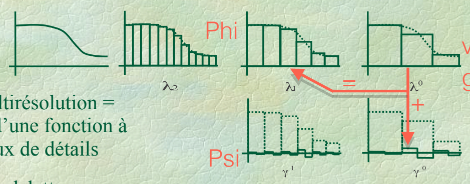
Les ondelettes et la multirésolution

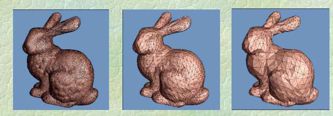
Master IVI,
Module M3DA, cours 3



Définition: Multirésolution = représentation d'une fonction à plusieurs niveaux de détails

Propriété des ondelettes: pas d'augmentation de la quantité de données.

Intérêts:
- Compression
- Infos sur la structure du signal



(images extraites de «Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes», Eck & *Al.*, SIG. 95)

- Analyse de Fourier
  - Base globale
  - Sinusoïdes de fréquences variant arithmétiquement
- Fourier fenétré et filtres de Gabor
  - Base locale
  - Fonctions de base: produit de sinusoïdes et de gaussiennes

- Ondelettes
  - Base locale
  - Fréquences variant géométriquement
  - Fonction de base de forme indépendante de l'echelle
  - Bien plus de degrés de libertés que pour la TF dans le choix des fonctions de base
  - Gère les signaux périodiques, apériodiques de manière naturelle
  - La théorie intègre de fait les signaux de support fini
  - Localisation en temps ET en fréquence

Analyse multirésolution: suite d'e.v. imbriqués $V^0 \subset V^1 \subset V^2 \subset \ldots \subset V^n$

Espaces de détails: $V^i \oplus W^i = V^{i+1}$

Fonctions d'echelle: $\Phi^i = \left[\varphi_1^i \quad \varphi_2^i \quad \ldots \quad \varphi_{n_i}^i\right]^t$

Raffinabilité: $\varphi_k^i(x) = \sum_j h_{k+1}^j \varphi_{k+1}^j(x) \quad \Phi^i = H^i \Phi^{i+1}$ Phi

Fonctions d'ondelettes: $\Psi^i = \left[\psi_1^i \quad \psi_2^i \quad \ldots \quad \psi_{n_{i+1}-n_i}^i\right]^t$

Raffinabilité: $\psi_k^i(x) = \sum_j g_{k+1}^j \phi_{k+1}^j(x) \quad \Psi^i = G^i \Phi^{i+1}$ Psi

Mise en oeuvre: Modèle défini par un jeu de m+1 paramètres $\lambda_0, \ldots, \lambda_m$

On se donne un niveau de résolution n initial: $\lambda^n = [\lambda_0^n, \ldots, \lambda_{m_n}^n]^T$

Mise en oeuvre: Modèle défini par un jeu de m+1 paramètres $\lambda_0,\dots,\lambda_m$

On se donne un niveau de résolution n initial: $\lambda^n = [\lambda^n_0, \dots, \lambda^n_{m_n}]^T$

Représentation multirésolution: Jeu d'approximations successives mettant en œuvre des *moyennes* λ^k et des *détails* γ^k.

$\lambda^k = [\lambda^k_0, \dots, \lambda^k_{m_k}]^T$ avec $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq m_k \leq m_n$

$\gamma^k = [\gamma^k_0, \dots, \gamma^k_{m_{k+1}-m_k}]^T$

Mise en oeuvre: Modèle défini par un jeu de m+1 paramètres $\lambda_0,\dots,\lambda_m$

On se donne un niveau de résolution n initial: $\lambda^n = [\lambda^n_0, \dots, \lambda^n_{m_n}]^T$

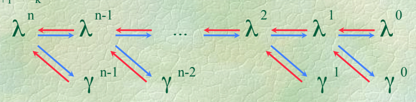
Représentation multirésolution: Jeu d'approximations successives mettant en œuvre des *moyennes* λ^k et des *détails* γ^k.

$\lambda^k = [\lambda^k_0, \dots, \lambda^k_{m_k}]^T$ avec $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq m_k \leq m_n$

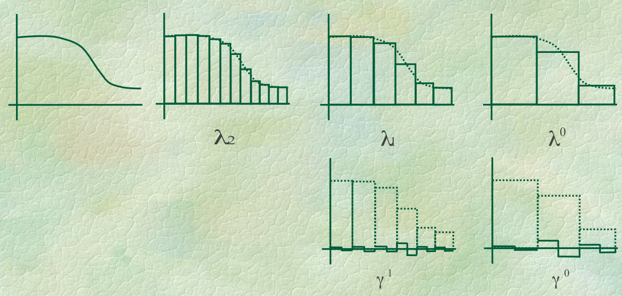
$\gamma^k = [\gamma^k_0, \dots, \gamma^k_{m_{k+1}-m_k}]^T$

analyse

synthèse



Exemple 1: *ondelettes de Haar*



Exemple 2: *ondelettes biorthogonales B-splines*

Classification au moyen de deux entiers naturels :

n : ordre des fonctions de base B-splines

ñ : «efficacité » de la décomposition par ondelettes

Compromis: quand *n* ou *ñ* augmente, meilleure représentation mais plus coûteuse

n=ñ=1

n=ñ=4

256² coefs 64² coefs 32² coefs 16² coefs

- Classification des modèles d'ondelettes
  - interpolation/approximation
  - localité
  - symétrie
  - continuité
  - type des coefficients des filtres
  - expression analytique pour les fonctions de bases
  - gestion de l'orthogonalité
  - nombres de *moments* s'annulant

- Deux grands types de familles
  - orthogonales
  - bi-orthogonales

- Ondelettes orthogonales: propriétés
  - pleines orthogonalité des éléments impliqués (fonctions de bases, e.v.)
  - outils numériques puissants (evaluation de l'erreur lors de l'utilisation en compression)

- Ondelettes orthogonales: exemples
  - ondelettes de Haar
  - ondelettes de Shannon
  - ondelettes de battle-lemarié
  - ondelettes de daubechies

- Ondelettes bi-orthogonales: propriétés
  - pour chaque fonction impliquée, existence d'une fonction *duale*
  - chaque espace vectoriel défini ainsi un espace *dual*
  - cas particulier: la semi-orthogonalité
  - cadre bien plus souple que la pleine orthogonalité

- Ondelettes bi-orthogonales: mise en oeuvre

Formulation matricielle: 4 filtres H^i, G^i, $\widetilde{H}^i$, $\widetilde{G}^i$ vérifiant

$$\begin{bmatrix} H^i & G^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{H}^i \\ \widetilde{G}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{H}^i \\ \widetilde{G}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^i & G^i \end{bmatrix} = 1$$

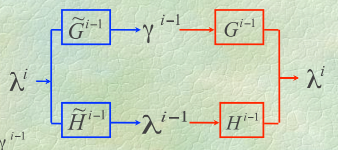
- Ondelettes bi-orthogonales: mise en oeuvre

Formulation matricielle: 4 filtres H^i, G^i, $\widetilde{H}^i$, $\widetilde{G}^i$ vérifiant

$$\begin{bmatrix} H^i & G^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widetilde{H}^i \\ \widetilde{G}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widetilde{H}^i \\ \widetilde{G}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H^i & G^i \end{bmatrix} = 1$$

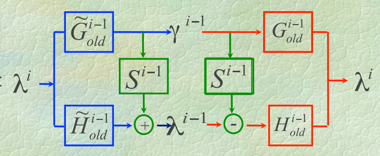
Utilisation de ces filtres:

Décomposition: $\begin{cases} \lambda^{i-1} = \widetilde{H}^{i-1}\lambda^i \\ \gamma^{i-1} = \widetilde{G}^{i-1}\lambda^i \end{cases}$

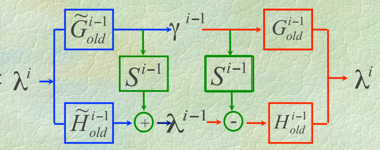


Reconstruction: $\lambda^i = H^{i-1}\lambda^{i-1} + G^{i-1}\gamma^{i-1}$

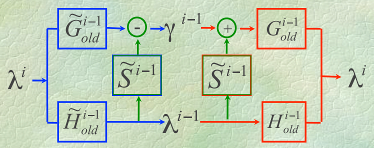
Lifting Scheme [Sweldens 96]:



Lifting Scheme [Sweldens 96]:



Lifting Scheme Dual:



Cakewalk: construction en échelle, par application alternée du LS et du LSD.

Intérêts du Lifting Scheme:

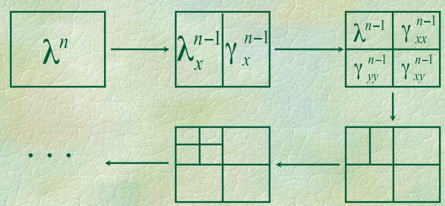
- liberté totale sur les matrices S et $\widetilde{S}$
- implémentation simple
- inversion immédiate
- construction souple et modulaire

très utilisé ces dernieres années (JPEG 2000, ondelettes sphériques, lien avec modélisation variationnelle)

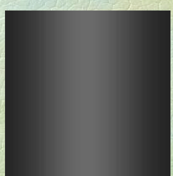
Exemples d'ondelettes bi-orthogonales

- ondelettes B-splines (semi-orthogonales ou non)
- ondelettes de cohen, daubechies et feauveau
- ondelettes sphériques

Extension à des dimensions supérieures :
produit tensoriel (généralement non-standard)



Extension à des dimensions supérieures :
produit tensoriel (généralement non-standard)



Compression de données

Au ratio 1:100

JPEG

PSNR = 26.5

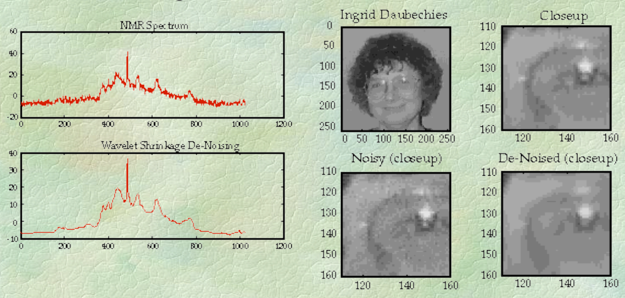
Filesize = 8 KB

JPEG 2000

PSNR = 31.0

Filesize = 8 KB

❧ Ondelettes adaptées à la suppression de bruit, sans connaissance particulière de celui-ci

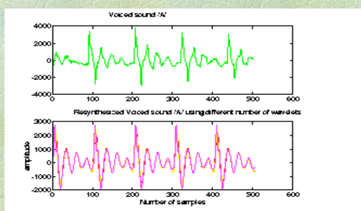


❧ Reconnaissance de forme: approches hiérarchiques pour la mise en correspondance de formes, le suivi de trajectoires, détection de contours (précurseurs: filtres gaussien & laplacien pyramidaux)

Systeme de stockage et de reconnaissance d'empreintes FBI (gauche original, droite 1:26):

❧ Synthèse vocale: fort parallèle entre les ondelettes biorthogonales et les filtres QMF

paquets d'ondelettes, ondelettes à forte composante fréquentielle (ex: Morlet)

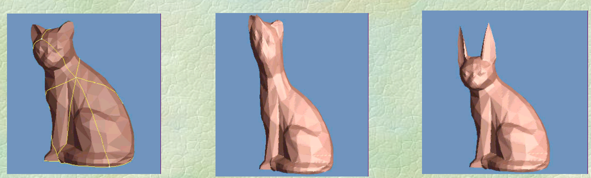


Haut: signal original (son /A/).
Bas: même son synthétisé avec 16 coefficients d'ondelettes

- ❧ Imagerie Médicale
- ❧ Astrophysique
- ❧ Analyse financière
- ❧ Analyse fractale, chaos, turbulence
- ❧ Statistiques
- ❧ Décomposition d'opérateurs linéaires (equa diffs, éq. Intégrales)
- ❧ …

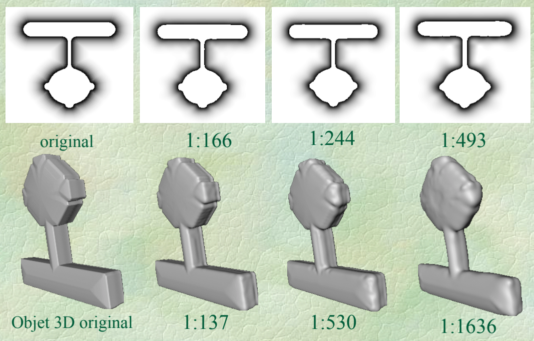
❧ Intérêt en informatique graphique:
utilisable a priori partout où la notion de *fonction* (ou de signal, selon ce que l'on manipule) intervient

❧ Modélisation multirésolution

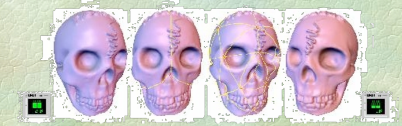


(images extraites de «Multiresolution Analysis of Arbitrary Meshes», Eck & *Al.*, SIG. 95)

Compression de données



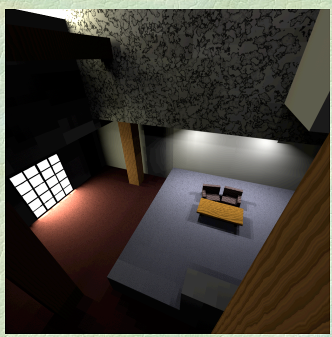
- Lien fort avec la notion de subdivision
  normal meshes,
  Guskov & al, Siggraph 2000



lifting scheme permet d'ouvrir porte vers modélisation variationnelle

- Radiosité par ondelettes
  base: décomposition d'opérateur linéaires

Schröder &Al,
siggraph 1993



- Traitement d'image
  extraction multi-résolution des contours

- Interrogation automatique de base de données d'image (*image querying)*

De la lecture:

chapitre 1 de these dispo sur ma page web principale