Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 6

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Schwerpunkt, Flächenschwerpunkt, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können mit Hilfe der Integration den Schwerpunkt homogener Flächen und von Rotationskörpern berechnen.
- Sie können kartesische in Polarkoordinaten umwandeln und umgekehrt.

1. Schwerpunkt Rotationskörper

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch Drehung der Funktion $f(x) = \ln x, 1 \leq x \leq e$ um die x-Achse entsteht.

Zuerst Berechnung des Volumens des Rotationskörpers (Integral durch 2malige partielle Integration lösen – Integrand ist $1 \cdot (\ln x)^2$):

$$V_x = \pi \int_1^e (\ln x)^2 \, dx = \pi \int_1^e 1 \cdot (\ln x)^2 \, dx$$

$$= \pi \left[x \cdot (\ln x)^2 \right]_1^e - \pi \int_1^e \cancel{x} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

$$= \pi \cdot e - \pi \int_1^e 2 \ln x \, dx$$

$$= \pi \cdot e - \pi \left[2x \cdot \ln x \right]_1^e + \pi \int_1^e 2x \cdot \frac{1}{x} \, dx$$

$$= \pi \cdot e - 2\pi e + \pi \int_1^e 2 \, dx = -\pi e + \pi \left[2x \right]_1^e$$

$$= -\pi e + 2\pi e - 2\pi = \pi (e - 2)$$

Der Schwerpunkt liegt auf der x-Achse, d. h. $y_s = 0$. Integral durch 2malige partielle Integration lösen.

$$x_S = \frac{\pi}{V_x} \int_1^e x \cdot (\ln x)^2 \, dx$$

$$= \frac{\pi}{\pi(e-2)} \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot (\ln x)^2 \right]_1^e - \frac{1}{e-2} \int_1^e \frac{1}{\cancel{2}} x^{\cancel{2}} \cdot \cancel{2} \ln x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

$$= \frac{1}{e-2} \cdot \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{e-2} \int_1^e x \cdot \ln x \, dx$$

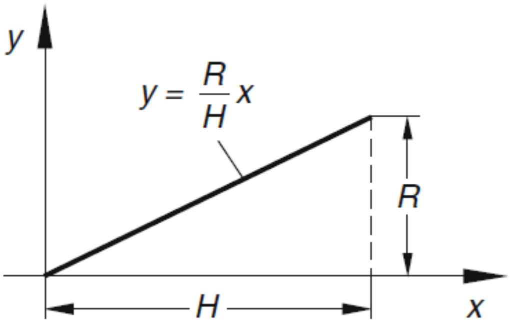
$$= \frac{e^2}{2(e-2)} - \frac{1}{e-2} \left[\frac{1}{2} x^2 \cdot \ln x \right]_1^e + \frac{1}{e-2} \int_1^e \frac{1}{2} x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

$$= \frac{e^2}{2(e-2)} - \frac{e^2}{2(e-2)} + \frac{1}{e-2} \int_1^e \frac{1}{2} x \, dx$$

$$= \frac{1}{e-2} \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_1^e = \frac{1}{e-2} \left(\frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} \right)$$

2. Kreiskegel
Gegeben sei ein homogener gerader Kreiskegel mit Radius R, Höhe H und Dichte ρ. Bestimmen Sie das Volumen des Kreiskegels und seinen Schwerpunkt.

Wir legen den Kegel so ins xy-Koordinatensystem, dass die x-Achse der Symmetrieachse des Kreiskegels entspricht, seine Spitze im Ursprung des Koordinatensystems ist und der Kegel durch Rotation der Geraden $y = \frac{R}{H}x$ um die x-Achse entsteht.



Volumen (wir nutzen die Formel für das Volumen eines Rotationskörpers):
$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} [\frac{1}{3}x^3]_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Der **Schwerpunkt** liegt aus Symmetriegründen auf der x-Achse ($y_s = z_s = 0$) und wir nutzen die Formel für den Schwerpunkt eines Rotationskörpers:
$x_s = \frac{\pi}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \int_0^H x \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{3}{R^2 H} \int_0^H x \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{3}{R^2 H} \cdot \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx$
$= \frac{3}{H^3} [\frac{1}{4}x^4]_0^H = \frac{3}{H^3}\frac{1}{4}H^4 = \frac{3}{4}H$

3. Kartesische in Polarkoordinaten
Wie lauten die Polarkoordinaten der Punkte $P_1(4;-12)$, $P_2(-3;-3)$ und $P_3(5;-4)$?
Hinweis: Fertigen Sie eine Lageskizze an.

$P_1(4;-12)$ → im 4. Quadrant

$r = \sqrt{4^2+(-12)^2} = \sqrt{160}$

$\varphi = \arctan\frac{-12}{4} + 2\pi = 1{,}602\,\pi$

$P_2(-3;-3)$ → im 3. Quadrant

$r = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

$\varphi = \arctan\frac{-3}{-3} + \pi = \frac{5}{4}\pi$

$P_3(5;-4)$ → 4. Quadrant

$r = \sqrt{5^2+(-4)^2} = \sqrt{41}$

$\varphi = \arctan\frac{-4}{5} + 2\pi = 1{,}79\pi$

4. Polar- in kartesische Koordinaten
Von einem Punkt P sind die Polarkoordinaten r und φ bekannt. Wie lauten seine kartesischen Koordinaten?
a) $r = 10, \varphi = 35°$ b) $r = 3{,}56, \varphi = 256{,}5°$ c) $r = 9, \varphi = 120°$

a) $x = r\cos\varphi = 10\cdot\cos 35° = 8{,}192$

$y = r\sin\varphi = 10\cdot\sin 35° = 5{,}736$

b) $x = r\cos\varphi = 3{,}56\cdot\cos 256{,}5° = -0{,}831$

$y = r\sin\varphi = 3{,}56\cdot\sin 256{,}5° = -3{,}462$

c) $x = r\cos\varphi = 9\cdot\cos 120° = -4{,}5$

$y = r\sin\varphi = 9\cdot\sin 120° = 7{,}794$

5. Funktionen in Polarkoordinaten umwandeln → Papula 1 S. 312 A8

a) Geben Sie die Gleichung für einen Kreis mit Radius 5 um den Ursprung in 2D in kartesischen und Polarkoordinaten an.

b) Gegeben ist die in Polarkoordinaten dargestellte Funktion der impliziten Funktionsgleichung $(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0$.
(i) Wie lautet die Funktionsgleichung in Polarkoordinaten?
(ii) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

a)
Kreisgleichung um den Ursprung in kartesischen Koordinaten, allgemein:
$x^2 + y^2 = r^2$ mit r: Radius des Kreises
Hier: $r = 5$ → $x^2 + y^2 = 25$

Umwandlung in Polarkoordinaten:
mit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ ergibt sich:
$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 25$
$r^2\cos\varphi^2 + r^2\sin\varphi^2 = 25$
$r^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = 25$
$r^2 = 25$
$r = 5$ – dies stellt die Kreisgleichung in Polarkoordinaten dar.

b), (i)

$x = r\cos\varphi \qquad y = r\sin\varphi$

$(x^2+y^2)^2 - 2xy = 0$

x und y ersetzen:

$(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 - 2r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi = 0$

$[r^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{=1}]^2 - 2r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi = 0$

$r^4 - 2r^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi = r^2(r^2 - 2\cos\varphi\cdot\sin\varphi) = 0$

→ $r = 0$ ist keine Option

↳ $r = \sqrt{\underbrace{2\cos\varphi\cdot\sin\varphi}_{=\sin(2\varphi)}}$ mit Additionstheorem

$r = \sqrt{\sin(2\varphi)}$

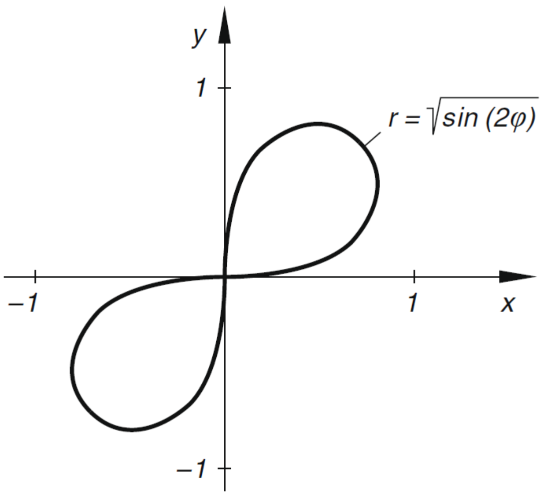
(ii)
Wertetabelle:

φ	r
0	0
$\frac{\pi}{12}$	0,707
$\frac{\pi}{6}$	0,931
$\frac{\pi}{8}$	0,841
$\frac{\pi}{4}$	1

$r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi \cdot \cos\varphi \geq 0$ (beide Faktoren müssen daher *gleiches* Vorzeichen haben)

Quadrant	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+

Somit gibt es nur Punkte im 1. und 3. Quadrant



6. Funktionen in kartesische Koordinaten umwandeln
Wandeln Sie die folgenden Funktionsgleichungen in kartesische Koordinaten um.
a) $r = \frac{a}{b\cos\varphi + c\sin\varphi}, a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$
b) $r^2 = 2e^2\cos(2\varphi)$

Allgemein: $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r = \sqrt{x^2+y^2}$.
a)
$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung:
$\sqrt{x^2+y^2} = \frac{a}{b\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + c\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{a}{\frac{bx+cy}{\sqrt{x^2+y^2}}} = \frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{bx+cy}$

Nun auf beiden Seiten mit $(bx+cy)$ multiplizieren und durch $\sqrt{x^2+y^2}$ teilen ergibt:
$bx + cy - a = 0.$

b)
Additionstheorem nutzen:
$\cos(2\varphi) = (\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2$
$\rightarrow r^2 = 2e^2\cos(2\varphi) = 2e^2((\cos\varphi)^2 - (\sin\varphi)^2)$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = 2e^2\left(\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 - \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2\right)$$
$$x^2 + y^2 = 2e^2\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

Mit $x^2 + y^2$ multiplizieren und auf eine Seite bringen:
$(x^2+y^2)^2 - 2e^2(x^2-y^2) = 0$