Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 5

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Matrix, inverse Matrix, Drehmatrix, lineare Abbildung und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen die 2x2 Standardmatrizen und die dadurch beschriebenen linearen Abbildungen in 2D.
- Sie kennen das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren zur Bestimmung von Matrizen.
- Sie können lineare Gleichungssysteme mit Hilfe von Matrizen darstellen.
- Sie können bestimmen, ob eine Matrix invertierbar ist oder nicht und gegebenenfalls die inverse Matrix bestimmen.
- Sie können Verknüpfungen von linearen Abbildungen durch Matrixprodukte ausdrücken.

---

1. Matrizen invertieren

Berechnen Sie die inverse Matrix folgender Matrizen.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

b) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix}$

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & 5 & -8 \\ -6 & 0 & -3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$

a)

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

b)

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c)

$$C^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

d)

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{13}{3} & \frac{11}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ 15 & -\frac{11}{2} & -2 & -\frac{5}{2} \\ 7 & -\frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

e)

Wir benutzen zuerst Zeilenoperationen:

A	E
$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} (\cos(\phi))^2 & -\sin(\phi)\,\cos(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} (\cos(\phi))^2 + \sin(\phi))^2 & -\sin(\phi)\,\cos(\phi) + \sin(\phi)\,\cos(\phi) \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\cos(\phi)\,\sin(\phi) & 1 - (\sin(\phi))^2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\cos(\phi)\,\sin(\phi) & (\cos(\phi))^2 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix}$

Also lautet die Inverse:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} .$$

2. Erinnerung an LGS

Ein Gerätehersteller hat noch Kapazitäten frei. In der Produktion werden Teile zusammengebaut, danach werden die fertigen Geräte geprüft und in das Lager gebracht. Für Gerät A ist im Lager je ein Stellplatz, für die Geräte B und C je zwei Plätze erforderlich. Die Montage dauert 20 Minuten bei Gerät A, 10 Minuten bei B und 20 Minuten bei C. Die Prüfung benötigt 4 Minuten für Gerät A, 2 Minuten für B und 6 Minuten für C. Es stehen insgesamt noch 45 Stunden für die Montage, 240 Lagerplätze und 10 Stunden Prüfzeit zur Verfügung. Welche Teile sind in welchen Mengen noch zu produzieren, um das Lager und die verfügbare Zeit voll auszulasten?

Für die zu berechnenden Mengen verwenden wir entsprechend den Gerätebezeichnungen A, B und C. Für die Montagezeit ergibt sich: 45*60 min = 2700 min, für die Prüfzeit: 10*60 min = 600 min und für die Stellplätze: 240. Daraus erhalten wir die folgenden Gleichungen und somit das LGS:

(1)	$A + 2B + 2C = 240$	Stellplätze
(2)	$4A + 2B + 6C = 600$	Prüfzeit
(3)	$20A + 10B + 20C = 2700$	Montagezeit

Das Gauß-Rechenschema hierzu lautet:

(1)	1	2	2	240	
(2)	4	2	6	600	$\mid -4\cdot(1)$
(3)	20	10	20	2700	$\mid -20\cdot(1)$
(1)	1	2	2	240	
(2)	0	−6	−2	−360	
(3)	0	−30	−20	−2100	$\mid -5\cdot(2)$
(1)	1	2	2	240	
(2)	0	−6	−2	−360	
(3)	0	0	−10	−300	

und es liefert die Lösung $C = 30$, $B = 50$, $A = 80$.

3. Lösen von LGS mit Hilfe von Matrizen

a) Schreiben Sie das lineare Gleichungssystem

$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1$$
$$-2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -3$$
$$3x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 2$$

als Matrixprodukt und berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der inversen Matrix.

b) Für ein LGS in Matrixform $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ sind zu den folgenden rechten Seiten bereits Lösungen bekannt:

$\vec{b} = \vec{e}_1: \vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{e}_2: \vec{x}_2 = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, \vec{b} = \vec{e}_3: \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Bestimmen Sie mit diesen 3 Vektoren die Lösung zum LGS

$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix}.$

c) Zu lösen ist das LGS

$x_1 - 2x_3 = 3$
$-2x_2 + x_3 = 3$
$-2x_1 + x_2 = 3.$

Geben Sie das LGS in Matrixform an. Berechnen Sie die Inverse der Koeffizientenmatrix und bestimmen Sie damit die Lösung des LGS.

a)

Das lineare Gleichungssystem lautet als Matrizenprodukt

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \\ 3 & 8 & 5 \end{pmatrix}}_{=:A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der Inversen A^{-1} mittels Gauß-Elimination ergibt

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit lautet die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b)

Die rechten Seiten $\vec{b}_i$ sind die Einheitsvektoren und die Vektoren $\vec{x}_k$ sind demnach Lösungen der linearen Gleichungssysteme $A \cdot \vec{x}_k = \hat{e}_k$. Die rechte Seite im LGS, das zu lösen ist, kann mit den Einheitsvektoren in der Form

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 - 5 \cdot \vec{e}_3$$

dargestellt werden. D. h.

$$\vec{x} = 2 \cdot \vec{x}_1 + 3 \cdot \vec{x}_2 - 5 \cdot \vec{x}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

ist die Lösung, da gilt

$$\begin{aligned} A \cdot \vec{x} &= A \cdot (2 \cdot \vec{x}_1 + 3 \cdot \vec{x}_2 - 5 \cdot \vec{x}_3) \\ &= 2 \cdot (A \cdot \vec{x}_1) + 3 \cdot (A \cdot \vec{x}_2) - 5 \cdot (A \cdot \vec{x}_3) \\ &= 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 - 5 \cdot \vec{e}_3 = \vec{b} \end{aligned}$$

Alternativ:

Kombiniert man die 3 Spaltenvektoren $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ zu einer Matrix

$$X = (\vec{x}_1 | \vec{x}_2 | \vec{x}_3) = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

dann ist

$$A \cdot X = (A \cdot \vec{x}_1 | A \cdot \vec{x}_2 | A \cdot \vec{x}_3) = (\vec{e}_1 | \vec{e}_2 | \vec{e}_3) = E$$

und somit $X = A^{-1}$ die Inverse zu A. Aus der Lösungsformel für LGS folgt dann

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

c)
Das LGS hat in Matrixform die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Berechnen der inversen Matrix:

(1)	1	0	−2	1	0	0	
(2)	0	−2	1	0	1	0	
(3)	−2	1	0	0	0	1	$\vert +2 \cdot (1)$
(1)	1	0	-2	1	0	0	
(2)	0	−2	1	0	1	0	
(3)	0	1	−4	2	0	1	$\vert +\frac{1}{2} \cdot (2)$
(1)	1	0	−2	1	0	0	
(2)	0	−2	1	0	1	0	$\vert : (-2)$
(3)	0	0	−3,5	2	0,5	1	$\vert : (-3{,}5)$
(1)	1	0	-2	1	0	0	|+2•(3)
(2)	0	1	−0,5	0	−0,5	0	|+1/2•(3)
(3)	0	0	1	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	
(1)	1	0	0	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$	
(2)	0	1	0	$-\frac{2}{7}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	
(3)	0	0	1	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{2}{7}$	

Der gesuchte Lösungsvektor ist dann

$$\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -2 & -4 & -1 \\ -4 & -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

4. Aussagen über lineare Abbildungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede Abbildung der Form $a: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ kann durch eine nxm Matrix dargestellt werden.		X
b) Jede Abbildung der Form $a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann durch eine quadratische Matrix dargestellt werden.	X	
c) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x$ ist eine lineare Abbildung im Sinne der linearen Algebra.	X	
d) Die Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 3x + 2$ ist eine lineare Abbildung im Sinne der linearen Algebra.		X
e) Für jede lineare Abbildung $a: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gilt: $a(0) = 0$.	X	
f) Eine lineare Abbildung ist genau dann umkehrbar, wenn sie durch eine reguläre Matrix beschrieben wird.	X	

5. 2x2 Standardmatrizen

Untersuchen Sie die geometrische Wirkung der jeweiligen 2x2 Matrix auf (Spalten)Vektoren. Betrachten Sie die Einheitsvektoren $\hat{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\hat{e}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie einen weiteren selbst gewählten Vektor. Veranschaulichen Sie die Ergebnisse in einem xy-Diagramm.

a) $\mathbb{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $Z_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

d) $P_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e) $P_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

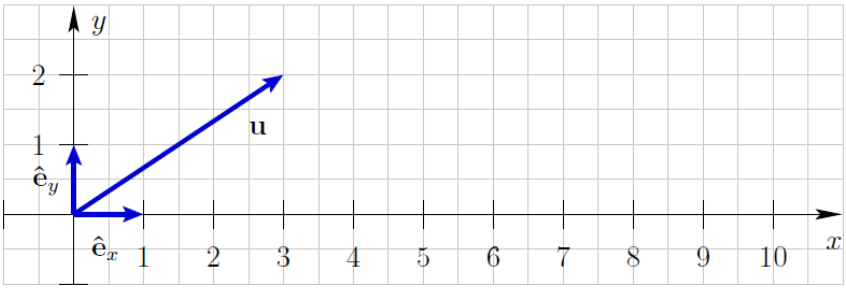
g) $S_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ h) $S_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ i) $\mathbb{i} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a)

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{u}.}}$$



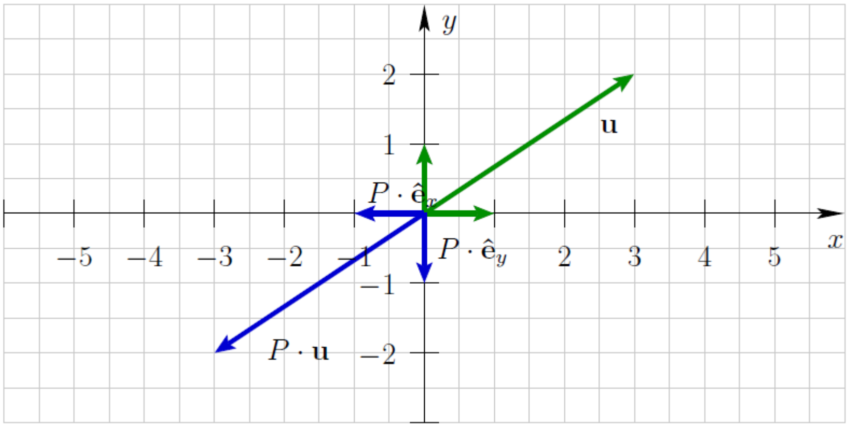
Die Einheitsmatrix überführt jeden Vektor in sich selbst und stellt somit die Identität dar.

b)

$$\underline{\underline{P\cdot\hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{P\cdot\hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{P\cdot\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 3 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\mathbf{u}.}}$$



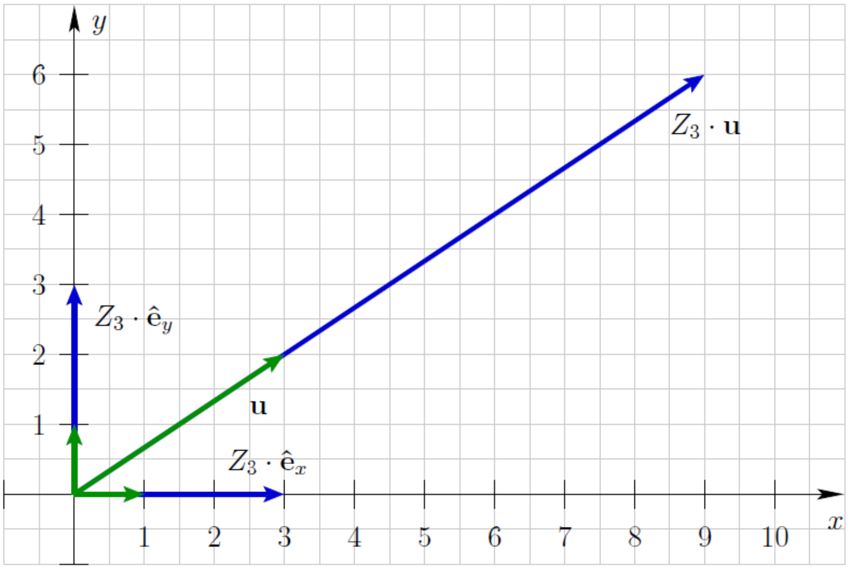
Die Matrix P beschreibt die Punktspiegelung am Ursprung.

c)

$$\underline{\underline{Z_3\cdot\hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 + 0\cdot 0 \\ 0\cdot 1 + 3\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\cdot\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{Z_3\cdot\hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 0 + 3\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\cdot\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{Z_3\cdot\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 0\cdot 2 \\ 0\cdot 3 + 3\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\cdot\mathbf{u}.}}$$



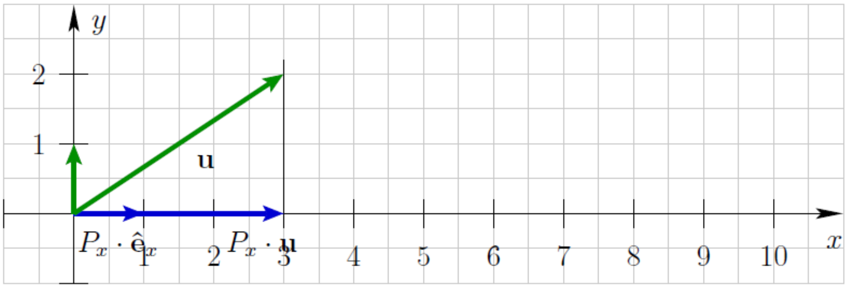
Die Matrix beschreibt die Streckung am Ursprung um den Faktor 3.

d)

$$\underline{\underline{P_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{P_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{P_x \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}}.$$



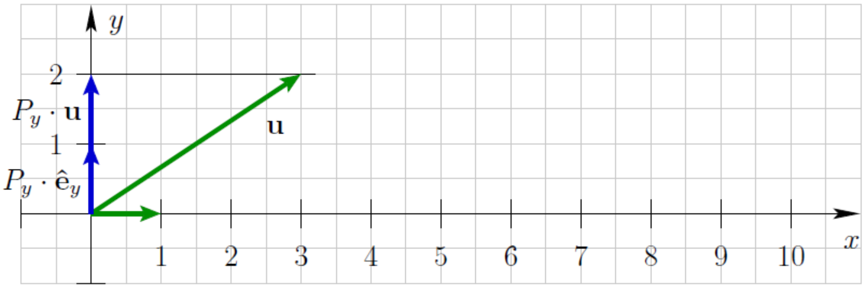
Die Matrix beschreibt die Projektion senkrecht auf die x-Achse.

e)

$$\underline{\underline{P_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{P_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{P_y \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}}.$$



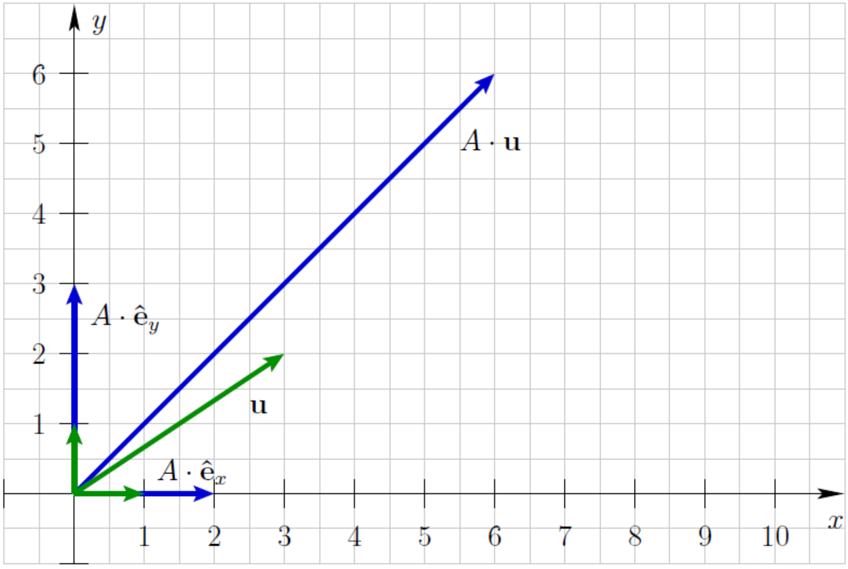
Die Matrix beschreibt die Projektion senkrecht auf die y-Achse.

f)

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}}}.$$



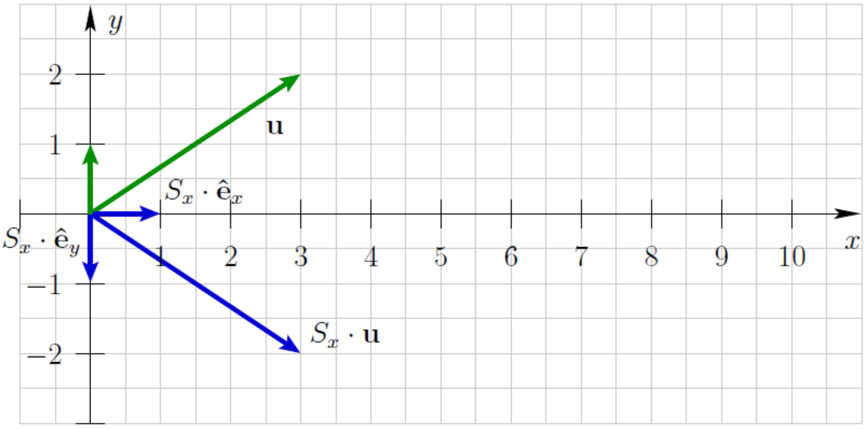
Die Matrix beschreibt die zentrische Streckung am Ursprung um den Faktor 2 bzw. 3 in x-/y-Richtung.

g)

$$\underline{\underline{S_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{S_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{S_x \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}}.$$



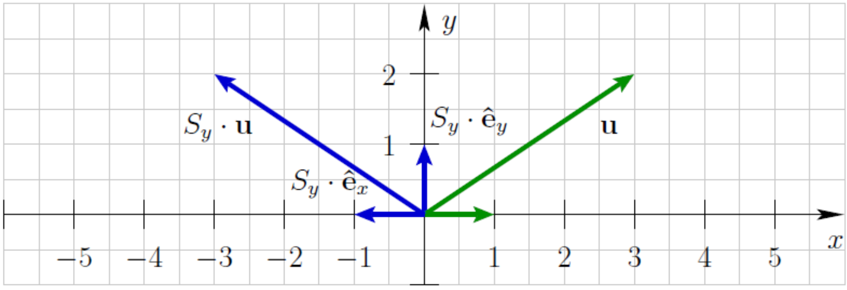
Die Matrix beschreibt die Spiegelung an der x-Achse.

h)

$$\underline{\underline{S_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{S_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{S_y \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}}}.$$



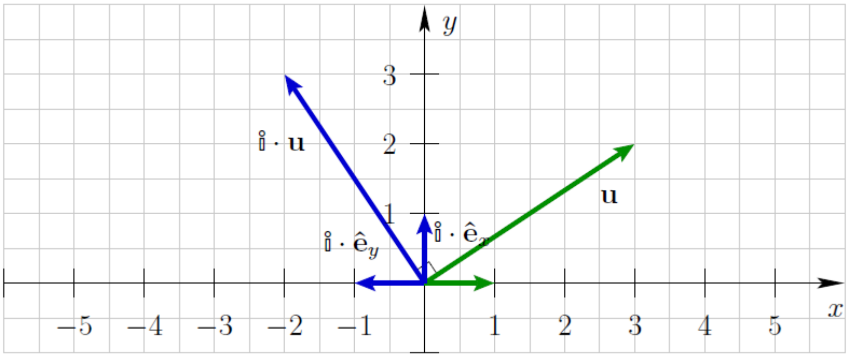
Die Matrix beschreibt die Spiegelung an der y-Achse.

i)

$$\underline{\underline{\mathfrak{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{\mathfrak{i} \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}}}.$$



Die Matrix beschreibt die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/2$ (im Gegenuhrzeigersinn).

6. Aussagen über 2 Matrizen

Gegeben seien die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Matrizen A und B sind schiefsymmetrisch.	X	
b) Die Matrix B beschreibt die Drehung um den Ursprung im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $-\pi/2$.	X	
c) Es gilt: A + B = 0.	X	
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = 1$.	X	
e) Es gilt: $A^6 = B$.		X
f) Die Matrix $C = A^3 \cdot B$ beschreibt die Punktspiegelung am Ursprung.	X	

7. Kombination von Matrizen in 2D

Bestimmen Sie die Matrix, welche sich durch die Kombination der jeweiligen Abbildungen ergibt. Wenden Sie die jeweils erhaltene Abbildung auf $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ sowie einen weiteren selbst gewählten Vektor an.

Hinweis: Verwenden Sie die in Aufgabe 5 gegebenen Standardmatrizen.

a) Erst Streckung am Ursprung um den Faktor 2 und anschliessend Spiegelung an der x-Achse.
b) Erst Spiegelung an der x-Achse und anschliessend Spiegelung an der y-Achse.
c) Erst Spiegelung an der y-Achse und anschliessend Spiegelung an der x-Achse.
d) Projektion auf die y-Achse und anschliessend Spiegelung an der x-Achse.
e) Erst Spiegelung an der x-Achse und anschliessend Projektion auf die y-Achse.
f) Erst Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/2$ und anschliessend Spiegelung an der x-Achse.
g) Erst Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/2$ und anschliessend Spiegelung an der x-Achse und anschliessend Streckung um den Faktor -3.
h) Erst Spiegelung an der x-Achse, anschliessend Spiegelung an der y-Achse, anschliessend Spiegelung an der x-Achse und abschliessend Spiegelung an der y-Achse.

a)

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = P \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = P \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = P \cdot \mathbf{u} = \underline{\underline{-\mathbf{u}.}}$$

c)

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{P = S_y \cdot S_x.}}$$

Die Nacheinanderausführung der Spiegelungen an der x- und y-Achse (unabhängig von der Reihenfolge) ist somit identisch zur Punktspiegelung am Ursprung.

d)

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}}.$$

e)

$$\underline{\underline{A}} = P_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_x \cdot P_y}}.$$

f)

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}}}.$$

g)

$$\underline{\underline{A}} = Z_{-3} \cdot S_x \cdot R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\,\hat{\mathbf{e}}_y}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\,\hat{\mathbf{e}}_x}}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}}}.$$

h)

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\mathbb{1}}}.$$

Durch Zuhilfenahme der Ergebnisse aus b) und c) ergibt sich dasselbe Ergebnis:

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_x = P \cdot P = P^2 = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

8. Spaltenvektor Konstruktionsverfahren für Matrizen in 2D

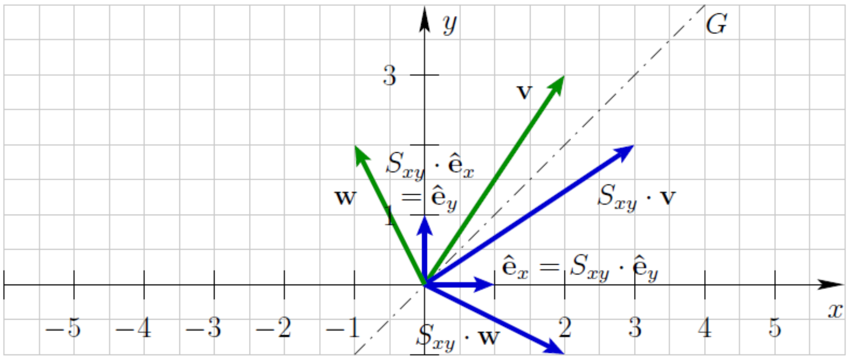
Benutzen Sie das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren, um die jeweilige Matrix zu bestimmen.

a) Bestimmen Sie die Matrix S_{xy}, die die Spiegelung an der Geraden $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = y\}$ beschreibt. Testen Sie die Wirkung der Matrix an 2 selbst gewählten Vektoren.

b) Bestimmen Sie die Matrix $R_{\pi/4}$, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\pi/4$ beschreibt.

a)

Wir wählen als Testvektoren $\vec{v} = \binom{2}{3}, \vec{w} = \binom{-1}{2}$. Nun führen wir die Matrixoperationen im xy-Koordinatensystem durch.



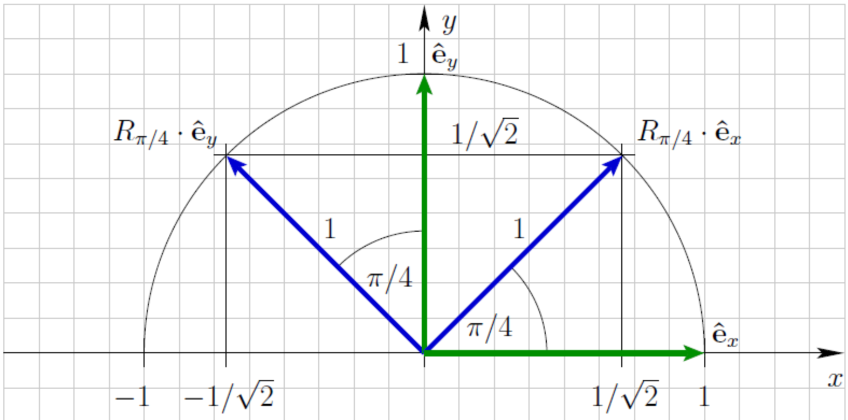
Mittels des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens (hierfür nutzen wir die Bilder von $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$, die wir aus der Zeichnung ablesen) erhalten wir die Matrix

$$\underline{\underline{S_{xy}}} = \begin{bmatrix} S_{xy} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & S_{xy} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_x \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{S_{xy} \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}}$$

$$\underline{\underline{S_{xy} \cdot \mathbf{w}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}$$

b)



Wir gehen gleich wie in a) vor und benutzen $\sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\mu}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\underline{\underline{R_{\pi/4}}} = \begin{bmatrix} R_{\pi/4} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & R_{\pi/4} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

9. Drehmatrizen in 2D

Im Folgenden lernen Sie Form und Eigenschaften von Drehmatrizen in 2D kennen.

a) Bestimmen Sie die Matrix R_α mit Hilfe des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $\alpha \in \mathbb{R}$ beschreibt.

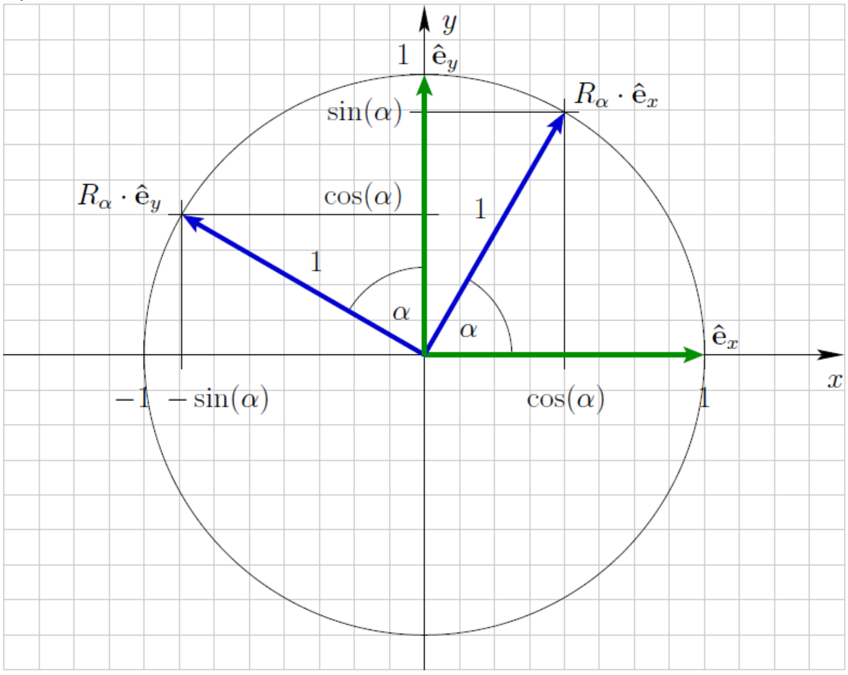
b) Bestimmen Sie die Matrix $R_{-\alpha}$ mit Hilfe des Spaltenvektor Konstruktionsverfahrens, die die Drehung um den Ursprung um den Winkel $-\alpha \in \mathbb{R}$ (also Drehung im Uhrzeigersinn) beschreibt.
Hinweis: Verwenden Sie die Paritätseigenschaften, dass gilt: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ und $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.

c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Drehmatrizen aus Aufgabe a) und b)? Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_\alpha \cdot R_{-\alpha}$ und $R_{-\alpha} \cdot R_\alpha$.

d) Berechnen Sie die Matrixprodukte $R_\alpha \cdot R_\beta$ und $R_\beta \cdot R_\alpha$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Hinweis: Überlegen Sie sich, was passiert, wenn man nacheinander die Drehungen auf denselben Vektor ausführt. Nutzen Sie die Additionstheoreme zur Vereinfachung der Matrizen.

e) Geben Sie die Drehmatrizen für $\alpha \in \left\{0, \pm\frac{\pi}{6}, \pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{\pi}{3}, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi\right\}$ explizit an.

a)



In der Zeichnung haben wir die Bilder der Vektoren $\hat{e}_x$ und $\hat{e}_y$ eingezeichnet, die wir durch Anwenden der Matrix R_α erhalten. Somit können wir aus der Zeichnung nun die Vektorkomponenten ablesen und das Spaltenvektor Konstruktionsverfahren zur Bestimmung der Matrix R_α anwenden.

$$\underline{\underline{R_\alpha}} = \begin{bmatrix} R_\alpha \cdot \hat{e}_x & R_\alpha \cdot \hat{e}_y \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}}.$$

b)

Wir ersetzen in der Matrix R_α den Winkel α durch $-\alpha$ und erhalten

$$\underline{\underline{R_{-\alpha}}} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}}.$$

c)
Hintereinanderausführung von Drehung um denselben Winkel α, jedoch in entgegengesetzte Richtung, sollte zur Ausgangssituation führen. D. h., dass R_α und $R_{-\alpha}$ zueinander inverse Matrizen sein sollten. Dies können wir mittels Matrixmultiplikation nachrechnen:

$$\underline{\underline{R_\alpha \cdot R_{-\alpha}}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha) + (-\sin(\alpha))(-\sin(\alpha)) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)(-\sin(\alpha)) & \sin(\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}$$

$$\underline{\underline{R_{-\alpha} \cdot R_\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\sin(\alpha) & \cos(\alpha)(-\sin(\alpha)) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ (-\sin(\alpha))\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & (-\sin(\alpha))(-\sin(\alpha)) + \cos(\alpha)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}}$$

d)
Die Hintereinanderausführung der Matrizen R_α und R_β sollte aus geometrischer Sicht bedeuten, dass zuerst eine Drehung um α und anschliessend eine Drehung um β (bzw. umgekehrt) ausgeführt wird → insgesamt also um den Winkel $\alpha+\beta$. Dies bedeutet, dass gelten sollte: $R_\alpha \cdot R_\beta = R_\beta \cdot R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$.

$$\underline{\underline{R_\alpha \cdot R_\beta}} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + (-\sin(\alpha))\sin(\beta) & \cos(\alpha)(-\sin(\beta)) + (-\sin(\alpha))\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)(-\sin(\beta)) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \underline{\underline{R_{\alpha+\beta}}}$$

$$\underline{\underline{R_\beta \cdot R_\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) + (-\sin(\beta))\sin(\alpha) & \cos(\beta)(-\sin(\alpha)) + (-\sin(\beta))\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & \sin(\beta)(-\sin(\alpha)) + \cos(\beta)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix} = R_{\beta+\alpha} = R_{\alpha+\beta} = \underline{\underline{R_\alpha \cdot R_\beta}}.$$

e)

$$\underline{\underline{R_0}} = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/6}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/6) & -\sin(\pm\pi/6) \\ \sin(\pm\pi/6) & \cos(\pm\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & \mp\sin(\pi/6) \\ \pm\sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \mp\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \mp 1 \\ \pm 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/4}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/4) & -\sin(\pm\pi/4) \\ \sin(\pm\pi/4) & \cos(\pm\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \mp\sin(\pi/4) \\ \pm\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mp 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/3}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/3) & -\sin(\pm\pi/3) \\ \sin(\pm\pi/3) & \cos(\pm\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \mp\sin(\pi/3) \\ \pm\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mp\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}}}.$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/2}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/2) & -\sin(\pm\pi/2) \\ \sin(\pm\pi/2) & \cos(\pm\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \mp\sin(\pi/2) \\ \pm\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \pm\mathbb{i}.}}$$

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi) & -\sin(\pm\pi) \\ \sin(\pm\pi) & \cos(\pm\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \mp\sin(\pi) \\ \pm\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mp 0 \\ \pm 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{-\mathbb{1} = P.}}$$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 5

Computational and Data Science BSc
FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über lineare Abbildungen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *Abbildung* der Form $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ kann durch eine $n \times m$-*Matrix* beschrieben werden.	○	●
b) Jede *lineare Abbildung* der Form $a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ kann durch eine *quadratische Matrix* beschrieben werden.	●	○
c) Die *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 2\,x$ ist eine *lineare Abbildung* im Sinne der *linearen Algebra*.	●	○
d) Die *Funktion* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 3\,x + 1$ ist eine *lineare Abbildung* im Sinne der *linearen Algebra*.	○	●
e) Für jede *lineare Abbildung* $a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ gilt $a(0) = 0$.	●	○
f) Eine *lineare Abbildung* ist genau dann *umkehrbar*, wenn sie durch eine *reguläre Matrix* beschrieben wird.	●	○

2. Wirkung spezieller Matrizen in 2D

Wir untersuchen jeweils die geometrische Wirkung der Anwendung der gegebenen 2×2-*Matrizen* auf *Ortsvektoren*. Dazu betrachten wir speziell die *Einheitsvektoren*

$$\hat{\mathbf{e}}_x := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \hat{\mathbf{e}}_y := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

sowie einen selbst gewählten *Ortsvektor*, z.B.

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

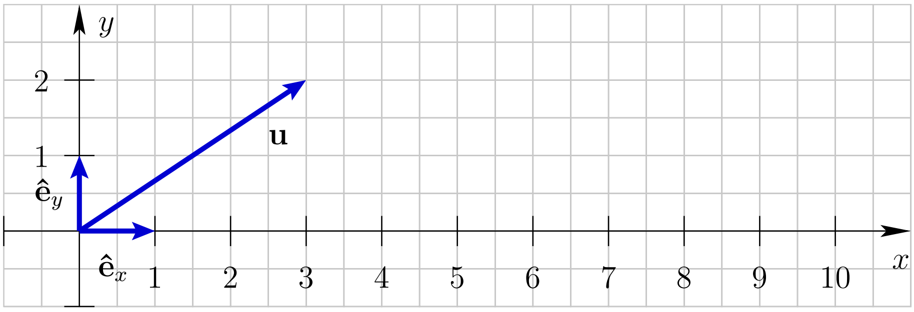
a) Wir betrachten die *Einheitsmatrix* $\mathbb{1}$. Die *Multiplikation* von $\mathbb{1}$ mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{3}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{4}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{1} \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{u}.}} \tag{5}$$

Multiplikation mit $\mathbb{1}$ führt jeden *Ortsvektor* in sich selbst über. Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Einheitsmatrix* beschreibt demnach die *Identität* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$.

b) Wir betrachten die *Matrix*

$$P := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

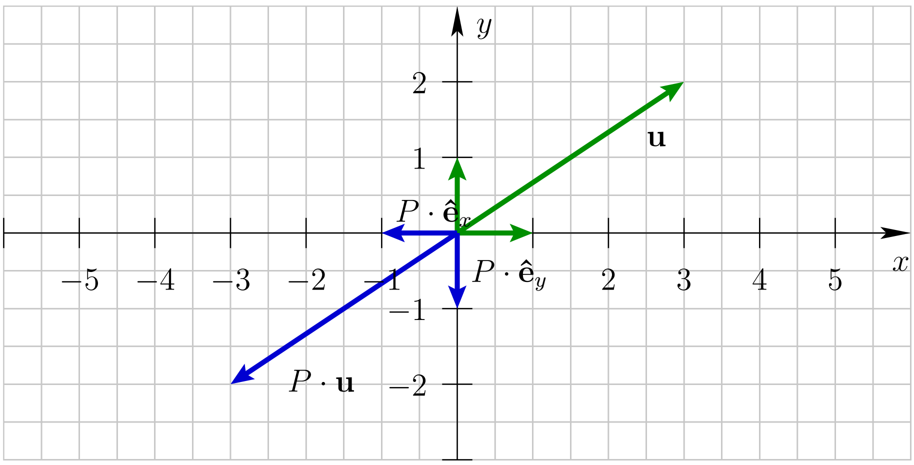
Die *Multiplikation* von P mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{P \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{7}$$

$$\underline{\underline{P \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{8}$$

$$\underline{\underline{P \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\mathbf{u}.}} \tag{9}$$

Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Matrix* P beschreibt demnach die *Punktspiegelung* am *Ursprung.*

c) Wir betrachten die *Matrix*

$$Z_3 := \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

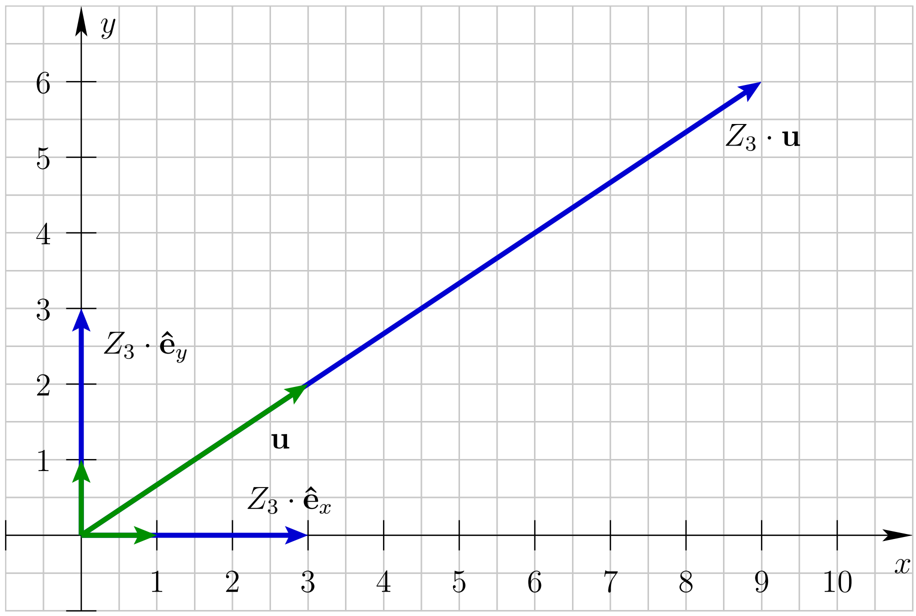
Die *Multiplikation* von Z_3 mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{Z_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{11}$$

$$\underline{\underline{Z_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{12}$$

$$\underline{\underline{Z_3 \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \mathbf{u}}}. \tag{13}$$

Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Matrix* Z_3 beschreibt demnach die *zentrische Streckung* am *Ursprung* mit *Faktor* 3.

d) Wir betrachten die *Matrix*

$$P_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{14}$$

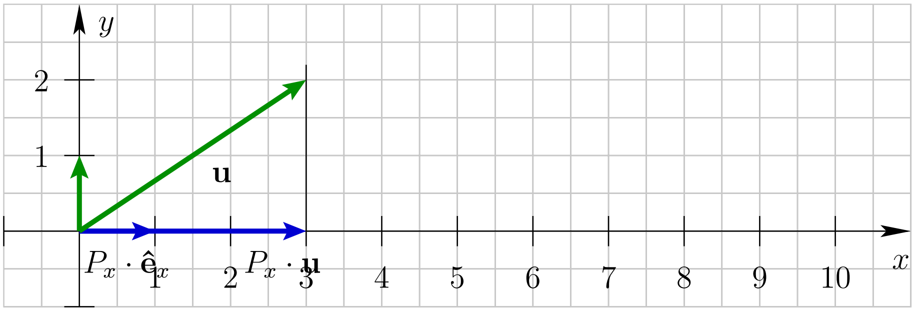
Die *Multiplikation* von P_x mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{P_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{15}$$

$$\underline{\underline{P_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \tag{16}$$

$$\underline{\underline{P_x \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}}. \tag{17}$$

Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Matrix* P_x beschreibt demnach die *Projektion senkrecht* auf die x-Achse.

e) Wir betrachten die *Matrix*

$$P_y := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{18}$$

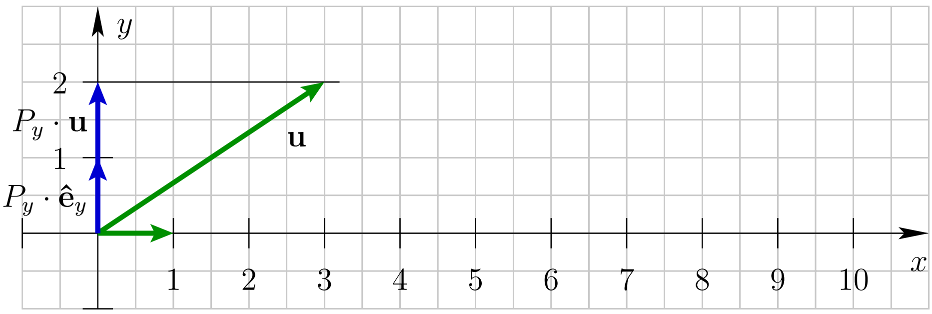
Die *Multiplikation* von P_y mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{P_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \tag{19}$$

$$\underline{\underline{P_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{20}$$

$$\underline{\underline{P_y \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}}. \tag{21}$$

Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Matrix* P_y beschreibt demnach die *Projektion senkrecht* auf die y-Achse.

f) Wir betrachten die *Matrix*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{22}$$

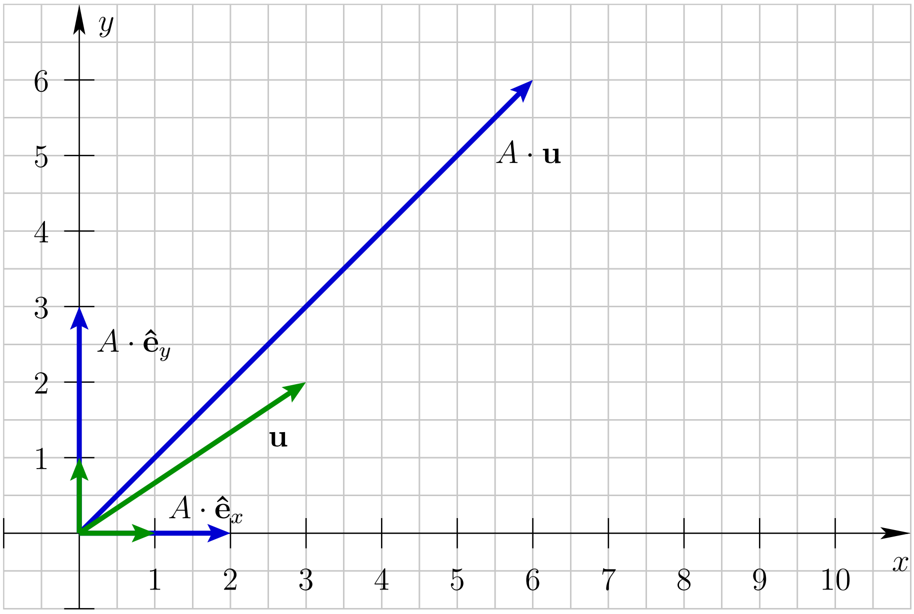
Die *Multiplikation* von A mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1}} \tag{23}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{24}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}}} . \tag{25}$$

Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Matrix* A beschreibt demnach die *Streckung* der einzelnen *Komponenten* der *Ortsvektoren* um den *Faktor* 2 bzw. 3.

g) Wir betrachten die *Matrix*

$$S_x := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} . \tag{26}$$

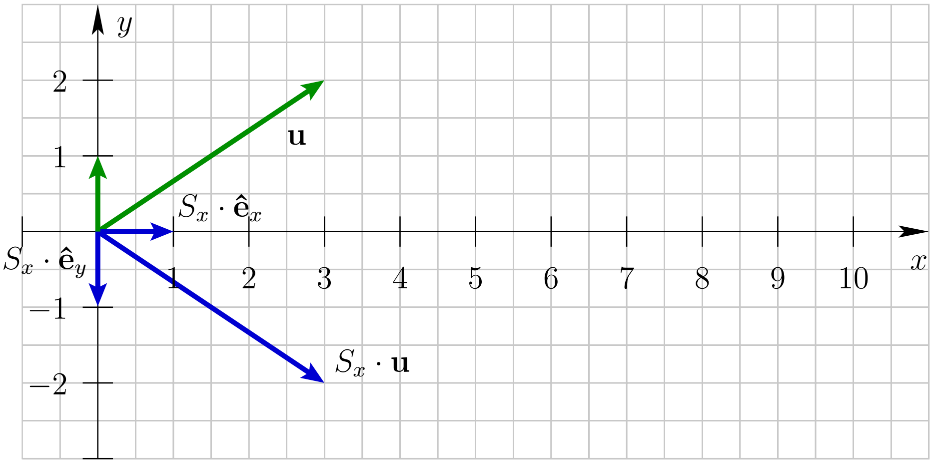
Die *Multiplikation* von S_x mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{S_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{27}$$

$$\underline{\underline{S_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{28}$$

$$\underline{\underline{S_x \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}} . \tag{29}$$

Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Matrix* S_x beschreibt demnach die *Spiegelung* an der x-Achse.

h) Wir betrachten die *Matrix*

$$S_y := \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

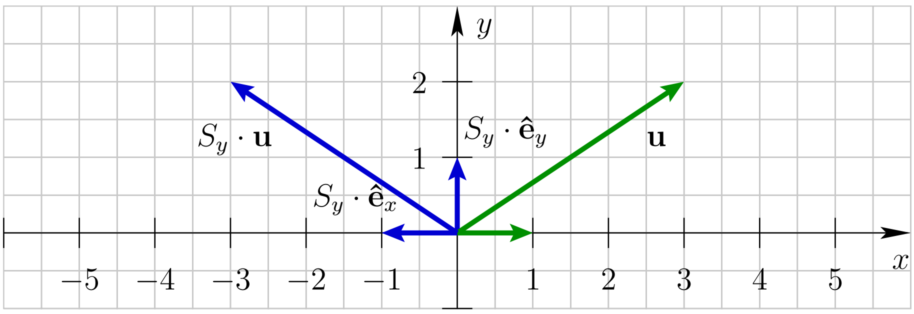
Die *Multiplikation* von S_y mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{S_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{31}$$

$$\underline{\underline{S_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{32}$$

$$\underline{\underline{S_y \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}}}. \tag{33}$$

Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Matrix* S_y beschreibt demnach die *Spiegelung* an der y-Achse.

i) Wir betrachten die *Matrix*

$$\mathbb{i} := \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{34}$$

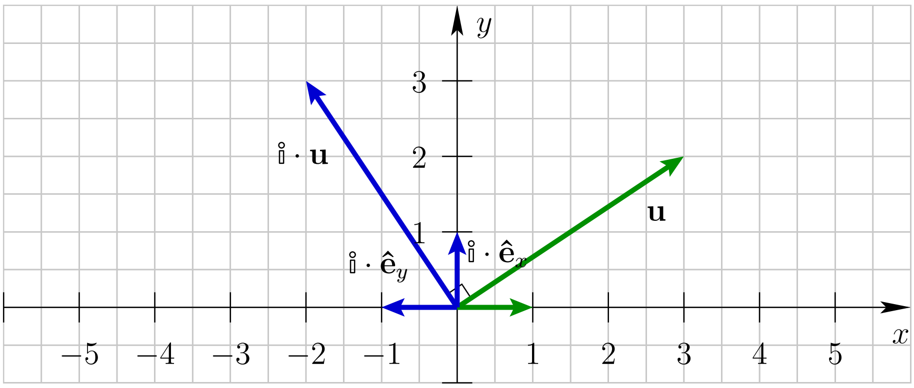
Die *Multiplikation* von $\mathbb{i}$ mit den *Ortsvektoren* aus (1) und (2) ergibt

$$\underline{\underline{\mathbb{i}\cdot\hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 1 + (-1)\cdot 0 \\ 1\cdot 1 + 0\cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{35}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{i}\cdot\hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 0 + (-1)\cdot 1 \\ 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{36}$$

$$\underline{\underline{\mathbb{i}\cdot\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0\cdot 3 + (-1)\cdot 2 \\ 1\cdot 3 + 0\cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}}}. \tag{37}$$

Wir zeichnen die *Ortsvektoren* im x-y-Diagramm ein.



Die *Matrix* $\mathbb{i}$ beschreibt demnach die *Drehung* um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um den *Winkel* $\pi/2$.

3. Aussagen über zwei Matrizen in 2D

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{38}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Matrizen* A und B sind *schiefsymmetrisch.*	●	○
b) Die *Matrix* B beschreibt die *Drehung* um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um den *Winkel* $-\pi/2$.	●	○
c) Es gilt $A + B = 0$.	●	○
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $A^n = \mathbb{1}$.	●	○
e) Es gilt $A^6 = B$.	○	●
f) Die *Matrix* $C = A^3 \cdot B$ beschreibt die *Punktspiegelung* am *Ursprung.*	●	○

4. Kombination von Abbildungsmatrizen in 2D

Wir suchen jeweils die *Matrix*, welche (bei Anwendung auf *Ortsvektoren*) die verlangten *geometrischen Abbildungen* in der angegebenen Reihenfolge beschreibt, und prüfen Ergebnisse jeweils durch Anwendung auf die *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ sowie einen selbst gewählten *Ortsvektor*, z.B.

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

a) *Streckung* am *Ursprung* um *Faktor* 2 und dann *Spiegelung* an der x-Achse. Die *Abbildung* wird beschrieben durch die *Matrix*

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot Z_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}}. \tag{40}$$

Die *Multiplikation* von A mit den *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ sowie dem *Ortsvektor* aus (39) ergibt

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{41}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{42}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ -4 \end{bmatrix}}}. \tag{43}$$

b) *Spiegelung* an der x-Achse und dann *Spiegelung* an der y-Achse. Die *Abbildung* wird beschrieben durch die *Matrix*

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{P}}. \tag{44}$$

Die *Multiplikation* von A mit den *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ sowie dem *Ortsvektor* aus (39) ergibt

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = P \cdot \hat{\mathbf{e}}_x = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{45}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = P \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{46}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = P \cdot \mathbf{u} = \underline{\underline{-\mathbf{u}}}. \tag{47}$$

c) *Spiegelung* an der y-Achse und dann *Spiegelung* an der x-Achse. Die *Abbildung* wird beschrieben durch die *Matrix*

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{P = S_y \cdot S_x}}. \tag{48}$$

Die *Multiplikation* von A mit den *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ sowie dem *Ortsvektor* aus (39) ergibt die gleichen Ergebnisse wie in Teilaufgabe b). Die Kombination der *Spiegelung*en an beiden Koordinaten-Achsen ist, unabhängig von deren Reihenfolge, offenbar gerade die *Punktspiegelung* am *Ursprung*.

d) *Projektion* senkrecht auf die y-Achse und dann *Spiegelung* an der x-Achse. Die *Abbildung* wird beschrieben durch die *Matrix*

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot P_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}. \tag{49}$$

Die *Multiplikation* von A mit den *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ sowie dem *Ortsvektor* aus (39) ergibt

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \tag{50}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{51}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}}}. \tag{52}$$

e) *Spiegelung* an der x-Achse und dann *Projektion* senkrecht auf die y-Achse. Die *Abbildung* wird beschrieben durch die *Matrix*

$$\underline{\underline{A}} = P_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = S_x \cdot P_y}}. \tag{53}$$

Die Kombination der *Projektion* senkrecht auf die y-Achse mit der *Spiegelung* an der x-Achse hängt offenbar nicht von der Reihenfolge der *Abbildungen* ab. Die *Multiplikation* von A mit den *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ sowie dem *Ortsvektor* aus (39) ergibt die gleichen Ergebnisse wie in Teilaufgabe d).

f) *Drehung* um den *Ursprung* um den *Winkel* $\pi/2$ und dann *Spiegelung* an der x-Achse. Die *Abbildung* wird beschrieben durch die *Matrix*

$$\underline{\underline{A}} = S_x \cdot R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}}. \tag{54}$$

Die *Multiplikation* von A mit den *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ sowie dem *Ortsvektor* aus (39) ergibt

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{55}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{-\hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{56}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}}}. \tag{57}$$

g) *Drehung* um den *Ursprung* um den *Winkel* $\pi/2$, dann *Spiegelung* an der x-Achse und dann zentrische *Streckung* am *Ursprung* um den *Faktor* -3. Die *Abbildung* wird beschrieben durch die *Matrix*

$$\underline{\underline{A}} = Z_{-3} \cdot S_x \cdot R_{\pi/2} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}}}. \tag{58}$$

Die *Multiplikation* von A mit den *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ sowie dem *Ortsvektor* aus (39) ergibt

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\, \hat{\mathbf{e}}_y}} \tag{59}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \hat{\mathbf{e}}_y}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{3\, \hat{\mathbf{e}}_x}} \tag{60}$$

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 3 + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}}}. \tag{61}$$

h) *Spiegelung* an der x-Achse, dann *Spiegelung* an der y-Achse, dann *Spiegelung* an der x-Achse und *Spiegelung* an der y-Achse. Die *Abbildung* wird beschrieben durch die *Matrix*

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\mathbb{1}}}. \tag{62}$$

Dieses Resultat lässt sich auch sehr einfach mit Hilfe der Erkenntnisse aus den Teilaufgaben b) und c) gewinnen:

$$\underline{\underline{A}} = S_y \cdot S_x \cdot S_y \cdot S_x = P \cdot P = P^2 = \underline{\underline{\mathbb{1}}} \tag{63}$$

Die zweifache Anwendung der *Spiegelung*en an beiden Koordinaten-Achsen ist, unabhängig von deren Reihenfolge, offenbar gerade die *Identität*.

5. Inverse Matrizen in 2D

Wir konstruieren, falls möglich, zu jeder 2×2-*Standard-Matrix* A aus Aufgabe 2 eine *Matrix* B, welche die von A beschriebene *lineare Abbildung* rückgängig macht. Wir überprüfen jeweils explizit das *Produkt* $A \cdot B$.

a) Wir betrachten die *Einheitsmatrix* $\mathbb{1}$. Aus Aufgabe 2 wissen wir: *Multiplikation* mit $\mathbb{1}$ führt jeden *Ortsvektor* in sich selbst über. Die *Einheitsmatrix* beschreibt die *Identität* $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$. Die *Identität* ist *bijektiv* und somit umkehrbar. Die *Umkehrabbildung* der *Identität* ist in jedem Fall wieder die *Identität* und demnach erwarten wir, dass die *inverse Matrix* der *Einheitsmatrix* auch wieder die *Einheitsmatrix* sein muss, d.h.

$$\underline{\underline{\mathbb{1}^{-1} = \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{64}$$

Eine Bestätigung dieser Vermutung erhalten wir durch explizite *Matrix-Multiplikation*, denn es gilt

$$\underline{\underline{\mathbb{1}^{-1} \cdot \mathbb{1}}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}. \tag{65}$$

Dieses Ergebnis hätten wir auch ohne explizites Aufschreiben der *Matrizen* aus den bekannten algebraischen Eigenschaften der *Einheitsmatrix* herleiten können. Es gilt nämlich

$$\underline{\underline{\mathbb{1}^{-1} \cdot \mathbb{1}}} = \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \tag{66}$$

b) Wir betrachten die *Matrix* $P := -\mathbb{1}$. Aus Aufgabe 2 wissen wir: Die *Matrix* P beschreibt die *Punktspiegelung* am *Ursprung*. Die *Punktspiegelung* am *Ursprung* ist *bijektiv* und somit umkehrbar. Die *Umkehrabbildung* der *Punktspiegelung* am *Ursprung* ist wieder die *Punktspiegelung* am *Ursprung* und demnach erwarten wir, dass die *inverse Matrix* P^{-1} auch wieder P sein muss, d.h.

$$\underline{\underline{P^{-1} = P = -\mathbb{1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}. \tag{67}$$

Eine Bestätigung dieser Vermutung erhalten wir durch explizite *Matrix-Multiplikation*, denn es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{P^{-1} \cdot P}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1)\cdot(-1) + 0 \cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1)\cdot(-1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \end{aligned} \tag{68}$$

Dieses Ergebnis hätten wir auch ohne explizites Aufschreiben der *Matrizen* aus den bekannten algebraischen Eigenschaften von P herleiten können. Es gilt nämlich

$$\underline{\underline{P^{-1} \cdot P}} = (-\mathbb{1}) \cdot (-\mathbb{1}) = (-1) \cdot \mathbb{1} \cdot (-1) \cdot \mathbb{1} = (-1) \cdot (-1) \cdot \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \tag{69}$$

c) Wir betrachten die *Matrix* $Z_3 := 3 \cdot \mathbb{1}$. Aus Aufgabe 2 wissen wir: Die *Matrix* Z_3 beschreibt die *zentrische Streckung* am *Ursprung* mit *Faktor* 3. Die *zentrische Streckung* am *Ursprung* mit *Faktor* 3 ist *bijektiv* und somit umkehrbar. Die *Umkehrabbildung* der *zentrische Streckung* am *Ursprung* mit *Faktor* 3 ist die *zentrische Streckung* am *Ursprung* mit *Faktor* 1/3 und demnach erwarten wir, dass die *inverse Matrix* Z_3^{-1} gerade $Z_{1/3}$ sein muss, d.h.

$$\underline{\underline{Z_3^{-1} = Z_{1/3} = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}}}. \tag{70}$$

Eine Bestätigung dieser Vermutung erhalten wir durch explizite *Matrix-Multiplikation*, denn es gilt

$$\begin{aligned} \underline{\underline{Z_3^{-1} \cdot Z_3}} &= Z_{1/3} \cdot Z_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \cdot 3 + 0 \cdot 0 & \frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 + \frac{1}{3} \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \end{aligned} \tag{71}$$

Dieses Ergebnis hätten wir auch ohne explizites Aufschreiben der *Matrizen* aus den bekannten algebraischen Eigenschaften von Z_3 und $Z_{1/3}$ herleiten können. Es gilt nämlich

$$\underline{\underline{Z_3^{-1} \cdot Z_3}} = Z_{1/3} \cdot Z_3 = \frac{1}{3} \cdot \mathbb{1} \cdot 3 \cdot \mathbb{1} = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \mathbb{1} \cdot \mathbb{1} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \tag{72}$$

d) Wir betrachten die *Matrix*

$$P_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{73}$$

Aus Aufgabe 2 wissen wir: Die *Matrix* P_x beschreibt die *Projektion* senkrecht auf die x-Achse. Die *Projektion senkrecht* auf die x-Achse ist nicht *injektiv*, denn sie bildet mehrere *Urbilder* auf das gleiche *Bild* ab, z.B. gilt

$$P_x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P_x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{74}$$

Demzufolge ist die *Projektion* senkrecht auf die x-Achse nicht *bijektiv*, also auch nicht umkehrbar und es existiert keine *inverse Matrix* zu P_x.

e) Wir betrachten die *Matrix*

$$P_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{75}$$

Aus Aufgabe 2 wissen wir: Die *Matrix* P_y beschreibt die *Projektion* senkrecht auf die y-Achse. Die *Projektion senkrecht* auf die y-Achse ist nicht *injektiv*, denn sie bildet mehrere *Urbilder* auf das gleiche *Bild* ab, z.B. gilt

$$P_y \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = P_y \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{76}$$

Demzufolge ist die *Projektion* senkrecht auf die y-Achse nicht *bijektiv*, also auch nicht umkehrbar und es existiert keine *inverse Matrix* zu P_y.

f) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{77}$$

Aus Aufgabe 2 wissen wir: Die *Matrix* A beschreibt die *Streckung* der einzelnen *Komponenten* der *Ortsvektoren* um den *Faktor* 2 bzw. 3. Dies Abbildung ist *bijektiv* und somit umkehrbar. Die *Umkehrabbildung* ist offensichtlich die *Streckung* der einzelnen *Komponenten* der *Ortsvektoren* um den *Faktor* 1/2 bzw. 1/3.

$$\underline{\underline{A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.}} \tag{78}$$

Eine Bestätigung dieser Vermutung erhalten wir durch explizite *Matrix-Multiplikation*, denn es gilt

$$\underline{\underline{A^{-1} \cdot A}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 0 & \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 2 + \frac{1}{3} \cdot 0 & 0 \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \tag{79}$$

g) Wir betrachten die *Matrix*

$$S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \tag{80}$$

Aus Aufgabe 2 wissen wir: Die *Matrix* S_x beschreibt die *Spiegelung* an der x-Achse. Die *Spiegelung* an der x-Achse ist *bijektiv* und somit umkehrbar. Die *Umkehrabbildung* der *Spiegelung* an der x-Achse ist wieder die *Spiegelung* an der x-Achse und demnach erwarten wir, dass die *inverse Matrix* S_x^{-1} auch wieder S_x sein muss, d.h.

$$\underline{\underline{S_x^{-1} = S_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}. \tag{81}$$

Eine Bestätigung dieser Vermutung erhalten wir durch explizite *Matrix-Multiplikation*, denn es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S_x^{-1} \cdot S_x}} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 & 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\mathbb{1}}}.\end{aligned} \tag{82}$$

h) Wir betrachten die *Matrix*

$$S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{83}$$

Aus Aufgabe 2 wissen wir: Die *Matrix* S_y beschreibt die *Spiegelung* an der y-Achse. Die *Spiegelung* an der y-Achse ist *bijektiv* und somit umkehrbar. Die *Umkehrabbildung* der *Spiegelung* an der y-Achse ist wieder die *Spiegelung* an der y-Achse und demnach erwarten wir, dass die *inverse Matrix* S_y^{-1} auch wieder S_y sein muss, d.h.

$$\underline{\underline{S_y^{-1} = S_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{84}$$

Eine Bestätigung dieser Vermutung erhalten wir durch explizite *Matrix-Multiplikation*, denn es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{S_y^{-1} \cdot S_y}} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\mathbb{1}}}.\end{aligned} \tag{85}$$

i) Wir betrachten die *Matrix*

$$R_{\pi/2} = \mathbb{i} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{86}$$

Aus Aufgabe 2 wissen wir: Die *Matrix* $R_{\pi/2}$ beschreibt die Drehung um den *Ursprung* im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\pi/2$. Die Drehung um den *Ursprung* im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\pi/2$ ist *bijektiv* und somit umkehrbar. Die *Umkehrabbildung* der Drehung um den *Ursprung* im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $\pi/2$ ist die Drehung um den *Ursprung* im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel $-\pi/2$ und demnach erwarten wir, dass die *inverse Matrix* $R_{\pi/2}^{-1}$ gerade die *Matrix* $R_{-\pi/2}$ sein muss. Wir vermuten, dass gilt

$$\underline{\underline{R_{\pi/2}^{-1} = R_{-\pi/2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}}. \tag{87}$$

Eine Bestätigung dieser Vermutung erhalten wir durch explizite *Matrix-Multiplikation*, denn es gilt

$$\underline{\underline{R_{\pi/2}^{-1} \cdot R_{\pi/2}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \tag{88}$$

6. Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahren für Matrizen in 2D

Wir wenden jeweils das *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahren* auf die angegebenen *linearen Abbildungen* an.

a) Wir prüfen das *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahren* für die uns bekannten *Matrizen* $\mathbb{1}$, P, Z_5, P_x, P_y, S_x, S_y, $R_{\pi/2}$ und $R_{-\pi/2}$ explizit nach. Wir erhalten

$$\underline{\underline{\mathbb{1}}} = \left[\ \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\big(\hat{\mathbf{e}}_x\big) \quad \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}\big(\hat{\mathbf{e}}_y\big)\ \right] = \left[\ \hat{\mathbf{e}}_x \quad \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{89}$$

Ebenso gilt

$$\underline{\underline{P}} = \left[\ P \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad P \cdot \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\ -\hat{\mathbf{e}}_x \quad -\hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}. \tag{90}$$

Ebenso gilt

$$\underline{\underline{Z_5}} = \left[\ Z_5 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad Z_5 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\ 5 \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad 5 \cdot \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}}}. \tag{91}$$

Ebenso gilt

$$\underline{\underline{P_x}} = \left[\ P_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad P_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\ \hat{\mathbf{e}}_x \quad 0\ \right] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}}. \tag{92}$$

Ebenso gilt

$$\underline{\underline{P_y}} = \left[\ P_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad P_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\ 0 \quad \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{93}$$

Ebenso gilt

$$\underline{\underline{S_x}} = \left[\ S_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad S_x \cdot \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\ \hat{\mathbf{e}}_x \quad -\hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}. \tag{94}$$

Ebenso gilt

$$\underline{\underline{S_y}} = \left[\ S_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad S_y \cdot \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\ -\hat{\mathbf{e}}_x \quad \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{95}$$

Ebenso gilt

$$\underline{\underline{R_{\pi/2}}} = \begin{bmatrix} R_{\pi/2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & R_{\pi/2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_y & -\hat{\mathbf{e}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}. \tag{96}$$

Ebenso gilt

$$\underline{\underline{R_{-\pi/2}}} = \begin{bmatrix} R_{-\pi/2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & R_{-\pi/2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}}}. \tag{97}$$

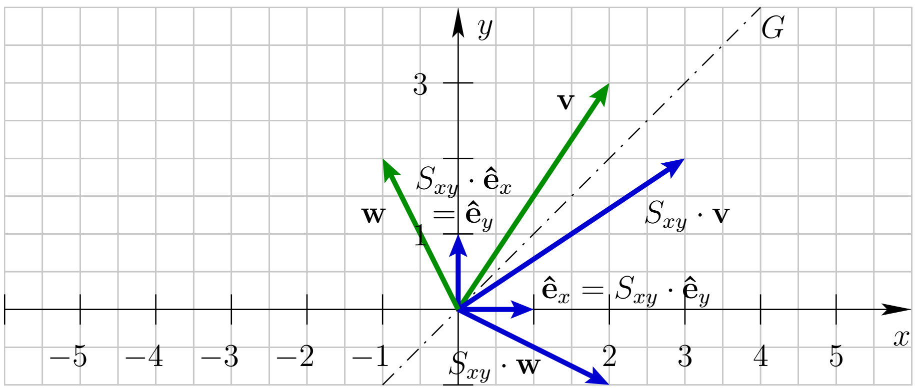
b) Wir bestimmen die *Matrix* S_{xy}, welche die *Spiegelung* an der *Geraden*

$$G := \left\{ (x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x = y \right\} \tag{98}$$

beschreibt, mit Hilfe des *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahrens* und testen das Ergebnis an den beiden Beispiel-*Ortsvektoren*

$$\mathbf{v} := \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{w} := \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{99}$$

Dazu skizzieren wir zunächst die *Bilder* $S_{xy}\hat{\mathbf{e}}_x$ und $S_{xy}\hat{\mathbf{e}}_y$ der *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ in einem x-y-Diagramm. In der gleichen Skizze markieren wir auch $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ sowie deren *Bilder* $S_{xy}\mathbf{v}$ und $S_{xy}\mathbf{w}$.



Durch Einsetzen der *Komponenten* von $S_{xy}\hat{\mathbf{e}}_x$ und $S_{xy}\hat{\mathbf{e}}_y$, welche wir direkt aus dem x-y-Diagramm ablesen können, erhalten wir nach dem *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahren* die *Matrix*

$$\underline{\underline{S_{xy}}} = \begin{bmatrix} S_{xy} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & S_{xy} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_y & \hat{\mathbf{e}}_x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}}. \tag{100}$$

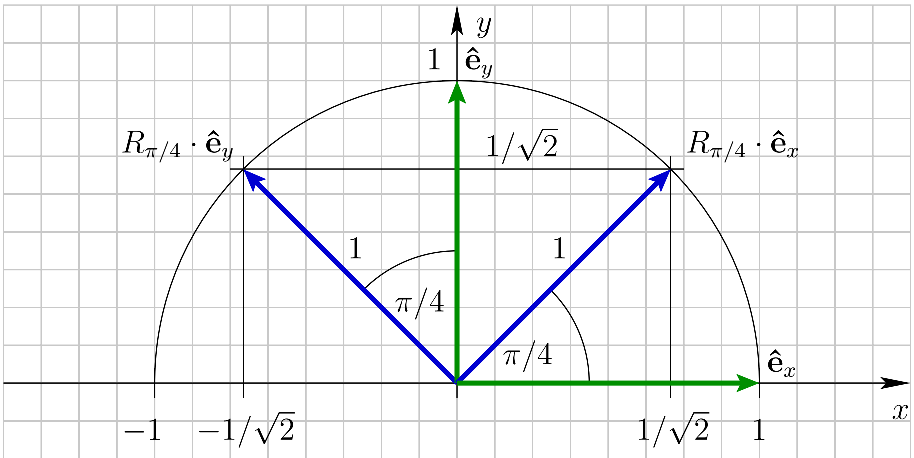
Durch Anwenden von S_{xy} auf $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ finden wir

$$\underline{\underline{S_{xy} \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}}} \tag{101}$$

$$\underline{\underline{S_{xy} \cdot \mathbf{w}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 \\ 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}, \tag{102}$$

in Übereinstimmung mit der Skizze.

c) Wir bestimmen die *Matrix* $R_{\pi/4}$, welche die *Drehung* um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um den *Winkel* $\pi/4$ beschreibt, mit Hilfe des *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahrens.* Dazu skizzieren wir zunächst die *Bilder* $R_{\pi/4}\hat{\mathbf{e}}_x$ und $R_{\pi/4}\hat{\mathbf{e}}_y$ der *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ in einem x-y-Diagramm.



Durch Einsetzen der *Komponenten* von $R_{\pi/4}\hat{\mathbf{e}}_x$ und $R_{\pi/4}\hat{\mathbf{e}}_y$, welche wir mit Hilfe des x-y-Diagramms und

$$\sin(\pi/4) = \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{103}$$

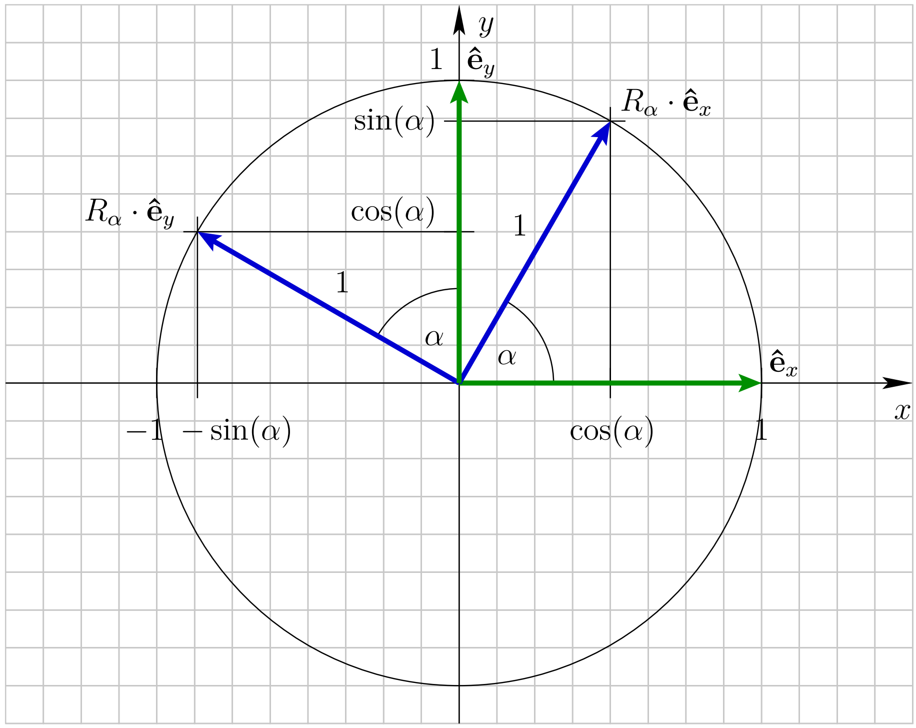
berechnen können, erhalten wir nach dem *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahren* die *Matrix*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{R_{\pi/4}}} &= \begin{bmatrix} R_{\pi/4} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & R_{\pi/4} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}}}. \end{aligned} \tag{104}$$

7. Allgemeine Drehmatrizen in 2D

In den folgenden Teilaufgaben werden wir uns Schritt für Schritt Form und Eigenschaften der *allgemeinen Drehmatrix* in 2D erarbeiten.

a) Wir bestimmen die *Matrix* R_α, welche die *Drehung* um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um den *Winkel* α beschreibt, mit Hilfe des *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahrens*. Dazu betrachten wir zunächst ein x-y-Diagramm, in welches wir die *Bilder* $R_\alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_x$ und $R_\alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_y$ der *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ einzeichnen.

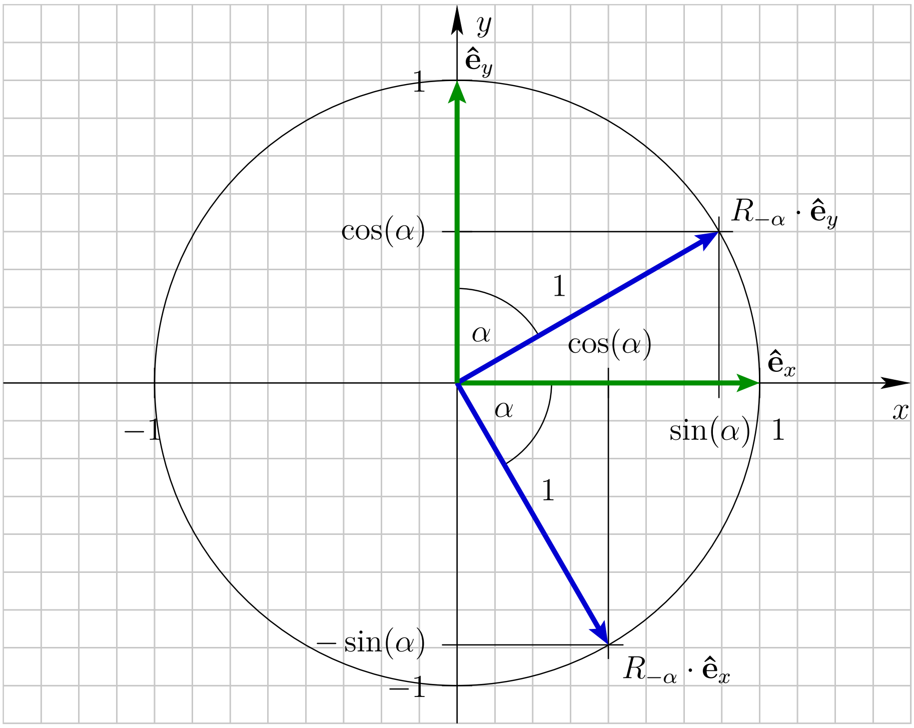


Durch Einsetzen der *Komponenten* von $R_\alpha\hat{\mathbf{e}}_x$ und $R_\alpha\hat{\mathbf{e}}_y$, welche wir direkt aus dem x-y-Diagramm ablesen können, erhalten wir nach dem *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahren* die *Matrix*

$$\underline{\underline{R_\alpha}} = \begin{bmatrix} R_\alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_x & R_\alpha \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \right] = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}}. \tag{105}$$

b) Wir wiederholen die Teilaufgabe a) für die *Matrix* $R_{-\alpha}$, welche die *Drehung* um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um den *Winkel* $-\alpha$, das heisst die *Drehung* um den *Ursprung* im *Uhrzeigersinn* um den *Winkel* α beschreibt. Wir zeigen mehrere Varianten, um die *Matrix* $R_{-\alpha}$ zu finden.

Variante 1: Wir betrachten ein x-y-Diagramm, in welches wir die *Bilder* $R_{-\alpha} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x$ und $R_{-\alpha} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y$ der *Einheitsvektoren* $\hat{\mathbf{e}}_x$ und $\hat{\mathbf{e}}_y$ einzeichnen.



Durch Einsetzen der *Komponenten* von $R_{-\alpha}\hat{\mathbf{e}}_x$ und $R_{-\alpha}\hat{\mathbf{e}}_y$, welche wir direkt aus dem x-y-Diagramm ablesen können, erhalten wir nach dem *Spalten-Vektor-Konstruktionsverfahren* die *Matrix*

$$\underline{\underline{R_{-\alpha}}} = \left[\ R_{-\alpha} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x \quad R_{-\alpha} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y\ \right] = \left[\begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha) \end{bmatrix} \right]$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}}. \tag{106}$$

Variante 2: Wir ersetzen in (105) den *Winkel* α durch $-\alpha$ und verwenden, dass für jeden *Winkel* α gilt

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad \text{und} \quad \cos(-\alpha) = \cos(\alpha). \tag{107}$$

Dies führt auf

$$\underline{\underline{R_{-\alpha}}} = \begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}}}. \tag{108}$$

c) Die *Drehungen* R_α und $R_{-\alpha}$ sind offensichtlich zueinander inverse Abbildungen auf $\mathbb{R}^2$. Deshalb erwarten wir, dass auch die *Matrizen* R_α und $R_{-\alpha}$ zueinander invers sind, das heisst, es soll gelten

$$R_\alpha^{-1} = R_{-\alpha} \quad \text{und} \quad R_{-\alpha}^{-1} = R_\alpha. \tag{109}$$

Um dies zu überprüfen, rechnen wir explizit nach, dass die *Matrix-Produkte* $R_\alpha \cdot R_{-\alpha}$ und $R_{-\alpha} \cdot R_\alpha$ jeweils die *Einheitsmatrix* ergeben. Mit Hilfe der Beziehung

$$\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1, \tag{110}$$

welche zwischen *Sinus* und *Cosinus* eines beliebigen *Winkel*s α gilt, finden wir tatsächlich

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{R_\alpha \cdot R_{-\alpha}}} &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha) + (-\sin(\alpha))(-\sin(\alpha)) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)(-\sin(\alpha)) & \sin(\alpha)\sin(\alpha) + \cos(\alpha)\cos(\alpha) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & \cos(\alpha)\sin(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cos(\alpha) - \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}
\end{aligned} \tag{111}$$

und ebenso

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{R_{-\alpha} \cdot R_\alpha}} &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\sin(\alpha) & \cos(\alpha)(-\sin(\alpha)) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ (-\sin(\alpha))\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & (-\sin(\alpha))(-\sin(\alpha)) + \cos(\alpha)\cos(\alpha) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & -\cos(\alpha)\sin(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \\ -\sin(\alpha)\cos(\alpha) + \cos(\alpha)\sin(\alpha) & \sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}}}.
\end{aligned} \tag{112}$$

In dieser Teilaufgabe haben wir (110) als bekannt vorausgesetzt und verwendet, um (109) zu bestätigen. Die Logik könnte aber auch umgedreht werden: Aus geometrischen Gründen muss (109) zwingend gelten. Dies ist aber nur möglich, wenn auch (110), (111) und (112) gelten. In der Trigonometrie hatten wir aber gezeigt, dass (110) äquivalent ist zum Satz von PYTHAGORAS. Somit könnte (109) zusammen mit den Rechnungen (111) und (112) auch als algebraischer Beweis des PYTHAGORAS-*Satzes* betrachtet werden!

d) Es seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Die Hintereinanderschaltung der *Drehungen* R_α und R_β in beliebiger Reihenfolge ist offensichtlich gerade die *Drehung* $R_{\alpha+\beta}$. Deshalb erwarten wir, dass für die zugehörigen *Drehmatrizen* gilt

$$R_\beta \cdot R_\alpha = R_\alpha \cdot R_\beta = R_{\alpha+\beta}. \tag{113}$$

Mit Hilfe der *Additionstheoreme*

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha + \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) \\
\cos(\alpha + \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta),
\end{aligned} \tag{114}$$

welche für *Sinus* und *Cosinus* der Summe zweier beliebiger *Winkel* α und β gelten, finden wir tatsächlich

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{R_\alpha \cdot R_\beta}} &= \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) + (-\sin(\alpha))\sin(\beta) & \cos(\alpha)(-\sin(\beta)) + (-\sin(\alpha))\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \sin(\alpha)(-\sin(\beta)) + \cos(\alpha)\cos(\beta) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -\cos(\alpha)\sin(\beta) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix} = \underline{\underline{R_{\alpha+\beta}}} \tag{115}$$

und ebenso

$$\underline{\underline{R_\beta \cdot R_\alpha}} = \begin{bmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) + (-\sin(\beta))\sin(\alpha) & \cos(\beta)(-\sin(\alpha)) + (-\sin(\beta))\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & \sin(\beta)(-\sin(\alpha)) + \cos(\beta)\cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) & -\cos(\beta)\sin(\alpha) - \sin(\beta)\cos(\alpha) \\ \sin(\beta)\cos(\alpha) + \cos(\beta)\sin(\alpha) & \cos(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\beta)\sin(\alpha) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos(\beta+\alpha) & -\sin(\beta+\alpha) \\ \sin(\beta+\alpha) & \cos(\beta+\alpha) \end{bmatrix} = R_{\beta+\alpha} = R_{\alpha+\beta} = \underline{\underline{R_\alpha \cdot R_\beta.}} \tag{116}$$

In dieser Teilaufgabe haben wir (114) als bekannt vorausgesetzt und verwendet, um (113) zu bestätigen. Die Logik könnte aber auch umgedreht werden: Aus geometrischen Gründen muss (113) zwingend gelten. Dies ist aber nur möglich, wenn auch (114), (115) und (116) gelten. Somit könnte (113) zusammen mit den Rechnungen (115) und (116) auch als algebraischer Beweis der *Additionstheoreme* (114) für *Sinus* und *Cosinus* betrachtet werden.

e) Wir geben die *Drehmatrizen* für $\alpha \in \{0, \pm\pi/6, \pm\pi/4, \pm\pi/3, \pm\pi/2, \pm\pi\}$ mit Hilfe der Formel (105) explizit an. Dazu rufen wir uns die *Funktionswerte* von *Sinus* und *Cosinus* dieser *Winkel* in Erinnerung und fassen sie in der folgenden Tabelle zusammen:

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\sin(\alpha)$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0	-1

(117)

Die *Drehung* R_0 um den *Ursprung* um den *Winkel* $\alpha = 0$ ist zweifellos die Identität auf $\mathbb{R}^2$. Aus (105) und mit Hilfe von (117) finden wir konsequenterweise

$$\underline{\underline{R_0}} = \begin{bmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbb{1}.}} \tag{118}$$

Für die *Drehungen* $R_{\pm\pi/6}$ um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um die beiden *Winkel* $\alpha = \pm\pi/6$ finden wir aus (105) und mit Hilfe von (107) und (117) die beiden *Drehmatrizen*

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/6}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/6) & -\sin(\pm\pi/6) \\ \sin(\pm\pi/6) & \cos(\pm\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/6) & \mp\sin(\pi/6) \\ \pm\sin(\pi/6) & \cos(\pi/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \mp\frac{1}{2} \\ \pm\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \mp 1 \\ \pm 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}}}. \tag{119}$$

Für die *Drehungen* $R_{\pm\pi/4}$ um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um die beiden *Winkel* $\alpha = \pm\pi/4$ finden wir aus (105) und mit Hilfe von (107) und (117) die beiden *Drehmatrizen*

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/4}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/4) & -\sin(\pm\pi/4) \\ \sin(\pm\pi/4) & \cos(\pm\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/4) & \mp\sin(\pi/4) \\ \pm\sin(\pi/4) & \cos(\pi/4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \mp\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mp 1 \\ \pm 1 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{120}$$

Für die *Drehungen* $R_{\pm\pi/3}$ um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um die beiden *Winkel* $\alpha = \pm\pi/3$ finden wir aus (105) und mit Hilfe von (107) und (117) die beiden *Drehmatrizen*

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/3}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/3) & -\sin(\pm\pi/3) \\ \sin(\pm\pi/3) & \cos(\pm\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/3) & \mp\sin(\pi/3) \\ \pm\sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \mp\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \pm\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \mp\sqrt{3} \\ \pm\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{121}$$

Für die *Drehungen* $R_{\pm\pi/2}$ um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um die beiden *Winkel* $\alpha = \pm\pi/2$ finden wir aus (105) und mit Hilfe von (107) und (117) die uns bereits bekannten *Drehmatrizen*

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi/2}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi/2) & -\sin(\pm\pi/2) \\ \sin(\pm\pi/2) & \cos(\pm\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi/2) & \mp\sin(\pi/2) \\ \pm\sin(\pi/2) & \cos(\pi/2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mp 1 \\ \pm 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\pm \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \pm\mathbb{i}}}. \tag{122}$$

Die *Drehungen* $R_{\pm\pi}$ um den *Ursprung* im *Gegenuhrzeigersinn* um die zwei *Winkel* $\alpha = \pm\pi$ sind beide gerade identisch mit der *Punktspiegelung* am *Ursprung*. Aus (105) und mit Hilfe von (107) und (117) finden wir konsequenterweise

$$\underline{\underline{R_{\pm\pi}}} = \begin{bmatrix} \cos(\pm\pi) & -\sin(\pm\pi) \\ \sin(\pm\pi) & \cos(\pm\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\pi) & \mp\sin(\pi) \\ \pm\sin(\pi) & \cos(\pi) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & \mp 0 \\ \pm 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{-\mathbb{1} = P}}. \tag{123}$$