Partielle Integration

Sonderfall: $u(x) = x \qquad u'(x) = 1$ $\qquad \ln(x)$

$$\int v(x) \cdot 1 \, dx = v(x) \cdot x - \int v'(x) \cdot x \, dx$$

Bsp.: $\int \ln x \, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx$

$= x \cdot \ln x - \int 1 \, dx$

$= x \cdot \ln(x) - x + C$

• $\int_1^2 \overset{\uparrow}{x} \cdot \overset{\downarrow}{\ln(x)} \, dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2}x^2 \, dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x \, dx$

$= \left[\left(\frac{1}{2}2^2 \cdot \ln 2\right) - \left(\frac{1}{2}1^2 \cdot \ln 1\right)\right] - \int_1^2 \frac{1}{2}x \, dx$

$=$

Nicht fertig gerechnet

• $\int \underset{v(x)}{\overset{\downarrow}{x^2}} \cdot \underset{u(x)}{\overset{\uparrow}{\cos x}} \, dx$ $\qquad v(x) = x^2 \qquad v'(x) = 2x$

$\qquad u'(x) = \cos x \qquad u(x) = \sin x$

$= x^2 \cdot \sin x - \underbrace{\int 2x \cdot \sin x \, dx}_{\text{nochmal partiell integrieren}}$

$\int \overset{\downarrow}{2x} \cdot \overset{\uparrow}{\sin x} \, dx$ $\qquad v(x) = 2x \qquad v'(x) = 2$

$\qquad u'(x) = \sin x \qquad u(x) = -\cos x$

$= 2x \cdot -\cos x - \int 2 \cdot -\cos x \, dx$

$= 2x \cdot -\cos x - 2 \cdot \sin x + C$

$= \int x^2 \cdot \cos x \, dx = x^2 \cdot \sin x - (-2x\cos x + 2\sin x + C)$

$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2\sin x + C_1$

Nicht fertig abgeschrieben

1 Beispiel nicht gesehen

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \qquad a^2 - x^2 \geq 0$$

$$x = a \cdot \sin u$$

$$\int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}\ \frac{du}{a \cdot \cos u} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} u &= a \cdot \sin u \\ du &= a \cdot \cos u\, dx \end{aligned}$$

$$= \int \left(a^2 - a^2 \sin^2 u\right)^{\frac{1}{2}} \cdot a \cdot \cos u\, du$$

$$= \int \sqrt{a^2(1 - \sin^2 u)} \cdot a \cdot \cos u\, du$$

$$= \int a \underbrace{\sqrt{1 - \sin^2 u}}_{\cos^2 u} \cdot a \cdot \cos u\, du$$

$$= \int a \cdot \cos u \cdot a \cdot \cos u\, du = a^2 \int \underbrace{\cos^2 u}_{1 - \sin^2 u}\, du$$

$$= a^2 \int 1\, du - a^2 \int \sin^2 u\, du$$

$$= a^2 \cdot u - a^2 \left(\tfrac{1}{2} u - \tfrac{1}{2} \sin u \cos u\right) + C$$

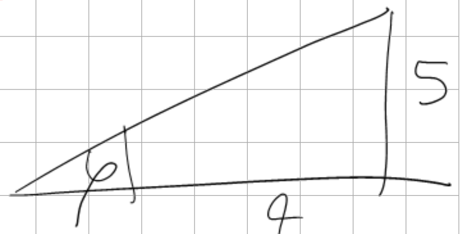
$$=$$

$$=$$

$$=$$

$$= \frac{1}{2} a^2 u + \frac{1}{2} a^2 \sin u \cdot \sqrt{1 - \sin^2 u} + C$$

$$\sin^2 + \cos^2 = 1$$



ARC SIN ?

INTEGRALTABELLE

NICHT FERTIG

$$\int \frac{1 - \cos^2 x}{2 \cos^2 x}\, dx = \int \frac{1}{2\cos^2 x}\, dx - \int \frac{1}{2}\, dx$$

$$\rightarrow \int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$$

Subst.

$$u = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$du = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$du = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$$

$$du \cdot \cos^2 x = dx$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos^2 x\, du$$

$$= \int 1\, du = u + C$$

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 3

Computational and Data Science
FS2024

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, partielle Integration und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die partielle Integration anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale zu berechnen.
- Sie können bestimmte Integrale näherungsweise auf eine vorgegebene Anzahl Dezimalstellen mit Python/Numpy berechnen.

---

1. Aussagen über partielle Integration

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Methode der partiellen Integration basiert auf der Produktregel der Differentialrechnung.	X	
b) Mit Hilfe der partiellen Integration kann jedes Produkt von 2 Funktionen integriert werden.		X
c) Um ein Produkt von 2 Funktionen mit partieller Integration integrieren zu können, muss man mindestens einen der Faktoren allein integrieren können.	X	
d) Mit Hilfe der partiellen Integration kann das Integral einer beliebigen differentierbaren Funktion f(x) auf die Berechnung des Integrals von $x \cdot f'(x)$ zurückgeführt werden und umgekehrt.	X	

ERKLÄRUNG STUDIEREN

2. Stammfunktionen mit partieller Integration bestimmen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit der Methode der partiellen Integration.

a) $\int xe^x dx$
b) $\int x^2 e^x dx$
c) $\int x \sin x \, dx$
d) $\int x \cos x \, dx$
e) $\int x^2 \sin x \, dx$
f) $\int x^2 \cos x \, dx$
g) $\int (\sin x)^2 dx$
h) $\int (\cos x)^2 dx$
i) $\int (\sinh x)^2 dx$
j) $\int (\cosh x)^2 dx$

3. Stammfunktionen mit partieller Integration bestimmen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Methode der partiellen Integration.

a) $\int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}} dx$
b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1} dx$
c) $\int_1^2 x \ln x \, dx$

2.

a) $\int x \, e^x \, dx$

$u(x) = e^x \quad u'(x) = e^x$
$v(x) = x \quad v'(x) = 1$

$= e^x \cdot x - \int e^x \cdot 1 \, dx$
$= e^x x - e^x + C$
$= e^x (x - 1) + C$

b) $\int x^2 e^x \, dx$

$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$
$u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$

$v(x) = e^x \quad v'(x) = e^x$
$u(x) = 2x \quad u'(x) = 2$

$= e^x \cdot x^2 - \int e^x \cdot 2x \, dx$
$= e^x \cdot x^2 - (e^x \cdot 2x - 2 \int e^x dx)$
$= e^x \cdot x^2 - (e^x \cdot 2x - 2e^x) + C$
$= e^x \cdot x^2 - 2x e^x + 2e^x + C$
$= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$
$= e^x (x^2 - 2x + 2) + C$

c) $\int x \cdot \sin x \, dx$

$u(x) = -\cos x \quad u'(x) = \sin x$
$v(x) = x \quad v'(x) = 1$

$= -\cos x \cdot x - \int -\cos x \cdot 1 \, dx$
$= -\cos x \cdot x + \sin x + C$
$= \sin x - x \cdot \cos x + C$

d) $\int x \cos x \, dx$

$u(x) = \sin x \quad u'(x) = \cos x$
$v(x) = x \quad v'(x) = 1$

$= \sin x \cdot x - \int \sin x \cdot 1 \, dx$
$= \sin x \cdot x - -\cos x + C$
$= x \cdot \sin x + \cos x + C$

e) $\int x^2 \sin x \, dx$

$u(x) = -\cos x \quad u'(x) = \sin x$
$v(x) = x^2 \quad v'(x) = 2x$

$u(x) = \sin x \quad u'(x) = \cos x$
$v(x) = x \quad v'(x) = 1$

$= x^2 \cdot -\cos x - \int 2x \cdot -\cos x \, dx$
$= -x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx$
$= -x^2 \cos x + 2 (x \cdot \sin x - \int 1 \cdot \sin x \, dx)$
$= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C$
$= 2x \sin x + \cos x (2 - x^2) + C$

f) $\int x^2 \cos x \, dx$

$v(x) = \sin x \quad v'(x) = \cos x$
$u(x) = x^2 \quad u'(x) = 2x$

$v(x) = -\cos x \quad v'(x) = \sin x$
$u(x) = x \quad u'(x) = 1$

$= x^2 \sin x - \int \sin x \cdot 2x \, dx$
$= x^2 \sin x - 2 \int \sin x \cdot x \, dx$
$= x^2 \sin x - 2(-\cos x \cdot x - \int -\cos x \cdot 1 \, dx)$
$= x^2 \sin x + 2x \cos x + 2 \int -\cos x \, dx$
$= x^2 \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + C$
$= \sin x (x^2 - 2) + 2x \cos x + C$

g) $\int (\sin x)^2 \, dx$

$u(x) = -\cos x \quad u'(x) = \sin x$
$v(x) = \sin x \quad v'(x) = \cos x$

$F(x) = \int \sin x \cdot \sin x \, dx$
$= -\cos x \cdot \sin x - \int -\cos x \cdot \cos x \, dx$
$= -\cos x \cdot \sin x + \int (\cos x)^2 \, dx \qquad (\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1$
$= -\cos x \cdot \sin x + \int 1 - (\sin x)^2 \, dx$
$= -\cos x \cdot \sin x + \int 1 \, dx - \int (\sin x)^2 \, dx$
$F(x) = -\cos x \cdot \sin x + x + C_1 - F(x) \quad | + F(x)$
$2 \cdot F(x) = -\cos x \cdot \sin x + x + C_1 \quad | : 2$
$F(x) = \dfrac{-\cos x \cdot \sin x + x}{2} + C$
$F(x) = \dfrac{x - \cos x \cdot \sin x}{2} + C$

h) $\int \cos^2 x \, dx$

$u(x) = \sin x \quad u'(x) = \cos x$
$v(x) = \cos x \quad v'(x) = -\sin x$

$= \int \cos x \cdot \cos x \, dx$
$F(x) = \sin x \cdot \cos x - \int \sin x \cdot -\sin x \, dx$
$F(x) = \sin x \cdot \cos x + \int (\sin x)^2 \, dx$
$F(x) = \sin x \cdot \cos x + \int 1 - (\cos x)^2 \, dx$
$F(x) = \sin x \cdot \cos x + \int 1 dx - \int (\cos x)^2 \, dx$
$F(x) = \sin x \cdot \cos x + x + C_1 - F(x) \quad | + F(x)$
$2F(x) = \sin x \cdot \cos x + x + C_1 \quad | : 2$
$F(x) = \dfrac{\sin x \cdot \cos x + x + C_1}{2} \quad | \; \dfrac{C_1}{2} = C$
$F(x) = \dfrac{\sin x \cdot \cos x + x}{2} + C$

i) $\int \sinh^2 x \, dx$

$u(x) = \cosh x \quad u'(x) = \sinh x$
$v(x) = \sinh x \quad v'(x) = \cosh x$

$= \int \sinh x \cdot \sinh x \, dx$
$F(x) = \cosh x \cdot \sinh x - \int \cosh x \cdot \cosh x \, dx$
$= \cosh x \cdot \sinh x - \int 1 - (\sinh x)^2 dx$
$= \cosh x \cdot \sinh x - \int 1 dx - \int (\sinh x)^2 dx$
$= \cosh x \cdot \sinh x - x + C_1 - \int (\sinh x)^2 dx$
$F(x) = \cosh x \cdot \sinh x - x + C_1 - F(x) \quad | + F(x)$
$2 F(x) = \cosh x \cdot \sinh x - x + C_1 \quad | : 2$
$F(x) = \dfrac{\cosh x \cdot \sinh x - x + C_1}{2} \quad | \; \dfrac{C_1}{2} = C$
$F(x) = \dfrac{\cosh x \cdot \sinh x - x}{2} + C$

j) $\int \cosh^2 x \, dx$

$u(x) = \sinh x \quad u'(x) = \cosh x$
$v(x) = \cosh x \quad v'(x) = \sinh x$

$= \int \cosh x \cdot \cosh x \, dx$
$F(x) = \sinh x \cdot \cosh x - \int \sinh x \cdot \sinh x \, dx$
$= \sinh x \cdot \cosh x - \int 1 - (\cosh x)^2 dx$
$= \sinh x \cdot \cosh x - \int 1 dx - \int (\cosh x)^2 dx$
$= \sinh x \cdot \cosh x - x + C_1 - F(x) \quad | + F(x)$
$2 F(x) = \sinh x \cdot \cosh x - x + C_1 \quad | : 2$
$F(x) = \dfrac{\sinh x \cdot \cosh x - x + C_1}{2} \quad | \; \dfrac{C_1}{2} = C$
$F(x) = \dfrac{\sinh x \cdot \cosh x - x}{2} + C$

3. Stammfunktionen mit partieller Integration bestimmen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Methode der partiellen Integration.

a) $\int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}}dx$ b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}dx$

c) $\int_1^2 x\ln x\,dx$

a) $\int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\,dx$

$= \int_0^3 x \cdot 2^{-1} \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \frac{1}{2}\int_0^3 x \cdot (x+1)^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$\frac{1}{\frac{1}{2}}(x+1)^{\frac{1}{2}} \cdot 1$

$u(x) = 2\sqrt{x+1}$ $u'(x) = (x+1)^{-\frac{1}{2}}$

$v(x) = x$ $v'(x) = 1$

$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x+1} \cdot x - \int_0^3 2\sqrt{x+1} \cdot 1\,dx\right)$

$= \frac{1}{2}\left(2\sqrt{x+1} \cdot x - 2\int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx\right)$

$= \left[\sqrt{x+1} \cdot x\right]_0^3 - \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_0^3$

$(x+1)^{\frac{1}{2}}$

$\frac{1}{\frac{3}{2}}(x+1)^{\frac{3}{2}} \cdot 1$

$= \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} \cdot 1$

$= \left[\left(\sqrt{3+1} \cdot 3\right) - \left(\sqrt{0+1} \cdot 0\right)\right] - \left[\left(\frac{2}{3}\sqrt{(3+1)^3}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{(0+1)^3}\right)\right]$

$2 \cdot 3$ $1 \cdot 0$ $\sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8 \Rightarrow \frac{16}{3}$

$= \left[6 - 0\right] - \left[\frac{16}{3} - \frac{2}{3}\right]$

$= 6 - \frac{14}{3}$

$6 = \frac{18}{3} \Rightarrow 16 - 14 = 4$

$= \frac{4}{3}$

$$\underline{I} = \int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\,dx = \int_0^3 x \cdot \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}\,dx = \left[x \cdot \sqrt{x+1}\right]\Big|_0^3 - \int_0^3 \sqrt{x+1}\,dx$$

$$= \left[x \cdot \sqrt{x+1}\right]\Big|_0^3 - \frac{2}{3} \cdot \left[(x+1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_0^3$$

$$= 3 \cdot \sqrt{3+1} - 0 \cdot \sqrt{0+1} - \frac{2}{3} \cdot (3+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot (0+1)^{\frac{3}{2}} = 6 - 0 - \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{18}{3} - \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \underline{\frac{4}{3}}.$$

b) $\int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx$

$= \int_1^2 x \cdot (x-1)^{\frac{1}{2}}\,dx$

$\frac{1}{\frac{3}{2}}(x-1)^{\frac{3}{2}} \cdot 1$

$u(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \cdot 1$ $u'(x) = (x-1)^{\frac{1}{2}}$

$v(x) = x$ $v'(x) = 1$

$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \cdot x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}}\,dx$

$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \cdot x\right]_1^2 - \left[\frac{4}{15}\sqrt{(x-1)^5}\right]_1^2$

$\left(\frac{1}{\frac{5}{2}} \cdot \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{5}{2}}\right) \cdot 1$

$= \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}}$

$= \frac{4}{15}(x-1)^{\frac{5}{2}}$

$= \left(\frac{2}{3}\sqrt{(2-1)^3} \cdot 2 - \left(\frac{2}{3}\sqrt{(1-1)^3} \cdot 1\right)\right) - \left(\frac{4}{15}\sqrt{(2-1)^5} - \frac{4}{15}\sqrt{(1-1)^5}\right)$

$\frac{2}{3}\sqrt{1^3} \cdot 2$ $\frac{2}{3}\sqrt{0^3} \cdot 1$ $\frac{4}{15}\sqrt{1^5}$

$= \left(\frac{4}{3} - 0\right) - \left(\frac{4}{15} - 0\right)$

$\frac{4}{3} = \frac{20}{15}$

$= \frac{16}{15}$

b)

$$\underline{I} = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,dx = \int_1^2 x \cdot \sqrt{x-1}\,dx = \left[x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}}\,dx$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \left[x(x-1)^{\frac{3}{2}}\right]\Big|_1^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \left[(x-1)^{\frac{5}{2}}\right]\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot (2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot (1-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \cdot (2-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15} \cdot (1-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3} - 0 - \frac{4}{15} + 0$$

$$= \frac{20}{15} - \frac{4}{15} = \underline{\frac{16}{15}}.$$

c) $\int_1^2 x\ln x\,dx$

$\frac{1}{2}x^2$

$u(x) = \frac{1}{2}x^2$ $u'(x) = x$

$v(x) = \ln x$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{x}\,dx$ $\frac{x^2}{x} = x \Rightarrow \frac{1}{2}x^2$

$= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\,dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^2 = \frac{1}{2}\left[x^2 \ln x\right]_1^2 - \frac{1}{4}\left[x^2\right]_1^2$

$= \frac{1}{2}\left(\left(2^2 \cdot \ln(2)\right) - \left(1^2 \cdot \ln(1)\right)\right) - \frac{1}{4}\left(2^2 - 1^2\right)$ $2\ln(2) - \frac{3}{4}$

$= 2 \cdot \ln(2) - 0 - \frac{3}{4} =$

4. Stammfunktionen bestimmen
Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Methode.

a) $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$

b) $\int e^{at}\sin(\omega t)\,dt$

c) $\int r^3(\cos r^2)dr$

d) $\int \frac{x}{(\cos x)^2}\,dx$

e) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}\,dx$

f) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}\,dx$

5. Aufleiten mit Python/Sympy
Berechnen Sie die unbestimmten Integrale aus Aufgabe 7 mit Python/Sympy.

6. Fläche des Einheitskreises
Berechnen Sie die Fläche des Einheitskreises durch Integration, indem Sie einen geeigneten Teil des Kreisbogens als Graph einer Funktion auffassen und diesen integrieren.
Hinweis: Verwenden Sie die Substitution x = sin(u).

4. Stammfunktionen bestimmen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale mit einer geeigneten Methode.

a) $\int \frac{x}{1+x^4}dx$ b) $\int e^{at}\sin(\omega t)\,dt$

c) $\int r^3(\cos r^2)dr$ d) $\int \frac{x}{(\cos x)^2}dx$

e) $\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx$ f) $\int \frac{(\ln x)^3}{x}dx$

Quotientenregel

$$\boxed{\frac{z'\cdot n - z\cdot n'}{n^2}}$$

a) $$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx$$

$$= \int \frac{x}{1+u^2}\,dx$$

$u = x^2$

$du = 2x\,dx$

$\frac{1}{2x}du = dx$

$$= \int \frac{\cancel{x}}{1+u^2}\cdot\frac{1}{2\cancel{x}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(u)+c$$

$$= \frac{1}{2}\arctan(x^2)+c$$

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du \Rightarrow \arctan(u)+c$$

Liste mit solchen Umformungen?

Trigonometrische Ableitungen

b) $$\int e^{at}\sin(\omega t)\,dt$$

$u(t) = \frac{1}{a}e^{at}$ $u'(t) = e^{at}$

$v(t) = \sin(\omega t)$ $v'(t) = \cos(\omega t)\cdot\omega$

$$= \frac{1}{a}\cdot e^{at}\cdot\sin(\omega t) - \int \frac{1}{a}e^{at}\cdot\cos(\omega t)\cdot\omega\,dt$$

$$= \frac{1}{a}\cdot e^{at}\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a}\int e^{at}\cdot\cos(\omega t)\,dt$$

$u(t) = \frac{1}{a}e^{at}$ $u'(t) = e^{at}$

$v(t) = \cos(\omega t)$ $v'(t) = -\sin(\omega t)\cdot\omega$

$$= \frac{1}{a}e^{at}\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a}\cdot\left(\frac{1}{a}e^{at}\cdot\cos(\omega t) - \frac{\omega}{a}\int e^{at}\cdot -\sin(\omega t)\,dt\right)$$

$$= \frac{1}{a}e^{at}\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a}\left(\frac{1}{a}e^{at}\cdot\cos(\omega t) + \frac{\omega}{a}\int e^{at}\cdot\sin(\omega t)\,dt\right)$$

$$F(t) = \frac{1}{a}e^{at}\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2}e^{at}\cdot\cos(\omega t) - \frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t)$$

$$F(t) = \frac{1}{a}e^{at}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2}\cos(\omega t)\right) - \frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t)$$

$$F(t) + \frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t) = \frac{1}{a}e^{at}\left(\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2}\cos(\omega t)\right)$$

$$\left(1+\frac{\omega^2}{a^2}\right)F(t) = e^{at}\left(\frac{1}{a}\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2}\cos(\omega t)\right) \quad \Big| : 1+\frac{\omega^2}{a^2}$$

$$F(t) = \frac{e^{at}\left(\frac{1}{a}\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2}\cos(\omega t)\right)}{1+\frac{\omega^2}{a^2}} + c \quad \Big| \frac{a^2}{a^2}$$

$$F(t) = \frac{e^{at}\left(a\sin(\omega t) - \omega\cdot\cos(\omega t)\right)}{a^2+\omega^2} + c$$

c) $$\int r^3\cos(r^2)\,dr$$

$u(r) = \sin(r^2)\cdot 2r$

$u'(r) = \cos(r^2)$

$v(r) = r^3$

$v'(r) = 3r^2$

$$= \sin(r^2)\cdot 2r\cdot r^3 - \int \sin(r^2)\cdot 2r\cdot 3r^2\,dr$$

$$= \sin(r^2)2r^4 - 6\int \sin(r^2)\cdot r^3\,dr$$

$u(r) = -\cos(r^2)\cdot 2r$

$u'(r) = \sin(r^2)$

$v(r) = r^3$

$v'(r) = 3r^2$

$$= \sin(r^2)\cdot 2r^4 - 6\left(-\cos(r^2)\cdot 2r\cdot r^3 - \int -\cos(r^2)2r\cdot 3r^2\,dr\right)$$

$$= \sin(r^2)\,2r^4 - 6\left(-\cos(r^2)\cdot 2r^4 + 6\int\cos(r^2)r^3\,dr\right)$$

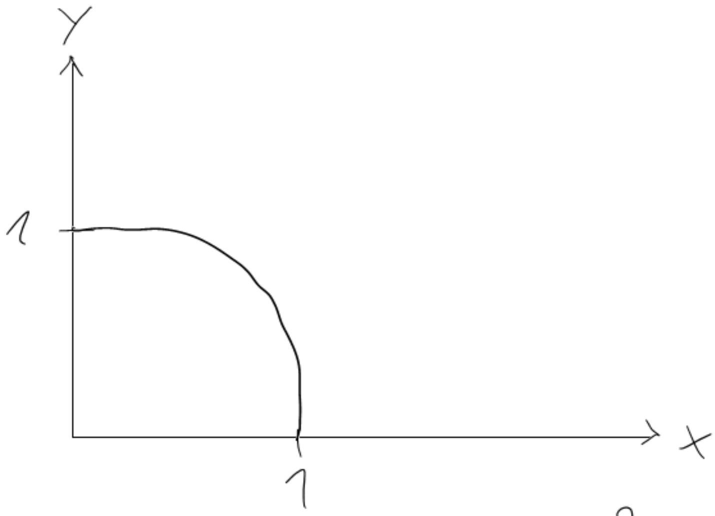
$$= \sin(r^2)\cdot 2r^4 + 6\cos(r^2)\cdot 2r^4 - 36\cdot F(r) \quad \Big| + 36\cdot F(r)$$

$$F(r) + 36\cdot F(r) = \sin(r^2)\cdot 2r^4 + 6\cos(r^2)\cdot 2r^4$$

$$(1+36)\cdot F(r) = \sin(r^2)\cdot 2r^4 + 6\cos(r^2)\cdot 2r^4 \quad \Big| : 37$$

$$F(r) = \frac{\sin(r^2)\cdot 2r^4 + 6\cos(r^2)\cdot 2r^4}{37}$$

$$F(r) = \frac{2r^4(\sin(r^2)+6\cos(r^2))}{37} + c$$



$$x^2+y^2=1$$

$$x^2-1=y^2$$

$$x^2-1=-y^2$$

$$1-x^2=y^2$$

$$f(x)=\sqrt{x^2-1}=y$$

$$\sqrt{1-x^2}=y$$

$$\left(\sin(x)^2+\cos(x)^2\right)$$

$$\int_0^1 \sqrt{x^2-1}\,dx$$

$$\left(x^2-1\right)^{1/2}$$

$$\sin(u)=x(u)$$

$$u'=2$$

$$du=2\,dx$$

$$dx=\frac{1}{2}\,du$$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 3

Computational and Data Science BSc
FS 2023

Analysis und Lineare Algebra 2

Lernziele/Kompetenzen

- Sie kennen die Begriffe *Vektorfeld*, *Länge*, *Steigung*, *Einheitsvektorfeld*, *homogenes Vektorfeld* und die Python/Numpy-Befehle `meshgrid` und `quiver` sowie ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können ein *Vektorfeld* bezüglich *homogen* und *Einheitsvektorfeld* beurteilen.
- Sie können *Vektorfelder* in 2D skizzieren.
- Sie können *Vektorfelder* in 2D mit Python/Numpy plotten.
- Sie können das *Geschwindigkeitsvektorfeld* einer *rotierenden Kreisscheibe* aufstellen.

1. Aussagen über Vektorfelder

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Ein *Vektorfeld* auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine *Funktion* des Typs $\mathbf{v} : A \to \mathbb{R}^n$.	○	○
b) Die *Vektoren* eines *homogenen Vektorfeldes* haben an jedem Punkt die gleiche Länge.	○	○
c) Die *Vektoren* eines *homogenen Vektorfeldes* können von Punkt zu Punkt in unterschiedliche Richtungen zeigen.	○	○
d) Ist $\mathbf{v}$ ein *Vektorfeld* auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt dies auch für $\lvert\mathbf{v}\rvert$.	○	○
e) Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ zwei *Vektorfelder* auf $A \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt dies auch für $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{w}$.	○	○

2. Vektorfelder skizzieren

Skizzieren Sie jeweils das gegebene *Vektorfeld*.

a) $\mathbf{v}(x;y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{v}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{v}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{v}(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$

3. Vektorfelder plotten mit Python/Numpy

Betrachten Sie das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y) = \frac{2}{1+x^2+y^2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{1}$$

und den folgenden Code für Python/Numpy.

```python
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
x_0=-6; x_E=6; y_0=-4; y_E=4;
N_x=13; N_y=9; sc=13; lw=0.005; fig=1;
# Funktionen:
def v(x,y):
        v_x=2/(1+x**2+y**2)*x;
        v_y=2/(1+x**2+y**2)*y;
        return v_x,v_y;
# Daten:
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x);
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y);
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data);
[v_x_grid,v_y_grid]=v(x_grid,y_grid);
# Plot:
fh=pl.figure(fig);
pl.quiver(x_grid,y_grid,v_x_grid,v_y_grid,scale=sc,width=lw);
pl.xlabel('$x$'); pl.ylabel('$y$');
pl.grid('on'); pl.axis('image');
```

Bearbeiten Sie dazu die folgenden Teilaufgaben.

a) Führen Sie den Code mit Python/Numpy aus und überzeugen Sie sich, dass der Ouput einen Plot des *Vektorfeldes* (1) zeigt.

b) Welche Bedeutung hat der Parameter `scale` ?

c) Welche Bedeutung hat der Parameter `width` ?

d) Weshalb sind die Parameterwerte `N_x=13` und `N_y=9` sinnvoll?

4. Vektorfelder plotten mit Python/Numpy

Plotten Sie die *Vektorfelder* aus Aufgabe 2 mit Python/Numpy.

5. Rotierende Kreisscheibe

Betrachten Sie eine *Kreisscheibe* mit *Radius* 20.0 cm, welche mit 120 *Umdrehungen* pro Minute rotiert. Beschreiben Sie die *Geschwindigkeiten* der *Punkte* auf der *Kreisscheibe* mit Hilfe eines *Vektorfeldes*.