Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 3

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Exponentialform einer komplexen Zahl, Eulersche Formel, Potenzgleichungen und deren Eigenschaften.
- Sie können komplexe Zahlen in der arithmetischen, trigonometrischen und Exponentialform darstellen und von einer in die andere Form umwandeln.
- Sie können die Grundrechenarten für die komplexen Zahlen anwenden.
- Sie können komplexe Zahlen sowohl potenzieren als auch aus ihnen die Wurzel ziehen.

1. Aussagen über die Exponentialform

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede komplexe Zahl lässt sich in Exponentialform darstellen.	X	
b) Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in Exponentialform darstellen.		X
c) Der Term $2e^{i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.	X	
d) Der Term $2e^{-i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.	X	
e) Der Term $-2e^{-i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.		X

2. Konversion zwischen arithmetischer und Exponentialform

Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in Exponentialform bzw. in arithmetische Form um.

a) $4-4i$ b) $-\sqrt{3}+i$

c) $2e^{-i\pi/6}$ d) $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

a)

Umrechnung von arithmetischer in Exponentialform:

$$z = x + y\mathrm{i} \rightarrow r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi$$

mit $\sigma = 0$ für $x \geq 0$ und $\sigma = \pm 1$ für $x < 0$

(Wahl des Vorzeichens $\rightsquigarrow$ φ im Standardbereich $(-\pi, \pi]$)

$$r=\sqrt{4^2+4^2}=4\sqrt{2},\qquad \varphi=\arctan(-1)+\sigma\pi=-\pi/4+0$$

$$z=4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$$

b)

$$r=\sqrt{3+1}=2,\qquad \varphi=\arctan(-1/\sqrt{3})+\sigma\pi=-\pi/6+\pi=5\pi/6$$

$$z=2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}$$

(Korrektur des Winkels um $+\pi$ wegen $x=-\sqrt{3}<0$)

c)

Umrechnung in arithmetische Form:

$$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\to x+y\mathrm{i}$$

$$x=r\cos\varphi,\qquad y=r\sin\varphi$$

$$x=2\cos(-\pi/6)=\sqrt{3},\qquad y=2\sin(-\pi/6)=-1$$

$$z=\sqrt{3}-\mathrm{i}$$

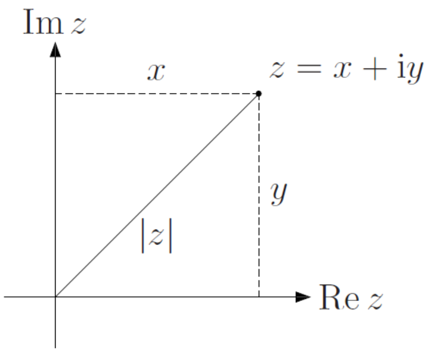
d)

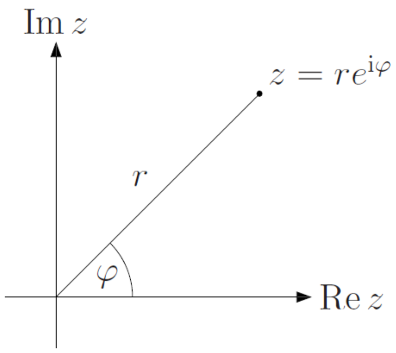
$$x=\sqrt{2}\,\cos(3\pi/4)=-1,\qquad y=\sqrt{2}\,\sin(3\pi/4)=1$$

$$z=-1+\mathrm{i}$$

3. Umwandlung komplexer Zahlen

Berechnen Sie $2e^{-i\pi/3}-\sqrt{3}+i$ und geben Sie das Ergebnis sowohl in arithmetischer als auch in Exponentialform an.





Umwandlung von $z_1=2e^{-i\pi/3}$ in arithmetische Form:

$$r\,\exp(\mathrm{i}\,\varphi)=r\cos\varphi\;+\;\mathrm{i}\,\sin\varphi$$

mit $r=2,\ \varphi=-\pi/3\quad\rightsquigarrow$

$$z_1=2\cos(-\pi/3)\;+\;\mathrm{i}\,2\sin(-\pi/3)=1\;-\;\sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Es ergibt sich für die Summe $z=x+iy=z_1-\sqrt{3}+i=1-\sqrt{3}+\left(1-\sqrt{3}\right)i$

Umwandlung in Exponentialform:

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}\left|1-\sqrt{3}\right| = \sqrt{6}-\sqrt{2} \\
\varphi &= \arctan(x/y) + \sigma\pi = \arctan(1) - \pi = -3\pi/4 \qquad (\sigma = -1)
\end{aligned}
$$

Standardbereich des Arkustangens $= [-\pi/2, \pi/2] \quad \rightsquigarrow$
Korrektur um $\sigma\pi$ je nach Lage von $x + iy$ in den vier Quadranten

$$
\sigma = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ -1, & x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}
$$

$x = y = 1 - \sqrt{3} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma = -1$
$z = (\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{-i3\pi/4}$

4. Potenzen
Bestimmen Sie die Potenzen bzw. komplexen Wurzeln der folgenden Ausdrücke.

a) $z^2 = -49$
b) $z^2 = i$
c) $z^3 = -8$
d) $z^3 = -27i$
e) $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$
f) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i$
g) $\left(-1+\sqrt{3}i\right)^{12}$
h) $\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}i\right)^{10}$
i) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{2}}(1-i)\right)^{25}$

a) $z^2 = -49$

-49 in Exponentialform: $r = 49 \quad \varphi = \pi$

$\rightarrow z^2 = 49\, e^{i(\pi + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$

$z = 7 \cdot e^{i(\frac{\pi}{2} + k\pi)}$

$z_1 = 7 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 7 \cdot i$

$z_2 = 7 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = -7i$

b) $z^2 = i$

i in Exponentialform: $r = 1 \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$

$z^2 = e^{i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi)} \quad k \in \mathbb{Z}$

$z = e^{i(\frac{\pi}{4} + k\pi)}$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$z_2 = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \cos\frac{5}{4}\pi + i\sin\frac{5}{4}\pi$
$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $z^3 = -8$

-8 in Exponentialform: $r = 8 \quad \varphi = \pi$

$z^3 = 8 \cdot e^{i(\pi + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$z = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i(\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi)}$

$z_1 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{8} \cdot (\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3})$

$= \sqrt[3]{8} \cdot (\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\pi} = 2 \cdot (\cos \pi + i \cdot \sin \pi)$

$= -2$

$z_3 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2(\cos \frac{5}{3}\pi + i \cdot \sin \frac{5}{3}\pi)$

$= 1 - i \cdot \sqrt{3}$

d) $z^3 = -27i$

$-27i$ in Exponentialform: $r = 27 \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi$

$z^3 = 27 \cdot e^{i(\frac{3}{2}\pi + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = 3 \cdot e^{i\frac{1}{2}\pi} = 3 \cdot (\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$

$= 3i$

$z_2 = 3 \cdot e^{i\frac{7}{6}\pi} = 3 \cdot (\cos \frac{7}{6}\pi + i \sin \frac{7}{6}\pi)$

$= -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$

$z_3 = 3 \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi} = 3 \cdot (\cos \frac{11}{6}\pi + i \sin \frac{11}{6}\pi)$

$= \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$

e) $z^3 = 1-\sqrt{3}\,i$

$1-\sqrt{3}\,i$ in Exponentialform: $r=2 \quad \varphi = \frac{5}{3}\pi$

↳ im 4. Quadranten, d.h.

$\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$

$z^3 = 2\cdot e^{i(\frac{5}{3}\pi + 2k\pi)} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5}{9}\pi} = \sqrt[3]{2}\,(\cos\frac{5}{9}\pi + i\sin\frac{5}{9}\pi)$

$= -0{,}219 + 1{,}241\cdot i$

$z_2 = \sqrt[3]{2}\cdot e^{i\frac{11}{9}\pi} = \sqrt[3]{2}\,(\cos\frac{11}{9}\pi + i\sin\frac{11}{9}\pi)$

$= -0{,}965 - 0{,}81\cdot i$

$z_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{17}{9}\pi} = \sqrt[3]{2}\,(\cos\frac{17}{9}\pi + i\sin\frac{17}{9}\pi)$

$= 1{,}184 - 0{,}431\cdot i$

f) $z^4 = -8+8\sqrt{3}\,i$ ← im 2. Quadranten

$-8+8\sqrt{3}\,i$ in Exponentialform:

$r = \sqrt{8^2 + 8^2\cdot 3} = 16$

$\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2}{3}\pi$

$z^4 = 16\cdot e^{i(\frac{2}{3}\pi + 2k\pi)} \qquad k\in\mathbb{Z}$

$z = 2\cdot e^{i(\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}k\pi)}$

$z_1 = 2\cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$= \sqrt{3} + i$

$z_2 = 2\cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2\,(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$

$= -1+\sqrt{3}\,i$

$z_3 = 2\cdot e^{i\frac{7}{6}\pi} = 2\cdot(\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

$= -\sqrt{3} - i$

$z_4 = 2\cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2\cdot(\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi)$

$= 1-\sqrt{3}\,i$

g) $|z| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$\varphi = \arg(z) = \arctan \frac{\sqrt{3}}{-1} + \pi = \frac{2}{3}\pi$

$z = 2 \cdot cis(\frac{2}{3}\pi)$

$z^{12} = 2^{12} \cdot cis(12 \cdot \frac{2}{3}\pi) = 4096 \cdot cis\ 8\pi$

$= 4096 \cdot (\cos 8\pi + i \sin 8\pi) = 4096$

h) $|z| = \sqrt{(\frac{1}{2}\sqrt{2})^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2})^2} = 1$

$\varphi = \arg z = \arctan \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$z^{10} = 1^{10} \cdot cis(10 \cdot \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{5}{2}\pi) + i \sin(\frac{5}{2}\pi)$

$= i$

i) $|z| = \frac{1}{\sqrt[5]{2}}\sqrt{1^2 + (-1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}} = \frac{2^{1/2}}{2^{1/5}} = 2^{3/10}$

$\varphi = \arg z = \arctan \frac{1}{-1} + 2\pi = \frac{7}{4}\pi$

$z^{25} = (2^{3/10})^{25} \cdot cis(25 \cdot \frac{7}{4}\pi)$

$= 2^{15/2} \cdot [\cos(\frac{175}{4}\pi) + i \sin(\frac{175}{4}\pi)]$

$= 2^{15/2} \cdot (\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2})$

$= 2^7 - i \cdot 2^7 = 128 - 128i$

5. Komplexe Wurzeln

a) Bestimmen Sie alle komplexen dritten Wurzeln aus 1.

b) Bestimmen Sie mit Ihrem Ergebnis aus Aufgabenteil (a) alle komplexen Lösungen der Gleichung $(1+z)^3 = (1-z)^3$.

a) $z = 1$

$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{1}$ $\quad |z| = 1, \quad \varphi = \arg z = \arctan 0 = 0$

$z = 1 \cdot cis(0) = e^{0 + 2k\pi} \quad k \in \mathbb{Z}$

$\sqrt[3]{z} = z^{1/3} = 1^{1/3} \cdot e^{\frac{2}{3}k\pi} =: w_k$

$w_0 = 1$

$w_1 = e^{i\frac{2}{3}\pi} = \cos(\frac{2}{3}\pi) + i \sin(\frac{2}{3}\pi) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$w_2 = e^{i\frac{4}{3}\pi} = \cos(\frac{4}{3}\pi) + i \sin(\frac{4}{3}\pi) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $(1+z)^3 = (1-z)^3$

$$\underbrace{\left(\frac{1+z}{1-z}\right)}_{=:t}{}^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad t^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{1}$$

↳ Lsgen aus a) verwenden

1. $t = \frac{1+z}{1-z} = 1$

$1 + z = 1 - z \Leftrightarrow z = 0$

2. $t = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2\cdot(1+z) = (1-z)(-1+\sqrt{3}i)$$
$$= -1+\sqrt{3}i + z - \sqrt{3}i\,z$$
$$2+2z+1-\sqrt{3}i = z(1-\sqrt{3}i)$$
$$3-\sqrt{3}i = z(1-2-\sqrt{3}i)$$
$$\frac{3-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i} = z$$
$$\frac{-3+3\sqrt{3}i+\sqrt{3}i+3}{1+3} = z$$
$$z = \sqrt{3}i$$

3. $t = \frac{1+z}{1-z} = -\frac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$2+2z = (-1-\sqrt{3}i)(1-z) = -1+z-\sqrt{3}i+\sqrt{3}iz$$
$$3+\sqrt{3}i = z(1+\sqrt{3}i-2) = z(-1+\sqrt{3}i)$$
$$z = \frac{3+\sqrt{3}i}{-1+\sqrt{3}i}\cdot\frac{-1-\sqrt{3}i}{-1-\sqrt{3}i} = \frac{-3-3\sqrt{3}i-\sqrt{3}i+3}{1+3}$$
$$= -\sqrt{3}i$$

6. Aussagen über Potenzgleichungen
Gegeben sei die Potenzgleichung

$$z^n = w \text{ mit } w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für jede Wahl von w hat die Gleichung mindestens 1 Lösung in $\mathbb{C}$.	X	
b) Für jede Wahl von w hat die Gleichung genau n Lösungen in $\mathbb{C}$.		X
c) Ist n gerade und z eine Lösung der Gleichung, dann ist auch $-z$ eine Lösung.	X	
d) Sei $w \in \mathbb{R}$ und z eine Lösung der Gleichung, dann ist auch z^* eine Lösung.	X	
e) Alle Lösungen der Gleichung haben denselben Betrag.	X	
f) Alle Lösungen der Gleichung haben dasselbe Argument.		X

7. Aussagen über komplexe Zahlen
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $Re(z) \in \mathbb{R}$.	X	
b) Es gilt $z = 1$ genau dann, wenn $Im(z) = Re(z) = 1$.		X
c) Es gilt $z_1^* = z_2$ genau dann, wenn $z_2^* = z_1$.	X	
d) Es gibt ein $z \in \mathbb{C}$, so dass $z^2 = i$.	X	
e) Falls $\lvert z_1 \rvert \leq \lvert z_2 \rvert$, dann gilt auch $z_1 \leq z_2$.		X