FH GR **Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 6

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe orthogonale Matrix, Drehmatrix, Spiegelmatrix und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen diejenigen der 2x2 Standardmatrizen, die orthogonal sind.
- Sie kennen das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren zur Bestimmung von Matrizen und können dieses anwenden.
- Sie können Dreh- und Spiegelmatrizen zur Lösung konkreter Fragestellungen anwenden.

---

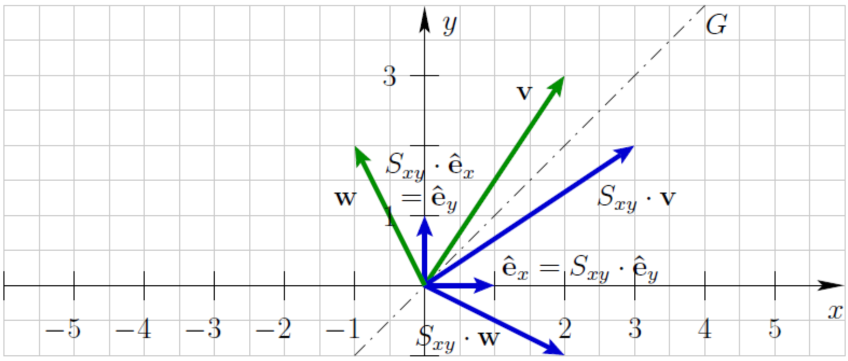
1. Spaltenvektor Konstruktionsverfahren für Matrizen in 2D
Benutzen Sie das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren, um die jeweilige Matrix zu bestimmen.

a) Bestimmen Sie die Matrix S_{xy}, die die Spiegelung an der Geraden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ beschreibt. Testen Sie die Wirkung der Matrix an 2 selbst gewählten Vektoren.

b) Bestimmen Sie die Matrix $R_{\pi/4}$, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/4$ beschreibt.

a)

Wir wählen als Testvektoren $\vec{v} = \binom{2}{3}, \vec{w} = \binom{-1}{2}$. Nun führen wir die Matrixoperationen im xy-Koordinatensystem durch.



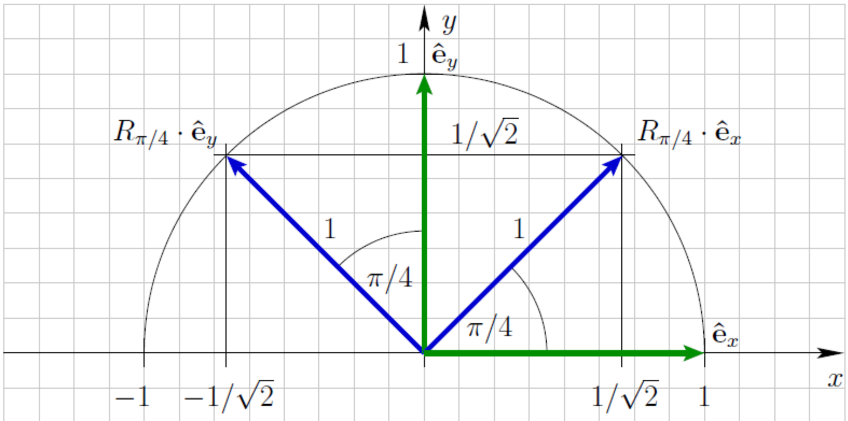
Mittels des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens (hierfür nutzen wir die Bilder von $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$, die wir aus der Zeichnung ablesen) erhalten wir die Matrix

$$\underline{\underline{S_{xy}}} = \begin{bmatrix} S_{xy} \cdot \hat{e}_x & S_{xy} \cdot \hat{e}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_y & \hat{e}_x \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{S_{xy} \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{S_{xy} \cdot \mathbf{w}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

b)



Wir gehen gleich wie in a) vor und benutzen $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\mu}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\underline{\underline{R_{\pi/4}}} = \begin{bmatrix} R_{\pi/4} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & R_{\pi/4} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

2. Drehmatrizen in 2D

Im Folgenden lernen Sie Form und Eigenschaften von Drehmatrizen in 2D kennen.

a) Bestimmen Sie die Matrix R_α mit Hilfe des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ beschreibt.

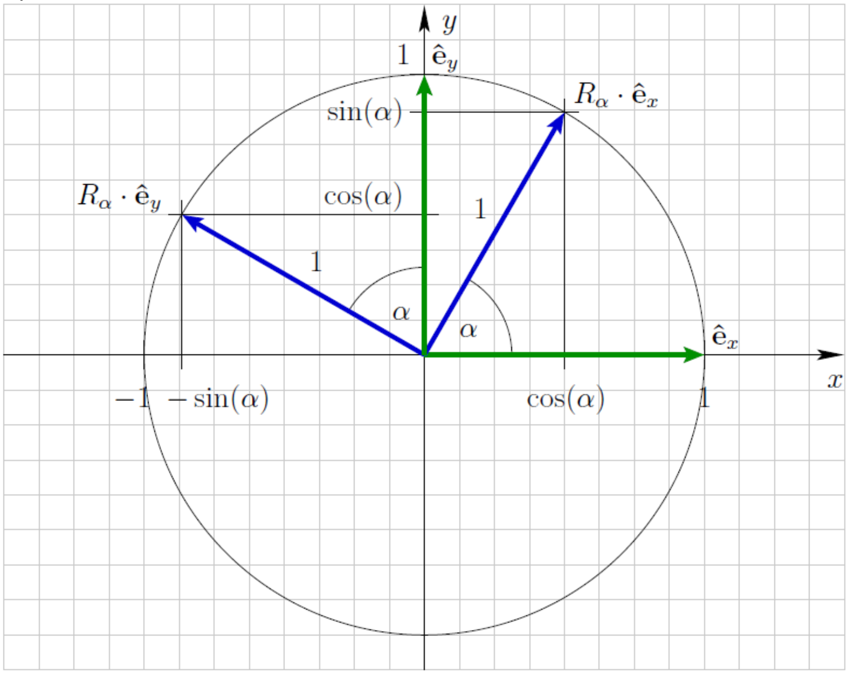
b) Bestimmen Sie die Matrix $R_{-\alpha}$ mit Hilfe des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $-\alpha \in \mathbb{R}$ (also Drehung im Uhrzeigersinn) beschreibt.
Hinweis: Verwenden Sie die Paritätseigenschaften, dass gilt: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Drehmatrizen aus Aufgabe a) und b)? Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_\alpha \cdot R_{-\alpha}$ und $R_{-\alpha} \cdot R_\alpha$.

d) Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_\alpha \cdot R_\beta$ und $R_\beta \cdot R_\alpha$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, was passiert, wenn man nacheinander die Drehungen auf denselben Vektor ausführt. Nutzen Sie die Additionstheoreme zur Vereinfachung der Matrizen.

e) Geben Sie die Drehmatrizen für $\alpha \in \left\{0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi\right\}$ explizit an.

a)



In der Zeichnung haben wir die Bilder der Vektoren $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$ eingezeichnet, die wir durch Anwenden der Matrix R_α erhalten. Somit können wir aus der Zeichnung nun die Vektorkomponenten ablesen und das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren zur Bestimmung der Matrix R_α anwenden.

$$\underline{\underline{R_\alpha}} = \left[\begin{array}{cc} R_\alpha \cdot \hat{e}_x & R_\alpha \cdot \hat{e}_y \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \end{array}\right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}}.$$

b)

Wir ersetzen in der Matrix R_α den Winkel α durch $-\alpha$ und erhalten

$$\underline{\underline{R_{-\alpha}}} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}}.$$

c)

Hintereinanderausführung von Drehung um denselben Winkel α, jedoch in entgegengesetzte Richtung, sollte zur Ausgangssituation führen. D. h., dass R_α und $R_{-\alpha}$ zueinander inverse Matrizen sein sollten. Dies können wir mittels Matrixmultiplikation nachrechnen:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R_\alpha \cdot R_{-\alpha}}} &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha) + (-\sin(\alpha))(-\sin(\alpha)) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)(-\sin(\alpha)) & \sin(\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}}} \end{aligned}$$

$$\underline{\underline{R_{-\alpha}\cdot R_\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\sin(\alpha) & \cos(\alpha)(-\sin(\alpha))+\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ (-\sin(\alpha))\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\sin(\alpha) & (-\sin(\alpha))(-\sin(\alpha))+\cos(\alpha)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha)+\sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha)+\cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}}$$

d)

Die Hintereinanderausführung der Matrizen R_α und R_β sollte aus geometrischer Sicht bedeuten, dass zuerst eine Drehung um α und anschliessend eine Drehung um β (bzw. umgekehrt) ausgeführt wird → insgesamt also um den Winkel $\alpha+\beta$. Dies bedeutet, dass gelten sollte: $R_\alpha \cdot R_\beta = R_\beta \cdot R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$.

$$\underline{\underline{R_\alpha\cdot R_\beta}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta)+(-\sin(\alpha))\sin(\beta) & \cos(\alpha)(-\sin(\beta))+(-\sin(\alpha))\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)(-\sin(\beta))+\cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta)-\sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta)+\cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta)-\sin(\alpha)\sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \underline{\underline{R_{\alpha+\beta}}}$$

$$\underline{\underline{R_\beta\cdot R_\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha)+(-\sin(\beta))\sin(\alpha) & \cos(\beta)(-\sin(\alpha))+(-\sin(\beta))\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha)+\cos(\beta)\sin(\alpha) & \sin(\beta)(-\sin(\alpha))+\cos(\beta)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\beta)\sin(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha)-\sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha)+\cos(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\beta)\cos(\alpha)-\sin(\beta)\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix} = R_{\beta+\alpha} = R_{\alpha+\beta} = \underline{\underline{R_\alpha\cdot R_\beta.}}$$

e)

$$\underline{\underline{R_0}} = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/6}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/6) & -\sin(\pm\pi/6) \\ \sin(\pm\pi/6) & \cos(\pm\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & \mp\sin(\pi/6) \\ \pm\sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \mp\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{= \frac{1}{2}\cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \mp 1 \\ \pm 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/4}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/4) & -\sin(\pm\pi/4) \\ \sin(\pm\pi/4) & \cos(\pm\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \mp\sin(\pi/4) \\ \pm\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mp 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/3}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/3) & -\sin(\pm\pi/3) \\ \sin(\pm\pi/3) & \cos(\pm\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \mp\sin(\pi/3) \\ \pm\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mp\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/2}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/2) & -\sin(\pm\pi/2) \\ \sin(\pm\pi/2) & \cos(\pm\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \mp\sin(\pi/2) \\ \pm\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \pm\mathbb{i}}}.$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi) & -\sin(\pm\pi) \\ \sin(\pm\pi) & \cos(\pm\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \mp\sin(\pi) \\ \pm\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mp 0 \\ \pm 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-\mathbb{1} = P}}.$$

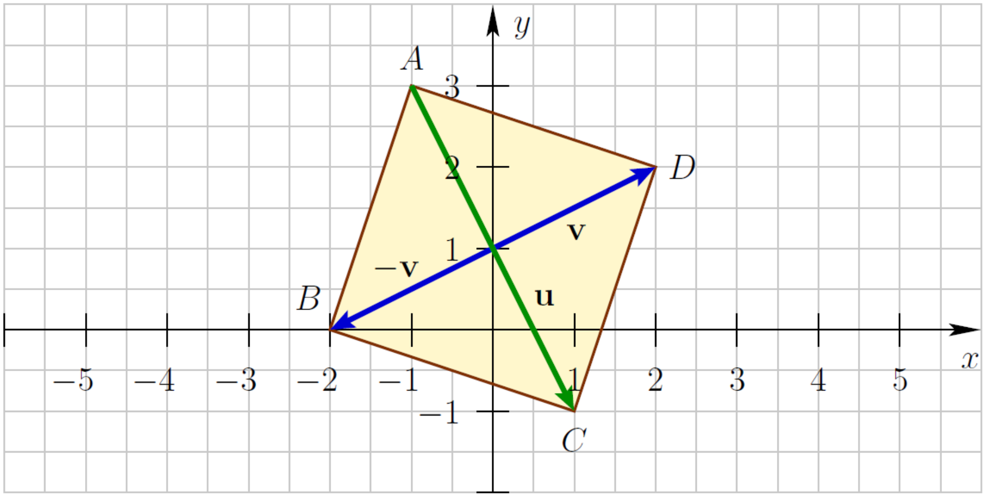
3. Aussagen über Drehmatrizen in 2D
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede Drehmatrix in 2D hat eine Inverse.	X	
b) Jede Drehmatrix in 2D ist schiefsymmetrisch.		X
c) Jede Drehmatrix in 2D ist orthogonal.	X	
d) Für $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $R^n(\alpha) = R(n \cdot \alpha)$.	X	
e) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt: $R(\beta) \cdot R(\alpha) = R(\alpha) \cdot R(\beta)$, d. h. die Drehmatrizen kommutieren.	X	
f) Die Matrix P (der Punktspiegelung) ist eine Drehmatrix.	X	

4. Polygone in 2D
Berechnen Sie die Eckpunkte des jeweiligen Polygons.

a) Ein Quadrat, dessen Diagonale die Verbindungsstrecke zwischen den Punkten A = (-1;3) und C = (1;-1) ist.
b) Ein gleichseitiges Dreieck mit Mittelpunkt M am Ursprung und einer Ecke bei A = (0;3).

a)



Der *Diagonalen-Vektor* ist

$$\mathbf{u} := \mathbf{C} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

1. Möglichkeit:

Wir berechnen die Vektoren $\vec{a}$ (Verbindung von Punkt A und B) und $\vec{d}$ (Verbindung von Punkt A und D). Hierfür verkürzen wir den Vektor $\vec{u}$ um $\sqrt{2}$ und drehen anschliessend um π/4 bzw. -π/4. Hierfür nutzen wir die folgenden beiden Matrizen

$$Z\left(1/\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{1}$$

$$R(+\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R(-\pi/4) = R^T(+\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Es ergibt sich

$$\mathbf{d} = Z\left(1/\sqrt{2}\right) \cdot R(+\pi/4) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{a} = Z\left(1/\sqrt{2}\right) \cdot R(-\pi/4) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Für die Ortsvektoren der beiden Eckpunkte erhalten wir

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

2. Möglichkeit:
Wir berechnen die Hälfte der zweiten Diagonale. Hierfür verkürzen wir den Vektor $\vec{u}$ um den Faktor 2 und drehen um $\pi/2$. Wir verwenden die folgenden beiden Matrizen

$$Z(1/2) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1} \quad \text{bzw.} \quad R(+\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Anwenden auf $\vec{u}$ ergibt die Hälfte der anderen Diagonale

$$\mathbf{v} = Z(1/2) \cdot R(+\pi/2) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nun können wir den Mittelpunkt des Quadrats bestimmen:

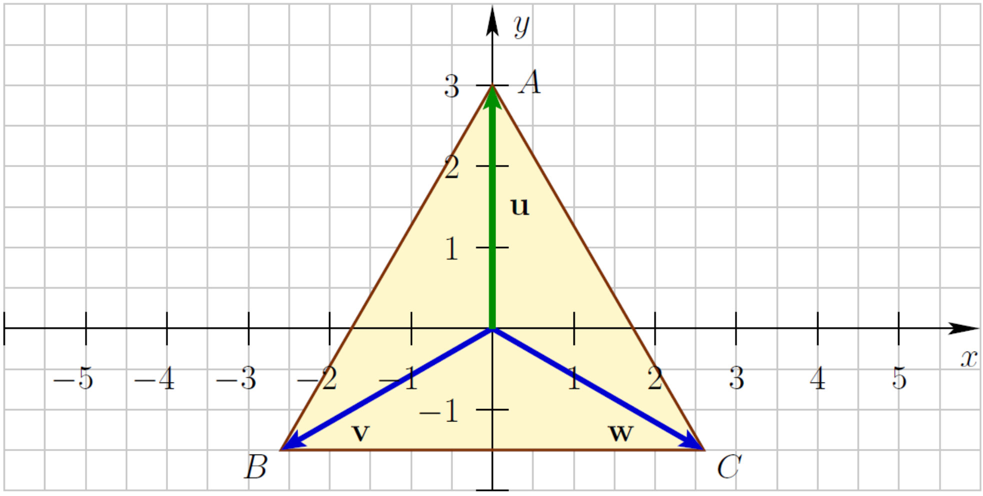
$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Für die Ortsvektoren der beiden Punkte erhalten wir

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

b)



Der Vektor vom Mittelpunkt zu Punkt A ergibt sich zu

$$\mathbf{u} := \mathbf{A} - \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Um die Punkte B und C zu bestimmen, drehen wir $\vec{u}$ um $2\pi/3$ und spiegeln anschliessend an der y-Achse. Die Drehmatrix ergibt sich zu

$$R(2\pi/3) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = R(2\pi/3) \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} (-1) \cdot 0 + (-\sqrt{3}) \cdot 3 \\ \sqrt{3} \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = S_y \cdot \mathbf{v} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} (-1) \cdot (-\sqrt{3}) + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-\sqrt{3}) + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

Für die beiden anderen Eckpunkte ergibt sich somit

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}.$$

5. Aussagen über eine Drehmatrix in 2D

Gegeben sei die Drehmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

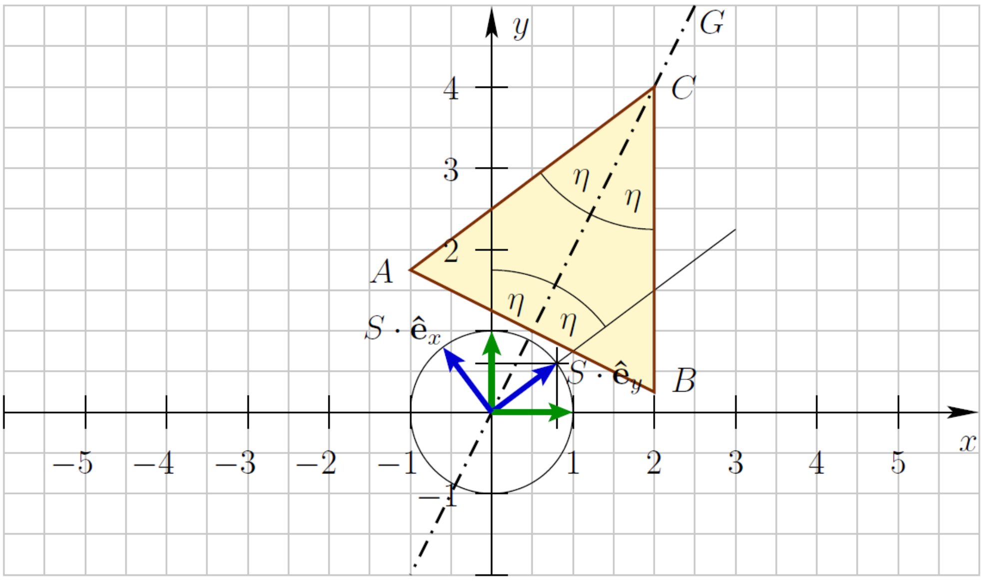
	wahr	falsch
a) A ist schiefsymmetrisch.		X
b) Es gilt: $A^{100} = \mathbb{E}$.		X
c) Es gilt: $A^6 = R(-\frac{\pi}{2})$.	X	
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ so dass gilt: $A^n = P$.	X	
e) Die inverse Matrix A^{-1} von A ist A^T.	X	
f) Es gilt: $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{E} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R(\frac{\pi}{2})$.	X	

6. Gleichschenkliges Dreieck in 2D → FS23 Blatt 6 LA A4

Gegeben sei ein gleichschenkliges Dreieck mit den Eckpunkten B = (2;1/4) und C = (2;4), das die Gerade G, die durch den Ursprung und den Punkt C verläuft, als Symmetrieachse hat.

a) Bestimmen Sie die Ecke A des Dreiecks durch Drehung der Seite a.

b) Bestimmen Sie die Ecke A durch Spiegelung an der Symmetrieachse, also der Geraden G.



Gemäss Skizze gilt

$$\tan(\eta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,.$$

Daraus folgt

$$\cos(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\eta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(\eta) = \tan(\eta)\cdot\cos(\eta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

a)

Wir bestimmen die Ecke A durch Drehung des Seitenvektors

$$\mathbf{a} = \mathbf{B} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ 0.25-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.75 \end{bmatrix}$$

Die hierfür benötigte Drehmatrix R(-2η) ist

$$R(-\eta) = R^T(\eta) = \begin{bmatrix} \cos(\eta) & \sin(\eta) \\ -\sin(\eta) & \cos(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$R(-2\eta) = R^2(-\eta) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 2\cdot 2+1\cdot(-1) & 2\cdot 1+1\cdot 2 \\ (-1)\cdot 2+2\cdot(-1) & (-1)\cdot 1+2\cdot 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Es ergibt sich für den Seitenvektor

$$\mathbf{b} = R(-2\eta)\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -3.75 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3\cdot 0+4\cdot(-3.75) \\ (-4)\cdot 0+3\cdot(-3.75) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -15 \\ -11.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2.25 \end{bmatrix}$$

Und somit der Eckpunkt A zu

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 \\ 4-2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.75 \end{bmatrix}$$

b)
Die Spiegelmatrix S erhalten wir durch die Überlegung, dass die Bilder der Einheitsvektoren auch wieder senkrecht zueinander sein müssen und wenden dann das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren an.

$$S \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \begin{bmatrix} \sin(2\eta) \\ \cos(2\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin(\eta)\cos(\eta) \\ \cos^2(\eta) - \sin^2(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

$$S \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = R(\pi/2) \cdot S \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 0 \cdot 4 + (-1) \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

$$S = \begin{bmatrix} S \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & S \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} & \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

Der Ortsvektor von A ergibt sich folglich zu

$$\mathbf{A} = S \cdot \mathbf{B} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} (-3) \cdot 2 + 4 \cdot 0.25 \\ 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0.25 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -5 \\ 8.75 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1.75 \end{bmatrix}.$$

7. Orthogonale Standardmatrizen in 2D
Ermitteln Sie, welche der Standardmatrizen $\mathbb{E}$, P, Z_3, P_x, P_y, S_x, S_y, R(π/2), R(-π/2) und R(π/4) orthogonal sind.

Wir stellen fest, welche der *Matrizen* $\mathbb{1}$, P, Z_3, P_x, P_y, S_x, S_y, $R(\pi/2)$, $R(-\pi/2)$ und $R(\pi/4)$ *orthogonal* sind. Es gilt

$$\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1},$$

somit folgt $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}^T$, das heisst, die *Matrix* $\mathbb{1}$ ist *orthogonal*. Es gilt

$$P^{-1} = P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = P,$$

somit folgt $P^{-1} = P^T$, das heisst, die *Matrix* P ist *orthogonal*. Es gilt

$$Z_3^{-1} = Z_{1/3} = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Z_3^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \mathbb{1} = Z_3,$$

somit folgt $Z_3^{-1} \neq Z_3^T$, das heisst, die *Matrix* Z_3 ist nicht *orthogonal*. Die *Matrizen* P_x und P_y beschreiben die *Projektionen senkrecht* auf die x-Achse bzw. auf die y-Achse und demnach *lineare Abbildungen*, welche weder *injektiv* noch *surjektiv* sind. Folglich existieren für P_x bzw. P_y keine *inversen Matrizen*, womit *Orthogonalität* für P_x und P_y zum Vornherein ausgeschlossen werden kann. Es gilt

$$S_x^{-1} = S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_x^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_x,$$

somit folgt $S_x^{-1} = S_x^T$, das heisst, die *Matrix* S_x ist *orthogonal*. Es gilt

$$S_y^{-1} = S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_y^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S_y,$$

somit folgt $S_y^{-1} = S_y^T$, das heisst, die *Matrix* S_y ist *orthogonal*. Es gilt

$$R^{-1}(\pi/2) = R(-\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^T(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = R(-\pi/2),$$

somit folgt $R^{-1}(\pi/2) = R^T(\pi/2)$, das heisst, die *Matrix* $R(\pi/2)$ ist *orthogonal*. Es gilt

$$R^{-1}(-\pi/2) = R(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R^T(-\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = R(\pi/2),$$

somit folgt $R^{-1}(-\pi/2) = R^T(-\pi/2)$, das heisst, die *Matrix* $R(-\pi/2)$ ist *orthogonal*. Es gilt

$$R^{-1}(\pi/4) = R(-\pi/4) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$R^T(\pi/4) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

somit folgt $R^{-1}(\pi/4) = R^T(\pi/4)$, das heisst, die *Matrix* $R(\pi/4)$ ist *orthogonal*. Von allen *Matrizen*, welche wir in dieser Teilaufgabe untersucht haben, sind also diejenigen in der *Menge*

$$\underline{\underline{\{\mathbb{1}, P, S_x, S_y, R(\pi/2), R(-\pi/2), R(\pi/4)\}}}$$

orthogonal. Bemerkenswerterweise sind das genau die $\underline{\underline{\text{Spiegelungen}}}$ und $\underline{\underline{\text{Drehungen}}}$!

8. Aussagen über zwei Matrizen in 3D

Gegeben seien die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) A ist symmetrisch.	X	
b) A ist eine Spiegelmatrix.		X
c) A ist singulär.		X
d) Die Matrizen A und C = B/3 sind orthogonal.	X	
e) Es gilt: $2 \cdot (A + A^T) + B = \mathbb{E}$.	X	
f) Es gilt: $A^{30} = B \cdot B^T$.		X

9. Aussagen über eine Drehmatrix in 2D

Gegeben sei die Drehmatrix

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) A ist symmetrisch.		X
b) Es gilt: $A^{12} = A^{63}$.	X	
c) Es gilt: $A^7 = R(\frac{\pi}{3})$.		X
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ so dass gilt: $A^n = \mathbb{i}$.		X
e) Es gilt: $A^{-1} = -A$.		X
f) Es gilt: $A = -\mathbb{E} + \sqrt{3} \cdot R(\frac{\pi}{2})$.		X

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 6

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

? l_jwqgq s l b J g l c_pc ?jec`p_ 0

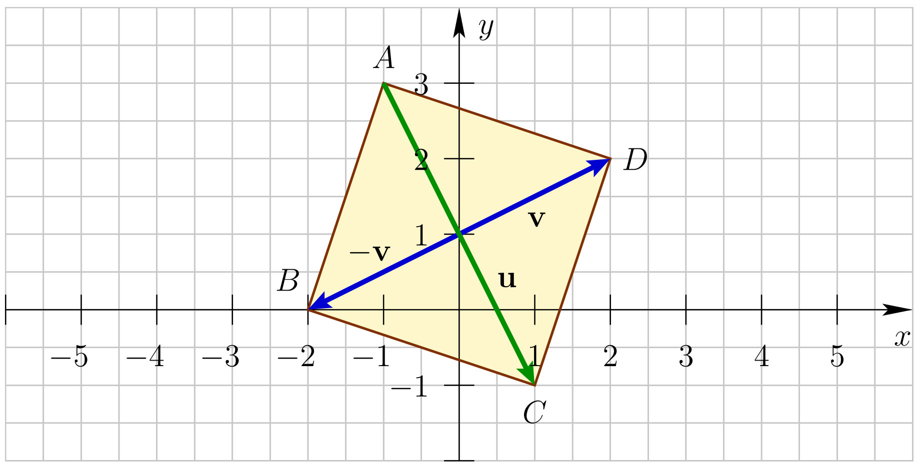
1. Aussagen über Drehmatrizen in 2D

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *Drehmatrix* in 2D hat eine *Inverse*.	●	○
b) Jede *Drehmatrix* in 2D ist *schiefsymmetrisch*.	○	●
c) Jede *Drehmatrix* in 2D ist *orthogonal*.	●	○
d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jeden *Winkel* α gilt $R^n(\alpha) = R(n \cdot \alpha)$.	●	○
e) Für alle *Winkel* α und β gilt $R(\beta) \cdot R(\alpha) = R(\alpha) \cdot R(\beta)$, d.h. alle *Drehmatrizen* in 2D *kommutieren* untereinander.	●	○
f) Die *Matrix* P der *Punktspiegelung* ist eine *Drehmatrix*.	●	○

2. Polygone in 2D

Wir berechnen jeweils alle *Eckpunkte* des angegebenen, ebenen *Polygons*.

a) Wir suchen die *Ecken* B und D eines *Quadrates*, dessen *Diagonale* gerade die Verbindungsstrecke zwischen den *Punkten* $A = \big(-1; 3\big)$ und $C = \big(1; -1\big)$ ist. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Der *Diagonalen-Vektor* ist

$$\mathbf{u} := \mathbf{C} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Wir zeigen mehrere Varianten, um die *Ecken* B und D zu finden.

Variante 1: Wir berechnen die *Seiten-Vektoren* $\mathbf{a}$ und $\mathbf{d}$, indem wir den *Diagonalen-Vektor* $\mathbf{u}$ um einen *Faktor* $\sqrt{2}$ *verkürzen* und um $\pi/4$ bzw. $-\pi/4$ *drehen*. Dazu verwenden wir die *Skalier*- und *Drehmatrizen*

$$Z\left(1/\sqrt{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{1} \tag{2}$$

$$R(+\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$R(-\pi/4) = R^T(+\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Anwenden auf $\mathbf{u}$ ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{d} = Z\left(1/\sqrt{2}\right) \cdot R(+\pi/4) \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = Z\left(1/\sqrt{2}\right) \cdot R(-\pi/4) \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-4) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Daraus erhalten wir für die *Ecken* die *Ortsvektoren*

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{a} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{d} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Variante 2: Wir berechnen die Hälfte der zweiten *Diagonalen*, indem wir den *Diagonalen-Vektor* $\mathbf{u}$ um einen *Faktor* 2 *verkürzen* und um $\pi/2$ *drehen*. Dazu verwenden wir die *Skalier*- und *Drehmatrizen*

$$Z(1/2) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1} \quad \text{bzw.} \quad R(+\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Anwenden auf $\mathbf{u}$ ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = Z(1/2) \cdot R(+\pi/2) \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + (-1) \cdot (-4) \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-4) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Der *Mittelpunkt* des *Quadrats* liegt offenbar bei

$$\mathbf{M} = \mathbf{A} + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Daraus erhalten wir für die *Ecken* die *Ortsvektoren*

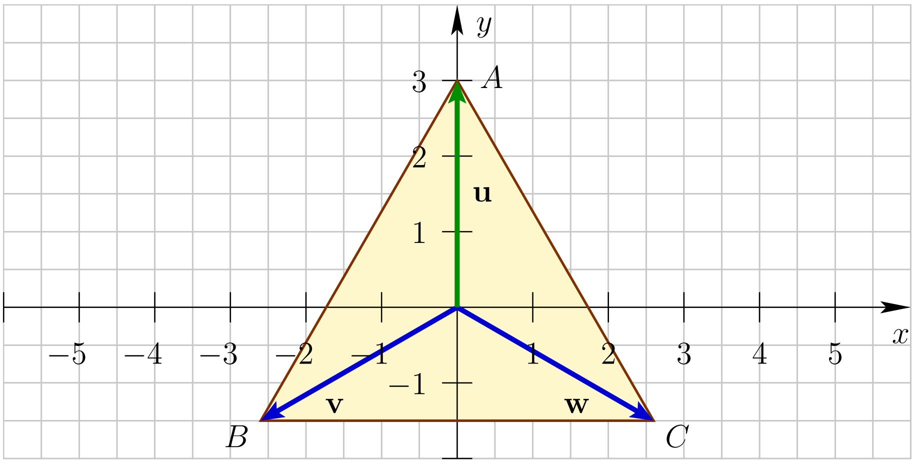
$$\mathbf{B} = \mathbf{M} - \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{M} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Das *Quadrat* hat demnach die *Eckpunkte*

$$\underline{\underline{A = \big(-1\,;3\big)\,, \quad B = \big(-2\,;0\big)\,, \quad C = \big(1\,;-1\big) \quad \text{und} \quad D = \big(2\,;2\big)\,.}} \tag{14}$$

b) Wir suchen die *Ecken* B und C eines *gleichseitigen Dreiecks* mit *Mittelpunkt* M am *Ursprung* und der *Ecke* $A = \big(0\,;3\big)$. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Der *Abstandsvektor* zwischen M und A ist

$$\mathbf{u} := \mathbf{A} - \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

Um vom *Mittelpunkt* M aus die anderen *Ecken* zu erreichen, *drehen* wir den *Vektor* $\mathbf{u}$ einmal um $2\pi/3$ und *spiegeln* das Ergebnis an der y-Achse. Die zugehörige *Drehmatrix* ist

$$R(2\pi/3) = \begin{bmatrix} \cos(2\pi/3) & -\sin(2\pi/3) \\ \sin(2\pi/3) & \cos(2\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Anwenden auf $\mathbf{u}$ ergibt

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = R(2\pi/3) \cdot \mathbf{u} &= \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} (-1) \cdot 0 + \big(-\sqrt{3}\big) \cdot 3 \\ \sqrt{3} \cdot 0 + (-1) \cdot 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{17}$$

$$\mathbf{w} = S_y \cdot \mathbf{v} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} (-1) \cdot \big(-\sqrt{3}\big) + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot \big(-\sqrt{3}\big) + 1 \cdot (-1) \end{bmatrix}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Daraus erhalten wir für die *Ecken* die *Ortsvektoren*

$$\mathbf{B} = \mathbf{M} + \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \tag{19}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} + \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{3}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Das *Dreieck* hat demnach die *Eckpunkte*

$$\underline{\underline{A = \big(0\,;3\big)\,, \quad B = \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\,; -\frac{3}{2}\right) \quad \text{und} \quad C = \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\,; -\frac{3}{2}\right).}} \tag{21}$$

3. Aussagen über eine Drehmatrix in 2D

Wir betrachten die *Drehmatrix*

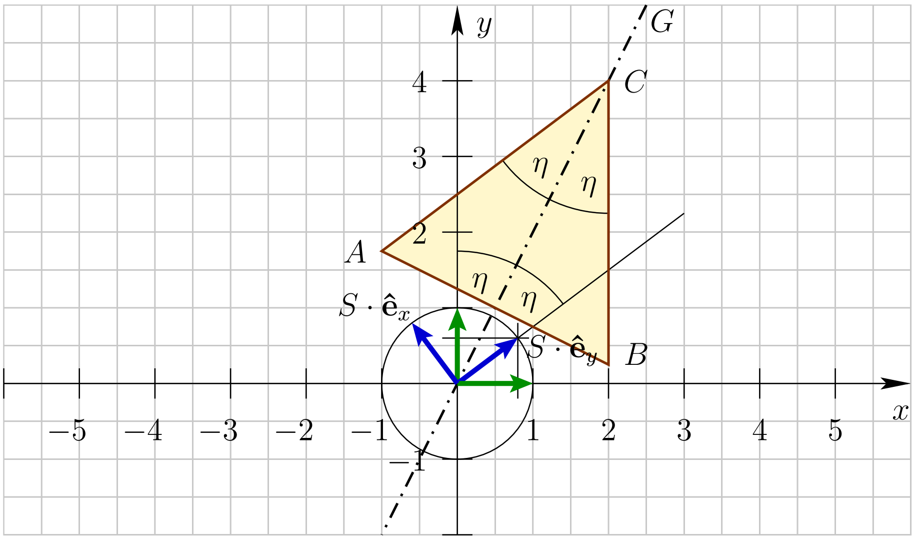
$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) A ist *schiefsymmetrisch*.	○	●
b) Es gilt $A^{100} = \mathbb{1}$.	○	●
c) Es gilt $A^6 = R(-\pi/2)$.	●	○
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = P$.	●	○
e) Die *inverse Matrix* A^{-1} von A ist gerade A^T.	●	○
f) Es gilt $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot R(\pi/2)$.	●	○

4. Gleichschenkliges Dreieck in 2D
Wir betrachten ein *gleichschenkliges Dreieck* mit den *Eckpunkten*

$$B = \big(2\,;1/4\big) \quad \text{und} \quad C = \big(2\,;4\big)\,, \tag{23}$$

welches die *Gerade* G durch den *Ursprung* und C als *Symmetrie-Achse* hat. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Gemäss Skizze gilt

$$\tan(\eta) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}\,. \tag{24}$$

Daraus folgt

$$\cos(\eta) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(\eta)}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \tag{25}$$

$$\sin(\eta) = \tan(\eta)\cdot\cos(\eta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\,. \tag{26}$$

a) Wir bestimmen die *Ecke* A des *Dreiecks* durch *Drehung* des *Seiten-Vektors*

$$\mathbf{a} = \mathbf{B} - \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1/4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-2 \\ 0.25-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3.75 \end{bmatrix}\,. \tag{27}$$

Dazu benötigen wir die *Drehmatrix* $R(-2\eta)$ zum *Drehwinkel* -2η. Gemäss (25) gilt

$$R(-\eta) = R^T(\eta) = \begin{bmatrix} \cos(\eta) & \sin(\eta) \\ -\sin(\eta) & \cos(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\,. \tag{28}$$

Durch *Quadrieren* finden wir

$$R(-2\eta) = R^2(-\eta) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^2 = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 2\cdot2+1\cdot(-1) & 2\cdot1+1\cdot2 \\ (-1)\cdot2+2\cdot(-1) & (-1)\cdot1+2\cdot2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\,. \tag{29}$$

Durch Anwenden von $R(-2\eta)$ auf den *Seiten-Vektor* $\mathbf{a}$ erhalten wir den *Seiten-Vektor*

$$\mathbf{b} = R(-2\eta)\cdot\mathbf{a} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ -3.75 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 3\cdot 0 + 4\cdot(-3.75) \\ (-4)\cdot 0 + 3\cdot(-3.75) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -15 \\ -11.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2.25 \end{bmatrix} \tag{30}$$

und schliesslich den *Ortsvektor*

$$\mathbf{A} = \mathbf{C} + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3 \\ 4-2.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1.75 \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Die Ecke A des *Dreiecks* befindet sich demnach bei

$$\underline{\underline{A = \big(-1\,;\,1.75\big)\,.}} \tag{32}$$

b) Wir bestimmen die *Ecke A* des *Dreiecks* durch *Spiegelung* der *Seite a* an der *Geraden G*. Dazu benötigen wir die *Spiegelungsmatrix S* zur *Spiegelungsachse G*. Gemäss Skizze und (25) gilt

$$S\cdot\hat{\mathbf{e}}_y = \begin{bmatrix} \sin(2\eta) \\ \cos(2\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\sin(\eta)\cos(\eta) \\ \cos^2(\eta) - \sin^2(\eta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} - \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Weil S als *Spiegelung* zwingend *orthogonal* ist, müssen die *Bilder* $S\,\hat{\mathbf{e}}_x$ und $S\,\hat{\mathbf{e}}_y$ aufeinander *senkrecht* stehende *Einheitsvektoren* sein. Gemäss Skizze gilt

$$S\cdot\hat{\mathbf{e}}_x = R(\pi/2)\cdot S\cdot\hat{\mathbf{e}}_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 0\cdot 4 + (-1)\cdot 3 \\ 1\cdot 4 + 0\cdot 3 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Mit Hilfe des *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahrens* finden wir die *Spiegelungsmatrix*

$$S = \big[\; S\cdot\hat{\mathbf{e}}_x \quad S\cdot\hat{\mathbf{e}}_y \;\big] = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} & \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}. \tag{35}$$

Durch Anwenden von S auf den *Ortsvektor* $\mathbf{B}$ erhalten wir den *Ortsvektor*

$$\mathbf{A} = S\cdot\mathbf{B} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 \\ 0.25 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} (-3)\cdot 2 + 4\cdot 0.25 \\ 4\cdot 2 + 3\cdot 0.25 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} -5 \\ 8.75 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 1.75 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Die *Ecke A* des *Dreiecks* befindet sich demnach bei

$$\underline{\underline{A = \big(-1\,;\,1.75\big)\,.}} \tag{37}$$

5. Orthogonale Matrizen in 2D

Eine *Matrix* $A \in \mathbb{M}(2,2,\mathbb{R})$ heisst *orthogonal*, wenn die *Transposition* gerade auf die *inverse Matrix* führt, dass heisst, wenn gilt

$$A^T = A^{-1}. \tag{38}$$

a) Wir stellen fest, welche der *Matrizen* $\mathbb{1}$, P, Z_3, P_x, P_y, S_x, S_y, $R(\pi/2)$, $R(-\pi/2)$ und $R(\pi/4)$ *orthogonal* sind. Es gilt

$$\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{1}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbb{1}, \tag{39}$$

somit folgt $\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1}^T$, das heisst, die *Matrix* $\mathbb{1}$ ist *orthogonal.* Es gilt

$$P^{-1} = P = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad P^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = P, \tag{40}$$

somit folgt $P^{-1} = P^T$, das heisst, die *Matrix* P ist *orthogonal.* Es gilt

$$Z_3^{-1} = Z_{1/3} = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Z_3^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \mathbb{1} = Z_3, \tag{41}$$

somit folgt $Z_3^{-1} \neq Z_3^T$, das heisst, die *Matrix* Z_3 ist nicht *orthogonal.* Die *Matrizen* P_x und P_y beschreiben die *Projektionen senkrecht* auf die x-Achse bzw. auf die y-Achse und demnach *lineare Abbildungen*, welche weder *injektiv* noch *surjektiv* sind. Folglich existieren für P_x bzw. P_y keine *inversen Matrizen*, womit *Orthogonalität* für P_x und P_y zum Vornherein ausgeschlossen werden kann. Es gilt

$$S_x^{-1} = S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_x^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_x, \tag{42}$$

somit folgt $S_x^{-1} = S_x^T$, das heisst, die *Matrix* S_x ist *orthogonal.* Es gilt

$$S_y^{-1} = S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad S_y^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = S_y, \tag{43}$$

somit folgt $S_y^{-1} = S_y^T$, das heisst, die *Matrix* S_y ist *orthogonal.* Es gilt

$$R^{-1}(\pi/2) = R(-\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{44}$$

$$R^T(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = R(-\pi/2), \tag{45}$$

somit folgt $R^{-1}(\pi/2) = R^T(\pi/2)$, das heisst, die *Matrix* $R(\pi/2)$ ist *orthogonal.* Es gilt

$$R^{-1}(-\pi/2) = R(\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$R^T(-\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = R(\pi/2), \tag{47}$$

somit folgt $R^{-1}(-\pi/2) = R^T(-\pi/2)$, das heisst, die *Matrix* $R(-\pi/2)$ ist *orthogonal.* Es gilt

$$R^{-1}(\pi/4) = R(-\pi/4) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \tag{48}$$

$$R^T(\pi/4) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \tag{49}$$

somit folgt $R^{-1}(\pi/4) = R^T(\pi/4)$, das heisst, die *Matrix* $R(\pi/4)$ ist *orthogonal.* Von allen *Matrizen*, welche wir in dieser Teilaufgabe untersucht haben, sind also diejenigen in der *Menge*

$$\underline{\underline{\{\mathbb{1}, P, S_x, S_y, R(\pi/2), R(-\pi/2), R(\pi/4)\}}} \tag{50}$$

orthogonal. Bemerkenswerterweise sind das genau die Spiegelungen und Drehungen!

b) Offensichtlich gilt

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}} = A^{-1} \cdot A = \underline{\underline{A^T \cdot A}} \;\Leftrightarrow\; A^{-1} = A^T \Leftrightarrow \underline{\underline{A \text{ ist } \textit{orthogonal.}}} \tag{51}$$

c) In dieser Teilaufgabe wollen wir beweisen, dass für alle *Ortsvektoren* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ und alle 2×2-Matrizen $A \in \mathbb{M}(2, 2, \mathbb{R})$ gilt

$$\langle \mathbf{v}, A \cdot \mathbf{w} \rangle = \langle A^T \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle . \tag{52}$$

Zunächst bemerken wir, dass die *Transposition* auf eine Zahl, das heisst auf eine 1×1-*Matrix* keine Wirkung hat. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt offensichtlich

$$x^T = [\; x \;]^T = [\; x \;] = x. \tag{53}$$

Im folgenden zeigen wir drei verschiedene Varianten, wie (52) bewiesen werden kann.

Variante 1: Da es sich bei einem *Skalar-Produkt* um eine *reelle Zahl* handelt, welche das *Produkt* von *Matrizen* ist, können wir sowohl (53) als auch die Rechenregeln für *Matrix-Produkte* darauf anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\langle \mathbf{v}, A \cdot \mathbf{w} \rangle}} &= \langle \mathbf{v}, A \cdot \mathbf{w} \rangle^T = \left(\mathbf{v}^T \cdot A \cdot \mathbf{w}\right)^T = \mathbf{w}^T \cdot A^T \cdot \left(\mathbf{v}^T\right)^T = \mathbf{w}^T \cdot A^T \cdot \mathbf{v} \\ &= \langle \mathbf{w}, A^T \cdot \mathbf{v} \rangle = \underline{\underline{\langle A^T \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle .}} \end{aligned} \tag{54}$$

Dabei haben wir die *Matrixrechenregel* $(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T$ für die *Transposition* eines *Produktes* aus drei *Matrizen* angewendet.

Variante 2: Da es sich bei einem *Skalar-Produkt* um eine reelle Zahl handelt, welche das Produkt von Matrizen ist, können wir sowohl (53) als auch die Rechenregeln für *Matrix-Produkte* darauf anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\langle \mathbf{v}, A \cdot \mathbf{w} \rangle}} &= \langle \mathbf{v}, A \cdot \mathbf{w} \rangle^T = \left(\mathbf{v}^T \cdot A \cdot \mathbf{w}\right)^T = \left(\mathbf{v}^T \cdot (A \cdot \mathbf{w})\right)^T = (A \cdot \mathbf{w})^T \cdot \left(\mathbf{v}^T\right)^T \\ &= \mathbf{w}^T \cdot A^T \cdot \mathbf{v} = \langle \mathbf{w}, A^T \cdot \mathbf{v} \rangle = \underline{\underline{\langle A^T \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle .}} \end{aligned} \tag{55}$$

Dabei haben wir die *Matrixrechenregel* $(AB)^T = B^T A^T$ für die *Transposition* eines *Produktes* aus zwei *Matrizen* angewendet.

Variante 3: Durch explizites Rechnen mit den *Komponenten* von

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \ \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{56}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\underline{\langle \mathbf{v}\,, A \cdot \mathbf{w} \rangle} &= \mathbf{v}^T \cdot A \cdot \mathbf{w} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11}w_1 + a_{12}w_2 \\ a_{21}w_1 + a_{22}w_2 \end{bmatrix} \\
&= v_1 \cdot \big(a_{11}w_1 + a_{12}w_2\big) + v_2 \cdot \big(a_{21}w_1 + a_{22}w_2\big) \\
&= \underline{a_{11}v_1w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{21}v_2w_1 + a_{22}v_2w_2}
\end{aligned} \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\big\langle A^T \cdot \mathbf{v}\,, \mathbf{w} \big\rangle}} &= \big(A^T \cdot \mathbf{v}\big)^T \cdot \mathbf{w} = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right)^T \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\
&= \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \right)^T \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{21}v_2 \\ a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}v_1 + a_{21}v_2 & a_{12}v_1 + a_{22}v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \\
&= \big(a_{11}v_1 + a_{21}v_2\big) \cdot w_1 + \big(a_{12}v_1 + a_{22}v_2\big) \cdot w_2 \\
&= \underline{a_{11}v_1w_1 + a_{21}v_2w_1 + a_{12}v_1w_2 + a_{22}v_2w_2} = \underline{\underline{\langle \mathbf{v}\,, A \cdot \mathbf{w} \rangle\,.}}
\end{aligned} \tag{58}$$

Wobei die Richtigkeit des letzten *Gleichheitszeichens* in (58) und damit das gewünschte Resultat (52) aus dem Vergleich der letzten Zeilen aus (58) und (57) folgt.

Die Varianten 1 und 2 haben gegenüber der Variante 3 zwei wesentliche Vorteile:

i) Der Rechenaufwand in den Varianten 1 und 2 ist bedeutend kleiner.

ii) In Variante 3 wird die Aussage (52) nur für *Ortsvektoren* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$ und Matrizen $A \in \mathbb{M}(2, 2, \mathbb{R})$ bewiesen (was für die Teilaufgabe hier auch ausreicht). Die Varianten 1 und 2 liefern jedoch einen allgemeineren Beweis, welcher die Aussage (52) für $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}^+$ zeigt.

Mit Hilfe von (52) finden wir sofort, dass auch gelten muss

$$\underline{\underline{\big\langle \mathbf{v}\,, A^T \cdot \mathbf{w} \big\rangle}} = \Big\langle \big(A^T\big)^T \cdot \mathbf{v}\,, \mathbf{w} \Big\rangle = \underline{\underline{\langle A \cdot \mathbf{v}\,, \mathbf{w} \rangle\,.}} \tag{59}$$

d) Gemäss (52) und (51) gilt

$$\underline{\underline{\langle A \cdot \mathbf{v}\,, A \cdot \mathbf{w} \rangle}} = \big\langle A^T \cdot A \cdot \mathbf{v}\,, \mathbf{w} \big\rangle = \underline{\underline{\langle \mathbf{v}\,, \mathbf{w} \rangle}} \quad \text{für alle} \quad \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2 \tag{60a}$$

$$\Leftrightarrow A^T \cdot A = \mathbb{1} \tag{60b}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A \text{ ist } \textit{orthogonal.}}} \tag{60c}$$

Die *Matrix* einer *linearen Abbildung* ist also genau dann *orthogonal*, wenn das *Skalar-Produkt* von zwei *Bild-Vektoren* stets den gleichen Wert hat, wie das *Skalar-Produkt* der entsprechenden *Urbild-Vektoren*. Man sagt auch, das *Skalar-Produkt* ist *invariant* unter der Anwendung einer *orthogonalen Matrix*.

e) Gemäss (60a) gilt

$$\underline{\underline{|A \cdot \mathbf{v}|}} = \sqrt{\langle A \cdot \mathbf{v}\,, A \cdot \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{\langle \mathbf{v}\,, \mathbf{v} \rangle} = \underline{\underline{|\mathbf{v}|}} \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \tag{61a}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\underline{A \text{ ist } \textit{orthogonal.}}} \tag{61b}$$

Die *Matrix* einer *linearen Abbildung* ist also genau dann *orthogonal*, wenn die *Länge* jedes *Bild-Vektors* stets den gleichen Wert hat, wie die *Länge* des entsprechenden *Urbild-Vektors.* Man sagt auch, die *Vektor-Länge* ist *invariant* unter der Anwendung einer *orthogonalen Matrix.*

f) Da *Spiegelungen* und *Drehungen* von *Ortsvektoren* deren *Länge* nicht verändern, müssen alle *Drehmatrizen* und *Spiegelungsmatrizen* gemäss den Erkenntnissen der Teilaufgabe e) zwingend *orthogonal* sein. Wir prüfen das für die allgemeine *Drehmatrix* explizit nach. Es gilt

$$\underline{\underline{R^{-1}(\alpha)}} = R(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{R^T(\alpha).}} \tag{62}$$

Nach Teilaufgabe d) lassen *Spiegelungen* und *Drehungen* auch das *Skalar-Produkt* von zwei *Ortsvektoren invariant*: Das heisst, wenn zwei *Ortsvektoren* beide auf die gleiche Weise *gedreht* oder *gespiegelt* werden, dann ändert sich dabei ihr *Skalar-Produkt* nicht.

6. Aussagen über zwei Matrizen in 3D

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}. \tag{63}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Matrix* B ist *symmetrisch.*	●	○
b) Die *Matrix* A beschreibt eine *Spiegelung.*	○	●
c) Die *Matrix* A ist *singulär.*	○	●
d) Die *Matrizen* A und $C := B/3$ sind *orthogonal.*	●	○
e) Es gilt $2 \cdot \left(A + A^T\right) + B = \mathbb{1}$.	●	○
f) Es gilt $A^{30} = B \cdot B^T$.	○	●

7. Spiegelungen und Drehungen in 3D

Seien $\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{n} \in \mathbb{R}^3$ mit $\varphi = |\boldsymbol{\varphi}|$. Wir betrachten die *Generator-Matrix*

$$J(\boldsymbol{\varphi}) := \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \tag{64}$$

sowie die *Matrizen*

$$S(\mathbf{n}) := \mathbb{1} - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^T \tag{65}$$

$$R(\boldsymbol{\varphi}) := \mathbb{1} + \big(1 - \cos(\varphi)\big) \cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \sin(\varphi) \cdot J(\hat{\boldsymbol{\varphi}}), \tag{66}$$

welche die *Spiegelung* an der Ebene durch den Ursprung senkrecht zu $\mathbf{n}$ und die *Drehung* um die *Drehachse* $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ um den *Winkel* φ beschreiben.

a) Für jedes $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\underline{\underline{J(\boldsymbol{\varphi}) \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot v_1 - \varphi_3 \cdot v_2 + \varphi_2 \cdot v_3 \\ \varphi_3 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 - \varphi_1 \cdot v_3 \\ -\varphi_2 \cdot v_1 + \varphi_1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \varphi_2 \cdot v_3 - \varphi_3 \cdot v_2 \\ \varphi_3 \cdot v_1 - \varphi_1 \cdot v_3 \\ \varphi_1 \cdot v_2 - \varphi_2 \cdot v_1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\boldsymbol{\varphi} \times \mathbf{v}.}} \tag{67}$$

b) Zuerst bemerken wir, dass gilt

$$J^T(\boldsymbol{\varphi}) = \begin{bmatrix} 0 & -\varphi_3 & \varphi_2 \\ \varphi_3 & 0 & -\varphi_1 \\ -\varphi_2 & \varphi_1 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & \varphi_3 & -\varphi_2 \\ -\varphi_3 & 0 & \varphi_1 \\ \varphi_2 & -\varphi_1 & 0 \end{bmatrix} = -J(\boldsymbol{\varphi}), \tag{68}$$

das heisst, $J(\boldsymbol{\varphi})$ ist *schiefsymmetrisch*. Daraus folgt

$$\underline{\underline{\big(J^2(\boldsymbol{\varphi})\big)^T}} = \big(J(\boldsymbol{\varphi}) \cdot J(\boldsymbol{\varphi})\big)^T = J^T(\boldsymbol{\varphi}) \cdot J^T(\boldsymbol{\varphi}) = \big(-J(\boldsymbol{\varphi})\big) \cdot \big(-J(\boldsymbol{\varphi})\big)$$

$$= (-1)^2 \cdot J(\boldsymbol{\varphi}) \cdot J(\boldsymbol{\varphi}) = \underline{\underline{J^2(\boldsymbol{\varphi}).}} \tag{69}$$

c) Es gilt

$$\underline{\underline{S^T(\mathbf{n})}} := \big(\mathbb{1} - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^T\big)^T = \mathbb{1}^T - 2 \cdot \big(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^T\big)^T = \mathbb{1} - 2 \cdot \big(\mathbf{n}^T\big)^T \cdot \hat{\mathbf{n}}^T = \mathbb{1} - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^T$$

$$= \underline{\underline{S(\mathbf{n}).}} \tag{70}$$

d) Wir zeigen, dass $S(\mathbf{n})$ und $R(\boldsymbol{\varphi})$ *orthogonal* sind. Aus (65), (70) und mit Hilfe der Rechenregeln für *Matrizen* erhalten wir

$$\underline{\underline{S^T(\mathbf{n}) \cdot S(\mathbf{n})}} = S(\mathbf{n}) \cdot S(\mathbf{n}) = \big(\mathbb{1} - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^T\big) \cdot \big(\mathbb{1} - 2 \cdot \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^T\big)$$

$$
\begin{aligned}
&= \mathbb{1}\cdot\mathbb{1} - 2\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T\cdot\mathbb{1} - \mathbb{1}\cdot 2\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T + 2\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T\cdot 2\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T \\
&= \mathbb{1} - 2\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T - 2\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T + 4\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T \\
&= \mathbb{1} - 4\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T + 4\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\langle\hat{\mathbf{n}},\hat{\mathbf{n}}\rangle\cdot\hat{\mathbf{n}}^T = \mathbb{1} - 4\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T + 4\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot 1\cdot\hat{\mathbf{n}}^T \\
&= \mathbb{1} - 4\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T + 4\cdot\hat{\mathbf{n}}\cdot\hat{\mathbf{n}}^T = \underline{\underline{\mathbb{1}.}}
\end{aligned} \tag{71}
$$

Aus (67) und mit Hilfe der GRASSMANN-*Regel* für das *Vektor-Produkt* finden wir für $J(\boldsymbol{\varphi})$ die *Potenz-Regeln*

$$
J^2(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}\times\big(\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{v}\big) = \langle\boldsymbol{\varphi},\mathbf{v}\rangle\cdot\boldsymbol{\varphi} - \langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle\cdot\mathbf{v} \tag{72}
$$

$$
\begin{aligned}
J^3(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v} &= J(\boldsymbol{\varphi})\cdot J^2(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v} = \boldsymbol{\varphi}\times\big(J^2(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v}\big) = \boldsymbol{\varphi}\times\Big(\langle\boldsymbol{\varphi},\mathbf{v}\rangle\cdot\boldsymbol{\varphi} - \langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle\cdot\mathbf{v}\Big) \\
&= \langle\boldsymbol{\varphi},\mathbf{v}\rangle\cdot\boldsymbol{\varphi}\times\boldsymbol{\varphi} - \langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle\cdot\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{v} = 0 - \langle\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\varphi}\rangle\cdot\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{v} = -\varphi^2\cdot\boldsymbol{\varphi}\times\mathbf{v} \\
&= -\varphi^2\cdot J(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{73}
$$

$$
J^4(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v} = J(\boldsymbol{\varphi})\cdot J^3(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v} = J(\boldsymbol{\varphi})\cdot\big(-\varphi^2\cdot J(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v}\big) = -\varphi^2\cdot J^2(\boldsymbol{\varphi})\cdot\mathbf{v}. \tag{74}
$$

Für den *Einheitsvektor* $\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ findet man daraus

$$
J^3(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = -1^2\cdot J(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = -J(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \quad \text{und} \quad J^4(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = -1^2\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = -J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \tag{75}
$$

Durch *Transponieren* und aus (66), (68) und (69) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
R^T(\boldsymbol{\varphi}) &:= \Big(\mathbb{1} + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \sin(\varphi)\cdot J(\hat{\boldsymbol{\varphi}})\Big)^T \\
&= \mathbb{1}^T + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot\big(J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}})\big)^T + \sin(\varphi)\cdot J^T(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\
&= \mathbb{1} + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \sin(\varphi)\cdot\big(-J(\hat{\boldsymbol{\varphi}})\big) \\
&= \mathbb{1} + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) - \sin(\varphi)\cdot J(\hat{\boldsymbol{\varphi}}).
\end{aligned} \tag{76}
$$

Durch Ausmultiplizieren, Einsetzen der *Potenz-Regeln* (75) für $J(\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ und sortieren der Terme nach *Potenzen* von $J(\hat{\boldsymbol{\varphi}})$ erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{R^T(\boldsymbol{\varphi})\cdot R(\boldsymbol{\varphi})}} = &\Big(\mathbb{1} + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \sin(\varphi)\cdot J(\hat{\boldsymbol{\varphi}})\Big) \\
&\quad\cdot\Big(\mathbb{1} + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) - \sin(\varphi)\cdot J(\hat{\boldsymbol{\varphi}})\Big) \\
= &\ \mathbb{1} + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) - \sin(\varphi)\cdot J(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\
&\quad + \big(1-\cos(\varphi)\big)^2\cdot J^4(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) - \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot\sin(\varphi)\cdot J^3(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \sin(\varphi)\cdot J(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\
&\quad + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot\sin(\varphi)\cdot J^3(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) - \sin^2(\varphi)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\
= &\ \mathbb{1} + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \big(1-\cos(\varphi)\big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) + \big(1-\cos(\varphi)\big)^2\cdot J^4(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\
&\quad - \sin^2(\varphi)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) \\
= &\ \mathbb{1} + \Big(\big(1-\cos(\varphi)\big) + \big(1-\cos(\varphi)\big) - \big(1-\cos(\varphi)\big)^2 - \sin^2(\varphi)\Big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}})
\end{aligned}
$$

$$= \mathbb{1} + \Big(2 - 2\cdot\cos(\varphi) - 1 + 2\cdot 1\cdot\cos(\varphi) - \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\Big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}})$$

$$= \mathbb{1} + \Big(1 - \cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\Big)\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbb{1} + 0\cdot J^2(\hat{\boldsymbol{\varphi}}) = \mathbb{1} + 0 = \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \qquad (77)$$

e) Wir berechnen mit Hilfe von (65) die *Matrizen*, welche die *Spiegelungen* an der x-y-Ebene, y-z-Ebene und x-z-Ebene beschreiben.

$$\underline{\underline{S_{xy}}} = S(\hat{\mathbf{e}}_z) = \mathbb{1} - 2\cdot\hat{\mathbf{e}}_z\cdot\hat{\mathbf{e}}_z^T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-0&0-0&0-0\\0-0&1-0&0-0\\0-0&0-0&1-2\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}}}. \qquad (78)$$

$$\underline{\underline{S_{yz}}} = S(\hat{\mathbf{e}}_x) = \mathbb{1} - 2\cdot\hat{\mathbf{e}}_x\cdot\hat{\mathbf{e}}_x^T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-2&0-0&0-0\\0-0&1-0&0-0\\0-0&0-0&1-0\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}}. \qquad (79)$$

$$\underline{\underline{S_{xz}}} = S(\hat{\mathbf{e}}_y) = \mathbb{1} - 2\cdot\hat{\mathbf{e}}_y\cdot\hat{\mathbf{e}}_y^T = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0&1&0\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1-0&0-0&0-0\\0-0&1-2&0-0\\0-0&0-0&1-0\end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}}. \qquad (80)$$

f) Wir berechnen mit Hilfe von (64) und (66) die *Matrizen*, welche die *Drehungen* um die x-Achse, y-Achse und z-Achse um den *Winkel* φ beschreiben. Für die *Generator-Matrizen* und deren *Quadrate* gilt

$$J(\hat{\mathbf{e}}_x) = \begin{bmatrix}0&-0&0\\0&0&-1\\-0&1&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix} \qquad (81)$$

$$J^2(\hat{\mathbf{e}}_x) = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix} \qquad (82)$$

$$J(\hat{\mathbf{e}}_y) = \begin{bmatrix}0&-0&1\\0&0&-0\\-1&0&0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&1\\0&0&0\\-1&0&0\end{bmatrix} \qquad (83)$$

$$J^2(\hat{\mathbf{e}}_y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{84}$$

$$J(\hat{\mathbf{e}}_z) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -0 \\ -0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{85}$$

$$J^2(\hat{\mathbf{e}}_z) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{86}$$

Daraus erhalten wir die *Drehmatrizen*

$$\underline{\underline{R_x(\varphi)}} = R(\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_x) = \mathbb{1} + \big(1 - \cos(\varphi)\big) \cdot J^2(\hat{\mathbf{e}}_x) + \sin(\varphi) \cdot J(\hat{\mathbf{e}}_x)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \big(1 - \cos(\varphi)\big) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \sin(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0+0 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 1-1+\cos(\varphi)+0 & 0+0-\sin(\varphi) \\ 0+0+0 & 0+0+\sin(\varphi) & 1-1+\cos(\varphi)+0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}}}. \tag{87}$$

$$\underline{\underline{R_y(\varphi)}} = R(\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_y) = \mathbb{1} + \big(1 - \cos(\varphi)\big) \cdot J^2(\hat{\mathbf{e}}_y) + \sin(\varphi) \cdot J(\hat{\mathbf{e}}_y)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \big(1 - \cos(\varphi)\big) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} + \sin(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-1+\cos(\varphi)+0 & 0+0+0 & 0+0+\sin(\varphi) \\ 0+0+0 & 1+0+0 & 0+0+0 \\ 0+0-\sin(\varphi) & 0+0+0 & 1-1+\cos(\varphi)+0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{bmatrix}}}. \tag{88}$$

$$\underline{\underline{R_z(\varphi)}} = R(\varphi \cdot \hat{\mathbf{e}}_z) = \mathbb{1} + \big(1 - \cos(\varphi)\big) \cdot J^2(\hat{\mathbf{e}}_z) + \sin(\varphi) \cdot J(\hat{\mathbf{e}}_z)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \big(1 - \cos(\varphi)\big) \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \sin(\varphi) \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1-1+\cos(\varphi)+0 & 0+0-\sin(\varphi) & 0+0+0 \\ 0+0+\sin(\varphi) & 1-1+\cos(\varphi)+0 & 0+0+0 \\ 0+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{89}$$

8. Spezielle lineare Gleichungssysteme

Wir lösen die folgenden *linearen Gleichungssysteme* durch Ausnutzen der algebraischen Eigen-schaften der linken Seite.

a) Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} 3x - 4y = -55 \\ 4x + 3y = 10 \end{cases} \tag{90}$$

und schreiben es zunächst in der *Matrix-Form*

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -55 \\ 10 \end{bmatrix} = \mathbf{b}. \tag{91}$$

Weil die *Spalten-Vektoren* der *Matrix A* paarweise *senkrecht* aufeinander stehen und jeweils einen *Betrag* haben von

$$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5, \tag{92}$$

ist die *Matrix* $Q := A/5$ *orthogonal*. Es gilt also

$$A \cdot \mathbf{x} = 5 \cdot Q \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Big| : 5 \tag{93}$$

$$\Leftrightarrow \qquad Q \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{5} \cdot \mathbf{b} \qquad \Big|\, Q^T \cdot \ldots \tag{94}$$

$$\Leftrightarrow \qquad Q^T \cdot Q \cdot \mathbf{x} = \mathbb{1} \cdot \mathbf{x} = Q^T \cdot \frac{1}{5} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{5} \cdot Q^T \cdot \mathbf{b}. \tag{95}$$

Das LGLS (90) hat demnach die *eindeutige Lösung*

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}} = \frac{1}{5} \cdot Q^T \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot A^T \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{5 \cdot 5} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -55 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -11 \\ 2 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 3 \cdot (-11) + 4 \cdot 2 \\ (-4) \cdot (-11) + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} -25 \\ 50 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -5 \\ 10 \end{bmatrix}}}. \tag{96}$$

b) Wir betrachten das LGLS

$$\begin{cases} 7x - 4y - 4z = -19 \\ -4x + y - 8z = -2 \\ -4x - 8y + z = -11 \end{cases} \tag{97}$$

und schreiben es zunächst in der *Matrix-Form*

$$A \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -19 \\ -2 \\ -11 \end{bmatrix} = \mathbf{b}. \tag{98}$$

Weil die *Spalten-Vektoren* der *Matrix* A paarweise *senkrecht* aufeinander stehen und jeweils einen *Betrag* haben von

$$\sqrt{7^2 + 4^2 + 4^2} = \sqrt{81} = 9 \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{4^2 + 1^2 + 8^2} = \sqrt{81} = 9 \tag{99}$$

ist die *Matrix* $Q := A/9$ *orthogonal.* Es gilt also

$$A \cdot \mathbf{x} = 9 \cdot Q \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad \Big|\, : 9 \tag{100}$$

$$\Leftrightarrow \qquad Q \cdot \mathbf{x} = \frac{1}{9} \cdot \mathbf{b} \qquad \Big|\, Q^T \cdot \ldots \tag{101}$$

$$\Leftrightarrow \qquad Q^T \cdot Q \cdot \mathbf{x} = \mathbb{1} \cdot \mathbf{x} = Q^T \cdot \frac{1}{9} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{9} \cdot Q^T \cdot \mathbf{b}. \tag{102}$$

Das LGLS (97) hat demnach die *eindeutige Lösung*

$$\underline{\underline{\mathbf{x}}} = \frac{1}{9} \cdot Q^T \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{9} \cdot A^T \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{81} \cdot A \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{81} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -4 & -4 \\ -4 & 1 & -8 \\ -4 & -8 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -19 \\ -2 \\ -11 \end{bmatrix}$$
$$= \frac{1}{81} \cdot \begin{bmatrix} 7 \cdot (-19) + (-4) \cdot (-2) + (-4) \cdot (-11) \\ (-4) \cdot (-19) + 1 \cdot (-2) + (-8) \cdot (-11) \\ (-4) \cdot (-19) + (-8) \cdot (-2) + 1 \cdot (-11) \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \cdot \begin{bmatrix} -81 \\ 162 \\ 81 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}}. \tag{103}$$

9. Aussagen über eine Drehmatrix in 2D

Wir betrachten die *Drehmatrix*

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}. \tag{104}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) A ist *symmetrisch*.	○	●
b) Es gilt $A^{12} = A^{63}$.	●	○
c) Es gilt $A^7 = R(\pi/3)$.	○	●
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = \mathbb{0}$.	○	●
e) Es gilt $A^{-1} = -A$.	○	●
f) Es gilt $A = -\mathbb{1} + \sqrt{3} \cdot R(\pi/2)$.	○	●