莫比乌斯反演总结

Wankupi

目录

1 莫比乌斯函数

F 是 f 的和函数，可以表示为 $f*1=F$。函数 μ 定义为满足 $F*\mu=f$ 的函数。
由 $F*\mu=f$ ，得 $f*(\mu*1)=f$ ，因此 $\mu*1=\epsilon$。

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & n=1\\ 0 & 存在一个平方数是n的因子\\ (-1)^m & m为质因子数量\end{cases}$$

2 反演形式

2.1 形式 1

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

$$f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)F(\frac{n}{d}) \qquad 或 \qquad f(n)=\sum_{d|n}\mu(\frac{n}{d})F(d)$$

证明：

$$\sum_{d|n}\mu(d)F(\frac{n}{d})=\sum_{d|n}\sum_{k|\frac{n}{d}}\mu(d)f(k)=\sum_{d|n}\sum_{k|\frac{n}{d}}\mu(k)f(d)=\sum_{d|n}f(d)\sum_{k|\frac{n}{d}}\mu(k)=\sum_{d|n}f(d)[\frac{n}{d}=1]=f(n)$$

2.2 形式 2

$$F(n)=\sum_{n|d}f(d) \qquad f(n)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})F(d)$$

证明：

$$\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})F(d)=\sum_{n|d}\mu(\frac{d}{n})\sum_{d|k}f(k)=\sum_{i=1}^{+\infty}\mu(i)\sum_{ni|k}f(k)=\sum_{n|k}f(k)\sum_{i|\frac{k}{n}}\mu(i)=\sum_{n|k}f(k)[\frac{k}{n}=1]=f(n)$$

3 例题

3.1 LuoguP2257 YY 的 GCD

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)为质数]$$

第一种推导

设 $f(d)$ 表示 gcd 为 d 的数对个数，$F(d)$ 表示 gcd 为 d 或 d 的倍数的数对个数。

$$f(d)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=d] \qquad F(d)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[d\mid\gcd(i,j)]=\sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{m}1=\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor$$

同时 f 与 F 之间存在关系 $F(d)=\sum\limits_{d|k}f(k)$。应用第二种形式的莫比乌斯反演：

$$f(d)=\sum_{d|k}^{\min(n,m)}\mu(\frac{k}{d})F(k)=\sum_{d|k}^{\min(n,m)}\mu(\frac{k}{d})\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\lfloor\frac{m}{k}\rfloor$$

答案为

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\text{Prime}}f(p)&=\sum_{p\in\text{Prime}}\sum_{p|k}^{\min(n,m)}\mu(\frac{k}{p})\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\lfloor\frac{m}{k}\rfloor\\&=\sum_{k=1}^{\min(n,m)}\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\lfloor\frac{m}{k}\rfloor\sum_{p|k,p\in\text{Prime}}\mu(\frac{k}{p})\qquad(\text{结论 }1)\end{aligned}$$

第二种推导

$$\begin{aligned}\text{Ans}&=\sum_{p\in\text{Prime}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=p]=\sum_{p\in\text{Prime}}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{p}\rfloor}[\gcd(i,j)=1]\\&=\sum_{p\in\text{Prime}}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{p}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{p}\rfloor}\sum_{d|\gcd(i,j)}\mu(d)\\&=\sum_{p\in\text{Prime}}\sum_{d=1}^{\min(\lfloor\frac{n}{p}\rfloor,\lfloor\frac{m}{p}\rfloor)}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{pd}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{pd}\rfloor}1=\sum_{p\in\text{Prime}}\sum_{d=1}^{\min(\lfloor\frac{n}{p}\rfloor,\lfloor\frac{m}{p}\rfloor)}\mu(d)\lfloor\frac{n}{pd}\rfloor\lfloor\frac{m}{pd}\rfloor\\&=\sum_{k=1}^{n}\lfloor\frac{n}{k}\rfloor\lfloor\frac{m}{k}\rfloor\sum_{p|k,p\in\text{Prime}}\mu(\frac{k}{p})\end{aligned}$$

推导结束。可以使用整除分块进行求值。对于答案最后一部分 $\sum\limits_{p|k,p\in\text{Prime}}\mu(\frac{k}{p})$，可以使用欧拉筛算出 μ 后，再枚举每个质数的倍数，用类似埃筛的方法预处理。然后使用前缀和优化，对于每个 k 就可以 $O(1)$ 计算。

相似题目： [POI2007]ZAP-Queries

3.2 LuoguP1390 公约数的和

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\gcd(i,j)$$

显然地容斥：

$$\text{Ans}=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)-\sum_{i=1}^{n}\gcd(i,i))=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\gcd(i,j)-\frac{1}{4}n(n+1)$$

设函数如前。则右式第一项为 $\text{Ans}=\sum\limits_{i=1}^{n}i\cdot f(i)$。可以不套用 (结论 1)，由 $F(d)=\sum\limits_{d|k}f(k)$，得 $f(d)=F(d)-\sum\limits_{i=2}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}f(i\cdot d)$。进行复杂度 $O(n\log n)$ 的求解，已经可以通过此题。

在多测情况下，式子还可以进一步推导。(以下假设 $n \le m$)

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\gcd(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d} d\cdot[\gcd(i,j)=d] = \sum_{d=1}^{n} d\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[\gcd(i,j)=1]\\
&= \sum_{d=1}^{n} d\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\sum_{k|\gcd(i,j)}\mu(k)\\
&= \sum_{d=1}^{n} d\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{m}{dk}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{dk}\rfloor}1 = \sum_{d=1}^{n} d\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)\lfloor\frac{n}{dk}\rfloor\lfloor\frac{m}{dk}\rfloor\\
&= \sum_{T=1}^{n}\lfloor\frac{n}{T}\rfloor\lfloor\frac{m}{T}\rfloor\sum_{k|T}\frac{T}{k}\mu(k)\\
&= \sum_{T=1}^{n}\lfloor\frac{n}{T}\rfloor\lfloor\frac{m}{T}\rfloor\varphi(T)\end{aligned}$$

对于特殊情况 $n=m$，有优秀的复杂度。（无关莫反）考虑 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i-1}\gcd(i,j)$，设函数

$$g(x) = \sum_{i=1}^{x-1}\gcd(i,x) = \sum_{d|x} d\sum_{i=1}^{\frac{x}{d}}[\gcd(i,\frac{x}{d})=1] = \sum_{d|x}^{x-1} d\cdot\varphi(\frac{x}{d})$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\gcd(i,j) = \sum_{i=1}^{n} g(i)$$

显然可以通过 $O(n\ln n + n)$ 的复杂度预处理出 $g(x)$ 及其前缀和。$O(1)$ 查询。

相似题目： [NOI2010] 能量采集

3.3 [SDOI2015] 约数个数和

设 $d(x)$ 表示 x 的约数个数，求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(i\cdot j)$$

引理 3.3.1 $d(ij) = \sum\limits_{a|i}\sum\limits_{b|j}[\gcd(a,b)=1]$

粗略证明 考虑 $i=p^x, j=p^y$ 的情况，其中 p 是质数。
$d(ij) = \sum\limits_{k=0}^{x+y} 1 = x+y+1$。考虑枚举 p 在 i 和 j 中取得的次数：$\sum\limits_{a=0}^{x}\sum\limits_{b=0}^{y} 1$，显然重复，故设立限制，优先从 i 中选择：$\sum\limits_{a=0,b\equiv 0}^{x} 1 + \sum\limits_{b=1,a\equiv x}^{y} 1 = x+1+y$。
左边等价于 $\sum\limits_{a|i,b|j}[\gcd(a,b)=1]$。

推导

$$\text{Ans} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a|i}\sum_{b|j}[\gcd(a,b)=1] = \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\lfloor\frac{n}{a}\rfloor\lfloor\frac{m}{b}\rfloor[\gcd(a,b)=1]$$

设

$$f(x) = \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\lfloor\frac{n}{a}\rfloor\lfloor\frac{m}{b}\rfloor[1=\gcd(a,b)]$$

$$F(x)=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}\lfloor\frac{n}{a}\rfloor\lfloor\frac{m}{b}\rfloor[x\mid\gcd(a,b)]=\sum_{x|a}\sum_{x|b}\lfloor\frac{n}{a}\rfloor\lfloor\frac{m}{b}\rfloor$$

由$F(x)=\sum\limits_{x|d}f(d)$

$$f(x)=\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})F(d)=\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\sum_{d|a}^{n}\sum_{d|b}^{m}\lfloor\frac{n}{a}\rfloor\lfloor\frac{m}{b}\rfloor=\sum_{x|d}\mu(\frac{d}{x})\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\lfloor\frac{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}{i}\rfloor\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\lfloor\frac{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}{j}\rfloor$$

$$\therefore f(1)=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\lfloor\frac{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}{i}\rfloor\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\lfloor\frac{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}{j}\rfloor$$

记函数 $g(x)=\sum_{i=1}^{x}\lfloor\frac{x}{i}\rfloor$，则有

$$f(1)=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)g(\lfloor\frac{n}{d}\rfloor)g(\lfloor\frac{m}{d}\rfloor)$$

预处理函数 μ,g，除法分块即可。

3.4 LuoguP3768 简单的数学题

给出 $n\le 10^{10},p$ 求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}ij\gcd(i,j)\mod p$$

推导：

$$\begin{aligned}
\text{Ans}&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d=1}^{n}ijd[\gcd(i,j)=d]=\sum_{d=1}^{n}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}id\cdot jd\cdot d[\gcd(id,jd)=d]\\
&=\sum_{d=1}^{n}d^3\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}i\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}j[\gcd(i,j)=1]\\
&=\sum_{d=1}^{n}d^3\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}i\sum_{j=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}j\sum_{k|\gcd(i,j)}\mu(k)\\
&=\sum_{d=1}^{n}d^3\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)(\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d\cdot k}\rfloor}i\cdot k)^2
\end{aligned}$$

记 $s(n)=1+2+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$，

$$\text{Ans}=\sum_{d=1}^{n}d^3\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)k^2s(\lfloor\frac{n}{d\cdot k}\rfloor)^2$$

考虑在 d 和 k 之间建立更直接的关系，换元 $T=d\cdot k$，并枚举 T 和 k。

$$\text{Ans}=\sum_{T=1}^{n}\sum_{k|T}\mu(k)(\frac{T}{k})^3k^2s(\lfloor\frac{n}{T}\rfloor)^2=\sum_{T=1}^{n}T^3s(\lfloor\frac{n}{T}\rfloor)^2\sum_{k|T}\frac{1}{k}\mu(k)=\sum_{T=1}^{n}T^2\varphi(T)s(\lfloor\frac{n}{T}\rfloor)^2$$

只要能快速求出某段区间内的 $f(x)=x^2\varphi(x)$ 的和，就可以应用除法分块求解。考虑求前缀和，于是想到杜教筛。

设 $g(x)=x^2$，则 $h(n)=\sum\limits_{d|n}f(d)g(\frac{n}{d})=\sum\limits_{d|n}d^2\varphi(d)\frac{n^2}{d^2}=n^2\sum\limits_{d|n}\varphi(d)=n^3$。

3.5 UOJ#62 怎样跑得更快

给出整数 n,c,d，序列 $\{b\}$，模数 p，求方程的解

$$\sum_{j=1}\gcd(i,j)^c\cdot\operatorname{lcm}(i,j)^d\cdot x_j\equiv b_i \pmod p$$

推导

考虑将 i,j **分离变量**，使用莫比乌斯反演。
定义函数 $A(x)=x^{c-d}$，$B(x)=x^d$，在下文中，d 的含义与题面中不同，红色表示正在枚举的量。

$$\begin{aligned}
b_i&=B(i)\sum_{j=1}A(\gcd(i,j))\cdot B(j)\cdot x_j\\
&=B(i)\sum_{j=1}\sum_{d|i\wedge d|j}A(d)B(j)x_j[\gcd(i,j)=d]\\
&=B(i)\sum_{d|i}A(d)\sum_{d|j}B(j)x_j[\gcd(i,j)=d]\\
&=B(i)\sum_{d|i}A(d)\sum_{d|j}B(j)x_j\sum_{k|\gcd(\frac{i}{d},\frac{j}{d})}\mu(k)
\end{aligned}$$

这里 $k\mid\frac{i}{d}$ 且 $k\mid\frac{j}{d}$，所以有 $d\cdot k\mid i$ 且 $d\cdot k\mid j$。换元 $T=d\cdot k$，枚举 T,d。

$$\frac{b_i}{B(i)}=\sum_{T|i}\sum_{T|j}B(j)x_j\sum_{d|T}A(d)\mu(\frac{T}{d})$$

可以看到，等式已经分离，相对独立，可以应用莫比乌斯反演。

$$\sum_{T|j}B(j)x_j\sum_{d|T}A(d)\mu(\frac{T}{d})=\sum_{i|T}\mu(\frac{T}{i})\frac{b_i}{B(i)} \tag{1 式}$$

$$\sum_{T|j}B(j)x_j=[\sum_{i|T}\mu(\frac{T}{i})\frac{b_i}{B(i)}]\cdot[\sum_{d|T}A(d)\mu(\frac{T}{d})]^{-1} \tag{莫反第一次}$$

方程形如 $\sum\limits_{T|j}f(j)=F(T)$（可以证明右式的 [中括号] 间表达式积性，且都可 $n\log n$ 求），

$$B(j)x_j=\sum_{j|T}\mu(\frac{T}{j})[\sum_{i|T}\mu(\frac{T}{i})\frac{b_i}{B(i)}]\cdot[\sum_{d|T}A(d)\mu(\frac{T}{d})]^{-1} \tag{莫反第二次}$$

$$x_j=B(j)^{-1}\sum_{j|T}\mu(\frac{T}{j})[\sum_{i|T}\mu(\frac{T}{i})\frac{b_i}{B(i)}]\cdot[\sum_{d|T}A(d)\mu(\frac{T}{d})]^{-1}$$

最后还有一个问题，如何判断解的情况呢？

注意到无解在本题中只能由除数为 0 导致，但除数为 0 并不等价无解。过程中存在的除数有 $B(j)$ 和 $\sum\limits_{d|T}A(d)\mu(\frac{T}{d})$，前者必定不为 0。观察后者出现的(1 式)发现，当且仅当后者为 0 且(1 式)右边不为 0 时无解，(1 式)右边也为 0 时存在无穷组解。

3.6 CF809E Surprise me!

给定一棵 n 个节点的树，点权 a 构成了一个 1 到 n 排列。求

$$\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_i\cdot a_j)dis(i,j)$$

对于这种跟点对相关的问题，我们一般希望把点的权值分离开，不好处理这种 $a_i \cdot a_j$ 的东西。根据公式

$$\varphi(xy)\varphi(\gcd(x,y)) = \varphi(x)\varphi(y)\gcd(x,y)$$

得到

$$\begin{aligned} n(n-1)\text{Ans} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varphi(a_i)\varphi(a_j)\frac{\gcd(a_i,a_j)}{\varphi(\gcd(a_i,a_j))}dis(i,j) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d}[\gcd(a_i,a_j)=d]\varphi(a_i)\varphi(a_j)\frac{d}{\varphi(d)}dis(i,j) \end{aligned}$$

因为 a 是一个排列，可以找到逆排列 p 表示点权为 i 的点的编号为 p_i。

$$\begin{aligned} \text{Right} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{d}[\gcd(i,j)=d]\varphi(i)\varphi(j)\frac{d}{\varphi(d)}dis(p_i,p_j) \\ &= \sum_{d=1}^{n}\frac{d}{\varphi(d)}\sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{n}[\gcd(i,j)=d]\varphi(i)\varphi(j)dis(p_i,p_j) \end{aligned}$$

发现右边由 d 决定，设 $f(d) = \sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{n}[\gcd(i,j)=d]\varphi(i)\varphi(j)dis(p_i,p_j)$，则 $\text{Right} = \sum_{d=1}^{n}\frac{d}{\varphi(d)}f(d)$。只要求出 f，就能求得答案。

考虑如何求 f。观察到 f 中有一项 $[\gcd(i,j)=d]$，思考莫反，让 d 只要是 $\gcd(i,j)$ 的因子就行。设

$$F(d) = \sum_{d|i}^{n}\sum_{d|j}^{n}\varphi(i)\varphi(j)dis(p_i,p_j)$$

并且有 $F(x) = \sum_{x|d} f(d)$。若能求出 F，就能推出答案。

观察到 $F(x)$ 只跟权值被 x 整除的点有关,抽象出来是每个点有权值 w_i,对于点集 S,求 $\sum_{x,y\in S} w(x)w(y)dis(x,y)$。这个东西可以在树上 dp 得到。观察到总点数是 H_n，上虚树就可以了。

参考文献

[1] OI Wiki 莫比乌斯反演

[2] 洛谷 Luogu 题解区

[3] SGCollin's Blog：一类欧拉函数相关的求和式推导