Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 1

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, lineare Substitution und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Methode der linearen Substitution anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale von linear substituierten Elementarfunktionen zu berechnen.
- Sie können den Flächeninhalt zwischen einer Funktion und den Koordinatenachsen bestimmen.
- Sie können den Flächeninhalt zwischen zwei sich schneidenden Funktionen bestimmen.
- Sie können das Volumen von Rotationskörpern bestimmen.

---

1. Aussagen über Integration und lineare Substitution
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Gegeben sei die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $0 < a < b \Rightarrow \int_0^a f(x)dx \leq \int_0^b f(x)dx$.		X
b) Gegeben sei die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $a < b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx$.	X	
c) Gegeben sei die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt: $a < b \Rightarrow \int_a^b \lvert f(x)\rvert dx \leq \left\lvert \int_a^b f(x)dx \right\rvert$.		X
d) Die Methode der linearen Substitution basiert auf der Kettenregel der Differentialrechnung.	X	
e) Die Methode der linearen Substitution kann nur bei gegebenen Integrationsgrenzen angewandt werden.		X
f) Die Methode der linearen Substitution eignet sich zur Integration von Linearkombinationen von Funktionen.		X
g) Es gilt: $\int \cos(3x+4)dx = \sin(3x+4) + c$.		X
h) Es gilt: $\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\sin(x) + c$.		X

2. Aufleitung von linear substituierten Funktionen
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale unter Zuhilfenahme der linearen Substitution.

a) $\int (2x+7)^3 dx$

b) $\int (4-2x)^7 dx$

c) $\int 9 \cdot 2^{3x-5} dx$

d) $\int \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-3}} dx$

f) $\int \sqrt{6-x} dx$

g) $\int (5x-3)^2 dx$

h) $\int (3-0{,}25x)^7 dx$

i) $\int 12 \cdot 7^{5-3x} dx$

j) $\int \frac{1}{6} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} dx$

k) $\int \frac{1}{\sqrt{6x+9}} dx$

l) $\int \frac{1}{2x-13} dx$

a)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (2x+7)^3 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2x+7)^4 + c = \underline{\underline{\frac{1}{8}(2x+7)^4 + c.}}$$

b)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (4-2x)^7 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{8} \cdot (4-2x)^8 + c = -\frac{1}{16}(4-2x)^8 + c$$

$$= -\frac{1}{16}\left(2 \cdot (2-x)\right)^8 + c = -\frac{1}{2^4} \cdot 2^8 \cdot (2-x)^8 + c = -2^4 \cdot (2-x)^8 + c$$

$$= \underline{\underline{-16\,(2-x)^8 + c.}}$$

c)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 9 \cdot 2^{3x-5} \,\mathrm{d}x = 9 \cdot \frac{1}{3\,\ln(2)} \cdot 2^{3x-5} + c = \underline{\underline{\frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{3x-5} + c.}}$$

d)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} + c = \underline{\underline{\frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} + c.}}$$

e)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{\sqrt{4x-3}} \,\mathrm{d}x = \int (4x-3)^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (4x-3)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{4x-3} + c\,.}}$$

f)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \sqrt{6-x} \,\mathrm{d}x = \int (6-x)^{\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (6-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{3}\sqrt{(6-x)^3} + c.}}$$

g)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (5x-3)^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot (5x-3)^3 + c = \underline{\underline{\frac{1}{15}(5x-3)^3 + c.}}$$

h)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (3-0.25x)^7 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{-0.25} \cdot \frac{1}{8} \cdot (3-0.25x)^8 + c = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(3-0.25x)^8 + c.}}$$

i)

$$F(x) = \int 12 \cdot 7^{5-3x}\,\mathrm{d}x = 12 \cdot \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{\ln(7)} \cdot 7^{5-3x} + c = -\frac{4}{\ln(7)} \cdot 7^{5-3x} + c.$$

j)

$$F(x) = \int \frac{1}{6} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} + c = \frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} + c.$$

k)

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt{6x+9}}\,\mathrm{d}x = \int (6x+9)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (6x+9)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{6x+9} + c.$$

l)

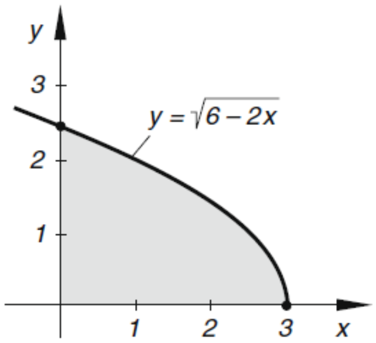
$$F(x) = \int \frac{1}{2x-13}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln(|2x-13|) + c.$$

3. Flächeninhalt

a) Welchen Flächeninhalt schliesst die Kurve $f(x) = \sqrt{6-2x}$ mit den beiden Koordinatenachsen ein?

b) Der Graph der Funktion $f\,(x) = \frac{1}{2}x^2$ wird von einer Geraden, die durch den Ursprung geht und eine negative Steigung besitzt, geschnitten. Wie gross ist die Steigung der Geraden, wenn die von ihr und der Funktion $f\,(x) = \frac{1}{2}x^2$ eingeschlossene Fläche zwei Flächeneinheiten beträgt?

a)



Die Funktion f(x) schneidet die y-Achse bei x = 0 und die x-Achse bei x = 3 (hierfür die Nullstelle von f(x) bestimmen). Dies sind jeweils die obere und untere Integrationsgrenze.

$$\int_0^3 \sqrt{6-2x}dx = \int_0^3 (6-2x)^{1/2}dx = [\frac{2}{3}\cdot(-\frac{1}{2})\cdot(6-2x)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = [-\frac{1}{3}\cdot(6-2x)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = 2\sqrt{6}$$

b)

Die gesuchte Gerade hat die allgemeine Funktionsgleichung $y = mx + q$, wobei $q = 0$ gilt, da die Gerade durch den Ursprung geht.

Ermittlung der Schnittstellen der Geraden mit $f\,(x) = \frac{1}{2}x^2$, um die Integrationsgrenzen zu bestimmen:

$mx = \frac{1}{2}x^2$

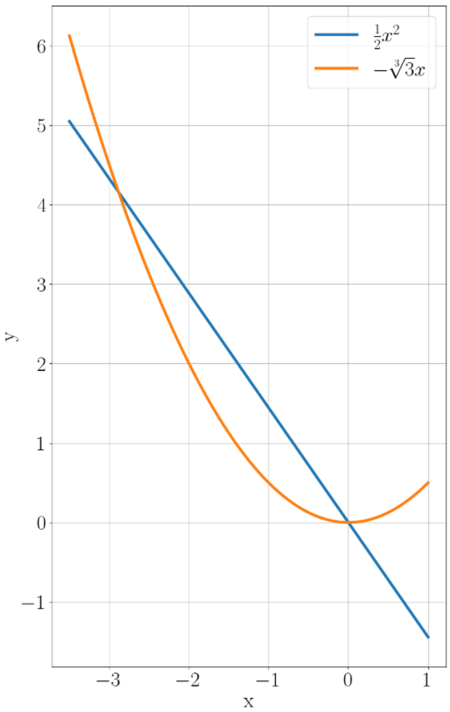
$\frac{1}{2}x^2 - mx = x\left(\frac{1}{2}x - m\right) = 0$

$x_1 = 0, x_2 = 2m$

Integration zur Bestimmung des Flächeninhalts:

$A = 2 = \int_{2m}^{0}\left(mx - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \left[\frac{1}{2}mx^2 - \frac{1}{6}x^3\right]_{2m}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{2}4m^3 - \frac{1}{6}8m^3\right) = -\frac{2}{3}m^3$

$2 = -\frac{2}{3}m^3 \Leftrightarrow m = -\sqrt[3]{3} \approx -1{,}442$



4. Flächeninhalte bestimmen

a) Welche Fläche schliesst die Kurve $f(x) = 0{,}2x(x^2 - 4)$ mit der x-Achse im Intervall -3 ≤ x ≤ 3 ein?

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den Parabeln $f(x) = x^2 - 2$ und $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

c) Sei $F = \{(x,y)|0 \le x \le \pi, x \le y \le f(x) = x + \sin x\}$. Berechnen Sie den Flächeninhalt A von F.

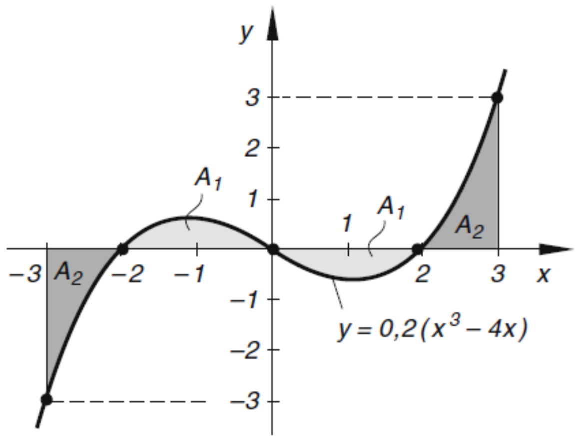
a)

Die Funktion f(x) ist punktsymmetrisch, d. h. es gilt: f(-x) = -f(x). Das bedeutet, man braucht nur 0 ≤ x ≤ 3 betrachten, um das Integral zu bestimmen, da die Flächen auf der Seite links vom Ursprung (A_1 und A_2) genau gleich gross sind wie rechts vom Ursprung. Für die Integralgrenzen müssen die Nullstellen von f(x) im Intervall 0 ≤ x ≤ 3 bestimmt werden: $f(x) = 0{,}2x(x^2 - 4) = 0$. Es ergibt sich $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

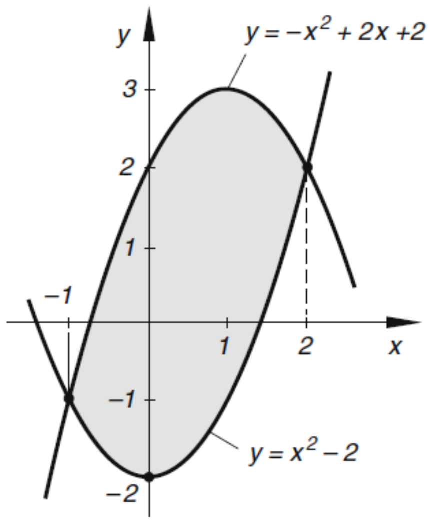
$$A_1 = \left|0{,}2 \cdot \int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx\right| = \left|0{,}2\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_0^2\right| = 0{,}8$$

$$A_2 = 0{,}2 \cdot \int_2^3 (x^3 - 4x)\,dx = 0{,}2\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_2^3 = 1{,}25$$

$A = 2(A_1 + A_2) = 4{,}1$



b)



Gleichsetzen der beiden Funktionen, um die Integrationsgrenzen zu erhalten:

$$x^2 - 2 = -x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow$$

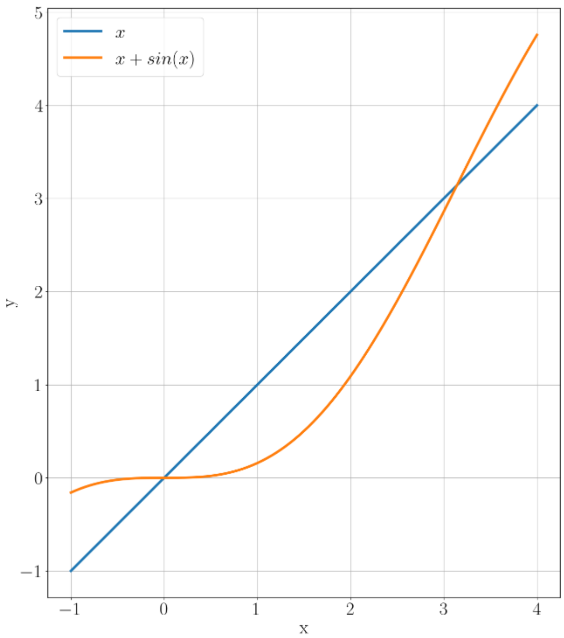
$$2(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2$$

$$A = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2)]\, dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^{2} = 9$$

c)



Bestimmung des Flächeninhalts A: Die Integrationsgrenzen sind 0 und π. Die Fläche wird von den Funktionen $y = x$ und $y = x + \sin x$ begrenzt.

$A = \int_0^{\pi}(x + \sin x - x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin x\,dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$

5. Volumen von Rotationskörpern

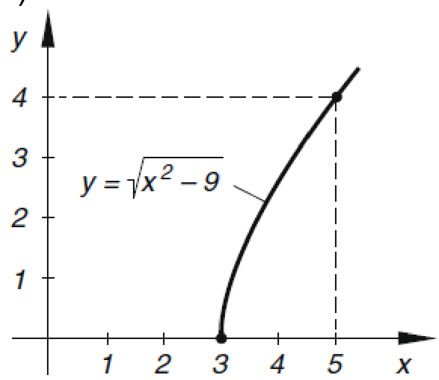
a) Durch Rotation der Kurve $f(x) = \sqrt{x}$ um die y-Achse entsteht ein trichterförmiger Drehkörper. Bestimmen Sie sein Volumen, wenn er in der Höhe y = 5 abgeschnitten wird.

b) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen eines Körpers, der durch Drehung des Kurvenstücks $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, mit $3 \leq x \leq 5$
(i) um die x-Achse,
(ii) um die y-Achse
entsteht.

a)
Es muss zuerst die Umkehrfunktion gebildet werden:
$f(x) = \sqrt{x}$ besitzt als Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = x = y^2$
Integrationsgrenzen sind y = 0 und y = 5.

$$V_y = \pi \cdot \int_0^5 y^4\,dy = \frac{\pi}{5}\left[y^5\right]_0^5 = 625\,\pi = 1963{,}495$$

b)



(i)

$$V_x = \pi \cdot \int_3^5 (x^2 - 9)\, dx = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - 9x \right]_3^5 = \frac{44}{3} \pi = 46{,}077$$

(ii)

$$x^2 = y^2 + 9, \quad 0 \le y \le 4$$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^4 (y^2 + 9)\, dy =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} y^3 + 9y \right]_0^4 = \frac{172}{3} \pi = 180{,}118$$