Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 2

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Gaußsche Zahlenebene, arithmetische und trigonometrische Form einer komplexen Zahl und Arg-Funktion und deren Eigenschaften.
- Sie können komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen.
- Sie können komplexe Zahlen von der arithmetischen in die trigonometrische Form und umgekehrt umwandeln.
- Sie können einfache Brüche und Potenzen von komplexen Zahlen durch Anwenden der Rechenregeln vereinfachen.
- Sie können quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten lösen.

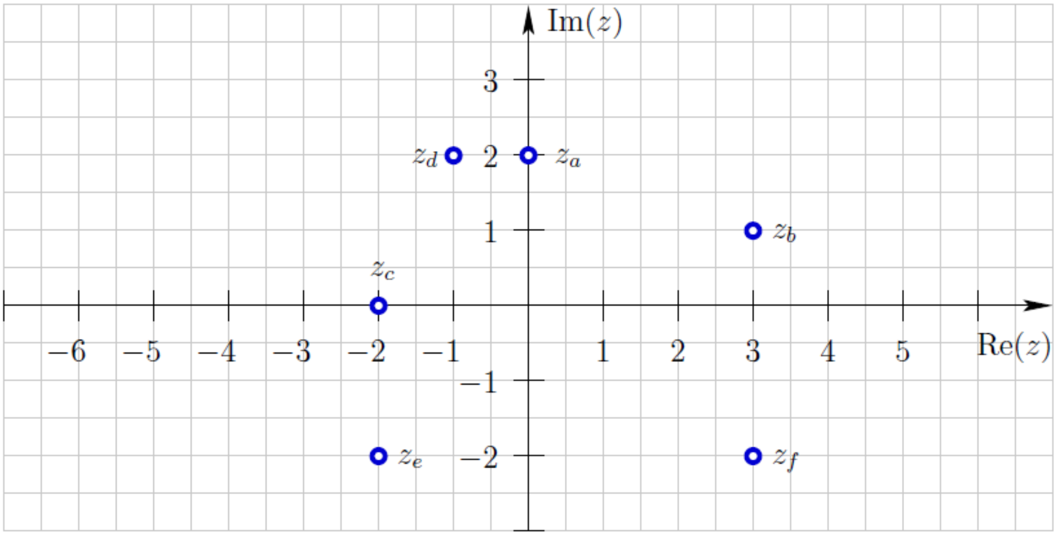
---

1. Aussagen über die Gaußsche Zahlenebene
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Gaußsche Zahlenebene wurde im 20. Jahrhundert eingeführt.		X
b) Jede komplexe Zahl wird durch einen Punkt in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.	X	
c) Die x-Achse der Gaußschen Zahlenebene entspricht der Re-Achse.	X	
d) Die komplexe Zahl z = 2 + 3i entspricht dem Punkt (2;3i) in der Gaußschen Zahlenebene.		X
e) Die komplexen Zahlen z, für welche gilt $z^2 = -3$, liegen auf der Im-Achse.	X	
f) Die komplexen Zahlen $z \epsilon \mathbb{C}$ mit $\|z\| = 1$ bilden den Einheitskreis in der Gaußschen Zahlenebene.	X	

2. Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene
Zeichnen Sie die gegebenen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene ein.

a) 2i	b) 3 + i	c) -2
d) -1 + 2i	e) -2 - 2i	f) 3 – 2i



3. Aussagen über die trigonometrischer Form komplexer Zahlen
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede komplexe Zahl lässt sich in trigonometrischer Form darstellen.	X	
b) Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in trigonometrischer Form darstellen.		X
c) Der Term 2cis(π/2) ist eine trigonometrische Form von 2i.	X	
d) Der Term 2cis(-3π/2) ist eine trigonometrische Form von 2i.	X	
e) Der Term 2cis(5π/2) ist eine trigonometrische Form von 2i.	X	
f) Der Term -2cis(π/2) ist eine trigonometrische Form von 2i.		X

4. Darstellung der Arg-Funktion

a) Prüfen Sie nach, dass die Funktion $f(z) = \arctan\frac{Im(z)}{Re(z)}$ keine vollständige Darstellung der Arg-Funktion ist.

b) Finden Sie den Funktionsterm der Arg-Funktion in der Variante $arg\colon \mathbb{C} \to]-\pi;\pi[$.

c) Finden Sie den Funktionsterm der Arg-Funktion in der Variante $arg\colon \mathbb{C} \to [0;2\pi[$.

a)

Offensichtlich ist der Funktionswert

$$f(\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = ?$$

nicht definiert. Ferner gilt

$$f(-1+\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4} \neq f(-1+\mathrm{i}).$$

Daraus schliessen wir, dass f keine vollständige Darstellung der *Arg-Funktion* ist.

b)
Es muss gelten:

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) \geq 0 \\ \operatorname{arccot}\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)}\right) & \operatorname{Im}(z) > 0 \\ \pi & \operatorname{Im}(z) = 0 \wedge \operatorname{Re}(z) < 0 \\ -\pi + \operatorname{arccot}\left(\frac{\operatorname{Re}(z)}{\operatorname{Im}(z)}\right) & \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

c)
Es muss gelten:

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \operatorname{Re}(z) \geq 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) & \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0 \\ \pi/2 & \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) & \operatorname{Re}(z) < 0 \\ 3\pi/2 & \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) & \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

5. Konversion in die arithmetische Form
Geben Sie die jeweilige komplexe Zahl in arithmetischer Form an.

a) $4\text{cis}(\pi/2)$ b) $2\text{cis}(-\pi/3)$ c) $\text{cis}(3\pi/4)$
d) $2\text{cis}(3\pi)$ e) $\frac{1}{2}\text{cis}(75°)$ f) $\sqrt{2}\text{cis}(-105°)$

a)
$$\underline{\underline{4\ \text{cis}(\pi/2)}} = 4 \cdot \cos(\pi/2) + 4 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/2) = 4 \cdot 0 + 4 \cdot \mathrm{i} \cdot 1 = \underline{\underline{4\mathrm{i}.}}$$

b)
$$\underline{\underline{2\ \text{cis}(-\pi/3)}} = 2 \cdot \cos(-\pi/3) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/3) = 2 \cdot \cos(\pi/3) - 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/3)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}.}}$$

c)
$$\underline{\underline{\text{cis}(3\pi/4)}} = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i} \cdot \sin(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}.}}$$

d)
$$\underline{\underline{2\ \text{cis}(3\pi)}} = 2 \cdot \cos(3\pi) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(3\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi)$$

$$= 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot 0 = -2 + 0 = \underline{\underline{-2.}}$$

e)
$$\underline{\underline{\frac{1}{2}\ \text{cis}(75°)}} = \frac{1}{2} \cdot \cos(75°) + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(75°) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2 \cdot \sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{i}.}}$$

f)

$$\underline{\underline{\sqrt{2}\ \text{cis}(-105°)}} = \sqrt{2}\cdot\cos(-105°) + \sqrt{2}\cdot \text{i}\cdot\sin(-105°)$$

$$= \sqrt{2}\cdot\cos(105°) - \sqrt{2}\cdot\text{i}\cdot\sin(105°) = \sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} - \sqrt{2}\cdot\text{i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\text{i}}}.$$

6. Konversion in die trigonometrische Form

Geben Sie die jeweilige komplexe Zahl in trigonometrischer Form an.

a) 3	b) -5	c) 2i
d) -3i	e) 3 – 4i	f) -12 + 5i

a)

$$\underline{\underline{3}} = |3|\cdot\text{cis}\big(\arg(3)\big) = \underline{\underline{3\cdot\text{cis}(0)}}.$$

b)

$$\underline{\underline{-5}} = |-5|\cdot\text{cis}\big(\arg(-5)\big) = \underline{\underline{5\cdot\text{cis}(\pi)}}.$$

c)

$$\underline{\underline{2\text{i}}} = |2\text{i}|\cdot\text{cis}\big(\arg(2\text{i})\big) = \underline{\underline{2\cdot\text{cis}(\pi/2)}}.$$

d)

$$\underline{\underline{-3\text{i}}} = |-3\text{i}|\cdot\text{cis}\big(\arg(-3\text{i})\big) = \underline{\underline{3\cdot\text{cis}(-\pi/2)}}.$$

e)

$$\underline{\underline{3-4\text{i}}} = |3-4\text{i}|\cdot\text{cis}\big(\arg(3-4\text{i})\big) = \sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\text{cis}\big(2\pi+\arctan(-4/3)\big)$$

$$= \sqrt{25}\cdot\text{cis}\big(2\pi+\arctan(-4/3)\big) \approx 5\cdot\text{cis}(2\pi-0.927) \approx \underline{\underline{5\cdot\text{cis}(1.70\,\pi)}}.$$

f)

$$\underline{\underline{-12+5\text{i}}} = |-12+5\text{i}|\cdot\text{cis}\big(\arg(-12+5\text{i})\big)$$

$$= \sqrt{(-12)^2+5^2}\cdot\text{cis}\big(\arctan(-5/12)+\pi\big) = \sqrt{169}\cdot\text{cis}\big(\arctan(-5/12)+\pi\big)$$

$$\approx 13\cdot\text{cis}(-0.395+\pi) \approx \underline{\underline{13\cdot\text{cis}(0.874\,\pi)}}.$$

7. Trigonometrische Zahlen mit Python/Numpy

Berechnen Sie die Konversionen aus Aufgabe 5 und 6 mit Python/Numpy.

für Aufgabe 5:

```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
r=4; phi=np.pi/2;
# Berechnung
z=r*(np.cos(phi)+1j*np.sin(phi));
# Ausgabe
print('z=', f"{z:#.3}");
```

für Aufgabe 6:

```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
z=3;
# Berechnung
r=np.abs(z); phi=np.angle(z);
# Ausgabe
print('z=',z,'=',r,'*cis(',phi/np.pi,'pi)');
```

8. Aussagen über quadratische Gleichungen

Gegeben sei die allgemeine quadratische Gleichung
$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Koeffizienten a,b,c können so gewählt werden, dass es keine Lösung in $\mathbb{R}$ gibt.	X	
b) Die Koeffizienten a,b,c können so gewählt werden, dass es keine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt.		X
c) Für jede Wahl der Koeffizienten a,b,c liegen zwei verschieden Lösungen in $\mathbb{C}$ vor.		X
d) Die Koeffizienten a,b,c können so gewählt werden, dass $x_1 = 1$ und $x_2 = i$ die beiden Lösungen sind.		X
e) Gibt es 2 Lösungen x_1 und x_2, dann gilt entweder $x_2 = x_1^*$ oder $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.	X	
f) Die Anzahl der Lösungen kann anhand der Diskriminante beurteilt werden.	X	

9. Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung in $\mathbb{C}$ mit Hilfe der Mitternachtsformel.

a) $x^2 + 1 = 0$
b) $x^2 - 10x + 74 = 0$
c) $2x^2 + 4 = x$
d) $3t^2 = -30t - 507$
e) $w = 2 + w^2$
f) $s(s + 1) = 2s^2 + 1$

a)
a = 1, b = 0, c = 1
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -4$
Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 2\mathrm{i}}{2} = \pm\mathrm{i}.$$

Die *quadratische Gleichung* (22) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-\mathrm{i},\ \mathrm{i}\}.}}$$

b)
a = 1, b = -10, c = 74
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -196$
Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-196}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 14\mathrm{i}}{2} = 5 \pm 7\mathrm{i}.$$

Die *quadratische Gleichung* (27) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{5 - 7\mathrm{i},\ 5 + 7\mathrm{i}\}}}.$$

c)
$2x^2 + 4 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = 0$
a = 2, b = -1, c = 4
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -31$
Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-31}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{31}\,\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4}\mathrm{i}.$$

Die *quadratische Gleichung* (33) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{31}}{4}\mathrm{i},\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{31}}{4}\mathrm{i}\right\}}}.$$

d)
$3t^2 = -30t + 507 \Leftrightarrow 3t^2 + 30t - 507 = 0 \Leftrightarrow 3^2 + 10t + 169 = 0$
a = 1, b = 10, c = 169
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -576$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{-576}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 24\mathrm{i}}{2} = -5 \pm 12\,\mathrm{i}.$$

Die *quadratische Gleichung* (40) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-5 - 12\mathrm{i},\ -5 + 12\mathrm{i}\}}}.$$

e)
$w = 2 + w^2 \Leftrightarrow w^2 - w + 2 = 0$
a = 1, b = -1, c = 2
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -7$

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-7}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{7}\,\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}.$$

Die *quadratische Gleichung* (46) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}\right\}}}.$$

f)
$s(s + 1) = 2s^2 + 1 \Leftrightarrow s^2 - s + 1 = 0$
a = 1, b = -1, c = 1
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -3$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}.$$

Die *quadratische Gleichung* (53) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right\}}}.$$

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 2

Computational and Data Science BSc
FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über die Gauss-Ebene

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die GAUSS-*Ebene* wurde im 20. Jh. eingeführt.	○	●
b) Jede *komplexe Zahl* entspricht einem *Punkt* in der GAUSS-*Ebene*.	●	○
c) Die *reelle Zahlengerade* entspricht der Re-Achse.	●	○
d) Die *komplexe Zahl* $z = 2 + 3\mathrm{i}$ entspricht dem *Punkt* $\big(2\,;\,3\mathrm{i}\big)$.	○	●
e) Die *komplexen Zahlen* z, für welche gilt $z^2 = -3$ liegen auf der Im-Achse.	●	○
f) Die *komplexen Zahlen* $z \in \mathbb{C}$ mit $\lvert z \rvert = 1$ bilden den *Einheitskreis* in der GAUSS-*Ebene*.	●	○

2. Komplexe Werte in der Gauss-Ebene

Wir zeichnen jeweils die gegebene *komplexe Zahl* in der GAUSS-*Ebene* ein.

a) $z_a = 2\mathrm{i}$

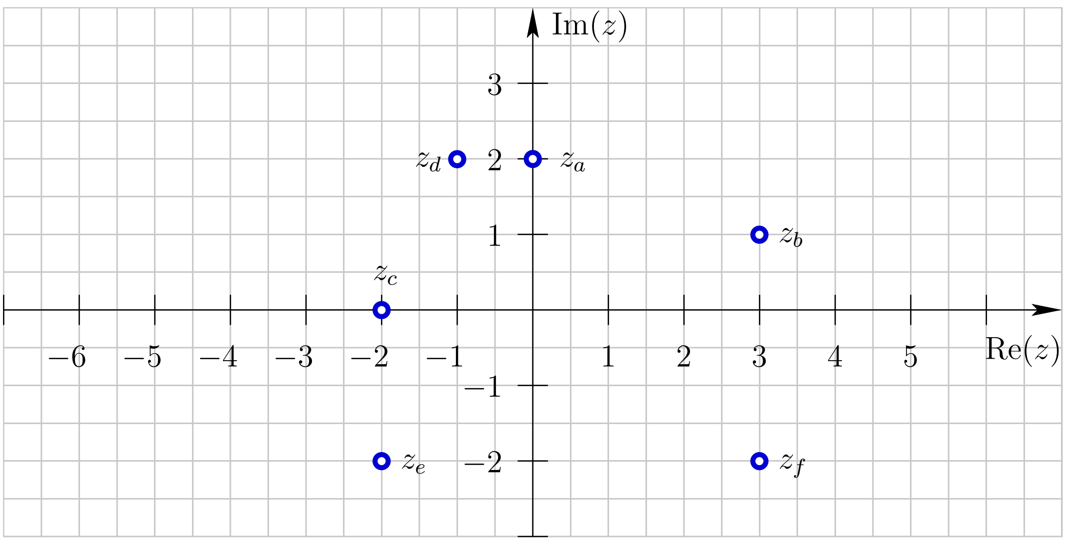
b) $z_b = 3 + \mathrm{i}$

c) $z_c = -2$

d) $z_d = -1 + 2\mathrm{i}$

e) $z_e = -2 - 2\mathrm{i}$

f) $z_f = 3 - 2\mathrm{i}$

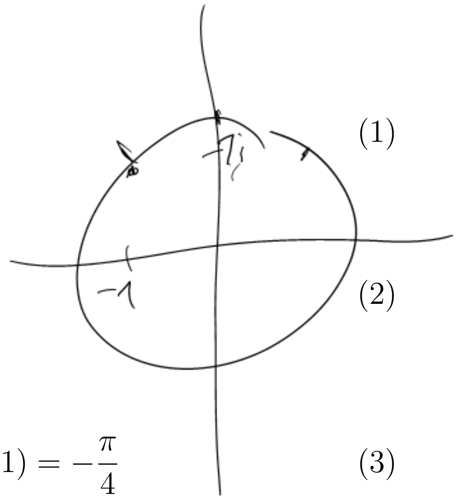


3. Aussagen über die trigonometrische Form komplexer Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *komplexe Zahl* lässt sich in *trigonometrischer Form* darstellen.	●	○
b) Jede *komplexe Zahl* lässt sich eindeutig in *trigonometrischer Form* darstellen.	○	●
c) Der Term $2\,\mathrm{cis}(\pi/2)$ ist eine *trigonometrische Form* von 2i.	●	○
d) Der Term $2\,\mathrm{cis}(-3\pi/2)$ ist eine *trigonometrische Form* von 2i.	●	○
e) Der Term $2\,\mathrm{cis}(5\pi/2)$ ist eine *trigonometrische Form* von 2i.	●	○
f) Der Term $-2\,\mathrm{cis}(\pi/2)$ ist eine *trigonometrische Form* von -2i.	○	●

4. Darstellung der Arg-Funktion

In dieser Aufgabe untersuchen wir zwei Varianten der *Arg-Funktion*.



a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(z) := \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right). \tag{1}$$

Offensichtlich ist der Funktionswert

$$f(\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = ? \tag{2}$$

nicht definiert. Ferner gilt

$$f(-1+\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4} \tag{3}$$

$$\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4} \neq f(-1+\mathrm{i}). \tag{4}$$

Daraus schliessen wir, dass f keine vollständige Darstellung der *Arg-Funktion* ist.

b) Wir bestimmen den *Funktionsterm* der *Arg-Funktion* in der *Zürcher-Variante*

$$\arg : \mathbb{C} \to \,]-\pi, \pi]. \tag{5}$$

Um den Werten in allen vier *Quadranten* und auf den Achsen der GAUSS-*Ebene* gerecht zu werden, muss gelten

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 0 \\ \operatorname{arccot}\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}\right) & \mathrm{Im}(z) > 0 \\ \pi & \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) < 0 \\ -\pi + \operatorname{arccot}\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}\right) & \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases} \tag{6}$$

c) Wir bestimmen den *Funktionsterm* der *Arg-Funktion* in der *Basler-Variante*

$$\arg : \mathbb{C} \to [0, 2\pi[\,. \tag{7}$$

Um den Werten in allen vier *Quadranten* und auf den Achsen der GAUSS-*Ebene* gerecht zu werden, muss gelten

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}(z) \geq 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0 \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) & \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0 \\ \pi/2 & \mathrm{Re}(z) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) & \mathrm{Re}(z) < 0 \\ 3\pi/2 & \mathrm{Re}(z) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z) < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) & \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases} \tag{8}$$

5. Konversion in die arithmetische Form

Wir geben jeweils die gegebene *komplexe Zahl* in *arithmetischer Form* an.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{4\,\mathrm{cis}(\pi/2)}} = 4 \cdot \cos(\pi/2) + 4 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/2) = 4 \cdot 0 + 4 \cdot \mathrm{i} \cdot 1 = \underline{\underline{4\mathrm{i}.}} \tag{9}$$

b) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{2\,\mathrm{cis}(-\pi/3)}} &= 2 \cdot \cos(-\pi/3) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/3) = 2 \cdot \cos(\pi/3) - 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/3) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}.}} \end{aligned} \tag{10}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\mathrm{cis}(3\pi/4)}} = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i} \cdot \sin(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}.}} \tag{11}$$

d) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{2\,\mathrm{cis}(3\pi)}} &= 2 \cdot \cos(3\pi) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(3\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi) \\ &= 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot 0 = -2 + 0 = \underline{\underline{-2.}} \end{aligned} \tag{12}$$

e) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\frac{1}{2}\,\mathrm{cis}(75^\circ)}} &= \frac{1}{2} \cdot \cos(75^\circ) + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(75^\circ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}+1}{2 \cdot \sqrt{2}} \\ &= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{i}.}} \end{aligned} \tag{13}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(-105^\circ)}} = \sqrt{2} \cdot \cos(-105^\circ) + \sqrt{2} \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(-105^\circ)$$

$$= \sqrt{2}\cdot\cos(105°) - \sqrt{2}\cdot\mathrm{i}\cdot\sin(105°) = \sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} - \sqrt{2}\cdot\mathrm{i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.}} \tag{14}$$

6. Konversion in die arithmetische Form mit Python/Numpy

Wir berechnen die *Konversionen* aus Aufgabe 5 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
r=...; phi=...;
# Berechnungen:
z=r*(np.cos(phi)+1j*np.sin(phi));
# Ausgabe:
print('z =',f"{z:#.3}");
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
r=4; phi=np.pi/2;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 4.00\,\mathrm{i}}}$.

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
r=2; phi=-np.pi/3;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 1.00 - 1.73\,\mathrm{i}}}$.

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
r=1; phi=3*np.pi/4;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx -0.707 + 0.707\,\mathrm{i}}}$.

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
r=2; phi=3*np.pi;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx -2.00}}$.

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
r=1/2; phi=75*np.pi/180;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 0.129 + 0.483\,\mathrm{i}}}$.

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
r=np.sqrt(2); phi=-105*np.pi/180;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx -0.366 - 1.37\,\mathrm{i}}}$.

7. Konversion in die trigonometrische Form

Wir geben jeweils die gegebene *komplexe Zahl* in *trigonometrischer Form* an.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{3}} = |3| \cdot \mathrm{cis}\big(\arg(3)\big) = \underline{\underline{3 \cdot \mathrm{cis}(0)}}. \tag{15}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{-5}} = |-5| \cdot \mathrm{cis}\big(\arg(-5)\big) = \underline{\underline{5 \cdot \mathrm{cis}(\pi)}}. \tag{16}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{2\mathrm{i}}} = |2\mathrm{i}| \cdot \mathrm{cis}\big(\arg(2\mathrm{i})\big) = \underline{\underline{2 \cdot \mathrm{cis}(\pi/2)}}. \tag{17}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{-3\mathrm{i}}} = |-3\mathrm{i}| \cdot \mathrm{cis}\big(\arg(-3\mathrm{i})\big) = \underline{\underline{3 \cdot \mathrm{cis}(-\pi/2)}}. \tag{18}$$

e) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{3-4\mathrm{i}}} &= |3-4\mathrm{i}| \cdot \mathrm{cis}\big(\arg(3-4\mathrm{i})\big) = \sqrt{3^2+(-4)^2} \cdot \mathrm{cis}\big(2\pi + \arctan(-4/3)\big) \\ &= \sqrt{25} \cdot \mathrm{cis}\big(2\pi + \arctan(-4/3)\big) \approx 5 \cdot \mathrm{cis}(2\pi - 0.927) \approx \underline{\underline{5 \cdot \mathrm{cis}(1.70\,\pi)}}.\end{aligned} \tag{19}$$

f) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{-12+5\mathrm{i}}} &= |-12+5\mathrm{i}| \cdot \mathrm{cis}\big(\arg(-12+5\mathrm{i})\big) \\ &= \sqrt{(-12)^2+5^2} \cdot \mathrm{cis}\big(\arctan(-5/12)+\pi\big) = \sqrt{169} \cdot \mathrm{cis}\big(\arctan(-5/12)+\pi\big) \\ &\approx 13 \cdot \mathrm{cis}(-0.395+\pi) \approx \underline{\underline{13 \cdot \mathrm{cis}(0.874\,\pi)}}.\end{aligned} \tag{20}$$

8. Konversion in die trigonometrische mit Python/Numpy

Wir berechnen die *Konversionen* aus Aufgabe 7 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```python
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
z=...;
# Berechnungen:
r=np.abs(z);
phi=np.angle(z);
# Ausgabe:
print('z =',f"{z:#.3}",'=',f"{r:#.3}",
      '* cis(',f"{phi/np.pi:#.3}",'pi)');
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
z=3.;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 3.00 \cdot \text{cis}(0.00)}}$.

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
z=-5.;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 5.00 \cdot \text{cis}(1.00\,\pi)}}$.

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
z=2.j;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 2.00 \cdot \text{cis}(0.500\,\pi)}}$.

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
z=-3.j;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 3.00 \cdot \text{cis}(-0.500\,\pi)}}$.

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
z=3.-4.j;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 5.00 \cdot \text{cis}(-0.295\,\pi)}}$.

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
z=-12.+5.j;
```

Gemäss Output ist $\underline{\underline{z \approx 13.0 \cdot \text{cis}(0.874\,\pi)}}$.

9. Aussagen über Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Betrachten Sie die allgemeine *quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{21}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Koeffizienten* a, b und c können so gewählt werden, dass (21) in $\mathbb{R}$ keine *Lösung* hat.	●	○
b) Die *Koeffizienten* a, b und c können so gewählt werden, dass (21) in $\mathbb{C}$ keine *Lösung* hat.	○	●
c) Für jede Wahl der *Koeffizienten* a, b und c hat (21) in $\mathbb{C}$ zwei verschiedene *Lösungen*.	○	●
d) Die *Koeffizienten* a, b und c können so gewählt werden, dass $x_1 = 1$ und $x_2 = \mathrm{i}$ die *Lösungen* von (21) sind.	○	●
e) Hat (21) die zwei *Lösungen* x_1 und x_2, dann gilt entweder $x_2 = x_1^*$ oder $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.	●	○
f) Die Anzahl *Lösungen* von (21) kann anhand der *Diskriminante* von (21) beurteilt werden.	●	○

10. Quadratische Gleichungen mit komplexen Lösungen

Wir bestimmen jeweils sämtliche *Lösungen* der *quadratischen Gleichung* in $\mathbb{C}$ mit Hilfe der *Mitternachtsformel*.

a) Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$x^2 + 1 = 0 \tag{22}$$

mit *Grund-Form-Parameter*

$$a = 1, \; b = 0 \quad \text{und} \quad c = 1. \tag{23}$$

Die *Diskriminante* von (22) ist

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 0^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0 - 4 = -4. \tag{24}$$

Aus der *Mitternachtsformel* für *quadratische Gleichungen* erhalten wir die *Lösungen*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 2\mathrm{i}}{2} = \pm \mathrm{i}. \tag{25}$$

Die *quadratische Gleichung* (22) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-\mathrm{i}, \; \mathrm{i}\}.}} \tag{26}$$

b) Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$x^2 - 10x + 74 = 0 \tag{27}$$

mit *Grund-Form-Parameter*

$$a = 1,\ b = -10 \quad \text{und} \quad c = 74. \tag{28}$$

Die *Diskriminante* von (27) ist

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-10)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 74 = 100 - 296 = -196. \tag{29}$$

Aus der *Mitternachtsformel* für *quadratische Gleichungen* erhalten wir die *Lösungen*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-196}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 14\mathrm{i}}{2} = 5 \pm 7\mathrm{i}. \tag{30}$$

Die *quadratische Gleichung* (27) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{5 - 7\mathrm{i},\ 5 + 7\mathrm{i}\right\}.}} \tag{31}$$

c) Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$2x^2 + 4 = x \qquad \Big| - x \tag{32}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 2x^2 - x + 4 = 0 \tag{33}$$

mit *Grund-Form-Parameter*

$$a = 2,\ b = -1 \quad \text{und} \quad c = 4. \tag{34}$$

Die *Diskriminante* von (33) ist

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 1 - 32 = -31. \tag{35}$$

Aus der *Mitternachtsformel* für *quadratische Gleichungen* erhalten wir die *Lösungen*

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-31}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{31}\,\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4}\,\mathrm{i}. \tag{36}$$

Die *quadratische Gleichung* (33) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{31}}{4}\,\mathrm{i},\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{31}}{4}\,\mathrm{i}\right\}.}} \tag{37}$$

d) Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$3t^2 = -30t - 507 \qquad \Big| : 3 \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \qquad t^2 = -10t - 169 \qquad \Big| + 10t + 169 \tag{39}$$

$$\Leftrightarrow \qquad t^2 + 10t + 169 = 0 \tag{40}$$

mit *Grund-Form-Parameter*

$$a = 1,\ b = 10 \quad \text{und} \quad c = 169. \tag{41}$$

Die *Diskriminante* von (40) ist

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 169 = 100 - 676 = -576. \tag{42}$$

Aus der *Mitternachtsformel* für *quadratische Gleichungen* erhalten wir die *Lösungen*

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{-576}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 24\mathrm{i}}{2} = -5 \pm 12\,\mathrm{i}. \tag{43}$$

Die *quadratische Gleichung* (40) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{-5 - 12\mathrm{i},\ -5 + 12\mathrm{i}\right\}.}} \tag{44}$$

e) Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$w = 2 + w^2 \qquad \Big|\, - w \tag{45}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = w^2 - w + 2 \tag{46}$$

mit *Grund-Form-Parameter*

$$a = 1,\ b = -1 \quad \text{und} \quad c = 2. \tag{47}$$

Die *Diskriminante* von (46) ist

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 1 - 8 = -7. \tag{48}$$

Aus der *Mitternachtsformel* für *quadratische Gleichungen* erhalten wir die *Lösungen*

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-7}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{7}\,\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{i}. \tag{49}$$

Die *quadratische Gleichung* (46) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{i},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{i}\right\}.}} \tag{50}$$

f) Wir betrachten die *quadratische Gleichung*

$$s\,(s + 1) = 2s^2 + 1 \tag{51}$$

$$s^2 + s = 2s^2 + 1 \qquad \Big|\, - s^2 - s \tag{52}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = s^2 - s + 1 \tag{53}$$

mit *Grund-Form-Parameter*

$$a = 1,\ b = -1 \quad \text{und} \quad c = 1. \tag{54}$$

Die *Diskriminante* von (53) ist

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3. \tag{55}$$

Aus der *Mitternachtsformel* für *quadratische Gleichungen* erhalten wir die *Lösungen*

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}. \tag{56}$$

Die *quadratische Gleichung* (53) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}\right\}.}} \tag{57}$$