Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 4

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen den Begriff uneigentliches Integral und dessen wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Existenz eines uneigentlichen Integrals beurteilen und gegebenenfalls seinen Wert berechnen.

1. Aussagen über uneigentliche Integrale
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Alle uneigentlichen Integrale müssen über eine Grenzwertbildung bestimmt werden.	X	
b) Alle uneigentlichen Integrale erkennt man daran, dass mindestens eine der Grenzen $-\infty$ oder ∞ ist.		X
c) Falls das uneigentliche Integral $I=\int_0^\infty f(x)dx$ existiert, dann gilt: $I=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t f(x)dx$.	X	
d) Falls der Grenzwert $I=\lim\limits_{t\to\infty}\int_0^t f(x)dx$ konvergiert, dann gilt: $I=\int_0^\infty f(x)dx$.	X	

2. Uneigentliche Integrale
Berechnen Sie, sofern möglich, den Wert der folgenden Integrale.

a) $\int_0^\infty e^{-x}dx$ b) $\int_0^\infty 2^{-x}dx$ c) $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$
d) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ e) $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$ f) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$
g) $\int_{-\infty}^\infty e^{-|x|}dx$ h) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2}dx$ i) $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{1+x^2}dx$

a)

$$\underline{\underline{I}}=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{s\to\infty}\int_0^s \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\lim_{s\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_0^s=\lim_{s\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^{-0}\right)=0+1=\underline{\underline{1.}}$$

b)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^\infty 2^{-x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_0^s 2^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{\ln(2)}\cdot\lim_{s\to\infty}\left[2^{-x}\right]\Big|_0^s = -\frac{1}{\ln(2)}\cdot\lim_{s\to\infty}\left(2^{-s}-2^{-0}\right)$$

$$= -\frac{1}{\ln(2)}\cdot(0-1) = \underline{\underline{\frac{1}{\ln(2)}}}\,.$$

c)

$$I = \int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\ln\left(\frac{s}{1}\right) = \lim_{s\to\infty}\ln(s) = \infty.$$

Dieses *uneigentliche Integral* ist $\underline{\underline{\textit{divergent}}}$ und existiert daher nicht.

d)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\int_1^s \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Big|_1^s = \lim_{s\to\infty}\left(-\frac{1}{s}+\frac{1}{1}\right) = (-0+1) = \underline{\underline{1.}}$$

e)

$$I = \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\ln\left(\frac{1}{s}\right) = \infty.$$

Dieses *uneigentliche Integral* ist $\underline{\underline{\textit{divergent}}}$ und existiert daher nicht.

f)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\int_s^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \lim_{s\to 0}\left[2\cdot\sqrt{x}\right]\Big|_s^1 = 2\cdot\lim_{s\to 0}\left(\sqrt{1}-\sqrt{s}\right) = 2\cdot(1-0)$$

$$= \underline{\underline{2.}}$$

?

g)

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-\infty}^\infty \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^0 \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty}\int_0^s \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\int_{-r}^0 \mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty}\int_0^s \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left[\mathrm{e}^x\right]\Big|_{-r}^0 + \lim_{s\to\infty}\left[-\mathrm{e}^{-x}\right]\Big|_0^s = \lim_{r\to\infty}\left(\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^{-r}\right) + \lim_{s\to\infty}\left(-\mathrm{e}^{-s}+\mathrm{e}^0\right)$$

$$= \lim_{r\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-r}\right) + \lim_{s\to\infty}\left(1-\mathrm{e}^{-s}\right) = 1-0+1-0 = \underline{\underline{2.}}$$

h)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^{-1}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{b\to 0}\int_{-1}^{b}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{c\to 0}\int_c^{1}\frac{1}{x^2}dx + \lim_{d\to\infty}\int_1^{d}\frac{1}{x^2}dx$$

$$= \lim_{a\to-\infty}[-\frac{1}{x}]_a^{-1} + \lim_{b\to 0}[-\frac{1}{x}]_{-1}^{b} + \lim_{c\to 0}[-\frac{1}{x}]_c^{1} + \lim_{d\to\infty}[-\frac{1}{x}]_1^{d}$$

$$= \lim_{a\to-\infty}\left(1+\frac{1}{a}\right) + \lim_{b\to 0}\left(-\frac{1}{b}-1\right) + \lim_{c\to 0}\left(-1+\frac{1}{c}\right) + \lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{d}+1\right)$$

Grenzwert existiert nicht, da $\lim_{b\to 0}\left(-\frac{1}{b}\right)\to-\infty$ und $\lim_{d\to\infty}\left(-\frac{1}{d}\right)\to\infty$

i)

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \lim_{s\to\infty} \int_{0}^{s} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to\infty} \Big[\arctan(x)\Big]\Big|_{-r}^{0} + \lim_{s\to\infty} \Big[\arctan(x)\Big]\Big|_{0}^{s}$$

$$= \lim_{r\to\infty} \Big(\arctan(0) - \arctan(-r)\Big) + \lim_{s\to\infty} \Big(\arctan(s) - \arctan(0)\Big)$$

$$= \lim_{r\to\infty} \Big(0 + \arctan(r)\Big) + \lim_{s\to\infty} \Big(\arctan(s) - 0\Big) = 0 + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - 0 = \underline{\underline{\pi.}}$$

3. Uneigentliche Integrale mit Python/Sympy
Berechnen Sie die uneigentlichen Integrale aus Aufgabe 2 mit Python/Sympy.

a)
```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Symbole:
x=sp.symbols('x');
sp.init_printing();
# Parameter:
f=sp.E**(-x);
# Berechnungen:
F=sp.integrate(f,(x,0,sp.oo));
# Ausgabe:
dp.display(f);
dp.display(F);
```

b) – i) analog

4. Aussagen über 2 Integrale
Gegeben seien die beiden Integrale
$I = \int_a^\infty \frac{1}{x^2}dx$ und $J = \int_a^\infty \frac{1}{x}dx$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Integrale I und J sind uneigentliche Integrale.	X	
b) Für $a = 1$ gilt $I = 1$.	X	
c) Für $a > 0$ ist J konvergent.		X
d) Für $a \le 0$ sind I und J beide divergent.	X	
e) Für jedes $a > 0$ gilt: $I > J$.		X
f) Es gibt ein $a > 1$, so dass gilt: $I = 10$.		X

5. Aussagen über 2 Integrale

Gegeben seien die beiden Integrale

$I = \int_0^a (1 + (\tan x)^2) dx$ und $J = \int_0^{2\pi} (\sin x)^2 dx$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Integrale I und J sind uneigentliche Integrale.		X
b) Es gilt: $J = -\cos(2\pi)^2 + \cos 0^2$.		X
c) Es gilt: $J = 0$.		X
d) Für $-\frac{\pi}{2} < a < 0$ gilt: $I > 0$.		X
e) Für $0 < a < \frac{\pi}{2}$ gilt: $I > 0$.	X	
f) Es gilt: $J = \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 dx$.	X	

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 4

Computational and Data Science BSc
FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

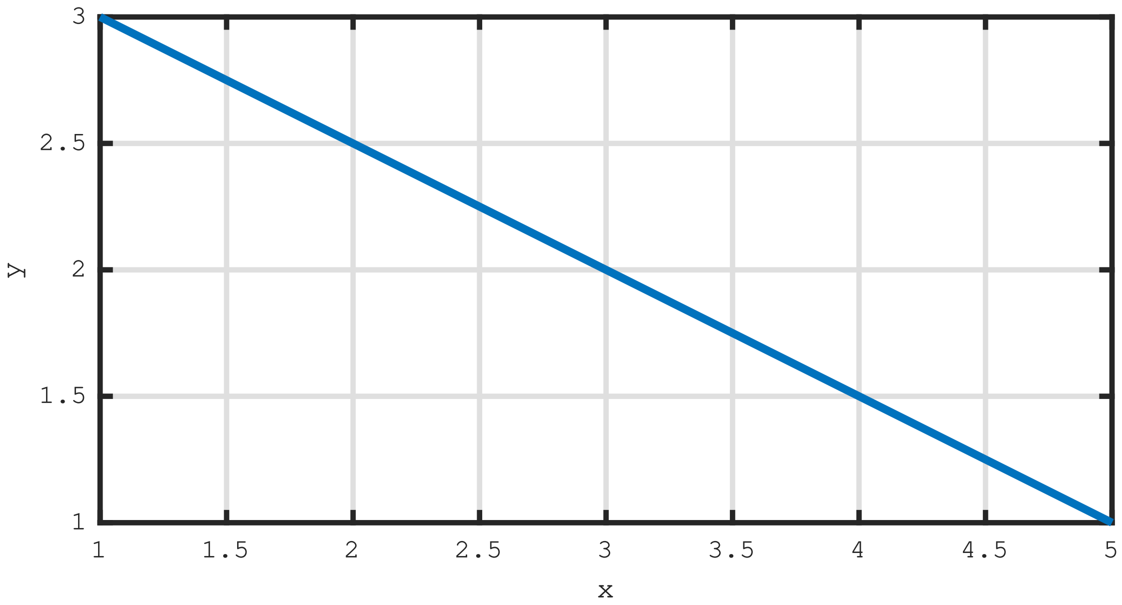
1. Aussagen über parametrisierte Kurven

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Eine *parametrisierte Kurve* ist eine *Funktion* der Form $\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$.	●	○
b) Eine *parametrisierte Kurve* ist als *Funktion* in jedem Fall *injektiv*.	○	●
c) Eine *parametrisierte Kurve* $\mathbf{s} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ ist für $n \geq 2$ niemals *surjektiv*.	●	○
d) Haben zwei *parametrisierte Kurven* die gleiche *Bahn*, dann haben sie auch die gleiche *Bahngeschwindigkeit*.	○	●
e) Haben zwei *parametrisierte Kurven* die gleiche *Bahn*, dann haben sie auch den gleichen *Bahnvektor*.	○	●
f) Haben zwei *parametrisierte Kurven* den gleichen *Geschwindigkeitsvektor*, dann haben sie auch die gleiche *Bahn*.	○	●

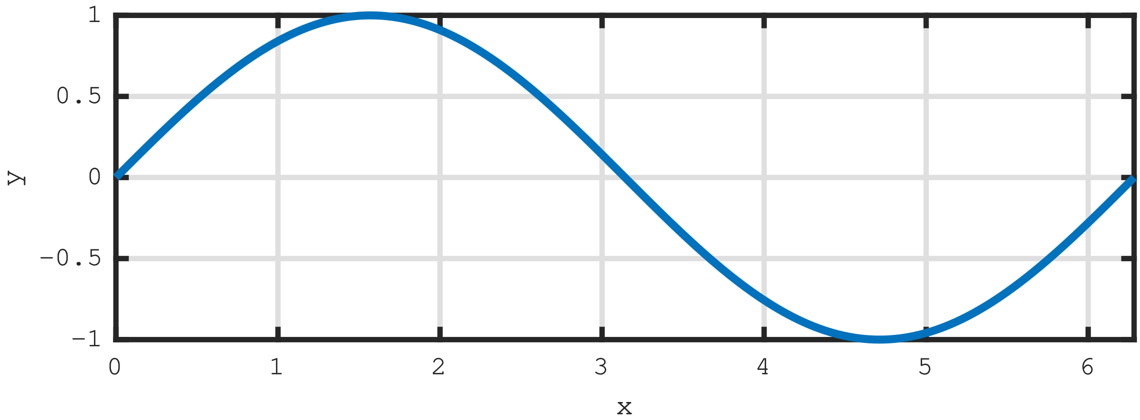
2. Bahn von parameterisierten Kurven

Wir skizzieren jeweils die *Bahn* der *parametrisierten Kurve*.

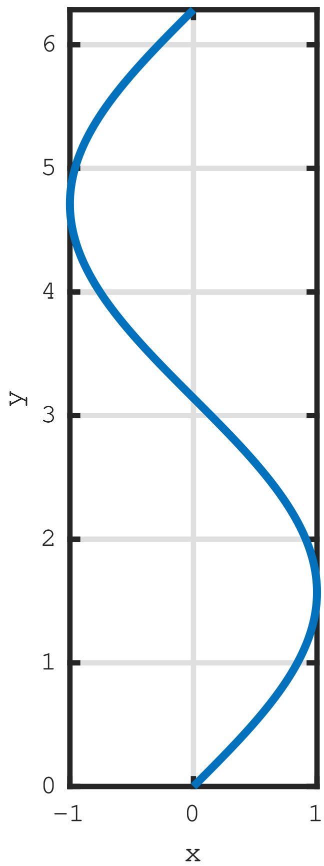
a) Wir skizzeren die *Bahn* der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



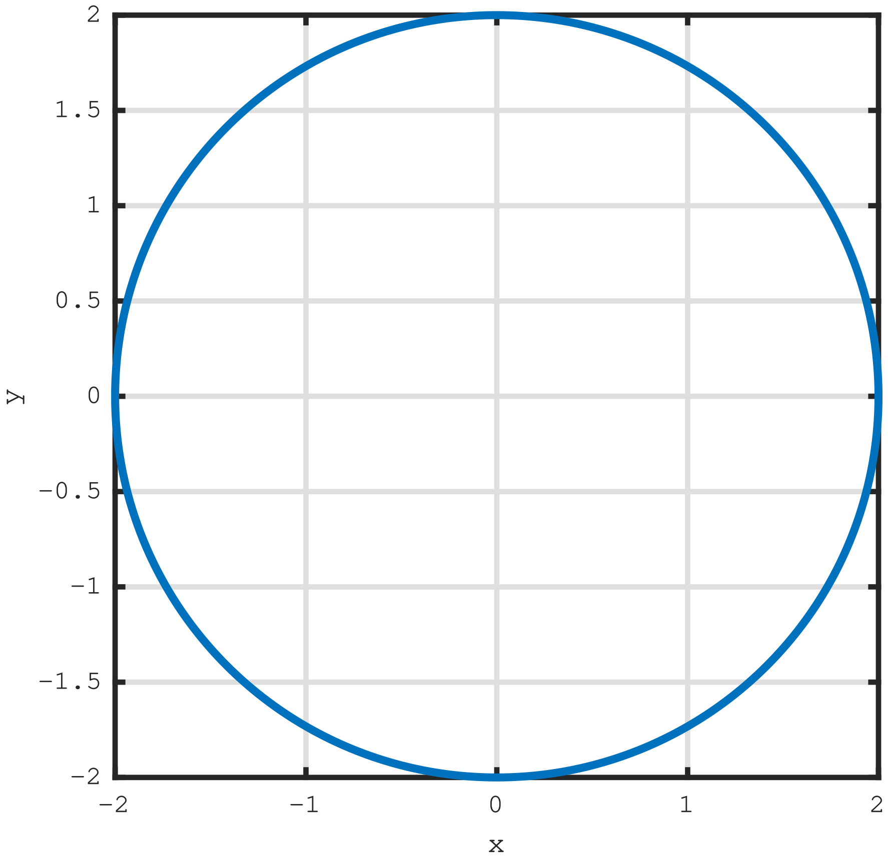
b) Wir skizzeren die *Bahn* der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



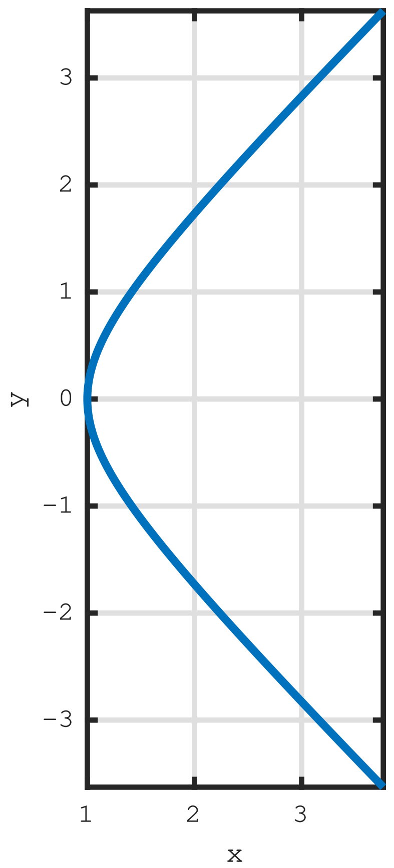
c) Wir skizzeren die *Bahn* der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



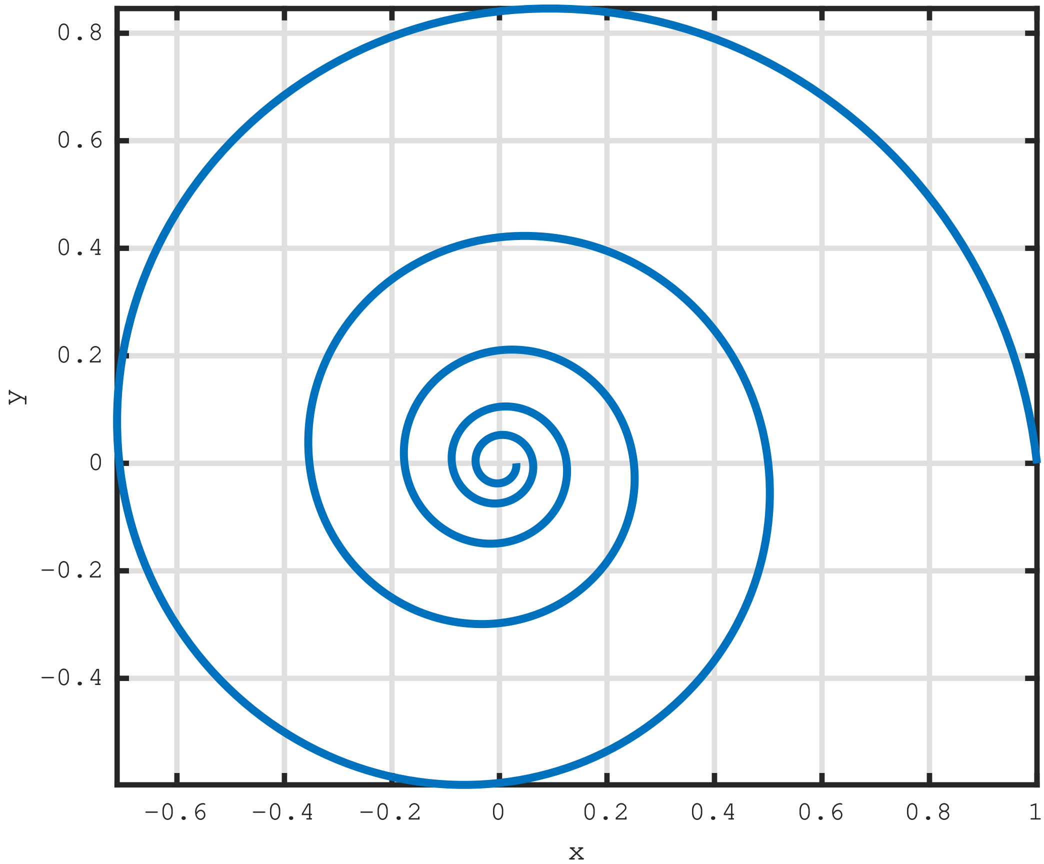
d) Wir skizzeren die *Bahn* der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



e) Wir skizzeren die *Bahn* der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



f) Wir skizzeren die *Bahn* der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



3. Bahn von parameterisierten Kurven plotten mit Python/Numpy

Wir plotten jeweils die *Bahn* der *parameterisierten Kurven* aus Aufgabe 2 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
tau_0=...; tau_E=...; N=...; lw=3; fig=...;
# Funktionen:
def s(tau):
    x=...;
    y=...;
    return x,y;
# Daten:
tau_data=np.linspace(tau_0,tau_E,N);
[x_data,y_data]=s(tau_data);
# Plot:
fh=pl.figure(fig);
pl.plot(x_data,y_data,linewidth=lw);
pl.xlabel(r'$x$'); pl.ylabel(r'$y$');
pl.grid('on'); pl.axis('image');
```

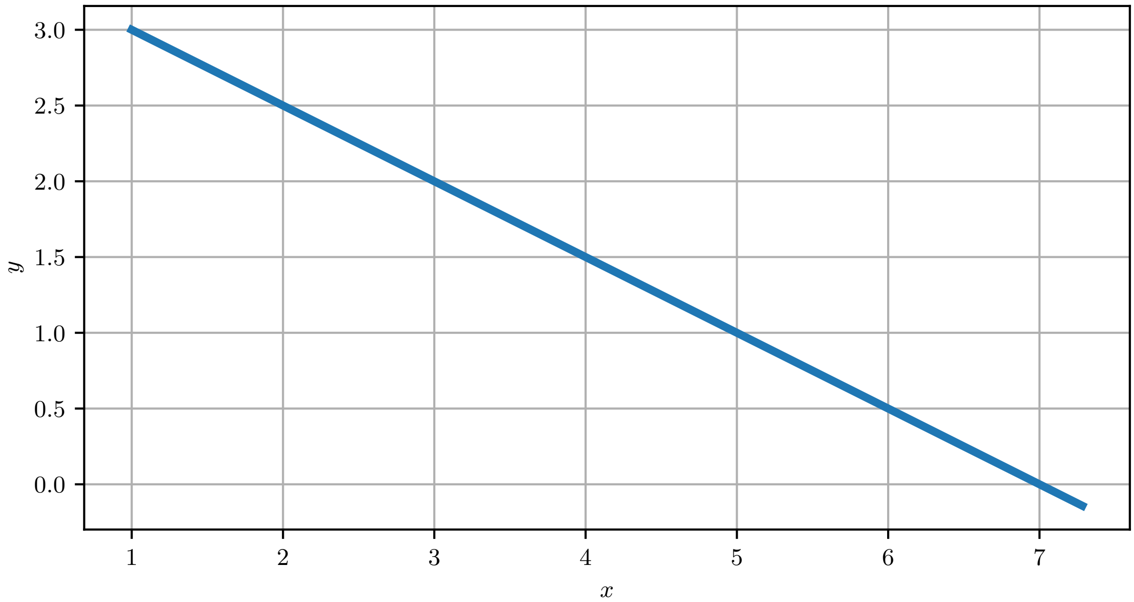
a) Wir betrachten die *parameterisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 + 2\tau \\ 3 - \tau \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Um die *Bahn* von $\mathbf{s}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=np.pi; N=201; lw=3; fig=1;
# Funktionen:
def s(tau):
    x=1+2*tau;
    y=3-tau;
    return x,y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



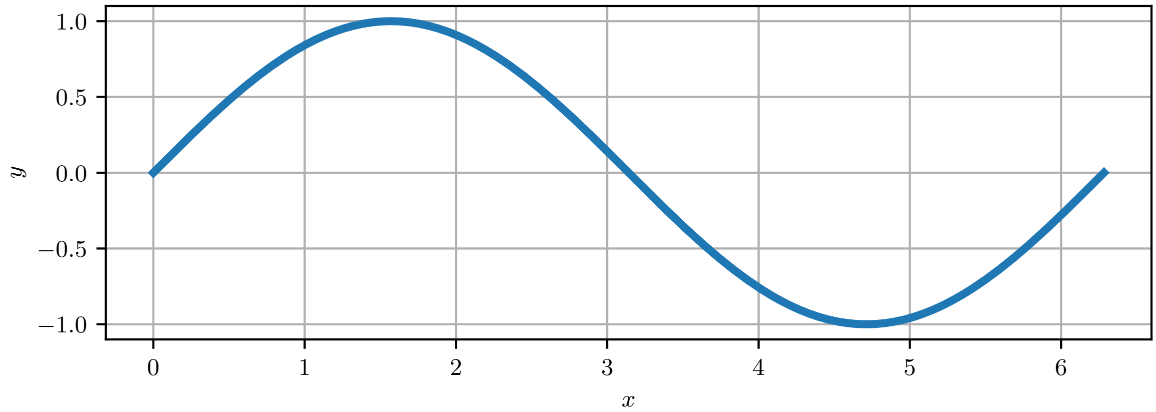
b) Wir betrachten die *parameterisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau \\ \sin(\tau) \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Um die *Bahn* von $\mathbf{s}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=2*np.pi; N=201; lw=3; fig=fig+1;
# Funktionen:
def s(tau):
    x=tau;
    y=np.sin(tau);
    return x,y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



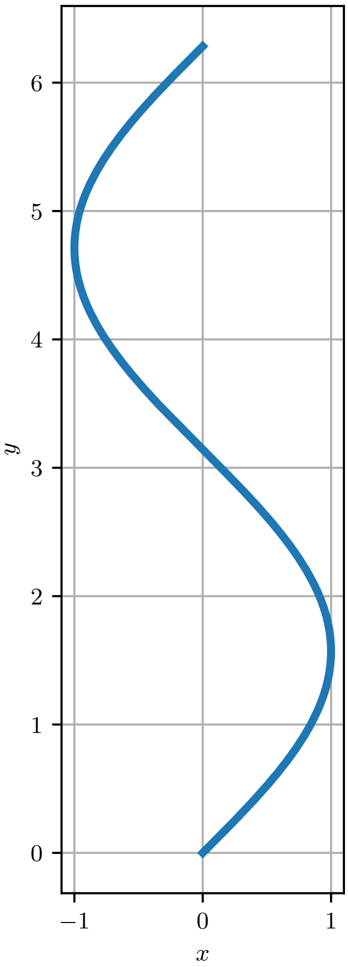
c) Wir betrachten die *parameterisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} \sin(\tau) \\ \tau \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Um die *Bahn* von $\mathbf{s}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=2*np.pi; N=201; lw=3; fig=fig+1;
# Funktionen:
def s(tau):
    x=np.sin(tau);
    y=tau;
    return x,y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



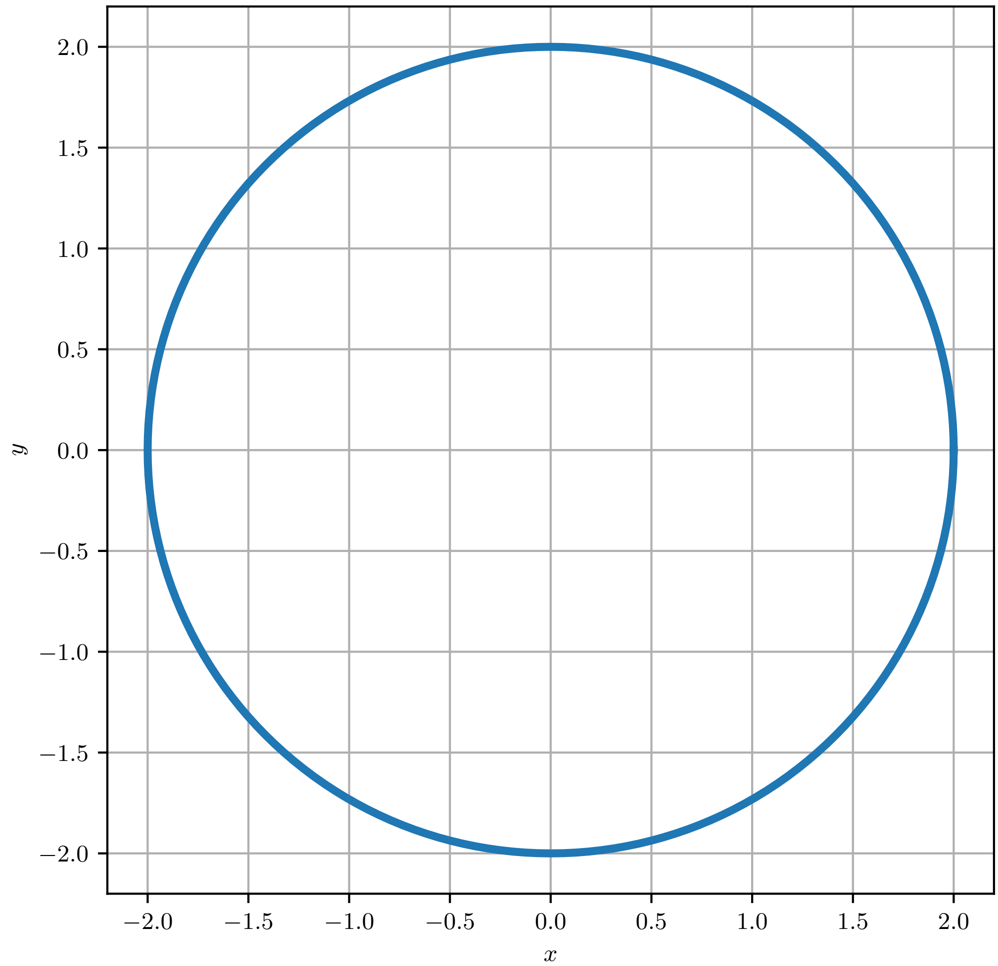
d) Wir betrachten die *parameterisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 2\,\cos(\tau) \\ 2\,\sin(\tau) \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Um die *Bahn* von $\mathbf{s}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=2*np.pi; N=401; lw=3; fig=fig+1;
# Funktionen:
def s(tau):
    x=2*np.cos(tau);
    y=2*np.sin(tau);
    return x,y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



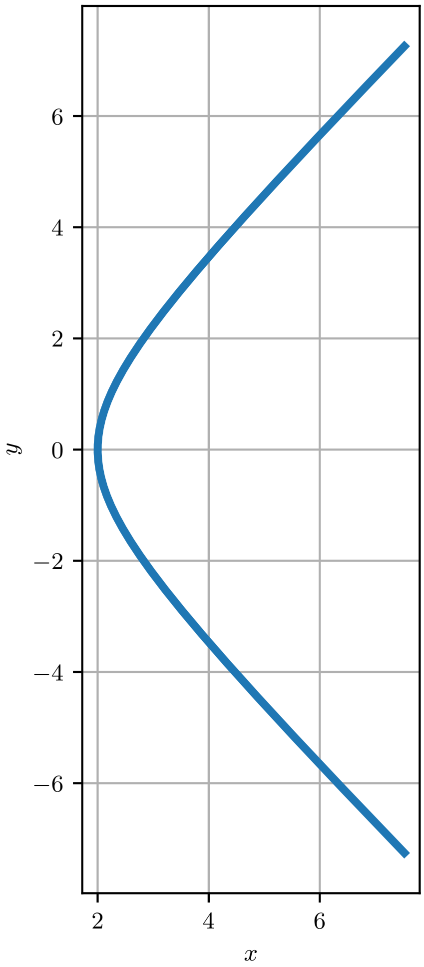
e) Wir betrachten die *parameterisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} \cosh(\tau) \\ \sinh(\tau) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Um die *Bahn* von $\mathbf{s}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
tau_0=-2; tau_E=2; N=601; lw=3; fig=fig+1;
# Funktionen:
def s(tau):
    x=2*np.cosh(tau);
    y=2*np.sinh(tau);
    return x,y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



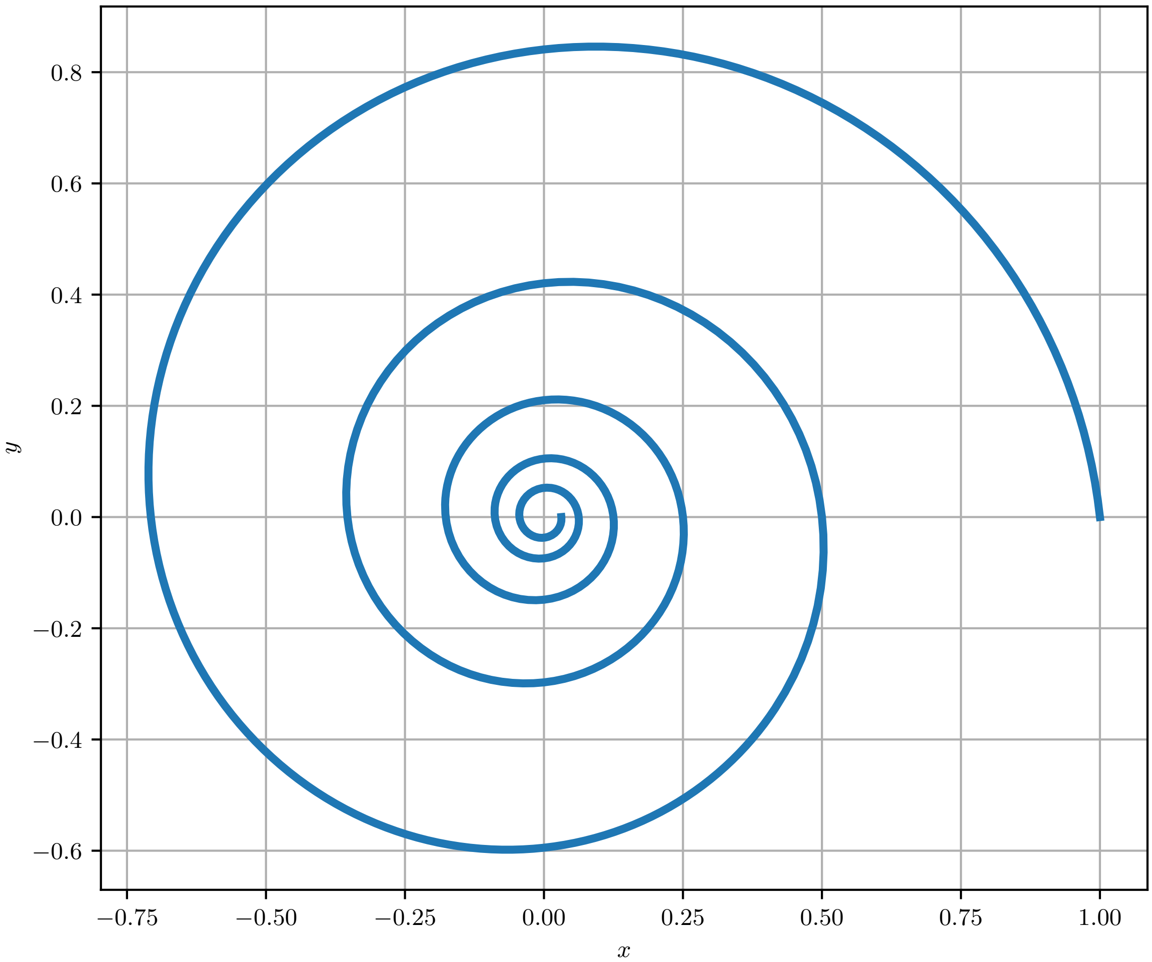
f) Wir betrachten die *parameterisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 2^{-\frac{\tau}{2\pi}}\cos(\tau) \\ 2^{-\frac{\tau}{2\pi}}\sin(\tau) \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Um die *Bahn* von $\mathbf{s}$ zu plotten, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=10*np.pi; N=1001; lw=3; fig=fig+1;
# Funktionen:
def s(tau):
    x=2**(-tau/(2*np.pi))*np.cos(tau);
    y=2**(-tau/(2*np.pi))*np.sin(tau);
    return x,y;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



4. Bahnvektor und Verlauf von parameterisierten Kurven

Wir berechnen jeweils den *Bahnvektor* der *parametrisierten Kurve* und skizzieren diesen entlang der *Bahn*.

a) Wir betrachten die *parametrisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 2\tau - 3 \\ 2 - \tau \end{bmatrix} \qquad \text{für } \tau \in [0,4]. \tag{7}$$

Für *Geschwindigkeitsvektor* und *Bahngeschwindigkeit* erhalten wir

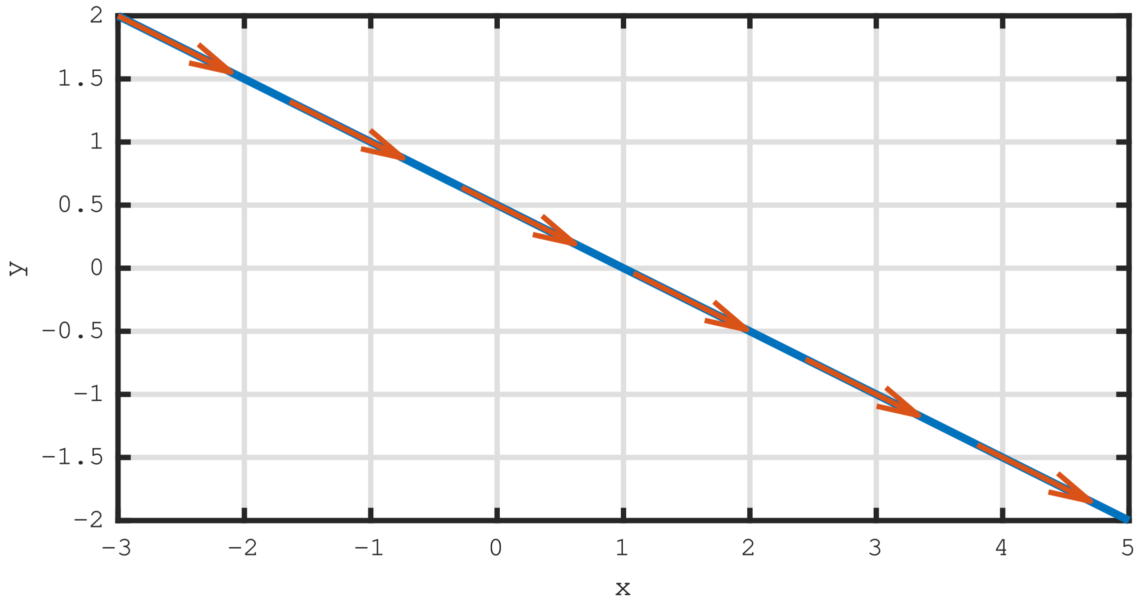
$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \tag{8}$$

$$v(\tau) = |\mathbf{v}(\tau)| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}\,. \tag{9}$$

Der *Bahnvektor* ist daher

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}(\tau)}} = \hat{\mathbf{v}}(\tau) = \frac{1}{v(\tau)} \cdot \mathbf{v}(\tau) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}}. \tag{10}$$

Wir skizzeren die *Bahn* und den *Bahnvektor* entlang der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



b) Wir betrachten die *parametrisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 3\,\cos(\tau) - 3 \\ 3\,\sin(\tau) + 1 \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2\pi]. \tag{11}$$

Für *Geschwindigkeitsvektor* und *Bahngeschwindigkeit* erhalten wir

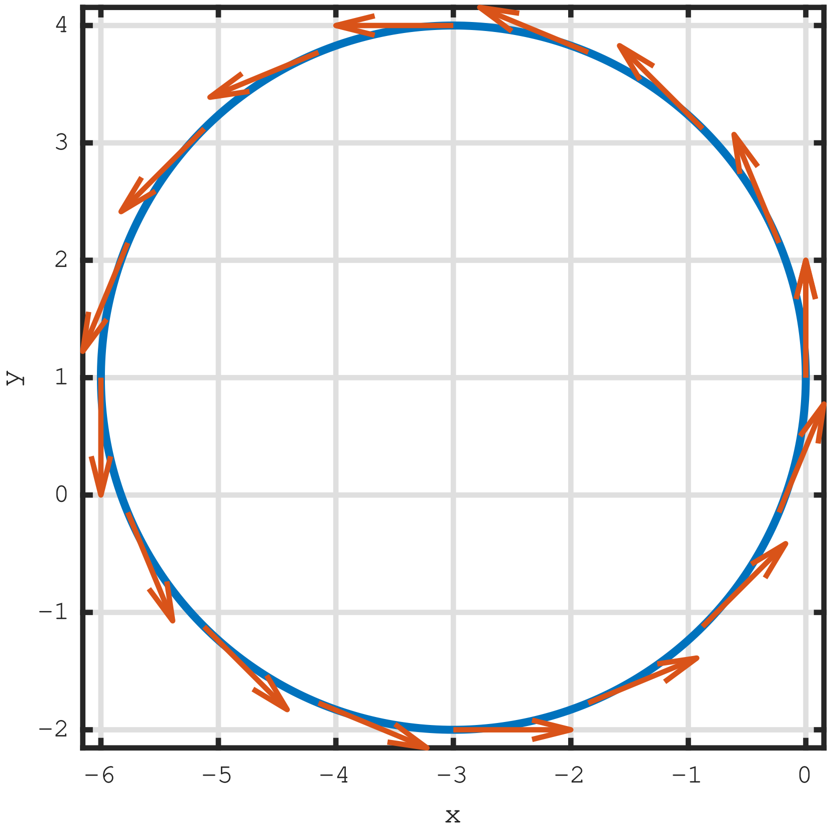
$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) + 0 \\ 3\,\cos(\tau) + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 3\,\cos(\tau) \end{bmatrix}. \tag{12}$$

$$\begin{aligned} v(\tau) = |\,\mathbf{v}(\tau)\,| &= \sqrt{(-3)^2\,\sin^2(\tau) + 3^2\,\cos^2(\tau)} = \sqrt{9\,\sin^2(\tau) + 9\,\cos^2(\tau)} \\ &= \sqrt{9 \cdot \big(\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)\big)} = \sqrt{9} = 3. \end{aligned} \tag{13}$$

Der *Bahnvektor* ist daher

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}(\tau)}} = \hat{\mathbf{v}}(\tau) = \frac{1}{v(\tau)} \cdot \mathbf{v}(\tau) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 3\,\cos(\tau) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\sin(\tau) \\ \cos(\tau) \end{bmatrix}}}. \tag{14}$$

Wir skizzeren die *Bahn* und den *Bahnvektor* entlang der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



c) Wir betrachten die *parametrisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 3\,\cos(\tau) + 2 \\ 2\,\sin(\tau) + 1 \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2\pi]. \tag{15}$$

Für *Geschwindigkeitsvektor* und *Bahngeschwindigkeit* erhalten wir

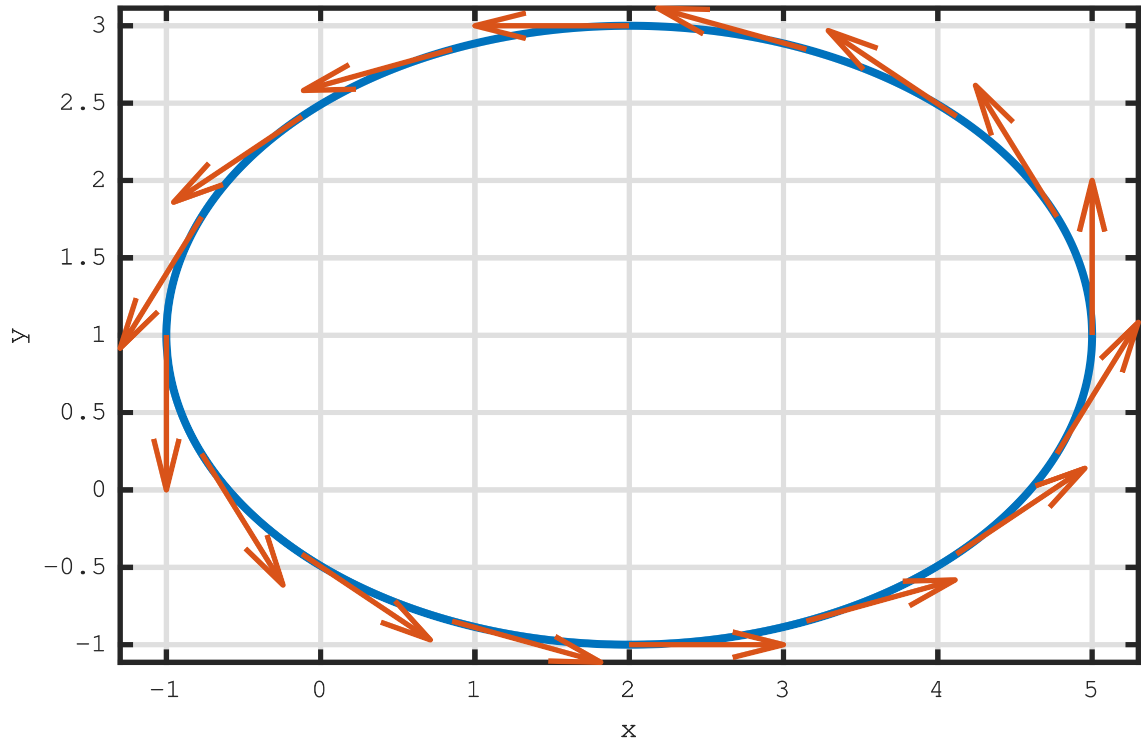
$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) + 0 \\ 2\,\cos(\tau) + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 2\,\cos(\tau) \end{bmatrix}. \tag{16}$$

$$\begin{aligned} v(\tau) = |\mathbf{v}(\tau)| &= \sqrt{(-3)^2 \sin^2(\tau) + 2^2 \cos^2(\tau)} = \sqrt{9\,\sin^2(\tau) + 4\,\cos^2(\tau)} \\ &= \sqrt{5\,\sin^2(\tau) + 4\,\sin^2(\tau) + 4\,\cos^2(\tau)} = \sqrt{5\,\sin^2(\tau) + 4 \cdot \left(\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)\right)} \\ &= \sqrt{5\,\sin^2(\tau) + 4}\,. \end{aligned} \tag{17}$$

Der *Bahnvektor* ist daher

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{e}}(\tau)}} = \hat{\mathbf{v}}(\tau) = \frac{1}{v(\tau)} \cdot \mathbf{v}(\tau) = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5\,\sin^2(\tau) + 4}} \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 2\,\cos(\tau) \end{bmatrix}}}. \tag{18}$$

Wir skizzeren die *Bahn* und den *Bahnvektor* entlang der *Kurve* in einem x-y-Diagramm.



5. Aussagen über eine parametrisierte Kurve
Wir betrachten die *parametrisierte Kurve*

$$\mathbf{s}(\tau) = 5.0\,\mathrm{m} \cdot \begin{bmatrix} \cos(3\pi\tau) + 1 \\ \sin(3\pi\tau) - 2 \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2]. \tag{19}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) $\mathbf{s}(\tau)$ ist *injektiv*.	○	●
b) Die *Bahn* von $\mathbf{s}(\tau)$ ist ein *Kreis* mit *Mittelpunkt* $\big(5.0;\, -10\big)$ und *Radius* $5.0\,\mathrm{m}$.	○	●
c) Der *Kurvenparameter* τ ist eine Grösse ohne *Masseinheit*.	●	○
d) Für den *Geschwindigkeitsvektor* gilt $\mathbf{v}(0) = 5.0\,\mathrm{m} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y$.	○	●
e) Für die *Bahngeschwindigkeit* gilt $v(1) = 5.0\,\mathrm{m/s}$.	○	●
f) Für den *Bahnvektor* gilt $\hat{\mathbf{e}}(1) = \hat{\mathbf{e}}_x$.	○	●

6. Aussagen über Linenintegrale

Wir betrachten ein *Linienintegral* der Form

$$I = \int_{\tau_0}^{\tau_\mathrm{E}} \langle \mathbf{w} \, , \mathbf{v} \rangle \; \mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Wählt man den neuen *Kurvenparameter* $\tilde{\tau} = 2\tau$, dann verändert man den Wert von I nicht.	●	○
b) Wechselt man die Laufrichtung der *parametrisierten Kurve*, dann verändert man den Wert von I nicht.	○	●
c) Gilt überall $\measuredangle(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \pi/2$, dann folgt $I = 0$.	●	○
d) Gilt überall $\measuredangle(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = 0$, dann folgt $I = 0$.	○	●
e) Gilt überall $\measuredangle(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \pi$, dann folgt $I < 0$.	●	○

7. Linienintegrale berechnen

Wir berechnen jeweils das *Linienintegral* des *Vektorfeldes* entlang der *parametrisierten Kurve*.

a) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x; y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 1 - 2\tau \\ 3 + 8\tau \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2]. \tag{21}$$

Der *Geschwindigkeitsvektor* der *parametrisierten Kurve* ist

$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} 0 - 2 \cdot 1 \\ 0 + 8 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix} \tag{22}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}} &= \int_\gamma \mathbf{w} \, \mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\tau_0}^{\tau_\mathrm{E}} \langle \mathbf{w} \, , \mathbf{v} \rangle \; \mathrm{d}\tau = \int_0^2 \left\langle \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 8 \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^2 \Big(0.5 \cdot (-2) + 0.25 \cdot 8 \Big) \, \mathrm{d}\tau = \int_0^2 1 \, \mathrm{d}\tau = \Big[\tau \Big] \Big|_0^2 = 2 - 0 = \underline{\underline{2.}} \end{aligned} \tag{23}$$

b) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x; y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau \, \cos(\alpha) \\ \tau \, \sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, r]. \tag{24}$$

Der *Geschwindigkeitsvektor* der *parametrisierten Kurve* ist

$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \tag{25}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_\gamma \mathbf{w}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\tau_0}^{\tau_\mathrm{E}} \langle \mathbf{w}\,,\mathbf{v}\rangle\;\mathrm{d}\tau = \int_0^r \left\langle \begin{bmatrix} \tau\;\cos(\alpha) \\ \tau\;\sin(\alpha) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^r \Big(\tau\;\cos(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \tau\;\sin(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\Big)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^r \tau\cdot\Big(\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)\Big)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^r \tau\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\cdot\Big[\tau^2\Big]\Big|_0^r = \frac{1}{2}\cdot\big(r^2-0\big) = \underline{\underline{\frac{r^2}{2}}}\,. \tag{26}$$

c) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau\;\cos(\alpha) \\ \tau\;\sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau\in[0,r]. \tag{27}$$

Der *Geschwindigkeitsvektor* der *parametrisierten Kurve* ist

$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \tag{28}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_\gamma \mathbf{w}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\tau_0}^{\tau_\mathrm{E}} \langle \mathbf{w}\,,\mathbf{v}\rangle\;\mathrm{d}\tau = \int_0^r \left\langle \begin{bmatrix} -\tau\;\sin(\alpha) \\ \tau\;\cos(\alpha) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^r \Big(-\tau\;\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha) + \tau\;\cos(\alpha)\cdot\sin(\alpha)\Big)\,\mathrm{d}\tau = \int_0^r 0\,\mathrm{d}\tau = \underline{\underline{0.}} \tag{29}$$

d) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} r\;\cos(\tau) \\ r\;\sin(\tau) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau\in[0,2\pi]. \tag{30}$$

Der *Geschwindigkeitsvektor* der *parametrisierten Kurve* ist

$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} -r\;\sin(\tau) \\ r\;\cos(\tau) \end{bmatrix} \tag{31}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \oint_\gamma \mathbf{w}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\tau_0}^{\tau_\mathrm{E}} \langle \mathbf{w}\,,\mathbf{v}\rangle\;\mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -r\;\sin(\tau) \\ r\;\cos(\tau) \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\tau$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(0.5\cdot\big(-r\;\sin(\tau)\big) + 0.25\cdot r\;\cos(\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau = 0.25\,r\int_0^{2\pi}\Big(\cos(\tau) - 2\;\sin(\tau)\Big)\,\mathrm{d}\tau$$
$$= 0.25\,r\cdot\Big[\sin(\tau)+2\;\cos(\tau)\Big]\Big|_0^{2\pi} = 0.25\,r\cdot\Big(\sin(2\pi)+2\;\cos(2\pi)-\sin(0)-2\;\cos(0)\Big)$$
$$= 0.25\,r\cdot\Big(0+2\cdot 1-0-2\cdot 1\Big) = 0.25\,r\cdot 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{32}$$

e) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} r\,\cos(\tau) \\ r\,\sin(\tau) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2\pi]. \tag{33}$$

Der *Geschwindigkeitsvektor* der *parametrisierten Kurve* ist

$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} -r\,\sin(\tau) \\ r\,\cos(\tau) \end{bmatrix} \tag{34}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}} &= \oint_\gamma \mathbf{w}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\tau_0}^{\tau_\mathrm{E}} \langle \mathbf{w}\,, \mathbf{v} \rangle\; \mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} r\,\cos(\tau) \\ r\,\sin(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -r\,\sin(\tau) \\ r\,\cos(\tau) \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(r\,\cos(\tau) \cdot \big(-r\,\sin(\tau)\big) + r\,\sin(\tau) \cdot r\,\cos(\tau) \Big)\, \mathrm{d}\tau \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \Big(\sin(\tau) \cdot \cos(\tau) - \cos(\tau) \cdot \sin(\tau) \Big)\, \mathrm{d}\tau = r^2 \int_0^{2\pi} 0\,\mathrm{d}\tau = r^2 \cdot 0 = \underline{\underline{0.}} \end{aligned} \tag{35}$$

f) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} r\,\cos(\tau) \\ r\,\sin(\tau) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2\pi]. \tag{36}$$

Der *Geschwindigkeitsvektor* der *parametrisierten Kurve* ist

$$\mathbf{v}(\tau) = \dot{\mathbf{s}}(\tau) = \begin{bmatrix} -r\,\sin(\tau) \\ r\,\cos(\tau) \end{bmatrix} \tag{37}$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}} &= \oint_\gamma \mathbf{w}\,\mathrm{d}\mathbf{s} = \int_{\tau_0}^{\tau_\mathrm{E}} \langle \mathbf{w}\,, \mathbf{v} \rangle\; \mathrm{d}\tau = \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{bmatrix} -r\,\sin(\tau) \\ r\,\cos(\tau) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -r\,\sin(\tau) \\ r\,\cos(\tau) \end{bmatrix} \right\rangle \mathrm{d}\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\big(-r\,\sin(\tau)\big) \cdot \big(-r\,\sin(\tau)\big) + r\,\cos(\tau) \cdot r\,\cos(\tau) \Big)\, \mathrm{d}\tau \\ &= r^2 \int_0^{2\pi} \Big(\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau) \Big)\, \mathrm{d}\tau = r^2 \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\tau = r^2 \cdot \Big[\, \tau \,\Big]\Big|_0^{2\pi} = r^2 \cdot (2\pi - 0) \\ &= \underline{\underline{2\pi\, r^2.}} \end{aligned} \tag{38}$$

8. Linienintegrale berechnen mit Python/Sympy

Wir berechnen die *Linienintegrale* aus Aufgabe 7 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
r,x,y,alpha,tau=sp.symbols('r,x,y,alpha,tau');
# Parameter:
tau_0=...; tau_E=...;
# Funktionen:
def w(x,y):
    res=sp.Matrix([[...],[...]]);
    return res;
def s(tau):
    res=sp.Matrix([[...],[...]]);
    return res;
# Berechnungen:
v=sp.simplify(sp.diff(s(tau),tau));
I=sp.simplify(sp.integrate(v.dot(w(s(tau)[0],s(tau)[1]))
                ,(tau,tau_0,tau_E)));
# Ausgabe:
dp.display(I);
```

ruft 1. Reihe der Matrix auf, es geht auch: s(tau).row(0)

a) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 1-2\tau \\ 3+8\tau \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0,2]. \tag{39}$$

Um das *Linienintegral* von **w** entlang **s** zu berechnen, modifizieren wir den Code.

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=2;
# Funktionen:
def w(x,y):
    res=sp.Matrix([[0.5],[0.25]]);
    return res;
def s(tau):
    res=sp.Matrix([[1-2*tau],[3+8*tau]]);
    return res;
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = 2.}} \tag{40}$$

b) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau\,\cos(\alpha) \\ \tau\,\sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0,r]. \tag{41}$$

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=r;
# Funktionen:
def w(x,y):
    res=sp.Matrix([[x],[y]]);
    return res;
def s(tau):
    res=sp.Matrix([[tau*sp.cos(alpha)],[tau*sp.sin(alpha)]]);
    return res;
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = \frac{r^2}{2}\,.}} \tag{42}$$

c) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau\,\cos(\alpha) \\ \tau\,\sin(\alpha) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, r]. \tag{43}$$

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=r;
# Funktionen:
def w(x,y):
    res=sp.Matrix([[-y],[x]]);
    return res;
def s(tau):
    res=sp.Matrix([[tau*sp.cos(alpha)],[tau*sp.sin(alpha)]]);
    return res;
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = 0.}} \tag{44}$$

d) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} r\,\cos(\tau) \\ r\,\sin(\tau) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2\pi]. \tag{45}$$

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=2*sp.pi;
# Funktionen:
def w(x,y):
    res=sp.Matrix([[0.5],[0.25]]);
    return res;
def s(tau):
    res=sp.Matrix([[r*sp.cos(tau)],[r*sp.sin(tau)]]);
    return res;
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = 0.}} \tag{46}$$

e) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} r\,\cos(\tau) \\ r\,\sin(\tau) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2\pi]. \tag{47}$$

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=2*sp.pi;
# Funktionen:
def w(x,y):
    res=sp.Matrix([[x],[y]]);
    return res;
def s(tau):
    res=sp.Matrix([[r*sp.cos(tau)],[r*sp.sin(tau)]]);
    return res;
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = 0.}} \tag{48}$$

f) Wir betrachten

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} r\,\cos(\tau) \\ r\,\sin(\tau) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 2\pi]. \tag{49}$$

```
# Parameter:
tau_0=0; tau_E=2*sp.pi;
# Funktionen:
def w(x,y):
    res=sp.Matrix([[-y],[x]]);
    return res;
def s(tau):
    res=sp.Matrix([[r*sp.cos(tau)],[r*sp.sin(tau)]]);
    return res;
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{I = 2\pi\,r^2.}} \tag{50}$$

9. Aussagen über ein Linienintegral

Wir betrachten das *Linienintegral* I des *Vektorfeldes*

$$\mathbf{w}(x;y) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix} \quad \text{entlang} \quad \mathbf{s}(\tau) = \begin{bmatrix} 3\,\cos(2\pi\tau) \\ 3\,\sin(2\pi\tau) \end{bmatrix} \quad \text{für } \tau \in [0, 1]. \tag{51}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $I = 0$.	○	●
b) Es gilt $I > 0$.	○	●
c) Es gilt $\lvert I \rvert = 18\pi$.	●	○
d) Der *Bahnvektor* der *parametrisierten Kurve* steht an jedem Punkt *senkrecht* auf $\mathbf{w}$.	○	●
e) Verlängert man die *parametrisierte Kurve* durch $\tau \in [0, 2]$, dann bleibt der Wert von I unverändert.	○	●
f) Verlängert man die *parametrisierte Kurve* durch $\tau \in [0, 2]$, dann verdoppelt man den Wert von I.	●	○