

# Übungsblatt 8 Ana

Computational and Data Science  
FS2025

Mathematik 2

## Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Skalarfeld, Vektorfeld, Kurve, eindimensionale Schnittkurve, Höhenlinie, Niveaulfläche, Niveaumenge und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die natürliche Definitionsmenge und Wertemenge einer Funktion mehrerer Variabler bestimmen.
- Sie können Höhenlinien und Niveaulflächen von Funktionen von zwei bzw. drei Variablen bestimmen und skizzieren.

## 1. Aussagen über Funktionen mehrerer reeller Variabler

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für $n > 1$ ist eine Funktion des Typs $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ niemals injektiv.		
b) Für $n > 1$ ist eine Funktion des Typs $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ niemals surjektiv.		
c) Jede Ebene in 3D ist der Graph einer Funktion in zwei reellen Variablen.		
d) Jede Sphäre in 3D ist der Graph einer Funktion in zwei reellen Variablen.		

## 2. Definitionsmengen von Funktionen von zwei Variablen

Bestimmen und skizzieren Sie für die nachfolgenden Funktionen  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils die maximale Definitionsmenge.

a)  $f(x, y) = \sqrt{y - 2x}$       b)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$       c)  $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$

## 3. Definitions- und Wertemengen von Funktionen von zwei Variablen

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  jeweils die maximale Definitionsmenge und die Wertemenge.

a)  $f(x, y) = \sin(xy)$       b)  $f(x, y) = x + y + \cos(xy)$   
c)  $f(x, y) = \sqrt{1 - y} + e^{-x^2}$       d)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y - x^2}$

## 4. Höhenlinien

Berechnen und skizzieren Sie für die gegebene Funktion jeweils die Höhenlinien.

a)  $f(x, y) = 3x + 6y$       b)  $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$   
c)  $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2y$       d)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2y}$

## 5. Niveauflächen

Berechnen und beschreiben Sie für die gegebene Funktion jeweils die Niveauflächen.

a)  $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$       b)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$       c)  $f(x, y, z) = x^2 + y^2$

## 6. Funktionsgraphen und Höhenlinien mit Python/Numpy

Plotten Sie sowohl die Funktion als auch die Höhenlinien der angegebenen Funktionen mit Python/Numpy.

a)  $f(x, y) = \frac{x}{2}$       b)  $f(x, y) = \frac{y}{2}$       c)  $f(x, y) = \frac{x+y}{2}$   
d)  $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{4}$       e)  $f(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{2}$       f)  $f(x, y) = \frac{6 \cdot \sin(xy)}{1 + x^2 + y^2}$

## 7. Aussagen über eine Funktion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: $f(3; 0; 4) = 5$ .		
b) $f$ ist eine Funktion in 3 Variablen.		
c) Die x-Achse ist eine Höhenlinie von $f$ .		
d) Die Einheitssphäre in 3D ist der Graph von $f$ .		
e) Die Einheitssphäre in 3D ist eine Niveaufläche von $f$ .		
f) Die Sphäre um den Ursprung mit Radius 7 ist eine Niveaufläche von $f$ .		