Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 6

Computational and Data Science
FS2025

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe orthogonale Matrix, Drehmatrix, Spiegelmatrix und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen diejenigen 2x2 Standardmatrizen, die orthogonal sind.
- Sie kennen das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren zur Bestimmung von Matrizen und können dieses anwenden.
- Sie können Dreh- und Spiegelmatrizen zur Lösung konkreter Fragestellungen anwenden.

---

1. Spaltenvektor Konstruktionsverfahren für Matrizen in 2D
Benutzen Sie das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren, um die jeweilige Matrix zu bestimmen.
a) Bestimmen Sie die Matrix S_{xy}, die die Spiegelung an der Geraden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ beschreibt. Testen Sie die Wirkung der Matrix an 2 selbst gewählten Vektoren.
b) Bestimmen Sie die Matrix $R_{\pi/4}$, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/4$ beschreibt.

2. Drehmatrizen in 2D
Im Folgenden lernen Sie Form und Eigenschaften von Drehmatrizen in 2D kennen.
a) Bestimmen Sie die Matrix R_α mit Hilfe des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ beschreibt.
b) Bestimmen Sie die Matrix $R_{-\alpha}$ mit Hilfe des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $-\alpha \in \mathbb{R}$ (also Drehung im Uhrzeigersinn) beschreibt.
Hinweis: Verwenden Sie die Paritätseigenschaften, dass gilt: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Drehmatrizen aus Aufgabe a) und b)? Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_\alpha \cdot R_{-\alpha}$ und $R_{-\alpha} \cdot R_\alpha$.
d) Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_\alpha \cdot R_\beta$ und $R_\beta \cdot R_\alpha$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, was passiert, wenn man nacheinander die Drehungen auf denselben Vektor ausführt. Nutzen Sie die Additionstheoreme zur Vereinfachung der Matrizen.
e) Geben Sie die Drehmatrizen für $\alpha \in \left\{0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi\right\}$ explizit an.

3. Aussagen über Drehmatrizen in 2D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede Drehmatrix in 2D hat eine Inverse.		
b) Jede Drehmatrix in 2D ist schiefsymmetrisch.		
c) Jede Drehmatrix in 2D ist orthogonal.		
d) Für $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $R^n(\alpha) = R(n \cdot \alpha)$.		
e) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: $R(\beta) \cdot R(\alpha) = R(\alpha) \cdot R(\beta)$, d. h. die Drehmatrizen kommutieren.		
f) Die Matrix P (der Punktspiegelung) ist eine Drehmatrix.		

4. Polygone in 2D

Berechnen Sie die Eckpunkte des jeweiligen Polygons.

a) Ein Quadrat, dessen Diagonale die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten A = (-1;3) und C = (1;-1) ist.

b) Ein gleichseitiges Dreieck mit Mittelpunkt M am Ursprung und einer Ecke bei A = (0;3).

5. Aussagen über eine Drehmatrix in 2D

Gegeben sei die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) A ist schiefsymmetrisch.		
b) Es gilt: $A^{100} = \mathbb{E}$.		
c) Es gilt: $A^6 = R(-\frac{\pi}{2})$.		
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ so dass gilt: $A^n = P$.		
e) Die inverse Matrix A^{-1} von A ist A^T.		
f) Es gilt: $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{E} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R(\frac{\pi}{2})$.		

6. Gleichschenkliges Dreieck in 2D

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit den Eckpunkten B = (2;1/4) und C = (2;4), das die Gerade G, die durch den Ursprung und den Punkt C verläuft, als Symmetrieachse hat.

a) Bestimmen Sie die Ecke A des Dreiecks durch Drehung der Seite a.

b) Bestimmen Sie die Ecke A durch Spiegelung an der Symmetrieachse, also der Geraden G.

7. Orthogonale Standardmatrizen in 2D

Ermitteln Sie, welche der Standardmatrizen $\mathbb{E}$, P, Z_3, P_x, P_y, S_x, S_y, R(π/2), R(-π/2) und R(π/4) orthogonal sind.

8. Aussagen über zwei Matrizen in 3D

Gegeben seien die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) B ist symmetrisch.		
b) A ist eine Spiegelmatrix.		
c) A ist singulär.		
d) Die Matrizen A und $C = B/3$ sind orthogonal.		
e) Es gilt: $2 \cdot (A + A^T) + B = \mathbb{E}$.		
f) Es gilt: $A^{30} = B \cdot B^T$.		

9. Aussagen über eine Drehmatrix in 2D

Gegeben sei die Drehmatrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) A ist symmetrisch.		
b) Es gilt: $A^{12} = A^{63}$.		
c) Es gilt: $A^7 = R(\frac{\pi}{3})$.		
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ so dass gilt: $A^n = \mathbb{i}$.		
e) Es gilt: $A^{-1} = -A$.		
f) Es gilt: $A = -\mathbb{E} + \sqrt{3} \cdot R(\frac{\pi}{2})$.		