Übungsblatt LA 11

Computational and Data Science
BSc FS2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Koordinatentransformation

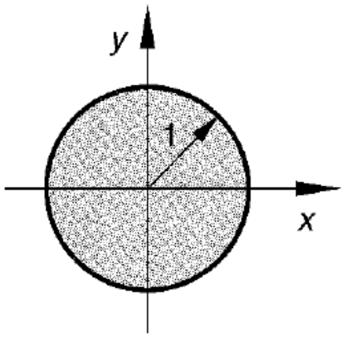
a) Geben Sie **r** = (8, -3, 9) in Zylinder- und in Kugelkoordinaten an.
Zylinderkoordinaten: r = √73, φ = -21°, z = z
Kugelkoordinaten: r = √154, φ = -21°, ϑ = 43,5°

b) In Kugelkoordinaten ist ein Vektor gegeben zu r = 256, φ = 40° und ϑ = 20°.
Geben Sie diesen Vektor in kartesischen Koordinaten an.
r = (67,1; 56,3; 240,6)

2. Doppelintegrale

Lösen Sie die beiden folgenden Integrale unter Verwendung von Polarkoordinaten.

a) $I = \iint_A (1 + x + y)dA$, wobei der Integrationsbereich der Einheitskreis sein soll.



Unter Verwendung von *Polarkoordinaten* transformiert sich der *Integrand* wie folgt $(x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi)$:

$$z = f(x; y) = 1 + x + y = 1 + r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi$$

Das *Flächenelement* dA lautet in Polarkoordinaten $dA = r\,dr\,d\varphi$, die *Integrationsgrenzen* sind (siehe Bild F-15):

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Damit gilt:

$$I = \iint_{(A)} (1 + x + y)\, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (1 + r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi)\, r\, dr\, d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (r + r^2 \cdot \cos\varphi + r^2 \cdot \sin\varphi)\, dr\, d\varphi$$

Wir integrieren zunächst nach r, dann nach φ.

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{1} (r + r^2 \cdot \cos\varphi + r^2 \cdot \sin\varphi)\, dr = \left[\frac{1}{2} r^2 + \frac{1}{3} r^3 \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} r^3 \cdot \sin\varphi\right]_{r=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi - 0 - 0 - 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi$$

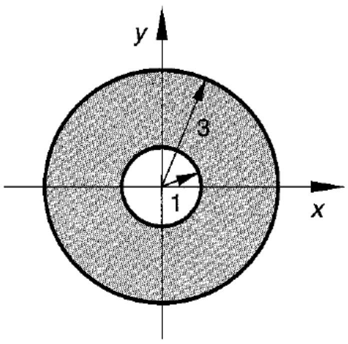
Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi\right) d\varphi = \left[\frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi - \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi\right]_{0}^{2\pi} =$$

$$= \pi + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - 0 - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} = \pi - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \pi$$

Ergebnis: $I = \pi$

b) $I = \iint_A (3\sqrt{x^2+y^2} + 4)\, dA$, wobei der Integrationsbereich der angegebene Kreisring sein soll.



Die *Transformationsgleichungen* für den Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten lauten:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad dA = r\, dr\, d\varphi$$

Die *Integrationsgrenzen* des kreisringförmigen Integrationsbereiches sind (siehe Bild F-16):

r-Integration: von $r = 1$ bis $r = 3$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Unter Berücksichtigung von

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi = r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r^2$$

transformiert sich der *Integrand* des Doppelintegrals wie folgt:

$$z = f(x; y) = 3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4 = 3 \cdot \sqrt{r^2} + 4 = 3r + 4$$

Das Doppelintegral I lautet damit in Polarkoordinaten:

$$I = \iint_{(A)} (3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4)\, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} (3r + 4)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} (3r^2 + 4r)\, dr\, d\varphi$$

Die Auswertung erfolgt in der üblichen Weise (erst nach r, dann nach φ integrieren).

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=1}^{3} (3r^2 + 4r)\, dr = \left[r^3 + 2r^2 \right]_{r=1}^{3} = 27 + 18 - 1 - 2 = 42$$

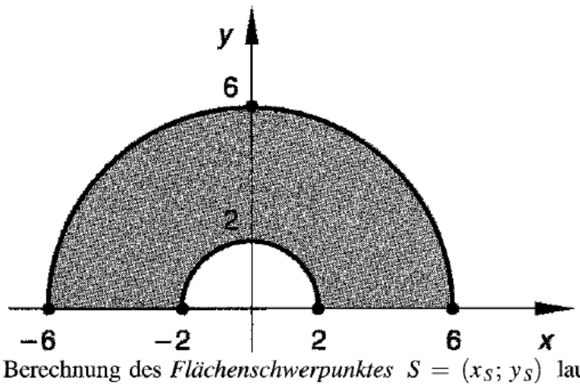
Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} 42\, d\varphi = 42 \cdot \int_{0}^{2\pi} 1\, d\varphi = 42 \left[\varphi \right]_{0}^{2\pi} = 42(2\pi - 0) = 84\pi$$

Ergebnis: $I = 84\pi$

3. Schwerpunkt

Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt S des skizzierten Kreisringausschnitts mit Innenradius $r_1 = 2$ und Aussenradius $r_2 = 6$.



Der *Integrationsbereich* für die Berechnung des *Flächenschwerpunktes* $S = (x_S; y_S)$ lautet:

r-Integration: von $r = 2$ bis $r = 6$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

Der benötigte *Flächeninhalt* A lässt sich *elementar* berechnen (als Differenz zweier Halbkreisflächen):

$$A = \frac{1}{2}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = \frac{1}{2}\pi(r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2}\pi(36 - 4) = 16\pi = 50{,}2655$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Fläche liegt der Schwerpunkt auf der y-Achse. Somit ist $x_S = 0$. Die *Ordinate* y_S berechnen wir mit dem folgenden Doppelintegral:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y\, dA = \frac{1}{16\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=2}^{6} r^2 \cdot \sin\varphi\, dr\, d\varphi$$

(Transformationsgleichungen: $y = r \cdot \sin\varphi$, Flächenelement $dA = r\,dr\,d\varphi$)

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=2}^{6} r^2 \cdot \sin\varphi\,dr = \sin\varphi \cdot \int_{r=2}^{6} r^2\,dr = \sin\varphi \left[\frac{1}{3}\,r^3\right]_{r=2}^{6} = \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi \left[r^3\right]_{r=2}^{6} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi\,(216 - 8) = \frac{208}{3} \cdot \sin\varphi$$

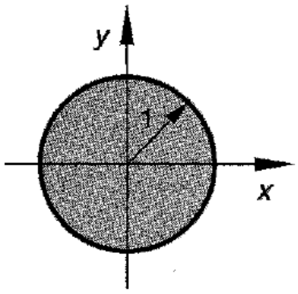
Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$y_S = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{208}{3} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi\,d\varphi = \frac{13}{3\pi}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{13}{3\pi}\,(-\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1}) = \frac{13}{3\pi}\,(1+1) = \frac{26}{3\pi} = 2{,}7587$$

Schwerpunkt: $S = (0;\,2{,}7587)$

4. Volumen zylinderförmiger Körper

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch einen in der xy-Ebene gelegenen kreisförmigen Boden mit Radius r = 1 und einen Deckel mit der Fläche $z = e^{x^2+y^2}$ gebildet wird.



Wir verwenden *Polarkoordinaten* (wegen der *Kreis-* bzw. *Rotationssymmetrie*). Der kreisförmige „Boden" liefert den *Integrationsbereich* (siehe Bild F-30): $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Die Rotationsfläche bildet den „Deckel" des zylindrischen Körpers, ihre Gleichung in *Polarkoordinaten* erhalten wir wie folgt (Transformationsgleichungen: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$):

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi = r^2\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r^2 \quad \Rightarrow \quad z = e^{x^2+y^2} = e^{r^2}$$

(unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagroas" $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

Damit gilt für das gesuchte Volumen:

$$V = \iint_{(A)} z\,dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} e^{r^2} \cdot r\,dr\,d\varphi \qquad \text{(Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

Wir lösen das innere Integral mit Hilfe der folgenden *Substitution*:

$$u = r^2, \quad \frac{du}{dr} = 2r, \quad dr = \frac{du}{2r}, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } r = 0 \;\Rightarrow\; u = 0 \\ \text{oben: } r = 1 \;\Rightarrow\; u = 1 \end{cases}$$

$$\int_{r=0}^{1} e^{r^2} \cdot r\,dr = \int_{u=0}^{1} e^u \cdot \cancel{r} \cdot \frac{du}{2\cancel{r}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{u=0}^{1} e^u\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{u=0}^{1} = \frac{1}{2}\,(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}\,(e - 1)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$V = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}-1)\cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}-1)\,[\varphi]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e}-1)\,(2\pi - 0) = (\mathrm{e}-1)\,\pi$$

Volumen: $V = (\mathrm{e}-1)\,\pi = 5{,}398$

5. Kartesische in Kugelkoordinaten umwandeln

Stellen Sie die folgenden räumlichen Vektorfelder in Kugelkoordinaten dar:

a) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ -z \\ y \end{pmatrix}$ b) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$F_r = F_x \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi + F_y \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi + F_z \cdot \cos\vartheta;$

$F_\vartheta = F_x \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi + F_y \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi - F_z \cdot \sin\vartheta;$ $F_\varphi = -F_x \cdot \sin\varphi + F_y \cdot \cos\varphi$

a) $F_x = x = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi;$ $F_y = -z = -r \cdot \cos\vartheta;$ $F_z = y = r \cdot \sin\vartheta \cdot \sin\varphi$

$$F_r = r \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi - r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi + r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin\varphi =$$
$$= r \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi$$

$$F_\vartheta = r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\varphi - r \cdot \cos^2\vartheta \cdot \sin\varphi - r \cdot \sin^2\vartheta \cdot \sin\varphi =$$
$$= r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\varphi - r \cdot \sin\varphi\,\underbrace{(\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta)}_{1} =$$
$$= r\,(\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\varphi - \sin\varphi)$$

$$F_\varphi = -r \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi - r \cdot \cos\vartheta \cdot \cos\varphi = -r \cdot \cos\varphi\,(\sin\vartheta \cdot \sin\varphi + \cos\vartheta)$$

$$\vec{F}(r;\vartheta;\varphi) = F_r\,\vec{e}_r + F_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi = (r \cdot \sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi)\,\vec{e}_r +$$
$$+ r\,(\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\varphi - \sin\varphi)\,\vec{e}_\vartheta - r \cdot \cos\varphi\,(\sin\vartheta \cdot \sin\varphi + \cos\vartheta)\,\vec{e}_\varphi$$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = r^2;$ $F_x = \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\varphi}{r};$ $F_y = \frac{\sin\vartheta \cdot \sin\varphi}{r};$ $F_z = \frac{\cos\vartheta}{r}$

$$F_r = \frac{\sin^2\vartheta \cdot \cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin^2\vartheta \cdot \sin^2\varphi}{r} + \frac{\cos^2\vartheta}{r} =$$
$$= \frac{1}{r}\,[\sin^2\vartheta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} + \cos^2\vartheta] = \frac{1}{r}\,\underbrace{(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta)}_{1} = \frac{1}{r}$$

$$F_\vartheta = \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \cos^2\varphi}{r} + \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta \cdot \sin^2\varphi}{r} - \frac{\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta}{r} =$$

$$= \frac{1}{r}\,[\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta] =$$

$$= \frac{1}{r}\,(\sin\vartheta \cdot \cos\vartheta - \sin\vartheta \cdot \cos\vartheta) = \frac{1}{r} \cdot 0 = 0$$

$$F_\varphi = -\frac{\sin\vartheta \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi}{r} + \frac{\sin\vartheta \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}{r} = 0$$

$$\vec{F}(r;\vartheta;\varphi) = F_r\,\vec{e}_r + F_\vartheta\,\vec{e}_\vartheta + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r}\,\vec{e}_r + 0\,\vec{e}_\vartheta + 0\,\vec{e}_\varphi = \frac{1}{r}\,\vec{e}_r$$

6. Kartesische in Zylinderkoordinaten umwandeln

Die folgenden räumlichen Vektorfelder sind in Zylinderkoordinaten darzustellen:

a) $\vec{F}(x,y,z) = \vec{r} = (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$ b) $\vec{F}(x,y,z) = y\vec{e}_x - 2\vec{e}_y + x\vec{e}_z)$.

a) $F_x = x = \varrho \cdot \cos\varphi;\quad F_y = y = \varrho \cdot \sin\varphi;\quad F_z = z$

$$F_\varrho = F_x \cdot \cos\varphi + F_y \cdot \sin\varphi = \varrho \cdot \cos^2\varphi + \varrho \cdot \sin^2\varphi = \varrho\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = \varrho$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin\varphi + F_y \cdot \cos\varphi = -\varrho \cdot \cos\varphi \cdot \sin\varphi + \varrho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0$$

$$F_z = z;\quad \vec{F}(\varrho;\varphi;z) = F_\varrho\,\vec{e}_\varrho + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi + F_z\,\vec{e}_z = \varrho\,\vec{e}_\varrho + 0\,\vec{e}_\varphi + z\,\vec{e}_z = \varrho\,\vec{e}_\varrho + z\,\vec{e}_z$$

b) $F_x = y = \varrho \cdot \sin\varphi;\quad F_y = -2;\quad F_z = x = \varrho \cdot \cos\varphi$

$$F_\varrho = F_x \cdot \cos\varphi + F_y \cdot \sin\varphi = \varrho \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - 2 \cdot \sin\varphi = \sin\varphi\,(\varrho \cdot \cos\varphi - 2)$$

$$F_\varphi = -F_x \cdot \sin\varphi + F_y \cdot \cos\varphi = -\varrho \cdot \sin^2\varphi - 2 \cdot \cos\varphi;\quad F_z = \varrho \cdot \cos\varphi$$

$$\vec{F}(\varrho;\varphi;z) = F_\varrho\,\vec{e}_\varrho + F_\varphi\,\vec{e}_\varphi + F_z\,\vec{e}_z =$$

$$= \sin\varphi\,(\varrho \cdot \cos\varphi - 2)\,\vec{e}_\varrho - (\varrho \cdot \sin^2\varphi + 2 \cdot \cos\varphi)\,\vec{e}_\varphi + (\varrho \cdot \cos\varphi)\,\vec{e}_z$$