Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 8 Ana

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Skalarfeld, Vektorfeld, Kurve, eindimensionale Schnittkurve, Höhenlinie, Niveaufläche, Niveaumenge und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die natürliche Definitionsmenge und Wertemenge einer Funktion mehrerer Variabler bestimmen.
- Sie können Höhenlinien und Niveauflächen von Funktionen von zwei bzw. drei Variablen bestimmen und skizzieren.

---

1. Aussagen über Funktionen mehrerer reeller Variabler

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für $n > 1$ ist eine Funktion des Typs $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ niemals injektiv.	X	
b) Für $n > 1$ ist eine Funktion des Typs $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ niemals surjektiv.		X
c) Jede Ebene in 3D ist der Graph einer Funktion in zwei reellen Variablen.	X	
d) Jede Sphäre in 3D ist der Graph einer Funktion in zwei reellen Variablen.		X

2. Definitionsmengen von Funktionen von zwei Variablen

Bestimmen und skizzieren Sie für die nachfolgenden Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jeweils die maximale Definitionsmenge.

a) $f(x, y) = \sqrt{y - 2x}$ b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ c) $f(x, y) = \frac{\sqrt{x+y}}{x-y}$

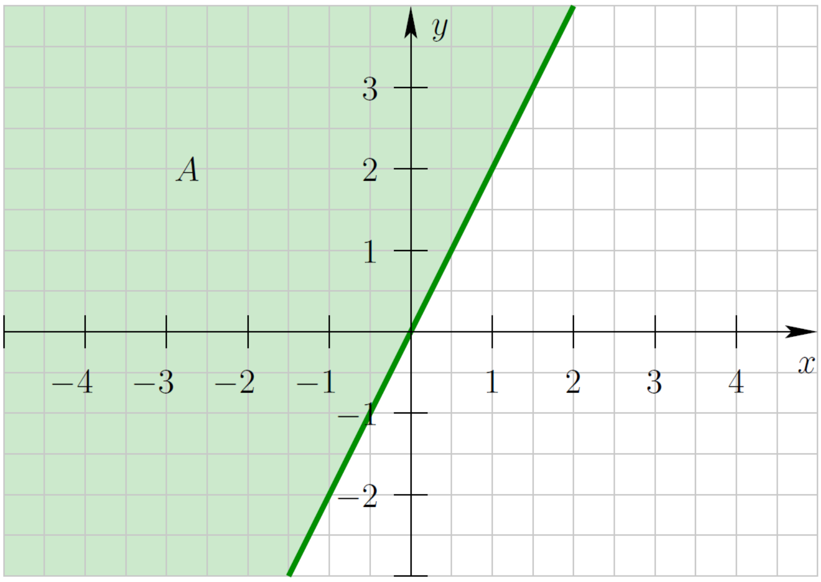
a)
Der Radikand darf nicht negativ sein, d. h.

$$y - 2x \geq 0 \qquad \big| + 2x$$

$$\Leftrightarrow \qquad y \geq 2x.$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von f ist daher das Gebiet

$$\underline{\underline{A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, y < 2x \,\}.}}$$

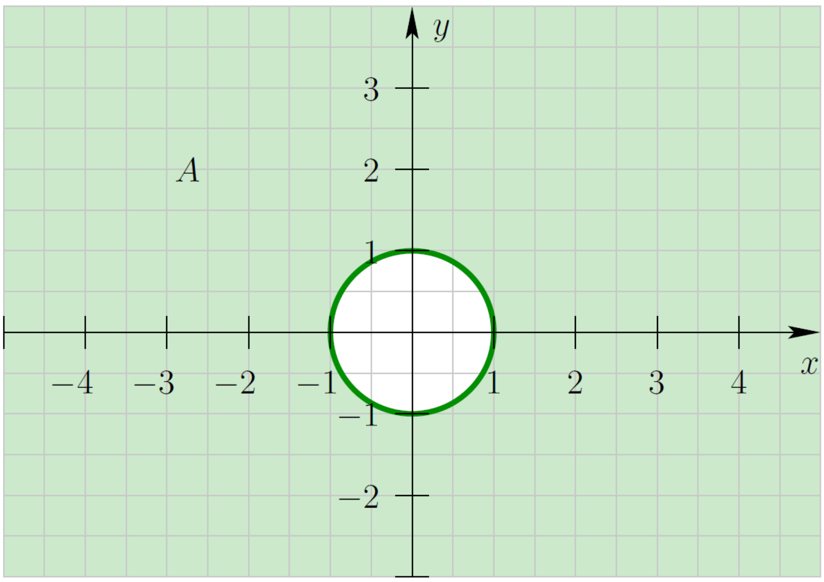


b)
Der Radikand darf nicht negativ sein, d. h.

$$
\begin{aligned}
& x^2 + y^2 - 1 \geq 0 && \mid +1 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 + y^2 \geq 1.
\end{aligned}
$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von f ist daher das Gebiet

$$\underline{\underline{A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, x^2 + y^2 < 1 \,\}.}}$$



c)
Der Radikand im Zähler darf nicht negativ werden und der Nenner darf nicht 0 werden. Es muss sowohl

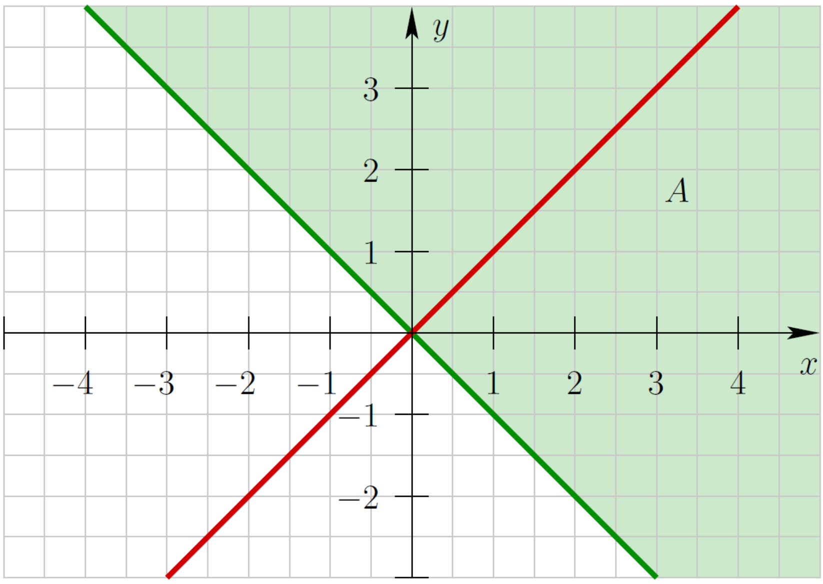
$$
\begin{aligned}
&& x - y \neq 0 \qquad & \big| + y \\
\Leftrightarrow && y \neq x &
\end{aligned}
$$

als auch

$$
\begin{aligned}
&& x + y \geq 0 \qquad & \big| - x \\
\Leftrightarrow && y \geq -x. &
\end{aligned}
$$

Die *natürliche Definitionsmenge* von f ist daher das Gebiet

$$\underline{\underline{A = \mathbb{R}^2 \setminus \{\, y = x \ \vee \ y < -x \,\}.}}$$



3. Definitions- und Wertemengen von Funktionen von zwei Variablen

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jeweils die maximale Definitonsmenge und die Wertemenge.

a) $f(x, y) = \sin(xy)$

b) $f(x, y) = x + y + \cos(xy)$

c) $f(x, y) = \sqrt{1 - y} + e^{-x^2}$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{y - x^2}$

a)
$D = \mathbb{R}^2, W = [-1; 1]$

b)
$D = \mathbb{R}^2, W = \mathbb{R}$

c)
Der Radikand darf nicht negativ werden:
$1 - y \geq 0 \ \to D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 1\}, W =]0; \infty[$

d)
Die beiden Radikanden dürfen nicht negativ werden, d. h.

$$x^2 - y \geq 0 \text{ und } y - x^2 \geq 0$$
$$y \leq x^2 \text{ und } y \geq x^2$$

Es ergibt sich: $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = x^2\}, W = \{0\}$.

4. Höhenlinien

Berechnen und skizzieren Sie für die gegebene Funktion jeweils die Höhenlinien.

a) $f(x,y) = 3x + 6y$ b) $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$

c) $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2y$ d) $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{2y}$

a)
Für die Höhenlinie zur Höhe L ergibt sich

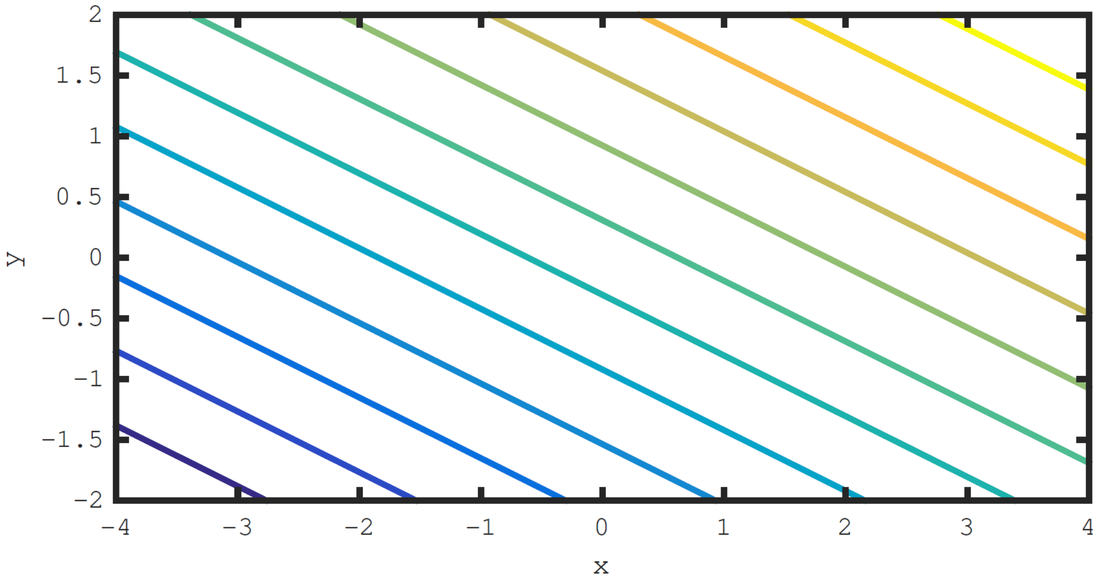
$$L = f(x;y) = 3x + 6y \qquad \Big| -3x$$

$$L - 3x = 6y \qquad \Big| :6$$

$$y = \frac{L-3x}{6} = \frac{L}{6} - \frac{x}{2}\,.$$

Man erhält somit als Höhenlinien

$$\underline{\underline{y = -\frac{x}{2} + \frac{L}{6} \quad \text{mit } L \in \mathbb{R}.}}$$



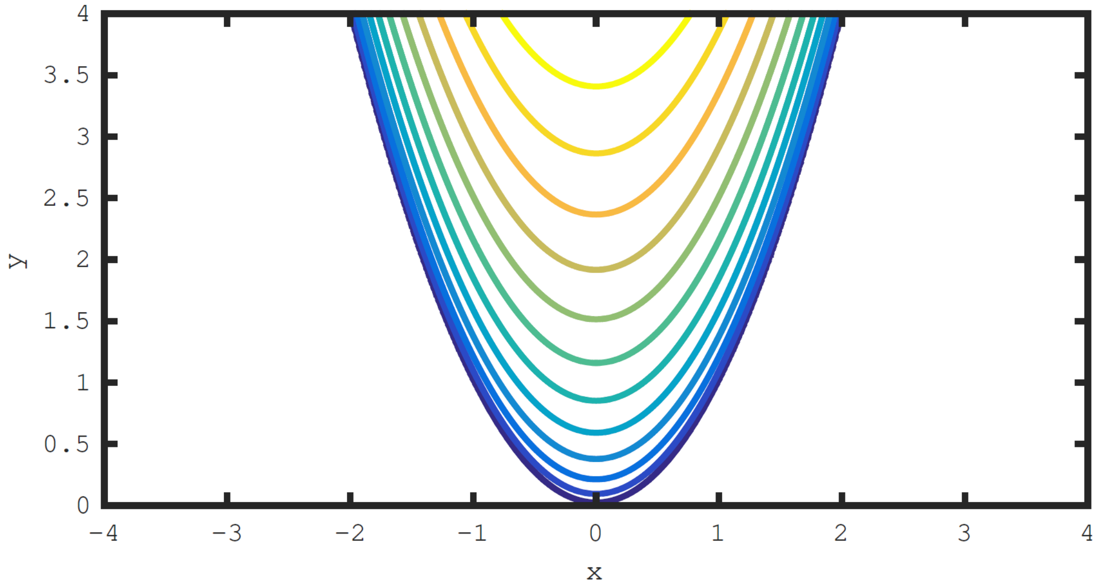
b)
Für die Höhenlinie zur Höhe L ergibt sich

$$L = f(x;y) = \sqrt{y - x^2} \qquad \Big| (\ldots)^2$$

$$L^2 = y - x^2 \qquad \Big| + x^2.$$

Man erhält somit als Höhenlinien

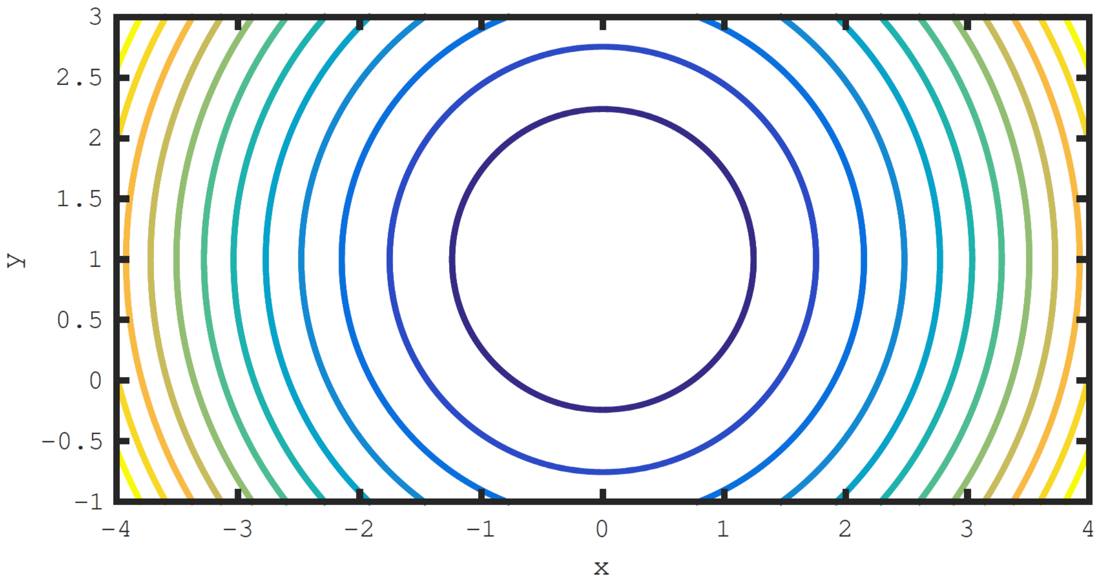
$$\underline{\underline{y = x^2 + L^2 \quad \text{mit } L \in \mathbb{R}_0^+.}}$$



c)
Für die Höhenlinie zur Höhe L ergibt sich

$$L = f(x;y) = x^2 + (y-1)^2 - 1 \qquad \Big| +1$$

$x^2 + (y-1)^2 = L + 1.$
Die Höhenlinien sind folglich Kreise in der xy-Ebene mit Mittelpunkt M und Radius r:
$\underline{\underline{M = (0;1)\,,\ r = \sqrt{L+1} \quad \text{mit } L \in [-1,\infty[.}}$



d)
Der Nenner darf nicht 0 werden. Somit ergibt sich
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y \neq 0\}, W = \mathbb{R}.$
Bestimmung der Höhenlinien zur Höhe c:

$$f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2y}\overset{!}{=}c\neq 0$$

führt auf die Darstellung

$$x^2+y^2=2cy \iff x^2+(y-c)^2=c^2.$$

Dies sind Kreise um die Punkte $(0,c)$ mit Radius $|c|$. Die Punkte auf der x-Achse werden somit nicht mit einbezogen.

5. Niveauflächen

Berechnen und beschreiben Sie für die gegebene Funktion jeweils die Niveauflächen.

a) $f(x,y,z)=x+2y+3z$ b) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ c) $f(x,y,z)=x^2+y^2$

a)
Die Niveaufläche zum Niveau L ergibt sich zu
$L=f(x,y,z)=x+2y+3z.$
Die Niveauflächen sind also Ebenen mit der Gleichung
$z=\frac{1}{3}(L-x-2y).$
b)
Die Niveaufläche zum Niveau L ergibt sich zu
$L=f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2.$
Die Niveauflächen sind also Sphären in 3D um den Mittelpunkt (0;0;0) mit Radius $\sqrt{L}$ mit der Gleichung
$z=\sqrt{L-x^2-y^2}.$
c)
Die Niveaufläche zum Niveau L ergibt sich zu
$L=f(x,y,z)=x^2+y^2.$
Für die Variable z gibt es keine Einschränkung, somit entsprechen die Niveauflächen von f dem Mantel von Zylindern in 3D, wobei die Symmetrieachse des Zylinders die z-Achse ist. Für den Radius des Zylinders ergibt sich $\sqrt{L}$.

6. Funktionsgraphen und Höhenlinien mit Python/Numpy

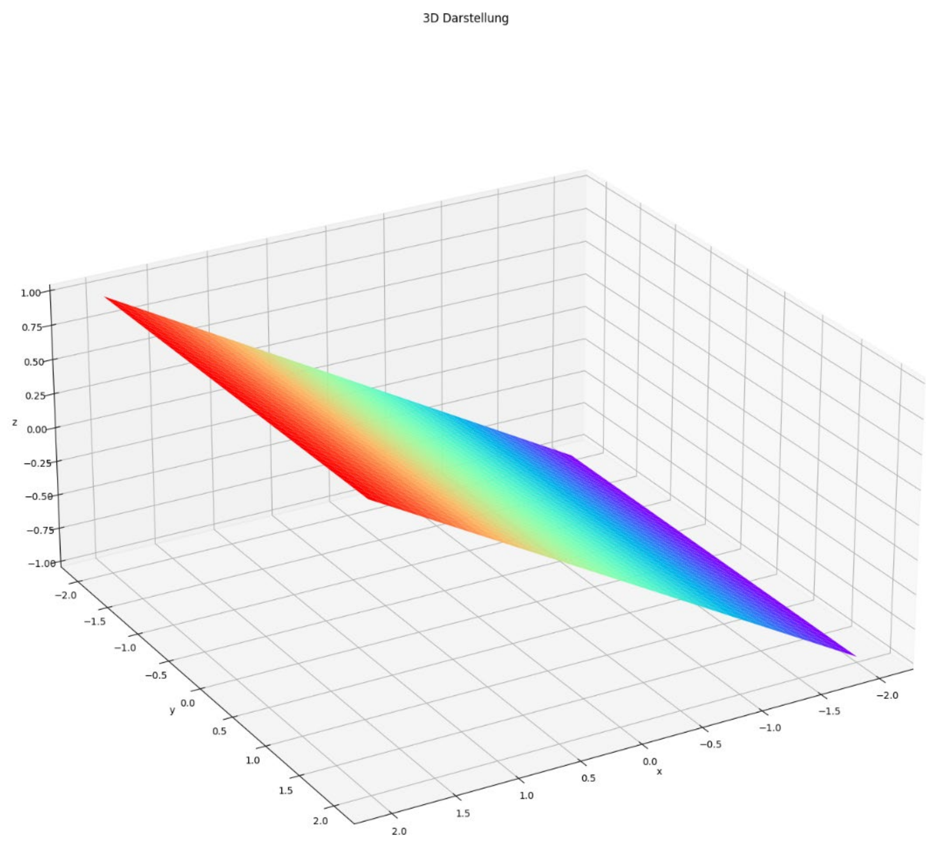
Plotten Sie sowohl die Funktion als auch die Höhenlinien der angegebenen Funktionen mit Python/Numpy.

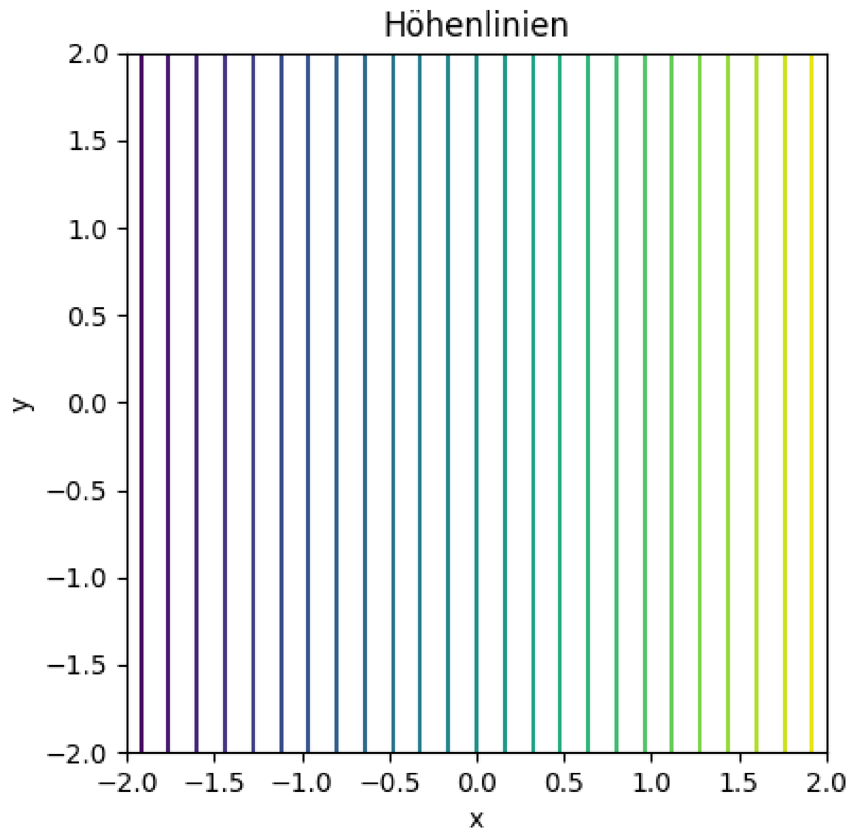
a) $f(x,y)=\frac{x}{2}$ b) $f(x,y)=\frac{y}{2}$ c) $f(x,y)=\frac{x+y}{2}$

d) $f(x,y)=\frac{x\cdot y}{4}$ e) $f(x,y)=\frac{x^2+y^2}{2}$ f) $f(x,y)=\frac{6\cdot\sin(xy)}{1+x^2+y^2}$

a)
```
# Python initialisieren
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; # Anzahl Intervalle für x- bzw y-Achse
N_g=10; N_l=31; # Schrittweite
az=60; el=25; # Drehwinkel gegenüber z-Achse (azimuth) und
gegenüber xy-Ebene
fig=1;
```

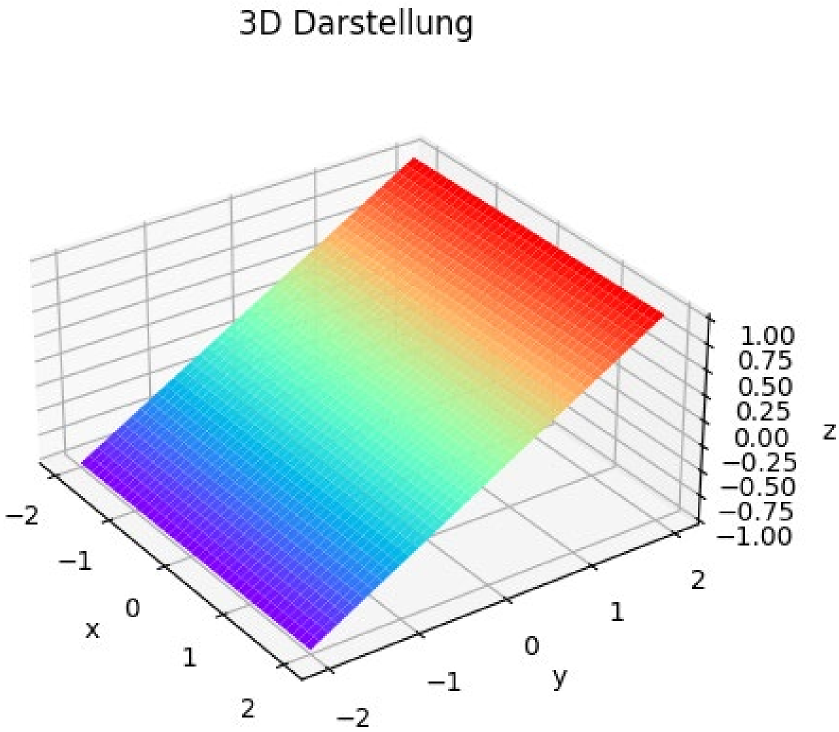
```
# Funktionen
def f(x,y): z=x/2; return z;
# Daten
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x);  # Punkte auf x-Achse
erzeugen
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y);  # Punkte auf y-Achse
erzeugen
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data);  # Pärchen mit
allen x- und y-Werten
z_grid=f(x_grid,y_grid); # Funktionswerte der Pärchen
# Graph-Plot
pl.figure(fig); ax=pl.axes(projection='3d');
ax.plot_surface(x_grid,y_grid,z_grid,rstride=N_g,cstride=N_g,
cmap='rainbow'); ax.view_init(el,az);
ax.set_xlabel('x'); ax.set_ylabel('y'); ax.set_zlabel('z');
ax.set_box_aspect((np.ptp(x_grid), np.ptp(y_grid),
np.ptp(z_grid)));
pl.title('3D Darstellung');
# Höhenlinien-Plot
fig=fig+1; fh=pl.figure(fig);
pl.contour(x_grid,y_grid,z_grid,N_l);
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y');
pl.grid(False); pl.axis('image');
pl.title('Höhenlinien');
```

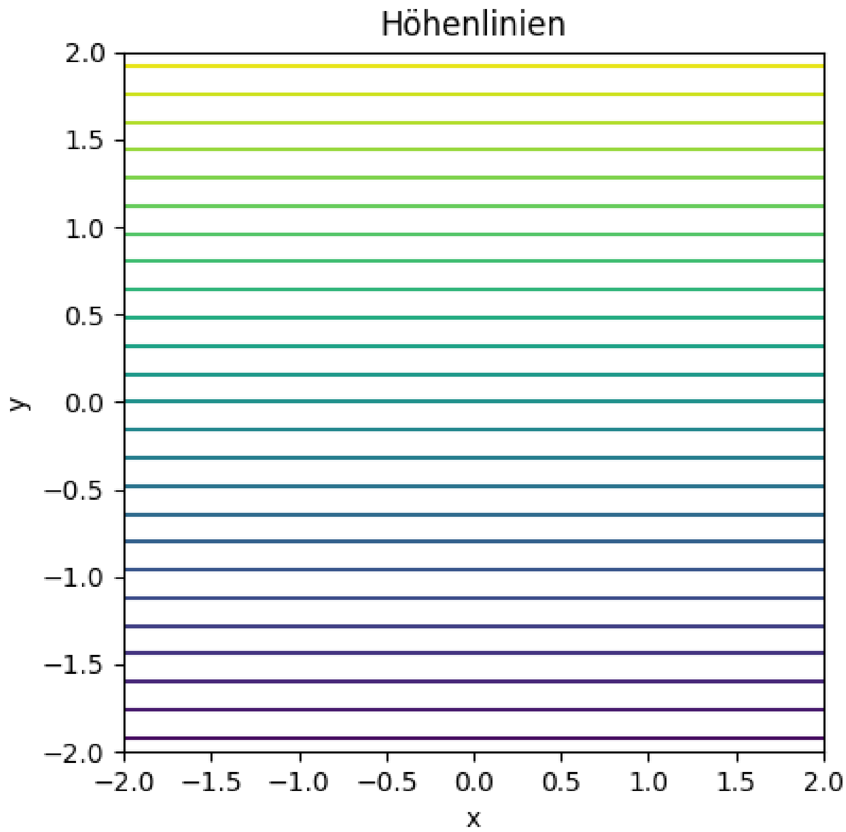




b)

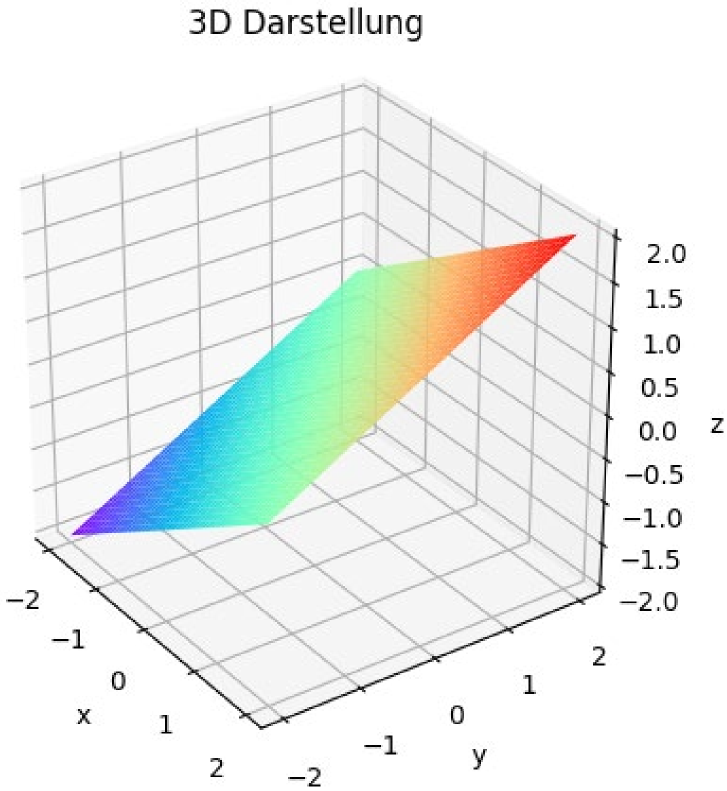
```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=30; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=y/2; return z;
```

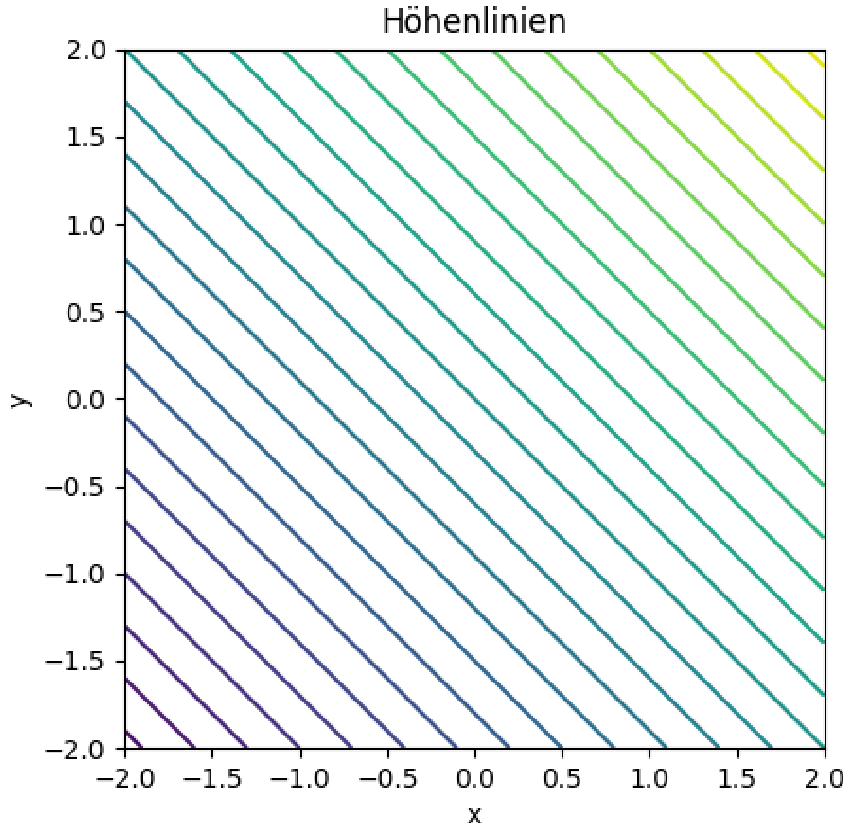




c)

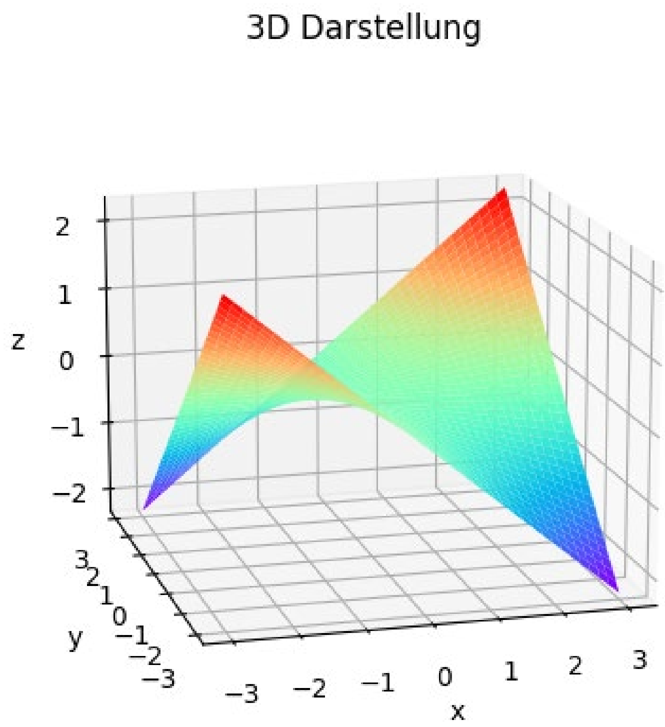
```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=30; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=(x+y)/2; return z;
```

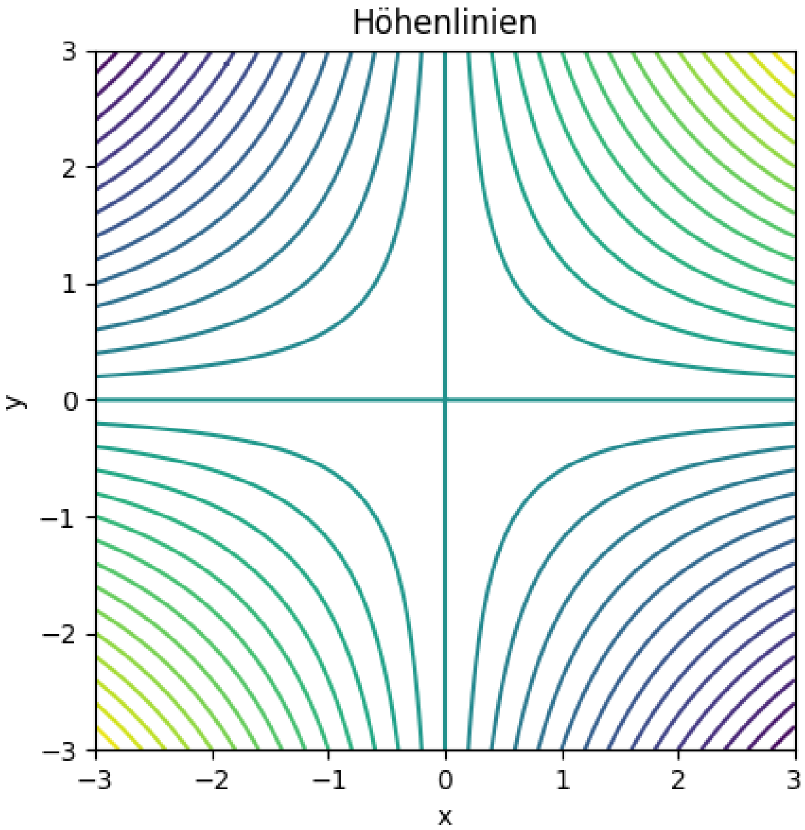




d)

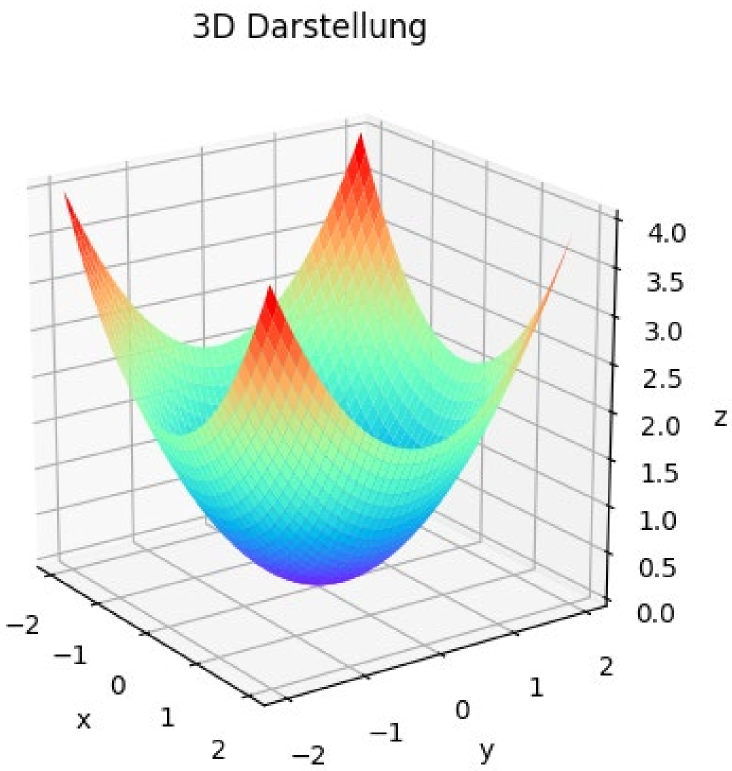
```
# Parameter:
x_0=-3; x_E=3; y_0=-3; y_E=3;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35-70; el=15; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=(x*y)/4; return z;
```

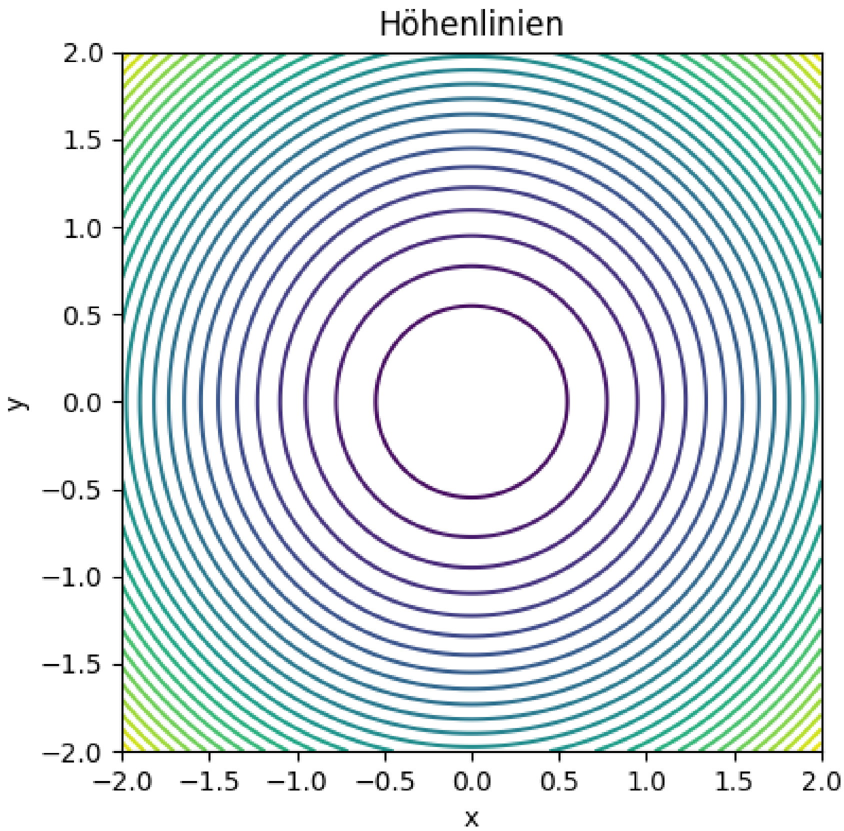




e)

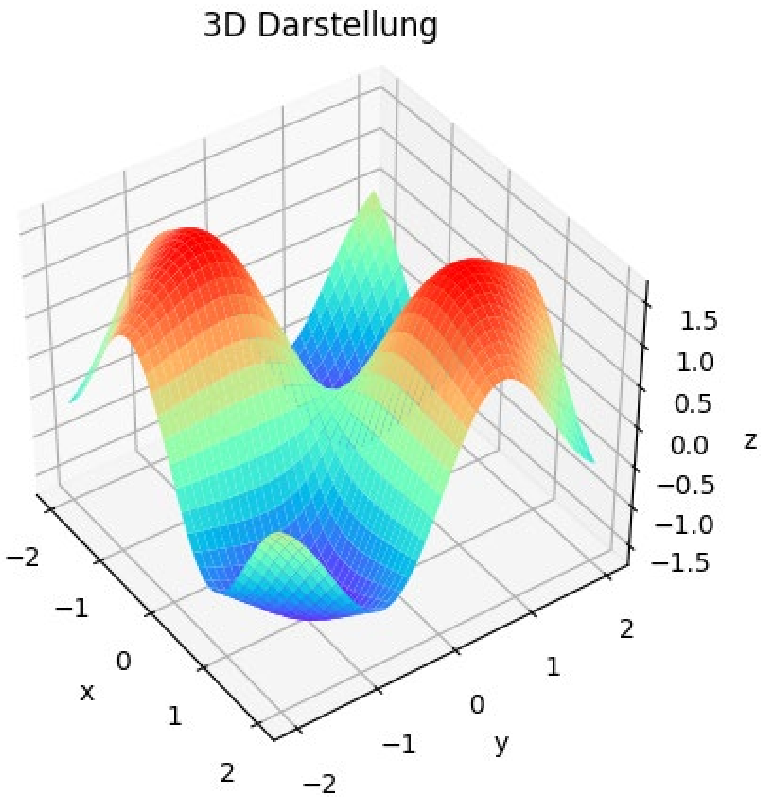
```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=20; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=(x**2+y**2)/2; return z;
```

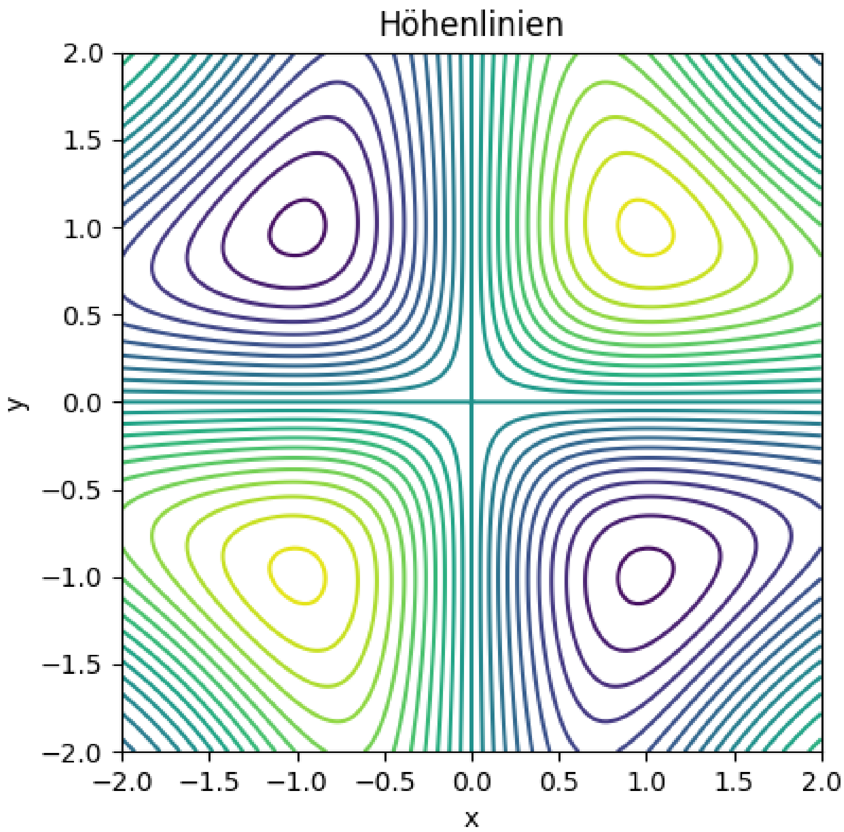




f)

```
# Parameter:
x_0=-2; x_E=2; y_0=-2; y_E=2;
N_x=401; N_y=401; N_g=10; N_l=31; az=-35; el=40; fig=1;
# Funktionen:
def f(x,y): z=(6*np.sin(x*y))/(1+x**2+y**2);return z;
```





7. Aussagen über eine Funktion →

Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: $f(3; 0; 4) = 5$.	X	
b) f ist eine Funktion in 3 Variablen.	X	
c) Die x-Achse ist eine Höhenlinie von f.		X
d) Die Einheitssphäre in 3D ist der Graph von f.		X
e) Die Einheitssphäre in 3D ist eine Niveaufläche von f.	X	
f) Die Sphäre um den Ursprung mit Radius 7 ist eine Niveaufläche von f.	X	