 $t = ()$.
解析：

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2-2r_1,\, r_3-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & t-1 \end{pmatrix}$$

由$r(\mathbf{A}) = 2$ 知$t - 1 = 0 \Rightarrow t = 1$.

题型：填空题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：4. 设 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3k \\ -1 & 2k & -3 \\ k & -2 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩 $r(\mathbf{A}) = 1$ ，则 $k = ()$.

解析：

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\k-1&0&3(1-k)\end{pmatrix}$$

由$r(\mathbf{A})=1$ 知$k-1=0\Rightarrow k=1.$

题型：填空题
主题：线性方程组
难度：容易
题目：5. 从矩阵 $\mathbf{A}$ 中划去一行得到矩阵 $\mathbf{B}$ ，则 $\mathbf{A},\mathbf{B}$ 的秩 $r(\mathbf{A}),r(\mathbf{B})$ 的大小关系为 () .
解析：

设$r(\mathbf{B})=r$ 则$\mathbf{B}$ 存在某个r 阶非零子式，

由于$\mathbf{B}$ 是由$\mathbf{A}$ 删去一行所得，故$\mathbf{A}$ 同样存在某个r 阶非零子式

$\Rightarrow r(\mathbf{A})\geq r(\mathbf{B}).$

题型：填空题
主题：线性方程组
难度：困难
题目：6. 已知方程组 $\begin{bmatrix}1&-1&3\\0&1&a-2\\3&a&23\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\a\\16\end{bmatrix}$ 有穷多解，则 $a=()$.

解析：

$$\text{增广矩阵为}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & a \\ 3 & a & 23 & 16 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-3r_1}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & a \\ 0 & a+3 & 14 & 10 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3-(a+3)r_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & a-2 & a \\ 0 & 0 & 20-a-a^2 & 10-3a-a^2 \end{array}\right]$$

要求有穷多解，需$r(\mathbf{A})=r(\overline{\mathbf{A}})<3\Rightarrow 20-a-a^2=0\Rightarrow a=-5.$

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：容易

题目：1. 若矩阵 X 满足 $\mathbf{AX}+\mathbf{E}=\mathbf{A}^2+\mathbf{X}$ 其中矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 求矩阵 X(　　).

解析：因为 $\mathbf{AX}+\mathbf{E}=\mathbf{A}^2+\mathbf{X}\Rightarrow(\mathbf{A}-\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{A}^2-\mathbf{E},\mathbf{A}-\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，所以 $\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 可逆，故 $\mathbf{X}=(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}\left(\mathbf{A}^2-\mathbf{E}\right)=(\mathbf{A}-\mathbf{E})^{-1}(\mathbf{A}-\mathbf{E})(\mathbf{A}+\mathbf{E})=\mathbf{A}+\mathbf{E}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：中等

题目： 2. 设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&0&1\\1&1&0\\0&1&4\end{pmatrix}$ 且有 $\mathbf{AX}=2\mathbf{X}+\mathbf{A}$ ，求矩阵 $\mathbf{X}(\quad)$.

解析： 由 $\mathbf{AX}=2\mathbf{X}+\mathbf{A}\Rightarrow(\mathbf{A}-2\mathbf{E})\mathbf{X}=\mathbf{A}\Rightarrow\mathbf{X}=(\mathbf{A}-2\mathbf{E})^{-1}\mathbf{A}$，又 $\mathbf{A}-2\mathbf{E}=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$，可知 $(\mathbf{A}-2\mathbf{E}\mid\mathbf{A})=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\1&-1&0&1&1&0\\0&1&2&0&1&4\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1,\,r_3-r_1+r_2}$ $\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&3&0&1\\0&-1&-1&-2&1&-1\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3,\,r_1-r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&5&-2&-2\\0&-1&0&-4&3&2\\0&0&1&-2&2&3\end{array}\right)$

故 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}5&-2&-2\\4&-3&-2\\-2&2&3\end{pmatrix}$.

题型： 计算题

主题： 线性方程组

难度： 中等

题目： 3. 若矩阵 $\mathbf{X}$ 满足 $\mathbf{AX}+\mathbf{B}=\mathbf{X}$ ，其中 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&1&1\\-1&0&-1\end{pmatrix}$， $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&-1\\2&0\\5&-3\end{pmatrix}$ ，求矩阵 $\mathbf{X}(\quad)$.

解析： 由 $\mathbf{AX}+\mathbf{B}=\mathbf{X}\Rightarrow(\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{X}=\mathbf{B}$，因为 $|\mathbf{E}-\mathbf{A}|\neq 0$，所以 $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆，从而 $\mathbf{X}=(\mathbf{E}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. 由 $(\mathbf{E}-\mathbf{A}\mid\mathbf{B})=\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&-1&0&1&-1\\1&0&-1&2&0\\1&0&-2&5&-3\end{array}\right)\xrightarrow{r_2-r_1,\,r_3-r_2}$ $\left(\begin{array}{ccc|cc}1&-1&0&1&-1\\0&1&-1&1&1\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{r_2+r_3,\,r_1+r_2+r_3}\left(\begin{array}{ccc|cc}1&0&0&3&-1\\0&1&0&2&0\\0&0&1&1&-1\end{array}\right)$ ，得 $\mathbf{X}=\begin{pmatrix}3&-1\\2&0\\1&-1\end{pmatrix}$.

题型： 计算题
主题： 线性方程组
难度： 中等

题目： 4. 确定 λ 的值，使得矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$ 的秩最小 ( ).

解析： 对 $\mathbf{A}^T$ 做行变换，得 $\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\\lambda&-1&10\\-1&\lambda&-6\\2&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2-10r_1,r_3+6r_1,r_4-r_1}$
$\begin{pmatrix}1&2&1\\\lambda-10&-21&10\\5&\lambda+12&0\\1&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+7r_4,r_3-5r_4}\begin{pmatrix}1&2&1\\\lambda-3&0&0\\0&\lambda-3&0\\1&3&0\end{pmatrix}$，故当 $\lambda=3$ 时，矩阵秩最小，且 $r(\mathbf{A})=2$.

题型： 计算题
主题： 线性方程组
难度： 困难

题目： 5. 若矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1&2\\3&\lambda&-1&2\\5&3&\mu&6\end{pmatrix}$，且 $r(\mathbf{A})=2$，求 λ 与 μ 的值 ( ).

解析： 对 $\mathbf{A}^T$ 做行变换：$\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}1&3&5\\-1&\lambda&3\\1&-1&\mu\\2&2&6\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+r_1,r_3-r_1,r_4-2r_1}\begin{pmatrix}1&3&5\\0&\lambda+3&8\\0&-4&\mu-5\\0&-4&-4\end{pmatrix}\xrightarrow{r_4-r_3}$
$\begin{pmatrix}1&3&5\\0&\lambda+3&8\\0&-4&\mu-5\\0&0&1-\mu\end{pmatrix}\xrightarrow{r_3+r_4}\begin{pmatrix}1&3&5\\0&\lambda+3&8\\0&-4&-4\\0&0&1-\mu\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+2r_3}\begin{pmatrix}1&3&5\\0&\lambda-5&0\\0&-4&-4\\0&0&1-\mu\end{pmatrix}$，为了秩为 2，需有 $\lambda=5,\mu=1$.

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：6. 求矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&\lambda&-1&2\\2&-1&\lambda&5\\1&10&-6&1\end{pmatrix}$ 的秩，其中 λ 为参数 (　　).

解析： $\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}1&2&1\\\lambda&-1&10\\-1&\lambda&-6\\2&5&1\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2-10r_1\\r_3+6r_1}}\begin{pmatrix}1&2&1\\\lambda-10&-21&0\\5&\lambda+12&0\\1&3&0\end{pmatrix}\xrightarrow[r_4-r_1]{\substack{r_2+7r_4\\r_3-5r_4}}$
$\begin{pmatrix}1&2&1\\\lambda-3&0&0\\0&\lambda-3&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ 所以当 $\lambda=3$ 时，$r(\mathbf{A})=2$；当 $\lambda\neq 3$ 时，$r(\mathbf{A})=3$
.

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：7. 讨论矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{pmatrix}$ 的秩 (　　).

解析： $\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}x&1&1\\1&x&1\\1&1&x\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-r_2]{\substack{r_1+r_2\\r_1+r_3}}\begin{pmatrix}x+2&x+2&x+2\\1&x&1\\0&1-x&x-1\end{pmatrix}$，所以当 $x=1$ 时，$r(\mathbf{A})=1$：当 $x=-2$ 时，$r(\mathbf{A})=2$；当 $x\neq 1$ 且 $x\neq -2$ 时；$r(\mathbf{A})=3$.

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：中等

题目：8. 设线性方程组为 $\begin{cases} x_1-3x_2-x_3=0 \\ x_1-4x_2+ax_3=b \\ 2x_1-x_2+3x_3=5 \end{cases}$ ，问：$a\ b$ 取何值时，方程组无解、有惟一解、有无穷多解 ().

解析： $\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & a & b \\ 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a+2 & b+1 \end{pmatrix}$ 当 $a\neq-2$ 时，方程组有惟一解；当 $a=-2,b\neq-1$ 时，方程组无解；当 $a=-2,b=-1$ 时，$r(A)=r(\bar{A})=2<3$ ，方程组有无穷多组解.

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：中等

题目：9. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_3=2 \\ x_1+2x_2-x_3=0 \\ 2x_1+x_2-ax_3=b \end{cases}$ 讨论当 a,b 为何值时，方程组无解，有惟一解，有无穷多解.

解析：$\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -a-2 & b-4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -a-1 & b-3 \end{pmatrix}$ ，所以当 $a=-1$ 且 $b\neq3$ 时，方程组无解；当 $a\neq-1$ 时，方程组有唯一解：当 $a=-1$ 且 $b=3$ 时，方程组有无穷多解.

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：中等

题目：10. 设线性方程组 $\begin{cases} x_1+2x_3=-1 \\ -x_1+x_2-3x_3=2 \\ 2x_1-x_2+5x_3=0 \end{cases}$ ，求其系数矩阵和增广矩阵的秩，并判断其解的情况 ().

解析：因为 $\overline{\mathbf{A}}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ，所以 $r(\mathbf{A}) = 2, r(\overline{\mathbf{A}}) = 3$. 又因为 $r(\mathbf{A}) < r(\overline{\mathbf{A}})$ ，所以方程组无解.

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：11. 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 0 \\ 3x_1 - 8x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ ，问 λ 取何值时方程组有非零解
解析：因为系数矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 3 \\ 3 & -8 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & \lambda - 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda - 5 \end{pmatrix},$$

所以当 $\lambda = 5$ 时, 方程组有非零解.

题型：计算题
主题：线性方程组
难度：中等
题目：12. 当 λ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$ 有非零解 ( ).
解析：因为系数矩阵 $\overline{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & \lambda \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -5 & \lambda - 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda + 2 \end{pmatrix}$
所以当 $\lambda = -2$ 时，线性方程组有非零解.

题型：选择题
主题：向量

难度：容易

题目：1. 已知向量 $\alpha=(3,5,7,9),\beta=(-1,5,2,8)$ ，如果 $\alpha-\xi=\beta$ ，$\xi=()$. A. $(4,0,5,1)$ B. $(4,5,0,-1)$ C. $(0,-4,-5,9)$ D. $(4,0,5,-9)$

解析：因 $\alpha-\xi=\beta$, 所以 $\xi=\alpha-\beta=(3,5,7,9)-(-1,5,2,8)=(4,0,5,1)$.

题型：选择题

主题：向量

难度：容易

题目：2. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,0,2),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4)$，则 $5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4=()$. A. $(12,12,11)$ B. $(11,11,12)$ C. $(12,11,12)$ D. $(11,12,12)$

解析：$5\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4=5(1,2,3)+2(3,2,1)-(-2,0,2)-(1,2,4)=(12,12,11)$

题型：选择题

主题：向量

难度：中等

题目：3. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,1,2),\boldsymbol{\beta}=(-1,2,3,-2)$，则 $3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=()$. A. $(2,11,15,-2)$ B. $(-2,11,15,10)$ C. $(2,15,11,10)$ D. $(2,11,-15,10)$

解析：$3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=3(2,1,1,2)+4(-1,2,3,-2)=(2,11,15,-2)$

题型：选择题

主题：向量

难度：容易

题目：4. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(3,2,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(-2,0,2),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,4)$，则 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4=()$. A. $(5,2,-2)$ B. $(11,11,12)$ C. $(12,11,12)$ D. $(11,12,12)$

解析：$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_4=(1,2,3)+(3,2,1)-(-2,0,2)-(1,2,4)=(5,2,-2)$

题型：选择题

主题：向量

难度：容易

题目：5. 已知向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,5,7,4),\boldsymbol{\beta}=(-1,5,2,0)$，如果 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\beta}$，则 $\xi=()$. A. $(-4,0,-5,-4)$ B. $(-4,-5,0,-9)$ C. $(0,-4,-5,-9)$ D. $(-4,0,-5,9)$

解析：因 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\beta}$，所以 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\alpha}=(-1,5,2,0)-(3,5,7,4)=(-4,0,-5,-4)$

题型：选择题

主题：向量

难度：中等

题目：6. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,-2),\boldsymbol{\beta}=(-4,2,3),\boldsymbol{\gamma}=(-8,8,5)$，若存在数 k 使得 $2\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}=\gamma$，则 $k=()$. A. 3 B. 2 C. -1 D. 0

解析：将 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma$ 代入 $2\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}=\gamma$，得 $2(2,1,-2)+k(-4,2,3)=(-8,8,5)$，由此得 $4-4k=-8,2+2k=8,-4+3k=5$，它有唯一解 $k=3$

题型：选择题

主题：向量

难度：中等

题目：7. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-1,0,1,-2),\boldsymbol{\beta}=(2,0,-2,4)$，若存在向量 $\boldsymbol{\gamma}$ 使得 $3\beta+\gamma=4\alpha$，则 $\gamma=()$. A. $(-10,0,10,-20)$ B. $(10,0,-10,20)$ C. $(-10,0,-10,20)$ D. $(10,0,-10,-20)$

解析：由于 $3\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma}=4\boldsymbol{\alpha}$，则 $\boldsymbol{\gamma}=4\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}=4(-1,0,1,-2)-3(2,0,-2,4)=(-10,0,10,-20)$

题型：选择题

主题：向量

难度：困难

题目：8. 设 $3\boldsymbol{\alpha}+4\boldsymbol{\beta}=(2,1,1,2),2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}=(-1,2,3,1)$，则 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 分别为（）. A. $(10,-5,-9,2),(-7,4,7,-1)$ B. $(10,5,-9,2),(7,-4,7,-1)$ C. $(-10,5,9,-2),(-7,4,7,1)$ D. $(10,-5,9,-2),(7,-4,7,1)$

解析：设 $\boldsymbol{\alpha}=(a_1,a_2,a_3,a_4),\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,b_3,b_4)$，由方程组解得 $a_1=10,a_2=-5,a_3=-9,a_4=2,b_1=-7,b_2=4,b_3=7,b_4=-1$，即 $\boldsymbol{\alpha}=(10,-5,-9,2),\boldsymbol{\beta}=$

$(-7,4,7,-1)$

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：9. 将向量 $\boldsymbol{\alpha}=(-2,3,2)$ 表成向量 $\varepsilon_1=(-1,0,0),\varepsilon_2=(0,2,0),\varepsilon_3=(0,0,3)$ 的线性组合，则 $\boldsymbol{\alpha}=()$. A. $2\varepsilon_1+\frac{3}{2}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3$ B. $-2\varepsilon_1+\frac{3}{2}\varepsilon_2-\frac{2}{3}\varepsilon_3$ C. $2\varepsilon_1-\frac{3}{2}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3$ D. $2\varepsilon_2-\frac{2}{3}\varepsilon_3$
解析：设 $\boldsymbol{\alpha}=k_1\varepsilon_1+k_2\varepsilon_2+k_3\varepsilon_3$，比较各分量得 $k_1=2,k_2=\frac{3}{2},k_3=\frac{2}{3}$，所以 $\alpha=2\varepsilon_1+\frac{3}{2}\varepsilon_2+\frac{2}{3}\varepsilon_3$

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：10. 将向量 $\boldsymbol{\beta}=(-5,3,-1)$ 表成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$ 的线性组合为（）. A. $-5\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $5\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3$ C. $-5\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$ D. $5\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3$
解析：设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，比较各分量得 $k_1=-5,k_2=3,k_3=4$，所以 $\beta=-5\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3$

题型：选择题
主题：向量
难度：困难
题目：11. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下面的向量组中，线性无关的是（）. A. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,3\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$
解析：对于选项 A，行列式 $\begin{vmatrix}1&0&1\\2&3&0\\0&3&2\end{vmatrix}=12\neq 0$，故向量组线性无关；其他选项行列式为 0，线性相关

题型：选择题
主题：向量
难度：困难
题目：12. 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，则下面的向量组中，线性无关的是 () . A. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_1-3\boldsymbol{\alpha}_2+10\boldsymbol{\alpha}_3, 3\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$ C. $2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3, 2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_2$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$
解析：对于选项 A，行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 5 \\ 1 & 10 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$，故向量组线性无关；其他选项行列式为 0，线性相关

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：13. 下面的向量组中线性相关的是（）. A. $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1), \boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,3), \boldsymbol{\alpha}_3=(3,3,7)$ B. $\boldsymbol{\beta}_1=(1,2,3), \boldsymbol{\beta}_2=(2,3,1), \boldsymbol{\beta}_3=(3,1,2)$ C. $\varepsilon_1=(1,2,0), \varepsilon_2=(0,3,3), \varepsilon_3=(1,0,2)$ D. $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1), \boldsymbol{\beta}=(2,-3,10), \gamma=(3,5,-5)$
解析：对于选项 A，行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$，故向量组线性相关；其他选项行列式不为 0，线性无关

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：14. 下面的向量组中线性无关的是（）. A. $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,0), \boldsymbol{\beta}=(0,2,3), \gamma=(1,0,3)$ B. $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0), \boldsymbol{\beta}=(0,1,1), \gamma=(1,2,1)$ C. $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,0), \boldsymbol{\beta}=(0,1,1), \gamma=(-1,0,1)$ D. $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,1), \boldsymbol{\beta}=(2,-3,22), \gamma=(3,5,-5)$

解析：对于选项 A，行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$，故向量组线性无关；其他选项行列式为 0，线性相关

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目:15. 把向量 $\boldsymbol{\beta} = (3,2,1)$ 表成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,1), \boldsymbol{\alpha}_2 = (-1,1,0), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,-1,0)$ 的线性组合，则有 $\boldsymbol{\beta} = ()$. A. $\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3$ C. $\mathbf{a}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}$ D. $\mathbf{a}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3$
解析：设 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，解得 $k_1 = 1, k_2 = -2, k_3 = -3$，所以 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3$

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目:16. 将向量 $\boldsymbol{\beta} = (8,3,-2)$ 表成向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,2,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (2,0,-1), \boldsymbol{\alpha}_3 = (0,1,-1)$ 的线性组合，则 $\boldsymbol{\beta} = ()$. A. $2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$ C. $-2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3$
解析：设 $\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3$，解得 $k_1 = 2, k_2 = 3, k_3 = -1$，所以 $\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：17. 将向量 $\boldsymbol{\alpha} = (4,3,5)$ 表成向量组 $\varepsilon_1 = (1,1,0), \boldsymbol{\varepsilon}_2 = (0,1,1), \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (1,0,1)$ 的线性组合，则有 $\boldsymbol{\alpha} = ()$. A. $\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$ B. $-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$ C. $\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3$ D. $-\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 - 3\varepsilon_3$
解析：设 $\boldsymbol{\alpha} = k_1\varepsilon_1 + k_2\varepsilon_2 + k_3\varepsilon_3$，解得 $k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 3$，所以 $\boldsymbol{\alpha} = \varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 + 3\varepsilon_3$

题型：选择题
主题：向量
难度：困难
题目：18. 将向量 $\boldsymbol{\beta}=(1,1,-1,-1)$ 表成向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,1,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,1,3,-1)$ 的线性组合，则有 $\boldsymbol{\beta}=$ (). A. β 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出 B. $3\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{a}_2-5\boldsymbol{\alpha}_3-9\boldsymbol{\alpha}_4$ C. $-\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2-4\boldsymbol{\alpha}_3+9\boldsymbol{\alpha}_4$ D. $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{a}_2-3\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_4$
解析：设 $\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+k_4\boldsymbol{\alpha}_4$，该线性方程组无解，所以 β 不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：19. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,4,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,6,1)$ 的秩为 (). A. 2 B. 1 C. 3 D. 4
解析：通过初等变换可知秩为 2

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：20. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,3,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,5,2)$ 的秩为（）. A. 2 B. 1 C. 3 D. 4
解析：通过初等变换可知秩为 2

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目:21. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,-1,-1),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-1,-1,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(-1,-1,-1,1)$ 的秩为（）. A. 4 B. 1 C. 3 D. 2
解析：通过初等变换可知秩为 4

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：22. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,-1,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,2,0,3),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,0,0,0),\boldsymbol{\alpha}_4=(0,1,0,0)$ 的秩为（）. A. 4 B. 1 C. 2 D. 3
解析：通过初等变换可知秩为 4

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：23. 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-2,3,-1),\boldsymbol{\beta}_2=(2,-1,1,0),\boldsymbol{\beta}_3=(1,-5,8,-3),\boldsymbol{\beta}_4=(3,-6,9,-3)$ 的秩为（）. A. 2 B. 1 C. 3 D. 4
解析：通过初等变换可知秩为 2

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：24. 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1=(1,-1,1,-1),\boldsymbol{\beta}_2=(1,2,3,1),\boldsymbol{\beta}_3=(3,3,7,1),\boldsymbol{\beta}_4=(4,5,10,2)$ 的秩为（）. A. 2 B. 1 C. 3 D. 7
解析：通过初等变换可知秩为 2

题型：选择题
主题：向量
难度：中等
题目：25. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1$ $\boldsymbol{\alpha}_2$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解，则下列不一定是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解的是（）. A. $\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2^T$ B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$ C. $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2$ D. $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2$
解析：$\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2^T$ 不一定是 $\mathbf{Ax}=\mathbf{0}$ 的解

题型：选择题

主题：向量

难度：中等

题目：26. 设 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{AX} = \mathbf{b}$ 的两个解向量，则下列向量中仍为该方程组解的是（）. A. $\frac{1}{5}(3\boldsymbol{\beta}_1 + 2\boldsymbol{\beta}_2)$ B. $\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ C. $\frac{1}{2}\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2$ D. $\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2$

解析：$\mathbf{A}(\frac{1}{5}(3\boldsymbol{\beta}_1 + 2\boldsymbol{\beta}_2)) = \mathbf{b}$，其他选项不满足

题型：选择题

主题：向量

难度：中等

题目：27. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, 1, -1)^T, \boldsymbol{\alpha}_2 = (1, 2, 0)^T$ 是齐次方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系，那么下列向量中 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解向量是（）. A. $(2, 1, -3)^T$ B. $(1, -1, 3)^T$ C. $(2, 2, -5)^T$ D. $(2, -2, 6)^T$

解析：只有 $(2, 1, -3)$ 可以表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的线性组合，是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解

题型：选择题

主题：向量

难度：困难

题目：28. 设 $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ 是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系，则 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的基础解系还可以是（）. A. $\eta_1+\eta_2, \eta_2-\eta_3, \eta_3+\eta_4, \eta_4+\eta_1$ B. $\eta_1+\eta_2, \eta_2+\eta_3+\eta_4, \eta_1-\eta_2+\eta_3$ C. $\eta_1+\eta_2, \eta_2+\eta_3, \eta_3+\eta_4, \eta_4+\eta_1$ D. $\eta_1-\eta_2, \eta_2+\eta_3, \eta_3-\eta_4, \eta_4+\eta_1$

解析：选项 A 的行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$，线性无关；其他选项不满足条件

题型：判断题

主题：向量

难度：容易

题目：1. 设 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 分别为两个 n 维向量，若 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的各分量对应相等，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 相等 (　　).

解析：由向量相等概念可知该结论正确.

题型：判断题
主题：向量
难度：容易
题目：2. 5 维向量中只有一个分量为 0 的向量称为零向量 () .
解析：所有分量都为 0 的向量才称为零向量，所以结论错误.

题型：判断题
主题：向量
难度：容易
题目：3. 两个向量一定可以做加法运算 () .
解析：必须两个维数相等的向量才能做加法运算，所以结论错误.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：4. 若向量 $\boldsymbol{\alpha} = (3,2,1), \boldsymbol{\beta} = (-3,-2,0)$ ，则 $2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (3,2,1)(\quad)$.
解析：由向量的运算法则可知 $2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = 2(3,2,1) + (-3,-2,0) = (3,2,2)$，所以结论错误.

题型：判断题
主题：向量
难度：容易
题目：5. 所有分量为 0 的向量称为零向量 () .
解析：所有分量都为 0 的向量称为零向量，结论正确.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等

题目：6. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,-2,1,0),\boldsymbol{\beta}=(1,-1,-2,3)$ ，则 $\boldsymbol{\alpha}-2\boldsymbol{\beta}=(0,0,5,-6)$ （）.

解析：根据向量的运算法则可知该结论正确.

题型：判断题

主题：向量

难度：中等

题目：7. 已知向量 $\varepsilon_1=(1,0,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0,0),\varepsilon_3=(0,0,1,0),\varepsilon_4=(0,0,0,1)$ ，则 $2\varepsilon_1-\varepsilon_2+5\varepsilon_3+\varepsilon_4=(2,0,5,1)$ （）.

解析：线性运算得 $=2(1,0,0,0)-(0,1,0,0)+5(0,0,1,0)+(0,0,0,1)=(2,-1,5,1)$，结论错误.

题型：判断题

主题：向量

难度：困难

题目：8. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,5,1,3),\boldsymbol{\alpha}_2=(10,1,5,10),\boldsymbol{\alpha}_3=(4,1,-1,1)$ ，若 $3(\boldsymbol{\alpha}_1-\xi)+2(\boldsymbol{\alpha}_2+\xi)=5(\boldsymbol{\alpha}_3+\xi)$，则 $\xi=(1,2,3,4)$ （）.

解析：根据向量运算和方程变换得出 $\xi=(1,2,3,4)$，结论正确.

题型：判断题

主题：向量

难度：中等

题目:9. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3,4),\boldsymbol{\beta}=(2,-1,5,1)$,若 $\gamma-2\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\beta}$,则 $\gamma=(1,5,3,1)$ （）.

解析：解得 $\gamma=2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=2(1,2,3,4)+(2,-1,5,1)=(4,3,11,9)$，结论错误.

题型：判断题

主题：向量

难度：容易

题目：10. 只含有零向量的向量组线性无关（）.

解析： 含有零向量的向量组必线性相关，结论错误.

题型： 判断题
主题： 向量
难度： 容易
题目： 11. 向量组只含一个向量，则该组线性相关当且仅当该向量为零向量 () .
解析： 结论正确，由线性相关定义得知.

题型： 判断题
主题： 向量
难度： 容易
题目： 12. 向量组只含一个向量，则该组线性无关当且仅当该向量不为零 () .
解析： 结论正确，由线性相关定义得知.

题型： 判断题
主题： 向量
难度： 中等
题目： 13. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关，$\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,...,\boldsymbol{\alpha}_m$ 唯一线性表示 () .
解析： 结论错误，线性相关意味着可表示，但表示法不唯一.

题型： 判断题
主题： 向量
难度： 容易
题目： 14. 含有零向量的向量组 $0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 一定线性无关 () .
解析： 含零向量的向量组必线性相关，结论错误.

题型： 判断题

主题：向量

难度：容易

题目：15. 含有零向量的向量组 $0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 一定线性相关（）.

解析：含零向量的向量组必线性相关，结论正确.

题型：判断题

主题：向量

难度：容易

题目：16. 设 $\boldsymbol{\beta} = (2,3), \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1)$ ，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示（）.

解析：由计算 $\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2$，结论正确.

题型：判断题

主题：向量

难度：中等

题目：17. 设 $\boldsymbol{\beta} = (2,-3), \boldsymbol{\alpha}_1 = (1,0), \boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1)$ ，则 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}$ 线性无关（）.

解析：结论错误，$\boldsymbol{\beta}$ 可由其余两个向量线性表示，故三者线性相关.

题型：判断题

主题：向量

难度：中等

题目：18. 向量组中只要有非零向量，就一定存在极大线性无关组（）.

解析：结论正确，非零向量可构成线性无关组.

题型：判断题

主题：向量

难度：中等

题目：19. 一个向量组的极大线性无关组是唯一的（）.

解析：结论错误，极大线性无关组不一定唯一.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：20. 一个向量组的极大线性无关组不一定是唯一的（）.
解析：结论正确，极大线性无关组的个数可能不唯一.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：21. 向量组的任意一个极大线性无关组都与向量组本身等价（）.
解析：结论正确，由等价定义知任一极大线性无关组等价于原组.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：22. 向量组的任意一个极大线性无关组不一定与向量组本身等价（）.
解析：结论错误，极大线性无关组都与原组等价.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：23. 向量组的任意两个极大线性无关组不一定等价（）.
解析：结论错误，它们都等价于原组，故互相等价.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：24. 向量组的任意两个极大线性无关组等价（）.
解析：结论正确，它们都与原组等价，故彼此等价.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：25. 向量组的任意两个极大线性无关组都包含相同个数的向量（）.
解析：结论正确，等价向量组包含的向量个数相同.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：26. 向量组的任意两个极大线性无关组包含的向量个数不一定相同（）
.
解析：结论错误，它们包含相同个数的向量.

题型：判断题
主题：向量
难度：容易
题目：27. 等价的向量组可以有不同的秩 (　　).
解析：等价的向量组有相同的秩，因此该说法错误.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：28. 设 $\mathbf{A}$ 是 n 维向量组，若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 都是 $\mathbf{A}$ 的极大线性无关组，则 $r = s($　　$)$.
解析：向量组的任意两个极大线性无关组都包含相同个数的向量，因此该说法正确.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：29. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 为 n 维向量组 $\mathbf{A}$ 的一个极大线性无关组，则 $\mathbf{A}$

中任意向量 α 都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表示，但表示法不唯一 (　　).
解析：由极大线性无关组定义知，该表示法是唯一的，因此该说法错误.

题型：判断题
主题：向量
难度：困难
题目：30. 设齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 是非齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的导出组，η_1, η_2 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解，则 $\eta_1 + \eta_2$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解 (　　).
解析：由线性方程组解的结构可知，该说法错误.

题型：判断题
主题：向量
难度：容易
题目：31. 若 η_1, η_2 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，则 $10\eta_1 + 100\eta_2$ 也是它的解 (　　).
解析：由于齐次线性方程组的解构成向量空间，任意线性组合仍为解，因此该说法正确.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：32. 若 $\mathbf{x}_1$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解，$\mathbf{x}_2$ 是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的解，则 $k\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$（$k$ 为任意常数）是 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 的解 (　　).
解析：代入可得 $\mathbf{A}(k\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = k\mathbf{b} + \mathbf{0} = k\mathbf{b}$，因此只有当 $k = 1$ 时该说法才成立，所以该说法错误.

题型：判断题
主题：向量
难度：容易
题目：33. 如果 γ 是齐次线性方程组 $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ 的一个解，那么 $k\gamma$（k 为实数）也是方程组的解 (　　).
解析：齐次线性方程组的解构成向量空间，实数倍仍为解，因此该说法正确.

题型：判断题
主题：向量
难度：中等
题目：34. 如果 γ_1, γ_2 是非齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的两个解，则 $\gamma_1 - \gamma_2$ 是其导出组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的解 (　　).
解析：非齐次线性方程组的任意两个解之差为对应齐次方程组的解，因此该说法正确.

题型：判断题
主题：向量
难度：容易
题目：35. 如果 γ_1, γ_2 是齐次线性方程组 $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的两个解，那么 $\gamma_1 + \gamma_2$ 也是方程组的解 (　　).
解析：齐次线性方程组的解构成向量空间，和仍为解，因此该说法正确.

题型：填空题
主题：向量
难度：容易
题目：1. 设有两个向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,0), \boldsymbol{\beta} = (0,1,0)$ ，则 $2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = ()$.
解析：由向量的运算法则可知 $2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = (2,1,0)$.

题型：填空题
主题：向量
难度：容易
题目：2. 设有两个向量 $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,1), \boldsymbol{\beta} = (0,1,0)$ ，则 $\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta} = ()$.
解析：由向量的运算法则可知 $\boldsymbol{\alpha} - 2\boldsymbol{\beta} = (1,-2,1)$.

题型：填空题
主题：向量

难度：中等

题目：3. 设向量 $\boldsymbol{\beta}=(-1,4),\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1)$ ，则 β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示为 (　　).

解析：设 $\boldsymbol{\beta}=m\boldsymbol{\alpha_1}+n\boldsymbol{\alpha_2}$ ，则有 $\boldsymbol{\beta}=(m,m)+(0,n)=(m,m+n)$ ，对照参数可知 $m=-1,n=5$ ，故 $\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}_1+5\boldsymbol{\alpha}_2$.

题型：填空题

主题：向量

难度：中等

题目：4. 设向量 $\boldsymbol{\beta}=(-3,2,1),\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$ ，则 β 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示为 ().

解析：设 $\boldsymbol{\beta}=m\boldsymbol{\alpha}_1+n\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ ，则有 $\boldsymbol{\beta}=m(1,0,0)+n(0,1,0)+l(0,0,1)=(m,n,l)$ ，对照参数可知 $m=-3,n=2,l=1$ ，故 $\beta=-3\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3$.

题型：填空题

主题：向量

难度：中等

题目：5. 设向量 $\boldsymbol{\beta}=(3,2,1),\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,0,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,0)$ ，则 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示为 () .

解析：设 $\boldsymbol{\beta}=m\boldsymbol{\alpha}_1+n\boldsymbol{\alpha}_2+l\boldsymbol{\alpha}_3$ ，则有 $\boldsymbol{\beta}=m(1,0,0)+n(0,0,1)+l(0,1,0)=(m,l,n)$ ，对照参数可知 $m=3,n=1,l=2$ ，故 $\beta=3\alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3$.

题型：填空题

主题：向量

难度：容易

题目：6. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$ 的秩为 (　　).

解析：向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,0,1)$ 的秩为 3.

题型：填空题

主题：向量

难度：中等

题目：7. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 都是向量组 $\mathbf{A}$ 的极大线性无关组，则 r 与 s 的关系为 (　　).
解析：向量组 $\mathbf{A}$ 的任意两个极大线性无关组包含的向量的个数相同.

题型：填空题
主题：向量
难度：中等
题目：8. 向量组 $\mathbf{A}$ 的秩为 r ，则向量组中任意 $r+1$ 个向量构成的向量组都 (　　).
解析：向量组 $\mathbf{A}$ 的秩为 r ，则向量组中任意 $r+1$ 个向量构成的向量组都是线性相关的.

题型：填空题
主题：向量
难度：中等
题目：9. 若向量组 $\mathbf{A}$ 中有 r 个向量使得 $\mathbf{A}$ 中每个向量都可由这 r 个向量唯一线性表示，则向量组 $\mathbf{A}$ 的秩为 () .
解析：由题意知这 r 个向量是向量组 $\mathbf{A}$ 的一个极大线性无关组，故二者的秩相同.

题型：填空题
主题：向量
难度：困难
题目：10. 向量组 $\boldsymbol{\alpha} = (1,0,-1), \boldsymbol{\beta} = (-2,2,0), \gamma = (3,-5,2)$ 的秩为 (　　).
解析：以 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \gamma$ 为行向量作矩阵,对该矩阵进行初等行变换,即 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 可知该矩阵的秩为 2 ，故该向量组的秩也为 2 .

题型：填空题
主题：向量
难度：困难
题目：11. 向量组 $\boldsymbol{\alpha}=(1,1,3,1),\boldsymbol{\beta}=(3,-1,2,4),\boldsymbol{\gamma}=(2,2,7,-1)$ 的秩为 ( ).

解析：以 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\gamma$ 为行向量作矩阵,对该矩阵进行初等行变换,即 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 7 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ ，可知该矩阵的秩为 3 ，故该向量组的秩也为 3 .

题型：填空题
主题：向量
难度：中等
题目：12. 线性方程组 $x_1+x_2+x_3=0$ 的一个基础解系是（）.

解析：由基础解系的概念可得 $x_1=-x_2-x_3$,所以可得 $\zeta_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\zeta_2=\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 为一个基础解系.

题型：填空题
主题：向量
难度：中等
题目：13. 方程组 $\begin{cases} x_1+x_2=0 \\ x_3-x_4=0 \end{cases}$ 的基础解系是（）.

解析：因为 $\begin{cases} x_1=-x_2 \\ x_3=x_4 \end{cases}$ 可得基础解系 $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 及 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

题型： 填空题
主题： 向量
难度： 困难
题目： 14. 已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 \\ 1 & 2 & a^2-2a-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ a-2 \end{pmatrix}$ 无解，
则 $a = ()$.
解析: 化增广矩阵为阶梯型 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & a+2 & 3 \\ 1 & 2 & a^2-2a-2 & a-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & a & 1 \\ 0 & 0 & (a-3)(a+1) & a-3 \end{pmatrix}$
，可见 $a=-1$ 时方程组无解，$a=3$ 时方程组有无穷多解.

题型： 计算题
主题： 向量
难度： 容易
题目： 1. 设向量 $\boldsymbol{\alpha}=(2,1,0),\boldsymbol{\beta}=(0,3,1),\gamma=(0,1,0)$，则 $2\boldsymbol{\alpha}+3\beta-\gamma=()$.
解析： 由向量的运算法则可知 $2\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}-\gamma=(4,10,3)$.

题型： 计算题
主题： 向量
难度： 中等
题目: 2. 将向量 $\boldsymbol{\beta}=(3,5,-6)$ 表示为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1),\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-1)$ 的线性组合为 (   ).
解析： 设 $\boldsymbol{\beta}=m\boldsymbol{\alpha_1}+\boldsymbol{n}\boldsymbol{\alpha_2}+\boldsymbol{l}\boldsymbol{\alpha_3}$ ，代入 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,1),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,1)\boldsymbol{\alpha}_3=(0,-1,-1)$ ，并比较参数得 $m=-11,n=14,l=9$ ，故 $\beta=-11\alpha_1+14\alpha_2+9\alpha_3$.

题型： 计算题
主题： 向量
难度： 中等

题目： 3. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)$ 的秩 ○ .

解析： 以向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为行向量作矩阵 $\mathbf{A}$,则 $\mathbf{A}$ 得秩就是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩，现在对 $\mathbf{A}$ 的行或列进行初等变换化成：$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&4&2\\1&1&0\\2&3&1\\3&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\times\frac{1}{2}}$ $\begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&0\\2&3&1\\3&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{r_3-2r_1\\r_4-3r_1}]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&-1&-1\\0&-1&-1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ ，进而可知矩阵的秩为 2 ，所以向量组的秩也为 2 .

题型： 计算题

主题： 向量

难度： 中等

题目： 4. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-2,3,-1),\boldsymbol{\alpha}_2=(2,-1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,-5,8,-3)$ 的一个极大线性无关组 ○ .

解析： 以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为列向量作矩阵 $\mathbf{A}$ ，作初等行变换，将其化为 $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&-1&-5\\3&1&8\\-1&0&-3\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&-3\\0&-5&5\\0&2&-2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为 $2,\boldsymbol{\alpha_1},\boldsymbol{\alpha_2}$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组.

题型： 计算题

主题： 向量

难度： 困难

题目： 5. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(3,0,1,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,4,7,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(1,10,17,4),\boldsymbol{\alpha}_4=(4,1,3,3)$ 的一个极大线性无关组 ○ .

解析： 对矩阵 $\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{a}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]$ 作初等行变换，将其化为行最简形矩阵，有

$$\mathbf{A}=[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4]=\begin{bmatrix}3&1&1&4\\0&4&10&1\\1&7&17&3\\2&2&4&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\leftrightarrow r_1}\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\3&1&1&4\\2&2&4&3\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3-3r_1,r_4-2r_1}$$

$$\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&4&10&1\\0&-20&-50&-5\\0&-12&-30&-3\end{bmatrix}\xrightarrow{\frac{1}{4}r_2,-\frac{1}{5}r_3,-\frac{1}{3}r_4}\begin{bmatrix}1&7&17&3\\0&1&\frac{5}{2}&\frac{1}{4}\\0&4&10&1\\0&4&10&1\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1-7r_2,r_3-4r_2,r_4-4r_2}$$

$\begin{bmatrix}1&0&-\frac{1}{2}&\frac{5}{4}\\0&1&\frac{5}{2}&\frac{1}{4}\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{B}$. 设 $\mathbf{B}=[\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4]$ ，则 $\mathbf{B}$ 的秩为 $2,\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关,故 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 的极大无关组,所以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

题型：计算题
主题：向量
难度：容易
题目：6. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(2,4,2),\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0),\boldsymbol{\alpha}_3=(2,3,1),\boldsymbol{\alpha}_4=(3,5,2)$ 的一个极大线性无关组（）.
解析：以所给向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量作矩阵 $\mathbf{A}$ ，并对该矩阵施行初等行变换，有 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2&1&2&3\\4&1&3&5\\2&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3-r_1]{r_2-2r_1}$

$$\begin{bmatrix}2&1&2&3\\0&-1&-1&-1\\0&-1&-1&-1\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}2&1&2&3\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\rightarrow$$

$\begin{bmatrix}1&0&\frac{1}{2}&1\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\mathbf{B}$, 由于矩阵$\mathbf{A}$ 与$\mathbf{B}$ 的列向量组不仅有相同的秩,

而且有完全相同的线性关系，故 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

题型：计算题
主题：向量
难度：困难
题目：7. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,0,4),\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2),\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14),\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-1,2,0),\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,6)$ 的秩 ().
解析：由向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 为行组成矩阵 A ，其秩即为该向量组的秩，对其进行行初等变换：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 14 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\alpha_5-2\alpha_1]{\substack{\alpha_3-3\alpha_1 \\ \alpha_4-\alpha_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 3 & 5 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

所以秩为 4.

题型：计算题
主题：向量
难度：中等
题目：8. 求齐次线性方程组的通解：$\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 3x-5y-z=0 \\ 3x-7y-8z=0 \end{cases}$ （）.
解析：对系数矩阵行初等变换，得：

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -5 & -1 \\ 3 & -7 & -8 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & -4 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{11}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

通解为 $\begin{cases} x=-\frac{11}{2}z \\ y=-\frac{7}{2}z \\ z=z \end{cases}$ ，令 $z=1$ 得基础解系为 $\left(-\frac{11}{2},-\frac{7}{2},1\right)^T$ ，通解为 $k\left(-\frac{11}{2},-\frac{7}{2},1\right)^T$.

题型：计算题
主题：向量
难度：困难

题目：9. 当 λ 取何值时，方程组 $\begin{cases} 4x+3y+z=\lambda x \\ 3x-4y+7z=\lambda y \\ x+7y-6z=\lambda z \end{cases}$ 有非零解？() .

解析：原方程组等价于齐次线性方程组：

$$\begin{cases} (4-\lambda)x+3y+z=0 \\ 3x+(-4-\lambda)y+7z=0 \\ x+7y+(-6-\lambda)z=0 \end{cases}$$

求系数行列式：

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 1 \\ 3 & -4-\lambda & 7 \\ 1 & 7 & -6-\lambda \end{vmatrix} = \lambda(75-6\lambda-\lambda^2)$$

因此，非零解存在当且仅当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=-3\pm2\sqrt{21}$ 时成立.

题型：计算题
主题：向量
难度：中等

题目：10. 设四元非齐次线性方程组的系数矩阵的秩为 3，已知 $\xi_1=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ 是其解，且 $\xi_2+\xi_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ ，求该方程组的通解 () .

解析：因为 $n=4, r=3$，原方程组的导出组（齐次部分）有 1 个基础解向

量. $\xi_1-\xi_2$ 与 $\xi_1-\xi_3$ 为导出组解，二者之和：

$$\eta=2\xi_1-(\xi_2+\xi_3)=2\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$$

为导出组的解. 通解为：

$$\xi=\xi_1+k\eta=\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix},\quad k\in\mathbb{R}.$$

题型：计算题

主题：向量

难度：容易

题目：11. 问 λ 为何值时，线性方程组 $\begin{cases}x_1+x_3=\lambda\\4x_1+x_2+2x_3=\lambda+2\\6x_1+x_2+4x_3=2\lambda+3\end{cases}$ 有解，并求通解（）.

解析：构造增广矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\lambda\\4&1&2&\lambda+2\\6&1&4&2\lambda+3\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&\lambda\\0&1&-2&-3\lambda+2\\0&0&0&-\lambda+1\end{array}\right)$$

方程有解需增广矩阵秩等于系数矩阵秩，即 $-\lambda+1=0$，得 $\lambda=1$. 代入得：

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&1&1\\0&1&-2&-1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

通解为：

$$\begin{cases}x_1=1-x_3\\x_2=-1+2x_3\\x_3=x_3\end{cases},\text{即}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix},\quad t\in\mathbb{R}.$$

题型：选择题
主题：二次型
难度：容易
题目：1. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&3\\0&2\end{pmatrix}$ 的特征值是 (　　). A. 1 和 2 B. -1 和 2 C. 3 和 -2 D. 3 和 2
解析：因由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-3\\0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda-2)=0$ 可解得 $\lambda=1,2.$

题型：选择题
主题：二次型
难度：容易
题目：2. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&0\\4&3\end{pmatrix}$ 的特征值是 (　　). A. $-1,3$ B. $1,3$ C. $-1,-3$ D. $1,-3$
解析：因由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda+1&0\\-4&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda+1)(\lambda-3)=0$ 可解得 $\lambda=-1,3.$

题型：选择题
主题：二次型
难度：中等
题目：3. 若 $\lambda=\frac{1}{2}$ 是 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 有一个特征值等于 (　　). A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. 2
解析：因为 $\lambda=\frac{1}{2}$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，故由矩阵特征值的性质知 $f(\mathbf{A})=\mathbf{A}^2-2\mathbf{A}+\mathbf{E}$，则 $f(\lambda)=\lambda^2-2\lambda+1=\frac{1}{4}-1+1=\frac{1}{4}.$

题型：选择题
主题：二次型
难度：容易

题目：4. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ 的特征值是（　　）. A. $2,3$ B. $2,-3$ C. $-2,3$ D. $-2,-3$
解析：因由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ 1 & \lambda-1 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)=0$ 可解得 $\lambda=2,3.$

题型：选择题
主题：二次型
难度：中等
题目：5. 矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ 的特征值是（　　）. A. $-2,2$ 和 3 B. $-3,-2$ 和 2 C. $-2,-2$ 和 3 D. $2,2$ 和 3
解析：因由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(\lambda^2-4)(\lambda-3)=0$ 可解得 $\lambda=-2,2$ 和 3.

题型：选择题
主题：二次型
难度：中等
题目：6. 若 $\lambda=2$ 是 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $(2\mathbf{A})^{-1}$ 有一个特征值等于（　　）. A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 4 D. 2
解析：因 $\lambda=2$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，故由特征值的性质知 $(2\mathbf{A})^{-1}=\frac{1}{2}\mathbf{A}^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

题型：选择题
主题：二次型
难度：容易
题目：7. 若 $\lambda=1$ 是 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}$ 有一个特征值等于（　　）. A. 6 B. 2 C. 4 D. 3
解析：因 $\lambda=1$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，故由特征值的性质知 $\mathbf{A}^2+3\mathbf{A}+2\mathbf{E}$ 的一个特征值为 $1^2+3\times1+2=6.$

题型：选择题

主题： 二次型
难度： 困难
题目： 8. 若 $\lambda=-1$ 是 n 阶可逆矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $2\mathbf{A}^2-\mathbf{A}+3\mathbf{E}$ 有一个特征值等于 (　　). A. 6 B. -6 C. 5 D. 3
解析： 因 $\lambda=-1$ 是 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，故由特征值的性质知 $f(\mathbf{A})=2\mathbf{A}^2-\mathbf{A}+3\mathbf{E}$，则 $f(\lambda)=2(-1)^2-(-1)+3=6$.

题型： 选择题
主题： 二次型
难度： 中等
题目： 9. 若 $1,1,2$ 为 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则 $|\mathbf{A}-\mathbf{E}|=($　　$)$. A. 0 B. 1 C. 2 D. 3
解析： 因由特征值的性质知，$\mathbf{A}-\mathbf{E}$ 的特征值为 $0,0,1$，故 $|\mathbf{A}-\mathbf{E}|=0\times0\times1=0$.

题型： 选择题
主题： 二次型
难度： 困难
题目： 10. 若 $1,2,3$ 为 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，$\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵，则 $|2\mathbf{A}+\mathbf{E}|=($　　$)$. A. 105 B. -105 C. 15 D. -15
解析： 因由特征值的性质知，$2\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 的特征值为 $3,5,7$，故 $|2\mathbf{A}+\mathbf{E}|=3\times5\times7=105$.

题型： 选择题
主题： 二次型
难度： 困难
题目： 11. 设 $A=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&x&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ ，已知 A 的特征值为 $2,1,1$ ，则 $x=()$ 成立. A. 3 B. -2 C. 4 D. -1
解析： 由性质知，$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=\operatorname{tr}A$. 因 A 的特征值为 $2,1,1$ ，所以 $2+1+1=-1+x+2$ ，由此解得，$x=3$.

题型：选择题
主题：二次型
难度：困难
题目：12. n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 可逆是 $\mathbf{A}$ 的特征值都不为零的（）. A. 充要条件 B. 充分条件 C. 必要条件 D. 无关条件
解析：设 λ 为 $\mathbf{A}$ 的特征值，则（1）当 $\mathbf{A}$ 可逆（即 $|\mathbf{A}| \neq 0$ ）时必有 $\lambda \neq 0$（否则由 $|0\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(-1)^n|\mathbf{A}|=0$ 有 $|\mathbf{A}|=0$ ，此与 $|\mathbf{A}| \neq 0$ 矛盾）;（2）当 $\lambda \neq 0$ 时 $\mathbf{A}$ 必可逆，即 $|\mathbf{A}| \neq 0$（否则由 $|0\mathbf{E}-\mathbf{A}|=(-1)^n|\mathbf{A}|=0$ 知数 0 也为 $\mathbf{A}$ 的特征值，此与 $\lambda \neq 0$ 矛盾）. 综述（1）、（2）知，应选 " 充要条件 " 的结论.

题型：填空题
主题：二次型
难度：容易
题目：1. 已知三阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,-3$ ，则 $|A^{-1}|=$（）.
解析：因为三阶矩阵 A 的特征值为 $1,2,-3$，所以 $A\,|=-6$，$\mid\ A^{-1}\,\big|=-\frac{1}{6}$

题型：填空题
主题：二次型
难度：容易
题目：2. 已知 3 阶矩阵 A 的特征值为 $1,-2,3$ ，则 $2A$ 的特征值为（）.
解析：由于 A 的特征值为 $1,-2,3$ ，根据性质 kA 的特征值为 k 倍特征值，可得 $2A$ 的特征值为 $2,-4,6$.

题型：填空题
主题：二次型
难度：中等
题目：3. 若 λ_0 为 n 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，k 为任意实数，则 $k\mathbf{A}$ 的特征值为（）.
解析：设 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\lambda_0\mathbf{x}$，则 $k\mathbf{A}\mathbf{x}=k\lambda_0\mathbf{x}$，说明 $k\lambda_0$ 是 $k\mathbf{A}$ 的特征值.

题型：填空题
主题：二次型
难度：中等
题目：4. 若 $\lambda=0$ 是矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&a\end{pmatrix}$ 的特征值，则 $a=$（）.
解析：由于 0 是特征值，故 $|\mathbf{A}|=0$，计算 $\begin{vmatrix}-1&0&-1\\0&-2&0\\-1&0&-a\end{vmatrix}=-2(a-1)=0$，解得 $a=1$.

题型：填空题
主题：二次型
难度：容易
题目：5.2 阶矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}3&1\\5&-1\end{pmatrix}$ 的特征值是（）.
解析：由特征方程 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-1\\-5&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)$ 可得特征值为 4 和 -2.

题型：填空题
主题：二次型
难度：中等
题目：6.3 阶矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\-4&3&0\\1&0&2\end{pmatrix}$ 的特征值是（）.
解析：由特征多项式 $\begin{vmatrix}\lambda+1&-1&0\\4&\lambda-3&0\\-1&0&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$ 可得 $\lambda_1=2$, $\lambda_2=\lambda_3=1$.

题型：填空题
主题：二次型
难度：中等
题目：7. 若 $\lambda = 3$ 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的一个特征值，则矩阵 $\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 6\mathbf{E}$ 有一个特征值等于 () .
解析：由特征值的性质可得，代入 $\lambda = 3$ 有 $3^2 - 3 \cdot 3 + 6 = 6$，故该矩阵有一个特征值为 6.

题型：填空题
主题：二次型
难度：容易
题目：8. 设 $\alpha = (3, -2, -2)$，则 $\|\alpha\| =$ () .
解析：由模长公式 $\|\alpha\| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{17}$.

题型：填空题
主题：二次型
难度：困难
题目：9. 写出一个与向量 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 都正交的非零向量 () .
解析：设所求向量为 $\gamma = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$，由 $<\alpha, \gamma>= 0$ 与 $<\beta, \gamma>= 0$ 得：

$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - 2c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$ 解得 $c_1 = -c_3, c_2 = 0$，取 $c_3 = 1$，得 $\gamma = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：二次型
难度：容易

题目： 1. 求 3 阶矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ 的特征值 (　　).

解析： 由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&0&-1\\0&\lambda-2&0\\-1&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=$ $(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2&\lambda-2\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2\begin{vmatrix}1&1\\-1&\lambda-1\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)^2=0$ 可解得特征值 $\lambda_1=0$ 和 $\lambda_2=\lambda_3=2$.

题型： 计算题
主题： 二次型
难度： 容易
题目： 2. 已知 1 2 3 为 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值，E 为 3 阶单位矩阵，求 $|\mathbf{A}^*|$(　).
解析： 因 1 2 3 为 $\mathbf{A}$ 的特征值，故由特征值的性质有 $|\mathbf{A}|=1\times2\times3=6$ ，从而结合等式 $\mathbf{A}^*\mathbf{A}=|\mathbf{A}|\mathbf{E}$ 有 $|\mathbf{A}^*|\cdot|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}^*\mathbf{A}|=||\mathbf{A}|\mathbf{E}|=|\mathbf{A}|^3=6^3=216$ ，即 $6\cdot|\mathbf{A}^*|=216$ ，所以 $|\mathbf{A}^*|=36$.

题型： 计算题
主题： 二次型
难度： 中等
题目： 3. 已知 3 阶矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&0&0\\-2&-1&2\end{pmatrix}$ ，求 $\mathbf{A}$ 的伴随方阵 $\mathbf{A}^*$ 的特征值 (　　).
解析： 由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&0\\1&\lambda&0\\2&1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-2)\begin{vmatrix}\lambda-2&-1\\1&\lambda\end{vmatrix}=$ $(\lambda-2)(\lambda^2-2\lambda+1)=(\lambda-2)(\lambda-1)^2$ 可得 $\mathbf{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$. 根据特征值与伴随矩阵特征值的关系：$\lambda_i^*=\dfrac{|\mathbf{A}|}{\lambda_i}$ ，其中 $|\mathbf{A}|=1\cdot1\cdot2=2$，

故 $\mathbf{A}^*$ 的特征值为 $\lambda_1^* = \lambda_2^* = \dfrac{2}{1} = 2$，$\lambda_3^* = \dfrac{2}{2} = 1$.

题型：计算题
主题：二次型
难度：中等
题目：4. 求 2 阶矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量 (　　).
解析：由 $|\lambda\mathbf{E} - \mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -4 \\ -5 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-3)(\lambda-2) - (-4)(-5) = \lambda^2 - 5\lambda - 20 = 0$，解得特征值为 $\lambda_1 = 7$，$\lambda_2 = -2$. 当 $\lambda_1 = 7$ 时，由齐次线性方程组 $(7\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即 $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 = 0 \\ -5x_1 + 5x_2 = 0 \end{cases}$ 可得 $x_1 = x_2$，对应特征向量为 $k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$；当 $\lambda_2 = -2$ 时，由 $(-2\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$，即 $\begin{cases} -5x_1 - 4x_2 = 0 \\ -5x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases}$ 可得 $x_1 = -\dfrac{4}{5}x_2$，对应特征向量为 $k_2\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

题型：计算题
主题：二次型
难度：困难
题目：5. 求 3 阶矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ 的特征值与特征向量 (　　).
解析：由 $|\lambda\mathbf{E}-\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ -2 & \lambda-1 & -3 \\ -3 & -3 & \lambda-6 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)(\lambda-9) = 0$，得特征值 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = -1$，$\lambda_3 = 9$. 当 $\lambda_1 = 0$ 时，解 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ 得 $\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$，特征向量为 $k_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$；当 $\lambda_2 = -1$ 时，解 $(-\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x} = 0$，得 $\begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$，

特征向量为 $k_2\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$；当 $\lambda_3=9$ 时，解 $(9\mathbf{E}-\mathbf{A})\mathbf{x}=0$，得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{1}{2}x_3\\x_2=\dfrac{1}{2}x_3\end{cases}$，

特征向量为 $k_3\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.