Université Lille1
Sciences et Technologies

Algo

12 septembre 2011
Licence ST-A
Benoît Groz
François Lemaire
Arnaud Liefooghe
Léopold Weinberg

TD 5

Q 1. On souhaite résoudre le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 9\,x_1 + 2\,x_2 & = & z & [min] \\ 2\,x_1 + x_2 & \geq & 4 & \\ x_1 - 2\,x_2 & \geq & 2 & \\ x_1 & \geq & 3 & \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0. & \end{array}\right.$$

On propose les démarches suivantes :

1. intuiter la solution optimale du primal, celle du dual, et vérifier qu'elles sont optimales ;
2. intuiter la solution optimale du primal, calculer la solution du dual qui lui est associée par le théorème des écarts complémentaires et vérifier ce qui doit l'être pour s'assurer de l'optimalité des deux solutions ;
3. résoudre le dual par l'algorithme du tableau simplicial (si vous connaissez à l'avance la solution optimale, on suggère de tricher pour le choix de la colonne du pivot) et déduire du résultat la solution optimale du primal.

Q 2. On considère le programme linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcll} 3\,x_1 + 2\,x_2 & = & z & [max] \\ 2\,x_1 + x_2 & \leq & 6 & \\ x_1 - x_2 & \leq & 1 & \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 & \\ x_1,\, x_2 & \geq & 0. & \end{array}\right.$$

Écrire le programme linéaire dual.

On sait que ${}^t(0,\, 1/2,\, 5/2)$ est une solution optimale du dual. Utiliser le théorème des écarts complémentaires pour obtenir une solution optimale du primal.

Comment confirmer par une deuxième méthode que la solution obtenue est bien optimale ?

Q 3. Un fabricant d'emballages envisage l'achat de machines à plier le carton de deux types différents : les modèles A et B. Le modèle A permet de plier 30 boîtes à la minute et doit être alimenté et surveillé par une personne alors que le modèle B peut plier 50 boîtes à la minute et requiert deux personnes. Le fabricant doit mettre en forme au moins 1200 boîtes à la minute. Il ne dispose que de 120 employés. Une machine du modèle A coûte 15000 euros. Une machine du modèle B coûte 20000 euros. Combien de machines de chaque type le fabricant doit–il acheter pour minimiser son investissement ?

Q 4. India Coffee Mart (ICM) commercialise du café en poudre qu'elle prépare en mélangeant du café en provenance du sud de l'Inde, de l'Assam et importé d'Afrique. Un kilo de café du Sud coûte 28 roupies, un kilo de café d'Assam coûte 30 roupies et le café d'importation revient à 32 roupies. Les ventes mensuelles de café s'élèvent à 5000 kilos, mais on ne peut pas disposer de plus de 1500 kilos de café du sud de l'Inde et il faut utiliser au moins 1000 kilos de café d'Assam et 1000 kilos de café d'Afrique pour le mélange. Déterminer la composition du mélange optimale du point de vue du coût.

Q 5. On s'intéresse à la résolution des systèmes d'équations linéaires. Comme l'illustre l'exercice précédent, tout système d'équations linéaires peut être transformé en un système de satisfaction de demande. Pour peu qu'on choisisse un objectif économique avec des coût positifs, le dual de ce programme de satisfaction de demande est un programme linéaire qui relève du cas favorable. On sait que la solution optimale du primal peut se lire dans le tableau simplicial final du dual. En mettant toutes ces phrases bout–à–bout, on serait tenté de conclure que tout système d'équations linéaires admet au moins une solution, ce qui est manifestement faux. Où est l'erreur ?

Le problème de la diète

On cherche à choisir des combinaisons de plats préparés pour satisfaire certains besoins nutritionnels. Les repas sont composés à partir de mélanges des différents plats en quantités plus ou moins importantes. Dans la première colonne du tableau on trouve les plats. Les prix par unité sont indiqués dans la deuxième. Les quatre dernières colonnes donnent pour chaque vitamine v et chaque plat p le pourcentage du besoin quotidien de vitamine v apporté par une unité du plat p.

plat	prix (en $ par unité)	A	$B1$	$B2$	C
bœuf	3.19	60	20	10	15
poulet	2.59	8	0	20	20
poisson	2.29	8	10	15	10
jambon	2.89	40	40	35	10
fromage	1.89	15	35	15	15
escalope	1.99	70	30	15	15
spaghetti	1.99	25	50	25	15
dinde	2.49	60	20	15	10

On cherche une combinaison qui minimise les coûts et satisfasse les besoins hebdomadaires en vitamines, soit au moins 700% des besoins quotidiens, mais sans excéder 1200%. Pour promouvoir une certaine diversité, on impose que chaque plat soit choisi au moins deux fois et au plus dix fois par semaine.

Q 6. Proposer un modèle AMPL. Quelle est la solution optimale ?

Q 7. Déterminer les valeurs marginales des contraintes et les interpréter.

Modélisation d'une fermette

Des citadins en mal de campagne ont acheté une fermette avec 12 ares de terrain. Ils souhaitent y élever des vaches et y cultiver de la betterave. Il faut exactement deux ares pour faire paître une vache. Les ares qui ne sont pas utilisés par les vaches peuvent être mis en culture. Chacun d'eux permet de produire une tonne de betteraves. Tout le terrain ne doit pas obligatoirement être utilisé. Les betteraves produites doivent suffir à alimenter les vaches. Il en faut une tonne pour nourrir une vache. Les tonnes qui ne sont pas consommées par les vaches sont vendues à 50 euros la tonne. Chaque vache fournit du lait. Les produits laitiers ainsi obtenus rapportent 200 euros par vache. On cherche à maximiser le profit.

Q 8. Modéliser le problème ci–dessus sous la forme d'un programme linéaire en variables réelles. Bien préciser les dimensions des variables, fournir un mot–clef par contrainte.

Q 9. Résoudre le programme linéaire par l'algorithme du tableau simplicial.

Q 10. Écrire le programme linéaire dual du programme précédent.

Q 11. Donner, sans faire de calcul, la solution optimale du dual.

Q 12. Donner les valeurs marginales des contraintes du primal et les interpréter.

Modélisation d'une ferme

Enthousiasmés par le succès de leur fermette, nos citadins décident de voir plus grand. Ils achètent une ferme de 200 ares pour y élever des vaches et y cultiver différents types de végétaux. Il faut au moins deux ares pour faire paître une vache. Les ares qui ne sont pas utilisés par les vaches peuvent être mis en culture. Tout le terrain ne doit pas obligatoirement être utilisé. Différents végétaux sont cultivés : betterave, blé, maïs. Ces végétaux doivent suffir à nourrir les vaches. Les végétaux qui ne sont pas consommés par les vaches peuvent être vendus. Chaque vache fournit du lait. Les produits laitiers ainsi obtenus rapportent 200 euros par vache. On cherche à déterminer le nombre de vaches à élever ainsi que les nombres de tonnes de différents végétaux à cultiver pour maximiser le profit. Le tableau suivant donne le rendement des végétaux en tonnes par are, les quantités consommées en tonnes par vache, le nombre de tonnes qu'il est possible de vendre au maximum et les prix de vente à la tonne.

		Végétaux	
	betterave	blé	maïs
rendement	1	0.6	0.5
consommation	0.6	0.2	0.2
vente max	10	20	20
prix de vente	100	120	90

Q 13. Compléter le modèle AMPL suivant. Utiliser toutes les variables. Bien choisir les identificateurs de contraintes. Les solutions trop compliquées seront considérées comme fausses.

```
set VEGETAUX;

param nb_total_ares >= 0;               # ares

param rendement {VEGETAUX} >= 0;        # tonnes / are
param consommation {VEGETAUX} >= 0;     # tonnes / vache
param vente_max {VEGETAUX} >= 0;        # tonnes
param prix_vente {VEGETAUX} >= 0;       # euros / tonnes

param nb_ares_par_vache >= 0;           # ares / vache
param prix_vente_pdt_laitiers >= 0;     # euros / vache

var nb_ares_paturage >= 0;              # ares
var nb_ares_culture {VEGETAUX} >= 0;    # ares

var nb_vaches >= 0;                     # vaches
var qte_produite {VEGETAUX} >= 0;       # tonnes
var qte_vendue {VEGETAUX} >= 0;         # tonnes
var qte_consommee {VEGETAUX} >= 0;      # tonnes

data;

set VEGETAUX := betterave ble mais;

param nb_total_ares := 200;

param nb_ares_par_vache := 2;
param prix_vente_pdt_laitiers := 200;

param :         rendement consommation vente_max prix_vente :=
betterave         1          .6        10        100
ble                .6        .2        20        120
mais               .5        .2        20         90;
```

Q 14. En supposant le modèle et ses données stockés dans un fichier *fermette.ampl*, donner une ou plusieurs commandes AMPL permettant de déterminer les valeurs des variables nb_vaches et $nb\_ares\_culture$ ainsi que l'objectif réalisé à l'optimum.

Q 15. On aimerait savoir quel serait l'effet sur l'objectif d'une petite variation sur les quantités maximales de végétaux qu'il est possible de vendre. Quelle commande AMPL permettrait d'obtenir cette information ?