3D射影几何

1. 2D射影空间（图像平面、世界平面）

点、线及其对偶（用向量表示）

- 在射影几何中，2D空间的点和线可以用齐次坐标表示。
  - **点**：一个点在2D射影空间中的齐次坐标为 (x, y, w)，其中 $w \neq 0$。如果 $w = 1$，则称为规范化齐次坐标。
  - **线**：一条直线在2D射影空间中可以表示为 $ax + by + cw = 0$，其中 $[a, b, c]$ 是该直线的齐次坐标。

点和线的对偶

- 点和线在射影几何中是对偶的。也就是说，每个点可以看作是一条线的对偶，反之亦然。
  - 如果有两个点 $A = (x_1, y_1, w_1)$ 和 $B = (x_2, y_2, w_2)$，它们确定的直线 LLL 的方程为 $\mathbf{L} = A \times B$。
  - 两条线 $L_1 = (a_1, b_1, c_1)$ 和 $L_2 = (a_2, b_2, c_2)$ 的交点 P 的坐标为 $\mathbf{P} = L_1 \times L_2$。

二次曲线（用对称矩阵表示）

- 二次曲线是由二次方程表示的曲线。在射影几何中，二次曲线可以用一个对称矩阵 Q 来表示，满足方程 $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 0$，其中 $\mathbf{x}$ 是点的齐次坐标。

2D射影群和不变量

- 射影变换（2D射影群）保持直线的性质。变换可以表示为一个 3×3 非奇异矩阵 H，即 $x\mathbf{x}' = H\mathbf{x}$。
- 射影变换的不变量包括交比等。

2. 射影群、仿射群、相似群、欧氏群

射影群

- 描述射影几何中保持直线和交比不变的变换。
- 变换矩阵为一般的 3×3 非奇异矩阵。

仿射群

- 描述仿射变换，保持平行性和比例。
- 变换矩阵为形式为 $\begin{pmatrix} A & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$ 的 3×3 矩阵，其中 A 是 2×2 非奇异矩阵，$\mathbf{t}$ 是2维向量。

相似群

- 描述相似变换，保持形状和角度，但允许缩放。
- 变换矩阵形式类似仿射变换，但 A 具有正交性和统一的缩放因子。

欧氏群

- 描述欧氏变换，保持距离和角度。
- 变换矩阵形式为 $\begin{pmatrix} R & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix}$，其中 R 是 2×2 正交矩阵。

3. 3D射影空间（物理世界）

点、平面及其对偶

- 在3D射影空间中，点用齐次坐标 (x, y, z, w) 表示。
- 平面用齐次坐标 (a, b, c, d) 表示，其方程为 $ax + by + cz + dw = 0$。
- 点和平面具有对偶关系，一个点在平面上当且仅当 $\mathbf{P} \cdot \mathbf{\Pi} = 0$。

二次曲面

- 二次曲面可以由一个对称矩阵 QQQ 表示，满足 $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} = 0$，其中 $\mathbf{x}$ 是点的齐次坐标。
- 二次曲面包括椭球、抛物面和双曲面等。

3D射影群和不变量

- 3D射影变换保持直线和平面的性质。
- 变换矩阵为 4×4 非奇异矩阵。
- 3D射影变换的不变量包括交比、双比等。

针孔相机与透镜

数字传感器（CCD/CMOS）

数字传感器是现代相机的重要组成部分，用于将光信号转换为电信号。两种主要类型的数字传感器是CCD（电荷耦合器件）和CMOS（互补金属氧化物半导体）：

- **CCD传感器**：通过光电效应将光子转化为电荷，并通过移位寄存器将电荷移动到输出节点，转换为电压信号。CCD传感器具有高质量和低噪声的优点。
- **CMOS传感器**：每个像素都有自己的放大器和A/D转换器，可以直接输出数字信号。CMOS传感器功耗低、速度快，但噪声较高。

针孔成像

针孔成像是一种简单但有效的成像方式，通过一个小孔将光线聚焦到传感器上形成图像。针孔相机的基本原理和术语包括：

- **场景中的每个点对传感器的每个像素的贡献**：
  - 在没有针孔的情况下，场景中的每个点都会对传感器上的多个像素产生影响，导致图像模糊。
  - 增加一个挡板（带小孔）后，只允许一根光线通过，每个场景点只对传感器上的一个像素有贡献，从而形成清晰的图像。
- **增加挡板形成针孔成像**：
  - 增加一个小孔的挡板，可以阻挡大部分光线，仅允许一小部分光线通过针孔，形成针孔成像。
  - 针孔成像的优点是没有透镜畸变，但由于光线通过的孔径很小，光线强度较低，需要较长的曝光时间。
- **针孔成像的术语**：
  - **图像平面**：成像传感器所在的平面。
  - **相机中心（投影中心）**：针孔的位置，即光线汇聚的中心点。
  - **焦距（Focal length）**：从针孔到图像平面的距离。焦距决定了图像的放大倍数。

焦距和孔径大小

焦距变化的效果：

- 改变焦距会影响图像的放大倍数和视野。
- 焦距增大（远摄镜头）：图像放大，视野变窄，适合拍摄远处的物体。
- 焦距减小（广角镜头）：图像缩小，视野变宽，适合拍摄宽阔的场景。

孔径变化的效果（物体投影模糊）：

- 孔径的大小决定了光线的通过量和景深。
- 孔径增大：更多光线通过，但景深变浅，背景变得模糊。
- 孔径减小：通过的光线减少，景深变深，背景清晰。

相机几何模型

相机是一种坐标变换系统

3D世界映射到2D图像

相机的主要功能是将三维世界的物体投影到二维图像平面上，这个过程可以分为几个关键的坐标变换步骤：

1. **世界坐标系 (World Coordinate System, WCS)**：
   - 物体在真实世界中的位置，用 (X, Y, Z) 表示。
   - 世界坐标系的原点可以任意选择，通常选择在场景中的某个固定点。
2. **相机坐标系 (Camera Coordinate System, CCS)**：
   - 相机中心作为坐标系的原点，用 (X_c, Y_c, Z_c) 表示物体在相机坐标系中的位置。
   - 相机坐标系的Z轴通常指向相机的视线方向，X轴和Y轴分别平行于图像平面的水平和垂直方向。
3. **图像坐标系 (Image Coordinate System)**：
   - 用 (x, y) 表示物体在图像平面中的位置。
   - 图像坐标系的原点通常在图像平面的中心。
4. **像素坐标系 (Pixel Coordinate System)**：
   - 用 (u, v) 表示物体在数字图像中的像素位置。
   - 像素坐标系的原点通常在图像的左上角。

齐次坐标的使用

为了方便进行各种变换，特别是透视投影变换，使用齐次坐标来表示点。齐次坐标引入了一个附加的维度，使得点的表示变为 (X, Y, Z, W)。通过引入齐次坐标，可以使用矩阵运算来统一描述平移、旋转、缩放和透视投影等变换。

投影矩阵

世界坐标到相机坐标的变换

- 变换过程涉及将世界坐标系中的点转换到相机坐标系中，通常由旋转矩阵 R 和平移向量 t 表示。
- 齐次坐标表示为：

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 其中，RRR 是 3×33 \times 33×3 旋转矩阵，ttt 是 3×13 \times 13×1 平移向量。

相机坐标到图像坐标的透视投影

- 将相机坐标系中的点投影到图像平面上，通过透视投影矩阵 P 表示：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix}$$

- 其中，f 是焦距，决定了图像的缩放比例。
- 最终得到的 (x, y) 是在图像平面的坐标。

图像坐标到像素坐标的变换

- 图像坐标转换为像素坐标，通常需要考虑相机的内部参数，包括光心位置和像素尺寸。
- 内部参数矩阵 K 表示为：

$$K = \begin{pmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  其中，f_x 和 f_y 是在x和y方向上的焦距，c_x 和 c_y 是光心的位置。
- 最终的像素坐标 (u, v) 表示为：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} = K \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

投影矩阵的分解

相机投影矩阵 P 通常表示为 $P = K[R|t]$，综合了外部参数（旋转和平移）和内部参数（焦距和光心位置）。这个矩阵将世界坐标直接转换为像素坐标，描述了相机的完整成像过程。

相机几何标定

相机标定是计算机视觉中的一个重要步骤，用于确定相机的内部和外部参数，以便将三维世界的点精确映射到二维图像中。相机标定的主要目标是计算相机的内部参数（如焦距、光心位置、畸变系数）和外部参数（相机在世界坐标系中的位置和姿态）。以下是关于相机几何标定的详细解释。

相机标定的目标

相机标定的主要目标是确定以下参数：

- **内部参数**（Intrinsic Parameters）：
  - 焦距 f_x 和 f_y
  - 光心位置 c_x 和 c_y
  - 像素缩放因子
  - 畸变系数（径向畸变和切向畸变）

- **外部参数**（Extrinsic Parameters）：
  - 旋转矩阵 R
  - 平移向量 t

这些参数可以综合成相机投影矩阵 $P = K[R|t]$，用于描述从三维世界到二维图像的映射。

使用DLT算法标定相机

DLT（Direct Linear Transformation）算法是相机标定的一种常用方法，通过解齐次坐标中的线性系统来估计相机的投影矩阵。

齐次坐标中的线性系统求解

1. **建立线性方程组**： 给定 N 个世界坐标点 $\mathbf{X}_i = (X_i, Y_i, Z_i, 1)^T$ 及其对应的图像坐标点 $\mathbf{x}_i = (u_i, v_i, 1)^T$，投影矩阵 PPP 满足 $\mathbf{x}_i = P\mathbf{X}_i$。展开后得到以下线性方程：

$$\begin{cases} u_i = p_{11}X_i + p_{12}Y_i + p_{13}Z_i + p_{14} \\ v_i = p_{21}X_i + p_{22}Y_i + p_{23}Z_i + p_{24} \\ 1 = p_{31}X_i + p_{32}Y_i + p_{33}Z_i + p_{34} \end{cases}$$

2. **转换为矩阵形式**： 这些方程可以转换为矩阵形式 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$，其中 $\mathbf{A}$ 是 $2N \times 12$ 的系数矩阵，$\mathbf{x}$ 是包含投影矩阵元素的向量。
3. **求解线性系统**： 使用奇异值分解（SVD）来求解方程 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$，最小奇异值对应的右奇异向量即为投影矩阵 P 的解。

归一化的DLT方法

归一化DLT方法通过对输入数据进行归一化处理，可以提高DLT算法的精度和鲁棒性：

1. **归一化图像坐标和世界坐标**：
   - 将图像坐标点平移到均值中心，并缩放使其平均距离为 $\sqrt{2}$。
   - 将世界坐标点平移到均值中心，并缩放使其平均距离为 $\sqrt{3}$。
2. **应用DLT算法**： 在归一化后的坐标系中应用DLT算法，求解投影矩阵 P。
3. **反归一化**： 将得到的投影矩阵反归一化，得到原始坐标系下的投影矩阵。

非线性精细化

为了进一步提高标定精度，常使用非线性优化方法最小化投影误差。

最小化投影误差（Levenberg–Marquardt优化方法）

1. **定义投影误差**： 投影误差是实际图像点 (u_i, v_i) 与通过投影矩阵 PPP 投影得到的图像点 $\hat{u}_i, \hat{v}_i$ 之间的差异。目标是最小化所有点的总投影误差：

$$\text{Error} = \sum_i \left((u_i - \hat{u}_i)^2 + (v_i - \hat{v}_i)^2 \right)$$

2. **优化方法**： 使用Levenberg–Marquardt算法进行非线性优化，调整投影矩阵 PPP 的参数，使得投影误差最小。

考虑径向畸变和切向畸变

- **径向畸变**： 由于透镜的非线性，图像中心的光线比远离中心的光线弯曲更严重，导致图像边缘发生拉伸或压缩。径向畸变可以用以下模型描述：

$$\Delta u = (u - u_0)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$
$$\Delta v = (v - v_0)(k_1 r^2 + k_2 r^4 + k_3 r^6)$$

其中 r 是点到光心的距离，k_1, k_2, k_3 是径向畸变系数。

- **切向畸变**：由于透镜和图像平面不完全平行，导致图像发生倾斜变形。切向畸变可以用以下模型描述：

$$\Delta u = p_1(2xy) + p_2(r^2 + 2x^2)$$
$$\Delta v = p_1(r^2 + 2y^2) + p_2(2xy)$$

其中 p_1, p_2 是切向畸变系数。

单视重构

单视重构是从单个图像中恢复三维信息的过程。虽然没有立体视觉那样的信息丰富，但通过利用射影几何的性质，仍可以从单个图像中提取有价值的三维结构信息。

通过图像点的反投影确定射线

图像中的每一个点都可以看作是穿过相机投影中心的一个射线上的点。这个射线在相机坐标系中的方向是确定的，但在世界坐标系中的具体位置和长度是未知的。

反投影射线：图像坐标 (u, v)可以反投影到相机坐标系中的射线：

$$\begin{pmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 1 \end{pmatrix} \cdot d$$

其中，d 是射线上的一个任意尺度因子，表示射线在相机坐标系中的方向向量。

消失点和消失线的应用

消失点的定义和计算方法

- **定义**：消失点是指在图像中表示平行于某一方向的所有直线在图像平面上的交点。这些平行线在现实世界中是平行的，但在图像中由于透视投影的原因，它们会汇聚到一个点上，即消失点。
- **计算方法**：
  - 确定图像中两条平行线的方程 $\mathbf{l_1}$ 和 $\mathbf{l_2}$。
  - 两条直线的交点即为消失点，可以通过求解以下方程得到：

$$\mathbf{v} = \mathbf{l_1} \times \mathbf{l_2}$$

  - 消失点的坐标 $(u, v, 1)$ 可以通过求解直线方程组获得。

消失线表示平面的朝向

- **定义**：消失线是图像中表示所有平行于某个平面的直线在图像平面上的交线。它可以用来表示该平面的朝向。
- **计算方法**：
  - 假设有多个消失点 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}$ 等，它们对应于不同方向的平行线。
  - 消失线 $\mathbf{l}_\infty$ 可以通过这些消失点的坐标计算得到：$\mathbf{l}_\infty = \mathbf{v_1} \times \mathbf{v_2}$
  - 消失线表示与这些消失点对应的所有平行线的交线。

计算图像中的射影不变量（交比）

射影不变量（交比）

- **定义**： 交比是射影几何中的一个重要不变量，不受射影变换的影响。对于一条直线上的四个点 A, B, C, D，它们的交比定义为：

  $$(A, B; C, D) = \frac{(A - C)(B - D)}{(A - D)(B - C)}$$

  其中，$(A - C)$ 表示点 A 和 C 之间的距离。
- **应用**： 交比在单视重构中有多种应用，如高度测量、平行线检测等。

高度测量中的应用

- **原理**： 通过已知物体高度和交比关系，可以从图像中恢复物体的实际高度。假设我们知道物体的底部和顶部在图像中的位置，以及物体在世界坐标系中的高度。
- **步骤**：
  1. 确定物体底部和顶部的图像坐标点 A, B。
  2. 选择图像中另外两个参考点 C, D，使得这些点位于同一条直线上，并已知它们之间的距离关系。
  3. 计算 A, B, C, D 的交比 $(A, B; C, D)$。
  4. 根据已知物体高度和交比，计算物体的实际高度。

相关算法和补充内容

- 零空间的计算（SVD方法）
- 列文伯格—马夸尔特法的迭代优化步骤
- 标定板的角点检测代码示例