SUBSTITUIEREN VON BESTIMMTEN INTEGRALEN → GRENZEN ÄNDERN

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \qquad f(g(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

$$g(x) = 1-x^2 = z$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{dz}{dx} = -2x \iff dx = -\frac{dz}{2x}$$

$$\int \frac{\cancel{x}}{\sqrt{z}} \cdot \left(-\frac{dz}{2\cancel{x}}\right) = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\, z^{\frac{1}{2}} + c = -z^{1/2} + c = -\sqrt{z} + c$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + c$$

$$\int \frac{1}{1+(\ln(x))^2} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1}{x + x \cdot (\ln x)^2}\, dx$$

$$f(g(x)) = 1 + (\ln x)^2$$

$$g(x) = \ln(x) = z$$

$$\frac{dg(x)}{dx} = \frac{dz}{dx} = \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \iff dx = dz \cdot x$$

$$\int \frac{1}{1+z^2} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \cdot \cancel{x}\, dz \qquad \text{Arc tan ?}$$

$$= \int \frac{1}{1+z^2}\, dz = \arctan z + c$$

$$= \arctan(\ln(x)) + c$$

Trapez - Formel

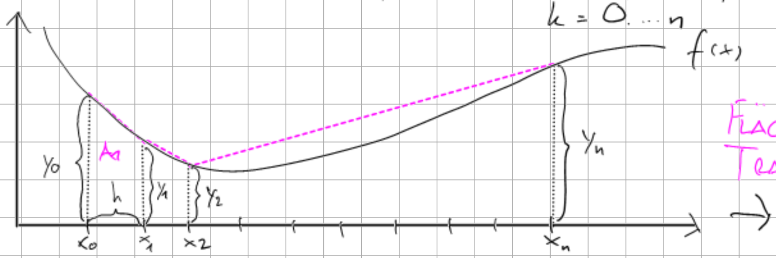
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, Integrationsintervall: $a \le x \le b$

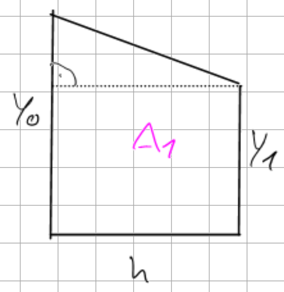
zerlege,

$$h = \frac{b-a}{n}$$

→ Stützstellen: $x_0 = a$, $x_1 = x_0 + h$
$x_2 = x_0 + 2h$ .....
$x_n = b$

→ Funktionswert an Stützstelle: $f(x_k)$
heisst Stützwert $y_k = f(x_k) = f(x_0 + k \cdot h)$
$k = 0 \dots n$





Flächen werden durch Trapeze angenähert →

$$A_n = \frac{1}{2} h (y_{n-1} + y_n)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A_1 + A_2 + \dots + A_n$$
$$= \frac{1}{2} h (y_0 + y_1) + \frac{1}{2} h (y_1 + y_2) + \dots + \frac{1}{2} h (y_{n-1} + y_n)$$
$$= \frac{1}{2} h (y_0 + y_1 + y_1 + y_2 + y_2 + \dots + y_{n-1} + y_{n-1} + y_n$$
$$= \frac{1}{2} h (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$
$$= \frac{1}{2} h (\underbrace{y_0 + y_n}_{\Sigma_1} + 2 \cdot \underbrace{(y_1 + y_2 + \dots y_{n-1})}_{\Sigma_2})$$
$$= \frac{1}{2} h \Sigma_1 + h \cdot \Sigma_2$$

$n = 5 \to h = 0{,}2$

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx \approx \frac{1}{2} h \Sigma_1 + h \Sigma_2 = 0{,}7444$$

Wertetabelle

x_k	y_k
0	1
0,2	0,9608
0,4	0,8521
0,6	0,6977
0,8	0,5273
1	0,3679

$f(x)$

$$\frac{1}{2} \quad \Sigma h (y_{n-1} + y_n)$$

Übungsblatt Ana 2

Computational and Data Science
FS2024

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, Substitution und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Methode der Substitution anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale zu berechnen.
- Sie können bestimmte Integrale näherungsweise auf eine vorgegebene Anzahl Dezimalstellen mit Python/Numpy berechnen.

---

1. Aussagen über Integrale
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: existiert zu f eine Stammfunktion, so ist diese eindeutig.		X
b) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx$.	X	
c) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int (f(x) \cdot g(x))dx$.		X
d) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f(x)g(x)dx = c\int_a^b g(x)dx$.	X	
e) Für die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \implies f(x) = 0\ \forall x \in [a, b]$.		X
f) Für die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert\,dx$.	X	

$\forall$? Alle Elemente? ?

2. Aussagen über die Methode der Substitution

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Methode Substitution basiert auf der Kettenregel der Differentialrechnung.	X	
b) Die Hilfe der Methode der Substitution kann jede Verschachtelung von zwei Funktionen problemlos integriert werden.		X
c) Die Methode der Substitution eignet sich zur Integration von Produkten der Form $x \cdot f(x^2)$. $\int_2^4 \sin(u)\,du$ $u = 2x$	X	
d) Es gilt: $\int_1^2 \sin(2x)\,dx = 1/2 \int_1^2 \sin u\,du$. $\int \sin(u)\frac{1}{2}\,du$ $du = 2dx$		X
e) Es gilt: $\int_1^2 \sin(2x)\,dx = \int_2^4 \sin u\,du$. $\frac{du}{2}$		X

3. Stammfunktion durch Methode der Substitution bestimmen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit der Methode der Substitution.

a) $\int \sqrt{5-x}\,dx$
b) $\int \sqrt{5x+12}\,dx$
c) $\int e^{4x+2}\,dx$
d) $\int (x^2-1)^3\,dx$
e) $\int \sqrt[3]{1-x}\,dx$
f) $\int x \cdot \cos(x^2)\,dx$
g) $\int \sin x \cos x\,dx$
h) $\int \sinh x \cosh x\,dx$
i) $\int \tan x\,dx$
j) $\int \cot x\,dx$
k) $\int \tanh x\,dx$
l) $\int \coth x\,dx$

4. Stammfunktion durch Methode der Substitution bestimmen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Methode der Substitution.

a) $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4}\,dx$
b) $\int_0^2 \frac{4x}{2x^2+9}$
c) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}}\,dx$
d) $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$
e) $\int_0^{\pi/2} \cos(2x+\frac{\pi}{3})\,dx$
f) $\int_0^{10} 5xe^{-x^2}\,dx$

5. Integrale mit Python/Numpy berechnen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit dem Befehl trapz in Python/Numpy.

a) $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$
b) $\int_2^5 \frac{1+x}{1-x}\,dx$
c) $\int_{-2}^0 3^x\,dx$
d) $\int_2^{100} \frac{\sin x}{1+3x}\,dx$
e) $\int_{0,01}^1 \log_2 x\,dx$
f) $\int_2^3 \log_x 10\,dx$

6. Trapezformel

Berechnen Sie das Integral $\int_1^2 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$ näherungsweise unter Zuhilfenahme der Trapezformel für jeweils 10 (einfache) Streifen (Endergebnis auf 4 Nachkommastellen).

VON HAND MACHEN

$$\int_1^2 \frac{1-e^{-x}}{x}\,dx$$

$$\frac{1}{2}h\sum_1 + h\sum_2$$

$$\frac{1}{2}\cdot 0{,}1\left(f(x_0)+f(x_{10})\right)$$

x	$f(x)$
1	
1,1	
1,2	
1,3	
1,4	
1,5	
1,6	
1,7	
1,8	
1,9	
2	

3. Stammfunktion durch Methode der Substitution bestimmen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit der Methode der Substitution.

a) $\int \sqrt{5-x}\,dx$ b) $\int \sqrt{5x+12}\,dx$
c) $\int e^{4x+2}\,dx$ d) $\int (x^2-1)^3\,dx$
e) $\int \sqrt[3]{1-x}\,dx$ f) $\int x\cdot\cos(x^2)\,dx$
g) $\int \sin x\cos x\,dx$ h) $\int \sinh x\cosh x\,dx$
i) $\int \tan x\,dx$ j) $\int \cot x\,dx$
k) $\int \tanh x\,dx$ l) $\int \coth x\,dx$

SPEZIELLE TRIGO FUNC → SPICK

a) $\int \sqrt{5-x}\,dx$ $\quad u = 5-x$, $du = -1\,dx$, $\frac{du}{-1} = dx$

$\int \sqrt{u}\,du$

$\int -1\cdot u^{1/2}\,du$

$\frac{1}{\frac{3}{2}}u^{3/2}+c$

$\frac{2}{3}u^{3/2}+c$

$\frac{1}{-1}\frac{2}{3}(5-x)^{3/2}+c$

$-\frac{2}{3}\sqrt{5-x}+c$

b) $\int \sqrt{5x+12}\,dx$ $\quad u = 5x+12$, $du = 5\,dx$, $\frac{du}{5} = dx$

$\int \sqrt{u}\cdot\frac{1}{5}\,du$

$\frac{2}{3}\sqrt{u^3}\cdot\frac{1}{5}+C$

$\frac{2}{15}\sqrt{(5x+12)^3}+C$

c) $\int e^{4x+2}\,dx$ $\quad u = 4x+2$, $du = 4\,dx$, $\frac{du}{4} = dx$

$\int e^{u}\cdot\frac{1}{4}\,du$

$\frac{1}{4}e^{u}+c$

$\frac{1}{4}e^{4x+2}+c$

d) $\int (x^2-1)^3\,dx$ $\quad u = x^2-1$, $du = 2x\,dx$, $\frac{du}{2x} = dx$

$\int \frac{1}{2x}u^3\,du$

$\frac{1}{8x}u^4+c$

$\frac{1}{8x}(x^2-1)^4+c$

e) $\int \sqrt[3]{1-x}\,dx$ $\quad u = 1-x$, $du = -1\,dx$, $\frac{du}{-1} = dx$

$= \int -\sqrt[3]{u}\,du$

$= \int -u^{1/3}\,du$

$= -\frac{3}{4}u^{4/3}+C$

$= -\frac{3}{4}(1-x)^{4/3}+C$

$= -\frac{3}{4}\sqrt[3]{1-x^4}+C$

f) $\int x\cdot\cos x^2\,dx$ $\quad u = x^2$, $du = 2x\,dx$, $\frac{du}{2x} = dx$

$= \int x\cdot\cos(u)\cdot\frac{1}{2x}\,du$

$= \int \cos(u)\frac{1}{2}\,du$

$= \frac{1}{2}\sin(u)+c$

$= \frac{1}{2}\sin(x^2)+c$

WAS SIND DIE ? sinh + cosh

g) $\int \sin x\cos x\,dx$ $\quad u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$, $\frac{du}{-\sin x} = dx$

$= \int \sin x\cdot u\cdot\frac{1}{-\sin x}\,du$

$= \int -u\,du$

$\frac{1}{-\sin}\,du$

$= \frac{1}{2}-u^2+C$

$= \frac{1}{2}-\cos^2 x+C$

$\frac{1}{2}-\cos^2 x+C_1 = \frac{1}{2}\sin^2 x+C_2 \quad |-C_2$

$\frac{1}{2}-\cos^2 x+C_3 = \frac{1}{2}\sin^2 x \quad |\cdot 2$

$-\cos^2 x+2C_3 = \sin^2 x \quad |+\cos^2$

$2C_3 = \sin^2 x+\cos^2 x$

h) $\int \sinh x\cosh x\,dx$ $\quad u = \sinh x$, $du = \cosh x\,dx \quad |:\cosh x$, $\Leftrightarrow \frac{du}{\cosh x} = dx$

$= \int u\cdot\cosh x\cdot\frac{1}{\cosh}\,du$

$= \int u\,du$

$= \frac{1}{2}u^2+c$

$= \frac{1}{2}\sinh^2 x+C$

j) $\int \cot x\,dx$ $\quad u = \sin x$, $du = \cos x\,dx$, $\frac{1}{\cos x}du = dx$

$= \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$

$= \int \frac{\cos x}{u}\frac{1}{\cos x}\,du$

$= \int \frac{1}{u}\,du$

$= \ln(|u|)+c$

$= \ln(|\sin x|)+c$

k) $\int \tanh x\,dx$ $\quad u = \cosh x$, $du = \sinh x\,dx$, $\frac{1}{\sinh x}du = dx$

$\int \frac{\sinh x}{\cosh x}\,dx$

$\int \sinh x\cdot\frac{1}{u}\cdot\frac{1}{\sinh x}\,du$

$\int \frac{1}{u}\,du$

$\ln(|u|)+c$

$\ln(|\cosh|)+c$

i) $\int \tan x\,dx$ $\quad u = \cos x$, $du = -\sin x\,dx$, $\frac{1}{-\sin x}du = dx$

$= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$

$= \int \frac{\cancel{\sin x}}{u}\cdot\frac{1}{-\cancel{\sin x}}\,du$ $\quad dz = -\sin x\,dx$, $\frac{dz}{-\sin x} = dx$

$= \int \frac{1}{u}\cdot\frac{1}{-1}\,du$

$= -\int \frac{1}{u}\,du$

$= -\ln(u)+C$

$= -\ln(|\cos x|)+C$

l) $\int \coth x\,dx$ $\quad u = \sinh x$, $du = \cosh x\,dx$, $\frac{1}{\cosh x}du = dx$

$\int \frac{\cosh x}{\sinh x}\,dx$

$\int \frac{1}{u}\cdot\frac{\cosh x}{\cosh x}\,du$

$\int \frac{1}{u}\,du$

$\ln(|u|)+c$

$\ln(|\sinh|)+c$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 2

Computational and Data Science BSc
FS 2023

Analysis und Lineare Algebra 2

Lernziele/Kompetenzen

- Sie kennen die Begriffe *Funktion* in *mehreren Variablen*, *Level-Menge*, *Level-Linie*, *Level-Fläche*, *Skalarfeld*, *Vektorfeld* und *homogenes Vektorfeld* sowie ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können die *natürliche Definitionsmenge* einer *Funktion* in *mehreren Variablen* bestimmen.
- Sie können *Level-Linien* und *Level-Flächen* von *Funktionen* in zwei bzw. drei *Variablen* berechnen, skizzieren und beschreiben.
- Sie können die Python/Numpy-Befehle `meshgrid`, `surf`, `pcolor` und `contour` anwenden, um eine *Funktion* in zwei *Variablen* zu visualisieren.

1. Aussagen über reellwertige Funktionen in mehreren reellen Variablen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *mehrdimensionale Analysis* basiert auf der *eindimensionalen Analysis* und der *Vektorgeometrie*.	○	○
b) *Reellwertige Funktionen* in mehreren *reellen Variablen* werden, vor allem in der Physik, auch *Skalarfelder* genannt.	○	○
c) Für $n > 1$ ist eine *Funktion* des Typs $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ niemals *injektiv*.	○	○
d) Für $n > 1$ ist eine *Funktion* des Typs $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ niemals *surjektiv*.	○	○
e) Jede *Ebene* in 3D ist der *Graph* einer *Funktion* in zwei *reellen Variablen*.	○	○
f) Jede *Sphäre* in 3D ist der *Graph* einer *Funktion* in zwei *reellen Variablen*.	○	○

2. Natürliche Definitionsmenge von Funktionen in zwei Variablen

Bestimmen und skizzieren Sie für die gegebene *Funktion* jeweils die *natürliche Definitionsmenge*.

a) $f(x; y) = \sqrt{y - 2x}$ **b)** $f(x; y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ **c)** $f(x; y) = \dfrac{\sqrt{x + y}}{x - y}$

3. Funktionsgraphen und Level-Linien mit Python/Numpy

Visualisieren Sie jeweils die *Funktion* in zwei *Variablen* mit Hilfe von Python/Numpy.

a) $f(x; y) = \dfrac{x}{2}$

b) $f(x; y) = \dfrac{y}{2}$

c) $f(x; y) = \dfrac{x + y}{2}$

d) $f(x; y) = \dfrac{x \cdot y}{4}$

e) $f(x; y) = \dfrac{x^2 + y^2}{2}$

f) $f(x; y) = \dfrac{6 \cdot \sin(x \cdot y)}{1 + x^2 + y^2}$

4. Aussagen über eine Funktion

Betrachten Sie die *Funktion*

$$f(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \qquad (1)$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $f(3; 0; 4) = 5$.	○	○
b) f ist eine *Funktion* in drei *Variablen*.	○	○
c) Die x-Achse ist eine *Level-Linie* von f.	○	○
d) Die *Einheitssphäre* in 3D ist der *Graph* von f.	○	○
e) Die *Einheitssphäre* in 3D ist eine *Level-Menge* von f.	○	○
f) Die *Sphäre* um den *Ursprung* mit *Radius* 7 ist eine *Level-Fläche* von f.	○	○

5. Level-Linien berechnen und skizzieren

Berechnen und skizzieren Sie für die gegebene *Funktion* jeweils die *Level-Linien*.

a) $f(x; y) = 3x + 6y$ **b)** $f(x; y) = \sqrt{y - x^2}$ **c)** $f(x; y) = x^2 + y^2 - 2y$

6. Level-Flächen berechnen

Berechnen und beschreiben Sie für die gegebene *Funktion* jeweils die *Level-Flächen*.

a) $f(x; y; z) = x + 2y + 3z$ **b)** $f(x; y; z) = x^2 + y^2 + z^2$ **c)** $f(x; y; z) = x^2 + y^2$