Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 4

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen den Begriff uneigentliches Integral und dessen wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Existenz eines uneigentlichen Integrals beurteilen und gegebenenfalls seinen Wert berechnen.

1. Aussagen über uneigentliche Integrale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Alle uneigentlichen Integrale müssen über eine Grenzwertbildung bestimmt werden.	X	
b) Alle uneigentlichen Integrale erkennt man daran, dass mindestens eine der Grenzen $-\infty$ oder ∞ ist.		X
c) Falls das uneigentliche Integral $I = \int_0^\infty f(x)dx$ existiert, dann gilt: $I = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)dx$.	X	
d) Falls der Grenzwert $I = \lim_{t\to\infty} \int_0^t f(x)dx$ konvergiert, dann gilt: $I = \int_0^\infty f(x)dx$.	X	

2. Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie, sofern möglich, den Wert der folgenden Integrale.

a) $\int_0^\infty e^{-x}dx$ b) $\int_0^\infty 2^{-x}dx$ c) $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$

d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ e) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

g) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx$ h) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2}dx$ i) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

a)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_0^s \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_0^s = \lim_{s\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-0}\right) = 0+1 = \underline{\underline{1.}}$$

b)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^\infty 2^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_0^s 2^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln(2)}\cdot\lim_{s\to\infty}\left[2^{-x}\right]\Big|_0^s = -\frac{1}{\ln(2)}\cdot\lim_{s\to\infty}\left(2^{-s}-2^{-0}\right)$$

$$= -\frac{1}{\ln(2)}\cdot(0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{\ln(2)}}}\,.$$

c)

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\ln\left(\frac{s}{1}\right) = \lim_{s\to\infty}\ln(s) = \infty.$$

Dieses *uneigentliche Integral* ist $\underline{\underline{\textit{divergent}}}$ und existiert daher nicht.

d)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^s = \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{1}\right) = (-0+1) = \underline{\underline{1.}}$$

e)

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\ln\left(\frac{1}{s}\right) = \infty.$$

Dieses *uneigentliche Integral* ist $\underline{\underline{\textit{divergent}}}$ und existiert daher nicht.

f)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\left[2\cdot\sqrt{x}\right]\Big|_s^1 = 2\cdot\lim_{s\to 0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{s}\right) = 2\cdot(1-0)$$

$$= \underline{\underline{2.}}$$

g)

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^0 \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty}\int_0^s \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^0 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty}\int_0^s \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left[\mathrm{e}^{x}\right]\Big|_{-r}^0 + \lim_{s\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_0^s = \lim_{r\to\infty}\left(\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-r}\right) + \lim_{s\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^0\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-r}\right) + \lim_{s\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-s}\right) = 1-0+1-0 = \underline{\underline{2.}}$$

h)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{b\to 0}\int_{-1}^{b}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{c\to 0}\int_c^{1}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{d\to\infty}\int_1^{d}\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}[-\frac{1}{x}]_a^{-1} + \lim_{b\to 0}[-\frac{1}{x}]_{-1}^{b} + \lim_{c\to 0}[-\frac{1}{x}]_c^{1} + \lim_{d\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^{d}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right) + \lim_{b\to 0}\left(-\frac{1}{b}-1\right) + \lim_{c\to 0}\left(-1+\frac{1}{c}\right) + \lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{d}+1\right)$$

Grenzwert existiert nicht, da $\lim_{b\to 0}\left(-\frac{1}{b}\right)\to-\infty$ und $\lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{d}\right)\to\infty$

i)

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{I}} &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty}\int_{0}^{s} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{r\to\infty}\Big[\arctan(x)\Big]\Big|_{-r}^{0} + \lim_{s\to\infty}\Big[\arctan(x)\Big]\Big|_{0}^{s} \\
&= \lim_{r\to\infty}\Big(\arctan(0)-\arctan(-r)\Big) + \lim_{s\to\infty}\Big(\arctan(s)-\arctan(0)\Big) \\
&= \lim_{r\to\infty}\Big(0+\arctan(r)\Big) + \lim_{s\to\infty}\Big(\arctan(s)-0\Big) = 0+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-0 = \underline{\underline{\pi.}}
\end{aligned}
$$

3. Uneigentliche Integrale mit Python/Sympy
Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale aus Aufgabe 2 mit Python/Sympy.

```
# Python initialisieren
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
sp.init_printing();
# Symbole
x=sp.symbols('x');
# Parameter
f=sp.E**(-x);
# Berechnungen
F=sp.integrate(f,(x,0,sp.oo));
# Ausgabe
dp.display(f);
dp.display(F);
```

Aufgaben b) – i) analog.

4. Aussagen über 2 Integrale
Gegeben seien die beiden Integrale
$I = \int_a^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ und $J = \int_a^\infty \frac{1}{x}\,dx$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Integrale I und J sind uneigentliche Integrale.	X	
b) Für $a = 1$ gilt $I = 1$.	X	
c) Für $a > 0$ ist J konvergent.		X
d) Für $a \leq 0$ sind I und J beide divergent.	X	
e) Für jedes $a > 0$ gilt: $I > J$.		X
f) Es gibt ein $a > 1$, so dass gilt: $I = 10$.		X

5. Aussagen über 2 Integrale

Gegeben seien die beiden Integrale

$I = \int_0^a (1 + (\tan x)^2) dx$ und $J = \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Integrale I und J sind uneigentliche Integrale.		X
b) Es gilt: $J = -\cos(2\pi)^2 + \cos 0^2$.		X
c) Es gilt: $J = 0$.		X
d) Für $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ gilt: $I > 0$.		X
e) Für $0 < a < \frac{\pi}{2}$ gilt: $I > 0$.	X	
f) Es gilt: $J = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 dx$.	X	