Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 8 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Skalarfeld, Vektorfeld, Kurve, eindimensionale Schnittkurve, Höhenlinien, Niveaufläche, Niveaumenge und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die natürliche Definitionsmenge und Wertemenge einer Funktion mehrerer Variabler bestimmen.
- Sie können Höhenlinien und Niveauflächen von Funktionen von zwei bzw. drei Variablen bestimmen und skizzieren.

---

1. Aussagen über Funktionen mehrerer reeller Variabler

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für n > 1 ist eine Funktion des Typs $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ niemals injektiv.	X	
b) Für n > 1 ist eine Funktion des Typs $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ niemals surjektiv.		X
c) Jede Ebene in 3D ist der Graph einer Funktion in zwei reellen Variablen.	X	
d) Jede Sphäre in 3D ist der Graph einer Funktion in zwei reellen Variablen.		X

2. Definitionsmengen von Funktionen von zwei Variablen

Bestimmen und skizzieren Sie für die nachfolgenden Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jeweils die maximale Definitionsmenge.

a) $f(x,y) = \sqrt{y-2x}$ b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-1}$ c) $f(x,y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$

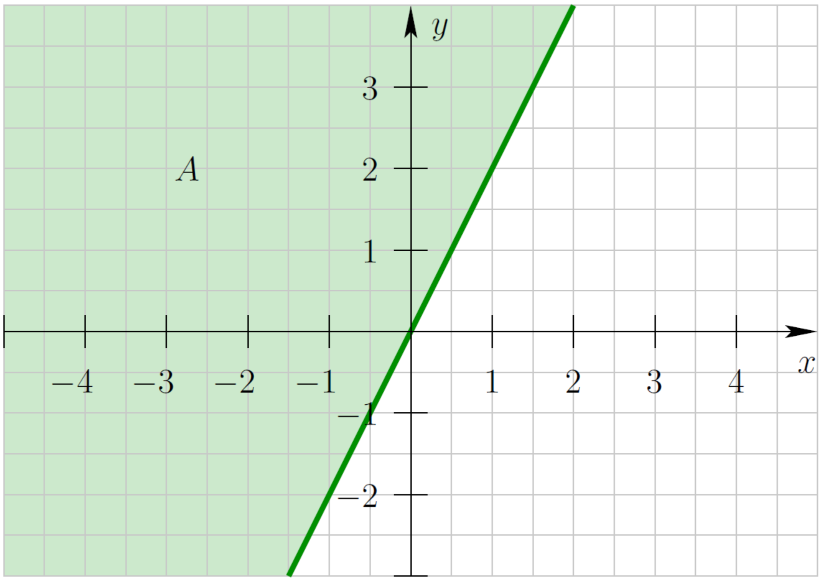
a)
Der Radikand darf nicht negativ sein, d. h.

$$y - 2x \geq 0 \qquad \Big| + 2x$$

$$\Leftrightarrow \qquad y \geq 2x.$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von f ist daher das Gebiet

$$\underline{\underline{A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, y < 2x \,\}.}}$$

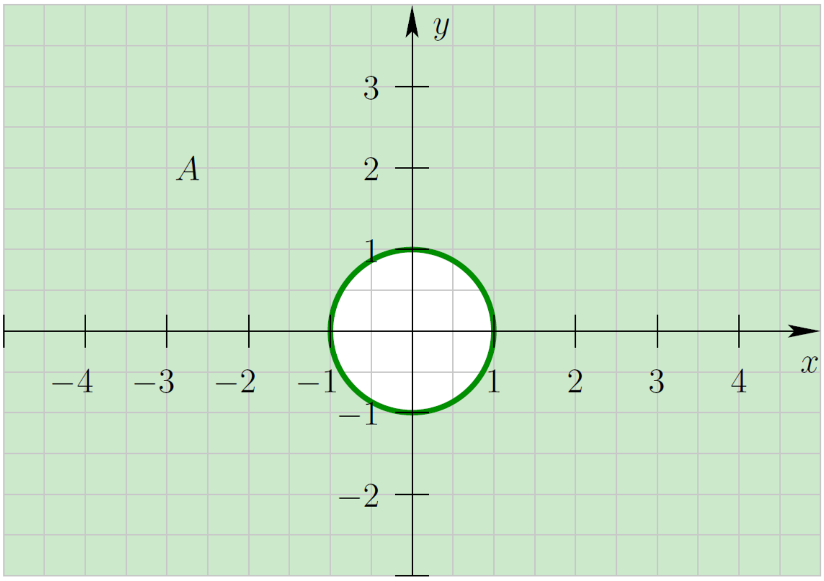


b)
Der Radikand darf nicht negativ sein, d. h.

$$
\begin{aligned}
&& x^2 + y^2 - 1 \geq 0 && \big| +1 \\
\Leftrightarrow && x^2 + y^2 \geq 1. &&
\end{aligned}
$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von f ist daher das Gebiet

$$\underline{\underline{A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, x^2 + y^2 < 1 \,\}.}}$$



c)
Der Radikand im Zähler darf nicht negativ werden und der Nenner darf nicht 0 werden. Es muss sowohl

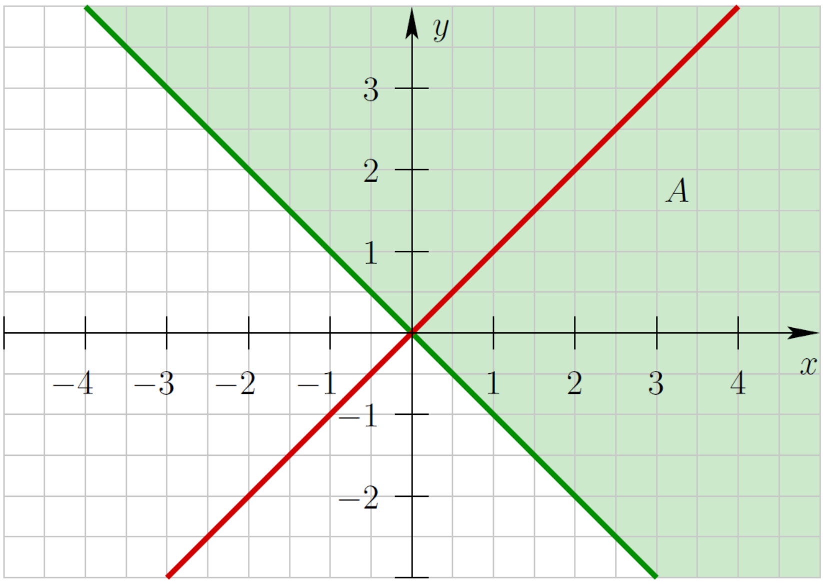
$$
\begin{aligned}
&& x - y \neq 0 && \big| +y \\
\Leftrightarrow && y \neq x &&
\end{aligned}
$$

als auch

$$x + y \geq 0 \qquad \Big| -x$$
$$\Leftrightarrow \qquad y \geq -x.$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von f ist daher das Gebiet

$$\underline{\underline{A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, y = x \;\vee\; y < -x \,\}.}}$$



3. Definitons- und Wertemengen von Funktionen von zwei Variablen
Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils die maximale Definitonsmenge und die Wertemenge.

a) $f(x, y) = \sin(xy)$

b) $f(x, y) = x + y + \cos(xy)$

c) $f(x, y) = \sqrt{1 - y} + e^{-x^2}$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y - x^2}$

a)
$D = \mathbb{R}^2, W = [-1; 1]$
b)
$D = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$
c)
Der Radikand darf nicht negativ werden:
$1 - y \geq 0 \;\; \to D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 1\}, W =]0; \infty[$
d)
Die beiden Radikanden dürfen nicht negativ werden, d. h.

$$x^2 - y \geq 0 \text{ und } y - x^2 \geq 0$$
$$y \leq x^2 \text{ und } y \geq x^2$$

Es ergibt sich: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}, W = \{0\}$.

4. Höhenlinien

Berechnen und skizzieren Sie für die gegebene Funktion jeweils die Höhenlinien.

a) $f(x,y) = 3x + 6y$ b) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ d) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2y}$

a)

Für die Höhenlinie zur Höhe L ergibt sich

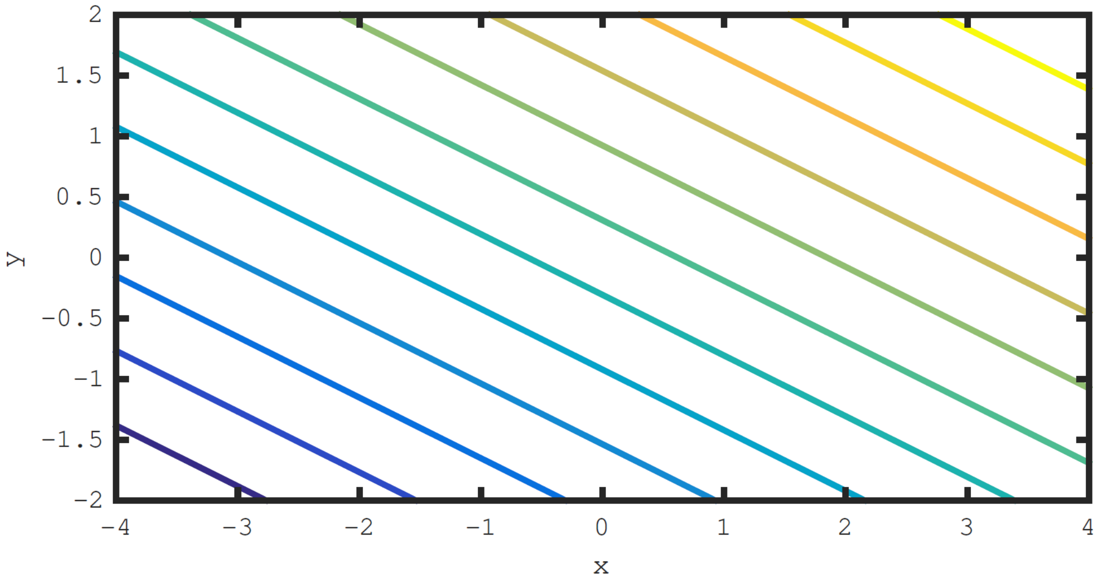
$$L = f(x;y) = 3x + 6y \qquad \Big| - 3x$$

$$L - 3x = 6y \qquad \Big| : 6$$

$$y = \frac{L - 3x}{6} = \frac{L}{6} - \frac{x}{2}.$$

Man erhält somit als Höhenlinien

$$\underline{\underline{y = -\frac{x}{2} + \frac{L}{6} \quad \text{mit } L \in \mathbb{R}.}}$$



b)

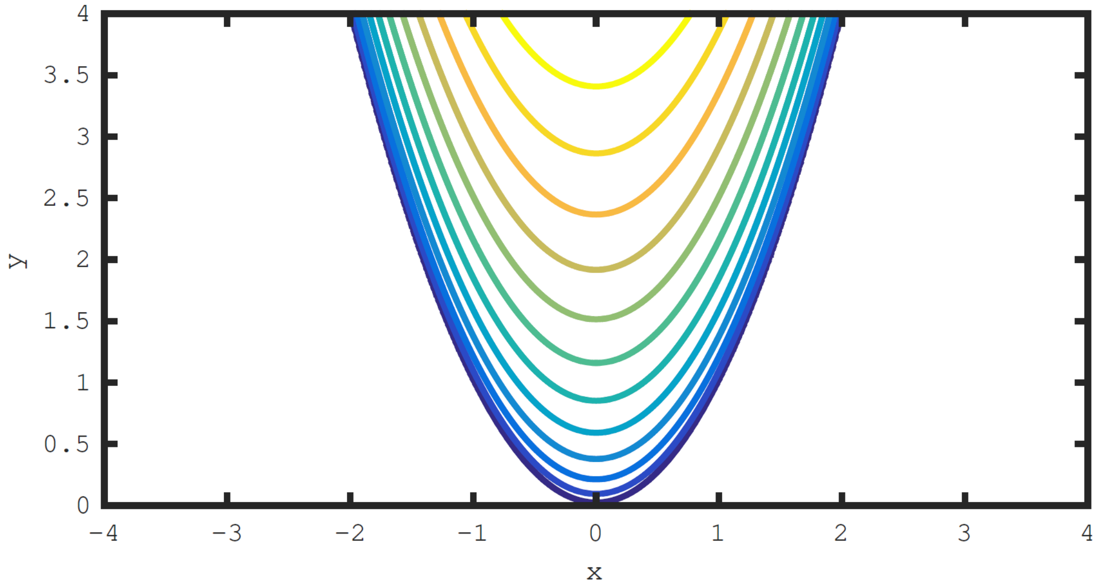
Für die Höhenlinie zur Höhe L ergibt sich

$$L = f(x;y) = \sqrt{y - x^2} \qquad \Big| (\ldots)^2$$

$$L^2 = y - x^2 \qquad \Big| + x^2.$$

Man erhält somit als Höhenlinien

$$\underline{\underline{y = x^2 + L^2 \quad \text{mit } L \in \mathbb{R}_0^+.}}$$



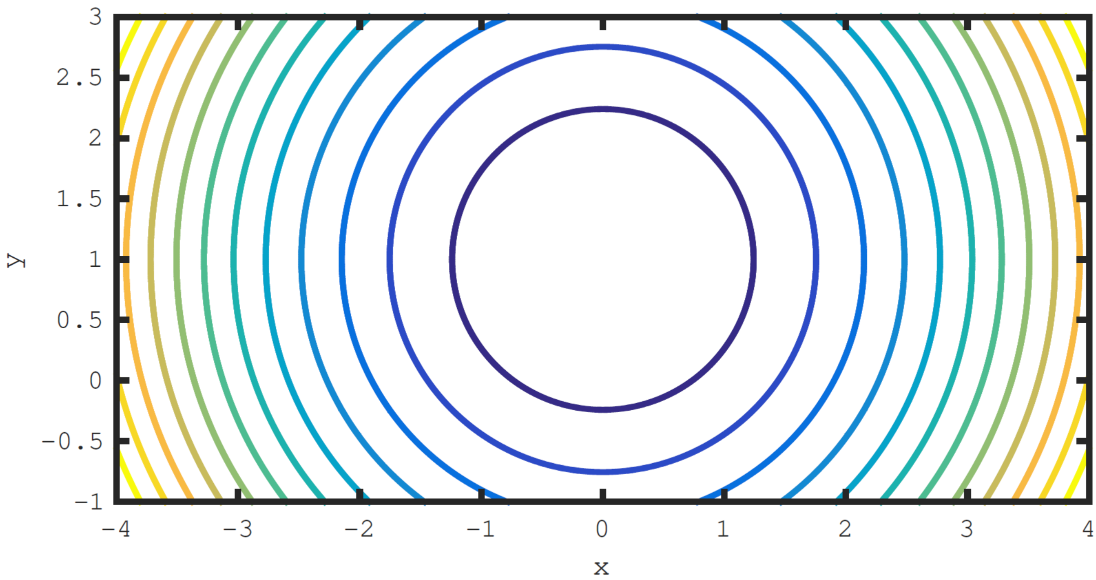
c)
Für die Höhenlinie zur Höhe L ergibt sich

$$L = f(x;y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 \qquad \Big| +1$$

$x^2 + (y-1)^2 = L + 1.$

Die Höhenlinien sind folglich Kreise in der xy-Ebene mit Mittelpunkt M und Radius r:

$\underline{\underline{M = (0;1)\,,\ r = \sqrt{L+1} \quad \text{mit } L \in [-1, \infty[.}}$



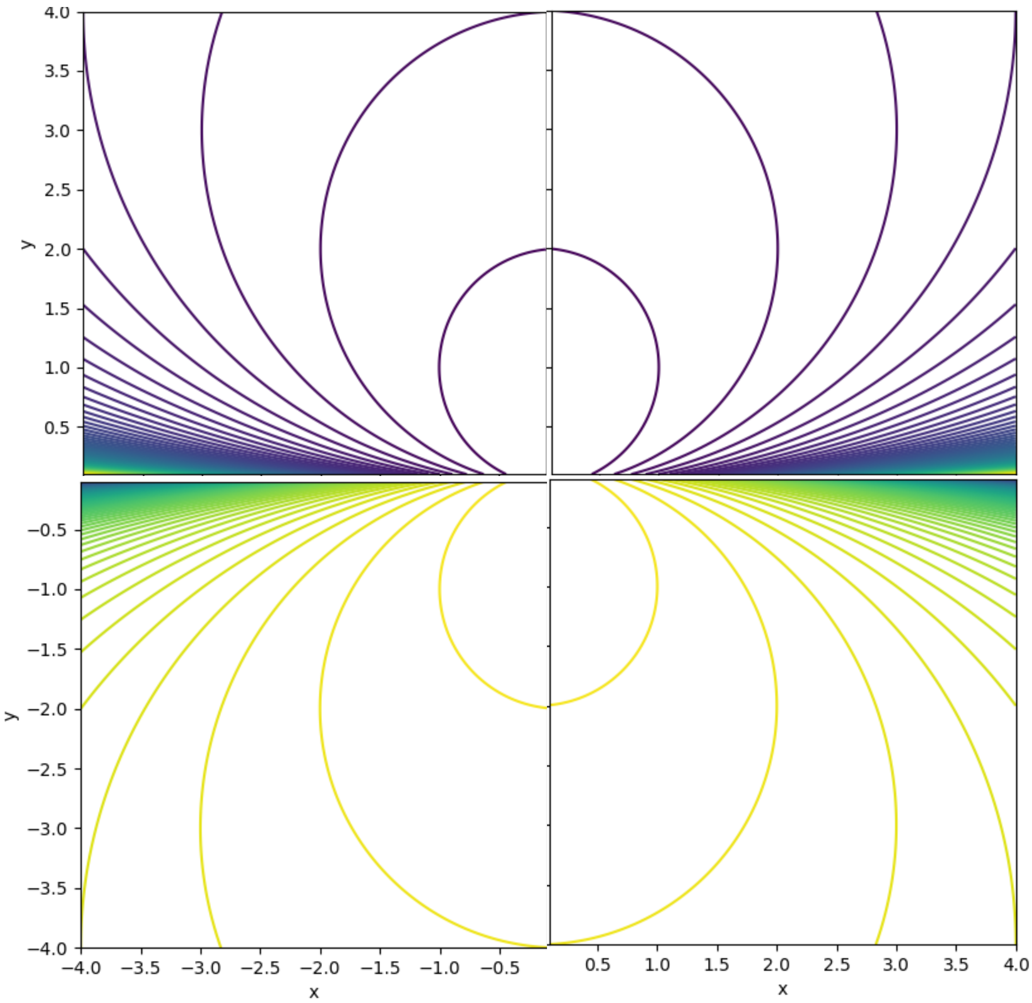
d)
Der Nenner darf nicht 0 werden. Somit ergibt sich
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\}, W = \mathbb{R}.$
Bestimmung der Höhenlinien zur Höhe c:

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2y} \overset{!}{=} c \neq 0$$

führt auf die Darstellung

$$x^2 + y^2 = 2cy \iff x^2 + (y-c)^2 = c^2.$$

Dies sind Kreise um die Punkte $(0, c)$ mit Radius $|c|$. Die Punkte auf der x-Achse werden somit nicht mit einbezogen.



5. Niveauflächen

Berechnen und beschreiben Sie für die gegebene Funktion jeweils die Niveauflächen.

a) $f(x,y,z) = x + 2y + 3z$ b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ c) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$

a)

Die Niveaufläche zum Niveau L ergibt sich zu

$L = f(x,y,z) = x + 2y + 3z.$

Die Niveauflächen sind also Ebenen mit der Gleichung

$z = \frac{1}{3}(L - x - 2y).$

b)

Die Niveaufläche zum Niveau L ergibt sich zu

$L = f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2.$

Die Niveauflächen sind also Sphären in 3D um den Mittelpunkt (0;0;0) mit Radius $\sqrt{L}$ mit der Gleichung
$z = \sqrt{L - x^2 - y^2}$.
c)
Die Niveaufläche zum Niveau L ergibt sich zu
$L = f(x, y, z) = x^2 + y^2$.
Für die Variable z gibt es keine Einschränkung, somit entsprechen die Niveauflächen von f dem Mantel von Zylindern in 3D, wobei die Symmetrieachse des Zylinders die z-Achse ist. Für den Radius des Zylinders ergibt sich $\sqrt{L}$.

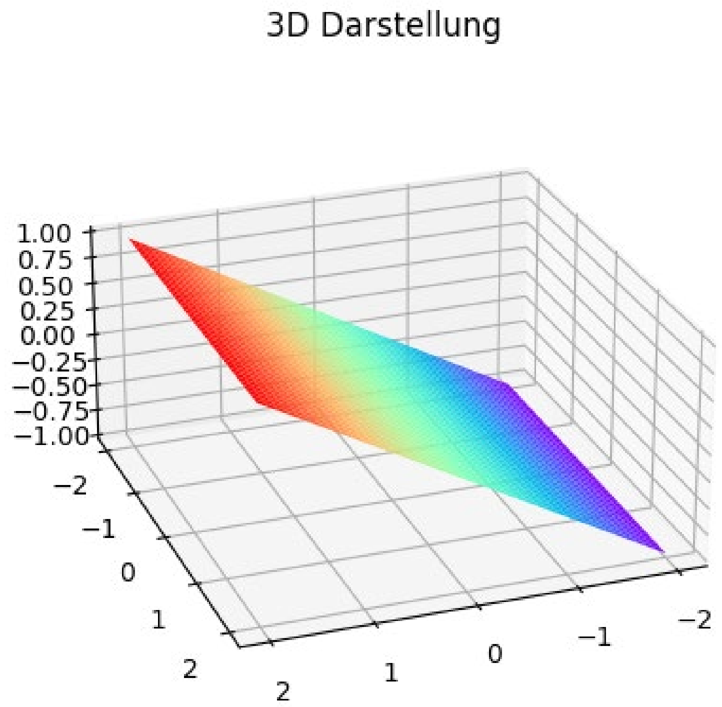
6. Funktionsgraphen und Höhenlinien mit Python/Numpy
Plotten Sie sowohl die Funktion als auch die Höhenlinien der angegebenen Funktionen mit Python/Numpy.

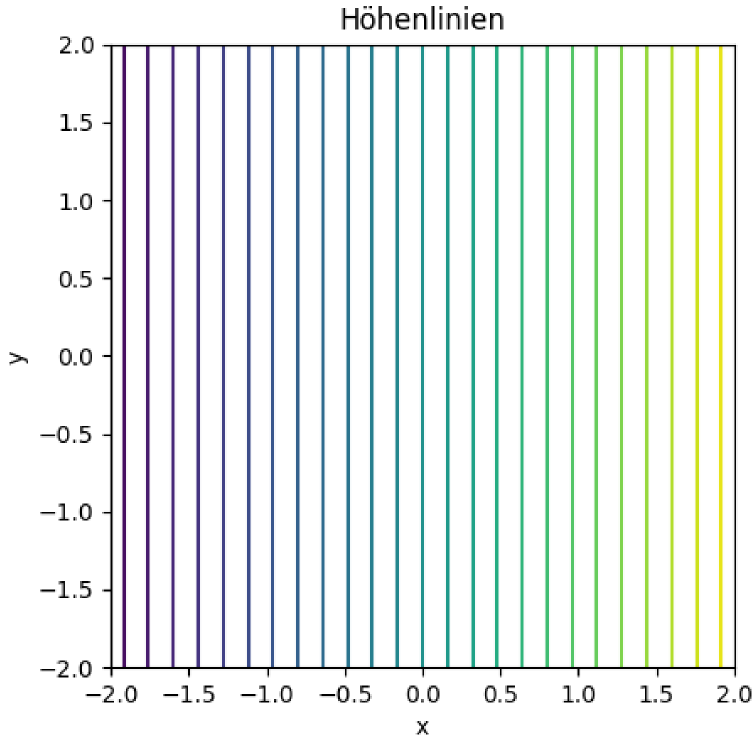
a) $f(x, y) = \frac{x}{2}$ b) $f(x, y) = \frac{y}{2}$ c) $f(x, y) = \frac{x+y}{2}$

d) $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{4}$ e) $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{2}$ f) $f(x, y) = \frac{6 \cdot \sin(xy)}{1+x^2+y^2}$

a)
```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
from mpl_toolkits import mplot3d;
import numpy as np;
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; # Anzahl Intervalle für x- bzw y-Achse
N_g=10; N_l=31; # Schrittweite
az=70; el=25; # Drehwinkel gegenüber z-Achse (azimuth) und
gegenüber xy-Ebene
fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=x/2; return z;
# Daten:
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x);  # Punkte auf x-Achse
erzeugen
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y);  # Punkte auf y-Achse
erzeugen
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data);  # Pärchen mit
allen x- und y-Werten
z_grid=f(x_grid,y_grid); # Funktionswerte der Pärchen
# Graph-Plot:
pl.figure(fig); ax=pl.axes(projection='3d');
ax.plot_surface(x_grid,y_grid,z_grid,rstride=N_g,cstride=N_g,
cmap='rainbow'); ax.view_init(el,az);
ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); ax.set_zlabel('z');
ax.set_box_aspect((np.ptp(x_grid), np.ptp(y_grid),
np.ptp(z_grid)));
pl.title('3D Darstellung');
# Höhenlinien-Plot:
fig=fig+1; fh=pl.figure(fig);
pl.contour(x_grid,y_grid,z_grid,N_l);
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y');
```

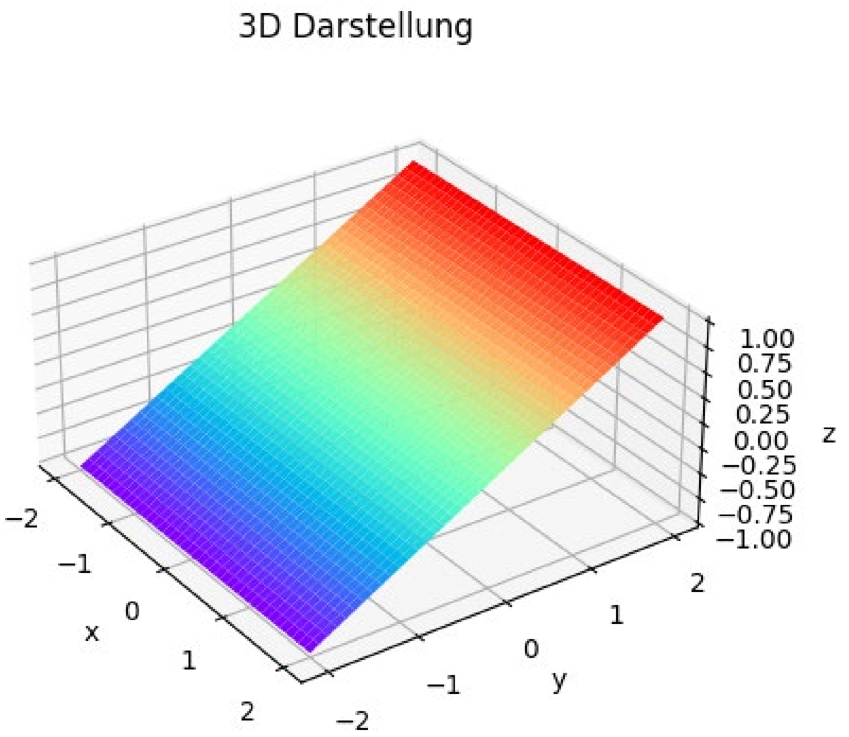
```
pl.grid(b=False); pl.axis('image');
pl.title('Höhenlinien');
```

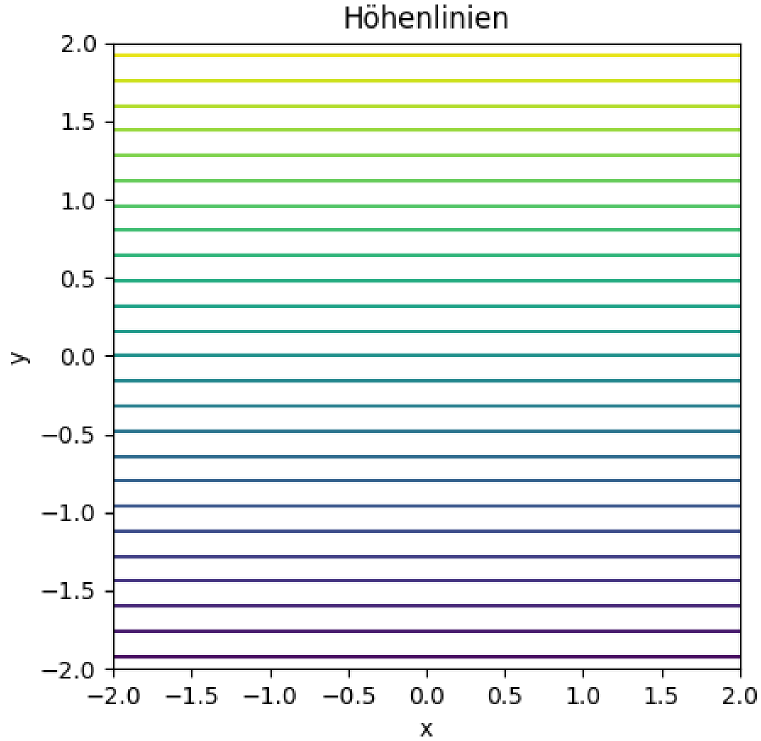




b)

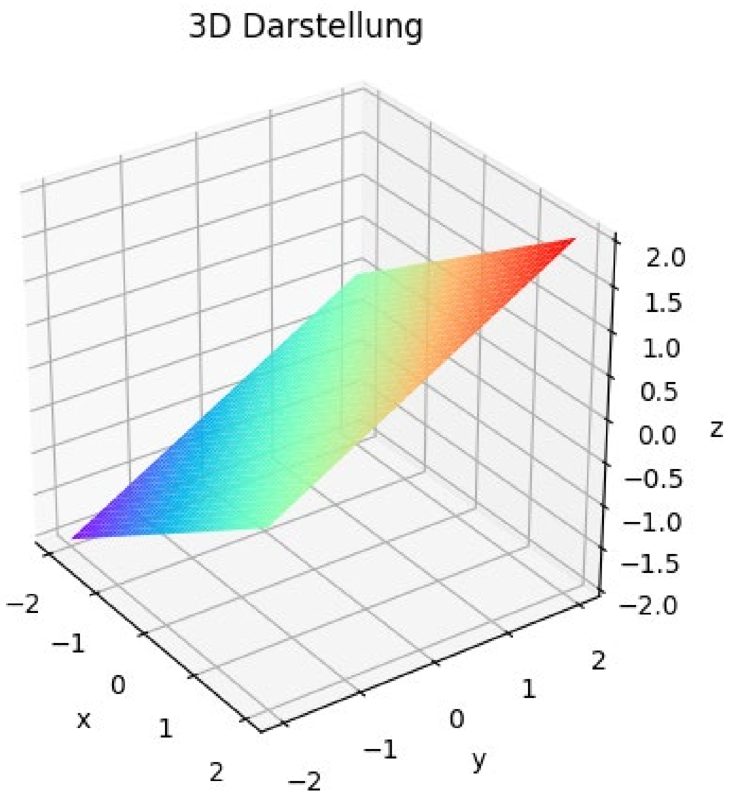
```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=30; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=y/2; return z;
```

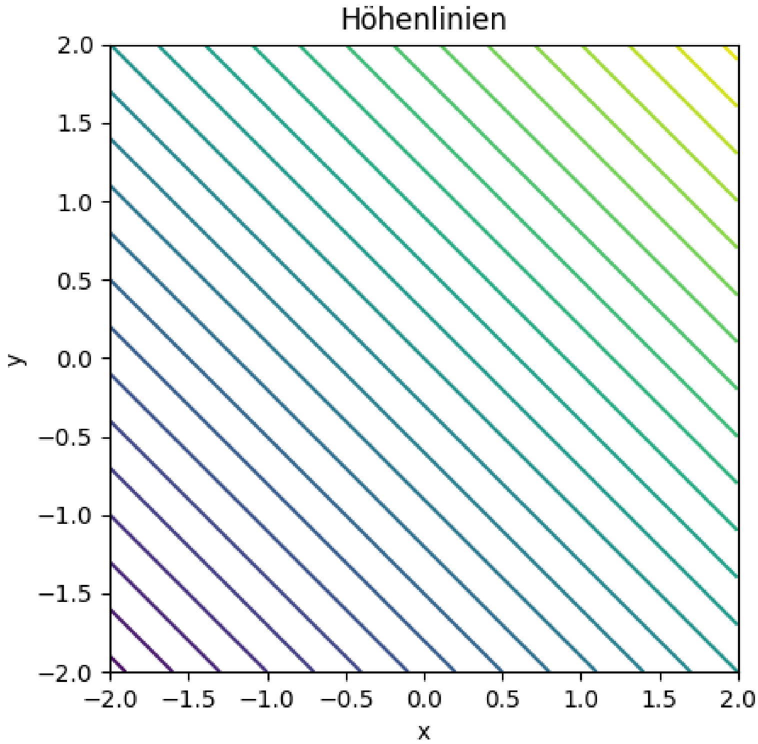




c)

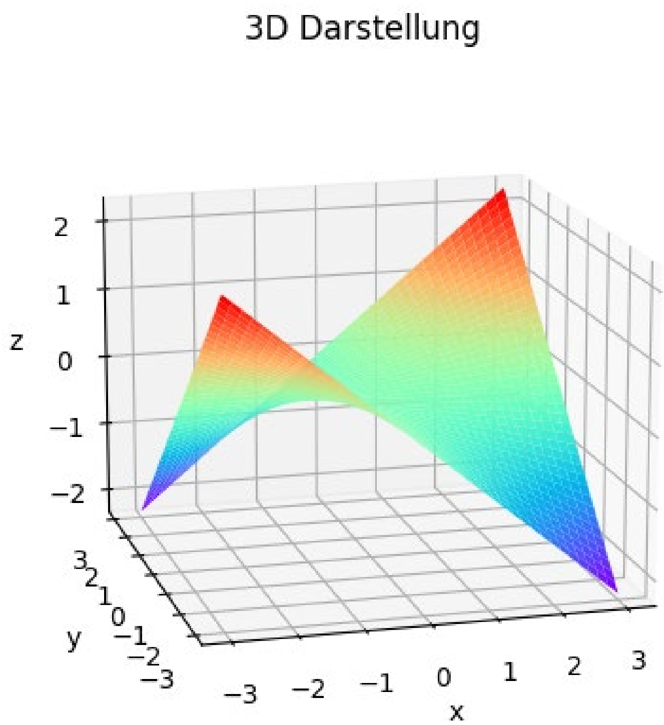
```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=30; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=(x+y)/2; return z;
```

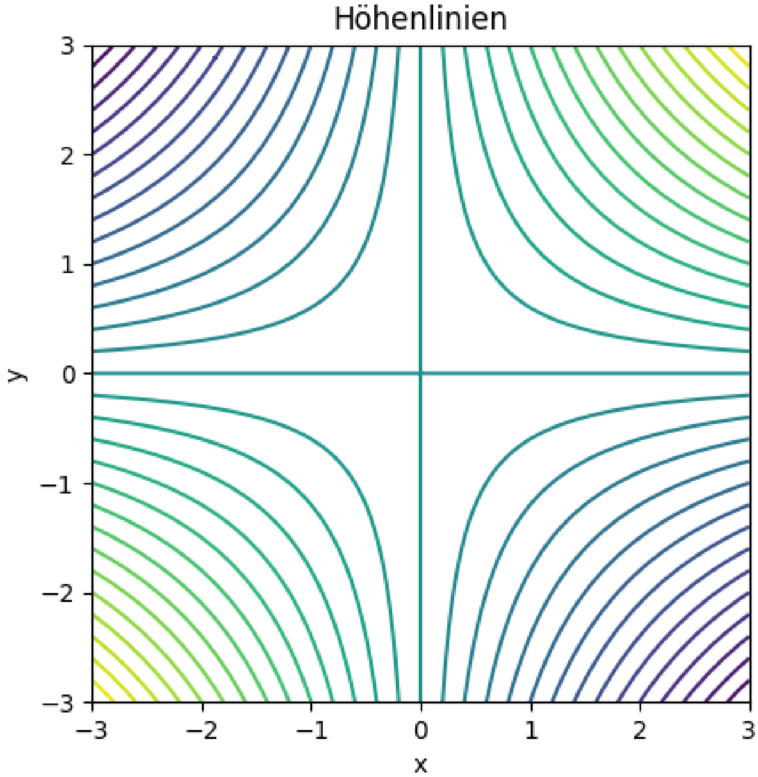




d)

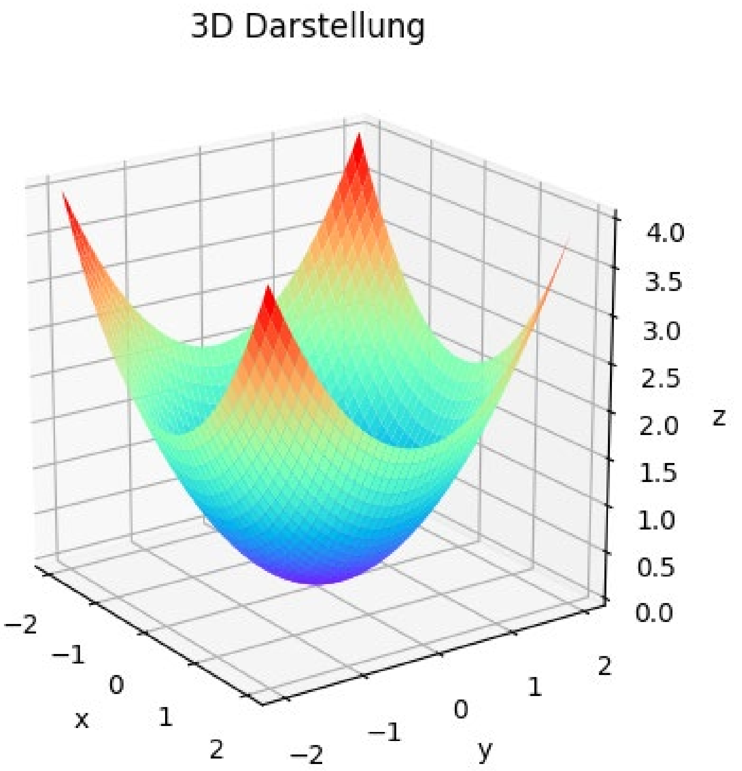
```
# Parameter:
x_0=-3; x_E=3; y_0=-3; y_E=3;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35-70; el=15; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=(x*y)/4; return z;
```

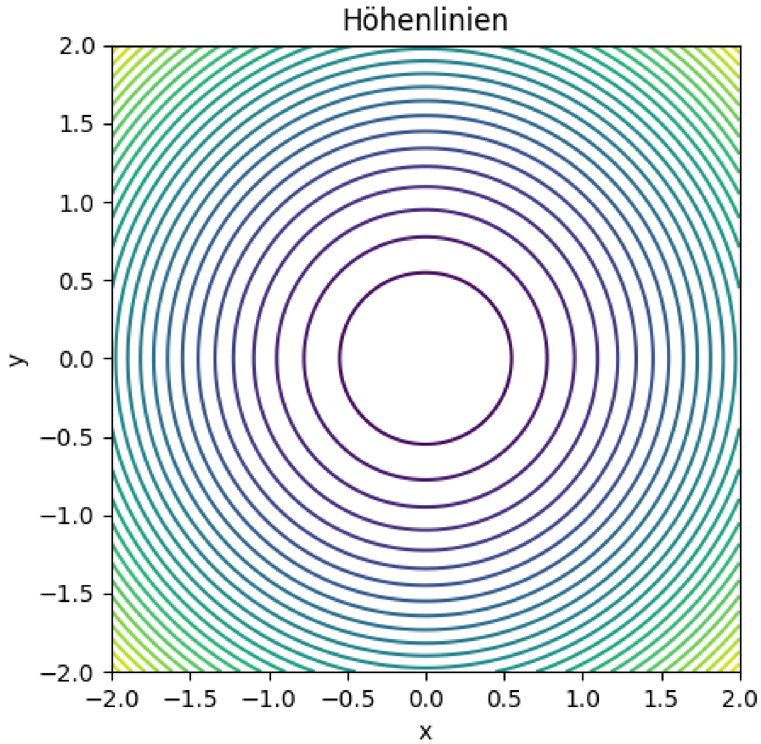




e)

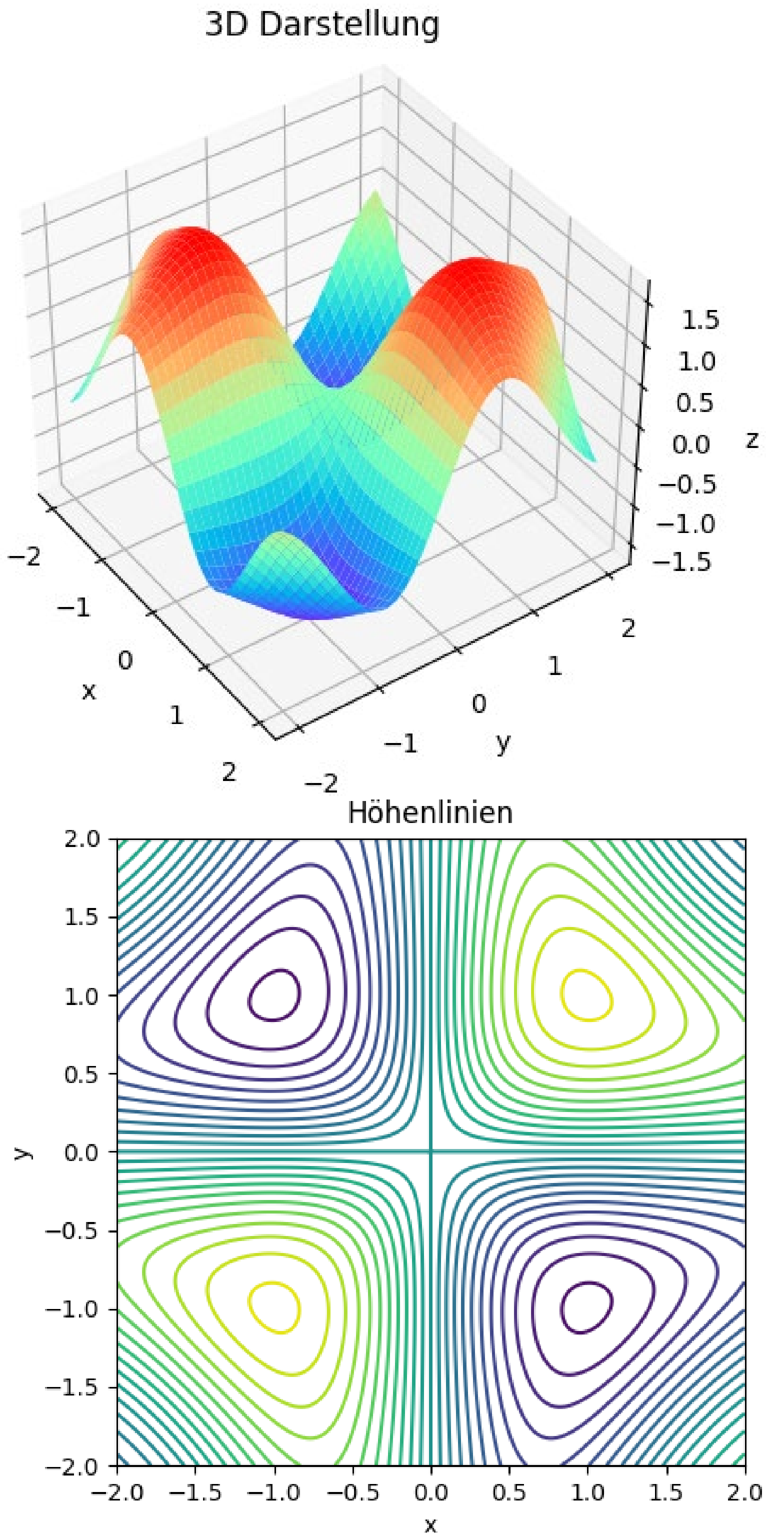
```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=20; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=(x**2+y**2)/2; return z;
```





f)

```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=40; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=(6*np.sin(x*y))/(1+x**2+y**2);return z;
```


3D Darstellung
x
y
z
Höhenlinien
x
y

7. Aussagen über eine Funktion
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: f(3;0;4) = 5.	X	
b) f ist eine Funktion in 3 Variablen.	X	
c) Die x-Achse ist eine Höhenlinie von f.		X
d) Die Einheitssphäre in 3D ist der Graph von f.		X
e) Die Einheitssphäre in 3D ist eine Niveaufläche von f.	X	
f) Die Sphäre um den Ursprung mit Radius 7 ist eine Niveaufläche von f.	X	

FH GR **Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 8

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über den Gauss-Integralsatz

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der GAUSS-*Integralsatz* gilt in EUKLID-*Räumen* beliebiger *Dimension*.	●	○
b) Der GAUSS-*Integralsatz* wird standardmässig in Bezug auf die *innere Einheitsnormale* $\hat{\mathbf{n}}$ einer *geschlossenen Fläche* im *Raum* formuliert.	○	●
c) Der GAUSS-*Integralsatz* wird standardmässig in Bezug auf die *äussere Einheitsnormale* $\hat{\mathbf{n}}$ einer *geschlossenen Fläche* im *Raum* formuliert.	●	○
d) Gilt $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$, dann verschwindet der *Fluss* von $\mathbf{v}$ durch eine *geschlossene Fläche* im *Raum*.	●	○
e) Verschwindet der *Fluss* von $\mathbf{v}$ durch eine *geschlossene Fläche* im *Raum*, dann gilt $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0$ im Innern des *Volumens*, das diese *Fläche* einschliesst.	○	●
f) Der *Fluss* eines *homogenen Vektorfeldes* durch eine *geschlossene Fläche* im *Raum* verschwindet in jedem Fall.	●	○

2. Sphärische Flüsse berechnen

Wir berechnen jeweils den *Fluss* des *Vektorfeldes* durch die *Sphäre* S mit *Mittelpunkt* am *Ursprung* und *Radius* $R = 2$ mit Hilfe des GAUSS-*Integralsatzes*. Die *Sphäre* S ist offensichtlich der *Rand* der *Kugel* K mit *Mittelpunkt* am *Ursprung*, *Radius* $R = 2$ und *Volumen*

$$V = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 2^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 8 = \frac{32}{3}\,\pi. \tag{1}$$

a) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Die *Divergenz* von $\mathbf{v}$ ist

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = {v^1}_{,1} + {v^2}_{,2} + {v^3}_{,3} = 0 + 0 + 0 = 0. \tag{3}$$

Mit Hilfe des GAUSS-*Integralsatzes* erhalten wir für den *Fluss* von $\mathbf{v}$ durch die *Sphäre* S den Wert

$$\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}}} = \oint_S \langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle \,\mathrm{d}A = \int_K \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}V = \int_K 0\,\mathrm{d}V = \underline{\underline{0.}} \tag{4}$$

b) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Die *Divergenz* von $\mathbf{v}$ ist

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = 1 + 1 + 1 = 3. \tag{6}$$

Mit Hilfe des GAUSS-*Integralsatzes* erhalten wir für den *Fluss* von $\mathbf{v}$ durch die *Sphäre* S den Wert

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}}} &= \oint_S \langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle \,\mathrm{d}A = \int_K \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}V = \int_K 3\,\mathrm{d}V = 3\int_K 1\,\mathrm{d}V = 3\cdot V = 3\cdot\frac{32}{3}\,\pi \\ &= \underline{\underline{32\pi.}}\end{aligned} \tag{7}$$

c) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Die *Divergenz* von $\mathbf{v}$ ist

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = 0 + 0 + 0 = 0. \tag{9}$$

Mit Hilfe des GAUSS-*Integralsatzes* erhalten wir für den *Fluss* von $\mathbf{v}$ durch die *Sphäre* S den Wert

$$\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}}} = \oint_S \langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle \,\mathrm{d}A = \int_K \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}V = \int_K 0\,\mathrm{d}V = \underline{\underline{0.}} \tag{10}$$

3. Volumenbestimmung mit Hilfe des Orstvektorfeldes

Wir betrachten einen *Körper* K mit *Volumen* V und *Oberfläche* A sowie das *Ortsvektorfeld*

$$\mathbf{r}(x;y;z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{11}$$

a) Die *Divergenz* von $\mathbf{r}$ ist

$$\underline{\underline{\mathrm{div}(\mathbf{r})}} = r^1{}_{,1} + r^2{}_{,2} + r^3{}_{,3} = 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{3}}. \tag{12}$$

b) Mit Hilfe des GAUSS-*Integralsatzes* und durch Einsetzen von (12) erhalten wir

$$\underline{\underline{V}} = \int_K 1\,\mathrm{d}V = \frac{1}{3}\int_K 3\,\mathrm{d}V = \frac{1}{3}\int_K \mathrm{div}(\mathbf{r})\,\mathrm{d}V = \underline{\underline{\frac{1}{3}\oint_{\partial K} \langle \mathbf{r}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \;\mathrm{d}A.}} \tag{13}$$

c) Die Aussage aus Teilaufgabe b) in Worten ausgedrückt bedeutet: Das *Volumen* eines *Körpers* ist ein Drittel des *Flusses* des *Ortsvektorfeldes* durch seine *Oberfläche*.

d) Wir betrachten die *Kugel* K mit *Radius* $R > 0$ und *Mittelpunkt* am *Ursprung*. Die *Oberfläche* von K ist die *Sphäre* S mit der *äusseren Einheitsnormalen*

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{R}\cdot\mathbf{r} \;\;\Leftrightarrow\;\; \mathbf{r} = R\cdot\hat{\mathbf{n}}. \tag{14}$$

Entlang S gilt demnach

$$\langle \mathbf{r}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle = \langle R\cdot\hat{\mathbf{n}}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle = R\cdot\langle \hat{\mathbf{n}}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle = R\cdot 1 = R. \tag{15}$$

Daraus und mit Hilfe von (13) erhalten wir

$$\underline{\underline{V}} = \frac{1}{3}\oint_{\partial K} \langle \mathbf{r}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \;\mathrm{d}A = \frac{1}{3}\oint_S R\,\mathrm{d}A = \frac{R}{3}\oint_S 1\,\mathrm{d}A = \frac{R}{3}\cdot A = \frac{R}{3}\cdot 4\pi\,R^2 = \underline{\underline{\frac{4}{3}\,\pi\,R^3.}} \tag{16}$$

4. Aussagen über ein Vektorfeld

Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ yx \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) $\mathbf{v}$ ist *konservativ*.	○	●
b) $\mathbf{v}$ ist *quellenfrei*.	●	○
c) $\mathbf{v}$ ist *wirbelfrei*.	○	●
d) Es gibt ein *Skalarfeld* ϕ, so dass $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi$.	○	●
e) Es gibt ein *Vektorfeld* $\mathbf{A}$, so dass $\mathbf{v} = \mathrm{rot}(\mathbf{A})$.	●	○
f) Die *Zirkulation* von $\mathbf{v}$ entlang des *Einheitskreises* in der x-y-Ebene verschwindet.	●	○

5. Aussagen über den Stokes-Integralsatz

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der STOKES-*Integralsatz* gilt in EUKLID-*Räumen* beliebiger *Dimension.*	○	●
b) Der STOKES-*Integralsatz* gilt nur für *ebene geschlossene Kurven.*	○	●
c) Der STOKES-*Integralsatz* wird standardmässig in Bezug auf die *rechtsumlaufene Einheitsnormale* $\hat{\mathbf{n}}$ einer *berandeten Fläche* im *Raum* formuliert.	●	○
d) Der STOKES-*Integralsatz* wird standardmässig in Bezug auf die *linksumlaufene Einheitsnormale* $\hat{\mathbf{n}}$ einer *berandeten Fläche* im *Raum* formuliert.	○	●
e) Verschwindet die *Zirkulation* von $\mathbf{v}$ entlang einer *geschlossenen Kurve* im *Raum*, dann gilt $\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = 0$ im Innern der *Fläche*, die diese *Kurve* einschliesst.	○	●
f) Die *Zirkulation* eines *homogenen Vektorfeldes* entlang einer *geschlossenen Kurve* im *Raum* verschwindet in jedem Fall.	●	○

6. Zirkulationen entlang eines Kreises berechnen

Wir berechnen jeweils die *Zirkulation* des *Vektorfeldes* entlang des *Kreises* in der x-y-Ebene mit *Mittelpunkt* am *Ursprung* und *Radius* $R = 3$ mit Hilfe des STOKES-*Integralsatzes.* Die *Kreislinie* S ist offensichtlich der *Rand* der *Kreisfläche* K mit *Mittelpunkt* am *Ursprung*, *Radius* $R = 3$, *Fläche* und *Einheitsnormale* gemäss

$$A = \pi\, R^2 = \pi \cdot 3^2 = 9\pi \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_z. \tag{18}$$

a) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y; z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Die *Rotation* von $\mathbf{v}$ ist

$$\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = 0. \tag{20}$$

Mit Hilfe des STOKES-*Integralsatzes* erhalten wir für die *Zirkulation* von $\mathbf{v}$ entlang der *Kreislinie* S den Wert

$$\underline{\underline{\Upsilon_{\mathbf{v}}}} = \oint_S \langle \mathbf{v} \,,\, \hat{\mathbf{e}} \rangle \;\mathrm{d}s = \int_K \langle \mathrm{rot}(\mathbf{v}) \,,\, \hat{\mathbf{n}} \rangle \;\mathrm{d}A = \int_K \langle 0 \,,\, \hat{\mathbf{n}} \rangle \;\mathrm{d}A = \int_K 0 \,\mathrm{d}A = \underline{\underline{0.}} \tag{21}$$

b) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y; z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{22}$$

Die *Rotation* von $\mathbf{v}$ ist

$$\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = 0. \tag{23}$$

Mit Hilfe des STOKES-*Integralsatzes* erhalten wir für die *Zirkulation* von $\mathbf{v}$ entlang der *Kreislinie* S den Wert

$$\underline{\underline{\Upsilon_{\mathbf{v}}}} = \oint_S \langle \mathbf{v}\,, \hat{\mathbf{e}} \rangle \, \mathrm{d}s = \int_K \langle \mathrm{rot}(\mathbf{v})\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A = \int_K \langle 0\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A = \int_K 0 \, \mathrm{d}A = \underline{\underline{0.}} \tag{24}$$

c) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Die *Rotation* von $\mathbf{v}$ ist

$$\mathrm{rot}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-(-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 2 \end{bmatrix} = 2\,\hat{\mathbf{e}}_z = 2\,\hat{\mathbf{n}}. \tag{26}$$

Mit Hilfe des STOKES-*Integralsatzes* erhalten wir für die *Zirkulation* von $\mathbf{v}$ entlang der *Kreislinie* S den Wert

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Upsilon_{\mathbf{v}}}} &= \oint_S \langle \mathbf{v}\,, \hat{\mathbf{e}} \rangle \, \mathrm{d}s = \int_K \langle \mathrm{rot}(\mathbf{v})\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A = \int_K \langle 2\,\hat{\mathbf{n}}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A = 2 \int_K \langle \hat{\mathbf{n}}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A \\ &= 2 \int_K 1 \, \mathrm{d}A = 2 \cdot A = 2 \cdot 9\pi = \underline{\underline{18\pi.}} \end{aligned} \tag{27}$$

7. Flüsse über einen Quader und Zirkulationen über ein Rechteck berechnen

Wir berechnen jeweils den *Fluss* des *Vektorfeldes* durch die *Oberfläche* des *Quaders* Q und seine *Zirkulation* entlang des *Rechtecks* R gemäss

$$Q = [0,1] \times [0,2] \times [0,3] \quad \text{und} \quad R = [0,3] \times [0,4] \times \{2\} \tag{28}$$

mit Hilfe des GAUSS-*Integralsatzes* und STOKES-*Integralsatzes*. Weil das *Rechteck* R *parallel* zur x-y-Ebene liegt, ist seine *Einheitsnormale*

$$\hat{\mathbf{n}}_R = \hat{\mathbf{e}}_z. \tag{29}$$

Volumen und *Fläche* von *Quader* bzw. *Rechteck* sind

$$V_Q = (1-0) \cdot (2-0) \cdot (3-0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \tag{30}$$

$$A_R = (3-0) \cdot (4-0) = 3 \cdot 4 = 12. \tag{31}$$

a) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} z-y \\ x-z \\ y-x+2z \end{bmatrix}. \tag{32}$$

Divergenz und *Rotation* von $\mathbf{v}$ sind

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = (0-0)+(0-0)+(0-0+2\cdot 1) = 2 \tag{33}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-0+0)-(0-1) \\ (1-0)-(0-1+0) \\ (1-0)-(0-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Auf dem *Rechteck* R gilt

$$\langle \operatorname{rot}(\mathbf{v}), \hat{\mathbf{n}}_R \rangle = \left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = 2\cdot 0 + 2\cdot 0 + 2\cdot 1 = 0+0+2 = 2. \tag{35}$$

Mit Hilfe des GAUSS-*Integralsatzes* und STOKES-*Integralsatzes* erhalten wir

$$\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}}} = \oint_{\partial Q} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{n}}_Q \rangle \, \mathrm{d}A = \int_Q \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, \mathrm{d}V = \int_Q 2 \, \mathrm{d}V = 2 \int_Q 1 \, \mathrm{d}V = 2 \cdot V_Q = 2 \cdot 6 = \underline{\underline{12}} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Upsilon_{\mathbf{v}}}} &= \oint_{\partial R} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{e}} \rangle \, \mathrm{d}s = \int_R \langle \operatorname{rot}(\mathbf{v}), \hat{\mathbf{n}}_R \rangle \, \mathrm{d}A = \int_R 2 \, \mathrm{d}A = 2 \int_R 1 \, \mathrm{d}A = 2 \cdot A_R = 2 \cdot 12 \\ &= \underline{\underline{24.}} \end{aligned} \tag{37}$$

b) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} xy \\ z^2 \\ y^2 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Divergenz und *Rotation* von $\mathbf{v}$ sind

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}) = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = 1 \cdot y + 0 + 0 = y \tag{39}$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y^{2-1} - 2z^{2-1} \\ 0-0 \\ 0 - x\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2y-2z \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Auf dem *Rechteck* R gilt

$$\begin{aligned} \langle \operatorname{rot}(\mathbf{v}), \hat{\mathbf{n}}_R \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 2y-2\cdot 2 \\ 0 \\ -x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle = (2y-4)\cdot 0 + 0\cdot 0 + (-x)\cdot 1 = 0+0-x \\ &= -x. \end{aligned} \tag{41}$$

Mit Hilfe des Gauss-*Integralsatzes* und Stokes-*Integralsatzes* erhalten wir

$$\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}}} = \oint_{\partial Q} \langle \mathbf{v}\,, \hat{\mathbf{n}}_Q \rangle \, \mathrm{d}A = \int_Q \mathrm{div}(\mathbf{v})\,\mathrm{d}V = \int_0^3\int_0^2\int_0^1 y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^2 y\,\mathrm{d}y \cdot \int_0^3 1\,\mathrm{d}z = \Big[x\Big]\Big|_0^1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[y^2\Big]\Big|_0^2 \cdot \Big[z\Big]\Big|_0^3$$
$$= (1-0)\cdot\frac{1}{2}\cdot\big(2^2-0\big)\cdot(3-0) = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 3 = \underline{\underline{6}} \tag{42}$$

$$\underline{\underline{\Upsilon_{\mathbf{v}}}} = \oint_{\partial R} \langle \mathbf{v}\,, \hat{\mathbf{e}} \rangle \, \mathrm{d}s = \int_R \langle \mathrm{rot}(\mathbf{v})\,, \hat{\mathbf{n}}_R \rangle \, \mathrm{d}A = \int_R (-x)\,\mathrm{d}A = -\int_0^4\int_0^3 x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$
$$= -\int_0^3 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^4 1\,\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\cdot\Big[x^2\Big]\Big|_0^3 \cdot \Big[y\Big]\Big|_0^4 = -\frac{1}{2}\cdot\big(3^2-0\big)\cdot(4-0) = -\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 4$$
$$= \underline{\underline{-18.}} \tag{43}$$

8. Aussagen über ein Vektorfeld

Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} x^2 \\ 1 \\ -2z \end{bmatrix}. \tag{44}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) $\mathbf{v}$ ist *konservativ.*	●	○
b) $\mathbf{v}$ ist *quellenfrei.*	○	●
c) $\mathbf{v}$ ist *wirbelfrei.*	●	○
d) Es gibt eine *reellwertige Funktion* ϕ, so dass $\mathbf{v} = \boldsymbol{\nabla}\phi$.	●	○
e) Es gibt ein *Vektorfeld* $\mathbf{A}$, so dass $\mathbf{v} = \mathrm{rot}(\mathbf{A})$.	○	●
f) Die *Zirkulation* von $\mathbf{v}$ entlang des *Einheitskreises* in der x-y-Ebene verschwindet.	●	○