Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 9 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe partielle Ableitung, Tangentialebene, Gradient, totales Differential, Satz von Schwarz, Hesse-Matrix und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die partiellen Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen berechnen.
- Sie können die Tangentialebene in einem Punkt an ein Skalarfeld bestimmen.
- Sie können den Gradienten, das totale Differential und die Hesse-Matrix von Skalarfeldern bestimmen.

1. Aussagen über partielle Ableitungen

Gegeben sei $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Unter einer partiellen Ableitung von f versteht man die Ableitung nach einer der n Variablen, wobei die anderen Variablen wie Konstanten betrachtet werden.	X	
b) Die partiellen Ableitungen können mit Hilfe des Differenzquotienten bestimmt werden.	X	
c) Die Rechenregeln für Ableitungen von einer Funktion in einer Variablen gelten auch für partielle Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen.	X	
d) Jede in einem Punkt P differenzierbare Funktion f ist dort partiell differenzierbar.	X	
e) Aus der Existenz von $grad(f(\vec{x}))$ folgt: die Tangentialebene an f ist in $\vec{x}$ berechenbar.	X	

2. Ableitungswerte von Funktionen in zwei Variablen

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen die partiellen Ableitungen allgemein und an den gegebenen Stellen (x_0,y_0).

a) $f(x,y) = \sqrt{2x + 3xy + 4y}, (x_0, y_0) = (1; 1)$
b) $f(x,y) = \cos(e^{xy} + xy)\,, (x_0, y_0) = (0; 1)$
c) $f(x,y) = x^{2y}, (x_0, y_0) = (2; 1)$

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

d) $z = f(x,y) = (2x - 3y^2)^5$
e) $z = f(x,y) = (x^3 - y^2) \cdot \cosh(xy)$
f) $z = f(x,y) = \ln(2x + e^{3y})$

a)
Mit der Kettenregel ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x,y) = \frac{2+3y}{2\sqrt{2x+3xy+4y}} = \frac{1}{\sqrt{2x+3xy+4y}} + \frac{3}{2}\frac{y}{\sqrt{2x+3xy+4y}},$$

$$f_y(x,y) = \frac{3x+4}{2\sqrt{2x+3xy+4y}} = \frac{3}{2}\frac{x}{\sqrt{2x+3xy+4y}} + \frac{2}{\sqrt{2x+3xy+4y}}.$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(1,1) = \frac{5}{6} \text{ und } f_y(1,1) = \frac{7}{6}.$$

b)
Ebenfalls aus der Kettenregel ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x,y) = -\sin\left(e^{xy} + xy\right)\left(ye^{xy} + y\right),$$

$$f_y(x,y) = -\sin\left(e^{xy} + xy\right)\left(xe^{xy} + x\right).$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(0,1) = -2\sin(1) \text{ und } f_y(0,1) = 0.$$

c)
Hier verwenden wir $f(x,y) = e^{2y\ln x}$ und erhalten

$$f_x(x,y) = 2y \cdot x^{2y-1},$$

$$f_y(x,y) = 2\ln x \cdot e^{2y\ln x} = 2\ln x \cdot x^{2y}.$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(2,1) = 4 \text{ und } f_y(2,1) = 8\ln 2.$$

d)
Differenziert wird mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$z = \underbrace{(2x - 3y^2)}_{u}{}^5 = u^5 \quad \text{mit} \quad u = 2x - 3y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6y$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 5u^4 \cdot 2 = 10u^4 = 10(2x - 3y^2)^4$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 5u^4 \cdot (-6y) = -30yu^4 = -30y(2x - 3y^2)^4$$

e)
Differenziert wird jeweils nach der *Produktregel*, wobei die (partiellen) Ableitungen des Faktors $\cosh(xy)$ mit Hilfe der *Kettenregel* gebildet werden:

$$z = \underbrace{(x^3 - y^2)}_{u} \cdot \underbrace{\cosh(xy)}_{v} = uv \quad \text{mit} \quad u = x^3 - y^2 \quad \text{und} \quad v = \cosh \underbrace{(xy)}_{t} = \cosh t \quad \text{mit} \quad t = xy$$

$$u_x = 3x^2, \quad u_y = -2y \quad \text{und} \quad v_x = (\sinh t) \cdot y = y \cdot \sinh(xy), \quad v_y = (\sinh t) \cdot x = x \cdot \sinh(xy)$$

$$z_x = u_x v + v_x u = 3x^2 \cdot \cosh(xy) + y \cdot \sinh(xy) \cdot (x^3 - y^2) =$$

$$= 3x^2 \cdot \cosh(xy) + (x^3 y - y^3) \cdot \sinh(xy)$$

$$z_y = u_y v + v_y u = -2y \cdot \cosh(xy) + x \cdot \sinh(xy) \cdot (x^3 - y^2) =$$

$$= -2y \cdot \cosh(xy) + (x^4 - xy^2) \cdot \sinh(xy)$$

f)
Wir benötigen jeweils die *Kettenregel*:

$$z = \ln \underbrace{(2x + e^{3y})}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = 2x + e^{3y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3 \cdot e^{3y}$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u} = \frac{2}{2x + e^{3y}}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 3 \cdot e^{3y} = \frac{3 \cdot e^{3y}}{u} = \frac{3 \cdot e^{3y}}{2x + e^{3y}}$$

3. Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

a) $z = f(x, y) = x \cdot e^y - y \cdot e^x$
b) $z = f(x, y) = \ln(2y - x^2)$
c) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2xy}$.

a)
Alle Ableitungen erhält man durch *elementare* gliedweise (partielle) Differentiation.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x}\left[x \cdot e^y - y \cdot e^x\right] = 1 \cdot e^y - y \cdot e^x = e^y - y \cdot e^x$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y}\left[x \cdot e^y - y \cdot e^x\right] = x \cdot e^y - 1 \cdot e^x = x \cdot e^y - e^x$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} z_x = \frac{\partial}{\partial x} [\mathrm{e}^y - y \cdot \mathrm{e}^x] = 0 - y \cdot \mathrm{e}^x = -y \cdot \mathrm{e}^x$$

$$\left.\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} z_x = \frac{\partial}{\partial y} [\mathrm{e}^y - y \cdot \mathrm{e}^x] = \mathrm{e}^y - 1 \cdot \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x \\ z_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} z_y = \frac{\partial}{\partial x} [x \cdot \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x] = 1 \cdot \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad z_{xy} = z_{yx}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} z_y = \frac{\partial}{\partial y} [x \cdot \mathrm{e}^y - \mathrm{e}^x] = x \cdot \mathrm{e}^y - 0 = x \cdot \mathrm{e}^y$$

b)

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Wir verwenden wie folgt die *Kettenregel*:

$$z = \ln \underbrace{(2y - x^2)}_{u} = \ln u \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{u} = \frac{-2x}{2y - x^2}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u} = \frac{2}{2y - x^2}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

z_{xx} erhalten wir, indem wir z_x mit Hilfe der *Quotientenregel* partiell nach x differenzieren:

$$z_x = \frac{-2x}{2y - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = -2x, \quad v = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad u_x = -2, \quad v_x = -2x$$

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{-2(2y - x^2) - (-2x)(-2x)}{(2y - x^2)^2} = \frac{-4y + 2x^2 - 4x^2}{(2y - x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 4y}{(2y - x^2)^2}$$

z_{xy} erhält man aus z_x durch partielles Differenzieren nach y. Wir benötigen die *Kettenregel*:

$$z_x = \frac{-2x}{2y - x^2} = -2x \underbrace{(2y - x^2)}_{u}{}^{-1} = -2x \cdot u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial z_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -2x(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2 = 4x \cdot u^{-2} = \frac{4x}{u^2} = \frac{4x}{(2y - x^2)^2}$$

Alternative: Sie differenzieren nach der *Quotientenregel*, wobei der Zähler eine *konstante*, d. h. von der Variablen y *unabhängige* Funktion ist.

z_{yx} erhalten wir, indem wir z_y mit Hilfe der *Quotienten-* oder *Kettenregel* partiell nach x differenzieren. Wir wollen an dieser Stelle die *Quotientenregel* verwenden:

$$z_y = \frac{2}{2y - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 2, \quad v = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad u_x = 0, \quad v_x = -2x$$

$$z_{yx} = \frac{\partial z_y}{\partial x} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{0(2y - x^2) - (-2x) \cdot 2}{(2y - x^2)^2} = \frac{4x}{(2y - x^2)^2}$$

Es gilt: $z_{xy} = z_{yx}$ (Satz von Schwarz).

z_{yy} erhalten wir, indem wir z_y mit Hilfe der *Ketten-* oder *Quotientenregel* partiell nach y differenzieren. Wir verwenden hier die *Kettenregel*:

$$z_y = \frac{2}{2y - x^2} = 2\underbrace{(2y - x^2)}_{u}{}^{-1} = 2u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_{yy} = \frac{\partial z_y}{\partial y} = \frac{\partial z_y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2 = -4u^{-2} = \frac{-4}{u^2} = \frac{-4}{(2y - x^2)^2}$$

c)

$$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 - 2xy}}; \quad z_y = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2xy}};$$

$$z_{xx} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 2xy} - \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y)(x - y)}{x^2 - 2xy} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2xy) - (x - y)^2}{(x^2 - 2xy)\sqrt{x^2 - 2xy)}} = -\frac{y^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}};$$

$$z_{yy} = -\frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}; \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}$$

4. Ableitungen in Funktion einsetzen

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $z = f(x, y) = xy + x \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$, mit x > 0 und y > 0, die Gleichung $xz_x + yz_y = xy + z$ (bzw. in anderer Schreibweise: $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = xy + z$) erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, t) = e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x), a \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $a^2 \cdot f_{xx} = f_t$ (andere Schreibweise: $a^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{dx^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$) ist.

a)

Die Funktion wird *vor* dem Differenzieren unter Verwendung der Rechenregel $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ in eine *günstigere* Gestalt gebracht:

$$z = xy + x \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) = xy + x(\ln y - \ln x) = xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(y + \ln y) - x \cdot \ln x$$

Gliedweises partielles Differenzieren nach x unter Verwendung der *Produktregel* liefert dann:

$$z = x\underbrace{(y + \ln y)}_{\text{konst. Faktor}} - \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_{v} = x(y + \ln y) - (uv) \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = \frac{1}{x}$$

$$z_x = 1(y + \ln y) - (u_x v + v_x u) = y + \ln y - \left(1 \cdot \ln x + \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\right) = y + \ln y - \ln x - 1$$

Die partielle Ableitung nach y lässt sich besonders einfach bilden:

$$z = \underbrace{x}_{\text{konst. Faktor}}(y + \ln y) - \underbrace{x \cdot \ln x}_{\text{konst. Summand}} \quad \Rightarrow \quad z_y = x\left(1 + \frac{1}{y}\right) - 0 = x + \frac{x}{y}$$

Wir setzen die Ausdrücke für z, z_x und z_y seitenweise in die vorgegebene Gleichung ein:

Linke Seite: $x z_x + y z_y = x(y + \ln y - \ln x - 1) + y\left(x + \dfrac{x}{y}\right) = xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x - x + xy + x =$

$$= 2xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(2y + \ln y - \ln x)$$

Rechte Seite: $xy + z = xy + xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = 2xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(2y + \ln y - \ln x)$

Ein Vergleich zeigt, dass beide Seiten übereinstimmen.

b)

Wir bilden zunächst die benötigten partiellen Ableitungen f_t und f_{xx}.

Partielle Ableitung f_t

$$f = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x) = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^u \quad \text{mit} \quad u = -\pi^2 a^2 t \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\pi^2 a^2$$

Mit der *Kettenregel* erhält man ($\sin(\pi x)$ ist ein *konstanter* Faktor):

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^u \cdot (-\pi^2 a^2) = -\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^u = -\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}$$

Partielle Ableitung f_{xx}

Wir differenzieren die Funktion $f(x;\, t)$ *zweimal* nacheinander partiell nach x, wobei wir jedes Mal die *Kettenregel* benutzen ($\mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}$ ist dabei ein *konstanter* Faktor):

$$f = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin\underbrace{(\pi x)}_{u} = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin u \quad \text{mit} \quad u = \pi x \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \pi$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot (\cos u) \cdot \pi = \pi \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \cos u \quad \text{mit} \quad u = \pi x \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \pi$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \pi \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot (-\sin u) \cdot \pi = -\pi^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)$$

Wir multiplizieren f_{xx} mit a^2 und erhalten:

$$a^2 \cdot f_{xx} = a^2\left[-\pi^2 \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)\right] = \underbrace{-\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot \mathrm{e}^{-\pi^2 a^2 t}}_{f_t} = f_t$$

Die gegebene Funktion erfüllt somit (wie behauptet) die Differentialgleichung $a^2 \cdot f_{xx} = f_t$.

5. Tangentialebene

Bestimmen Sie die Tangentialebene zu

a) $f(x, y) = \frac{x^3}{y+3}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2; 1)$.

b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (0; 1)$.

c) $f(x, y) = 3 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2 \cdot \cos\big(\pi(x + 2y)\big)$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2; 1)$.

d) In welchem Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ der Fläche $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 7$ verläuft die Tangentialebene parallel zur Ebene $z = f(x, y) = 8x + 2y$? Wie lautet die Gleichung dieser Tangentialebene?

a)
Wir berechnen zuerst die beiden partiellen Ableitungen

$$f_x = \frac{3x^2}{y+3}, \quad f_y = -\frac{x^3}{(y+3)^2}$$

und setzen dort den Punkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$ ein:

$$f_x(2,1) = \tfrac{12}{4} = 3, \quad f_y(2,1) = -\tfrac{8}{16} = -0{,}5$$

Zusammen mit $f(2,1) = \frac{8}{4} = 2$ ergeben diese Werte die Tangentialebene

$$z = 2 + 3\,(x-2) - \tfrac{1}{2}\,(y-1)$$

b)

$z_x = (2x - x^2 - y^2) \cdot \mathrm{e}^{-x}; \quad z_y = 2y \cdot \mathrm{e}^{-x}; \quad z_x(0;1) = -1; \quad z_y(0;1) = 2$

$z - 1 = -1\,(x - 0) + 2\,(y - 1) \quad \Rightarrow \quad z = -x + 2y - 1$

c)

$z_x = 3y^{-1/2} - 2\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y); \quad z_y = -\dfrac{3}{2}\,x y^{-3/2} - 4\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y);$

$z_x(2;1) = 3; \quad z_y(2;1) = -3; \quad P = (2;1;8); \quad z = 3x - 3y + 5$

d)
Die gesuchte Tangentialebene muss in der x- bzw. y-Richtung den *gleichen* Anstieg haben wie die Ebene $z = 8x + 2y$, d. h. im (noch unbekannten) Flächenpunkt P_0 müssen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung die Werte $f_x(x_0; y_0) = 8$ und $f_y(x_0; y_0) = 2$ haben. Mit $f_x(x; y) = z_x = 2x$ und $f_y(x; y) = z_y = 2y$ folgt also:

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x_0; y_0) = 2x_0 = 8 \\ f_y(x_0; y_0) = 2y_0 = 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x_0 = 4, \quad y_0 = 1$$

Die zugehörige Höhenkoordinate ist $z_0 = f(x_0; y_0) = f(4; 1) = 16 + 1 - 7 = 10$.

Flächenpunkt: $P_0 = (x_0; y_0; z_0) = (4; 1; 10)$

Gleichung der Tangentialebene in $P_0 = (x_0; y_0; z_0) = (4; 1; 10)$

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - 10 = 8\,(x-4) + 2\,(y-1) = 8x - 32 + 2y - 2 = 8x + 2y - 34 \quad \Rightarrow \quad z = 8x + 2y - 24$$

6. Totales Differenzial

a) Berechnen Sie das totale Differenzial dF der Funktion $F(x,y,z) = x^4 + 2x\cos y - \sqrt{2}\sin y \cos z$. Durch die Gleichung F(x,y,z) = 0 ist lokal um die Stelle (1;π/2;π/4) eine Funktion z = f(x,y) gegeben. Berechnen Sie das totale Differenzial dz = df dieser Funktion an der genannten Stelle. Wie ändert sich demzufolge näherungsweise die Variable z, wenn man x und y jeweils um 0,1 erhöht?

b) Bestimmen Sie das totale Differential der Funktion $u = u(x,y,z) = \ln\sqrt{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^3}$.
Wie lautet es an der Stelle (-1;2;-2)? Welchen Näherungswert für die abhängige Variable u liefert das totale Differential für die Änderungen dx = 0,1, dy = -0,2 und dz = -0,1?

a)

Partielle Ableitungen:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial x} &= 4x^3 + 2\cos(y) \\
\frac{\partial F}{\partial y} &= -2x\sin(y) - \sqrt{2}\cos(y)\cos(z) \\
\frac{\partial F}{\partial z} &= \sqrt{2}\sin(y)\sin(z)
\end{aligned}
$$

Damit:

$$
dF = (4x^3 + 2\cos(y))\,dx + (-2x\sin(y) - \sqrt{2}\cos(y)\cos(z))\,dy + \sqrt{2}\sin(y)\,\sin(z)\,dz
$$

Auf der Funktion f gilt:

$$
\begin{aligned}
dF &= (4x^3 + 2\cos(y))\,dx + (-2x\sin(y) - \sqrt{2}\cos(y)\cos(z))\,dy + \sqrt{2}\sin(y)\,\sin(z)\,dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Damit gilt an der betrachteten Stelle $(x,y,z) = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$:

$$
\begin{aligned}
dF\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) &= \left(4 + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)dx + \left(-2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)dy \\
&\quad + \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)dz \\
&= (4 + 2\cdot 0)\,dx + \left(-2\cdot 1 - \sqrt{2}\cdot 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right)dy \\
&\quad + \sqrt{2}\cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}dz \\
&= 4\,dx - 2\,dy + dz \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Daraus:

$$
dz = -4\,dx + 2\,dy
$$

Für Änderungen $dx = dy = 0{,}1$ ergibt sich demzufolge als Änderung in z

$$
dz = -4\cdot 0{,}1 + 2\cdot 0{,}1 = -0{,}4 + 0{,}2 = -0{,}2.
$$

b)

Wir bringen die Funktion zunächst in eine für das Differenzieren *günstigere* Form:

$$
u = \ln\sqrt{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^3} = \ln(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^{3/2} = \frac{3}{2}\cdot\ln(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)
$$

Rechenregel: $\ln a^n = n \cdot \ln a$

Es genügt, die partielle Ableitung u_x zu bilden, denn die Funktion ist *symmetrisch* in den drei unabhängigen Variablen x, y und z. Die Ableitung u_x erhalten wir wie folgt mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$
u = \frac{3}{2}\cdot\ln\underbrace{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)}_{t} = \frac{3}{2}\cdot\ln t \quad \text{mit} \quad t = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 4x
$$

$$
u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{t}\cdot 4x = \frac{3}{2}\cdot\frac{4x}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2} = \frac{3\cdot 4x}{2\cdot 2(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{3x}{x^2 + y^2 + z^2}
$$

Wegen der erwähnten *Symmetrie* gilt (x wird durch y bzw. z ersetzt):

$$u_y = \frac{3y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u_z = \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Das *totale Differential* besitzt dann die folgende Gestalt:

$$du = u_x\,dx + u_y\,dy + u_z\,dz = \frac{3x}{x^2 + y^2 + z^2}\,dx + \frac{3y}{x^2 + y^2 + z^2}\,dy + \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2}\,dz =$$

$$= \frac{3x\,dx + 3y\,dy + 3z\,dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

An der Stelle $x = -1,\ y = 2,\ z = -2$ lautet das *totale Differential* wie folgt:

$$du = \frac{3(-1\,dx + 2\,dy - 2\,dz)}{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{3}{9}(-dx + 2\,dy - 2\,dz) = \frac{1}{3}(-dx + 2\,dy - 2\,dz)$$

Näherungswert für $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$ und $dz = -0{,}1$

$$u(x = -1;\ y = 2;\ z = -2) = \frac{3}{2} \cdot \ln\left[2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot (-2)^2\right] =$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \ln(2 + 8 + 8) = \frac{3}{2} \cdot \ln 18 = 4{,}3356$$

Totales Differential für $dx = 0{,}1$, $dy = -0{,}2$ und $dz = -0{,}1$:

$$du = \frac{1}{3}\left[-0{,}1 + 2 \cdot (-0{,}2) - 2 \cdot (-0{,}1)\right] = \frac{1}{3}(-0{,}1 - 0{,}4 + 0{,}2) = \frac{1}{3} \cdot (-0{,}3) = -0{,}1$$

Näherungswert: $u + du = 4{,}3356 - 0{,}1 = 4{,}2356$

Exakter Funktionswert: $u(x = -0{,}9;\ y = 1{,}8;\ z = -2{,}1) = 4{,}2427$

7. Ableitungen von Funktionen in zwei Variablen

Berechnen Sie jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix der gegebenen Funktion.

a) $f(x, y) = 3x + 5y$
b) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$
c) $f(x, y) = x^2y^2 + 1$
d) $f(x, y) = 2^{3x-5y}$
e) $V(r, h) = \pi r^2 h$
f) $\psi(t, x) = A\sin(\omega t - kx)$

a)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \\ 0 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}$$

b)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^{2-1} + 2 \cdot 1 \cdot y - 0 \\ 0 + 2x \cdot 1 - 3 \cdot 2y^{2-1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x - 6y \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 & 0 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 0 & 0 - 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}}}$$

c)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^{2-1} \cdot y^2 + 0 \\ x^2 \cdot 2y^{2-1} + 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2 y \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \cdot y^2 & 2x \cdot 2y^{2-1} \\ 2 \cdot 2x^{2-1} y & 2x^2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}}}$$

d)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \ln(2) \cdot \ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \cdot (3 \cdot 1 - 0) & 3 \cdot (0 - 5 \cdot 1) \\ -5 \cdot (3 \cdot 1 - 0) & -5 \cdot (0 - 5 \cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\ln^2(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}}}$$

e)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla V}} = \begin{bmatrix} V_{,1} \\ V_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \cdot 2r^{2-1} \cdot h \\ \pi r^2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 V}} = \begin{bmatrix} V_{,1,1} & V_{,1,2} \\ V_{,2,1} & V_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \cdot 1 \cdot h & 2\pi r \cdot 1 \\ \pi \cdot 2r^{2-1} & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\pi h & 2\pi r \\ 2\pi r & 0 \end{bmatrix}}}$$

f)
Gradient und Hesse-Matrix ergeben sich zu

$$\underline{\underline{\nabla \psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{,0} \\ \psi_{,1} \end{bmatrix} = A\cos(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \cdot 1 - 0 \\ 0 - k \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A\cos(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \\ -k \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 \psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{,0,0} & \psi_{,0,1} \\ \psi_{,1,0} & \psi_{,1,1} \end{bmatrix} = -A\sin(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \cdot (\omega \cdot 1 - 0) & \omega \cdot (0 - k \cdot 1) \\ -k \cdot (\omega \cdot 1 - 0) & -k \cdot (0 - k \cdot 1) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-A\sin(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega^2 & -\omega k \\ -\omega k & k^2 \end{bmatrix}}}$$

8.
Bestimmen Sie zu $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2 + 1) - 3x$

a) den Funktionswert am Punkt (-1;0),
b) den Gradienten
c) die Hesse-Matrix
d) alle Nullstellen des Gradienten
e) die Gleichung der Tangentialebene im Punkt (3;1).

a) $f(-1,0) = (-1)^3 - 1^2 \ln(0+1) - 3(-1) = -1 + 3 = 2$

b) $grad\ f(x,y)^T = (3x^2 - 2x\ln(y^2+1) - 3, -x^2 \frac{2y}{y^2+1})$

c) $\boldsymbol{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 6x - 2\ln(y^2+1) & -\frac{4xy}{y^2+1} \\ -\frac{4xy}{y^2+1} & -2x^2 \frac{1-y^2}{(y^2+1)^2} \end{pmatrix}$

d) $grad\ f(x,y) = \boldsymbol{o} \Longleftrightarrow 3x^2 - 2x\ln(y^2+1) - 3 = 0 \quad (\Rightarrow x \neq 0)$

$x^2 y = 0 \quad (\Rightarrow y = 0 \text{ wegen } x \neq 0)$

$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$ bzw. $x = \pm 1$

$grad\ f(x,y) = \boldsymbol{o}$ für $(x,y) = (1,0)$ oder $(-1,0)$

e)

Gleichung der Tangentialhyperebene $y = f(\hat{\boldsymbol{x}}) + grad\ f(\hat{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}})$ für $(x,y) = (3,1)$

$$\left(\hat{x}^3 - \hat{x}^2\ln(\hat{y}^2+1) - 3\hat{x}\right) + \left(3\hat{x}^2 - 2\hat{x}\ln(\hat{y}^2+1) - 3, \quad -\hat{x}^2 \cdot \frac{2\hat{y}}{\hat{y}^2+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} x - \hat{x} \\ y - \hat{y} \end{pmatrix}$$

$$= \left(3^3 - 3^2\ln(1^2+1) - 3\cdot 3\right) + \left(3\cdot 3^2 - 2\cdot 3\ln(1^2+1) - 3, \quad -3^2 \cdot \frac{2\cdot 1}{1^2+1}\right) \cdot \begin{pmatrix} x - 3 \\ y - 1 \end{pmatrix}$$

$$= -45 + 9\ln(2) + 24x - 6x\ln(2) - 9y$$

9. Volumenänderung Tonne

Das Volumen einer Tonne wird nach der Formel $V = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2)$ berechnet. Es liegen folgende Werte vor: R = 1 m, r = 0,8 m, h = 1,5 m. Wie ändert sich das Volumen V, wenn man bei unveränderter Höhe h den Radius R um 2% vergrössert und gleichzeitig den Radius r um 2,5% verkleinert?
Führen Sie sowohl eine exakte als auch eine näherungsweise Berechnung (totales Differenzial) durch.

Exakte Volumenänderung

Ausgangswerte: $R = 1\ \text{m}, \ r = 0{,}8\ \text{m}, \ h = 1{,}50\ \text{m}$

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}50\,(2 \cdot 1^2 + 0{,}8^2)\ \text{m}^3 = 4{,}1469\ \text{m}^3$$

Neue Werte: $R = 1{,}02 \cdot 1\ \text{m} = 1{,}02\ \text{m}, \ r = 0{,}975 \cdot 0{,}8\ \text{m} = 0{,}78\ \text{m}, \ h = 1{,}50\ \text{m}$

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot 1{,}50\,(2 \cdot 1{,}02^2 + 0{,}78^2)\ \text{m}^3 = 4{,}2242\ \text{m}^3$$

Exakte Volumenänderung: $\Delta V = V_2 - V_1 = (4{,}2242 - 4{,}1469)\ \text{m}^3 = 0{,}0773\ \text{m}^3$

Prozentuale Änderung des Volumens: $\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}0773\ \text{m}^3}{4{,}1469\ \text{m}^3} \cdot 100\,\% = 1{,}86\,\%$

Näherungsrechnung mit dem totalen Differential

Es ändern sich die Radien R und r, nicht aber die Höhe h der Tonne. Daher können wir in diesem Zusammenhang das Volumen V als eine nur von R und r abhängige Funktion betrachten (*Alternative:* V als eine von R, r und h abhängige Funktion ansehen und im totalen Differential $dh = 0$ setzen):

$$V = f(R; r) = \frac{1}{3} \pi h (2R^2 + r^2)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial r} dr = \frac{1}{3} \pi h \cdot 4R\,dR + \frac{1}{3} \pi h \cdot 2r\,dr = \frac{2}{3} \pi h (2R\,dR + r\,dr)$$

Wir verwenden noch die in der Praxis übliche Schreibweise $(dV,\ dR,\ dr \to \Delta V,\ \Delta R,\ \Delta r)$:

$$\Delta V = \frac{2}{3} \pi h (2R\,\Delta R + r\,\Delta r)$$

Mit $R = 1$ m, $r = 0{,}8$ m, $h = 1{,}50$ m, $\Delta R = +0{,}02$ m und $\Delta r = -0{,}02$ m erhalten wir den folgenden *Näherungswert* für die Volumenänderung (in guter Übereinstimmung mit der *exakten* Änderung):

$$\Delta V = \frac{2}{3} \pi \cdot 1{,}50 [2 \cdot 1 \cdot 0{,}02 + 0{,}8 \cdot (-0{,}02)]\ \mathrm{m}^3 = \pi (0{,}04 - 0{,}016)\ \mathrm{m}^3 = 0{,}0754\ \mathrm{m}^3$$

Prozentuale Änderung des Volumens: $\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100\,\% = \frac{0{,}0754\ \mathrm{m}^3}{4{,}1469\ \mathrm{m}^3} \cdot 100\,\% = 1{,}82\,\%$

10. Aussagen über den Gradienten in 2D

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Der Gradient von f ist tangential an den Graphen von f.		X
b) Der Gradient von f steht senkrecht auf dem Graphen von f.		X
c) Der Gradient von f ist tangential zu den Höhenlinien von f.		X
d) Der Gradient von f steht senkrecht auf den Höhenlinien von f.	X	
e) Der Betrag des Gradienten von f ist die maximale Steigung des Graphen von f.	X	

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 9

Computational and Data Science BSc FS 2022

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über den Gradienten in 2D

Wir betrachten eine *differentierbare Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der *Gradient* zeigt *tangential* zum *Graphen* von f.	○	●
b) Der *Gradient* steht *senkrecht* auf dem *Graphen* von f.	○	●
c) Der *Gradient* zeigt *tangential* zu den *Level-Linien* von f.	○	●
d) Der *Gradient* steht *senkrecht* auf den *Level-Linien* von f.	●	○
e) In Richtung des *Gradienten* fällt der *Graph* von f am steilsten ab.	○	●
f) Der *Betrag* des *Gradienten* ist die max. *Steigung* des *Graphen* von f.	●	○

2. Richtungsableitungen von Funktionen in 2D

Wir betrachten den *Vektor*

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Wir berechnen jeweils die *Richtungsableitung* $\boldsymbol{\nabla}_{\hat{\mathbf{v}}}$ der *Funktion* am *Punkt* $P = \big(-1\,;5\big)$.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x;y) = x + 8y. \tag{2}$$

Der *Gradient* von f ist

$$\boldsymbol{\nabla} f(x;y) = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 \\ 0+8\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f(-1;5) = \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Daraus erhalten wir am *Punkt* P die *Richtungsableitung*

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}_{\hat{\mathbf{v}}} f(-1;5)}} = \langle \hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\nabla} f \rangle = \left\langle \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5} \cdot (3 \cdot 1 + 4 \cdot 8) = \frac{1}{5} \cdot 35 = \underline{\underline{7.}} \tag{5}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x;y) = 2x^2 + xy - y^2. \tag{6}$$

Der *Gradient* von f ist

$$\boldsymbol{\nabla} f(x;y) = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 2x^{2-1} + 1 \cdot y - 0 \\ 0 + x \cdot 1 - 2y^{2-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + y \\ x - 2y \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\boldsymbol{\nabla} f(-1;5) = \begin{bmatrix} 4 \cdot (-1) + 5 \\ -1 - 2 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Daraus erhalten wir am *Punkt* P die *Richtungsableitung*

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}_{\hat{\mathbf{v}}} f(-1;5)}} = \langle \hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\nabla} f \rangle = \left\langle \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -11 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{5} \cdot \big(3 \cdot 1 + 4 \cdot (-11)\big) = \underline{\underline{-\frac{41}{5}}}. \tag{9}$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x;y) = \sin(\pi x y) + 2. \tag{10}$$

Der *Gradient* von f ist

$$\boldsymbol{\nabla} f(x;y) = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi x y) \cdot \pi \cdot 1 \cdot y + 0 \\ \cos(\pi x y) \cdot \pi \cdot x \cdot 1 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y\pi \, \cos(\pi x y) \\ x\pi \, \cos(\pi x y) \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} f(-1;5) &= \begin{bmatrix} 5 \cdot \pi \cdot \cos\big(\pi \cdot (-1) \cdot 5\big) \\ (-1) \cdot \pi \cdot \cos\big(\pi \cdot (-1) \cdot 5\big) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\pi \cdot \cos(-5\pi) \\ -\pi \cdot \cos(-5\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\pi \cdot (-1) \\ -\pi \cdot (-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -5\pi \\ \pi \end{bmatrix} = \pi \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

Daraus erhalten wir am *Punkt* P die *Richtungsableitung*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}_{\hat{\mathbf{v}}} f(-1;5)}} &= \langle \hat{\mathbf{v}}, \boldsymbol{\nabla} f \rangle = \left\langle \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \pi \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{\pi}{5} \cdot \big(3 \cdot (-5) + 4 \cdot 1\big) \\ &= \underline{\underline{-\frac{11\pi}{5}}}. \end{aligned} \tag{13}$$

3. Aussagen über die Hesse-Matrix

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die HESSE-*Matrix* ist für *Skalarfelder* in nD, d.h. in beliebiger *Dimension* $n \in \mathbb{N}^+$ definiert.	●	○
b) Die HESSE-*Matrix* ist benannt nach dem bekannten deutschen Schriftsteller HERMANN HESSE.	○	●
c) Ist der *Graph* von f eine *Gerade*, *Ebene* bzw. *Hyperebene*, etc.., dann verschwindet die HESSE-*Matrix* von f.	●	○
d) Für zweimal *stetig differentierbare Funktionen* ist die HESSE-*Matrix* in jedem Fall *symmetrisch*.	●	○
e) Für zweimal *stetig differentierbare Funktionen* ist die HESSE-*Matrix* in jedem Fall *schiefsymmetrisch*.	○	●
f) Die HESSE-*Matrix* ist niemals *diagonal*.	○	●

4. Hesse-Formel für die zweite Richtungsableitung

Wir betrachten $n \in \mathbb{N}^+$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine *Funktion* mit HESSE-*Matrix* $H := \boldsymbol{\nabla}^2 f$ sowie $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$. Die 2. *Richtungsableitung* von f in die *Richtungen* $\mathbf{v}$ bzw. $\mathbf{w}$ ist definiert durch

$$\boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{wv}} f := \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{w}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}} f\big). \tag{14}$$

a) Durch Einsetzen der *konstanten Komponenten* von $\mathbf{v}$ und der *Komponenten* von $\boldsymbol{\nabla} f$, welche von den *unabhängigen Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ abhängen können, erhalten wir

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla} f \rangle}} = \boldsymbol{\nabla}\big(v_1 \cdot f_{,1} + \ldots + v_n \cdot f_{,n}\big) = \begin{bmatrix} \big(v_1 \cdot f_{,1} + \ldots + v_n \cdot f_{,n}\big)_{,1} \\ \vdots \\ \big(v_1 \cdot f_{,1} + \ldots + v_n \cdot f_{,n}\big)_{,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \big(v_1 \cdot f_{,1}\big)_{,1} + \ldots + \big(v_n \cdot f_{,n}\big)_{,1} \\ \vdots \\ \big(v_1 \cdot f_{,1}\big)_{,n} + \ldots + \big(v_n \cdot f_{,n}\big)_{,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \cdot f_{,1,1} + \ldots + v_n \cdot f_{,n,1} \\ \vdots \\ v_1 \cdot f_{,1,n} + \ldots + v_n \cdot f_{,n,n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} f_{,1,1} + \ldots + f_{,n,1} \\ \vdots \\ f_{,1,n} + \ldots + f_{,n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{H \cdot \mathbf{v}.}} \tag{15}$$

b) Aus der Formel zur Berechnung der *Richtungsableitung* und durch Einsetzen von (15) erhalten wir

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{wv}} f}} = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{w}}\big(\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{v}} f\big) = \boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{w}} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla} f \rangle = \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{\nabla} \langle \mathbf{v}, \boldsymbol{\nabla} f \rangle \rangle = \underline{\underline{\langle \mathbf{w}, H \cdot \mathbf{v} \rangle .}} \tag{16}$$

c) Weil sowohl die HESSE-*Matrix* als auch das *Skalar-Produkt symmetrisch* sind, muss gelten

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{wv}} f}} = \langle \mathbf{w}, H \cdot \mathbf{v} \rangle = \big\langle H^T \cdot \mathbf{w}, \mathbf{v} \big\rangle = \langle H \cdot \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, H \cdot \mathbf{w} \rangle = \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2_{\mathbf{vw}} f}} \tag{17}$$

5. Lokale Extrema in 2D

Wir bestimmen jeweils alle *lokalen Extrema* und *Sattel-Punkte* der angegebenen *Funktion*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$f(x; y) = y^3 + x^2 y - 3y + 8.$ (18) Zunächst berechnen wir den *Gradienten* und die HESSE-

Matrix von f. Es gilt

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2xy \\ 3y^2 + x^2 - 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\nabla}^2 f = \begin{bmatrix} f_{,x,x} & f_{,x,y} \\ f_{,y,x} & f_{,y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y & 2x \\ 2x & 6y \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Alle *lokalen Extrema* und *Sattel-Punkte* von f liegen an *kritischen Stellen*, d.h. an Stellen mit

$$\boldsymbol{\nabla} f = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \text{I:} & 2xy = 0 \\ \text{II:} & 3y^2 + x^2 - 3 = 0. \end{cases} \tag{20}$$

Aus der Gleichung I in (20) folgt, dass an allen *kritischen Stellen* mindestens eine der beiden Variablen x bzw. y verschwinden muss. Wir betrachten diese beiden Fälle getrennt.

Fall 1: $x = 0$. Aus der Gleichung II in (20) folgt

$$3y^2 - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 1 \;\Leftrightarrow\; y \in \{-1, 1\}. \tag{21}$$

Fall 2: $y = 0$. Aus der Gleichung II in (20) folgt

$$x^2 - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 3 \;\Leftrightarrow\; x \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}. \tag{22}$$

Damit haben wir die *kritischen Stellen* von f gefunden, diese sind

$$P_1 := \big(0\,;-1\big)\,,\; P_2 := \big(0\,;1\big)\,,\; P_3 := \big(-\sqrt{3}\,;0\big) \quad \text{und} \quad P_4 := \big(\sqrt{3}\,;0\big)\,. \tag{23}$$

Für die weitere Untersuchung der *kritischen Stellen* $P_k = \big(x_k\,;y_k\big)$ mit $k \in \{1, \ldots 4\}$ betrachten wir die zweiten, *partiellen Ableitungen* von f an diesen Stellen. Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	y_k	z_k	$f_{,x,x}$	$f_{,y,y}$	$f_{,x,y}$	$\det(\nabla^2 f)$	Typ:
1	0	-1	10	$-2 < 0$	$-6 < 0$	0	$+12 > 0$	*lok. Maximum*
2	0	$+1$	6	$+2 > 0$	$+6 > 0$	0	$+12 > 0$	*lok. Minimum*
3	$-\sqrt{3}$	0	8	0	0	$-2\sqrt{3}$	$-12 < 0$	*Sattel-Punkt*
4	$+\sqrt{3}$	0	8	0	0	$+2\sqrt{3}$	$-12 < 0$	*Sattel-Punkt*

(24)

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x;y) = 3x^2y + y^3 - 27y + 4. \tag{25}$$

Zunächst berechnen wir den *Gradienten* und die HESSE-*Matrix* von f. Es gilt

$$\nabla f = \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6xy \\ 3x^2 + 3y^2 - 27 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{,x,x} & f_{,x,y} \\ f_{,y,x} & f_{,y,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 6y \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Alle *lokalen Extrema* und *Sattel-Punkte* von f liegen an *kritischen Stellen*, d.h. an Stellen mit

$$\nabla f = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} 6xy = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 27 = 0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} \text{I:} & xy = 0 \\ \text{II:} & x^2 + y^2 - 9 = 0. \end{cases} \tag{27}$$

Aus der Gleichung I in (27) folgt, dass an allen *kritischen Stellen* mindestens eine der beiden Variablen x bzw. y verschwinden muss. Wir betrachten diese beiden Fälle getrennt.

Fall 1: $x = 0$. Aus der Gleichung II in (27) folgt

$$y^2 - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; y^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; y \in \{-3, 3\}. \tag{28}$$

Fall 2: $y = 0$. Aus der Gleichung II in (27) folgt

$$x^2 - 9 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 = 9 \;\Leftrightarrow\; x \in \{-3, 3\}\,. \tag{29}$$

Damit haben wir die *kritischen Stellen* von f gefunden, diese sind

$$P_1 := \big(0\,;-3\big)\,,\; P_2 := \big(0\,;3\big)\,,\; P_3 := \big(-3\,;0\big) \quad \text{und} \quad P_4 := \big(3\,;0\big)\,. \tag{30}$$

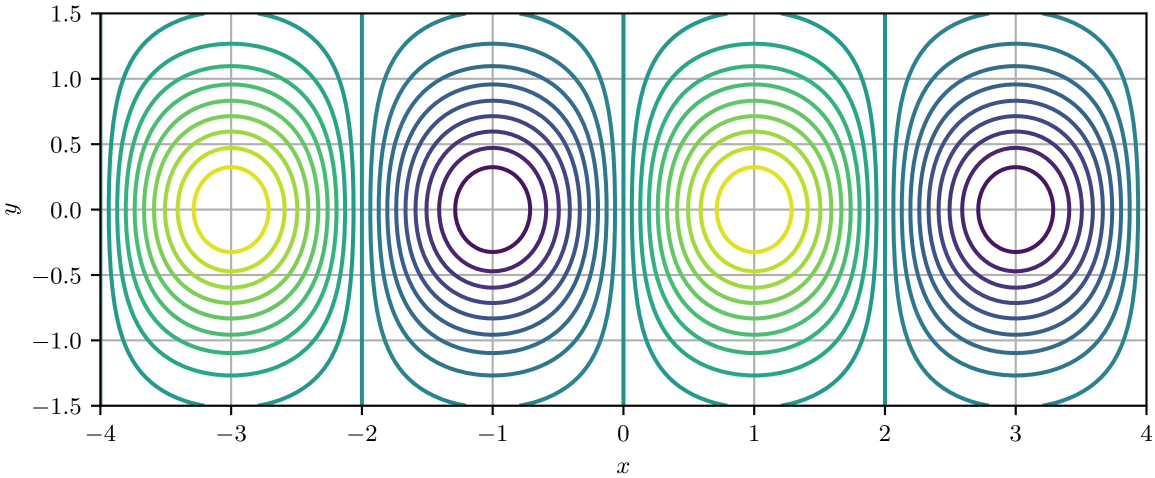
Für die weitere Untersuchung der *kritischen Stellen* $P_k = (x_k\,; y_k)$ mit $k \in \{1, \ldots 4\}$ betrachten wir die zweiten, *partiellen Ableitungen* von f an diesen Stellen. Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	y_k	z_k	$f_{,x,x}$	$f_{,y,y}$	$f_{,x,y}$	$\det(\nabla^2 f)$	Typ:
1	0	-3	58	$-18 < 0$	$-18 < 0$	0	$+324 > 0$	*lok. Maximum*
2	0	$+3$	-50	$+18 > 0$	$+18 > 0$	0	$+324 > 0$	*lok. Minimum*
3	-3	0	4	0	0	-18	$-324 < 0$	*Sattel-Punkt*
4	$+3$	0	4	0	0	$+18$	$-324 < 0$	*Sattel-Punkt*

(31)

6. Aussagen über einen Python/Numpy-Plot

Wir betrachten den folgenden Plot einer *Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welcher mit Python/Numpy durch den Befehl `contour` unter Verwendung der Standard-Farb-Skala erstellt wurde.



Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der *Gradient* der *Funktion* f verschwindet am *Punkt* $(-1\,; 0)$.	●	○
b) Die *Funktion* f hat am *Punkt* $(2\,; 0)$ einen *Sattel-Punkt*.	○	●
c) Am *Punkt* $(1\,; 1.25)$ zeigt der *Gradient* der *Funktion* f in Richtung der positiven x-Achse.	○	●
d) Am *Punkt* $(-1\,; 1.25)$ ist der *Gradient* der *Funktion* f länger als am *Punkt* $(-2\,; 0.5)$.	○	●
e) Am *Punkt* $(1\,; 0)$ gilt $\delta f \approx \delta x + \delta y$.	○	●
f) In jedem Fall gilt $\int_{-2}^{2} f(t; -1)\,\mathrm{d}t = 0$.	○	●

7. Globale Extrema in 2D

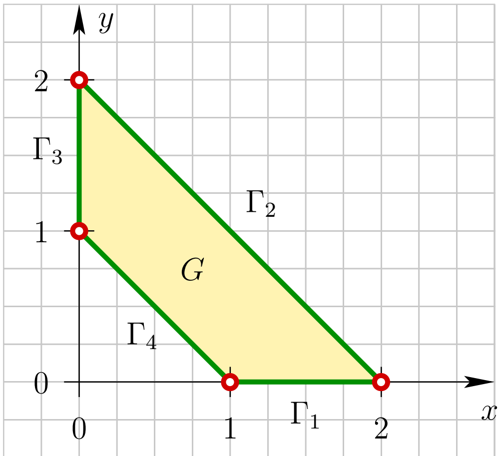
Wir betrachten die *Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \big(x\,;y\big) &\mapsto f(x;y) := xy \end{aligned} \tag{32}$$

und das *Gebiet*

$$G := \big\{\big(x\,;y\big) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; 1 \leq x+y \leq 2 \,\wedge\, x,y \in [0,2]\big\}, \tag{33}$$

welches in der folgenden Skizze dargestellt ist.



Um die *globalen Extrema* von f auf G zu bestimmen, gehen wir nach den folgenden Schritten vor.

S1 Inneres: Wir betrachten das Innere $\tilde{G}$ des Gebietes G. Der *Gradient* von f ist

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Die einzige *kritische Stelle* von f ist also der Ursprung des x-y-Koordinatensystems, dieser liegt aber ausserhalb von G und kann somit keine Kandidaten-Stelle für *globale Extrema* von f auf G sein.

S2 Randstücke: Als nächstes untersuchen wir die Randstücke von G. Diese sind gegeben durch

$$\Gamma_1 := \big\{\big(x\,;y\big) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x \in \,]1,2[\, \wedge\, y = 0\big\} \tag{35}$$

$$\Gamma_2 := \big\{\big(x\,;y\big) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x+y = 2 \,\wedge\, x,y \in \,]0,2[\big\} \tag{36}$$

$$\Gamma_3 := \big\{\big(x\,;y\big) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x = 0 \,\wedge\, y \in \,]1,2[\big\} \tag{37}$$

$$\Gamma_4 := \big\{\big(x\,;y\big) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x+y = 1 \,\wedge\, x,y \in \,]0,1[\big\}\,. \tag{38}$$

Die Einschränkung u_k von f auf Γ_k für $k \in \{1,\ldots,4\}$ lässt sich jeweils als *Funktion* eines Parameters t ausdrücken. Wir definieren dazu

$$u_1(t) := f\big(t\,;0\big) = t \cdot 0 = 0 \qquad \text{für} \quad t \in \,]1,2[\tag{39}$$

$$u_2(t) := f\big(t\,;2-t\big) = t \cdot (2-t) = 2t - t^2 \qquad \text{für} \quad t \in \,]0,2[\tag{40}$$

$$u_3(t) := f\big(0\,;t\big) = 0 \cdot t = 0 \qquad \text{für} \quad t \in \,]1,2[\tag{41}$$

$$u_4(t) := f\big(t\,;1-t\big) = t \cdot (1-t) = t - t^2 \qquad \text{für} \quad t \in \,]0,1[\,. \tag{42}$$

Falls f an einer Stelle auf einem der Randstücke ein *globales Extremum* annimmt, dann hat das betreffende u_k dort ein *lokales Extremum* und seine Ableitung verschwindet an diesem Punkt. Folglich sind alle *Punkte* auf Γ_1 und Γ_3 Kandidaten-Stellen mit *Funktionswert* $z_0 := 0$. Aus

$$0 = \dot{u}_2(t) = 2 - 2t \;\Rightarrow\; t = 1 \tag{43}$$

$$0 = \dot{u}_4(t) = 1 - 2t \;\Rightarrow\; t = \frac{1}{2} \tag{44}$$

erhalten wir zwei Kandidaten-Stellen, nämlich

$$P_1 := \big(1\,;2-1\big) = \big(1\,;1\big) \quad \text{und} \quad P_2 := \big(1/2\,;1-1/2\big) = \big(1/2\,;1/2\big) \tag{45}$$

mit den *Funktionswerten*

$$\begin{aligned} z_1 &:= f\big(1\,;1\big) = 1 \cdot 1 = 1 \\ z_2 &:= f\big(1/2\,;1/2\big) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\,. \end{aligned} \tag{46}$$

S3 Eckpunkte: Die vier *Eckpunkte*

$$P_3 := \big(1\,;0\big)\,,\; P_4 := \big(2\,;0\big)\,,\; P_5 := \big(0\,;2\big) \quad \text{und} \quad P_6 := \big(0\,;1\big) \tag{47}$$

sind weitere Kandidaten-Stellen mit den *Funktionswerten*

$$z_3 := f\big(1\,;0\big) = 1 \cdot 0 = 0 \tag{48}$$

$$z_4 := f\big(2\,;0\big) = 2 \cdot 0 = 0 \tag{49}$$

$$z_5 := f\big(0\,;2\big) = 0 \cdot 2 = 0 \tag{50}$$

$$z_6 := f\big(0\,;1\big) = 0 \cdot 1 = 0\,. \tag{51}$$

Der Vergleich der *Funktionswerte* an den Kandidaten-Stellen ergibt

$$0 = z_0 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 < z_2 = \frac{1}{4} < z_1 = 1. \tag{52}$$

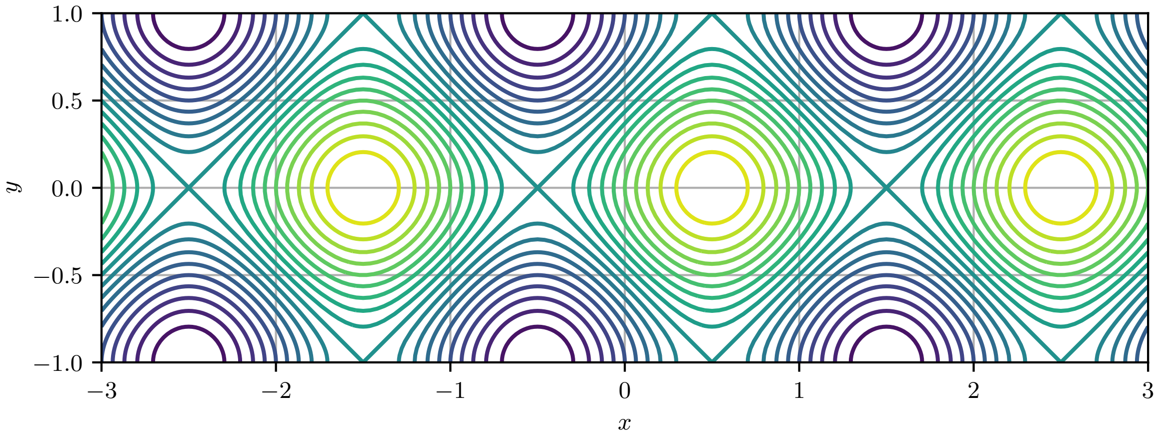
Daraus lassen sich die *globalen Extrema* von f auf G bestimmen. Wir stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

Stellen:	Funktionswert:	Typ:
$\{(1\,;0)\} \cup \Gamma_1 \cup \{(2\,;0)\}$	0	*glob. Minimum*
$\{(0\,;1)\} \cup \Gamma_3 \cup \{(0\,;2)\}$	0	*glob. Minimum*
$(1\,;1)$	1	*glob. Maximum*
$(1/2\,;1/2)$	1/4	-

(53)

8. Aussagen über einen Python/Numpy-Plot

Wir betrachten den folgenden Plot einer *Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, welcher mit Python/Numpy durch den Befehl `contour` unter Verwendung der Standard-Farb-Skala erstellt wurde.



Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $f(-1;0) = f(0;0)$.	●	○
b) Der *Gradient* der *Funktion* f verschwindet am *Punkt* $(0\,;0)$.	○	●
c) Die *Funktion* f hat keine *Sattel-Punkte*.	○	●
d) Am *Punkt* $(-0.5\,;0)$ zeigt der *Gradient* der *Funktion* f in Richtung der positiven y-Achse.	○	●
e) Am *Punkt* $(0\,;-0.5)$ ist der *Gradient* der *Funktion* f länger als am *Punkt* $(-0.4\,;0)$.	●	○
f) Am *Punkt* $(1\,;0)$ gilt $\delta f \approx \delta x + \delta y$.	○	●

9. Globale Extrema in 2D

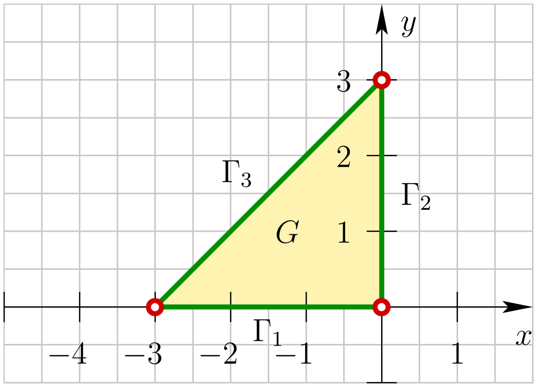
Wir betrachten die *Funktion*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x\,;y) &\mapsto f(x;y) := 2x^2 + 2y^2 + 2xy + 4x - y \end{aligned} \tag{54}$$

und das *Gebiet*

$$G := \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \le x + 3 \wedge x \le 0 \wedge y \ge 0\}, \tag{55}$$

welches in der folgenden Skizze dargestellt ist.



Um die *globalen Extrema* von f auf G zu bestimmen, gehen wir nach den folgenden Schritten vor.

S1 **Inneres:** Wir betrachten das Innere $\tilde{G}$ des *Gebietes* G. Die *kritischen Stellen* von f in $\tilde{G}$ erfüllen

$$0 = \nabla f = \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x + 2y + 4 \\ 2x + 4y - 1 \end{bmatrix}. \tag{56}$$

Wir schreiben das LGLS (56) in einem GAUSS-*Schema* und wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$\begin{array}{|cc|c|} \hline 4 & 2 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \end{array} \begin{array}{|cc|c|} \hline [2] & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline [2] & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{c} 1 \\ \\ \end{array} \begin{array}{|cc|c|} \hline [2] & 1 & -2 \\ 0 & [1] & 1 \\ \hline \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline [2] & 0 & -3 \\ 0 & [1] & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{|cc|c|} \hline [1] & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & [1] & 1 \\ \hline \end{array}. \tag{57}$$

Rang und *Defekt* des LGLS sind

$$n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 2 = 0. \tag{58}$$

Es sind x und y beides *Pivot-Variablen* und es gibt keine *freien Parameter*. Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir die erste Kandidaten-Stelle für *globale Extrema* am *Punkt*

$$P_1 = \big(-3/2\,; 1\big) = \big(-1.5\,; 1\big) \tag{59}$$

mit *Funktionswert*

$$\begin{aligned} z_1 = f\big(-3/2\,; 1\big) &= 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) \cdot 1 + 4 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - 1 \\ &= \frac{18}{4} + \frac{8}{4} - \frac{12}{4} - \frac{24}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{14}{4} = -\frac{7}{2} = -3.5\,. \end{aligned} \tag{60}$$

S2 **Randstücke:** Als nächstes untersuchen wir die Randstücke von G. Diese sind gegeben durch

$$\Gamma_1 := \Big\{\big(x\,; y\big) \in \mathbb{R}^2 \;\Big|\; x \in\,]-3, 0[\; \wedge\; y = 0\Big\} \tag{61}$$

$$\Gamma_2 := \big\{ \big(x\,;y\big) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x = 0 \,\wedge\, y \in \,]0,3[\big\} \tag{62}$$

$$\Gamma_3 := \big\{ \big(x\,;y\big) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; y = x+3 \,\wedge\, x \in \,]-3,0[\big\}\,. \tag{63}$$

Die Einschränkung u_k von f auf Γ_k für $k \in \{1,\ldots,3\}$ lässt sich jeweils als *Funktion* eines Parameters t ausdrücken. Wir definieren dazu

$$u_1(t) := f\big(t\,;0\big) = 2t^2 + 2\cdot 0^2 + 2t\cdot 0 + 4t - 0 = 2t^2 + 4t \quad \text{für} \;\; t \in \,]-3,0[\tag{64}$$

$$u_2(t) := f\big(0\,;t\big) = 2\cdot 0^2 + 2t^2 + 2\cdot 0\cdot t + 4\cdot 0 - t = 2t^2 - t \quad \text{für} \;\; t \in \,]0,3[\tag{65}$$

$$\begin{aligned} u_3(t) := f\big(t\,;t+3\big) &= 2t^2 + 2\cdot(t+3)^2 + 2t\cdot(t+3) + 4t - (t+3) \\ &= 2t^2 + 2t^2 + 12t + 18 + 2t^2 + 6t + 4t - t - 3 \\ &= 6t^2 + 21t + 15. \quad \text{für} \;\; t \in \,]-3,0[\,. \end{aligned} \tag{66}$$

Falls f an einer Stelle auf einem der Randstücke ein *globales Extremum* annimmt, dann hat das betreffende u_k dort ein *lokales Extremum* und seine Ableitung verschwindet an diesem *Punkt.* Aus

$$0 = \dot{u}_1(t) = 4t + 4 \qquad \Rightarrow \; t = -1 \tag{67}$$

$$0 = \dot{u}_2(t) = 4t - 1 \qquad \Rightarrow \; t = \frac{1}{4} = 0.25 \tag{68}$$

$$0 = \dot{u}_3(t) = 12t + 21 \qquad \Rightarrow \; t = -\frac{21}{12} = -\frac{7}{4} = -1.75 \tag{69}$$

erhalten wir drei Kandidaten-Stellen, nämlich

$$P_2 := \big(-1\,;0\big) \tag{70}$$

$$P_3 := \big(0\,;1/4\big) = \big(0\,;0.25\big) \tag{71}$$

$$P_4 := \big(-7/4\,;-7/4+3\big) = \big(-7/4\,;5/4\big) = \big(-1.75\,;1.25\big) \tag{72}$$

mit den *Funktionswerten*

$$z_2 := u_1(-1) = 2\cdot(-1)^2 + 4\cdot(-1) = 2 - 4 = -2 \tag{73}$$

$$z_3 := u_2(1/4) = 2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{4} = \frac{2}{16} - \frac{4}{16} = -\frac{2}{16} = -\frac{1}{8} = -0.125 \tag{74}$$

$$z_4 := u_3(-7/4) = 6\cdot\left(-\frac{7}{4}\right)^2 - 21\cdot\frac{7}{4} + 15 = \frac{294}{16} - \frac{588}{16} + \frac{240}{16} = -\frac{54}{16} = -3.375\,. \tag{75}$$

S3 Eckpunkte: Die drei *Eckpunkte*

$$P_5 := \big(0\,;0\big)\,, \quad P_6 := \big(0\,;3\big) \quad \text{und} \quad P_7 := \big(-3\,;0\big) \tag{76}$$

sind weitere Kandidaten-Stellen mit den *Funktionswerten*

$$z_5 := f\big(0\,;0\big) = 2\cdot 0^2 + 2\cdot 0^2 + 2\cdot 0\cdot 0 + 4\cdot 0 - 0 = 0 \tag{77}$$

$$z_6 := f\big(0\,;3\big) = 2\cdot 0^2 + 2\cdot 3^2 + 2\cdot 0\cdot 3 + 4\cdot 0 - 3 = 18 - 3 = 15 \tag{78}$$

$$z_7 := f\big(-3\,;0\big) = 2\cdot(-3)^2 + 2\cdot 0^2 + 2\cdot(-3)\cdot 0 + 4\cdot(-3) - 0 = 18 - 12 = 6. \tag{79}$$

Wir bestimmen die *globalen Extrema* von f durch Vergleich der *Funktionswerte* an den Kandidaten-Stellen und stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	y_k	$f\big(x_k\,;\,y_k\big)$	Typ:
1	-1.5	1	-3.5	*glob. Minimum*
2	-1	0	-2	-
3	0	0.25	-0.125	-
4	-1.75	1.25	-3.375	-
5	0	0	0	-
6	0	3	15	*glob. Maximum*
7	-3	0	6	-

(80)

10. Aussagen über eine Funktion in 2D

Wir betrachten die *Funktion*

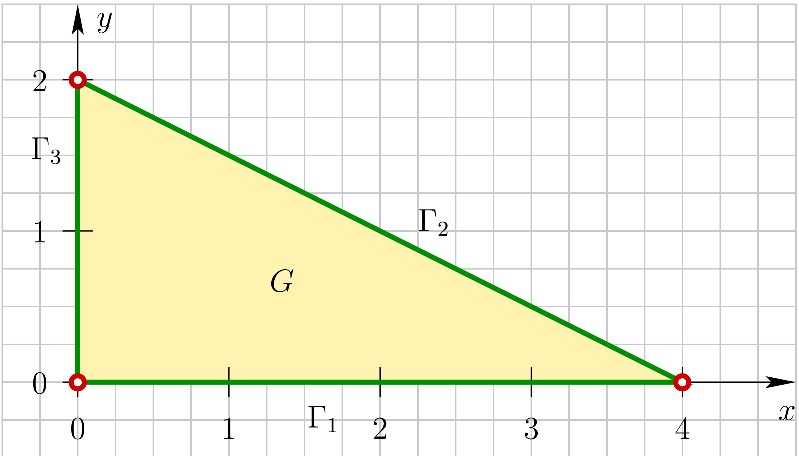
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ \big(x\,;\,y\big) &\mapsto f(x;y) := \sin(x) + \cos(y). \end{aligned} \tag{81}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Funktion* f hat nur einen *kritischen Punkt.*	○	●
b) Der *Graph* von f steigt an keinem *Punkt* und in keine Richtung steiler an als 45°.	○	●
c) Am *Punkt* $\big(0\,;\,0\big)$ gilt $\delta f \approx \delta x$.	●	○
d) Die *Funktion* f hat an der Stelle $\big(0\,;\,0\big)$ einen *Sattel-Punkt.*	○	●
e) Die *Funktion* f hat an der Stelle $\big(\pi/2\,;\,0\big)$ ein *lokales Maximum.*	●	○
f) Es gibt eine *Gerade* in der x-y-Ebene, welche auf einer *Lebel-Linie* der *Funktion* f liegt.	●	○

11. Globale Extrema in 2D
Wir betrachten die *Funktion*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ \big(x\,;y\big) &\mapsto f(x;y) := (x-1)^2 + (y-1)^2 - x + 1. \end{aligned} \tag{82}$$

und das *Dreieck* G mit den *Eckpunkten* $\big(0\,;0\big)$, $\big(4\,;0\big)$ und $\big(0\,;2\big)$, welches in der folgenden Skizze dargestellt ist.



Um die *globalen Extrema* von f auf G zu bestimmen, gehen wir nach den folgenden Schritten vor.

S1 **Inneres:** Wir betrachten das Innere $\tilde{G}$ des *Gebietes* G. Der *Gradient* von f ist

$$\boldsymbol{\nabla} f = \begin{bmatrix} f_{,x} \\ f_{,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot(x-1)^{2-1}\cdot 1 + 0 - 1 + 0 \\ 0 + 2\cdot(y-1)^{2-1}\cdot 1 - 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-3 \\ 2y-2 \end{bmatrix}. \tag{83}$$

Die *kritischen Stellen* von f in $\tilde{G}$ erfüllen das *Gleichungssystem*

$$0 = \boldsymbol{\nabla} f \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \text{I:} & 0 = 2x-3 \\ \text{II:} & 0 = 2y-2. \end{cases} \tag{84}$$

Aus Gleichung I in (84) folgt

$$0 = 2x-3 \;\;\Leftrightarrow\;\; 2x = 3 \;\;\Leftrightarrow\;\; x = 1.5 \tag{85}$$

und aus Gleichung II in (84) schliessen wir

$$0 = 2y-2 \;\;\Leftrightarrow\;\; 2y = 2 \;\;\Leftrightarrow\;\; y = 1\,. \tag{86}$$

Die *Funktion* f hat daher in $\tilde{G}$ eine *kritische Stelle* am *Punkt*

$$P_1 = \big(1.5\,;1\big) \tag{87}$$

mit *Funktionswert*

$$\begin{aligned} z_1 &= f(1.5;1) = (1.5-1)^2 + (1-1)^2 - 1.5 + 1 = 0.5^2 + 0 - 1.5 + 1 = 0.25 - 1.5 + 1 \\ &= -0.25\,. \end{aligned} \tag{88}$$

S2 **Randstücke:** Als nächstes untersuchen wir die Randstücke von G. Diese sind gegeben durch

$$\Gamma_1 := \big\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x \in \,]0,4[\, \wedge\, y = 0 \big\} \tag{89}$$

$$\Gamma_2 := \big\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; y = 2 - 0.5 \cdot x \,\wedge\, x \in \,]0,4[\, \big\} \tag{90}$$

$$\Gamma_3 := \big\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \;\big|\; x = 0 \,\wedge\, y \in \,]0,2[\, \big\}\,. \tag{91}$$

Die Einschränkung u_k von f auf Γ_k für $k \in \{1, \ldots, 3\}$ lässt sich jeweils als *Funktion* eines Parameters t ausdrücken. Wir definieren dazu

$$\begin{aligned} u_1(t) &:= f(t;0) = (t-1)^2 + (0-1)^2 - t + 1 \\ &= t^2 - 2t + 1 + 1 - t + 1 = t^2 - 3t + 3 && \text{für} \;\; t \in \,]0,4[\end{aligned} \tag{92}$$

$$\begin{aligned} u_2(t) &:= f(t;2-0.5\,t) = (t-1)^2 + (1-0.5\,t)^2 - t + 1 \\ &= t^2 - 2t + 1 + 1 - t + 0.25\,t^2 - t + 1 = 1.25\,t^2 - 4t + 3 && \text{für} \;\; t \in \,]0,4[\end{aligned} \tag{93}$$

$$\begin{aligned} u_3(t) &:= f(0;t) = (0-1)^2 + (t-1)^2 - 0 + 1 \\ &= 1 + t^2 - 2t + 1 + 1 = t^2 - 2t + 3 && \text{für} \;\; t \in \,]0,2[\,. \end{aligned} \tag{94}$$

Falls f an einer Stelle auf einem der Randstücke ein *globales Extremum* annimmt, dann hat das betreffende u_k dort ein *lokales Extremum* und ihre *Ableitung* verschwindet an diesem Punkt. Aus

$$0 = \dot{u}_1(t) = 2t - 3 \qquad \Rightarrow \;\; t = \frac{3}{2} = 1.5 \tag{95}$$

$$0 = \dot{u}_2(t) = 2.5\,t - 4 \qquad \Rightarrow \;\; t = \frac{4}{2.5} = \frac{8}{5} = 1.6 \tag{96}$$

$$0 = \dot{u}_3(t) = 2t - 2 \qquad \Rightarrow \;\; t = 1. \tag{97}$$

erhalten wir drei Kandidaten-Stellen, nämlich

$$P_2 := \big(1.5\,;0\big) \tag{98}$$

$$P_3 := \big(1.6\,;2 - 0.5 \cdot 1.6\big) = \big(1.6\,;1.2\big) \tag{99}$$

$$P_4 := \big(0\,;1\big) \tag{100}$$

mit den *Funktionswerten*

$$z_2 := u_1(1.5) = 1.5^2 - 3 \cdot 1.5 + 3 = 2.25 - 4.5 + 3 = 0.75 \tag{101}$$

$$z_3 := u_2(1.6) = 1.25 \cdot 1.6^2 - 4 \cdot 1.6 + 3 = 3.2 - 6.4 + 3 = -0.2 \tag{102}$$

$$z_4 := u_3(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2. \tag{103}$$

S3 **Eckpunkte:** Die drei *Eckpunkte*

$$P_5 := \big(0\,;0\big)\,, \quad P_6 := \big(4\,;0\big)\,, \quad \text{und} \quad P_7 := \big(0\,;2\big) \tag{104}$$

sind weitere Kandidaten-Stellen mit den *Funktionswerten*

$$z_5 := f(0;0) = (0-1)^2 + (0-1)^2 - 0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3 \tag{105}$$

$$z_6 := f(4;0) = (4-1)^2 + (0-1)^2 - 4 + 1 = 9 + 1 - 4 + 1 = 7 \tag{106}$$

$$z_7 := f(0;2) = (0-1)^2 + (2-1)^2 - 0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3. \tag{107}$$

Wir bestimmen die *globalen Extrema* von f durch Vergleich der *Funktionswerte* an den Kandidaten-Stellen und stellen die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammen.

k	x_k	y_k	$f\left(x_k; y_k\right)$	Typ:
1	1.5	1	-0.25	*glob. Minimum*
2	1.5	0	0.75	-
3	1.6	1.2	-0.2	-
4	0	1	2	-
5	0	0	3	-
6	4	0	7	*glob. Maximum*
7	0	2	3	-

(108)