FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 5

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Bogenlänge, Mantelfläche von Rotationskörpern, Massenmittelpunkt, Schwerpunkt, Flächenschwerpunkt und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können mit Hilfe der Integration die Bogenlänge einer ebenen Kurve, die Mantelfläche und das Volumen von Rotationskörpern und den Schwerpunkt homogener Flächen berechnen.

---

1. Kettenlinie
Welche Länge besitzt ein Drahtseil, das gemäss der Funktion $f(x) = \cosh x$ durchhängt, wenn beide Aufhängepunkte (spiegelsymmetrisch zur y-Achse) die gleiche Höhe und einen Abstand von 4 m voneinander besitzen?

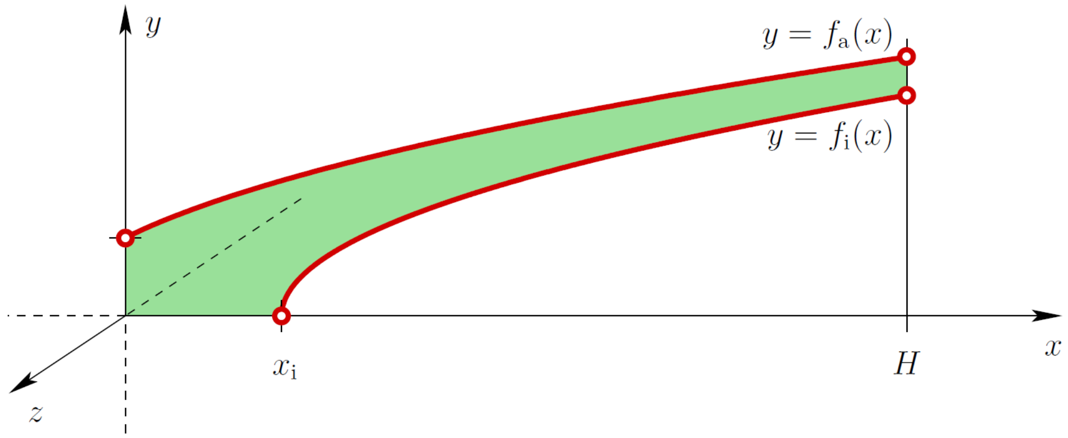
Zur Bestimmung der Bogenlänge einer ebenen Kurve nutzen wir die Formel
$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$, wobei wir a = -2 und b = 2 wählen.
Wir können die Funktionsgleichung umschreiben: $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
Ableitung bilden: $f'(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$

Integrand berechnen: $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}}$
$= \sqrt{\frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-2x}} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x} + 2 + e^{-2x})} = \frac{1}{2}\sqrt{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$
Integral berechnen und somit Bogenlänge bestimmen:

$$L = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^2 (e^x + e^{-x})dx = [e^x - e^{-x}]_0^2 = e^2 - e^{-2} = 7{,}254$$

2. Volumen und Masse einer Vase
Es seien die Funktionen
$f_a: [0, H] \to \mathbb{R}, f_a(x) = C \cdot \sqrt{x - x_a}$ und $f_i: [x_i, H] \to \mathbb{R}, f_i(x) = C \cdot \sqrt{x - x_i}$
mit $x_a < 0 < H$ und $C > 0$ gegeben.
Die Vase entsteht durch Rotation um die x-Achse der Querschnittsfläche (grün in der Skizze), die durch die beiden Funktionen zwischen $x = 0$ und $x = H$ eingeschlossen wird.

a) Wie gross muss H gewählt werden, damit die Vase das Volumen V_0 fassen kann?
b) Welche Masse hat die leere Vase, wenn sie aus Glas der Dichte ρ_g gefertigt ist?



a)
Das Innenvolumen der Vase ergibt sich allgemein zu

$$V_i = \pi \int_{x_i}^{H} f_i^2(x)\,dx = \pi \int_{x_i}^{H} C^2 \cdot \left(\sqrt{x - x_i}\right)^2 dx = \pi \cdot C^2 \int_{x_i}^{H} (x - x_i)\,dx$$

$$= \pi \cdot C^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[(x - x_i)^2 \right]\Big|_{x_i}^{H} = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left((H - x_i)^2 - 0 \right) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot (H - x_i)^2$$

Die Vase soll das vorgegebene Volumen V_0 fassen:

$$V_0 = V_i = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot (H - x_i)^2 \qquad \Big| \cdot \frac{2}{\pi \cdot C^2}$$

$$\frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0 = (H - x_i)^2 \qquad \Big| \sqrt{\cdots}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0} = |H - x_i| = H - x_i \qquad \Big| + x_i.$$

Somit erhalten wir für die Höhe:

$$\underline{\underline{H}} = x_i + \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0} = \underline{\underline{x_i + \frac{1}{C} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot V_0}}}.$$

b)
Um das Glasvolumen der Vase zu bestimmen, berechnen wir auch das sogenannte Aussenvolumen V_a und ziehen von diesem anschliessend das Innenvolumen V_i ab:

$$V_a = \pi \int_{0}^{H} f_a^2(x)\,dx = \pi \int_{0}^{H} C^2 \cdot \left(\sqrt{x - x_a}\right)^2 dx = \pi \cdot C^2 \int_{0}^{H} (x - x_a)\,dx$$

$$= \pi \cdot C^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[(x - x_a)^2 \right]\Big|_{0}^{H} = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left((H - x_a)^2 - (0 - x_a)^2 \right)$$

$$= \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_a + x_a^2 - x_a^2 \right) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_a \right)$$

$$V_g = V_a - V_i = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_a \right) - \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot (H - x_i)^2$$

$$= \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_a - H^2 + 2 \cdot H \cdot x_i - x_i^2 \right) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(2 \cdot H \cdot (x_i - x_a) - x_i^2 \right)$$

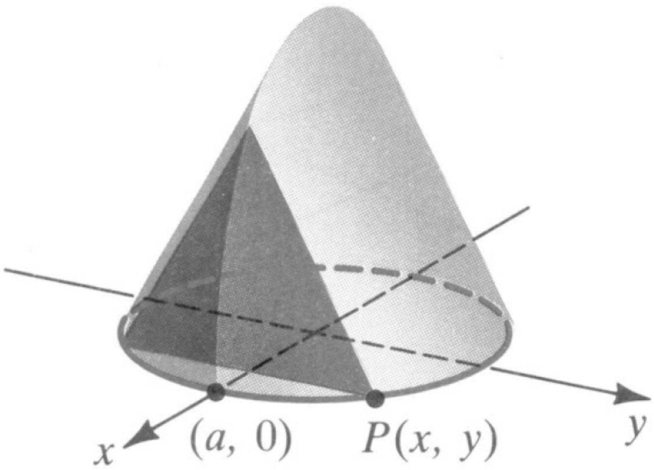
$$= \pi \cdot C^2 \cdot \left(H \cdot (x_i - x_a) - \frac{x_i^2}{2} \right).$$

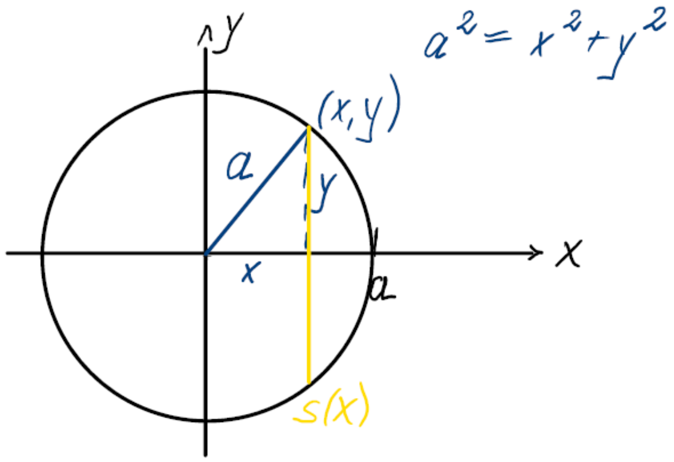
Jetzt können wir die Masse bestimmen:

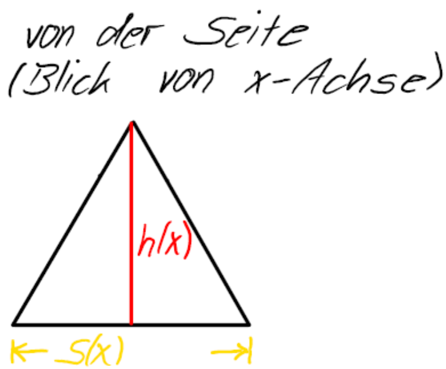
$$\underline{\underline{M_g}} = \rho_g \cdot V_g = \underline{\underline{\pi \cdot C^2 \cdot \rho_g \cdot \left(H \cdot (x_i - x_a) - \frac{x_i^2}{2} \right)}}.$$

3. Volumen durch Integration des Querschnitts

Gegeben sei ein Körper, dessen Grundfläche ein Kreis sei und der im Querschnitt aus gleichseitigen Dreiecken besteht (siehe Skizze). Bestimmen Sie das Volumen des Körpers durch Integration des Querschnitts.







Wir bestimmen die Fläche der gleichseitigen Dreiecke (dunkelgrau in der obersten Abbildung), die eine Seitenlänge von $s(x)$ und eine Höhe $h(x)$ haben, unter Zuhilfenahme des Satzes von Pythagoras.

Für den Kreis gilt: $x^2 + y^2 = a^2$.

Für die Seitenlänge ergibt sich: $s(x) = 2 \cdot y = 2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$.

Für die Höhe ergibt sich: $h(x) = \sqrt{(s(x))^2 - (\frac{1}{2}s(x))^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s(x)$.

Dreicksfläche (0,5 x Grundseite x Höhe) ist somit:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot (a^2 - x^2) = \sqrt{3} \cdot (a^2 - x^2)$$

Durch Integration ergibt sich das Volumen

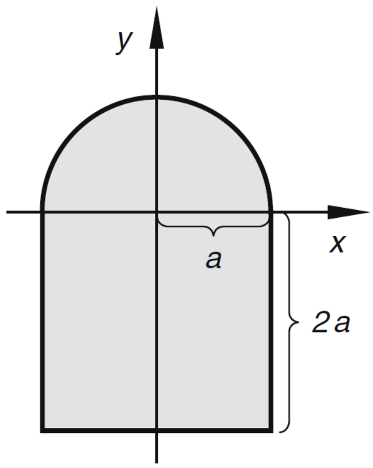
$$\underline{\underline{V}} = \int_{-a}^{a} A(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a A(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a \sqrt{3}\cdot(a^2-x^2)\,\mathrm{d}x = 2\cdot\sqrt{3}\int_0^a (a^2-x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left[a^2\cdot x - \frac{1}{3}\cdot x^3\right]\Bigg|_0^a = 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(a^2\cdot a - \frac{1}{3}\cdot a^3 - 0 + 0\right)$$

$$= 2\cdot\sqrt{3}\cdot\left(a^3 - \frac{1}{3}\cdot a^3\right) = 2\cdot\sqrt{3}\cdot a^3\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right) = 2\cdot\sqrt{3}\cdot a^3\cdot\frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}\cdot\sqrt{3}\cdot a^3.}}$$

4. Flächenschwerpunkt

a) Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt der skizzierten Fläche (Quadrat mit aufgesetztem Halbkreis).



b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Geraden $y=x+2$ und der Parabel $y=x^2-4$ berandet wird.

a)
Zuerst die obere und untere begrenzende Funktion bestimmen (y_o und y_u).

$$y_o = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y_u = -2a$$

Dann die Fläche ausrechnen.

$$A = 4a^2 + \frac{\pi}{2}a^2 = 5{,}5708\,a^2$$

Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen auf der y-Achse, d. h. $x_s = 0$ und es muss nur der y_s Wert bestimmt werden.

$$y_S = \frac{1}{2A}\cdot\int_{-a}^{a}[(a^2-x^2)-4a^2]\,dx = \frac{1}{A}\cdot\int_0^a[(a^2-x^2)-4a^2]\,dx =$$

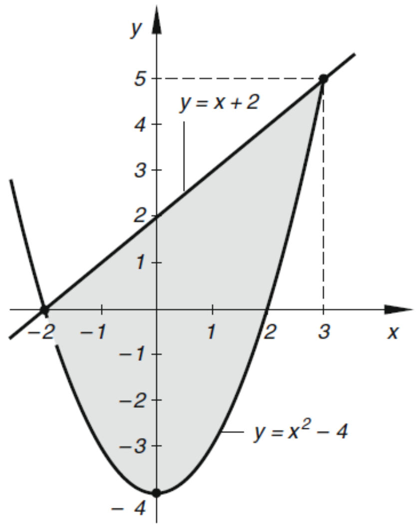
$$= \frac{1}{A}\cdot\int_0^a(-x^2-3a^2)\,dx = \frac{1}{5{,}5708\,a^2}\left[-\frac{1}{3}x^3 - 3a^2x\right]_0^a = -0{,}598\,a$$

b)
Zuerst Bestimmung der Schnittpunkte der beiden Funktionen, um die Fläche berechnen zu können.

$$x^2 - 4 = x + 2 \quad\Rightarrow\quad x_1 = -2; \quad x_2 = 3$$

$$A = \int_{-2}^{3} [(x+2) - (x^2 - 4)]\, dx =$$
$$= \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx =$$
$$= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 6x \right]_{-2}^{3} = 125/6$$

Nun lassen sich x- und y-Wert des Schwerpunkts bestimmen:



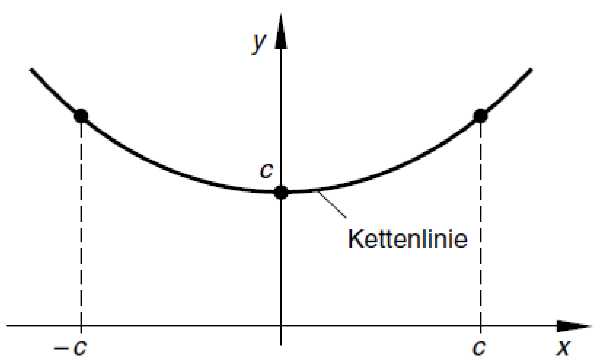
$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{-2}^{3} x[(x+2) - (x^2 - 4)]\, dx =$$
$$= \frac{1}{A} \cdot \int_{-2}^{3} (-x^3 + x^2 + 6x)\, dx =$$
$$= \frac{6}{125} \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 \right]_{-2}^{3} = 0{,}5$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_{-2}^{3} [(x+2)^2 - (x^2 - 4)^2]\, dx = \frac{1}{2A} \cdot \int_{-2}^{3} (-x^4 + 9x^2 + 4x - 12)\, dx =$$
$$= \frac{3}{125} \left[-\frac{1}{5}x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 12x \right]_{-2}^{3} = 0$$

Der Flächenschwerpunkt liegt also auf der x-Achse: $S = (0{,}5;\, 0)$

5. Mantelfläche Rotationskörper

Bestimmen Sie die Mantelfläche M_x des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kettenlinie $f(x) = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right), -c \le x \le c$ um die x-Achse entsteht.



Bestimmung der Mantelfläche bei Rotation um x-Achse:

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Ableiten der Funktion f(x)=y, Bestimmung des Radikanden im Integral und des Integranden:

$$y' = c \cdot \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \cdot \frac{1}{c} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) = c \cdot \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right)$$

Berechnung des Integrals (siehe Übungsblatt 3 Analysis Aufgabe 2j):

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi c \cdot 2 \cdot \int_0^c \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) dx = 4\pi c \left[\frac{x}{2} + \frac{\sinh\left(\frac{2x}{c}\right)}{4/c}\right]_0^c =$$

$$= 4\pi c \left[\frac{x}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh\left(\frac{2x}{c}\right)\right]_0^c = 4\pi c \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh 2 - 0 - \frac{c}{4} \cdot \underbrace{\sinh 0}_{0}\right) = 4\pi c \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh 2\right) =$$

$$= 4\pi c \cdot \frac{c}{2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \sinh 2\right)}_{2{,}8134} = 2\pi c^2 \cdot 2{,}8134 = 5{,}6268\, \pi c^2 = 17{,}6771 \cdot c^2$$