1 复数

1.1 定义

我们把形如 $z = a + bi$（a, b 均为实数）的数称为复数，其中 a 称为实部，b 称为虚部，i 称为虚数单位。当 z 的虚部等于零时，常称 z 为实数；当 z 的虚部不等于零时，实部等于零时，常称 z 为纯虚数。（百度百科）

复数域是实数域的**代数闭包**，即任何复系数多项式在复数域中总有根。

复数的集合用 $\mathbb{C}$ 表示。

1.1.1 复数的模

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.1.2 复数的辐角

z 可表示为 $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$，其中 $r = |z|$，θ 为任意角，是 z 的辐角，记作 $Arg(z)$。
在 $-\pi$ 到 π 间的辐角称为辐角主值，记作：$arg(z)$（小写）
由下文的欧拉等式可知，$z = re^{i\theta}$.

1.1.3 共轭复数

对于复数 $z = a + bi$，称复数 $z = a - bi$ 为 z 的共轭复数。即两个实部相等，虚部互为相反数的复数互为共轭复数 (Conjugate complex number)。复数 z 的共轭复数记作 $\bar{z}$。

1.2 运算法则

复数满足实数域下的运算规则，一般可以当作**多项式**处理。设有复数 $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$,

加法法则 $z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$

乘法法则 $z_1 z_2 = (ac-bd) + (ad+bc)i$

除法法则

复数除法定义：满足 $(c+di)(x+yi) = (a+bi)$ 的复数, 叫复数 $a+bi$ 除以复数 $c+di$ 的商。

运算方法：将分子和分母同时乘以分母的**共轭复数**，再用乘法法则运算。

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

注意分母上是**加法**。

1.2.1 运算律

加法交换律 $a+b=b+a$

乘法交换律 $ab=ba$

加法结合律 $(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法结合律 $(ab)c=a(bc)$

乘法分配律 $(a+b)c=ac+bc.$

1.2.2 除此以外

在复平面上，建立极坐标系，则两复数相乘，辐角相加，模长相乘。证明：

$$\begin{aligned}
a &= p\cos\alpha + ip\sin\alpha, \\
b &= q\cos\theta + iq\sin\theta. \\
ab &= (p\cos\alpha q\cos\theta - p\sin\alpha q\sin\theta) + (p\cos\alpha q\sin\theta + p\sin\alpha q\cos\theta)i, \\
&= pq\cos(\alpha+\theta) + pq\sin(\alpha+\theta)i.
\end{aligned}$$

1.3 重要定理：欧拉等式

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

证明：运用泰勒级数初步证明。~~我不会~~

$z = r(\cos\theta, i\sin\theta) = r \cdot e^{i\theta}$.

观察可知 $e^{i\theta}$ 落在复平面的单位圆上。

1.4 n 次单位根

$z^n = 1$，$n \in \mathbb{N}^*$，这样的方程的复数根 z 称为 **n 次单位根**。n 次单位根有 n 个：

$$e^{\frac{2k\pi i}{n}}, k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$$

它们位于复平面的单位圆上，构成正 n 边形的顶点 (如果能构成多边形)。

证明

设 $z = r \cdot e^{i\theta}$，则 $z^n = r^n \cdot e^{n\theta i}$ 当且仅当 $r = 1, n\theta = 2k\pi$，$k = 0, 1, \cdots, n-1$ 时原式成立。整理即得证。

性质

1. $(\epsilon_k)^n = 1$,
2. $\epsilon_{\frac{n}{2}} = -1$,(n 是 2 的整倍数)
3. $\epsilon_k = \epsilon_{k \mod n}$,
4. $\epsilon_k \epsilon_h = \epsilon_{k+h}$,
5. $\epsilon_{c\cdot k}(c \cdot n$ 次单位根$) = \epsilon_k($n 次单位根$)$,
6. $\sum\limits_{i=0}^{n-1} (\epsilon_k)^i = [n|k]n$.

若 $n \mid k$, 则 $\epsilon_k = 1$. 否则，由等比级数知，原式 $= \frac{\epsilon_k^n - 1}{\epsilon_k - 1}$，分子为 0。