Exponentialform

$$z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad r=2,\ \varphi=\frac{\pi}{6}$$
$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\ \sin\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

- $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \qquad z_2 = 3e^{i\frac{4}{3}\pi}$

- $z_1\cdot z_2 = 2\cdot 3e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{4}{3}\pi\right)} = 6e^{i\left(\frac{9}{6}\pi\right)} = 6e^{i\left(\frac{3}{2}\pi\right)}$
$$= 6\cdot\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$$
$$= -6i \longleftarrow \text{Wie?}$$

- $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{6}}}{3e^{i\frac{4}{3}\pi}} = \frac{2}{3}\ e^{i\left(\frac{\pi}{6}-\frac{4}{3}\pi\right)}$
$$= \frac{2}{3}\cdot e^{-i\frac{7}{6}\pi}$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\cos\left(-\frac{7}{6}\pi\right) + i\cdot\sin\left(-\frac{7}{6}\pi\right)\right)$$
$$= \frac{2}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i\right) = -\frac{1}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{3}i$$

- $\left|e^{i\varphi}\right| = \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$
- $e^{i0} = e^{i\cdot 2k\pi} = 1 \qquad k\in\mathbb{Z}$
- $e^{i\pi} = -1$

Potenzen

$$z = 2 + 2i \qquad z^{12} = ?$$

$$|z| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 2\sqrt{2}\ e^{i\frac{\pi}{4}}$$
$$z^{12} = \left(2\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{12}$$
$$= \left(2\sqrt{2}\right)^{12} e^{i\frac{\pi}{4}12}$$
$$= \sqrt{8}^{12}$$
$$= 8^6\ e^{i3\pi} \qquad e^{i3\pi} = e^{i\pi}$$
$$=$$

Radizieren

Satz de Moivre Formel

Potenzieren und Radizieren in $\mathbb{C}$

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gibt:

a) n-te Potenz von $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$= r e^{i\varphi}$

ergibt sich zu

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$
$$= r^n \cdot e^{in\varphi}$$

$$\rightarrow (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\cdot\varphi) + i\sin(n\cdot\varphi)$$

b) Für jedes $w = r\cdot e^{i\varphi} \neq 0$ hat
$z^n = w$ n verschiedene Lösungen

$$z_k = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$$
$$= \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)} \qquad k = 0 \ldots n-1$$

Die Lösungen liegen auf einem Kreis mit Radius $\sqrt[n]{r}$ um Ursprung und bilden ein regelmässiges n-Eck

Winkelabstand zu benachbarten Lsgen:
$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{n}$$

Wert für $k = 0$ nennt sich Hauptwert

Umrechnung von arithmetischer in Exponentialform:

$$z = x + y\mathrm{i} \rightarrow r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi$$

mit $\sigma = 0$ für $x \geq 0$ und $\sigma = \pm 1$ für $x < 0$
(Wahl des Vorzeichens $\rightsquigarrow$ φ im Standardbereich $(-\pi, \pi]$)

Umrechnung in arithmetische Form:

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \rightarrow x + y\mathrm{i}$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 3

Computational and Data Science
FS2024

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Exponentialform einer komplexen Zahl, Eulersche Formel Potenzgleichungen und deren Eigenschaften.
- Sie können komplexe Zahlen in der arithmetischen, in der trigonometrischen und Exponentialform darstellen und von einer in die andere Form umwandeln.
- Sie können die Grundrechenarten für die komplexen Zahlen anwenden.
- Sie können komplexe Zahlen sowohl potenzieren als auch aus ihnen die Wurzel ziehen.

---

1. Aussagen über die Exponentialform
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede komplexe Zahl lässt sich in Exponentialform darstellen.	X	
b) Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in Exponentialform darstellen.		X
c) Der Term $2e^{i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.	X	
d) Der Term $2e^{-i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.	X	
e) Der Term $-2e^{-i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.		X

2. Konversion zwischen arithmetischer und Exponentialform
Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in Exponentialform bzw. in arithmetische Form um.

a) $4 - 4i$
b) $-\sqrt{3} + i$
c) $2e^{-i\pi/6}$
d) $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

3. Umwandlung komplexer Zahlen
Berechnen Sie $2e^{-i\pi/3} - \sqrt{3} + i$ und geben Sie das Ergebnis sowohl in arithmetischer als auch in Exponentialform an.

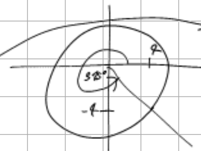
4. Potenzgleichungen
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der jeweiligen Potenzgleichung.

a) $z^2 = -49$
b) $z^2 = i$
c) $z^3 = -8$
d) $z^3 = -27i$
e) $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$
f) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

2. Konversion zwischen arithmetischer und Exponentialform
Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in Exponentialform bzw. in arithmetische Form um.

a) $4 - 4i$ b) $-\sqrt{3} + i$
c) $2e^{-i\pi/6}$ d) $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

a) $4 - 4i$



$\tan^{-1}(4/-4) = -\frac{\pi}{4}$

WINKEL
$\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$

$\frac{7\pi}{4}$

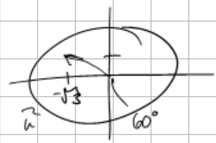
RADIUS
$\sqrt{4^2+4^2}$
$= \sqrt{32}$
$= \sqrt{4 \cdot 8}$
$= \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 4}$
$= \sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}$
$= \sqrt{2^5}$
$= 4\sqrt{2}$

$4\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$

$-3 = 3 \cdot -1$

$10 \cdot -1 = -10$

b) $-\sqrt{3} + i$



$60°$

$\tan^{-1}(-1/\sqrt{3}) + \pi$
$= 2e^{i -\frac{\pi}{6}+\pi}$
$= 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$

$\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}$
$= \sqrt{3+1}$
$= \sqrt{4} = 2$

c) $2e^{-i\pi/6}$

$r \cdot \cos\varphi = x$ $r \cdot \sin\varphi = y$

$\sqrt{3} - i$

d) $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

$\sqrt{2} \cdot \cos(3\pi/4) + i(\sqrt{2} \cdot \sin(3\pi/4))$
$= -1 + i1$
$= -1 + i$

---

3. Umwandlung komplexer Zahlen

Berechnen Sie $2e^{-i\pi/3} - \sqrt{3} + i$ und geben Sie das Ergebnis sowohl in arithmetischer als auch in Exponentialform an.

$2e^{-i\pi/3} - \sqrt{3} + i$
$(1 + i\sqrt{3}) - (\sqrt{3} + i)$
$1 - \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$

$r = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$
$\varphi = \tan^{-1}(1/\sqrt{3}) + \pi = \frac{5\pi}{6}$

$x = 2 \cdot \cos(-\pi/3) = 1$
$y = 2 \cdot \sin(-\pi/3) = -\sqrt{3}$

$\tan^{-1}\left(1-\sqrt{3}/1-\sqrt{3}\right) + \pi$
$= \tan^{-1}(1) + \pi$
$= \frac{\pi}{4} - \pi$
$= -\frac{3\pi}{4}$

$r = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + (1-\sqrt{3})^2}$
$= \sqrt{6} - \sqrt{2}$

$(\sqrt{6} - \sqrt{2})e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

---

4. Potenzgleichungen
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der jeweiligen Potenzgleichung.

a) $z^2 = -49$ b) $z^2 = i$ c) $z^3 = -8$
d) $z^3 = -27i$ e) $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$ f) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$

b) FÜR JEDES $w = r \cdot e^{i\varphi} \neq 0$ HAT
$z^n = w$ n VERSCHIEDENE LÖSUNGEN:
$z_k = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right)$
$= \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$ $k = 0 \ldots n-1$

a) $z^2 = -49$
$= z = \sqrt{-49}$
$= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{49}$
$= \sqrt{i^2} \cdot 7$
$= 7i$

FERTIG LÖSEN

5. Aussagen über Potenzgleichungen

Gegeben sei die Potenzgleichung

$$z^n = w \text{ mit } w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für jede Wahl von w hat die Gleichung mindestens 1 Lösung in $\mathbb{C}$.	X	
b) Für jede Wahl von w hat die Gleichung genau n Lösungen in $\mathbb{C}$.		
c) Ist n gerade und z eine Lösung der Gleichung, dann ist auch $-z$ eine Lösung.		
d) Sei $w \in \mathbb{R}$ und z eine Lösung der Gleichung, dann ist auch z^* eine Lösung.		
e) Alle Lösungen der Gleichung haben denselben Betrag.		
f) Alle Lösungen der Gleichung haben dasselbe Argument.		

6. Aussagen über komplexe Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $Re(z) \in \mathbb{R}$.		
b) Es gilt $z = 1$ genau dann, wenn $Im(z) = Re(z) = 1$.		
c) Es gilt $z_1^* = z_2$ genau dann, wenn $z_2^* = z_1$.		
d) Es gibt ein $z \in \mathbb{C}$, so dass $z^2 = i$.		
e) Falls $\lvert z_1 \rvert \leq \lvert z_2 \rvert$, dann gilt auch $z_1 \leq z_2$.		

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 3

Computational and Data Science BSc FS 2023

Analysis und Lineare Algebra 2

Lernziele/Kompetenzen

- Sie kennen die Begriffe Euler-*Formel*, *exponentielle Form und Potenz-Gleichungen* sowie deren wichtigsten Eigenschaften.
- Sie kennen die *Umkehrungen* der Euler-*Formel* und können diese anwenden.
- Sie können *komplexe Zahlen* von der *arithmetischen Form* in die *exponentielle Form konvertieren* und umgekehrt.
- Sie können die *reelle* und *komplexe Lösungsmenge* von *Potenz-Gleichungen* mit *natürlichen Exponenten* bestimmen und beurteilen.

1. Aussagen über die exponentielle Form komplexer Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *komplexe Zahl* lässt sich in *exponentieller Form* darstellen.	⊗	○
b) Jede *komplexe Zahl* lässt sich eindeutig in *exponentieller Form* darstellen.	○	⊗
c) Der Term $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ ist eine *exponentielle Form* von -2.	⊗	○
d) Der Term $2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$ ist eine *exponentielle Form* von -2.	⊗	○
e) Der Term $-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ ist eine *exponentielle Form* von -2.	○	⊗

2. Umkehrungen der Euler-Formel

Die Euler-*Formel* lässt sich auch umkehren, so dass *Sinus* und *Cosinus* mit Hilfe der *natürlichen Exponentialfunktion* ausgedrückt werden können. Beweisen Sie dazu für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ mit Hilfe der Euler-*Formel* die beiden *Umkehrformeln*

$$\sin(\varphi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}} \quad \text{und} \quad \cos(\varphi) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}\,. \tag{1}$$

3. Potenz-Gleichungen mit komplexen Lösungen

Bestimmen Sie jeweils die *Lösungsmenge* der *Potenz-Gleichung* in $\mathbb{C}$.

a) $z^2 = -49$ **c)** $z^3 = -8$ **e)** $z^3 = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

b) $z^2 = \mathrm{i}$ **d)** $z^3 = -27\mathrm{i}$ **f)** $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

a) $z^2 = -49$

$1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$z^2 = \sqrt{49} \cdot \sqrt{e^{i\pi}}$

$z^2 = 7 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z_1 = 7i$

$z^2 = 7 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}+\pi}$

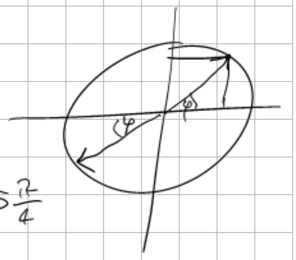
$= 7 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi}$

$= 7 \cdot -i$

$= -7 \cdot i \Rightarrow z_2 = -7 \cdot i$

b) $z^2 = i$

$\sqrt{z^2} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}}$



$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$= cis\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$z_2 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$

$= cis\left(\frac{5}{4}\pi\right)$

$= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$

$= -1\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

$\mathbb{L} = \left\{ \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \right\}$

c) $z^3 = -8$

$z_1 = \sqrt[3]{8 \cdot e^{i\pi}}$

$= \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= 2\,cis\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\,2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + i \cdot \cancel{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

$= 1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = \sqrt[3]{8 e^{i3\pi}}$

$= \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{3\pi}{3}}$

$= 2 \cdot e^{i\pi}$

$= 2\cos(\pi)$

$= 2\cos(\pi) + i \cdot 2 \cdot \sin(\pi)$

$= 2 \cdot -1 + i \cdot 2 \cdot 0$

$= -2 + 0$

$= -2$

$z_3 = \sqrt[3]{8 \cdot e^{i5\pi}}$

$= \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{5\pi}{3}}$

$= 2 \cdot cis\left(\frac{5\pi}{3}\right)$

$= 2\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) + i \cdot 2\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right)$

$= \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} + i\,\cancel{2} \cdot -\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}$

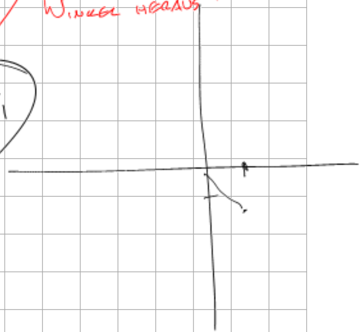
$= 1 - i\sqrt{3}$

$\mathbb{L} = \{-2,\ 1 \pm \sqrt{3}i\}$

e) $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$

$z^3 =$

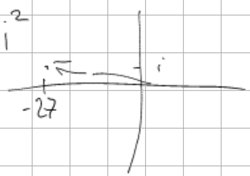
WIE FINDE ICH DEN WINKEL HERAUS?



d) $z^3 = -27i$

$z^3 = 27i^3$

$-1 = i^2$



$z^3 = \sqrt[3]{27 e^{i\frac{3}{2}\pi}}$

$z = \sqrt[3]{27}\, e^{i\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{3}}$

$z = 3 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{3}} = 3e^{i\frac{1}{2}\pi}$

$z_1 = 3 \cdot e^{i\frac{1}{2}\pi}$

$z_1 = 3\,cis\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

$z_1 = 3\cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) + i \cdot 3\sin\left(\frac{1}{2}\pi\right)$

$= 3 \cdot 0 + i\,3 \cdot 1$

$z_2 = 3 \cdot e^{i\frac{7}{6}\pi}$

$= 3\,cis\left(\frac{7}{6}\pi\right)$

$= 3\cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\,3 \cdot \sin\left(\frac{7}{6}\pi\right)$

$= 3 \cdot -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\,3 \cdot -\frac{1}{2}$

$= -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

$z_3 = 3e^{i\frac{7}{6}\pi + i\frac{2}{3}\pi}$

$= 3e^{i\frac{11}{6}\pi}$

$= 3\cos\left(\frac{11}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{11}{6}\pi\right)$

$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + i\,3 \cdot -\frac{1}{2}$

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

$\frac{7}{6} + \frac{4}{6} = \frac{11}{6}$

$z_1 = 3i$

$z_2 = -\frac{3}{2}(\sqrt{3} + i)$

$z_3 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

$\mathbb{L} = \left\{ 3i,\ -\frac{3}{2}(\sqrt{3}+i),\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$

WAS MUSS ICH ADDIEREN, UM WEITERE LSG ZU FINDEN

IMMER $\frac{2\pi}{n}$ — z^n

3. Potenz-Gleichungen mit komplexen Lösungen

Bestimmen Sie jeweils die *Lösungsmenge* der *Potenz-Gleichung* in $\mathbb{C}$.

a) $z^2 = -49$ **c)** $z^3 = -8$ **e)** $z^3 = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}$

b) $z^2 = \mathrm{i}$ **d)** $z^3 = -27\mathrm{i}$ **f)** $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i}$

4. Aussagen über Potenz-Gleichungen mit komplexen Lösungen

Es seien $w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}^+$. Betrachten Sie die allgemeine *Potenz-Gleichung*

$$z^n = w. \tag{2}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Für jede Wahl von w hat (2) mindestens eine *Lösung* in $\mathbb{C}$.	⊗	○
b) Für jede Wahl von w hat (2) genau n *Lösungen* in $\mathbb{C}$.	○	⊗
c) Ist n gerade und z eine *Lösung* von (2), dann ist auch $-z$ eine *Lösung* von (2).	⊗	○
d) Ist $w \in \mathbb{R}$ und z eine *Lösung* von (2), dann ist auch z^* eine *Lösung* von (2).	⊗	○
e) Alle *Lösungen* von (2) haben den gleichen *Betrag*.	○	⊗
f) Alle *Lösungen* von (2) haben das gleiche *Argument*.	○	⊗

? d)

5. Aussagen über komplexe Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$.	⊗	○
b) Es gilt $z = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) = 1$. $1 + 1\mathrm{i} \neq 1$	○	⊗
c) Es gilt $z_1^* = z_2$ genau dann, wenn $z_2^* = z_1$.	⊗	○
d) Es gibt ein $z \in \mathbb{C}$, so dass $z^2 = \mathrm{i}$.	⊗	○
e) Falls $\lvert z_1 \rvert \leq \lvert z_2 \rvert$, dann gilt auch $z_1 \leq z_2$.	○	⊗