

Exercise Sheet

03/26

- 考虑 While 语言的程序状态，我们用 σ_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) 表示除了变量 x 之外所有其余变量取值都为零的程序状态: $\sigma_k(x) = k$, $\sigma_k(y) = \sigma_k(z) = \dots = 0$ 。假设循环条件 e 恒为真（例如 e 是 $0 == 0$ 的时候），循环体 c 为

```
if (x <= 0) then {x = x + 1} else {x = x - 1}
```

并且

- $F_{\text{nrm}}(X) = \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket . (\text{nrm}) \circ X \cup \text{test_false}(\llbracket e \rrbracket)$
- $F_{\text{err}}(X) = \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket . (\text{nrm}) \circ X \cup \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket . (\text{err}) \cup \llbracket e \rrbracket . (\text{err})$
- $F_{\text{inf}}(X) = \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket . (\text{nrm}) \circ X \cup \text{test_true}(\llbracket e \rrbracket) \circ \llbracket c \rrbracket . (\text{inf})$,

请判断下面哪些说法正确：

- 如果 X 是 F_{nrm} 的一个不动点，那么 $X = \emptyset$;
- 存在一个 F_{err} 的不动点 X ，使得 $\sigma_0, \sigma_1 \in X$;
- 存在一个 F_{err} 的不动点 X ，使得 $\sigma_1 \in X$ 并且 $\sigma_2 \notin X$;
- 存在一个 F_{inf} 的不动点 X ，使得 $\sigma_0 \in X$ 并且 $\sigma_1 \in X$;
- 存在一个 F_{inf} 的不动点 X ，使得 $\sigma_1 \in X$ 并且 $\sigma_2 \notin X$;

- 是否存在 (A, \leq_A) 是完备偏序集但不是完备格？请证明你的结论。
- 假设 (A, \leq_A) 是一个完备格，并且 F 与 G 都是 A 上的单调函数，并且他们满足：

$$\forall a \in A. F(a) \leq_A G(a)$$

请证明 $\mu F \leq_A \mu G$ ，其中 μF 与 μG 表示 F 与 G 的最小不动点。

- 假设 (A, \leq_A) 是一个完备格，请证明：

- A 有最小元。
- 假设 \perp_A 是 A 的最小元，并且 F 是 A 上的一个单调函数，请证明：

$$\text{lub}(\perp_A, F(\perp_A), F(F(\perp_A)), \dots) \leq_A \mu F$$

其中 μF 表示 F 的最小不动点。