FH GR **Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

Übungsblatt 12 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Divergenz, Rotation, quellenfrei, wirbelfrei, konservativ, Potential-/Gradientenfeld und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Rotation und Divergenz von Vektorfeldern bestimmen.
- Sie können bestimmen, ob ein Vektorfeld quellen- bzw. wirbelfrei ist.

---

1. Divergenz von Vektorfeldern
Bestimmen Sie die Divergenz der folgenden Vektorfelder.

a) $\vec{F}(x,y) = \begin{pmatrix} x^3+1 \\ xy^2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x \cdot e^{-y} \\ y \cdot e^{-x} \end{pmatrix}$

c) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x^3z^2 \\ x^2-z^2 \\ xyz \end{pmatrix}$ d) $\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy-x^2z \\ 2yz^2 \\ x^2y-yz \end{pmatrix}$

a)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(x^3+1) + \frac{\partial}{\partial y}(xy^2) = 3x^2 + 2xy$$

b)

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \mathrm{e}^{-y}) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \mathrm{e}^{-x}) = \mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-x}$$

c)

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}(2x^3z^2) + \frac{\partial}{\partial y}(x^2-z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) =$$

$$= 6x^2z^2 + 0 + xy = 6x^2z^2 + xy$$

d)

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial}{\partial x}(xy - x^2z) + \frac{\partial}{\partial y}(2yz^2) + \frac{\partial}{\partial z}(x^2y + yz) =$$

$$= y - 2xz + 2z^2 + y =$$

$$= 2y - 2xz + 2z^2$$

2. Rotation von Vektorfeldern
Bestimmen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder.

a) $\vec{F}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ b) $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} xy - z^2 \\ 2xyz \\ x^2z - y^2z \end{pmatrix}$

c) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z)$

a)

$$F_x = y\,(x^2 + y^2)^{-1/2}; \qquad F_y = -x\,(x^2 + y^2)^{-1/2}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-x\,(x^2 + y^2)^{-1/2}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[y\,(x^2 + y^2)^{-1/2}\right] =$$

$$= -(x^2 + y^2)^{-1/2} + x^2(x^2 + y^2)^{-3/2} - (x^2 + y^2)^{-1/2} + y^2(x^2 + y^2)^{-3/2} =$$

$$= -2\,(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2)\,(x^2 + y^2)^{-3/2} =$$

$$= -2\,(x^2 + y^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2)^{-1/2} = -(x^2 + y^2)^{-1/2} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Somit: $\operatorname{rot}\vec{F} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\,\vec{e}_z = -\frac{1}{r}\,\vec{e}_z \qquad (\text{mit } r = \sqrt{x^2 + y^2})$

b)

$$F_x = xy - z^2; \qquad F_y = 2xyz; \qquad F_z = x^2z - y^2z$$

$$\left.\begin{aligned}
(\operatorname{rot}\vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = -2yz - 2xy \\
(\operatorname{rot}\vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = -2z - 2xz \\
(\operatorname{rot}\vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2yz - x
\end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \operatorname{rot}\vec{F} = \begin{pmatrix} -2y\,(x + z) \\ -2z\,(x + 1) \\ 2yz - x \end{pmatrix}$$

c)

$$F_x = x\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2};\; F_y = y\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2};\; F_z = z\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$

$$(\operatorname{rot}\vec{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(z\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(y\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}\right) =$$

$$= z\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\cdot 2y - y\left(-\frac{1}{2}\right)(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}\cdot 2z =$$

$$= -yz\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} + yz\,(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} = 0$$

Analog: $(\text{rot}\,\vec{F})_y = (\text{rot}\,\vec{F})_z = 0$ (alle Ableitungen mit der *Kettenregel*)

Somit: $\text{rot}\,\vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ ist *wirbelfrei*.

3. Potentialfeld bestimmen

Zeigen Sie, dass das räumliche Vektorfeld $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2xz + y^2 \\ 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$ wirbelfrei und somit als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(x,y,z)$ darstellbar ist. Bestimmen Sie dieses Potentialfeld.

$F_x = 2xz + y^2; \quad F_y = 2xy; \quad F_z = x^2$

$$\left.\begin{aligned} (\text{rot}\,\vec{F})_x &= \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0 - 0 = 0 \\ (\text{rot}\,\vec{F})_y &= \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 2x - 2x = 0 \\ (\text{rot}\,\vec{F})_z &= \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 2y - 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{rot}\,\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\vec{F}$ ist somit *wirbelfrei*. Die Vektorkomponenten von $\vec{F}$ sind demnach die partiellen Ableitungen 1. Ordnung eines (noch unbekannten) Skalarfeldes $\phi = \phi(x; y; z)$:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_x = 2xz + y^2; \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = F_y = 2xy; \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = F_z = x^2$$

$$\phi = \int \frac{\partial \phi}{\partial x}\,dx = \int (2xz + y^2)\,dx = x^2 z + xy^2 + K(y; z)$$

Die Integrationskonstante K *kann* noch von y und z abhängen: $K = K(y; z)$. Sie wird aus den bekannten partiellen Ableitungen von ϕ nach y bzw. z wie folgt bestimmt:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2 z + xy^2 + K(y; z)) = 2xy + \frac{\partial K}{\partial y} = 2xy \Rightarrow \frac{\partial K}{\partial y} = 0 \Rightarrow$$

K ist *unabhängig* von y, *kann* aber noch von z abhängen: $K = K_1(z)$

Zwischenergebnis: $\phi = x^2 z + xy^2 + K_1(z)$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2 z + xy^2 + K_1(z)) = x^2 + K_1'(z) = x^2 \Rightarrow K_1'(z) = 0 \Rightarrow$$

$K_1(z) = \text{const.} = C$

Lösung: $\phi = \phi(x; y; z) = x^2 z + xy^2 + C$ (mit $C \in \mathbb{R}$)

4. Aussagen über ein Vektorfeld
Gegeben sei das Vektorfeld
$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ xy \end{pmatrix}$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) $\vec{v}$ ist konservativ.		X
b) $\vec{v}$ ist quellenfrei.	X	
c) $\vec{v}$ ist wirbelfrei.		X
d) Es gibt ein Skalarfeld ϕ, so dass $\vec{v} = \nabla\phi$.		X

5. Laplace-Operator
Welche Funktion erhält man, wenn man den Laplace-Operator auf das Skalarfeld $\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2$ anwendet?

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 4x(x^2 + y^2 + z^2); \qquad \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = 4(3x^2 + y^2 + z^2) \qquad (\textit{Produkt- } \text{und } \textit{Kettenregel})$$

$$\text{Analog:} \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 4(x^2 + 3y^2 + z^2); \quad \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 4(x^2 + y^2 + 3z^2)$$

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 4(3x^2 + y^2 + z^2) + 4(x^2 + 3y^2 + z^2) + 4(x^2 + y^2 + 3z^2) =$$

$$= 4(5x^2 + 5y^2 + 5z^2) = 20\underbrace{(x^2 + y^2 + z^2)}_{r^2} = 20r^2$$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 12

Computational and Data Science BSc
FS 2022

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über uneigentliche Integrale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Alle *uneigentlichen Integrale* müssen als *Grenzwerte* berechnet werden.	●	○
b) Alle *uneigentlichen Integrale* erkennt man daran, dass mindestens eine der *Grenzen* $-\infty$ oder ∞ ist.	○	●
c) Falls das *uneigentliche Integral* $I = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, dann gilt in jedem Fall $I = \lim_{s\to\infty} \int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x$.	●	○
d) Falls der *Grenzwert* $I = \lim_{s\to\infty} \int_0^s f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergiert*, dann gilt in jedem Fall $I = \int_0^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.	●	○
e) Falls das *uneigentliche Integral* $I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert, dann gilt in jedem Fall $I = \lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s f(x)\,\mathrm{d}x$.	●	○
f) Falls der *Grenzwert* $I = \lim_{s\to\infty} \int_{-s}^s f(x)\,\mathrm{d}x$ *konvergiert*, dann gilt in jedem Fall $I = \int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$.	○	●

2. Uneigentliche Standard-Integrale

Wir berechnen, sofern möglich, die folgenden, *uneigentlichen Integrale*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty} \int_0^s \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty} \Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]\Big|_0^s = \lim_{s\to\infty} \Big(-\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^{-0}\Big) = 0 + 1 = \underline{\underline{1.}} \quad (1)$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^\infty 2^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty} \int_0^s 2^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot \lim_{s\to\infty} \Big[2^{-x}\Big]\Big|_0^s = -\frac{1}{\ln(2)} \cdot \lim_{s\to\infty} \Big(2^{-s} - 2^{-0}\Big)$$

$$= -\frac{1}{\ln(2)} \cdot (0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{\ln(2)}}}\,. \quad (2)$$

c) Wir erhalten

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty} \int_1^s \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty} \ln\Big(\frac{s}{1}\Big) = \lim_{s\to\infty} \ln(s) = \infty. \quad (3)$$

Dieses *uneigentliche Integral* ist $\underline{\underline{\textit{divergent}}}$ und existiert daher nicht.

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^s = \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{1}\right) = (-0+1) = \underline{\underline{1.}} \quad (4)$$

e) Wir erhalten

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\ln\left(\frac{1}{s}\right) = \infty. \quad (5)$$

Dieses *uneigentliche Integral* ist *divergent* und existiert daher nicht.

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\left[2\cdot\sqrt{x}\right]\Big|_s^1 = 2\cdot\lim_{s\to 0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{s}\right) = 2\cdot(1-0)$$
$$= \underline{\underline{2.}} \quad (6)$$

3. Uneigentliche Standard-Integrale mit Python/Sympy

Wir berechnen die *uneigentlichen Integrale* aus Aufgabe 2 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
x=sp.symbols('x');
# Berechnungen:
I=sp.integrate(...,(x,...,...));
# Ausgabe:
dp.display(I);
```

a) Wir betrachten das *uneigentliche Integral*

$$I = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \quad (7)$$

Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
I=sp.integrate(sp.exp(-x),(x,0,sp.oo));
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = 1.}} \quad (8)$$

b) Wir betrachten das *uneigentliche Integral*

$$I = \int_0^\infty 2^{-x}\,\mathrm{d}x. \quad (9)$$

Wir implementieren den folgenden Code.

```
# Berechnungen:
I=sp.integrate(2**(-x),(x,0,sp.oo));
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = \frac{1}{\ln(2)}}}\,. \tag{10}$$

c) Wir betrachten das *uneigentliche Integral*

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Wir implementieren den folgenden Code.

```
# Berechnungen:
I=sp.integrate(1/x,(x,1,sp.oo));
```

Gemäss Ausgabe ist das *uneigentliche Integral* $\underline{\underline{\textit{divergent}}}$ und existiert daher nicht.

d) Wir betrachten das *uneigentliche Integral*

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Wir implementieren den folgenden Code.

```
# Berechnungen:
I=sp.integrate(1/x**2,(x,1,sp.oo));
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = 1.}} \tag{13}$$

e) Wir betrachten das *uneigentliche Integral*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Wir implementieren den folgenden Code.

```
# Berechnungen:
I=sp.integrate(1/x,(x,0,1));
```

Gemäss Ausgabe ist das *uneigentliche Integral* $\underline{\underline{\textit{divergent}}}$ und existiert daher nicht.

f) Wir betrachten das *uneigentliche Integral*

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Wir implementieren den folgenden Code.

```
# Berechnungen:
I=sp.integrate(1/sp.sqrt(x),(x,0,1));
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = 2.}} \tag{16}$$

4. Aussagen über zwei Integrale

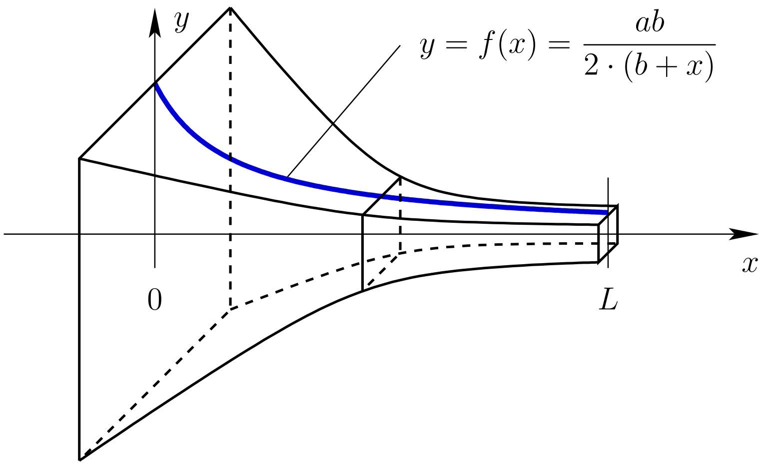
Wir betrachten die *Integrale*

$$I = \int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad J = \int_a^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{17}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Integrale* I und J sind *uneigentliche Integrale*.	●	○
b) Für $a = 1$ gilt $I = 1$.	●	○
c) Für $a > 0$ ist J *konvergent*.	○	●
d) Für $a \leq 0$ sind I und J beide *divergent*.	●	○
e) Für jedes $a > 0$ gilt $I > J$.	○	●
f) Es gibt ein $a > 1$, so dass $I = 10$.	○	●

5. Volumen eines Schalltrichters

Wir betrachten einen Schalltrichter, welcher an jeder Position entlang seiner *Länge* eine *quadratische Querschnittsfläche* hat. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



a) Die *Querschnittsfläche* des Schalltrichters ist

$$A(x) = \big(2\cdot f(x)\big)^2 = \left(2\cdot\frac{ab}{2\cdot(b+x)}\right)^2 = \frac{a^2b^2}{(x+b)^2}\,. \tag{18}$$

Durch *Integration* der *Querschnittsfläche* entlang x können wir das *Volumen* des Schalltrichters in Abhängigkeit der Parameter $a, b > 0$ und der *Länge* $L > 0$. Wir erhalten

$$\underline{\underline{V}} = \int_0^L A(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^L \frac{a^2b^2}{(x+b)^2}\,\mathrm{d}x = a^2b^2\int_0^L \frac{1}{(x+b)^2}\,\mathrm{d}x = a^2b^2\cdot(-1)\cdot\left[\frac{1}{x+b}\right]\Bigg|_0^L$$

$$= -a^2b^2 \cdot \left(\frac{1}{L+b} - \frac{1}{0+b}\right) = a^2b^2 \cdot \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{L+b}\right) = a^2b^2 \cdot \frac{L+b-b}{b \cdot (L+b)} = a^2b^2 \cdot \frac{L}{L+b}$$

$$= a^2b^2 \cdot \frac{1}{\frac{L+b}{L}} = \underline{\underline{\frac{a^2b}{1+\frac{b}{L}}}} \,. \tag{19}$$

b) Wenn die Parameter $a, b > 0$ fix gegeben sind, die *Länge* $L > 0$ jedoch beliebig gewählt werden darf, dann hat das *Volumen* des Schalltrichters einen *Maximalwert* von

$$\underline{\underline{V_{\max}}} = \lim_{L\to\infty} V = \lim_{L\to\infty} \frac{a^2b}{1+\frac{b}{L}} = \frac{a^2b}{1+0} = \underline{\underline{a^2b.}} \tag{20}$$

6. Uneigentliche Integrale [U, II]

Wir berechnen, sofern möglich, die folgenden, *uneigentlichen Integrale.*

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left[\mathrm{e}^x\right]\Big|_{-r}^{0} + \lim_{s\to\infty} \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_{0}^{s} = \lim_{r\to\infty} \left(\mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^{-r}\right) + \lim_{s\to\infty} \left(-\mathrm{e}^{-s} + \mathrm{e}^0\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-r}\right) + \lim_{s\to\infty} \left(1 - \mathrm{e}^{-s}\right) = 1 - 0 + 1 - 0 = \underline{\underline{2.}} \tag{21}$$

b) Wir erhalten

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_{-r}^{0} + \lim_{s\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_{0}^{s}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(? + \frac{1}{r}\right) + \lim_{s\to\infty} \left(-\frac{1}{s} + ?\right) = ? \tag{22}$$

Dieses *uneigentliche Integral* ist $\underline{\underline{\textit{divergent}}}$ und existiert daher nicht.

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left[\arctan(x)\right]\Big|_{-r}^{0} + \lim_{s\to\infty} \left[\arctan(x)\right]\Big|_{0}^{s}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \Big(\arctan(0) - \arctan(-r)\Big) + \lim_{s\to\infty} \Big(\arctan(s) - \arctan(0)\Big)$$

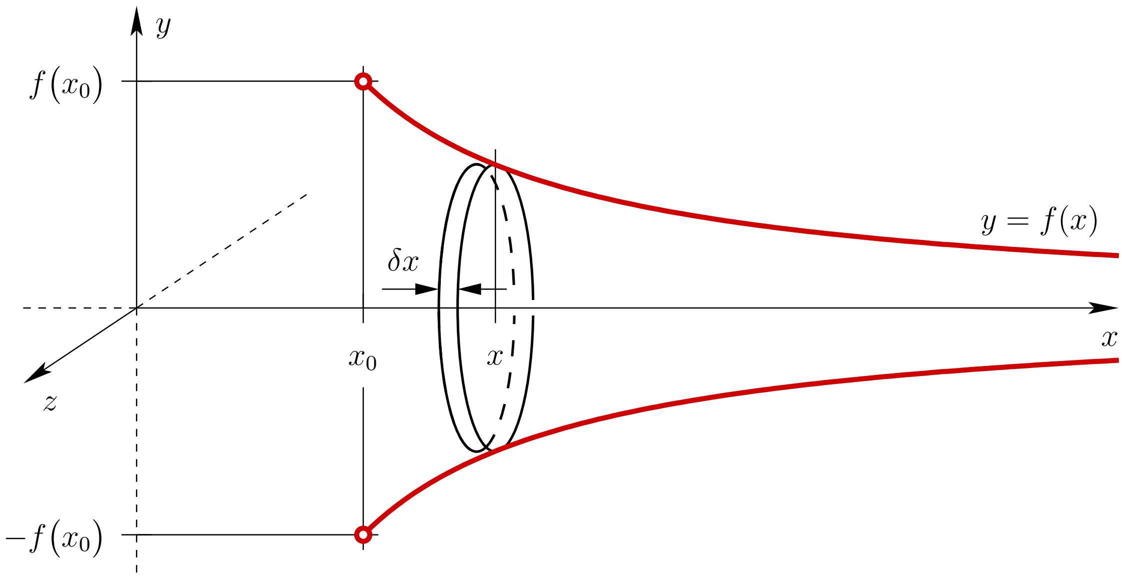
$$= \lim_{r\to\infty} \Big(0 + \arctan(r)\Big) + \lim_{s\to\infty} \Big(\arctan(s) - 0\Big) = 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \underline{\underline{\pi.}} \tag{23}$$

7. Endliches Volumen bei divergentem Längsschnitt

Wir suchen einen Körper K mit endlichem *Volumen* V aber unendlich grosser *Längsschnittsfläche* A. Dazu betrachten wir einen *Rotationskörper*, welcher aus der Rotation des *Graphen* einer *stetigen Funktion* des Typs

$$f : \left[x_0, \infty\right[\to \mathbb{R}_0^+ \tag{24}$$

um die x-Achse entsteht. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Das *Volumen* V und die *Längsschnittsfläche* längs der x-Achse A_x (Schnittfläche des Körpers mit einer Ebene, welche die x-Achse enthält) lassen sich in diesem Fall durch je ein *uneigentliches Integral* berechnen. Es gilt

$$A_x = 2 \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad V = \pi \int_{x_0}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{25}$$

Um den gesuchten Körper K zu finden, müssen wir also ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und eine *Funktion* f des Typs (24) finden, so dass das erste *Integral* in (25) *divergiert*, während das Zweite *konvergiert*. Wir wählen $x_0 = 1$ und die *Funktion*

$$\begin{aligned} f : [1, \infty[&\to \mathbb{R}^+ \\ x \mapsto f(x) &:= \frac{1}{x}\,. \end{aligned} \tag{26}$$

In der Tat erhalten wir damit sowohl die *divergente Längsschnittsfläche* als auch das endliche *Volumen*, denn es gilt

$$\underline{\underline{A_x}} = 2 \int_{x_0}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 2 \int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \lim_{s\to\infty} \int_1^s \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \lim_{s\to\infty} \ln\left(\frac{s}{1}\right) = \underline{\underline{\infty}} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{V}} &= \pi \int_{x_0}^{\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \lim_{s\to\infty} \int_1^s \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \lim_{s\to\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_1^s \\ &= \pi \cdot \lim_{s\to\infty} \left(-\frac{1}{s} + \frac{1}{1}\right) = \pi \cdot (-0 + 1) = \underline{\underline{\pi.}} \end{aligned} \tag{28}$$

8. Aussagen über zwei Integrale

Wir betrachten die *Integrale*

$$I = \int_0^a \big(1 + \tan^2(x)\big)\,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad J = \int_0^{2\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{29}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Integrale* I und J sind *uneigentliche Integrale*.	○	●
b) Es gilt $J = -\cos^2(2\pi) + \cos^2(0)$.	○	●
c) Es gilt $J = 0$.	○	●
d) Für $-\pi/2 < a < 0$ gilt $I > 0$.	○	●
e) Für $0 < a < \pi/2$ gilt $I > a$.	●	○
f) Es gilt $J = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$.	●	○