Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 3

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, partielle Integration und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die partielle Integration anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale zu berechnen.
- Sie können bestimmte Integrale näherungsweise auf eine vorgegebene Anzahl Dezimalstellen mit Python/Numpy berechnen.

1. Aussagen über partielle Integration

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Methode der partiellen Integration basiert auf der Produktregel der Differentialrechnung.	X	
b) Mit Hilfe der partiellen Integration kann jedes Produkt von 2 Funktionen integriert werden.		X
c) Um ein Produkt von 2 Funktionen mit partieller Integration integrieren zu können, muss man mindestens einen der Faktoren allein integrieren können.	X	
d) Mit Hilfe der partiellen Integration kann das Integral einer beliebigen differentierbaren Funktion f(x) auf die Berechnung des Integrals von $x \cdot f'(x)$ zurückgeführt werden und umgekehrt.	X	

2. Stammfunktionen mit partieller Integration bestimmen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit der Methode der partiellen Integration.

a) $\int xe^x dx$
b) $\int x^2 e^x dx$
c) $\int x \sin x \, dx$
d) $\int x \cos x \, dx$
e) $\int x^2 \sin x \, dx$
f) $\int x^2 \cos x \, dx$
g) $\int (\sin x)^2 dx$
h) $\int (\cos x)^2 dx$
i) $\int (\sinh x)^2 dx$
j) $\int (\cosh x)^2 dx$

a)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^x} \, \mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int 1 \cdot \mathrm{e}^x \, \mathrm{d}x = \underline{\underline{x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = (x-1)\,\mathrm{e}^x + c.}}$$

b)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x^2} \cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{e}^x - \int 2x \cdot \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\,(x-1)\,\mathrm{e}^x + c$$

$$= \underline{\underline{\left(x^2 - 2x + 2\right)\mathrm{e}^x + c.}}$$

c)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = x \cdot \big(-\cos(x)\big) - \int 1 \cdot \big(-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= -x\,\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = -x\,\cos(x) + \sin(x) + c = \underline{\underline{\sin(x) - x\,\cos(x) + c.}}$$

d)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = x \cdot \sin(x) - \int 1 \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{x\,\sin(x) + \cos(x) + c.}}$$

e)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x^2} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot \big(-\cos(x)\big) - \int 2x \cdot \big(-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= -x^2\,\cos(x) + 2\int x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = -x^2\,\cos(x) + 2x\,\sin(x) + 2\cos(x) + c$$

$$= \underline{\underline{2x\,\sin(x) + \left(2 - x^2\right)\cos(x) + c.}}$$

f)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = x^2\,\sin(x) - 2\int x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= x^2\,\sin(x) - 2\sin(x) + 2x\,\cos(x) + c = \underline{\underline{\left(x^2 - 2\right)\sin(x) + 2x\,\cos(x) + c.}}$$

g)

$$F(x) = \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{\sin(x)} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \sin(x) \cdot \big(-\cos(x)\big) - \int \cos(x) \cdot \big(-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x = -\sin(x)\,\cos(x) + \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\sin(x)\,\cos(x) + \int \big(1 - \sin^2(x)\big)\,\mathrm{d}x = -\sin(x)\,\cos(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= -\sin(x)\,\cos(x) + x + b - F(x).$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} F(x) &= -\sin(x)\,\cos(x) + x + b - F(x) && \Big| + F(x) \\ 2 \cdot F(x) &= -\sin(x)\,\cos(x) + x + b && \Big| : 2. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{-\sin(x)\,\cos(x) + x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{x - \sin(x)\,\cos(x)}{2} + c.}}$$

h)

$$F(x) = \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{\cos(x)} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} &= \cos(x) \cdot \sin(x) - \int \big(-\sin(x)\big) \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\,\sin(x) + \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(x)\,\sin(x) + \int \big(1 - \cos^2(x)\big)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\,\sin(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \cos(x)\,\sin(x) + x + b - F(x). \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} F(x) &= \cos(x)\,\sin(x) + x + b - F(x) && \Big| + F(x) \\ 2 \cdot F(x) &= \cos(x)\,\sin(x) + x + b && \Big| : 2. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{\cos(x)\,\sin(x) + x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{x + \cos(x)\,\sin(x)}{2} + c.}}$$

i)

Es gilt also

$$\begin{aligned} F(x) &= \sinh(x)\,\cosh(x) - x + b - F(x) && \Big| + F(x) \\ 2 \cdot F(x) &= \sinh(x)\,\cosh(x) - x + b && \Big| : 2. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{\sinh(x)\,\cosh(x) - x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{\sinh(x)\,\cosh(x) - x}{2} + c.}}$$

Es gilt also

$$\begin{aligned} F(x) &= \sinh(x)\,\cosh(x) - x + b - F(x) && \Big| + F(x) \\ 2 \cdot F(x) &= \sinh(x)\,\cosh(x) - x + b && \Big| : 2. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{\sinh(x)\,\cosh(x) - x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{\sinh(x)\,\cosh(x) - x}{2} + c.}}$$

j)

$$F(x) = \int \cosh^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{\cosh(x)} \cdot \overset{\uparrow}{\cosh(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \cosh(x) \cdot \sinh(x) - \int \sinh(x) \cdot \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x)\ \sinh(x) - \int \sinh^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \cosh(x)\ \sinh(x) - \int \left(\cosh^2(x) - 1\right)\mathrm{d}x = \cosh(x)\ \sinh(x) - \int \cosh^2(x)\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$= \cosh(x)\ \sinh(x) - F(x) + x + b.$$

Es gilt also

$$F(x) = \cosh(x)\ \sinh(x) - F(x) + x + b \qquad \big|\ + F(x)$$

$$2 \cdot F(x) = \cosh(x)\ \sinh(x) + x + b$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{\cosh(x)\ \sinh(x) + x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{\cosh(x)\ \sinh(x) + x}{2} + c.}}$$

3. Stammfunktionen mit partieller Integration bestimmen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Methode der partiellen Integration.

a) $\int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}} dx$ b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$

c) $\int_1^2 x \ln x \, dx$

a)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \overset{\downarrow}{x} \cdot \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}^{\uparrow}\,\mathrm{d}x = \left[x \cdot \sqrt{x+1}\right]\Big|_0^3 - \int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \left[x \cdot \sqrt{x+1}\right]\Big|_0^3 - \frac{2}{3} \cdot \left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^3$$

$$= 3 \cdot \sqrt{3+1} - 0 \cdot \sqrt{0+1} - \frac{2}{3} \cdot (3+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot (0+1)^{\frac{3}{2}} = 6 - 0 - \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{18}{3} - \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 x\,\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \overset{\downarrow}{x}\cdot \overset{\uparrow}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \left[x\cdot\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^2 - \int_1^2 1\cdot\frac{2}{3}\cdot(x-1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left[x\,(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^2 - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\left[(x-1)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{3}\cdot 2\cdot(2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}\cdot 1\cdot(1-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}\cdot(2-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15}\cdot(1-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3} - 0 - \frac{4}{15} + 0$$

$$= \frac{20}{15} - \frac{4}{15} = \underline{\underline{\frac{16}{15}}}.$$

c)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 \overset{\downarrow}{\ln(x)}\cdot \overset{\uparrow}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\right]\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\cdot\ln(x)\right]\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left[x^2\cdot\ln(x)\right]\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left[x^2\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\ln(2) - \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\ln(1) - \frac{1}{4}\cdot 2^2 + \frac{1}{4}\cdot 1^2$$

$$= 2\cdot\ln(2) - 0 - 1 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{2\,\ln(2) - \frac{3}{4}}}.$$

4. Stammfunktionen bestimmen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Methode.

a) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

b) $\int e^{at}\sin(\omega t)\,dt$

c) $\int r^3(\cos r^2)\,dr$

d) $\int \frac{x}{(\cos x)^2}\,dx$

e) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

f) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

a)

mittels Substitution lösen

$$u(x) := x^2 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2x.$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{1+u^2}\cdot\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot\arctan(u) + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot\arctan\left(x^2\right) + c.}}$$

b)
mittels partieller Integration

$$F(t)=\int \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{at}}\cdot \overset{\downarrow}{\sin(\omega t)}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{at}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a}\int \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{at}}\cdot \overset{\downarrow}{\cos(\omega t)}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{at}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{at}\cdot\cos(\omega t)-\frac{\omega}{a}\int \mathrm{e}^{at}\cdot(-1)\cdot\sin(\omega t)\mathrm{dt}\right)$$

$$=\frac{1}{a}\cdot\mathrm{e}^{at}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a^2}\cdot\mathrm{e}^{at}\cdot\cos(\omega t)-\frac{\omega^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{at}\cdot\sin(\omega t)\mathrm{dt}$$

$$=\mathrm{e}^{at}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a^2}\cdot\cos(\omega t\right)-\frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t).$$

Es gilt also

$$F(t)=\mathrm{e}^{at}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a^2}\cdot\cos(\omega t)\right)-\frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t)\quad\Big|+\frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t)$$

$$F(t)+\frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t)=\mathrm{e}^{at}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a^2}\cdot\cos(\omega t)\right)$$

$$\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right)\cdot F(t)=\mathrm{e}^{at}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a^2}\cdot\cos(\omega t)\right)\qquad\Big|:\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right).$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(t)}}=\frac{\mathrm{e}^{at}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a^2}\cdot\cos(\omega t)\right)}{\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right)}+c=\frac{\mathrm{e}^{at}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(\omega t)-\frac{\omega}{a^2}\cdot\cos(\omega t)\right)\cdot a^2}{\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right)\cdot a^2}+c$$

$$=\underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^{at}\cdot(a\cdot\sin(\omega t)-\omega\cdot\cos(\omega t))}{a^2+\omega^2}+c.}}$$

c)
mittels Substitution

$$u(r) := r^2 \;\Rightarrow\; u'(r) = 2r.$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 2r \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}u}{2r} = \frac{1}{2r}\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\underline{\underline{F(r)}} = \int r^3 \cos(r^2)\,\mathrm{d}r = \int u \cdot r \cdot \cos(u) \cdot \frac{1}{2r}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \overset{\downarrow}{u} \cdot \overset{\uparrow}{\cos}(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(u \cdot \sin(u) - \int 1 \cdot \sin(u)\,\mathrm{d}u\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(u \cdot \sin(u) - \int \sin(u)\,\mathrm{d}u\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Big(u \cdot \sin(u) - (-1)\cdot\cos(u) + \tilde{c}\Big) = \frac{1}{2}\cdot\Big(u \cdot \sin(u) + \cos(u)\Big) + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot\Big(r^2 \cdot \sin(r^2) + \cos(r^2)\Big) + c.}}$$

d)

Wir zerlegen den Integrand $f(x) = \frac{x}{\cos^2 x}$ wie folgt in ein *Produkt* aus zwei Faktoren u und v':

$$f(x) = \frac{x}{\cos^2 x} = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos^2 x}}_{v'} = u\,v'$$

Begründung: Diese Zerlegung hat Aussicht auf Erfolg, da $v' = \frac{1}{\cos^2 x}$ bekanntlich die *Ableitung* von $\tan x$ ist. Mit der gewählten Zerlegung

$$u = x, \quad v' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{und damit} \quad u' = 1, \quad v = \tan x$$

führt die *partielle Integration* zu folgendem Ergebnis:

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \int x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int u\,v'\,dx = u\,v - \int u'\,v\,dx = x \cdot \tan x - \int 1 \cdot \tan x\,dx =$$

$$= x \cdot \tan x - \underbrace{\int \tan x\,dx}_{I_1} = x \cdot \tan x - I_1$$

Das „Hilfsintegral“ I_1 ist zwar *kein* Grundintegral, lässt sich aber durch eine *Substitution* leicht lösen, wenn man die trigonometrische Beziehung $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ beachtet:

$$I_1 = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

Im Zähler steht – vom Vorzeichen abgesehen – die *Ableitung* des Nenners, das Integral I_1 ist daher durch die *Substitution* $u = \cos x$ wie folgt lösbar

$$u = \cos x, \quad \frac{du}{dx} = -\sin x, \quad dx = \frac{du}{-\sin x}$$

$$I_1 = \int \tan x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = \int \frac{\sin x}{u} \cdot \frac{du}{-\sin x} = -\int \frac{1}{u}\,du = -\ln|u| + C = -\ln|\cos x| + C$$

Für das vorgegebene Integral I erhalten wir damit die Lösung

$$I = \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = x \cdot \tan x - I_1 = x \cdot \tan x - (-\ln|\cos x| + C) = x \cdot \tan x + \ln|\cos x| - C =$$

$$= x \cdot \tan x + \ln|\cos x| + C^* \qquad (C^* = -C)$$

Wir „verifizieren“ das Ergebnis, indem wir zeigen, dass die 1. Ableitung des unbestimmten Integrals zum Integranden führt. Dabei verwenden wir in der angedeuteten Weise die *Produktregel* (1. Summand) und die *Kettenregel* (2. Summand):

$$I = \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\tan x}_{v} + \ln|\underbrace{\cos x}_{t}| + C^* = u\,v + \ln|t| + C^*$$

$$I' = u'v + v'u + \frac{1}{t} \cdot t' = 1 \cdot \tan x + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot x + \frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x) = \tan x + \frac{x}{\cos^2 x} - \tan x = \frac{x}{\cos^2 x}$$

(unter Verwendung der trigonometrischen Beziehung $\sin x / \cos x = \tan x$)

e)

Die Substitution $u = 1 + e^x$ führt zu einer Vereinfachung im Nenner des Integranden. Somit gilt (versuchsweise):

$$u = 1 + e^x, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad dx = \frac{du}{e^x}$$

Durchführung der Integralsubstitution:

$$I = \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\, dx = \int \frac{e^{2x}}{u} \cdot \frac{du}{e^x} = \int \frac{e^x \cdot e^x}{u} \cdot \frac{du}{e^x} = \int \frac{e^x}{u}\, du$$

Um die alte Variable x vollständig aus dem Integral zu entfernen, lösen wir die Substitutionsgleichung $u = 1 + e^x$ nach e^x auf und setzen den gefundenen Ausdruck $e^x = u - 1$ ein. Das Integral I lässt sich jetzt leicht lösen:

$$I = \int \frac{e^x}{u}\, du = \int \frac{u - 1}{u}\, du = \int \left(1 - \frac{1}{u}\right) du = u - \ln|u| + C$$

Nach der Rücksubstitution $u = 1 + e^x$ erhält man die folgende Lösung:

$$I = \int \frac{e^{2x}}{1 + e^x}\, dx = (1 + e^x) - \ln|1 + e^x| + C = e^x - \ln(1 + e^x) + C^* \qquad (C^* = 1 + C)$$

f)

Mit der naheliegenden Substitution $u = \ln x, \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}, \quad dx = x\,du$ erreichen wir unser Ziel:

$$I = \int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx = \int \frac{u^3}{x} \cdot x\, du = \int u^3\, du = \frac{1}{4} u^4 + C$$

Die Lösung lautet somit nach vollzogener Rücksubstitution $u = \ln x$ wie folgt:

$$I = \int \frac{(\ln x)^3}{x}\, dx = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C$$

5. Aufleiten mit Python/Sympy

Berechnen Sie die unbestimmten Integrale aus Aufgabe 7 mit Python/Sympy.

a)

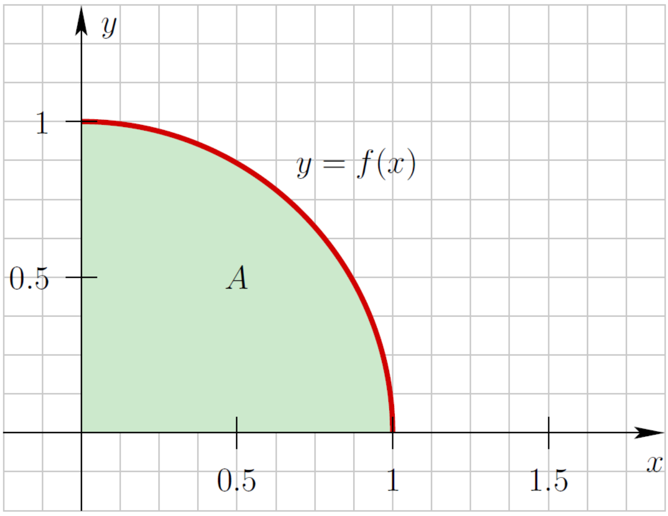
```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
sp.init_printing();
# Symbole:
x=sp.symbols('x');
```

```
# Parameter:
f=x/(1+x**4);
# Berechnungen:
F=sp.simplify(sp.integrate(f,x));
# Ausgabe:
dp.display(f);
dp.display(F);
```

b), c), e), f)
analog zu a), jedoch Funktion f und nach Bedarf die Symbole anpassen
→ die Stammfunktion bei d) am besten mit WolframAlpha überprüfen – Lösung in Python nicht korrekt

6. Fläche des Einheitskreises
Berechnen Sie die Fläche des Einheitskreises durch Integration, indem Sie einen geeigneten Teil des Kreisbogens als Graph einer Funktion auffassen und diesen integrieren.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution x = sin(u).

Wir wählen einen Viertelkreis, der im 1. Quadranten des kartesischen Koordinatensystems liegt, um die Fläche des Einheitskreises zu bestimmen.



Für die Punkte auf dem Einheitskreis gilt:

$$1 = x^2 + y^2 = x^2 + f^2(x) \qquad \Big| - x^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - x^2 = f^2(x) \qquad \Big| \sqrt{\ldots}\,.$$

$f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,.$

Die Fläche des Einheitskreises entspricht 4 mal der grün markierten Fläche in der obigen Abbildung:

$$A_{\mathrm{K}} = 4 \cdot A = 4 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Um das Integral zu lösen, wählen wir die Methode der Substitution.

$$x := \sin(u) \qquad \Big| (\ldots)'$$

$$1 = \cos(u) \cdot u' \qquad \Big| : \cos(u).$$

$$u' = \frac{1}{\cos(u)}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos(u)} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{1}{\cos(u)}\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \cos(u)\,\mathrm{d}u$$

und somit

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{A_{\mathrm{K}}}} &= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{1-\sin^2(u)}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}x \\
&= 4\int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \big|\cos(u)\big| \cdot \cos(u)\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u \\
&= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big[\sin(u)\cdot\cos(u)+u\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\Big(\sin(\pi/2)\cdot\cos(\pi/2)+\frac{\pi}{2}-\sin(0)\cdot\cos(0)-0\Big) \\
&= 2\cdot\Big(0+\frac{\pi}{2}-0-0\Big) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi.}}
\end{aligned}$$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 3

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über Vektorfelder

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Ein *Vektorfeld* auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine *Funktion* des Typs $\mathbf{v} : A \to \mathbb{R}^n$.	●	○
b) Die *Vektoren* eines *homogenen Vektorfeldes* haben an jedem Punkt die gleiche Länge.	●	○
c) Die *Vektoren* eines *homogenen Vektorfeldes* können von Punkt zu Punkt in unterschiedliche Richtungen zeigen.	○	●
d) Ist $\mathbf{v}$ ein *Vektorfeld* auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt dies auch für $\lvert\mathbf{v}\rvert$.	○	●
e) Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ zwei *Vektorfelder* auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt dies auch für $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{w}$.	●	○

2. Vektorfelder skizzieren

Wir skizzieren jeweils das gegebene *Vektorfeld*.

a) Wir betrachten das *Vektorfeld*

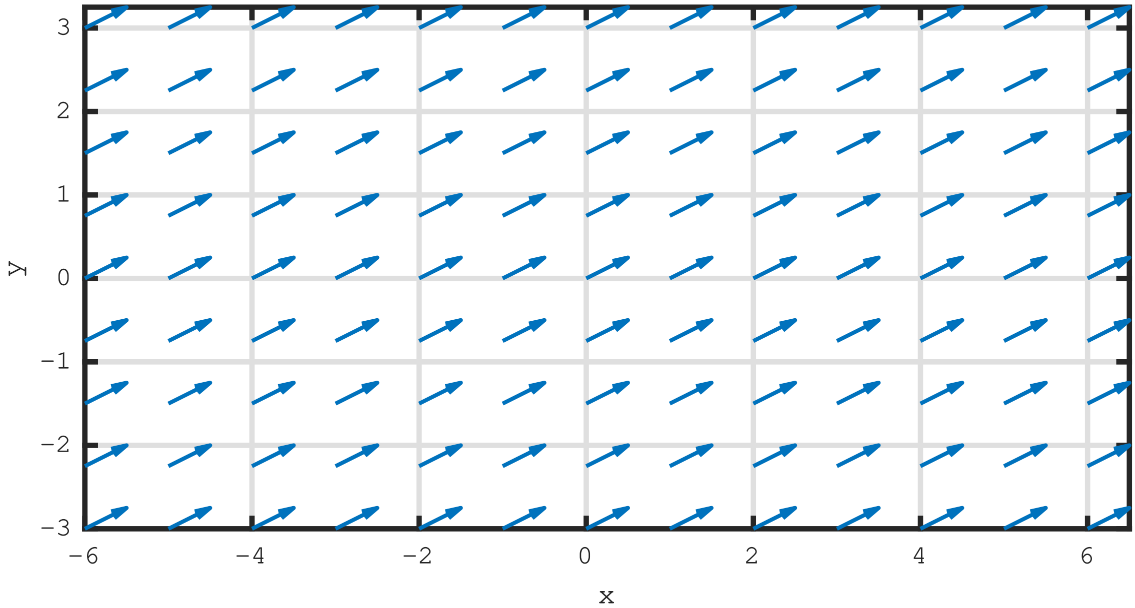
$$\mathbf{v}(x; y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Dies ist offensichtlich ein *homogenes Vektorfeld* mit *Länge* und *Steigung*

$$v(x; y) = \sqrt{0.5^2 + 0.25^2} \approx 0.6 \tag{2}$$

$$m(x; y) = \frac{0.25}{0.5} = 0.5\,. \tag{3}$$

Wir skizzieren das *Vektorfeld* in einem x-y-Diagramm.



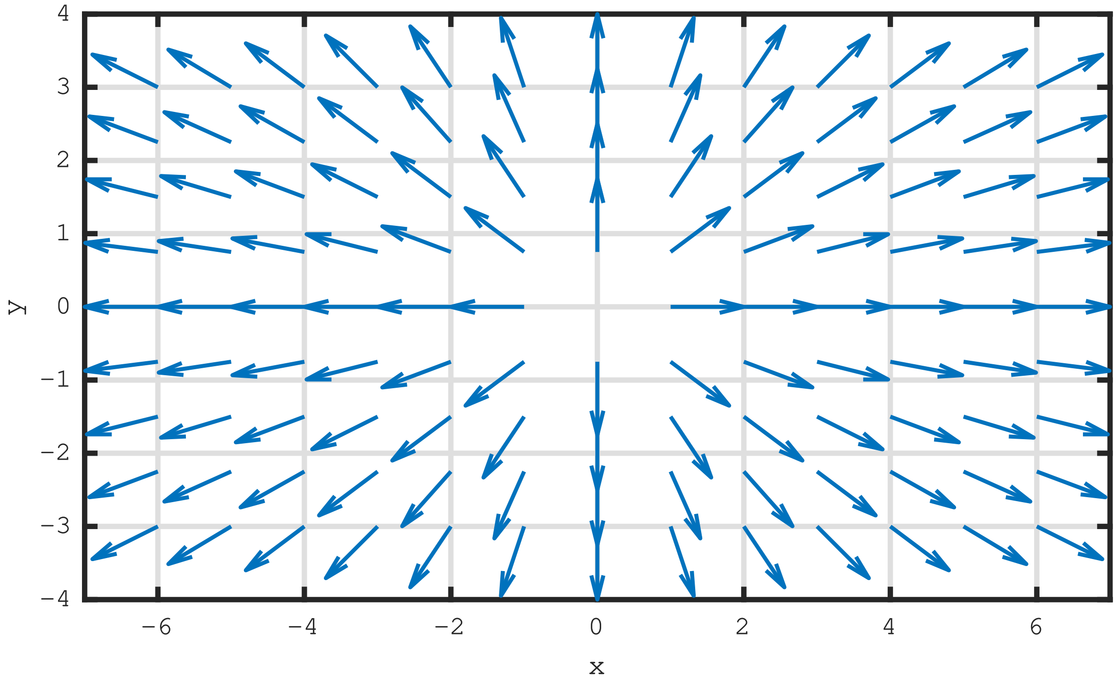
b) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Dies ist offensichtlich ein *Einheitsvektorfeld*, denn es gilt

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 1. \tag{5}$$

Wir skizzieren das *Vektorfeld* in einem x-y-Diagramm.



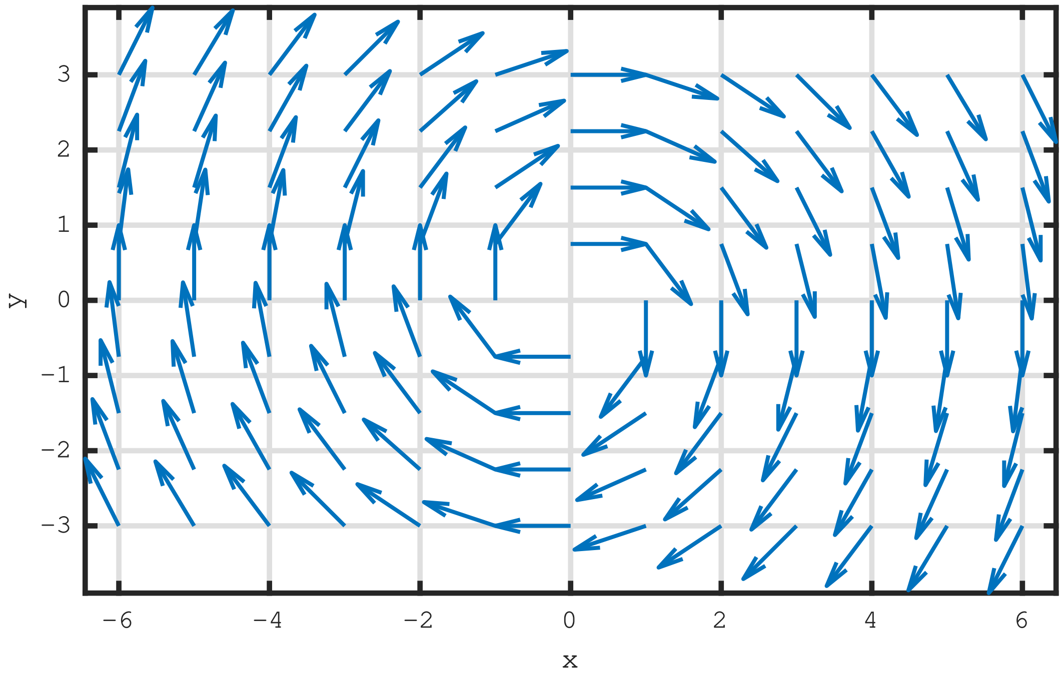
c) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Dies ist offensichtlich ein *Einheitsvektorfeld*, denn es gilt

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{y^2+(-x)^2} = 1. \tag{7}$$

Wir skizzieren das *Vektorfeld* in einem x-y-Diagramm.



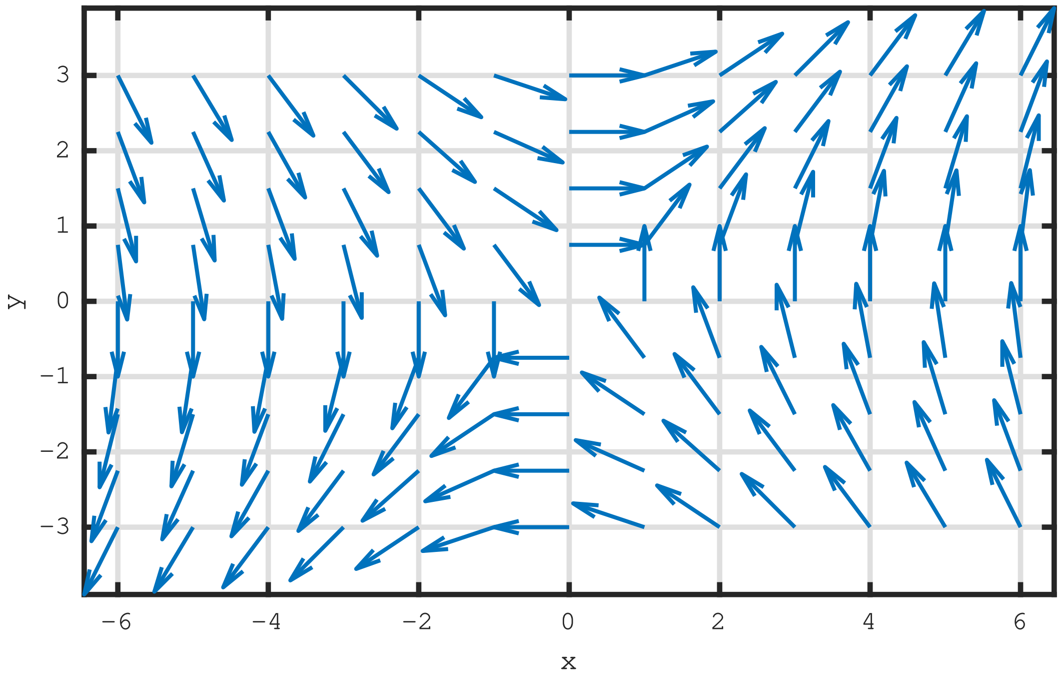
d) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Dies ist offensichtlich ein *Einheitsvektorfeld*, denn es gilt

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{y^2+x^2} = 1. \tag{9}$$

Wir skizzieren das *Vektorfeld* in einem x-y-Diagramm.



3. Vektorfelder plotten mit Python/Numpy

Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y) = \frac{2}{1+x^2+y^2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{10}$$

und den folgenden Code für Python/Numpy.

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
x_0=-6; x_E=6; y_0=-4; y_E=4;
N_x=13; N_y=9; sc=13; lw=0.005; fig=1;
# Funktionen:
def v(x,y):
        v_x=2/(1+x**2+y**2)*x;
        v_y=2/(1+x**2+y**2)*y;
        return v_x,v_y;
# Daten:
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x);
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y);
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data);
[v_x_grid,v_y_grid]=v(x_grid,y_grid);
# Plot:
fh=pl.figure(fig);
pl.quiver(x_grid,y_grid,v_x_grid,v_y_grid,scale=sc,width=lw);
pl.xlabel('$x$'); pl.ylabel('$y$');
pl.grid('on'); pl.axis('image');
```

Wir bearbeiten dazu die folgenden Teilaufgaben.

a) Wir führen den Code mit Python/Numpy aus und überzeugen uns, dass der Ouput einen Plot des *Vektorfeldes* (10) zeigt.

b) Durch den Parameter `scale` kann die *Länge* der geplotteten *Vektor-Pfeile* skaliert werden.

c) Durch den Parameter `width` kann die Dicke der geplotteten *Vektor-Pfeile* festgelegt werden.

d) Durch die Parameterwerte `N_x=13` und `N_y=9` wird ein sinnvolles Gitter über den Plot-Bereich der x-y-Ebene gelegt. Die Gitterpunkte liegen gerade an den *Punkten* mit *halbzahligen Koordinaten*. Die *Dichte* des Gitters ist so gewählt, dass genügend *Vektoren* geplottet werden, um den Verlauf des *Vektorfeldes* zu erkennen, aber dennoch jedem *Vektor* genügend Platz zur Verfügung steht.

4. Vektorfelder plotten mit Python/Numpy

Wir plotten die *Vektorfelder* aus Aufgabe 2 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
x_0=...; x_E=...; y_0=...; y_E=...;
N_x=...; N_y=...; sc=...; lw=0.005; fig=...;
# Funktionen:
def v(x,y):
        v_x=...;
        v_y=...;
        return v_x,v_y;
# Daten:
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x);
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y);
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data);
[v_x_grid,v_y_grid]=v(x_grid,y_grid);
# Plot:
fh=pl.figure(fig);
pl.quiver(x_grid,y_grid,v_x_grid,v_y_grid,scale=sc,width=lw);
pl.xlabel('$x$'); pl.ylabel('$y$');
pl.grid('on'); pl.axis('image');
```

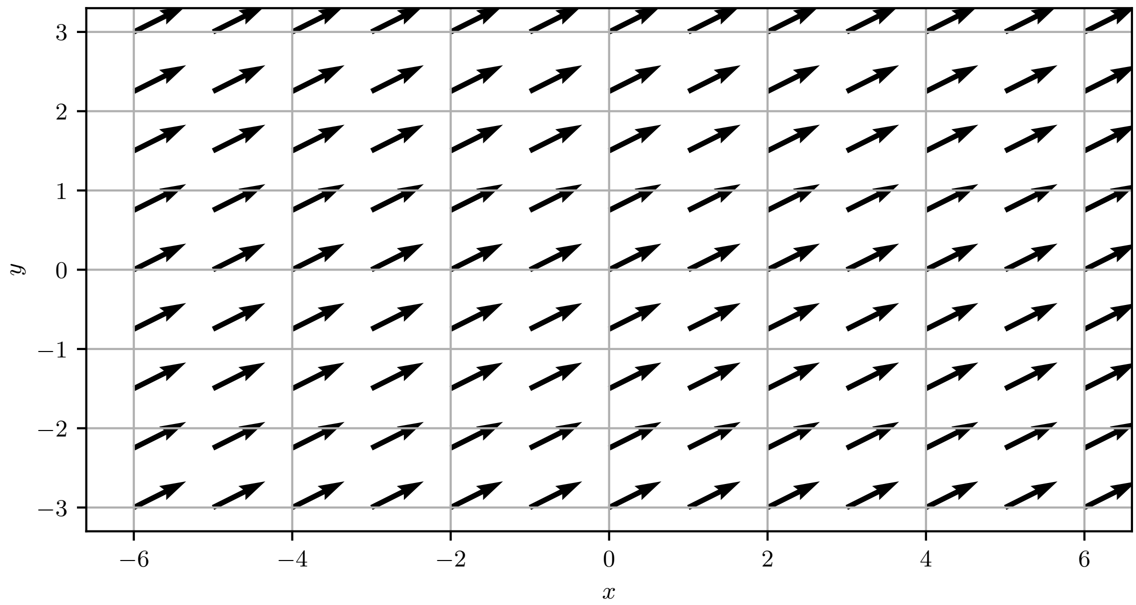
a) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Um das *Vektorfeld* $\mathbf{v}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
x_0=-6; x_E=6; y_0=-3; y_E=3;
N_x=13; N_y=9; sc=10; lw=0.005; fig=1;
# Funktionen:
def v(x,y):
        v_x=0.5;
        v_y=0.25;
        return v_x,v_y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



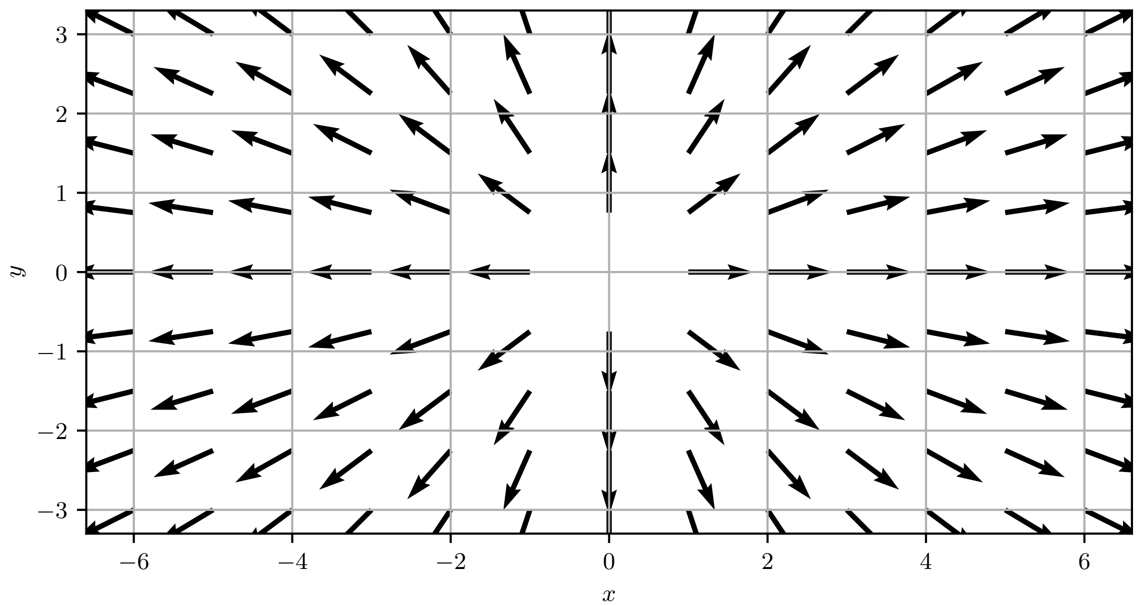
b) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Um das *Vektorfeld* $\mathbf{v}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
x_0=-6; x_E=6; y_0=-3; y_E=3;
N_x=13; N_y=9; sc=16; lw=0.005; fig=fig+1;
# Funktionen:
def v(x,y):
        v_x=x/np.sqrt(x**2+y**2);
        v_y=y/np.sqrt(x**2+y**2);
        return v_x,v_y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



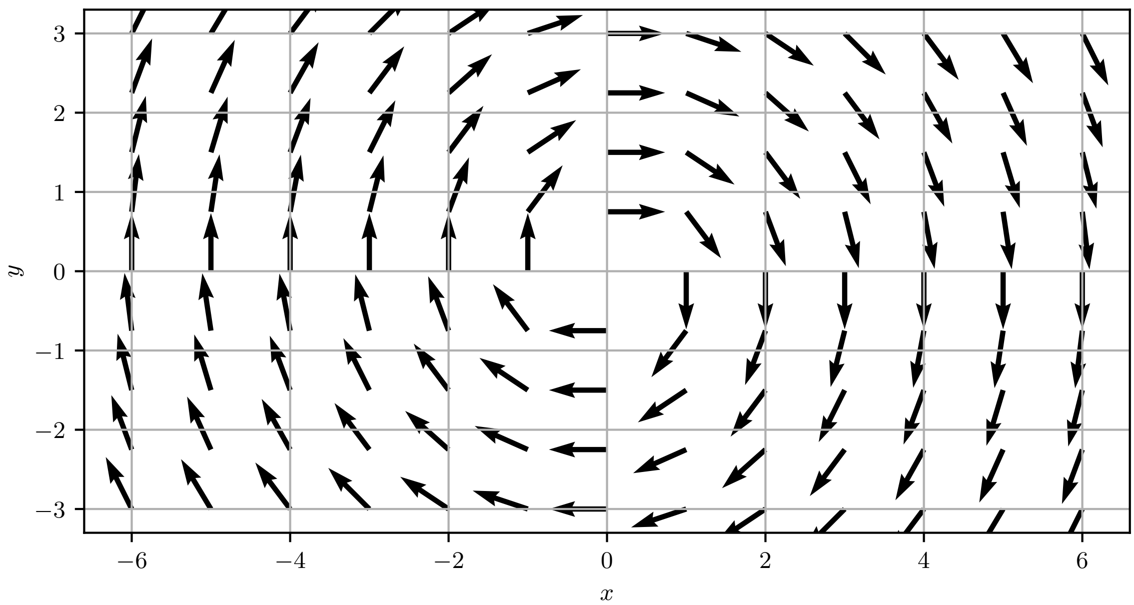
c) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}. \tag{13}$$

Um das *Vektorfeld* $\mathbf{v}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
x_0=-6; x_E=6; y_0=-3; y_E=3;
N_x=13; N_y=9; sc=18; lw=0.005; fig=fig+1;
# Funktionen:
def v(x,y):
        v_x=y/np.sqrt(x**2+y**2);
        v_y=-x/np.sqrt(x**2+y**2);
        return v_x,v_y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



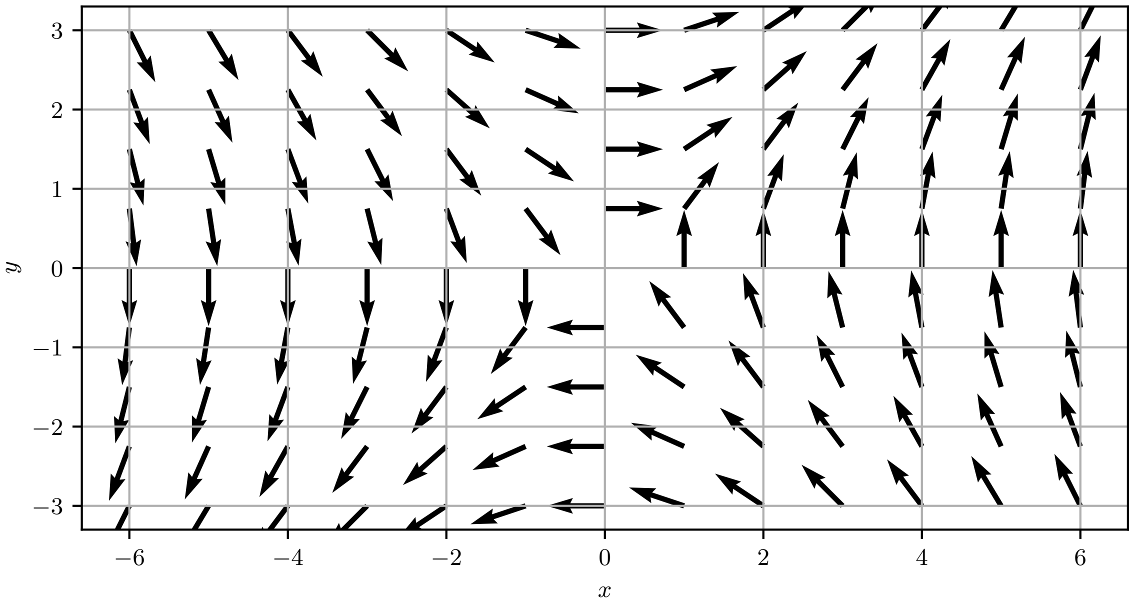
d) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Um das *Vektorfeld* $\mathbf{v}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
x_0=-6; x_E=6; y_0=-3; y_E=3;
N_x=13; N_y=9; sc=18; lw=0.005; fig=fig+1;
# Funktionen:
def v(x,y):
        v_x=y/np.sqrt(x**2+y**2);
        v_y=x/np.sqrt(x**2+y**2);
        return v_x,v_y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



5. Rotierende Kreisscheibe

Wir betrachten eine *Kreisscheibe* mit *Radius* $r_{\mathrm{E}} \approx 20.0\,\mathrm{cm}$, welche mit $\nu \approx 120/\mathrm{min} = 2.00\,\mathrm{Hz}$ rotiert. Ein *Punkt* der *Kreisscheibe* bei $(x\,;\,y)$ hat einen *Abstand* zur *Drechachse* von

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{15}$$

und eine *Bewegungsfunktion* gemäss

$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \\ r \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \end{bmatrix} \quad \text{mit } \omega = 2\pi\,\nu\,. \tag{16}$$

Für die *Geschwindigkeitsfunktion* des *Punktes* erhalten wir daraus

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} -r \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi_0) \\ r \cdot \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega \cdot y(t) \\ \omega \cdot x(t) \end{bmatrix} = \omega \begin{bmatrix} -y(t) \\ x(t) \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Die *Geschwindigkeit* der *Punkte* wird daher beschrieben durch das *Vektorfeld*

$$\underline{\underline{\mathbf{v}(x;y)}} = \omega \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} = 2\pi\,\nu \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \approx 2 \cdot \pi \cdot 2.00\,\mathrm{Hz} \cdot \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\approx 12.6\,\mathrm{s}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{für } \sqrt{x^2+y^2} \le r_{\mathrm{E}} \approx 20.0\,\mathrm{cm}.}} \tag{18}$$