Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 7

Computational and Data Science
FS2024

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Spur, Determinante, Leibnizsche Formel, Regel von Sarrus, Gramsche Matrix und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen die Formel zur Berechnung von Massen (Länge, Fläche, Volumen …) und können sie anwenden.
- Sie können die Eigenschaften einer Matrix anhand ihrer Spur und Determinante beurteilen.
- Sie können die Determinante quadratischer Matrizen in 2D und 3D berechnen.
- Sie können die Determinanten einer quadratischen Matrix mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens berechnen.

---

1. Aussagen über die Spur
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Spur ist für jede Matrix definiert.		X
b) Ob eine Matrix regulär oder singulär ist, lässt sich nicht alleine anhand der Spur beurteilen.	X	
c) Für alle orthogonalen Matrizen gilt: $tr(A^T \bullet A) = n$.	X	
d) Für alle quadratischen nxn Matrizen gilt: $tr(A \bullet B - B \bullet A) = 0$.	X	
e) Für alle quadratischen nxn Matrizen gilt: $tr(A \bullet B) = tr(A) \bullet tr(B)$.		X
f) Die Matrix A ist schiefsymmetrisch, wenn gilt: $tr(A) = 0$.		X

2. Spur und Determinante der Standardmatrizen in 2D
Bestimmen Sie für die Standardmatrizen $\mathbb{E}$, $\mathbb{i}$, P, Z_λ, P_x, P_y, S_x und S_y jeweils die Spur und die Determinante.

Die Matrizen $\mathbb{E}$, $\mathbb{i}$, P beschreiben Drehungen, die Matrizen sind somit orthogonal. Es gilt folglich: $\det(\mathbb{E}) = \det(\mathbb{i}) = \det(P) = 1$.
Die Matrizen P_x, P_y beschreiben Projektionen. Sind sind deshalb singulär und somit gilt: $\det(P_x) = \det(P_y) = 0$.
Die Matrizen S_x und S_y beschreiben Spiegelungen. Da Spiegelungen nicht orientierungstreu sind, gilt: $\det(S_x) = \det(S_y) = -1$.
Die Matrix Z_λ beschreibt eine Streckung um den Faktor λ. Dabei vergrössern sich die Flächen um den Faktor λ^2 und es folgt: $\det(Z_\lambda) = \lambda^2$.

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(\mathbb{1})}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\underline{\underline{\det(\mathbb{1})}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(\mathbb{i})}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(\mathbb{i})}} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = -1 + (-1) = \underline{\underline{-2}}$$

$$\underline{\underline{\det(P)}} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(Z_\lambda)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda + \lambda = \underline{\underline{2\lambda}}$$

$$\underline{\underline{\det(Z_\lambda)}} = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda \cdot \lambda - 0 \cdot 0 = \lambda^2 - 0 = \underline{\underline{\lambda^2}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P_x)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\det(P_x)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P_y)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\det(P_y)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(S_x)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 + (-1) = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(S_x)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(S_y)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(S_y)}} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1)\cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = \underline{\underline{-1.}}$$

3. Spur und Determinante berechnen

Berechnen Sie jeweils die Spur und die Determinante.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 8 & -\sqrt{2} \\ -13 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{17} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}$ h) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

a)

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = 2 + 5 = \underline{\underline{7.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = \underline{\underline{-2.}}$$

b)

tr(A) = 2 + 6 = 8

Da bei der Matrix A die 2. Spalte ein Vielfaches der Ersten ist, verschwindet die Determinante: det(A) = 0

c)

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = (-1) + 2 + (-1) = \underline{\underline{0.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = (-1)\cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 0$$

$$= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \underline{\underline{2.}}$$

d)

tr(A) = -2-2+12=8

Die zweite Zeile von A ist ein Vielfaches der ersten Zeile. Deswegen verschwindet die Determinante: det(A) = 0

e)

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = 1 + (-2) + 3 + (-2) = \underline{\underline{0.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{r} \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array}\begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 = \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$= \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 0 & [6] & 7 \\ 0 & 0 & 0 & [2] \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = \underline{\underline{24.}}$$

f)

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = 1 + 3 + 0 + 0 = \underline{\underline{4.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 8 & -\sqrt{2} \\ -13 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{17} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 1 & \sqrt{3} & 8 \\ 0 & -13 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{17} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3$$

$$= \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 8 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & [\sqrt{2}] & -13 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2} = \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 8 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & [\sqrt{2}] & 3 & -13 \\ 0 & 0 & [-1] & \sqrt{17} \\ 0 & 0 & 0 & [2] \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2+1}$$

$$= -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1)^6 = \underline{\underline{4.}}$$

g)

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{array}\begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -11 & 21 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \\ 2 \end{array}\begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 2 & -8 & -11 & 21 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ -2 \\ -3 \end{array}\begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -11 & 15 \end{vmatrix} \cdot (-1)$$

$$= \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ 1 \end{array}\begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [-6] \end{vmatrix} \cdot (-1)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot (-1) = \underline{\underline{24.}}$$

h)

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \quad 1 \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot (-1)^2$$

$$= \quad -1 \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\sqrt{2}] \end{vmatrix}$$

$$= 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{-4\sqrt{2}.}}$$

4. Spur und Determinante mit Python/Numpy bestimmmen
Berechnen Sie jeweils Spur und Determinante der Matrizen aus Aufgabe 3 mit Python/Numpy.

a)
```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
A=np.array([[2,3],[4,5]]);
# Berechnungen
spur=np.trace(A);
determinante=np.linalg.det(A);
# Ausgabe
print('Spur =',spur);
print('Determinante =',round(determinante,3));
```
b) – h) analog

5. Aussagen über die Determinante
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert.	X	
b) Ob eine quadratische Matrix regulär oder singulär ist, lässt sich nicht nur anhand der Determinante beurteilen.		X
c) Für eine quadratische nxn Matrix A und eine orthogonale nxn Matrix Q gilt: det(QA) = det(A).	X	
d) Für quadratische nxn Matrizen A und B gilt: det(A+B) = det(A) + det(B).		X
e) Gilt $A = A^{-1}$, dann folgt: $\det(A) \in \{-1;1\}$.	X	
f) A sei eine schiefsymmetrische nxn Matrix. Für ungerade n gilt: det(A) = 0.	X	

6. Aussagen über 2 Matrizen in 2D
Gegeben sind die beiden Matrizen
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Matrix A ist orthogonal.	X	
b) Die Matrix B beschreibt eine Spiegelung an einer Geraden.		X
c) Es gilt: det(B) = tr(A) + tr(B).	X	
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $B^n = 0$.	X	
e) Die Matrizen A und B kommutieren nicht, d. h. es gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.	X	
f) Es gilt $B = B^{-1}$.		X

7. Aussagen über 2 Matrizen in 3D
Gegeben sind die beiden Matrizen
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Matrix A ist singulär.	X	
b) Die Matrix A^{102} ist symmetrisch.	X	
c) Es gilt: det(B) = det(A).		X
d) Es det(A) = tr(A).	X	
e) Es gilt: $B^{56} = \mathbb{E}$.	X	
f) Es gilt: $A \cdot B = B \cdot A$		X

8. Determinante mit Parameter
Für welche reellen Parameter λ verschwinden die Determinanten?

a) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

a)
Determinante bestimmen:
$(1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 4 = 0$
Mitternachtsformel verwenden, dies ergibt: $\lambda_1 = 1{,}562$ und $\lambda_2 = -2{,}562$
b)
Determinante bestimmen (da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt, braucht man nur die Elemente der Hauptdiagonalen multiplizieren):
$(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$
Dies ergibt: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 2$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 7

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

?l_jwqgq slb Jglc_pc ?jec`p_0

1. Aussagen über die Spur

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Spur* ist für jede *Matrix* definiert.	○	●
b) Alleine anhand ihrer *Spur* kann man nicht beurteilen, ob eine *quadratische Matrix regulär* oder *singulär* ist.	●	○
c) Für alle $A \in \mathrm{O}(n)$ gilt $\mathrm{tr}\big(A^T \cdot A\big) = n$.	●	○
d) Für alle $A, B \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ gilt $\mathrm{tr}(A \cdot B - B \cdot A) = 0$.	●	○
e) Für alle $A, B \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ gilt $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(A) \cdot \mathrm{tr}(B)$.	○	●
f) Gilt $\mathrm{tr}(A) = 0$, dann ist die *Matrix* A *schiefsymmetrisch*.	○	●

2. Spuren und Determinanten der Standard-Matrizen in 2D

Wir betrachten die *Standard-Matrizen* $\mathbb{1}$, $\mathbb{i}$, P, Z_λ, P_x, P_y, S_x und S_y in 2D.

a) Die *Matrizen* $\mathbb{1}$, $\mathbb{i}$ und P beschreiben *Drehungen*. Daher gilt $\mathbb{1}, \mathbb{i}, P \in \mathrm{SO}(2)$ und es folgt

$$\underline{\underline{\det(\mathbb{1}) = \det(\mathbb{i}) = \det(P) = 1.}} \tag{1}$$

Die *Matrizen* P_x und P_y beschreiben *Projektionen*. Sie sind daher *singulär* und es folgt

$$\underline{\underline{\det(P_x) = \det(P_y) = 0.}} \tag{2}$$

Die *Matrizen* S_x und S_y beschreiben *Spiegelungen*. Daher gilt $S_x, S_y \in \mathrm{O}(2)$. Weil *Spiegelungen* nicht *orientierungstreu* sind, folgt

$$\underline{\underline{\det(S_x) = \det(S_y) = -1.}} \tag{3}$$

Die *Matrix* Z_λ beschreibt eine *Streckung* um den Faktor λ. Dabei vergrössern sich *Flächen* um den Faktor λ^2 und es folgt

$$\underline{\underline{\det(Z_\lambda) = \lambda^2.}} \tag{4}$$

b) Wir berechnen jeweils *Spur* und *Determinante* der *Standard-Matrizen*. Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(\mathbb{1})}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}} \tag{5}$$

$$\underline{\underline{\det(\mathbb{1})}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}} \tag{6}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(\mathbb{i})}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = \underline{\underline{0}} \tag{7}$$

$$\underline{\underline{\det(\mathbb{i})}} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}} \tag{8}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = -1 + (-1) = \underline{\underline{-2}} \tag{9}$$

$$\underline{\underline{\det(P)}} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}} \tag{10}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(Z_\lambda)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda + \lambda = \underline{\underline{2\lambda}} \tag{11}$$

$$\underline{\underline{\det(Z_\lambda)}} = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda \cdot \lambda - 0 \cdot 0 = \lambda^2 - 0 = \underline{\underline{\lambda^2}} \tag{12}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P_x)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 0 = \underline{\underline{1}} \tag{13}$$

$$\underline{\underline{\det(P_x)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}} \tag{14}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(P_y)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}} \tag{15}$$

$$\underline{\underline{\det(P_y)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}} \tag{16}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(S_x)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 + (-1) = \underline{\underline{0}} \tag{17}$$

$$\underline{\underline{\det(S_x)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = \underline{\underline{-1}} \tag{18}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(S_y)}} = \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}} \tag{19}$$

$$\underline{\underline{\det(S_y)}} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = \underline{\underline{-1.}} \tag{20}$$

3. Spur und Determinante berechnen

Wir berechnen jeweils die *Spur* und *Determinante* der *Matrix*.

a) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Um die *Determinante* von A zu berechnen, wenden wir die LEIBNIZ-*Formel* an. Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = 2 + 5 = \underline{\underline{7.}} \tag{22}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = \underline{\underline{-2.}} \tag{23}$$

b) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Weil die zweite *Spalte* von A ein *Vielfaches* der ersten ist, muss die *Determinante* verschwinden. Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = 2 + 6 = \underline{\underline{8.}} \tag{25}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \underline{\underline{0.}} \tag{26}$$

c) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Um die *Determinante* von A zu berechnen, wenden wir die LEIBNIZ-*Formel* an. Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = (-1) + 2 + (-1) = \underline{\underline{0.}} \tag{28}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\det(A)}} &= (-1) \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 0 \\ &= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \underline{\underline{2.}} \end{aligned} \tag{29}$$

d) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 12 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Weil die erste *Zeile* von A ein *Vielfaches* der zweiten ist, muss die *Determinante* verschwinden. Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = (-2) + (-2) + 12 = \underline{\underline{8.}} \tag{31}$$

$$\underline{\underline{\det(A)}} = \underline{\underline{0.}} \tag{32}$$

e) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Um die *Determinante* von A zu berechnen, wenden wir das Gauss-*Verfahren* an. Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = 1 + (-2) + 3 + (-2) = \underline{\underline{0.}} \tag{34}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\det(A)}} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{array} \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 = \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 \\
&= \begin{array}{c} \\ \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) \\
&= \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 0 & [6] & 7 \\ 0 & 0 & 0 & [2] \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = \underline{\underline{24.}}
\end{aligned} \tag{35}$$

f) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & 8 & -\sqrt{2} \\ -13 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{17} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{36}$$

Um die *Determinante* von A zu berechnen, bringen wir A zunächst durch Vertauschen von Spalten in *Stufenform*. Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{tr}(A)}} = 1 + 3 + 0 + 0 = \underline{\underline{4.}} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\det(A)}} &= \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 8 & -\sqrt{2} \\ -13 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{17} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 1 & \sqrt{3} & 8 \\ 0 & -13 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{17} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3 \\
&= \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 8 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & [\sqrt{2}] & -13 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2} = \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 8 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & [\sqrt{2}] & 3 & -13 \\ 0 & 0 & [-1] & \sqrt{17} \\ 0 & 0 & 0 & [2] \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2+1} \\
&= -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1)^6 = \underline{\underline{4.}}
\end{aligned} \tag{38}$$

4. Spur und Determinante berechnen mit Python/Numpy

Wir berechnen die *Spuren* und *Determinanten* aus Aufgabe 3 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array(...);
prec=3;
# Berechnungen:
s=np.trace(A);
d=np.linalg.det(A);
# Ausgabe:
print(f"s = {s:#.{prec}} und d = {d:#.{prec}}");
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[2.,3.],[4.,5.]]);
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{s \approx 7.00}}$ und $\underline{\underline{d \approx -2.00}}$.

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[2.,3.],[4.,6.]]);
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{s \approx 8.00}}$ und $\underline{\underline{d \approx 0.00}}$.

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[-1.,3.,0.],[0.,2.,0.],[1.,2.,-1.]]);
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{s \approx 0.00}}$ und $\underline{\underline{d \approx 2.00}}$.

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[-2.,4.,8.],[1.,-2.,-4.],[6.,-3.,12.]]);
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{s \approx 8.00}}$ und $\underline{\underline{d \approx 0.00}}$.

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[1.,0.,3.,0.],[4.,-2.,12.,6.],[1.,2.,3.,-4.]
            ,[3.,3.,15.,-2.]]);
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{s \approx 0.00}}$ und $\underline{\underline{d \approx 24.0}}$.

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[1.,np.sqrt(3),8.,-np.sqrt(2)],[-13.,3.,np.sqrt(2),0.]
            ,[np.sqrt(17.),-1.,0.,0.],[2.,0.,0.,0.]]);
```

Gemäss Ausgabe ist $\underline{\underline{s \approx 4.00}}$ und $\underline{\underline{d \approx 4.00}}$.

5. Aussagen über die Determinante

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Determinante* ist nur für *quadratische Matrizen* definiert.	●	○
b) Alleine anhand ihrer *Determinante* kann man nicht beurteilen, ob eine *quadratische Matrix regulär* oder *singulär* ist.	○	●
c) Der *Betrag* der *Determinante* einer *Matrix* ist gerade das *Mass* (*Fläche*, *Volumen*, etc...), das von ihren *Zeilen-Vektoren* aufgespannt wird.	●	○
d) Für $A \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ und $Q \in \mathrm{SO}(n)$ gilt $\det(QA) = \det(A)$.	●	○
e) Für alle $A, B \in \mathbb{M}(n, n, \mathbb{R})$ gilt $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.	○	●
f) Gilt $A = A^{-1}$, dann folgt $\det(A) \in \{-1, 1\}$.	●	○

6. Determinante berechnen

Wir berechnen jeweils die *Determinante* der *Matrix*.

a) Wir betrachten die *Matrix*

$$
A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{bmatrix}. \tag{39}
$$

Mit Hilfe des GAUSS-*Verfahrens* erhalten wir für A die *Determinante*

$$
\begin{aligned}
\underline{\underline{\det(A)}} &= \begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ -3 \end{array}\begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -11 & 21 \end{vmatrix} \\
&= \begin{array}{r} \\ \\ 3 \\ \\ 2 \end{array}\begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 2 & -8 & -11 & 21 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{array}{r} \\ \\ \\ -2 \\ -3 \end{array}\begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -11 & 15 \end{vmatrix} \cdot (-1) \\
&= \begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ 1 \end{array}\begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [-6] \end{vmatrix} \cdot (-1) \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot (-1) = \underline{\underline{24.}}
\end{aligned} \tag{40}
$$

b) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{41}$$

Druch Vertauschen von Zeilen und mit Hilfe des Gauss-*Verfahrens* erhalten wir für A die *Determinante*

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\det(A)}} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 \\
&= \begin{array}{c} \\ \\ \\ -1 \\ \\ \end{array} \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\sqrt{2}] \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{-4\sqrt{2}.}}
\end{aligned} \tag{42}$$

7. Inverse einer Matrix in 2D

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \det(A) \neq 0. \tag{43}$$

a) Wir betrachten die *Matrix*

$$B := \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Durch *Multiplikation* mit A erhalten wir

$$\begin{aligned}
\underline{B \cdot A} &= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} a \cdot d - b \cdot c & d \cdot b - b \cdot d \\ -c \cdot a + a \cdot c & -c \cdot b + a \cdot d \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} \det(A) & 0 \\ 0 & \det(A) \end{bmatrix} = \frac{\det(A)}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \cdot \mathbb{1} = \underline{\mathbb{1}.}
\end{aligned} \tag{45}$$

Daraus folgt, dass A *invertierbar* ist und die *Inverse* berechnet werden kann durch

$$\underline{\underline{A^{-1}}} = B = \underline{\underline{\frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.}} \tag{46}$$

b) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

Gemäss (46) gilt

$$\underline{\underline{A^{-1}}} = \frac{1}{3 \cdot 4 - 1 \cdot 11} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -11 & 3 \end{bmatrix}}}. \tag{48}$$

8. Aussagen über zwei Matrizen in 2D

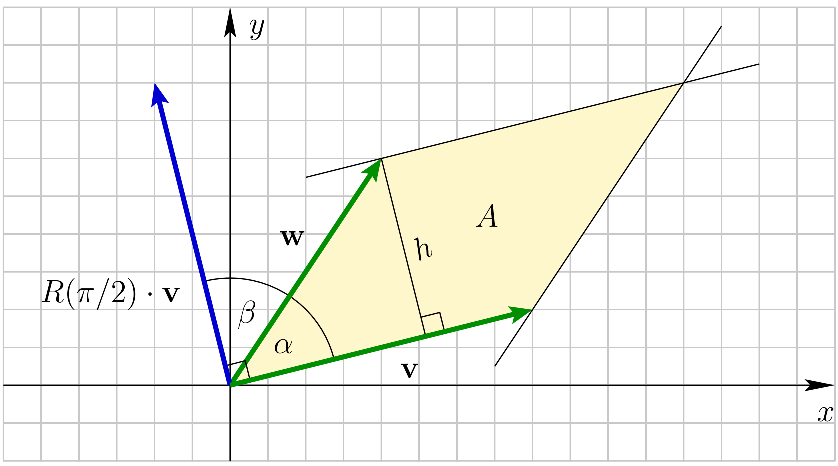
Wir betrachten die *Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Matrix* A ist *orthogonal*.	●	○
b) Die *Matrix* B beschreibt eine *Spiegelung* an einer *Geraden*.	○	●
c) Es gilt $\det(B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.	●	○
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $B^n = 0$.	●	○
e) Die *Matrizen* A und B *kommutieren* nicht, das heisst, es gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.	●	○
f) Es gilt $B = B^{-1}$.	○	●

9. Flächen in 2D

Wir betrachten $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^2$, welche ein *Parallelogramm* mit *Fläche* A aufspannen. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



a) Aus der Formel für die *Fläche* eines *Parallelogramms* und durch Anwenden der *Trigonometrie* erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= g \cdot h = |\mathbf{v}| \cdot h = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \big|\sin(\alpha)\big| = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \big|\cos(\beta)\big| = \big||\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos(\beta)\big| \\ &= \big||R(\pi/2) \cdot \mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos(\beta)\big| = \big|\langle R(\pi/2) \cdot \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle\big| = \underline{\underline{\big|\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{v}, \mathbf{w})\big|}}. \end{aligned} \tag{50}$$

b) Zunächst schreiben wir die *Vektoren* $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ in *Komponenten*. Es seien

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}. \tag{51}$$

Mit Hilfe des Ergebnisses von Teilaufgabe a) und der LEIBNIZ-*Formel* für *Determinanten* finden wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \big|\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{v},\mathbf{w})\big| = \big|\langle R(\pi/2)\cdot\mathbf{v}\,,\mathbf{w}\rangle\big| = \big|\langle \mathring{\imath}\cdot\mathbf{v}\,,\mathbf{w}\rangle\big| = \left|\left\langle \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right\rangle\right| \\ &= \left|\left\langle \begin{bmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}\right\rangle\right| = \big|-v_2\cdot w_1 + v_1\cdot w_2\big| = \big|v_1\cdot w_2 - v_2\cdot w_1\big| \\ &= \left|\det\left(\begin{bmatrix} v_1 & w_1 \\ v_2 & w_2 \end{bmatrix}\right)\right| = \underline{\underline{\big|\det([\ \mathbf{v}\ \ \mathbf{w}\ ])\big|.}} \end{aligned} \tag{52}$$

c) Wir betrachten die GRAM-*Determinante*, das heisst die *Determinante* der GRAM-*Matrix* der *Vektoren* $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$. Mit Hilfe des LEIBNIZ-*Formel* und (50) finden wir

$$\begin{aligned} g &= \det(G) = \det\left(\begin{bmatrix} \langle\mathbf{v}\,,\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{v}\,,\mathbf{w}\rangle \\ \langle\mathbf{w}\,,\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{w}\,,\mathbf{w}\rangle \end{bmatrix}\right) = \langle\mathbf{v}\,,\mathbf{v}\rangle\cdot\langle\mathbf{w}\,,\mathbf{w}\rangle - \langle\mathbf{w}\,,\mathbf{v}\rangle\cdot\langle\mathbf{v}\,,\mathbf{w}\rangle \\ &= |\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2 - \langle\mathbf{v}\,,\mathbf{w}\rangle^2 = |\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2\cdot\cos^2(\alpha) = |\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2\cdot\big(1-\cos^2(\alpha)\big) \\ &= |\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2\cdot\sin^2(\alpha) = \Big(|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|\cdot\big|\sin(\alpha)\big|\Big)^2 = A^2. \end{aligned} \tag{53}$$

Wegen $g \geq 0$ lässt sich die *Wurzel* innerhalb der *reellen Zahlen* ziehen und es folgt

$$\underline{\underline{A}} = \sqrt{g} = \underline{\underline{\sqrt{\det\left(\begin{bmatrix} \langle\mathbf{v}\,,\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{v}\,,\mathbf{w}\rangle \\ \langle\mathbf{w}\,,\mathbf{v}\rangle & \langle\mathbf{w}\,,\mathbf{w}\rangle \end{bmatrix}\right)}}}. \tag{54}$$

d) Wir wenden alle Formeln aus den Teilaufgaben a) bis c) an, um die *Fläche* des *Parallelogramms* zu berechnen, welches aufgespannt wird durch die *Vektoren*

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Mit Hilfe der *symplektischen Form* erhalten wir

$$\underline{\underline{A}} = \left|\boldsymbol{\Omega}\left(\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}\right)\right| = \big|4\cdot 5 - 1\cdot 2\big| = |18| = \underline{\underline{18.}} \tag{56}$$

Mit Hilfe der *Determinante* der *Matrix*, welche aus den *Spalten* $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ besteht und der LEIBNIZ-*Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{A}} = \left|\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\right)\right| = \big|4\cdot 5 - 1\cdot 2\big| = |18| = \underline{\underline{18.}} \tag{57}$$

Wir zeigen mehrere Varianten, um die GRAM-*Matrix* von $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ zu berechnen.

Variante 1: Durch explizites Berechnen der *Skalar-Produkte* finden wir

$$G = \begin{bmatrix} \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle & \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 13 \\ 13 & 29 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

Variante 2: Mit Hilfe der *Matrix*, welche aus den *Spalten* $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ besteht, finden wir

$$G = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 4 + 1 \cdot 1 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 5 \\ 2 \cdot 4 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 17 & 13 \\ 13 & 29 \end{bmatrix}. \tag{59}$$

Mit Hilfe der *Leibniz-Formel* erhalten wir daraus

$$\underline{\underline{A}} = \sqrt{\det\left(\begin{bmatrix} 17 & 13 \\ 13 & 29 \end{bmatrix}\right)} = \sqrt{17 \cdot 29 - 13 \cdot 13} = \sqrt{493 - 169} = \sqrt{324} = \underline{\underline{18.}} \tag{60}$$

10. Aussagen über zwei Matrizen in 3D

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}. \tag{61}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Matrix* A ist *singulär*.	●	○
b) Die *Matrix* A^{102} ist *symmetrisch*.	●	○
c) Es gilt $\det(B) = \det(A)$.	○	●
d) Es gilt $\det(A) = \mathrm{tr}(A)$.	●	○
e) Es gilt $B^{56} = \mathbb{1}$.	●	○
f) Es gilt $A \cdot B = B \cdot A$.	○	●