Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

# Übungsblatt LA 2

Computational and Data Science
FS2025

## Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Gaußsche Zahlenebene, arithmetische und trigonometrische Form einer komplexen Zahl und Arg-Funktion und deren Eigenschaften.
- Sie können komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen.
- Sie können komplexe Zahlen von der arithmetischen in die trigonometrische Form und umgekehrt umwandeln.
- Sie können einfache Brüche und Potenzen von komplexen Zahlen durch Anwenden der Rechenregeln vereinfachen.
- Sie können quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten lösen.

### 1. Aussagen über die Gaußsche Zahlenebene

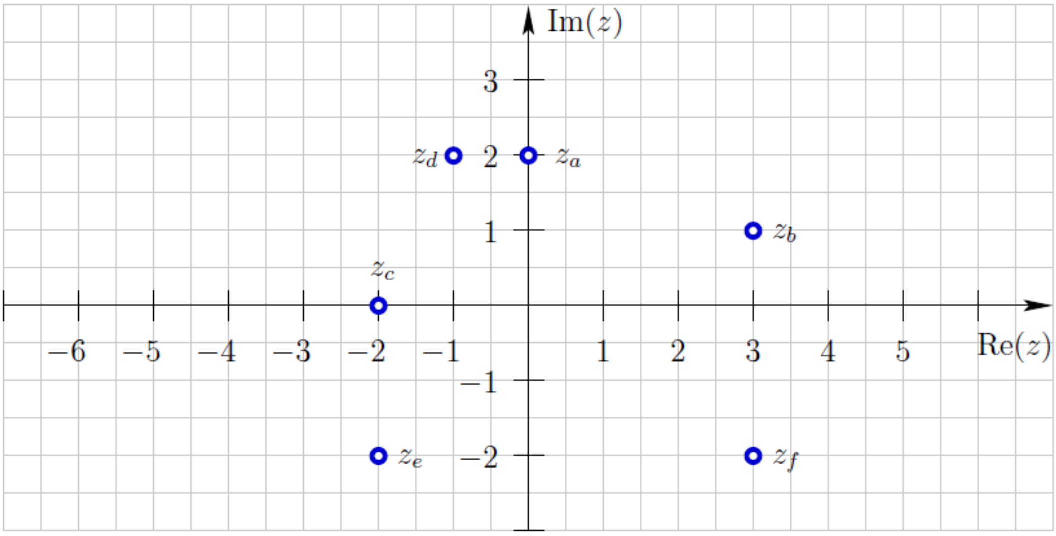
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| a) Die Gaußsche Zahlenebene wurde im 20. Jahrhundert eingeführt. | | X |
| b) Jede komplexe Zahl wird durch einen Punkt in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt. | X | |
| c) Die x-Achse der Gaußschen Zahlenebene entspricht der Re-Achse. | X | |
| d) Die komplexe Zahl $z = 2 + 3i$ entspricht dem Punkt $(2; 3i)$ in der Gaußschen Zahlenebene. | | X |
| e) Die komplexen Zahlen $z$, für welche gilt $z^2 = -3$, liegen auf der Im-Achse. | X | |
| f) Die komplexen Zahlen $z \epsilon \mathbb{C}$ mit $\|z\| = 1$ bilden den Einheitskreis in der Gaußschen Zahlenebene. | X | |

### 2. Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene

Zeichnen Sie die gegebenen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene ein.

a) $2i$ b) $3 + i$ c) $-2$
d) $-1 + 2i$ e) $-2 - 2i$ f) $3 - 2i$




**3. Aussagen über die trigonometrische Form komplexer Zahlen**
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| a) Jede komplexe Zahl lässt sich in trigonometrischer Form darstellen. | X | |
| b) Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in trigonometrischer Form darstellen. | | X |
| c) Der Term $2cis(\pi/2)$ ist eine trigonometrische Form von $2i$. | X | |
| d) Der Term $2cis(-3\pi/2)$ ist eine trigonometrische Form von $2i$. | X | |
| e) Der Term $2cis(5\pi/2)$ ist eine trigonometrische Form von $2i$. | X | |
| f) Der Term $-2cis(\pi/2)$ ist eine trigonometrische Form von $2i$. | | X |

**4. Darstellung der Arg-Funktion**

a) Prüfen Sie nach, dass die Funktion $f(z) = \arctan\frac{Im(z)}{Re(z)}$ keine vollständige Darstellung der Arg-Funktion ist.

b) Finden Sie den Funktionsterm der Arg-Funktion in der Variante $arg: \mathbb{C} \to ]-\pi;\pi[$.

c) Finden Sie den Funktionsterm der Arg-Funktion in der Variante $arg: \mathbb{C} \to [0;2\pi[$.

a)

Offensichtlich ist der Funktionswert

$$f(\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{0}\right) = ?$$

nicht definiert. Ferner gilt

$$f(-1+\mathrm{i}) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\arg(-1+\mathrm{i}) = \frac{3\pi}{4} \neq f(-1+\mathrm{i}).$$

Daraus schliessen wir, dass $f$ keine vollständige Darstellung der *Arg-Funktion* ist.

b)
Es muss gelten:

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) \geq 0 \\ \operatorname{arccot}\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}\right) & \mathrm{Im}(z) > 0 \\ \pi & \mathrm{Im}(z) = 0 \wedge \mathrm{Re}(z) < 0 \\ -\pi + \operatorname{arccot}\left(\frac{\mathrm{Re}(z)}{\mathrm{Im}(z)}\right) & \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

c)
Es muss gelten:

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \mathrm{Re}(z) \geq 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0 \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) & \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0 \\ \pi/2 & \mathrm{Re}(z) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0 \\ \pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) & \mathrm{Re}(z) < 0 \\ 3\pi/2 & \mathrm{Re}(z) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z) < 0 \\ 2\pi + \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) & \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) < 0. \end{cases}$$

**5. Konversion in die arithmetische Form**

Geben Sie die jeweilige komplexe Zahl in arithmetischer Form an.

a) $4cis(\pi/2)$ b) $2cis(-\pi/3)$ c) $cis(3\pi/4)$

d) $2cis(3\pi)$ e) $\frac{1}{2}\mathrm{cis}(75°)$ f) $\sqrt{2}\mathrm{cis}(-105°)$

a)

$$\underline{\underline{4\ \mathrm{cis}(\pi/2)}} = 4 \cdot \cos(\pi/2) + 4 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/2) = 4 \cdot 0 + 4 \cdot \mathrm{i} \cdot 1 = \underline{\underline{4\mathrm{i}.}}$$

b)

$$\underline{\underline{2\ \mathrm{cis}(-\pi/3)}} = 2 \cdot \cos(-\pi/3) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(-\pi/3) = 2 \cdot \cos(\pi/3) - 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/3)$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}.}}$$

c)

$$\underline{\underline{\mathrm{cis}(3\pi/4)}} = \cos(3\pi/4) + \mathrm{i} \cdot \sin(3\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\mathrm{i}.}}$$

d)

$$\underline{\underline{2\ \mathrm{cis}(3\pi)}} = 2 \cdot \cos(3\pi) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(3\pi) = 2 \cdot \cos(\pi) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi)$$

$$= 2 \cdot (-1) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot 0 = -2 + 0 = \underline{\underline{-2.}}$$

e)
Additionstheoreme wurden genutzt, um
$cos(75°) = \cos(45° + 30°) = \cos(45°)\cos(30°) - \sin(45°)\sin(30°)$
und
$sin(75°) = \sin(45°)\cos(30°) + \sin(30°)\cos(45°)$ umzuschreiben.

$$\underline{\underline{\frac{1}{2}\,\mathrm{cis}(75^\circ)}} = \frac{1}{2}\cdot\cos(75^\circ) + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{i}\cdot\sin(75^\circ) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\sqrt{2}} + \frac{1}{2}\cdot \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}+1}{2\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}+1}{4\sqrt{2}}\,\mathrm{i}.}}$$

f)
Additionstheoreme wurden genutzt, um
$\cos(-105°) = \cos(105°) = \cos(60° + 45°) = \cos(60°)\sin(45°) - \sin(60°)\sin(45°)$
und
$\sin(-105°) = -\sin(105°) = -\sin(60° + 45°) = -\sin(60°)\cos(45°) - \sin(45°)\cos(60°)$ umzuschreiben.

$$\underline{\underline{\sqrt{2}\ \mathrm{cis}(-105^\circ)}} = \sqrt{2}\cdot\cos(-105^\circ) + \sqrt{2}\cdot \mathrm{i}\cdot\sin(-105^\circ)$$

$$= \sqrt{2}\cdot\cos(105^\circ) - \sqrt{2}\cdot \mathrm{i}\cdot\sin(105^\circ) = \sqrt{2}\cdot\frac{1-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}} - \sqrt{2}\cdot \mathrm{i}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{2}}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1-\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.}}$$

**6. Konversion in die trigonometrische Form**
Geben Sie die jeweilige komplexe Zahl in trigonometrischer Form an.

a) $3$ b) $-5$ c) $2i$
d) $-3i$ e) $3-4i$ f) $-12+5i$

a)
$$\underline{\underline{3}} = |3|\cdot\mathrm{cis}\big(\arg(3)\big) = \underline{\underline{3\cdot\mathrm{cis}(0).}}$$
b)
$$\underline{\underline{-5}} = |-5|\cdot\mathrm{cis}\big(\arg(-5)\big) = \underline{\underline{5\cdot\mathrm{cis}(\pi).}}$$
c)
$$\underline{\underline{2\mathrm{i}}} = |2\mathrm{i}|\cdot\mathrm{cis}\big(\arg(2\mathrm{i})\big) = \underline{\underline{2\cdot\mathrm{cis}(\pi/2).}}$$
d)
$-3i\ =\ |-3i|\cdot cis(arg(-3i))\ =\ 3\cdot cis(3\pi/2)$
e)
$$\underline{\underline{3-4\mathrm{i}}} = |3-4\mathrm{i}|\cdot\mathrm{cis}\big(\arg(3-4\mathrm{i})\big) = \sqrt{3^2+(-4)^2}\cdot\mathrm{cis}\big(2\pi+\arctan(-4/3)\big)$$

$$= \sqrt{25}\cdot\mathrm{cis}\big(2\pi+\arctan(-4/3)\big) \approx 5\cdot\mathrm{cis}(2\pi-0.927) \approx \underline{\underline{5\cdot\mathrm{cis}(1.70\,\pi).}}$$
f)
$$\underline{\underline{-12+5\mathrm{i}}} = |-12+5\mathrm{i}|\cdot\mathrm{cis}\big(\arg(-12+5\mathrm{i})\big)$$

$$= \sqrt{(-12)^2+5^2}\cdot\mathrm{cis}\big(\arctan(-5/12)+\pi\big) = \sqrt{169}\cdot\mathrm{cis}\big(\arctan(-5/12)+\pi\big)$$

$$\approx 13\cdot\mathrm{cis}(-0.395+\pi) \approx \underline{\underline{13\cdot\mathrm{cis}(0.874\,\pi).}}$$

**7. Trigonometrische Zahlen mit Python/Numpy**
Berechnen Sie die Konversionen aus Aufgabe 5 und 6 mit Python/Numpy.

Aufgabe 5a:
```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
r=2; phi=-np.pi/3;
# Berechnung
z=r*(np.cos(phi)+1j*np.sin(phi));
# Ausgabe
print('z=', f"{z:.3f}");
```

Aufgabe 5b) – 5f) analog.

Aufgabe 6a:
```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
z=3;
# Berechnung
r=np.abs(z); phi=np.angle(z); # Betrag und Winkel (arg(z)) der
komplexen Zahl
# Ausgabe
print('z=',z,'=',r,'*cis(',f"{phi/np.pi:.3f}",'pi)');
```

Aufgabe 6b) – 6f) analog.

**8. Aussagen über quadratische Gleichungen**
Gegeben sei die allgemeine quadratische Gleichung
$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

| | wahr | falsch |
|---|---|---|
| a) Die Koeffizienten $a, b, c$ können so gewählt werden, dass es keine Lösung in $\mathbb{R}$ gibt. | X | |
| b) Die Koeffizienten $a, b, c$ können so gewählt werden, dass es keine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt. | | X |
| c) Für jede Wahl der Koeffizienten $a, b, c$ liegen zwei verschiedene Lösungen in $\mathbb{C}$ vor. | | X |
| d) Die Koeffizienten $a, b, c$ können so gewählt werden, dass $x_1 = 1$ und $x_2 = i$ die beiden Lösungen sind. | | X |
| e) Gibt es 2 Lösungen $x_1$ und $x_2$, dann gilt entweder $x_2 = x_1{}^*$ oder $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. | X | |
| f) Die Anzahl der Lösungen kann anhand der Diskriminante beurteilt werden. | X | |

**9. Quadratische Gleichungen**
Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung in $\mathbb{C}$ mit Hilfe der Mitternachtsformel.

a) $x^2 + 1 = 0$
b) $x^2 - 10x + 74 = 0$
c) $2x^2 + 4 = x$
d) $3t^2 = -30t - 507$
e) $w = 2 + w^2$
f) $s(s + 1) = 2s^2 + 1$

a)
$a = 1, b = 0, c = 1$
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -4$
Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-0 \pm \sqrt{-4}}{2 \cdot 1} = \frac{\pm 2\mathrm{i}}{2} = \pm \mathrm{i}.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-\mathrm{i},\ \mathrm{i}\}.}}$$

b)
$a = 1, b = -10, c = 74$
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -196$
Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{-196}}{2 \cdot 1} = \frac{10 \pm 14\mathrm{i}}{2} = 5 \pm 7\mathrm{i}.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{5 - 7\mathrm{i},\ 5 + 7\mathrm{i}\}.}}$$

c)
$2x^2 + 4 = x \Leftrightarrow 2x^2 - x + 4 = 0$
$a = 2, b = -1, c = 4$
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -31$
Es ergeben sich die Lösungen

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-31}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{31}\,\mathrm{i}}{4} = \frac{1}{4} \pm \frac{\sqrt{31}}{4}\mathrm{i}.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{31}}{4}\mathrm{i},\ \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{31}}{4}\mathrm{i}\right\}.}}$$

d)
$3t^2 = -30t - 507 \Leftrightarrow 3t^2 + 30t + 507 = 0 \Leftrightarrow t^2 + 10t + 169 = 0$
$a = 1, b = 10, c = 169$
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -576$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-10 \pm \sqrt{-576}}{2 \cdot 1} = \frac{-10 \pm 24\mathrm{i}}{2} = -5 \pm 12\,\mathrm{i}.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{-5 - 12\mathrm{i},\ -5 + 12\mathrm{i}\}.}}$$

e)
$w = 2 + w^2 \Leftrightarrow w^2 - w + 2 = 0$
$a = 1, b = -1, c = 2$
Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -7$

$$w_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-7}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{7}\,\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}\mathrm{i}\right\}.}}$$

f)

$s(s+1) = 2s^2 + 1 \Leftrightarrow s^2 - s + 1 = 0$

$a = 1, b = -1, c = 1$

Diskriminante: $D = b^2 - 4ac = -3$

$$s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{-3}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{3}\,\mathrm{i}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i}.$$

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i},\ \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\mathrm{i} \right\}}}.$$