

Définition de base de la Transformée de Fourier bidimensionnelle

La transformation de Fourier projette une image dans un espace fréquentiel caractérisé par des ω_x et ω_y . Elle permet d'analyser les propriétés de l'image dans ce nouvel espace.

La définition de base de la transformée de Fourier bidimensionnelle est donnée pour une image $f(x, y)$, en supposant que cette image est de dimension infinie:

$$F(\omega_x, \omega_y) =$$

La transformée de Fourier d'une image est une fonction des variables ω_x et ω_y . La transformée de Fourier est une fonction bidimensionnelle dans l'espace des fréquences.

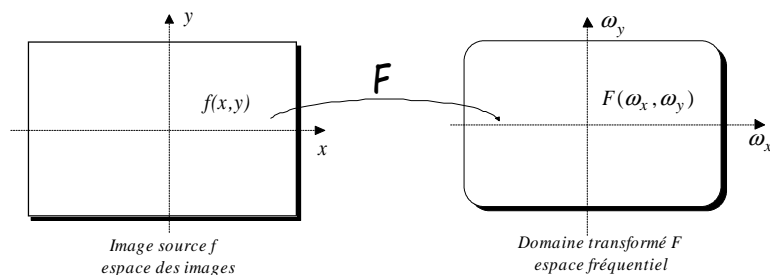


Figure 1 – Transformée de Fourier

Les variables de la transformée sont des *pulsations spatiales* exprimées en radian/mètre ; ω_x représente une pulsation selon la direction x et ω_y une pulsation selon la direction y . Ces notions seront développées ultérieurement.

En considérant les *fréquences spatiales* $u = \omega_x/2\pi$ et $v = \omega_y/2\pi$, l'expression de la transformée bidimensionnelle est :

$$F(u, v) =$$

Pour les images discrétisées, on exprime souvent les dimensions spatiales x et y en pixel. Les pulsations correspondantes seront exprimées en radian/pixel. La définition de la transformée reste la même.

• Convergence

La transformée de Fourier n'existe que si l'intégrale qui la définit est convergente. La convergence de cette intégrale est assurée si elle converge (convergence normale).

Cette convergence implique que $F(u, v)$ pour u et v . La transformée de Fourier d'une image n'existe que pour les images à énergie finie [ne pas oublier que le niveau de gris d'une image est représentatif d'une énergie contrairement aux signaux usuels pour lesquels l'énergie est le carré de l'amplitude]. Dans la pratique, les images sont bornées et leur transformée existe donc toujours.

• **Représentation de la Transformée**

La Transformée de Fourier se représente dans un espace fréquentiel bidimensionnel. Etant donné que la transformée est une *grandeur complexe*, sa représentation graphique se fait :

- soit par module et phase
- soit par parties réelle et imaginaire

• **Exemple 1**

Considérons une image composée d'un rectangle blanc de dimensions ab sur un fond noir dont la fonction niveau de gris est définie par:

$$f(x, y) = 1 \text{ pour } -a/2 < x < a/2 \text{ et } -b/2 < y < b/2$$

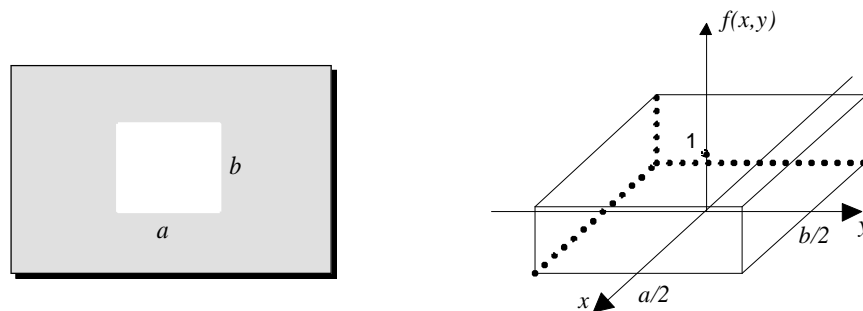


Figure 2 – Image d'un carré blanc sur fond noir

La transformée se calcule directement:



Remarquer que le calcul est séparable sous forme du produit de deux fonctions monodimensionnelles.



La transformée de cette image est donc une fonction réelle, caractérisée par un profil en \sin selon les axes ω_x et ω_y .

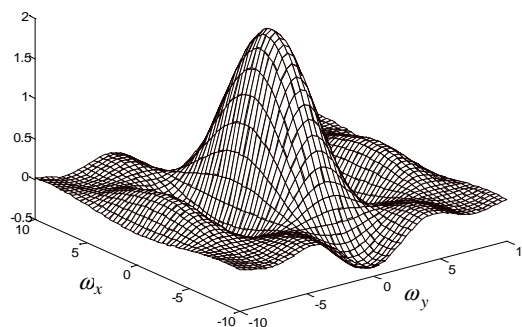


Figure 3 – Graphe de la Transformée de Fourier de la fonction rectangulaire pour $a=1$ et $b=2$

A noter que le profil suivant une fréquence ω_x dans une direction α quelconque est le produit de deux sinus cardinaux; il est donc différent des profils selon les axes fréquentiels.

Dans cet exemple, l'image est une fonction *séparable*, le résultat l'est aussi. Remarquer qu'il n'y a pas *isotropie* (même propriété d'amplitude ou de phase) aussi bien pour l'image $f(x, y)$ que pour sa transformée $F(\omega_x, \omega_y)$ dans l'espace fréquentiel.

•Exemple 2

Soit une image constituée d'une fonction gaussienne bi-dimensionnelle.

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{\frac{-(x^2 + y^2)}{2\sigma^2}}$$

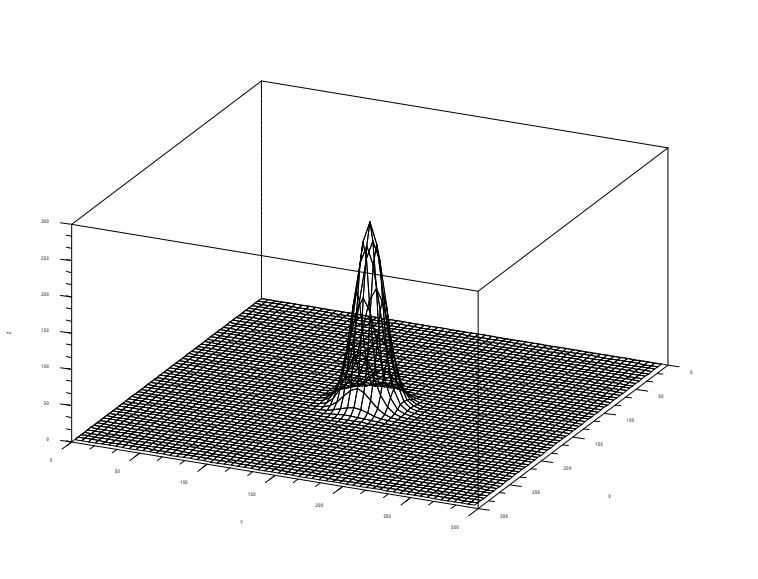


Figure 2 – Image d'un disque blanc sur fond noir

La transformée se calcule par :

$$F_r(\omega_x, \omega_y) =$$

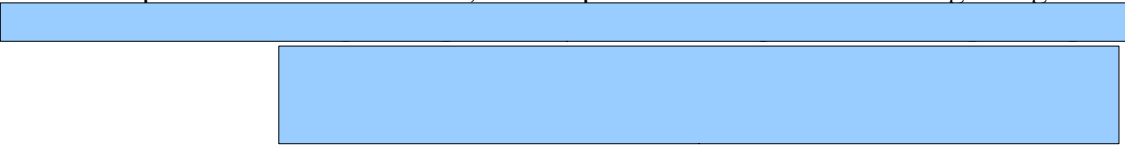
Le calcul n'est plus séparable; le calcul se fait par passage en coordonnées polaires $(\omega_x, \omega_y) \rightarrow (\rho, \theta)$ et donne :

$$F_r(\rho, \theta) =$$

où ρ représente la pulsation dans la direction θ

Inversion de la Transformée

A partir de la transformée, il est possible de retrouver l'image originale. A partir d'une



La propriété d'inversion permet de retrouver l'original d'une image définie dans le domaine fréquentiel.

Remarque qu'à partir d'une transformée de Fourier *bornée*, l'image correspondante est à priori de dimension *infinie* (étant donné que sa transformée existe, elle possède les propriétés de convergence).

Principales propriétés de la Transformée de Fourier

• Linéarité

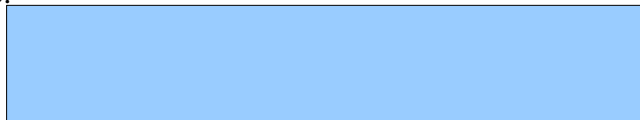
La TdF étant calculée à partir d'une intégrale, elle présente les mêmes propriétés de linéarité:

-soient f et g deux images à niveaux de gris:



• Transformée de \bar{f}

Soit $f = \alpha + i \beta$ une image possédant une partie imaginaire. Sa transformée de Fourier est elle même complexe.



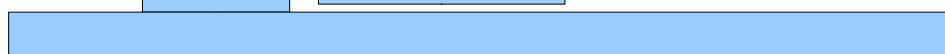
Remarque : les parties réelles et imaginaires de f peuvent donner naissance *chacune* à une transformée possédant partie réelle et imaginaire. La relation entre $s\alpha$ et A n'est donc pas directe; A n'est pas la TdF de α mais la partie réelle de $F(f)$.

Le passage de f à \bar{f} s'obtient en remplaçant i par $-i$ dans l'expression de f . On remarque que ce remplacement dans l'intégrale de Fourier revient à remplacer β par $-\beta$ et les fréquences ω_x et ω_y par $-\omega_x$ et $-\omega_y$. On obtient :



• Symétries

Si l'image f est *réelle*, alors $\bar{f} = f$ et $\bar{F(f)} = F(f)$, il en résulte que:



La partie réelle est symétrique (symétrie centrale de centre O) et la partie imaginaire est antisymétrique.

• Translation

Soit une translation T de l'image f caractérisée par les composantes (t_x, t_y) . L'image translatée a pour transformée de Fourier:

$$F[f(x, y)] = F[f(x - t_x, y - t_y)] e^{-i(\omega_x t_x + \omega_y t_y)}$$

Par changement de variable $x - t_x = X$, $y - t_y = Y$, on obtient :

$$F[f(x, y)] = F[f(X, Y)] e^{-i(\omega_x t_x + \omega_y t_y)}$$

On remarque que la translation ne modifie pas le module du spectre de f mais introduit un terme de phase proportionnel à la pulsation. Cette propriété a été utilisée dans des algorithmes de recherche du mouvement dans une séquence d'images.

• Rotation

Soit une rotation R de l'image f de centre O (origine de l'image) et d'angle θ . L'image modifiée a pour transformée de Fourier:

$$F[f_\theta(x, y)] = \iint f_\theta(x, y) e^{-i(\omega_x x + \omega_y y)} dx dy$$

On considère un nouveau repère (O, x', y') obtenu par rotation des axes x et y d'un angle θ . Dans ce nouveau repère, on aura $f(x', y') = f_\theta(x, y)$. En prenant comme nouvelles fréquences $\omega_{x'}$ et $\omega_{y'}$ associées aux axes x' et y' , l'expression de la transformée de Fourier est inchangée. Ceci montre que la transformée de Fourier subit elle-même une rotation d'angle θ autour de son origine ($\omega_x=0, \omega_y=0$).

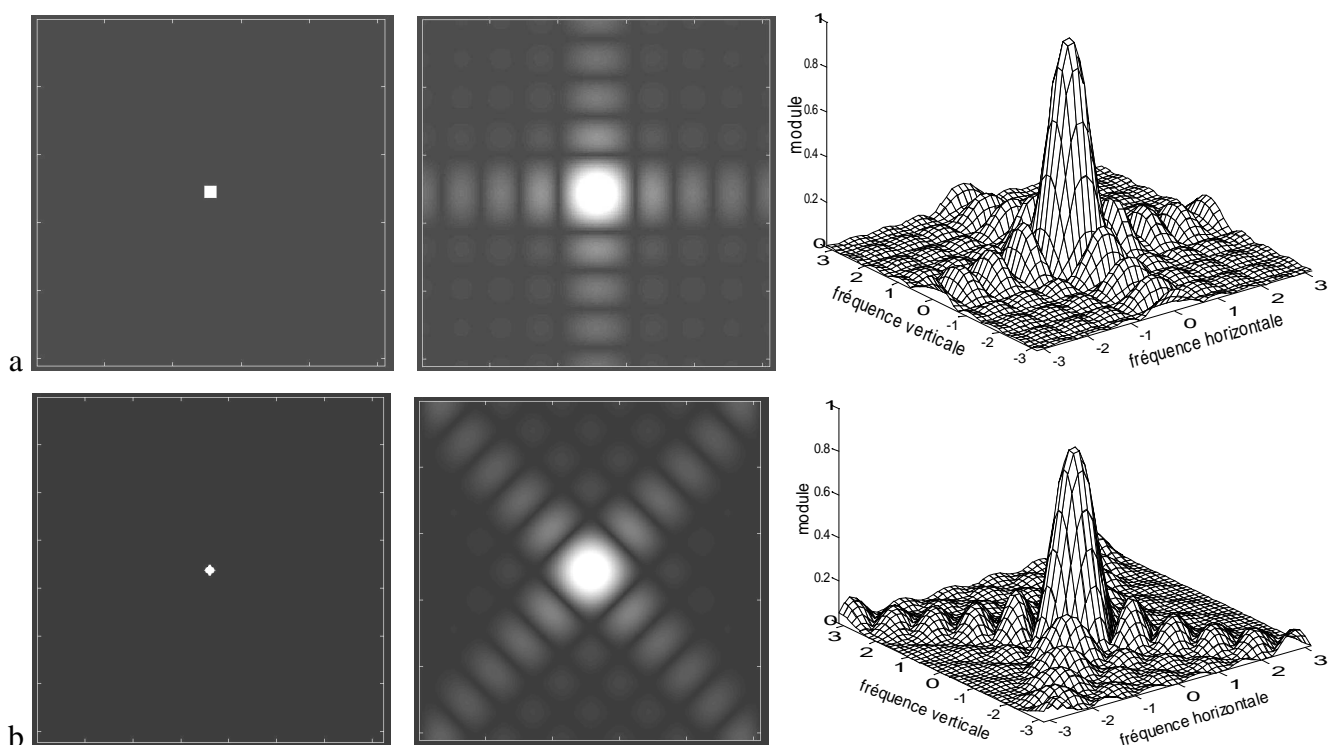


Figure 5 –Transformée de Fourier d'un carré de 9 pixels de côté (fréquences exprimées en rd/pixel)
(a) sans rotation (b) avec rotation de 45°

- *Décalage fréquentiel*

Soit une image $f(x,y)$ dont la Transformée de Fourier est $F(\omega_x, \omega_y)$. On remarque que :

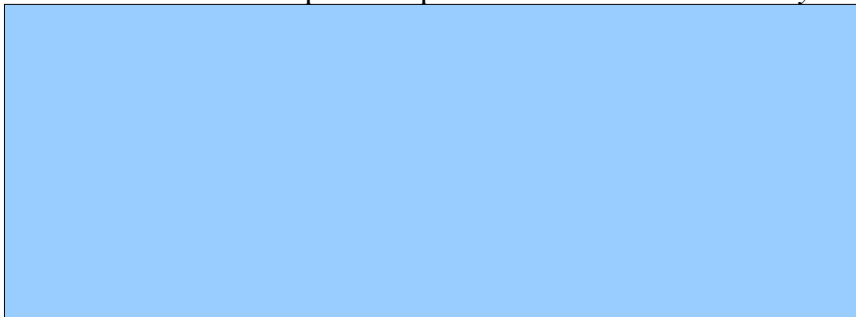
$$F[f(x, y) e^{i\omega_0 x}] = F(\omega_x - \omega_0, \omega_y)$$

La translation fréquentielle du spectre ne correspond pas à une fonctionnalité réelle dans le domaine spatial [le seul intérêt de cette relation est purement formel; elle sera utilisée ultérieurement dans certaines démonstrations].

Séparabilité du calcul de la Transformée de Fourier

- *Transformée de Fourier d'une image quelconque*

Quelle que soit l'expression de l'image $f(x,y)$, le calcul de la transformée de Fourier bidimensionnelle se fait en deux étapes en séparant les deux variables x et y .



Cette propriété montre que la transformée bidimensionnelle s'obtient par une première application de la transformée de Fourier à 1 dimension selon la direction horizontale puis par une deuxième application de la transformée au résultat intermédiaire $F_1(\omega_x, y)$ selon la direction verticale.

- *Transformée de Fourier d'une image séparable*

Une image séparable $f(x,y)$ est caractérisée par une fonction bidimensionnelle produit de deux fonctions monodimensionnelles $f_x(x)$ et $f_y(y)$. Le calcul de la transformée de Fourier s'exprime par:



La transformée de Fourier d'une image séparable est elle-même séparable: elle est le produit des transformées de Fourier mono dimensionnelle de chacune des fonctions caractéristiques de l'image.

Cette propriété nous montre que l'étude des images dans le domaine fréquentiel est souvent très proche de l'étude des signaux monodimensionnels; de nombreux résultats obtenus pour les signaux seront extrapolable pour les images.

Pour les images quelconques (donc non-séparables), les principes restent donc les mêmes, les calculs seront cependant plus lourds.

Transformée d'images particulières

• Impulsion de Dirac

L'impulsion de Dirac d'amplitude 1 peut être considérée comme le passage à la limite de l'image d'un carré de côté a et d'amplitude $1/a^2$.



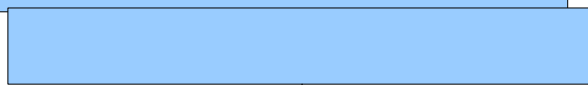
D'où :



La Transformée de Fourier de $f(x,y)$ ayant pour expression :



on constate que



La Transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac est donc un [blue rectangle], d'amplitude 1 quelque soit la fréquence (plan horizontal). On remarque que l'énergie dans le domaine fréquentiel (au sens de l'égalité de Parseval) est infinie, ce qui correspond effectivement à l'énergie quadratique de l'impulsion de Dirac.

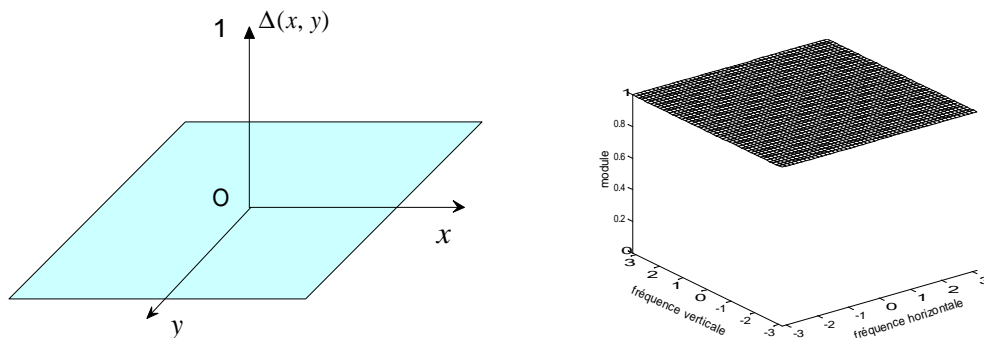


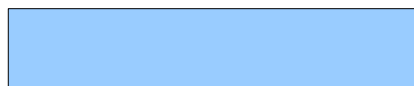
Figure 6 – Transformée de Fourier d'un Dirac d'amplitude 1

• Image constante

Soit une image de niveau de gris $f(x,y) = 1 \forall (x,y)$ non bornée spatialement. La transformée a pour expression :



Cette expression n'est pas convergente et n'a donc pas de valeur. Pour calculer sa limite, on applique à f un *facteur de convergence* (par exemple un facteur exponentiel décroissant). On peut montrer que son spectre de Fourier converge vers une fonction de Dirac bidimensionnelle d'amplitude $4\pi^2$.



La seule fréquence apparaissant dans le spectre est la fréquence nulle (absence de phénomène fréquentiel dans une image à niveau de gris constant).

Base orthogonale de décomposition

La transformée de Fourier est une décomposition dans la base orthogonale des fonctions $S_{\omega_x, \omega_y}(x, y) = e^{i\omega_x x} e^{i\omega_y y}$. Le calcul de la transformée est le produit scalaire de $f(x, y)$ avec $S(x, y)$. Il est intéressant de donner une représentation concrète de ces fonctions (ou de leur équivalent réel) pour des valeurs particulières ω_{x0} , ω_{y0} , ce qui permet de mieux comprendre le contenu de la transformée de Fourier.

- $\omega_{x0} = 0$ et $\omega_{y0} = 0$

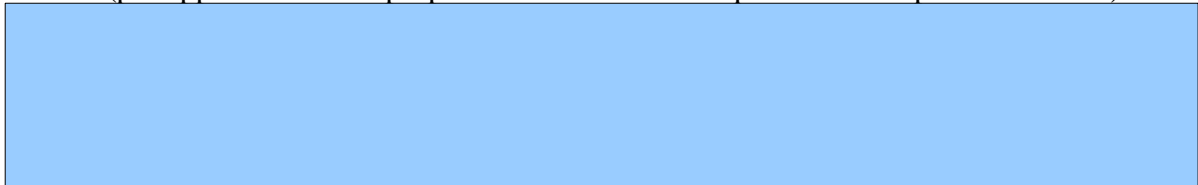
La décomposition de l'image pour $\omega_{x0} = 0$ et $\omega_{y0} = 0$ correspond au calcul l'énergie totale de l'image; l'amplitude du résultat dans le plan de Fourier est toujours très importante (sauf pour une image très sombre).

Dans le cas d'image d'une image bornée spatialement, la convergence de l'intégrale de Fourier ne pose pas de problème.

- $\omega_{x0} \neq 0$ et $\omega_{y0} = 0$

Pour $\omega_{y0} = 0$, la fonction de projection dans la base est $S_{\omega_x, 0}(x, y) = e^{i\omega_{x0}x}$ soit $S_{\omega_{x0}, 0}(x, 0) = \cos(\omega_{x0}x) + i \sin(\omega_{x0}x)$.

Pour représenter la partie réelle $\cos(\omega_x x)$ de cette fonction, il est nécessaire de lui ajouter un niveau constant unité. L'image de cette fonction est représenté sur la figure 6(a). Sa transformée de Fourier est (par application de la propriété de translation fréquentielle vue précédemment):



La Transformée de Fourier de la fonction réelle $1 + \cos(\omega_{x0}x)$ est donc constituée de 3 impulsions de Dirac dans l'espace fréquentiel ou *raies fréquentielles*: une raie à l'origine et deux raies symétriques aux fréquences $(\pm\omega_{x0}, 0)$ [la symétrie résulte des propriétés associées aux images réelles – voir début cours -]

La représentation graphique de cette fonction de projection est donnée sur la figure ci-dessous:

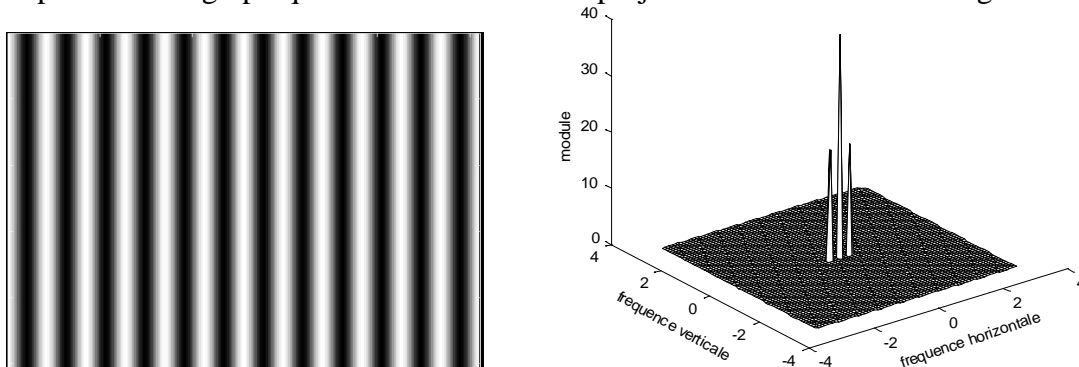


Figure 7 – Transformée de Fourier de $(1 + \cos(\omega_x x))$ pour $\omega_x = 0,3 \text{ rad pixel}$

Par rotation de 90° , nous pouvons décrire la fonction de projection correspondant aux fréquences $(0, \pm\omega_{y0})$. Sa partie réelle est de la forme $1 + \cos(\omega_{y0}y)$.

- $\omega_{x0} \neq 0$ et $\omega_{y0} \neq 0$

La fonction de projection $S_{\omega_x, \omega_y}(x, y) = e^{i\omega_x x} e^{i\omega_y y}$ définie pour une fréquence quelconque $(\omega_{x0}, \omega_{y0})$ présente les mêmes propriétés que pour les directions principales, mais dans une direction θ définie par $\theta = \tan^{-1}(\omega_{y0}/\omega_{x0})$ [par application du principe de rotation de l'image exposé précédemment] .

La figure 8 illustre l'aspect réel de la fonction de décomposition $S_{\omega_{x0}, \omega_{y0}}(x, y)$.

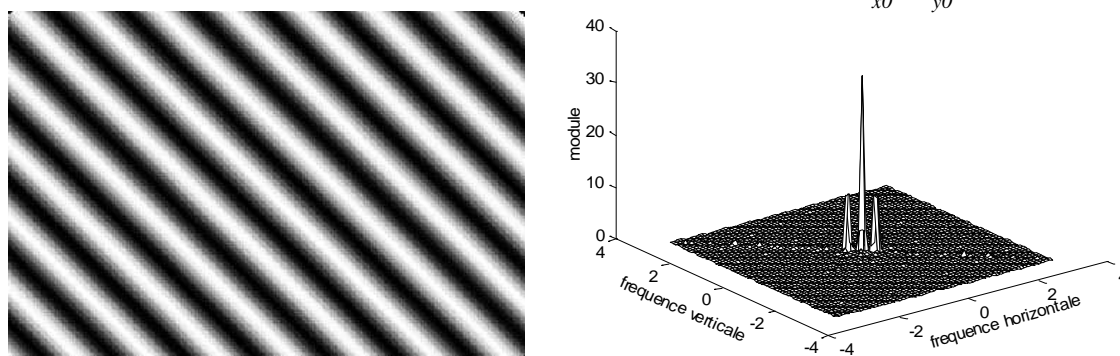


Figure 8 – Transformée de Fourier de $(1 + \Re[e^{i(\omega_x x + \omega_y y)}])$ pour $\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2} = 0,3 \text{ rad/pixel}$

Conclusion

La transformation d'une image continue revient donc à la décomposer en une infinité d'images élémentaires du type de la figure 7 ou 8. Un point de l'espace de Fourier correspond à une composante présente dans l'image source; le module de la raie correspond à l'amplitude de la composante, la phase de la raie peut être interprétée comme la translation de la composante [voir les propriétés de la translation] .

A titre d'exemple, nous pouvons observer le spectre de l'image "Manke" ci-dessous:

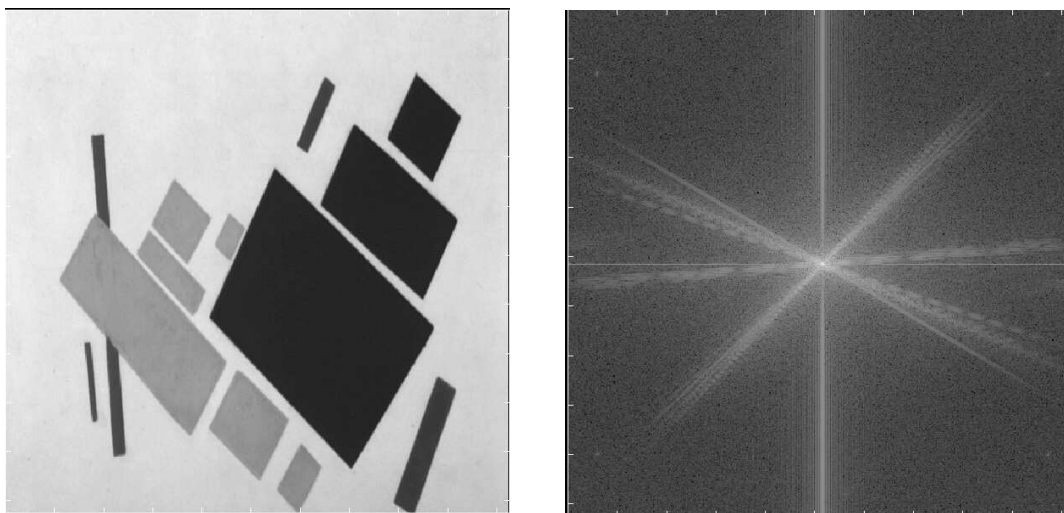


Figure 9 – Transformée de Fourier de l'image "Manke"

Sur la Transformée, on remarque la présence d'énergie dans des directions particulières; ce phénomène est caractéristique de la présence de lignes obliques ou de bords, dont la décomposition fréquentielle est à large spectre (ω grand dans la direction perpendiculaire à la ligne).

La transformée de Fourier d'une image quelconque (portrait par exemple) ne présente pas de propriété particulière.