

« *Analyse vectorielle de la lumière et codage polarimétrique* »

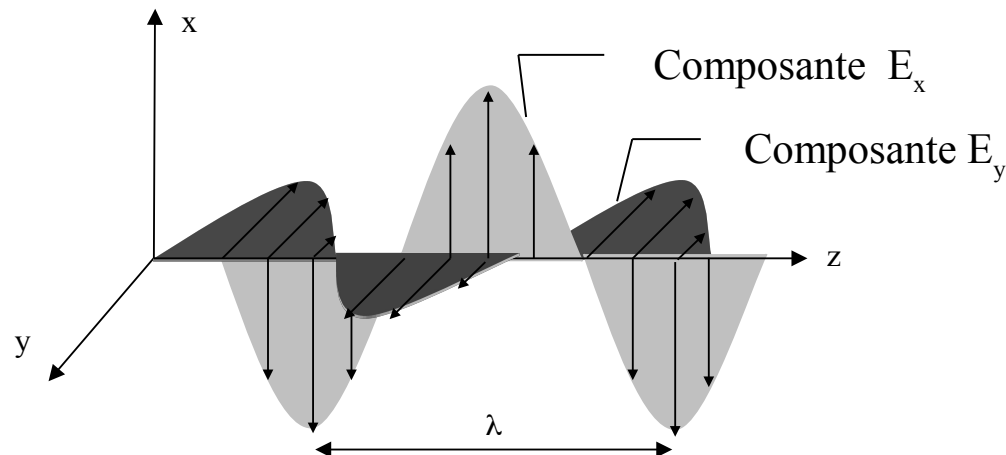
Vincent Devlaminck

Quelques définitions

omega -> longueur d'onde

$$\begin{cases} \vec{E}_x(z,t) = A_x \cos(\omega t - kz) \vec{x} \\ \vec{E}_y(z,t) = A_y \cos(\omega t - kz + \varepsilon) \vec{y} \end{cases}$$

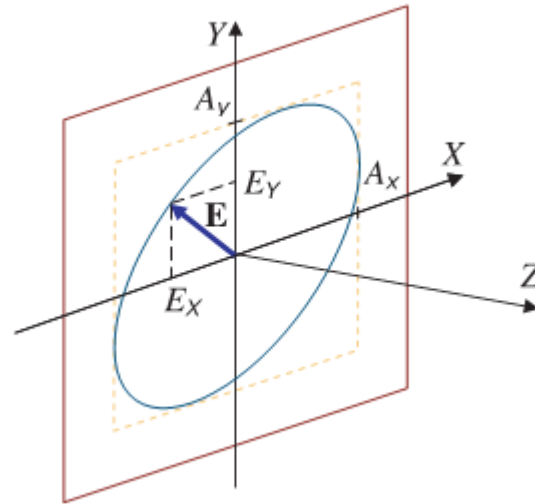
epsilon -> defasage



Décomposition du champ électrique d'une onde lumineuse sur une base orthogonale.

Ellipse de polarisation

$$\frac{E_x^2}{A_x^2} + \frac{E_y^2}{A_y^2} - \frac{2E_x E_y}{A_x A_y} \cos \varepsilon = \sin^2 \varepsilon$$



L'ellipse est en rapport avec la figure précédente

Cas particuliers:

$\varepsilon = 0$ ou $\pm\pi$: l'ellipse devient une droite : **polarisation linéaire**.

ε est égal à $\pm\pi/2$; l'ellipse devient un cercle: **polarisation circulaire**

Tous les autres cas : **polarisation elliptique**

On parle d'états **purs** de polarisation

Ecriture complexe:

module(A) exponentiel un déphasage -> []

$$\eta_x(r, t) = E_x(r, t) + i \tilde{E}_x(r, t) = A_x(r, t) \exp \left[i(u(t) - \beta_x(t)) \right]$$

$$\eta_y(r, t) = E_y(r, t) + i \tilde{E}_y(r, t) = A_y(r, t) \exp \left[i(u(t) - \beta_y(t)) \right]$$

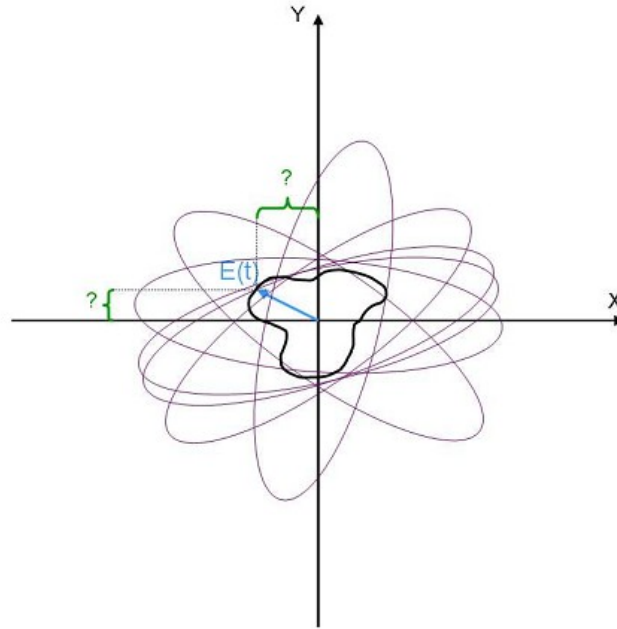
$$\beta_x(t) - \beta_y(t) = \varepsilon(t) \quad \text{Terme de déphasage}$$

$$\begin{pmatrix} \eta_x(r, t) \\ \eta_y(r, t) \end{pmatrix} = \exp \left[i(u(t) - \beta_x(t)) \right] \begin{pmatrix} A_x(r, t) \\ A_y(r, t) \exp \left[i(\beta_x(t) - \beta_y(t)) \right] \end{pmatrix}$$

Vecteur de Jones instantané

$$E(t) = \begin{pmatrix} A_x(r, t) \\ A_y(r, t) \exp \left[i\varepsilon(t) \right] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}$$

Mesures par une caméra...



Dans le cas où le champs électrique fluctue aléatoirement

E_1 et E_2 sont des variables aléatoires

Matrice de cohérence

Dans le cas où le champ électrique fluctue aléatoirement

E_1 et E_2 sont des variables aléatoires

La matrice de cohérence Φ est la matrice de covariance des composantes E_i du champ électrique complexe

$$\Phi = \left\langle \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^{\dagger} \right\rangle = \begin{bmatrix} \langle E_1 E_1^* \rangle & \langle E_1 E_2^* \rangle \\ \langle E_2 E_1^* \rangle & \langle E_2 E_2^* \rangle \end{bmatrix}$$

parenthèse = moyenne car variable aléatoire

Si stationnaire : ne dépend pas de l'origine des temps

Si ergodique : moyenne d'ensemble \equiv moyenne au cours du temps.

Φ est une matrice hermitienne semi définie positive :
ses valeurs propres sont réelles et positives ou nulles.

Exemple de matrices pour des états purs de polarisation:

$$\Phi = \begin{cases} \bar{I} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{polarisation linéaire horizontale} \\ \bar{I} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & \text{polarisation linéaire verticale} \\ \frac{\bar{I}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} & \text{polarisation linéaire à } 45^\circ \end{cases}$$

$$\Phi = \begin{cases} \frac{\bar{I}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix} & \text{polarisation circulaire droite} \\ \frac{\bar{I}}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix} & \text{polarisation circulaire gauche} \end{cases}$$

Propriétés de la matrice de cohérence

Comme matrice de covariance: hermitienne semi définie positive

– λ_1 et λ_2 ses valeurs propres sont positives ou nulles.

$$\det(\Phi) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \geq 0 \quad \text{et} \quad \text{Tr}(\Phi) = \lambda_1 + \lambda_2 = \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle = \bar{I} \geq 0$$

caré d'un champ électrique = intensité

- Il est possible de trouver une base où la matrice est diagonale.

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_1 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Degré de polarisation:

$$P = \frac{\left| \lambda_1 - \lambda_2 \right|}{\left| \lambda_1 + \lambda_2 \right|} \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 = \lambda_2 & P=0 \\ \lambda_1 = 0 \text{ ou } \lambda_2 = 0 & P=1 \\ \lambda_1 \neq \lambda_2 & 0 < P < 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{onde non polarisée} \\ \text{onde complètement polarisée} \\ \text{onde partiellement polarisée} \end{array}$$

Invariants de la matrice de cohérence

Décomposition d'un état de polarisation (pas unique):

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = (1 - P) \cdot \bar{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + P \cdot \bar{I} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Invariants :

$$P = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} = \sqrt{1 - 4 \frac{\det(\Phi)}{\text{Tr}(\Phi)^2}}$$

$$\bar{I} = \lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr}(\Phi)$$

Vecteur de Stokes

Vecteur de Stokes:

$$\Phi = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^3 S_j \sigma_j = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_0 + S_1 & S_2 - iS_3 \\ S_2 + iS_3 & S_0 - S_1 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle E_1^2 \rangle + \langle E_2^2 \rangle \\ \langle E_1^2 \rangle - \langle E_2^2 \rangle \\ 2\langle E_1 E_2 \cos(\varepsilon) \rangle \\ 2\langle E_1 E_2 \sin(\varepsilon) \rangle \end{bmatrix}$$

S_0 intensité totale

S_1 intensité polar. linéaire H

S_2 intensité polar. linéaire à 45°

S_3 intensité polar. circulaire

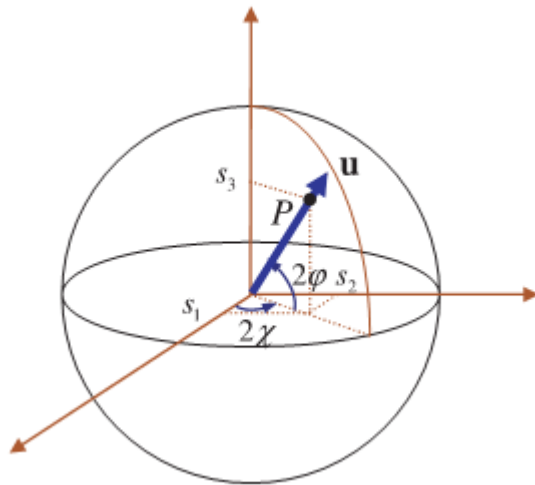
Condition physique:

$$\det(\Phi) = S_0^2 - (S_1^2 + S_2^2 + S_3^2) \geq 0$$

Sphère de Poincaré

$$\mathbf{S} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & i & -i & 0 \end{bmatrix}$$

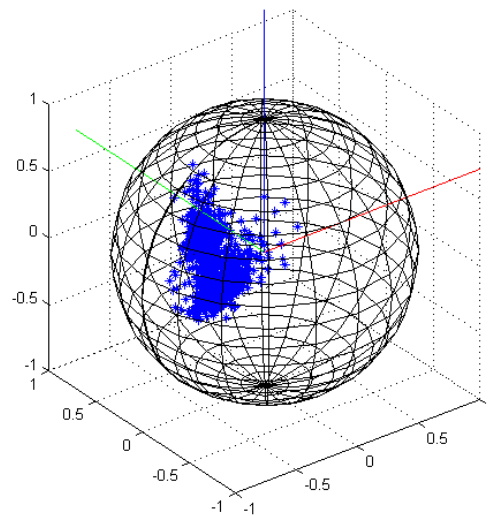
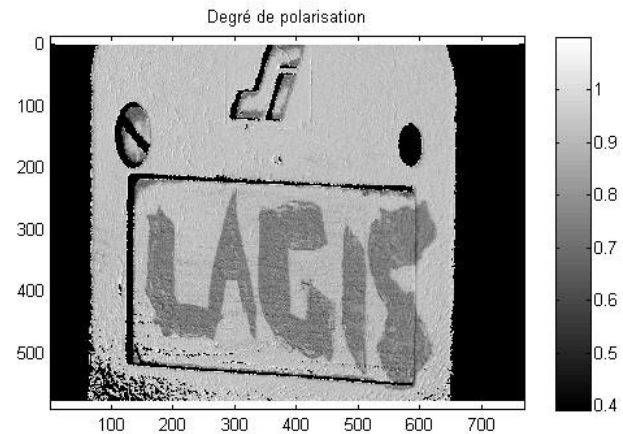
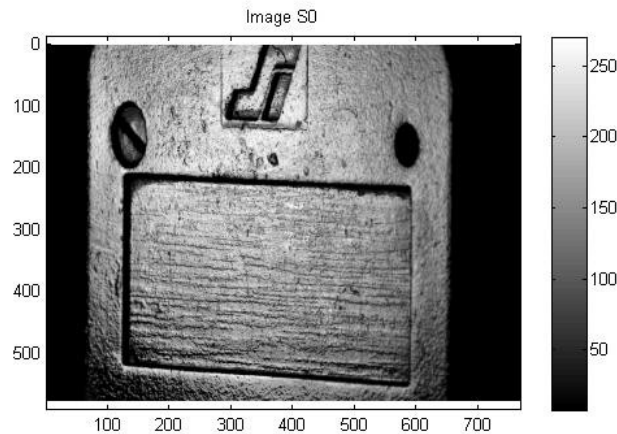


$$P = \sqrt{\frac{S_1^2 + S_2^2 + S_3^2}{S_0^2}} \quad 0 \leq P \leq 1$$

$$s_1 = \frac{S_1}{S_0}, s_2 = \frac{S_2}{S_0}, s_3 = \frac{S_3}{S_0}$$

Etats purs ($P=1$) surface de la sphère
 Onde non polarisée centre de la sphère
 Onde partiellement polarisée: intérieur de la sphère

Quelques exemples



**Éclairage par
lumière polarisée**

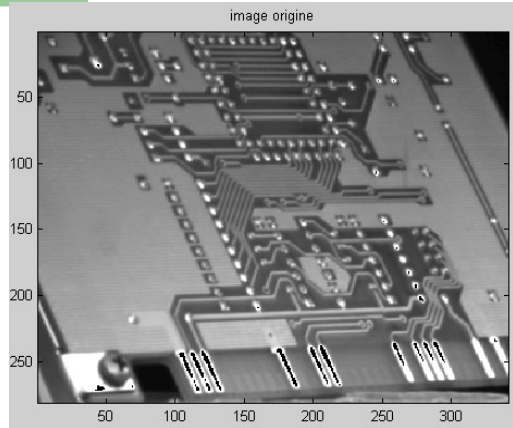


Fig. 4.4a: Image radiométrique du circuit imprimé

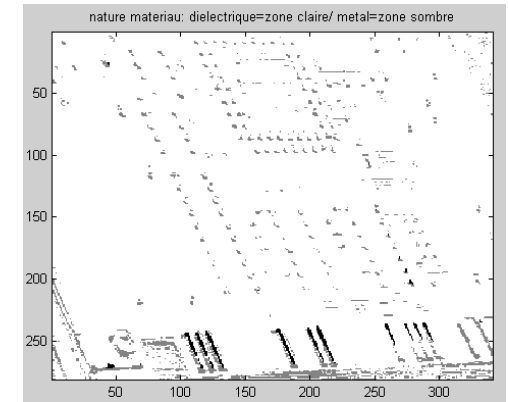
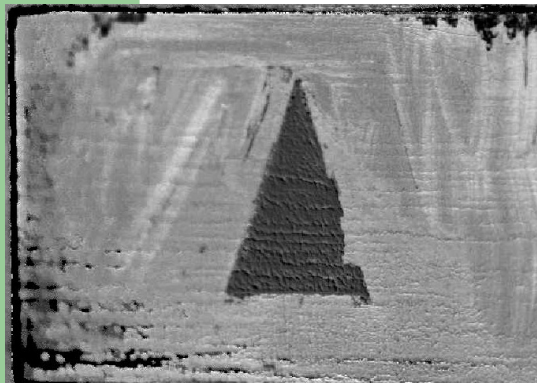
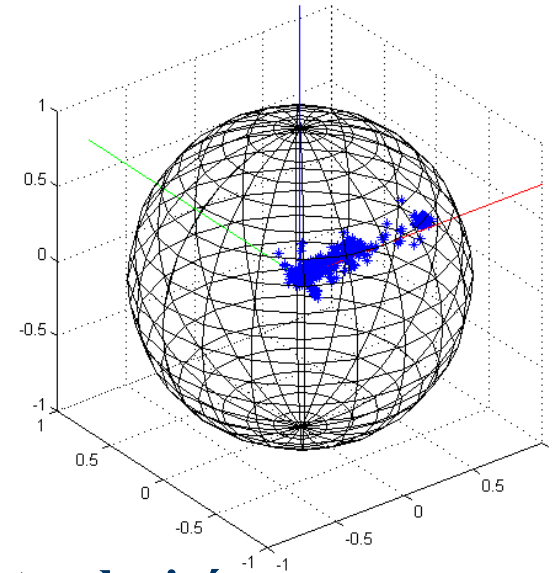
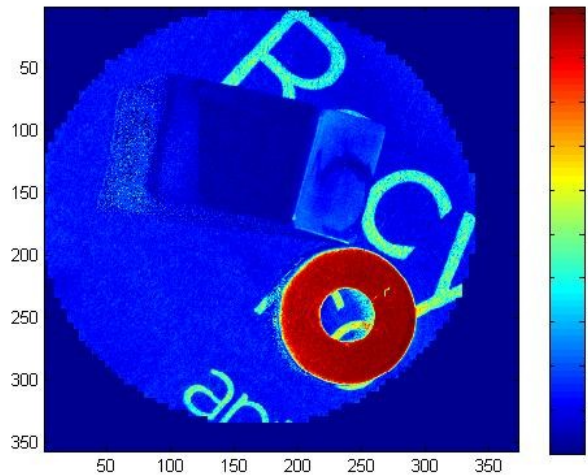


Fig. 4.4b: Extraction des parties métalliques de l'image

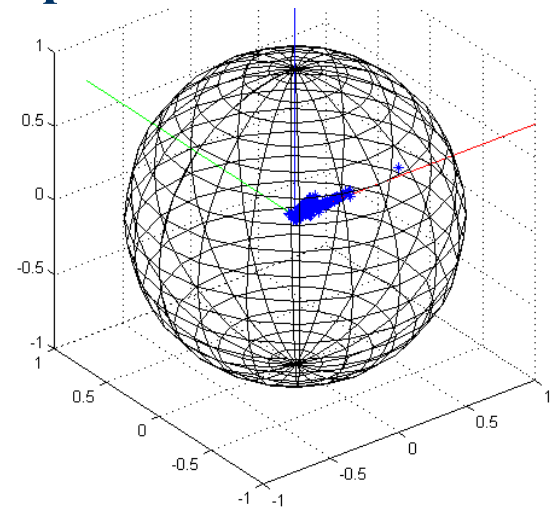
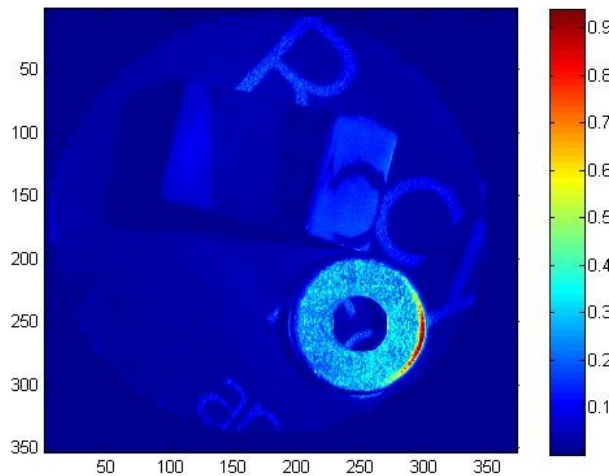


Huile sur métal

Éclairage par lumière polarisée



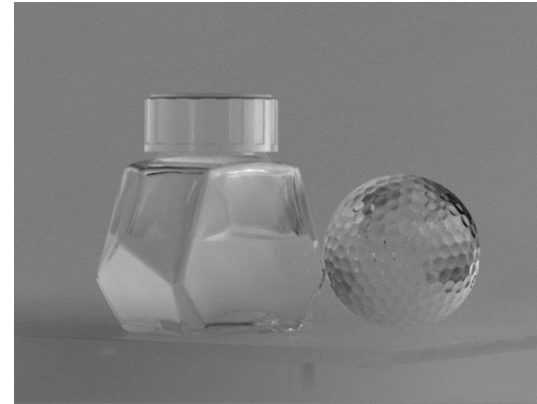
Éclairage par lumière partiellement polarisée



Quelques exemples



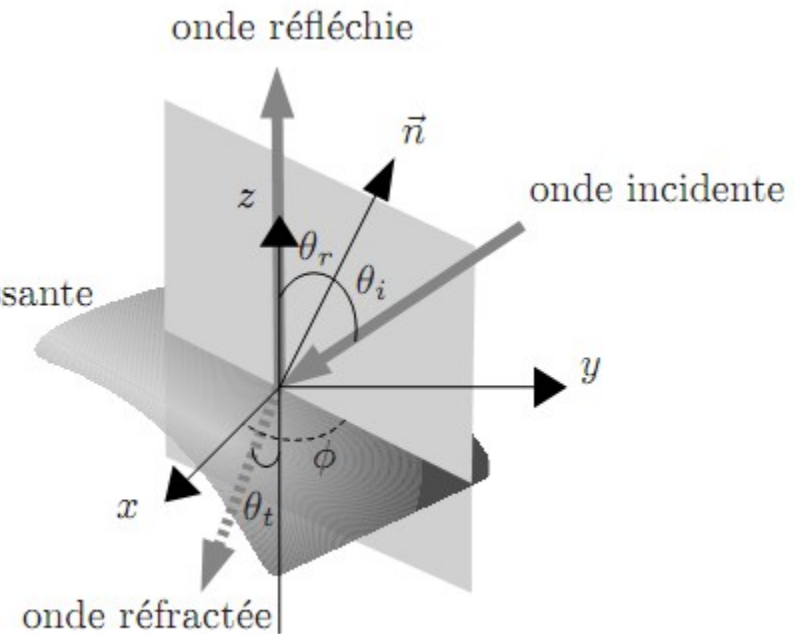
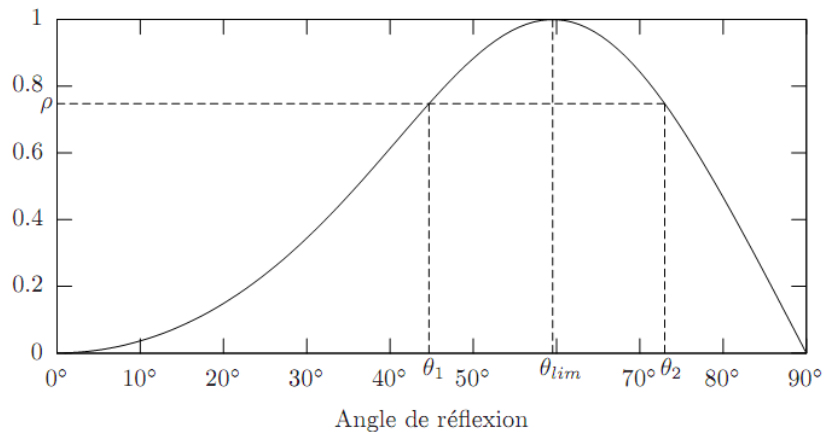
Intensité (S_0)



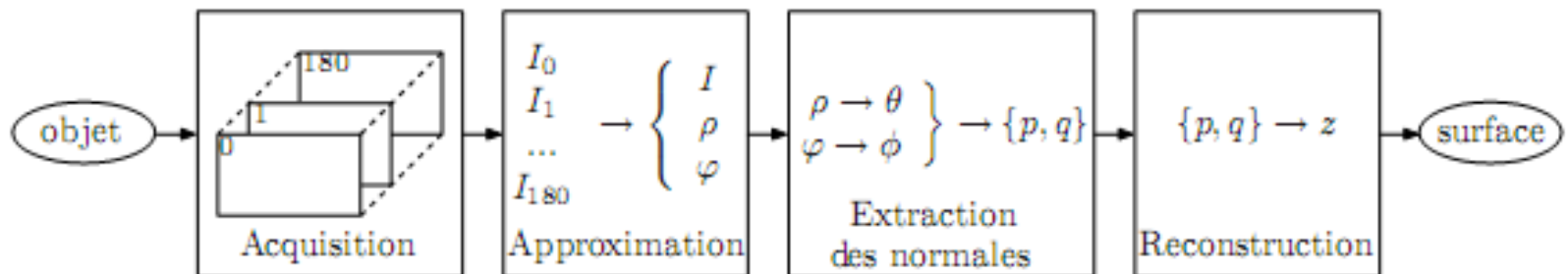
Composante S_1

$$\text{DOP}(\theta) = \frac{2 \sin \theta \tan \theta \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{n^2 - 2 \sin^2 \theta + \tan^2 \theta}$$

$$\phi = \varphi \pm \frac{\pi}{2}$$



$$\vec{n} = \begin{bmatrix} p = \tan \theta \cos \phi \\ q = \tan \theta \sin \phi \\ 1 \end{bmatrix}$$



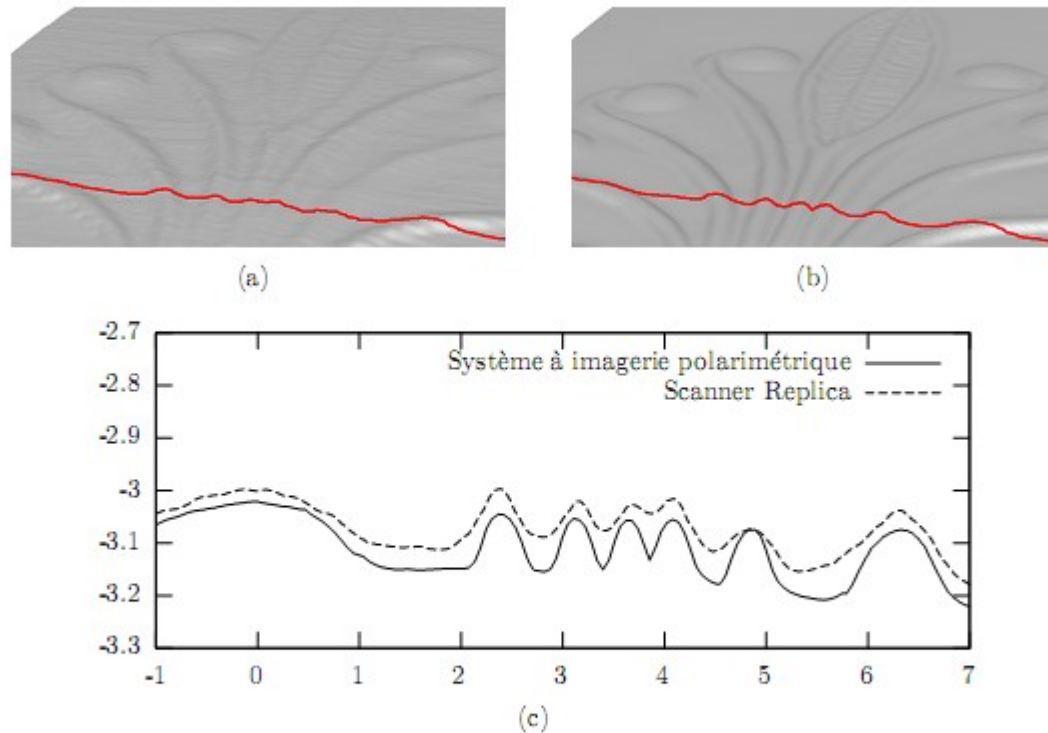


Figure 5.29 – Reconstruction tridimensionnelle des décors de l'objet : (a) surface obtenue avec le scanner Replica, (b) surface obtenue avec notre système, (c) comparaison d'un profil (l'échelle des axes est en *mm*).

Exemple

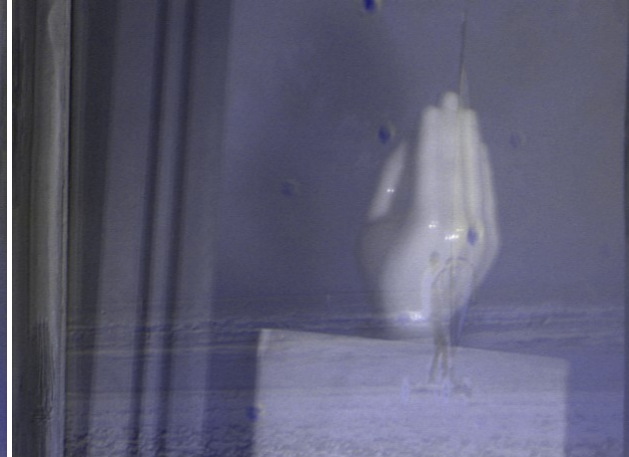


**Images obtenues pour 2 positions
orthogonales du polariseur**

Acquisitions

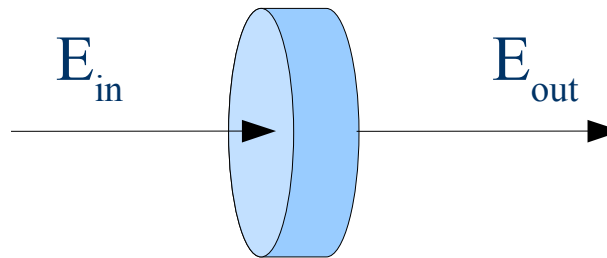
Solution RGB

Solution Multi-Filtres



Interaction linéaire avec la matière

Considérons d'abord le cas déterministe:



$$\mathbf{E}_{\text{in}} = \begin{bmatrix} E_1^{\text{in}} \\ E_2^{\text{in}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{\text{out}} = \begin{bmatrix} E_1^{\text{out}} \\ E_2^{\text{out}} \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_{\text{out}} = \mathbf{J} \mathbf{E}_{\text{in}}$$

\mathbf{J} : Matrice de Jones du milieu supposé linéaire et déterministe

Matrices de Jones

Différence d'absorption suivant les axes: diatténuation $J_D(0,\eta)$
(matériaux dichroïques)

$$\begin{pmatrix} e^{-\eta_1} & 0 \\ 0 & e^{-\eta_2} \end{pmatrix} = e^{-(\eta_1+\eta_2)/2} \begin{pmatrix} e^{\eta/2} & 0 \\ 0 & e^{-\eta/2} \end{pmatrix} \quad \eta = \eta_2 - \eta_1$$

Différence d'indice de réfraction suivant les axes : retardance $J_R(0,\delta)$
(matériaux biréfringents)

$$\begin{pmatrix} e^{i\delta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_2} \end{pmatrix} = e^{-i(\delta_1+\delta_2)/2} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \quad \delta = \delta_2 - \delta_1$$

Rotation des axes

$$J_D(\theta,\delta) = R(-\theta)J_D(0,\delta)R(\theta)$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & -\sin(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) & \cos(\theta/2) \end{pmatrix}$$

Matrice de Mueller-Jones

$$\Phi_{\text{out}} = \langle \mathbf{E}_{\text{out}} \otimes \mathbf{E}_{\text{out}}^\dagger \rangle = \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{\text{in}} \otimes (\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{\text{in}})^\dagger \rangle = \mathbf{J} \langle \mathbf{E}_{\text{in}} \otimes \mathbf{E}_{\text{in}}^\dagger \rangle \mathbf{J}^\dagger$$

$$\Phi_{\text{out}} = \mathbf{J} \Phi_{\text{in}} \mathbf{J}^\dagger$$

Sous l'action d'une matrice de Jones déterministe, un état pur reste un état pur.

$$\mathbf{S} = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \Phi_{11} \\ \Phi_{12} \\ \Phi_{21} \\ \Phi_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{L} \langle \mathbf{E} \otimes \mathbf{E}^* \rangle$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{out}} &= \mathbf{L} \langle \mathbf{E}_{\text{out}} \otimes \mathbf{E}_{\text{out}}^* \rangle = \mathbf{L} \langle \mathbf{J} \mathbf{E}_{\text{in}} \otimes (\mathbf{J} \mathbf{E}_{\text{in}})^* \rangle \\ &= \mathbf{L} \langle (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) (\mathbf{E}_{\text{in}} \otimes \mathbf{E}_{\text{in}}^*) \rangle \\ &= \mathbf{L} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) \langle \mathbf{E}_{\text{in}} \otimes \mathbf{E}_{\text{in}}^* \rangle = \mathbf{L} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{S}_{\text{in}}) \\ \mathbf{S}_{\text{out}} &= \left[\mathbf{L} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) \mathbf{L}^{-1} \right] \cdot \mathbf{S}_{\text{in}} \end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_{\text{Jones}} = \mathbf{L} (\mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^*) \mathbf{L}^{-1}$$

Polariseur linéaire horizontal et vertical

$$\mathbf{M}^{\text{H}}_{\text{pol}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}^{\text{V}}_{\text{pol}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rotateur d'angle θ

$$\mathbf{M}_{\text{rot}}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Polariseur linéaire axe orienté en θ

$$\mathbf{M}_{\text{pol}}(\theta) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\theta) & \sin(2\theta) & 0 \\ \cos(2\theta) & \cos^2(2\theta) & \cos(2\theta)\sin(2\theta) & 0 \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta)\sin(2\theta) & \sin^2(2\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Déphaseur (lame de retard) de φ

$$\mathbf{M}_{\text{dephas}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

Deux cas particuliers

$$\mathbf{M}_{\frac{\lambda}{2}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{\frac{\lambda}{4}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{pol}}(45) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Composition de matrices

$$\mathbf{M}_{\frac{\lambda}{4}} \mathbf{M}_{\text{pol}}(45) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\frac{\lambda}{4}} \mathbf{M}_{\text{pol}}(45) \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_0 + S_2 \\ 0 \\ 0 \\ -(S_0 + S_2) \end{bmatrix}$$

Pour les S voir slide 10

Circulaire droit

$$\mathbf{M}_{\text{cir}}(\text{G}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{\text{cir}}(\text{D}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Etats orthogonaux

Génération \neq Analyse

$$\mathbf{M}_{\text{pol}\lambda}(45)\mathbf{M}_{\frac{-}{4}} \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ -S_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ -S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

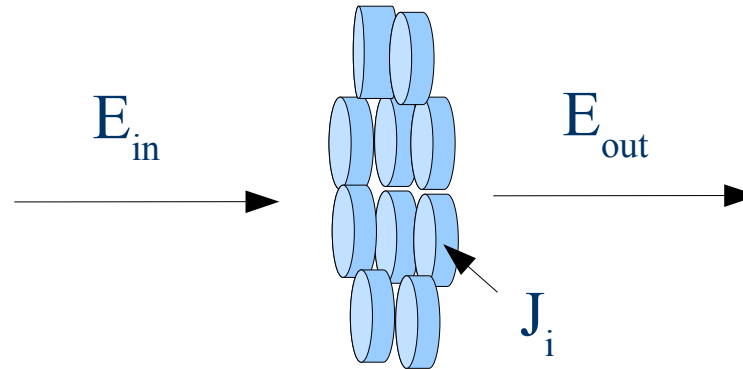
$$\mathbf{M}_{\text{pol}\lambda}(45)\mathbf{M}_{\frac{-}{4}} \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ S_0 \end{bmatrix} \text{ inversé les deux dernières valeurs}$$

Génération = Analyse

Avatar....

$$\mathbf{M}_{\text{cir}}(\text{G}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{M}_{\text{cir}}(\text{D}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Cas général



La surface d'interaction est constituée d'un ensemble d'éléments $\{ J_i \}$

$$\bar{\mathbf{I}} = \sum_i \mathbf{p}_i \bar{\mathbf{I}}_i \quad \sum_i \mathbf{p}_i = 1 \quad \mathbf{E}_{\text{out}}^i = \mathbf{J}_i \sqrt{p_i} \mathbf{E}_{\text{in}}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{out}}^i &= \mathbf{L} \langle \mathbf{E}_{\text{out}}^i \otimes \mathbf{E}_{\text{out}}^{i*} \rangle = \mathbf{L} \langle \mathbf{J}^i \mathbf{E}_{\text{in}} \otimes (\mathbf{J}^i \mathbf{E}_{\text{in}})^* \rangle \\ &= \mathbf{L} \mathbf{p}_i (\mathbf{J}^i \otimes \mathbf{J}^{i*}) \langle (\mathbf{E}_{\text{in}} \otimes \mathbf{E}_{\text{in}}^*) \rangle \end{aligned}$$

$$\mathbf{S}_{\text{out}}^i = p_i \left[\mathbf{L} (\mathbf{J}^i \otimes \mathbf{J}^{i*}) \mathbf{L}^{-1} \right] \cdot \mathbf{S}_{\text{in}}$$

$$\mathbf{S}_{\text{out}} = \sum_i p_i \mathbf{S}_{\text{out}}^i = \sum_i p_i \cdot \mathbf{M}_{\text{Jones}}^i \mathbf{S}_{\text{in}}$$

$$\mathbf{M}_{\text{Jones}}^i = \left[\mathbf{L} \left(\mathbf{J}^i \otimes \mathbf{J}^{i*} \right) \mathbf{L}^{-1} \right] \quad \mathbf{M} = \sum_i p_i \cdot \mathbf{M}_{\text{Jones}}^i$$

$$\mathbf{M} = \sum_i p_i \cdot \mathbf{M}_{\text{Jones}}^i = \left\langle \left[\mathbf{L} \left(\mathbf{J}^i \otimes \mathbf{J}^{i*} \right) \mathbf{L}^{-1} \right] \right\rangle = \mathbf{L} \langle \mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^* \rangle \mathbf{L}^{-1}$$

Une matrice 4x4 est elle une matrice de Mueller?

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{F} \mathbf{L}^{-1} \quad \mathbf{L}^{-1} = \frac{1}{2} \mathbf{L}^\dagger$$

Matrice de Mueller

$$\mathbf{H} = \text{Per}(\mathbf{F}) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{j}_0 \mathbf{j}_0^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_0 \mathbf{j}_1^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_0 \mathbf{j}_2^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_0 \mathbf{j}_3^* \rangle_e \\ \langle \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_0^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_1^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_2^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_1 \mathbf{j}_3^* \rangle_e \\ \langle \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_0^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_1^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_2^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_2 \mathbf{j}_3^* \rangle_e \\ \langle \mathbf{j}_3 \mathbf{j}_0^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_3 \mathbf{j}_1^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_3 \mathbf{j}_2^* \rangle_e & \langle \mathbf{j}_3 \mathbf{j}_3^* \rangle_e \end{bmatrix} = \text{Per}(\mathbf{L}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{L})$$

$$\mathbf{F} = \langle \mathbf{J} \otimes \mathbf{J}^* \rangle \text{ avec } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1 & \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{j}_3 & \mathbf{j}_4 \end{bmatrix} \quad \text{Per}(\mathbf{F}) = \langle \mathbf{j} \otimes \mathbf{j}^\dagger \rangle = \langle \mathbf{j} \mathbf{j}^\dagger \rangle \quad \text{avec } \mathbf{j} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \mathbf{j}_2 \\ \mathbf{j}_3 \\ \mathbf{j}_4 \end{bmatrix}$$

H est une matrice hermitienne défini positive (covariance) , donc 4 valeurs propres positives ou nulles:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\dagger) \quad \mathbf{H} = \mathbf{U} \mathbf{S} \mathbf{U}^\dagger \quad \mathbf{S} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$$

$$\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{u}_3 \quad \mathbf{u}_4]$$

Matrice de Mueller pure ou non

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \text{Per}(\mathbf{H})\mathbf{L}^{-1} = \mathbf{L} \text{Per}\left(\sum_{i=1}^4 \lambda_i (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\dagger)\right) \mathbf{L}^{-1}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \left[\sum_{i=1}^4 \lambda_i \text{Per}(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\dagger) \right] \mathbf{L}^{-1} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left[\mathbf{L} \text{Per}(\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^\dagger) \mathbf{L}^{-1} \right]$$

$$\text{Per}(\langle \mathbf{u} \mathbf{u}^\dagger \rangle) = \text{Per}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}^\dagger) = \langle \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}^* \rangle \quad \text{avec } \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^4 \lambda_i \left[\mathbf{L} \langle \mathbf{U} \otimes \mathbf{U}^* \rangle \mathbf{L}^{-1} \right]$$

Si 3 valeurs propres de H sont nulles :

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\text{jones}} \quad \text{ou encore matrice de Mueller pure}$$

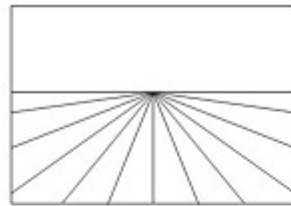
Si deux valeurs propres de H au moins, sont non nulles

M n'est pas une matrice de Mueller-Jones mais
la somme de Mueller-Jones(jusqu'à 4 termes)

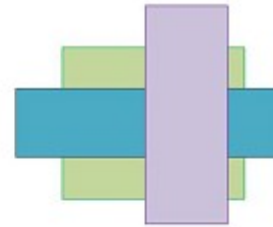
codage polarimétrique

Application à la visualisation 3D

Effets psychologiques



Linear
perspective



Overlapping



Shading

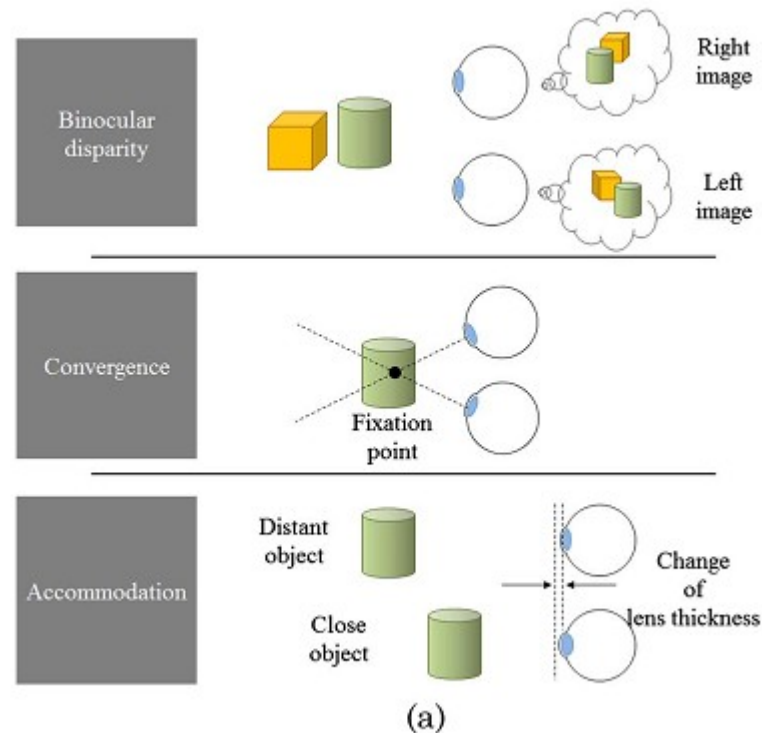


Texture gradient

Vol. 50, No. 34 / APPLIED OPTICS

Effets physiologiques

Principe : disparité binoculaire

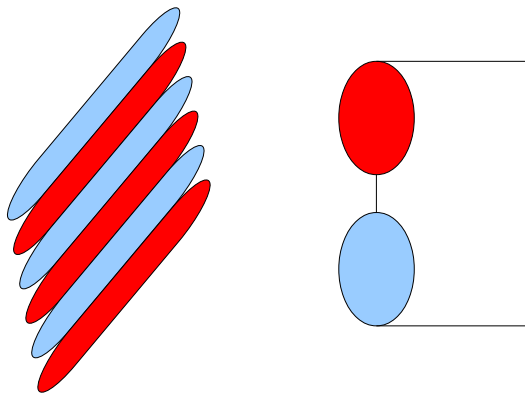


Existants

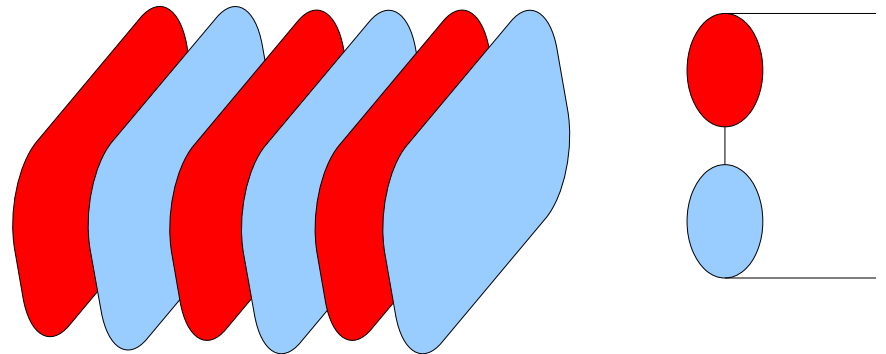
1) 3D TV with LC shutter glasses 240 Hz ultrahigh-definition (UHD, 3840×2160)

2) Utilisation de lunettes polarimétriques

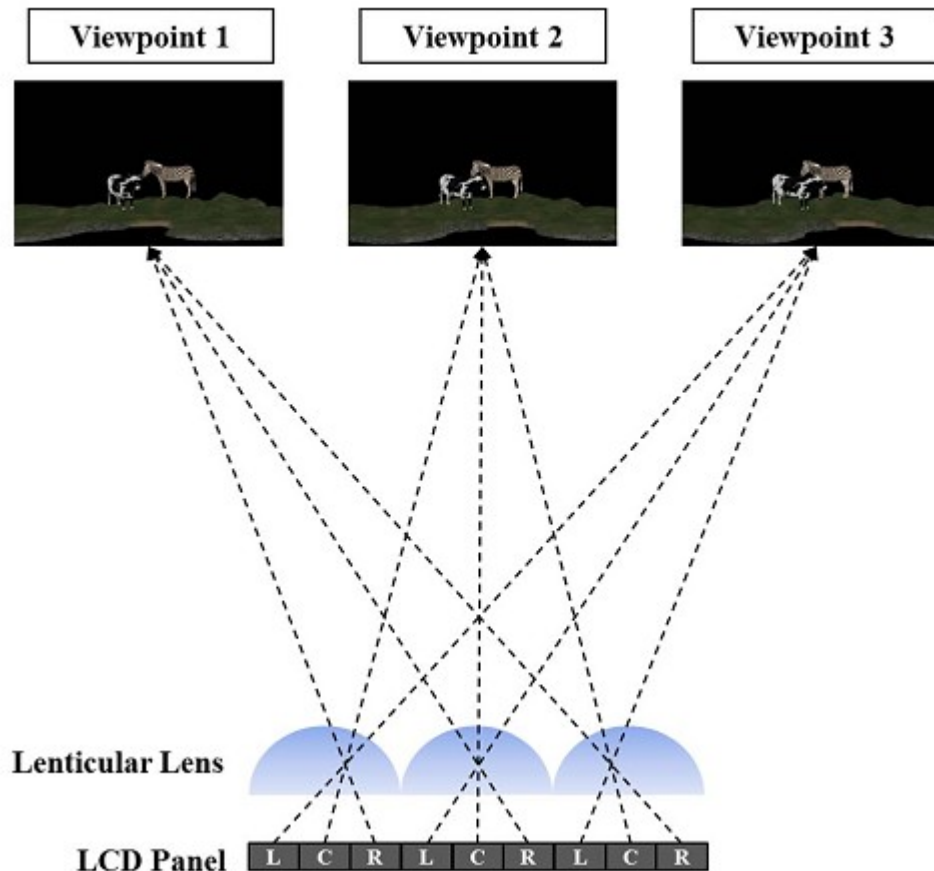
Division spatiale
patterned retarder (PR) :



Division temporelle
(active retarder (AR) or shutter in
panel (SIP))



(Disparité binoculaire et convergence)



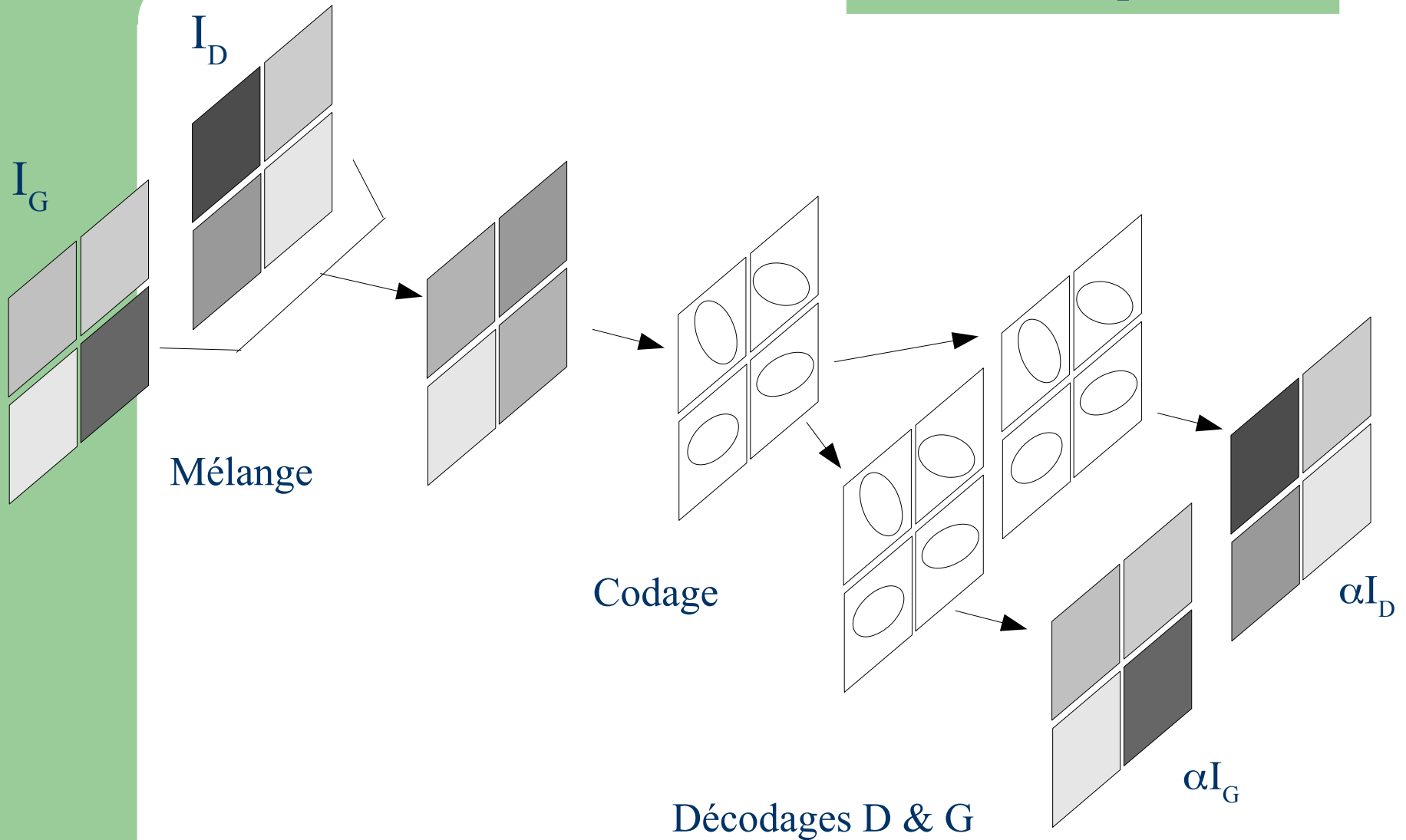
Compromis :

Résolution 3D/nombre
de points de vue

- Disparité binoculaire
- Convergence
- Mouvement parallaxe

(La parallaxe est l'incidence
du changement de position de
l'observateur sur l'observation
d'un objet)

Position du problème



Déphaseur (lame de retard) de φ Rotateur d'angle θ

$$\mathbf{M}_{\text{dephas}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{rot}}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & -\sin 2\theta & \cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{Codeur}}(\theta, \varphi) = \mathbf{M}_{\text{rot}}(-\theta) \mathbf{M}_{\text{Dephas}}(0, \varphi) \mathbf{M}_{\text{rot}}(\theta)$$

$$\mathbf{M}_{\text{codeur}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2(2\theta) + \sin^2(2\theta)\cos\varphi & \cos(2\theta)\sin(2\theta)[\cos(\varphi) - 1] & \sin(2\theta)\sin(\varphi) \\ 0 & \cos(2\theta)\sin(2\theta)[\cos(\varphi) - 1] & \sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)\cos(\varphi) & \cos(2\theta)\sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(2\theta)\sin(\varphi) & -\cos(2\theta)\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

Polariseurs linéaires à +/- 45°

$$\mathbf{M}_{\text{Decod}}^{\text{G}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{Decod}}^{\text{D}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{Decod}}^{\text{G}} \mathbf{M}_{\text{codeur}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \cos(2\theta)\sin(2\theta)[\cos(\varphi) - 1] & \sin^2(2\theta) + \cos^2(2\theta)\cos(\varphi) & \cos(2\theta)\sin(\varphi) \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{Decod}}^{\text{D}} \mathbf{M}_{\text{codeur}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\cos(2\theta)\sin(2\theta)[\cos(\varphi) - 1] & -\sin^2(2\theta) - \cos^2(2\theta)\cos(\varphi) & -\cos(2\theta)\sin(\varphi) \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{bmatrix}$$

Lumière circulaire en entrée

$$\mathbf{M}_{\text{Decod}}^G \mathbf{M}_{\text{codeur}} \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0^G \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_0 [1 + \cos(2\theta) \sin(\varphi)] \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_{\text{Decod}}^D \mathbf{M}_{\text{codeur}} \begin{bmatrix} S_0 \\ 0 \\ 0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_0^D \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} S_0 [1 - \cos(2\theta) \sin(\varphi)] \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}$$

Mélangeur élémentaire : $S_0 = I_D + I_G$

$$\frac{S_0^G}{S_0^D} = \frac{1 + \cos(2\theta) \sin(\varphi)}{1 - \cos(2\theta) \sin(\varphi)} = \frac{I_G}{I_D}$$

$\theta = 0$ retard seul

$$\frac{S_0^G}{S_0^D} = \frac{1 + \sin(\varphi)}{1 - \sin(\varphi)} = \frac{I_G}{I_D} \Rightarrow \varphi = \text{Arcsin} \left(\frac{I_G - I_D}{I_D + I_G} \right)$$

Intensités de sortie (Mélangeur élémentaire : $S_0 = I_D + I_G$)

$$S_0^G = \frac{1}{2} (I_D + I_G) \left(1 + \frac{I_G - I_D}{I_D + I_G} \right) = I_G$$

$$S_0^D = \frac{1}{2} (I_D + I_G) \left(1 - \frac{I_G - I_D}{I_D + I_G} \right) = I_D$$

$$-1 \leq \frac{I_G - I_D}{I_D + I_G} \leq 1 \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi_{\text{init}} = -\pi/2$$

$$\frac{I_G}{I_D} = \frac{1 + \sin(\varphi - \frac{\pi}{2})}{1 - \sin(\varphi - \frac{\pi}{2})} = \frac{1 - \cos(\varphi)}{1 + \cos(\varphi)} \Rightarrow \varphi = -\text{Arc cos}\left(\frac{I_G - I_D}{I_D + I_G}\right)$$

$$-1 \leq \frac{I_G - I_D}{I_G + I_D} \leq 1 \Rightarrow -\pi \leq \varphi \leq 0$$

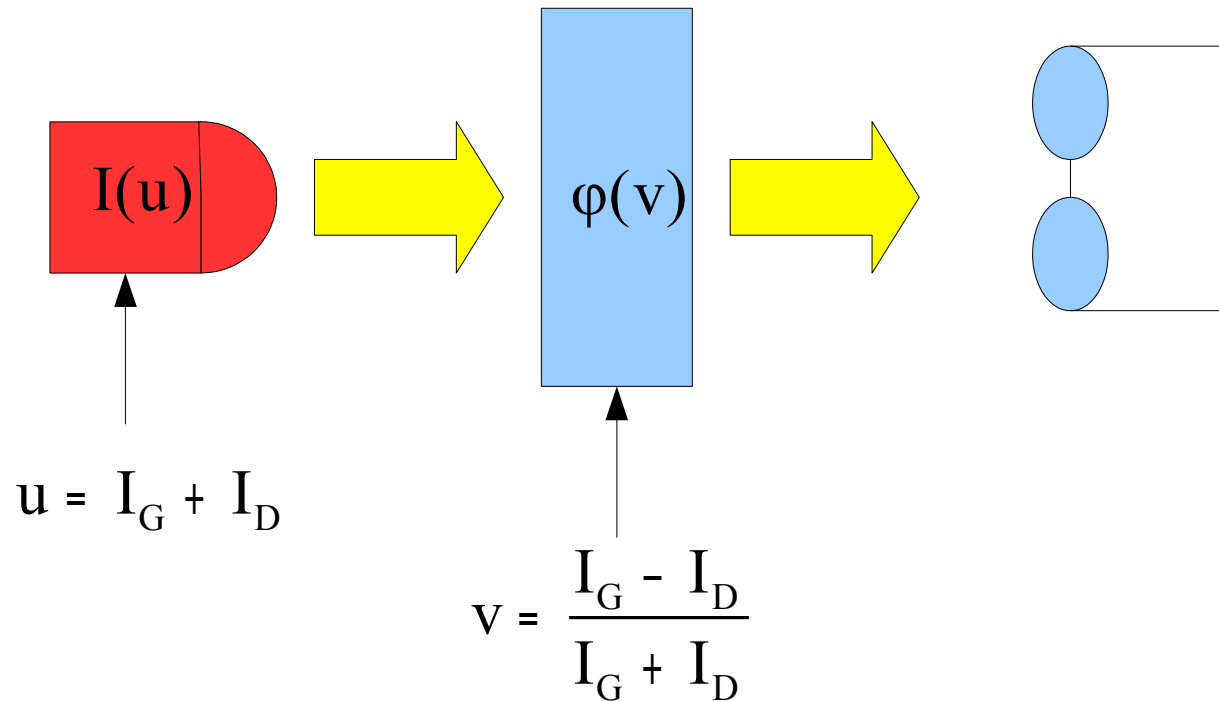
Autre solution : variation de θ

Modèle avec lunettes

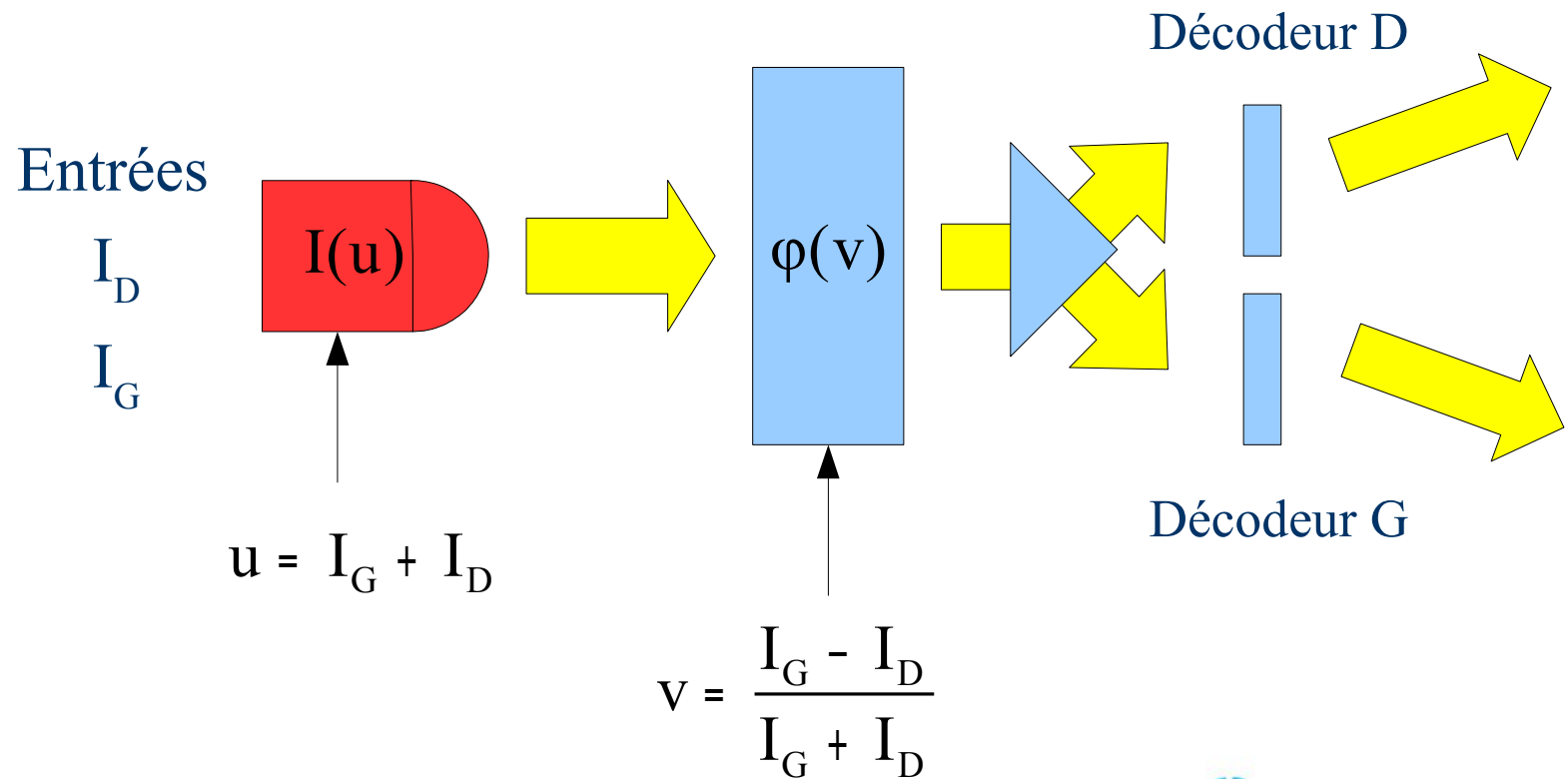
Entrées

I_D

I_G



Modèle sans lunette (autostéréoscopie)



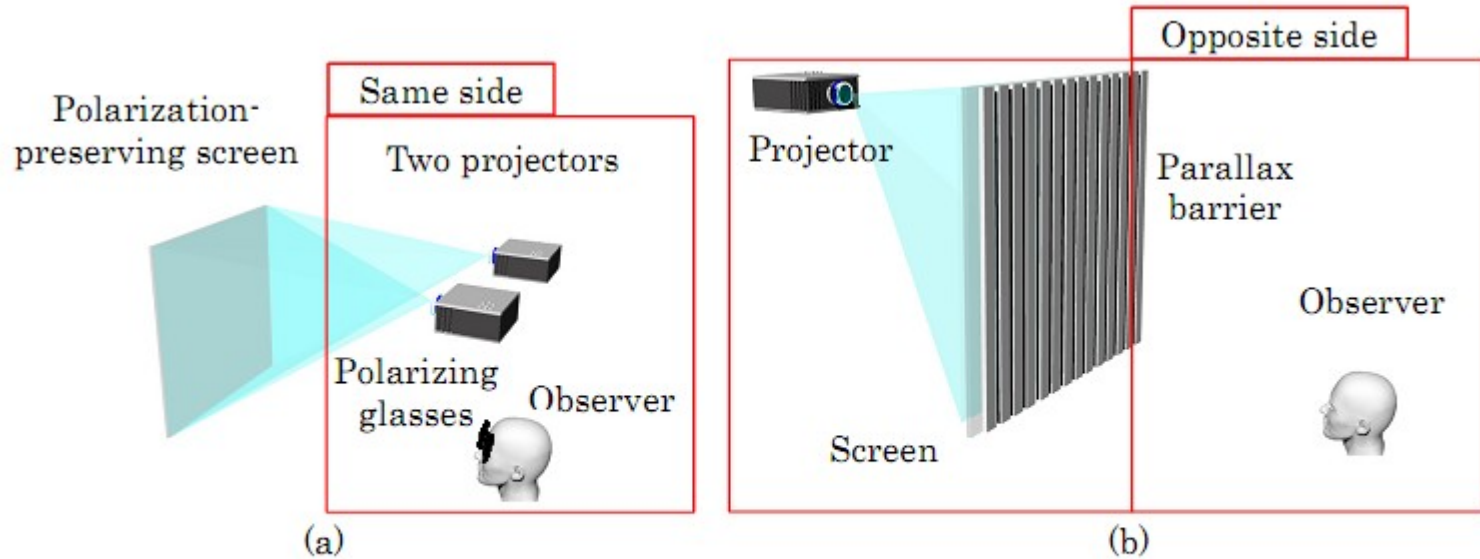
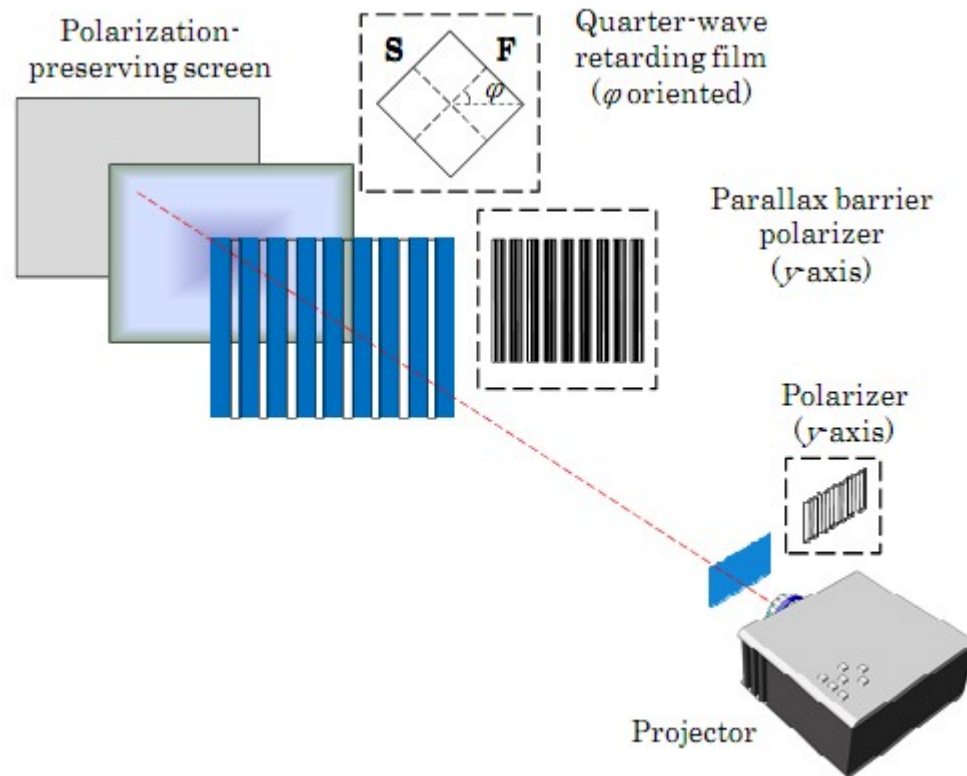
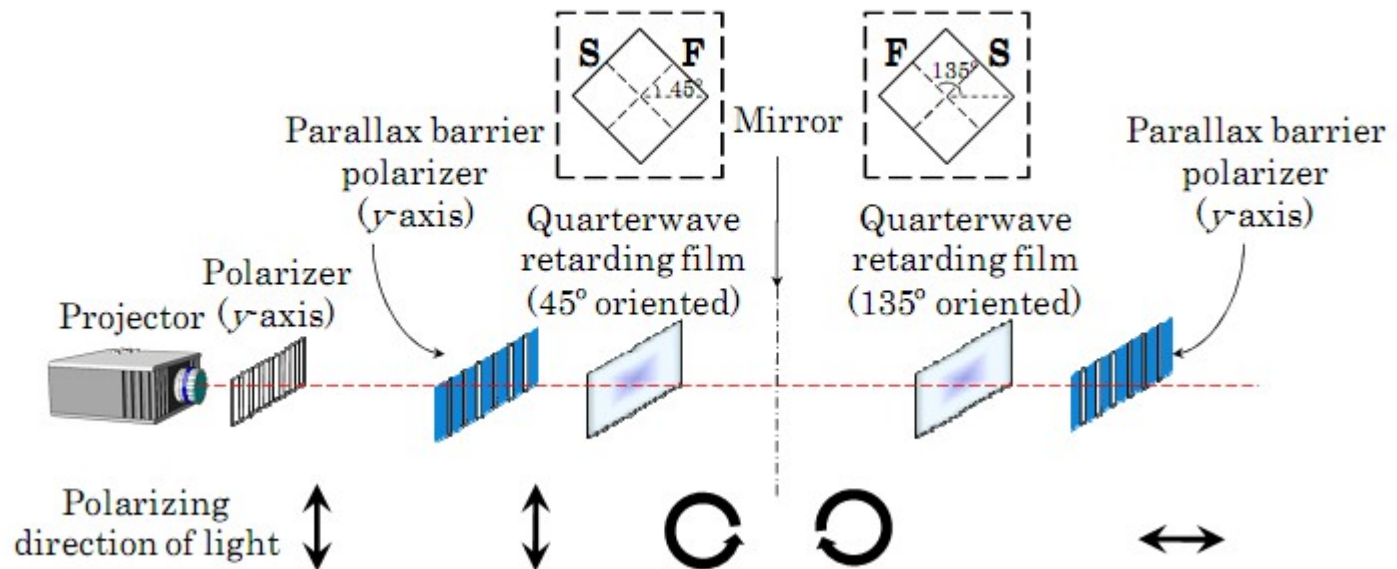


Fig. 1. Two representative projection-type 3D displays: (a) the polarizing glasses method and (b) the parallax barrier method.





Chemin parcouru par la lumière

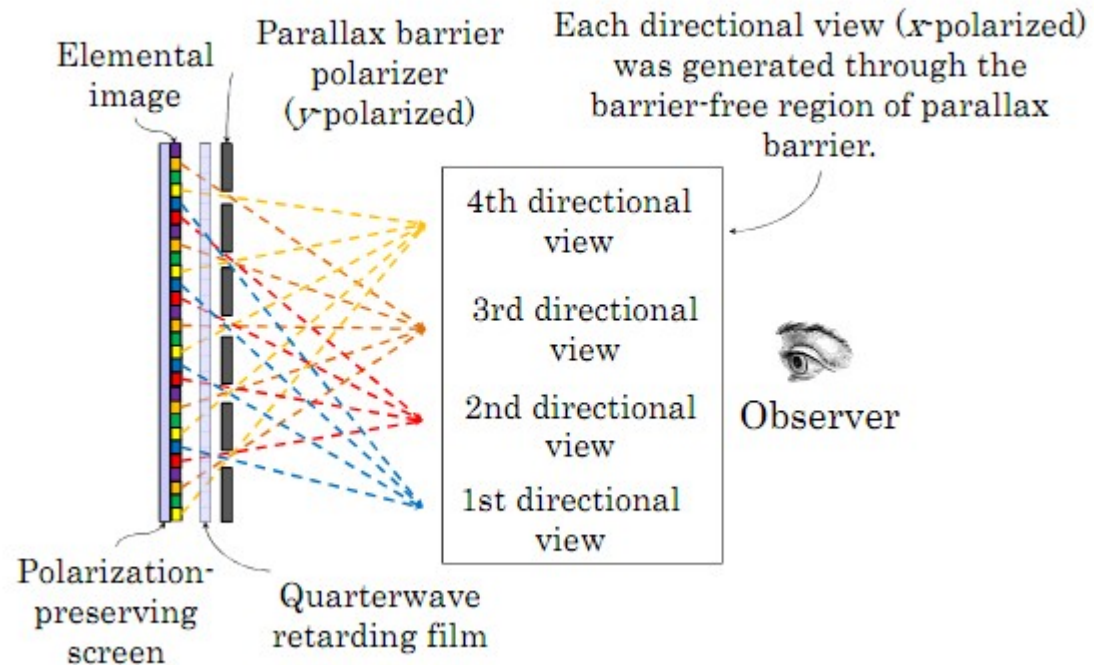
$$T_{POL} \text{ or } T_{PB} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left(T_M = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right),$$

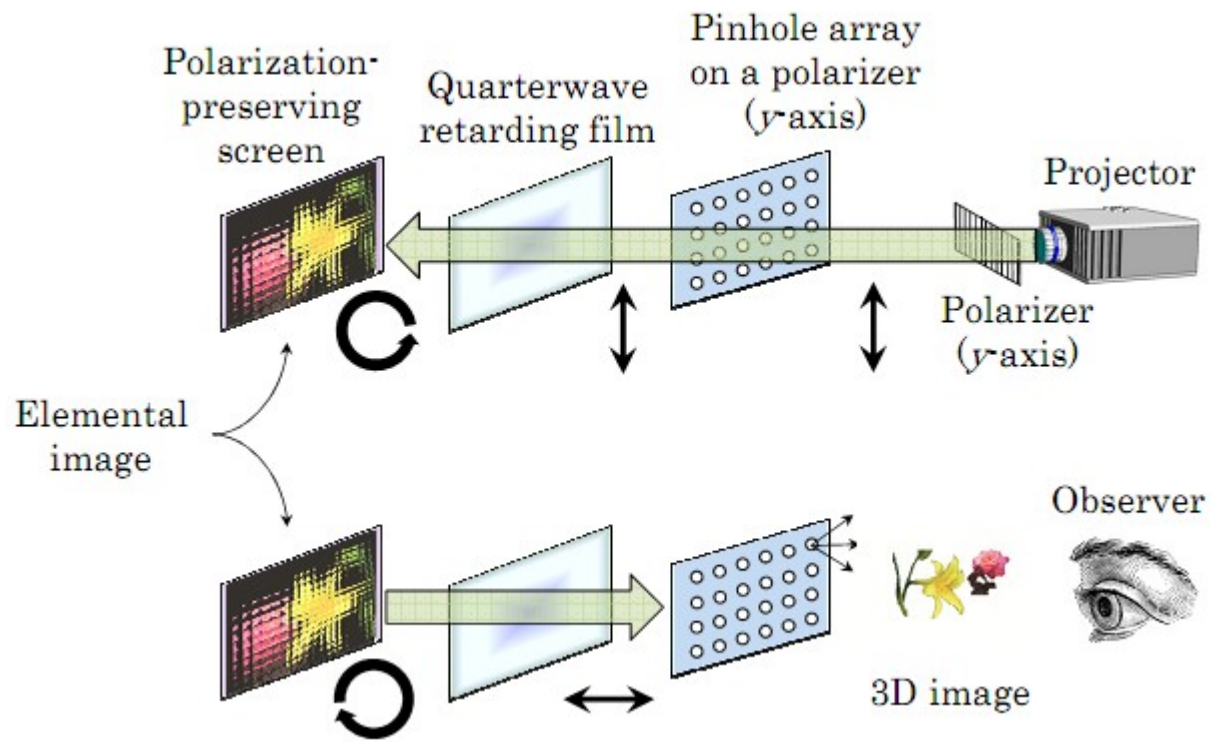
$$T_{QWP}(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \exp(j\tau/2) & 0 \\ 0 & \exp(-j\tau/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix},$$

$$T_S = T_{PB} T_{QWP}(-45^\circ) T_M T_{QWP}(45^\circ) T_{PB} T_{POL},$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{bmatrix} \quad T_s \mathbf{E} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

Quelque soit l'état de polarisation de la lumière d'entrée, elle ne repasse pas la barrière vers l'observateur.





Imagerie intégrale

Bibliographie

Livres

- 1) - Christian Brosseau, Fundamentals of polarized light: a statistical optics approach, (John Wiley, New York, 1998)
- 2) - E. Collet, "Polarized light: fundamentals and applications," Marcel Dekker, Inc., 1993.
- 3) - S. Huard, "Polarisation de la lumière," Masson, 1994
- 4) - Born, Max, and Wolf, Emil, Principles of Optics: Electromagnetic Theory of Propagation, Interference and Diffraction of Light (7th ed.), Cambridge University Press (1999) ISBN 0-521-64222-1
- 5) - Felix R. Gantmacher, The Theory of Matrices, (Chelsea Publishing Company, Chelsea, 1984)