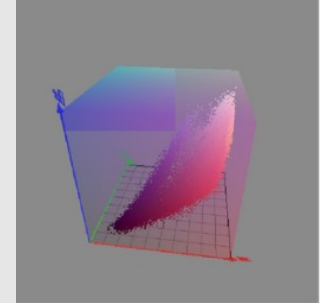
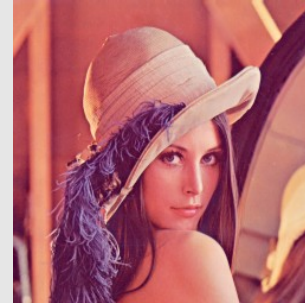


Traitement d'Images

Semaine 4 : transformations ponctuelles



Plan du cours

1 – Transformation d'une image

définitions et propriétés

types de transformations : ponctuelles, locales, globales

2 – Transformations ponctuelles

invariance en translation

transformation du niveau de gris

tables de correspondance : Look Up Table (LUT)

corrections par transformations non invariantes

3 – Transformations calculées à partir de l'histogramme

histogramme des niveaux de gris

interprétation statistique et histogramme cumulé

transformation par égalisation d'histogramme

Transformation d'une image (1/2)

Principe

à partir des valeurs des **composantes** d'une image numérique, on calcule de **nouvelles valeurs** définissant les composantes de l'image **transformée**.

$$I \xrightarrow{t} J = t(I)$$

Types de transformations

ponctuelles : les 2 images ont des **dimensions identiques** et les composantes d'un pixel de l'image transformée ne dépendent que de celles du pixel à la **même position** dans l'image initiale.

locales : les composantes du nouveau pixel sont calculées à partir de celles des pixels d'un **voisinage** du pixel initial.

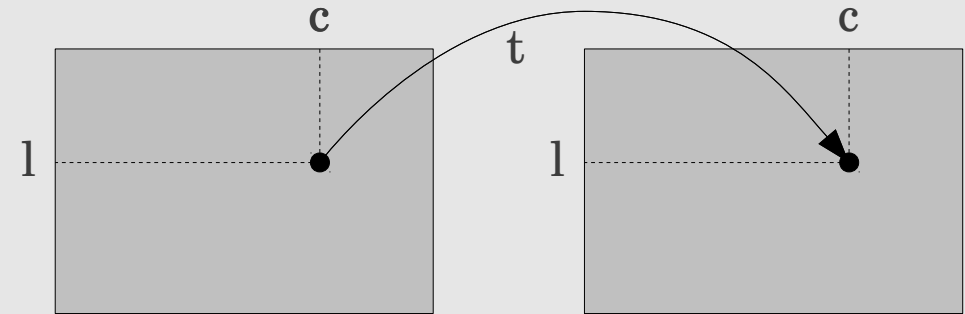
globales : afin de calculer les composantes d'un pixel de l'image transformée, **toutes** les composantes de **tous** les pixels de l'image initiale peuvent être intervenir.

Transformation d'une image (2/2)

ponctuelle

$$I(l, c) \xrightarrow{t} J(l, c) = t(I(l, c))$$

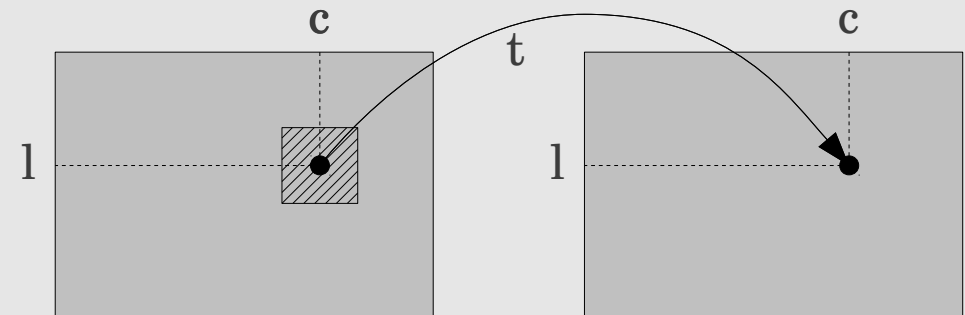
ex : seuillage, ajustement de luminosité, de contraste...



locale, ou de voisinage

$$I(l, c) \xrightarrow{t} J(l, c) = t(I(V(l, c)))$$

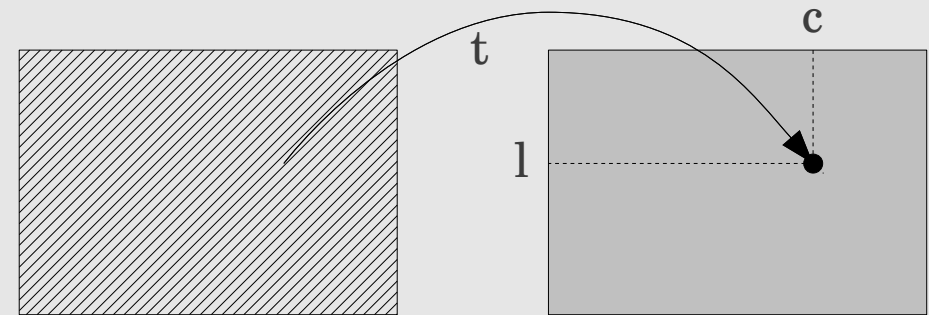
ex : filtrage, morphologie



globale

$$I(l, c) \xrightarrow{t} J(l, c) = t(I)$$

ex : transformation de Fourier



Transformation ponctuelle invariante par translation (1/3)

Cas général, version continue

l'image de départ, à **n composantes**, prend ses valeurs dans un compact de \mathbb{R}^n et l'image transformée, à **m composantes**, prend ses valeurs dans un compact de \mathbb{R}^m .

la transformation ponctuelle est donc une **fonction** définie sur un compact de \mathbb{R}^n à valeurs dans un compact de \mathbb{R}^m .

exemple : changement d'**espace colorimétrique**.

Version continue, cas des images à une composante

le **niveau de gris** de l'image initiale est compris dans un **intervalle borné** de valeurs admissibles.

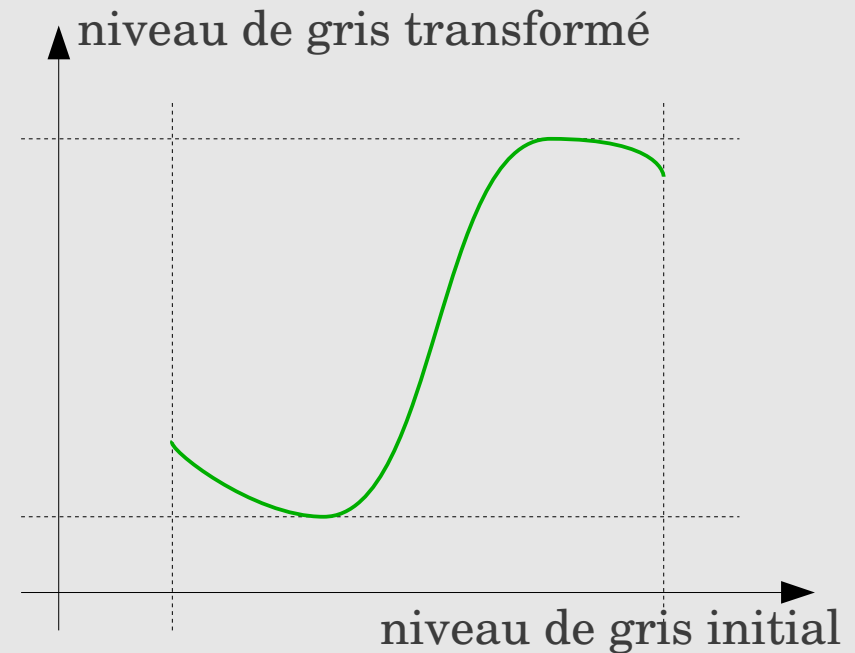
idem pour le **niveau de gris** de l'image **transformée**.

la transformation ponctuelle est alors une **fonction** d'un **intervalle borné** de \mathbb{R} vers un autre **intervalle borné** de \mathbb{R} .

Transformation ponctuelle invariante par translation (2/3)

Graphes de correspondance

représente la fonction définie sur l'ensemble des niveaux de gris de l'image initiale et à valeurs dans l'ensemble des niveaux de gris de l'image transformée



Cas des images quantifiées

le **niveau de gris** d'une image quantifiée est un entier prenant ses valeurs dans un **intervalle borné** de \mathbb{Z} .

idem pour le **niveau de gris** de l'image **transformée**.

la transformation ponctuelle est alors une **fonction** d'un **intervalle borné** de \mathbb{Z} vers un autre **intervalle borné** de \mathbb{Z} .

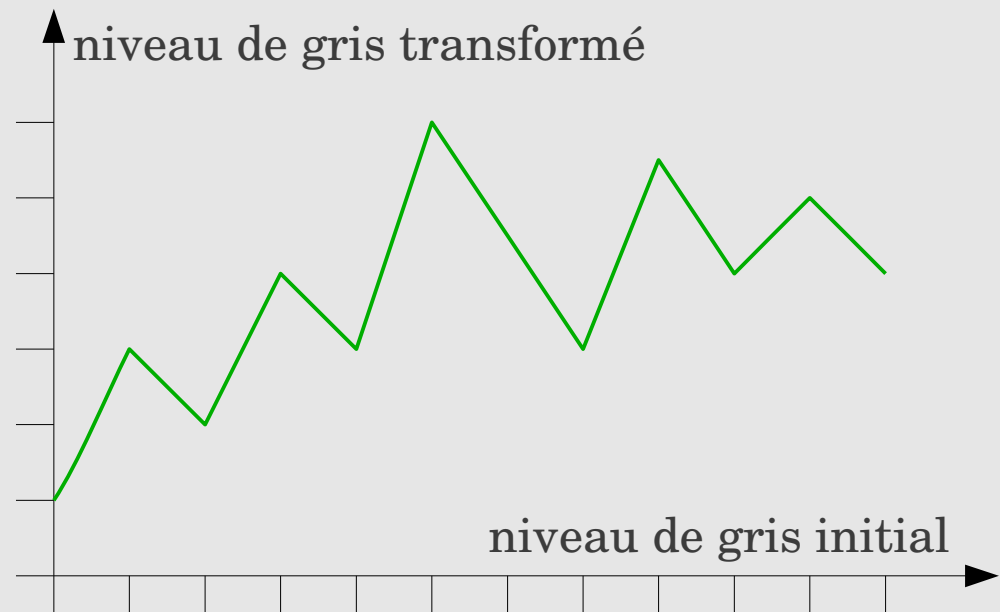
Transformation ponctuelle invariante par translation (3/3)

Table de correspondance = Look Up Table (LUT)

à chaque valeur entière du niveau de gris de l'image initiale est **associée** une valeur entière du niveau de gris transformé.

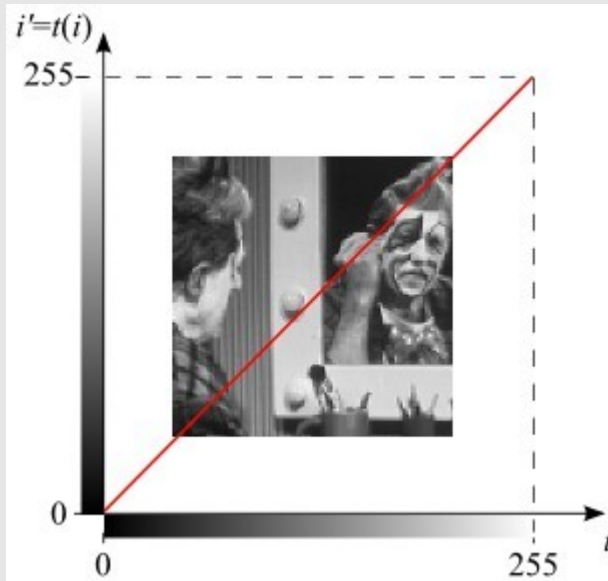
ces associations peuvent être représentées par un **tableau** à une dimension : le niveau de gris initial est l'**indice** de tableau et le **contenu** est le niveau de gris de l'image transformée

0	t(0)
1	t(1)
2	t(2)
3	t(3)
...	
n-1	t(n-1)
n	t(n)



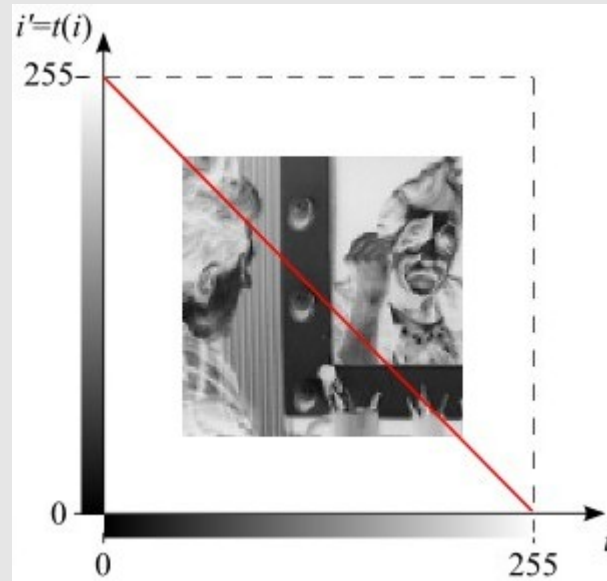
Exemples de transformations par LUT

identité



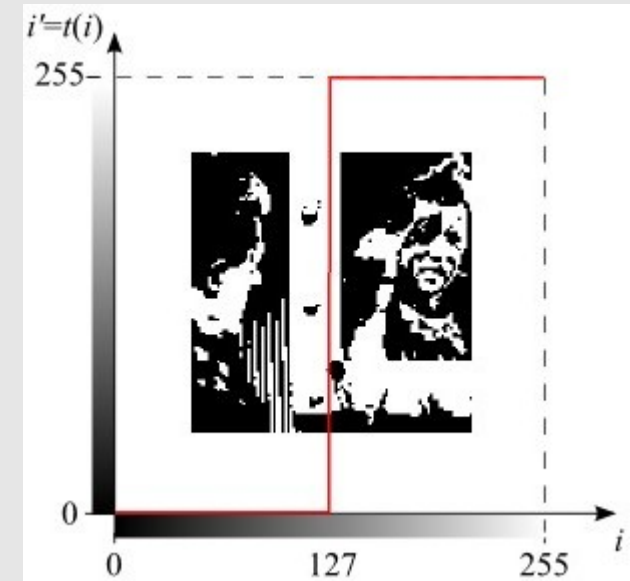
0	0
1	1
2	2
...	
254	254
255	255

inversion



0	255
1	254
2	253
...	
254	1
255	0

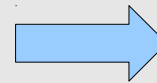
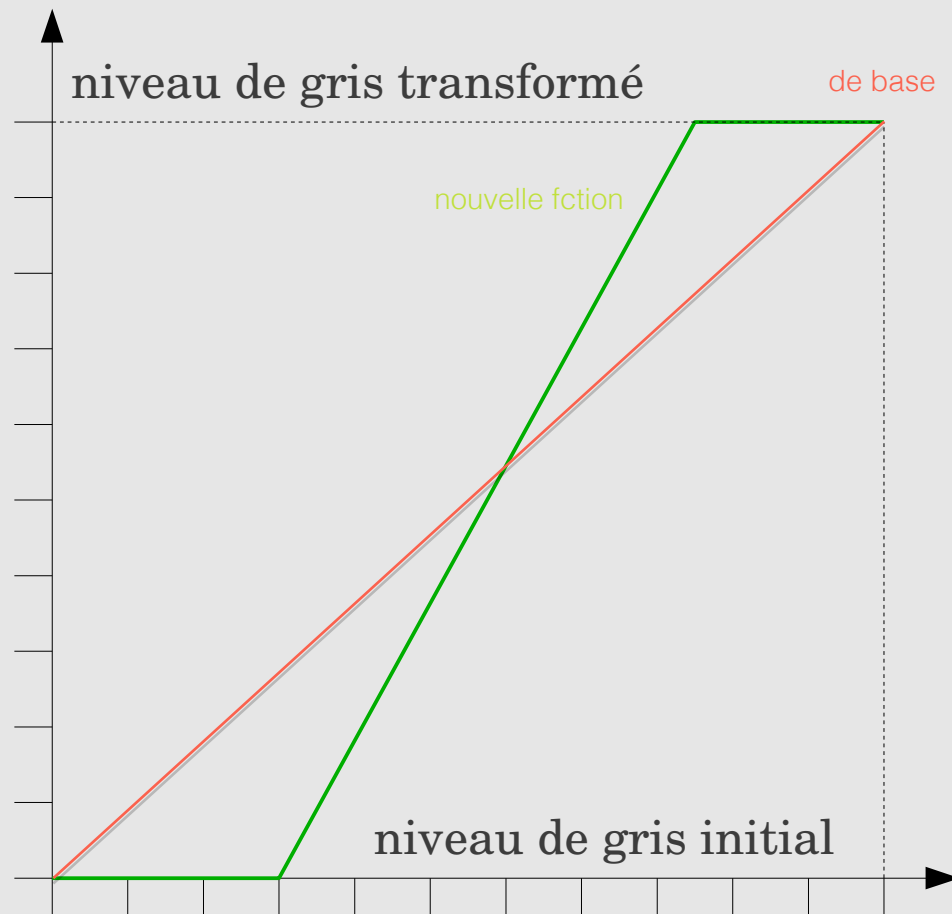
binarisation



0	0
...	
s	0
s+1	255
...	
255	255

Expansion de la dynamique des niveaux de gris

objectif : allouer toute la **dynamique** des niveaux de gris à une certaine **gamme** de niveaux de gris de l'image initiale



Transformation ponctuelle non invariante par translation

Expression générale

le niveau de gris d'un pixel de la nouvelle image est une fonction de sa **position** et du **niveau de gris** du pixel initial.

$$I(l, c) \xrightarrow{t} J(l, c) = t(l, c, I(l, c))$$

Exemple : transformation affine

permet de corriger les **imperfections** d'un système de capture d'image, par compensation du **gain** et de l'**offset**.

$$J(l, c) = g(l, c) \times I(l, c) + o(l, c)$$

on peut par exemple compenser le **vignettage** d'un objectif en **augmentant** le niveau de gris des pixels situés à **proximité des bordures** de l'image (**gain** fonction de la **distance** au centre).

Correction de vignettage

Méthode

on dispose d'une image de **référence** obtenue par acquisition d'une scène éclairée de façon uniforme.

on **corrige** le vignettage en multipliant, pixel à pixel, le niveau de gris de l'image initiale par l'**inverse** de l'image de référence.

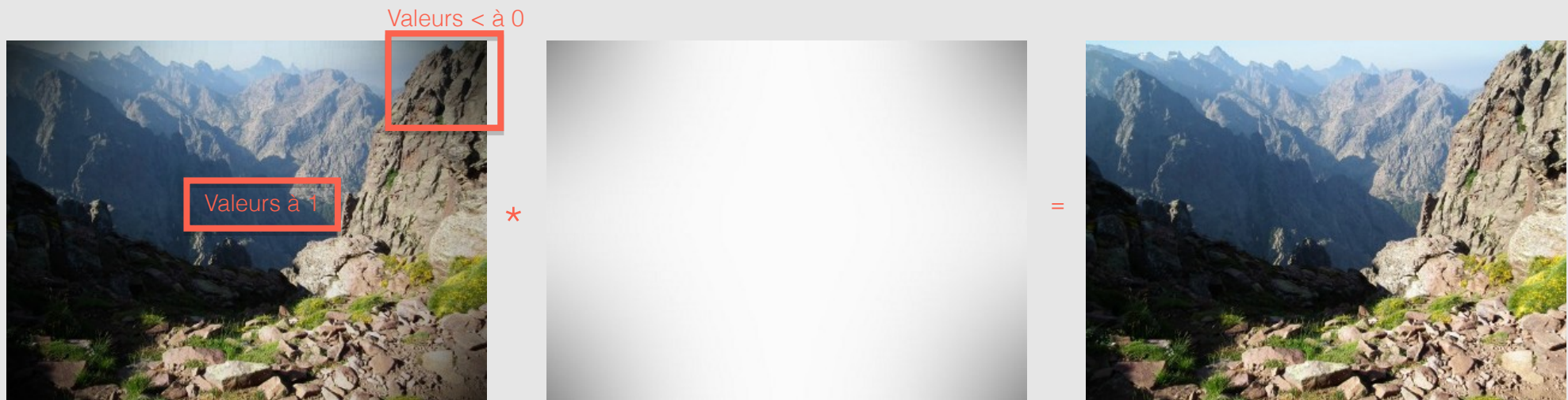


image initiale, vignettage visible sur les bords

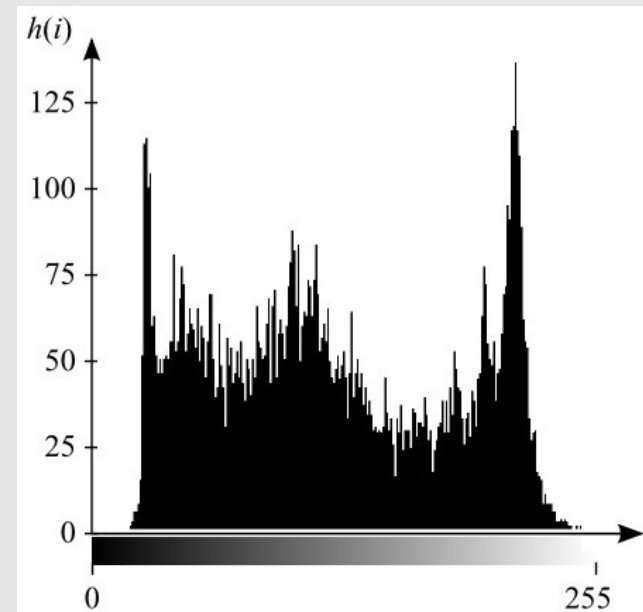
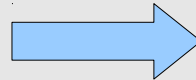
image de référence

image corrigée, effet de vignettage estompé

Histogramme des niveaux de gris

Principe

partition de l'ensemble des valeurs possibles du niveau de gris.
image continue : surface des **sections** de l'image dans lesquelles le niveau de gris appartient à chaque ensemble de la partition.
image discrète : **dénombrement** des pixels de l'image dont le niveau de gris appartient à chaque ensemble de la partition.



Histogramme et histogramme cumulé

souvent, la partition des niveaux de gris est l'**ensemble ordonné** des **singletons** correspondant à un seul niveau de gris.

la **somme** des valeurs de l'histogramme pour toutes les valeurs possibles du niveau de gris est le **nombre** de pixels de l'image.

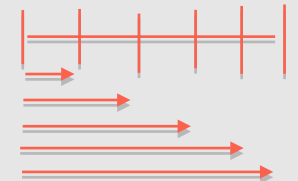
$$\sum_{g=0}^{g_{max}} h(g) = N_l \times N_c$$

Histogramme cumulé

l'**histogramme cumulé** dénombre les pixels dont le niveau de gris est **inférieur ou égal** à une valeur donnée.

il peut se calculer par **récurrence** à partir de l'histogramme.

$$h_c(0) = h(0), \quad \forall g > 0, \quad h_c(g) = h_c(g-1) + h(g)$$



la valeur de l'histogramme cumulé pour le niveau de gris **maximal** de l'image est le **nombre total de pixels** de l'image.

Histogramme des niveaux de gris et statistiques

Interprétation statistique

le niveau de gris G est considéré comme une **réalisation** d'un **processus stochastique** pour lequel la **probabilité d'occurrence** d'un niveau de gris est défini par une **densité de probabilité**.
Aléatoire
 quand le nombre de réalisations est **fini** (pixels d'une image numérique), et que les niveaux de gris sont **quantifiés**, la densité de probabilité est estimée à partir de l'**histogramme** :

$$\underline{P(G=g)} = \frac{\text{Card}(\{(c, l) \in \Omega \mid I(c, l) = g\})}{\text{Card}(\Omega)} = \frac{h(g)}{N_l \times N_c}$$

Histogramme

Nombre total de réalisation par image (nombre de pixels de l'image)

la **fonction de répartition** de la distribution des niveaux de gris se calcule à partir de l'**histogramme cumulé**.

$$\underline{P(G \leq g)} = \frac{\sum_{i \leq g} h(g)}{N_l \times N_c} = \frac{h_c(g)}{N_l \times N_c}$$

Histogramme cumulé

Histogramme et propriétés des images

la **luminosité** d'une image peut être estimée à partir de la **valeur moyenne** des niveaux de gris de tous ses pixels.

le **contraste** d'une image peut être estimé à partir de l'**écart type** des niveaux de gris de tous ses pixels.

Luminosité

$$\mu = \frac{\sum_{g=0}^{g_{\max}} h(g) \cdot g}{N_l \times N_c}$$

Écart type

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{g=0}^{g_{\max}} h(g) \cdot (g - \mu)^2}{N_l \times N_c}}$$



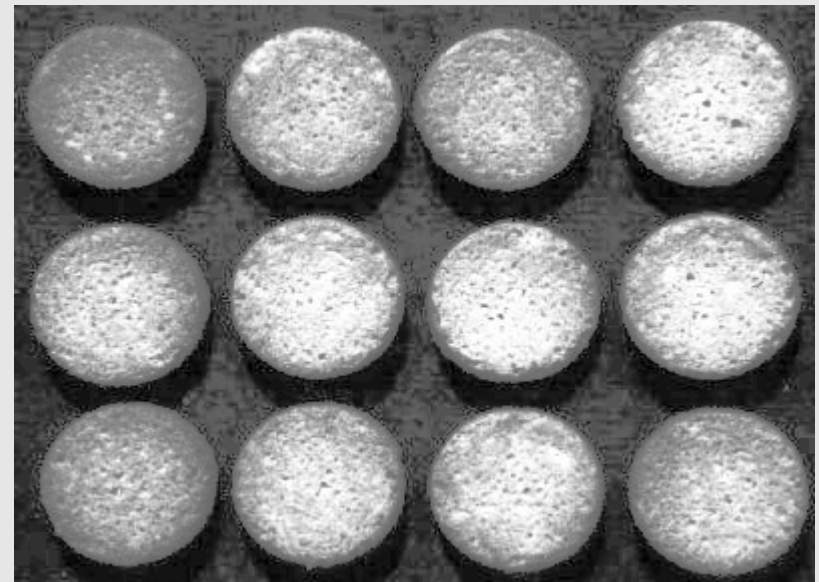
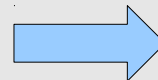
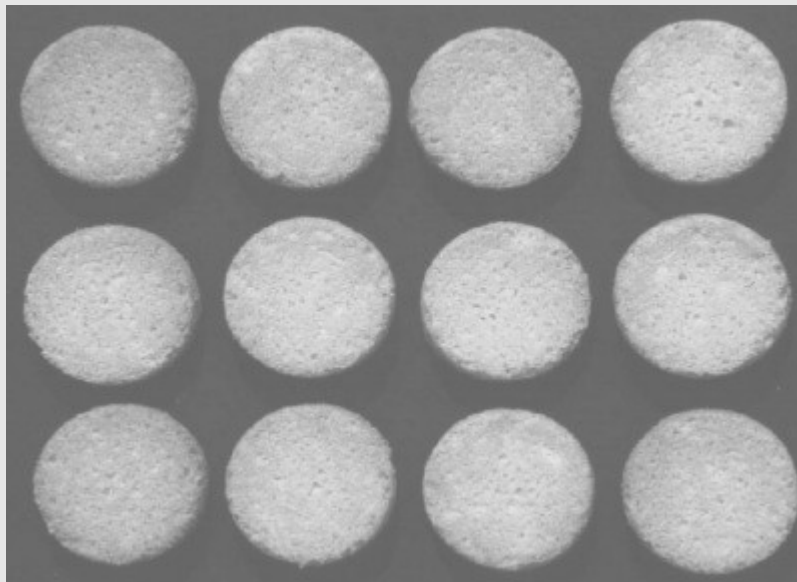
Égalisation d'histogramme

Objectif

tenter d'**uniformiser** la distribution des niveaux de gris pour obtenir une luminosité **moyenne** et un contraste **maximal**.

Méthode

changer la **répartition** des niveaux de gris en appliquant à l'image une transformation ponctuelle **adaptée**.



Égalisation d'histogramme, niveau de gris continu

Calcul de la transformation

F(.) et **G(.)** sont les **fonctions de répartition** des niveaux de gris **f** et **g**, respectivement de l'image **initiale** et de sa **transformée**.
 si **t(.)** est une **transformation ponctuelle**, continue, différentiable et strictement croissante, qui transforme **f en g**, alors :

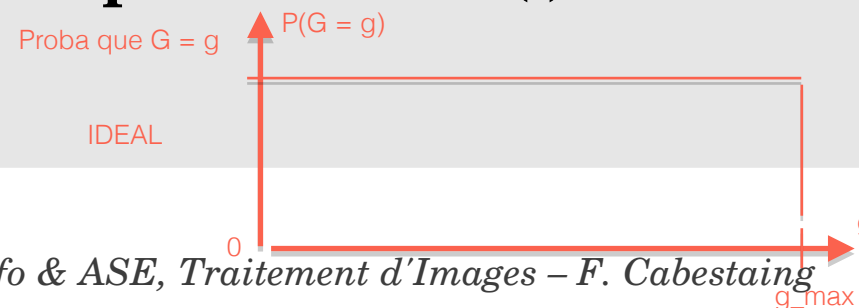
$$\frac{\partial G}{\partial g}(g_1) = \frac{\partial F}{\partial f}(t^{-1}(g_1)) \cdot \frac{\partial f}{\partial g}(t^{-1}(g_1))$$

Inverse de ça

il suffit donc de choisir une **transformation** égale à la **fonction de répartition** du niveau de gris de l'image initiale :

$$g = t(f) = F(f) \quad \text{Dans le cas discret c'est l'histogramme cumulé}$$

pour obtenir une densité de probabilité **G(.)** **constante** pour l'image transformée.



Égalisation d'histogramme, niveau de gris quantifié

Calcul de la transformation

g_{max} désigne la valeur **maximale** du niveau de gris **g** de l'image **transformée**.

pour une image dont le niveau de gris est **quantifié**, l'équivalent de la **fonction de répartition** est l'**histogramme cumulé**.

la transformation est l'histogramme cumulé de l'image initiale normalisé par le **nombre total de pixels** de cette image :

$$g = \underline{t(f)} = \frac{g_{max}}{N_l \times N_c} h_c(f) = \frac{g_{max}}{N_l \times N_c} \sum_{i=0}^f h(i)$$

en pratique, il est impossible d'obtenir une **parfaite uniformité** de la distribution des niveaux de gris : l'égalisation ne porte que sur la **répartition globale** des niveaux de gris

Égalisation d'histogramme, exemple

image initiale

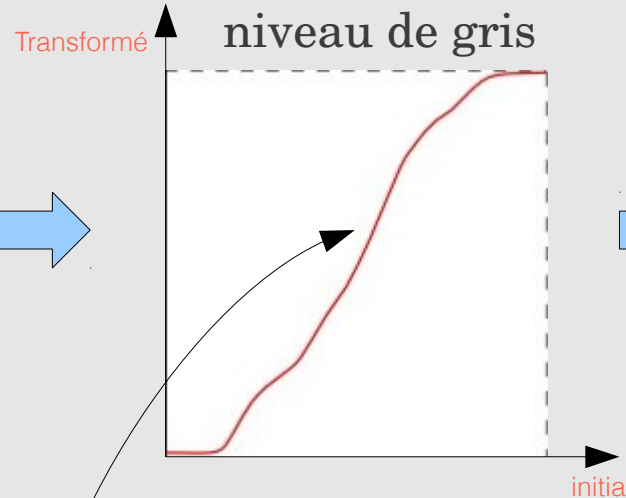
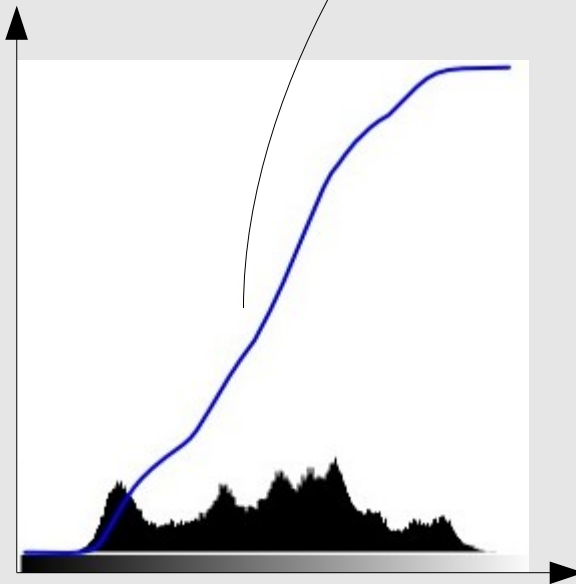
transformation
niveau de gris

image égalisée

histogramme
cumulé

histogramme

nouveau
histogramme
cumulé
« linéaire »nouveau
histogramme
« uniforme »