Übungsblatt 10 Ana

Computational and Data Science
FS2025

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Hesse-Matrix, Richtungsableitung, lokale/globale Extrema, Sattelpunkt, Extrema unter Nebenbedingungen, Lagrange´scher Multiplikator und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Hesse-Matrix von Skalarfeldern bestimmen.
- Sie können die Richtungsableitung berechnen.
- Sie können lokale Extrema und Sattelpunkte bestimmen.
- Sie können Extrema einer Funktion unter Nebenbedingungen bestimmen.

1. Ableitungen von Funktionen in zwei Variablen

Berechnen Sie jeweils den Gradienten und die Hesse-Matrix der gegebenen Funktion.

a) $f(x, y) = 3x + 5y$ b) $f(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2$ c) $f(x, y) = x^2y^2 + 1$
d) $f(x, y) = 2^{3x-5y}$ e) $V(r, h) = \pi r^2 h$ f) $f(t, x) = A\sin(\omega t - kx)$

2.

Bestimmen Sie zu $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = x^3 - x^2 \cdot \ln(y^2 + 1) - 3x$

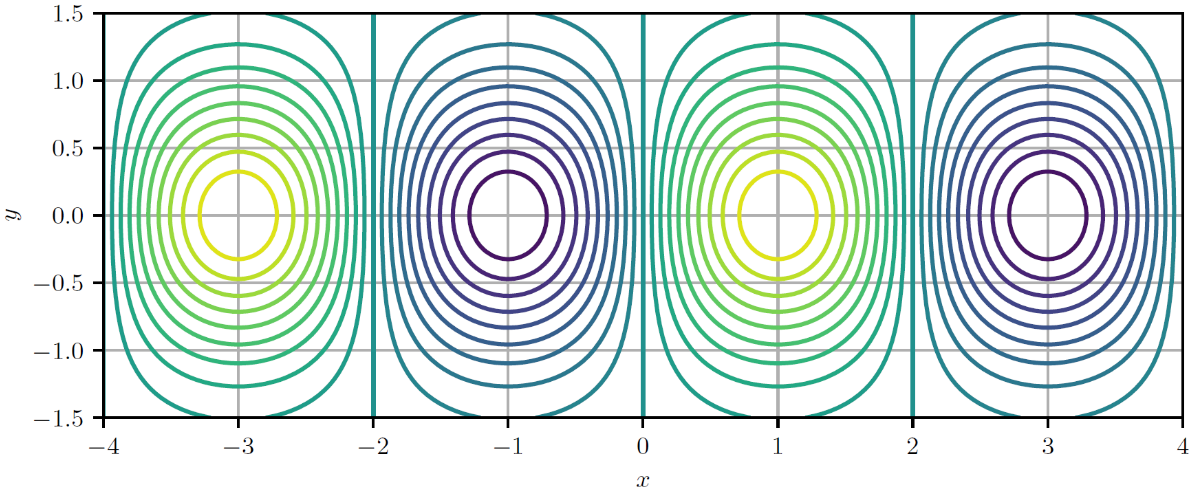
a) den Funktionswert am Punkt $(-1; 0)$,
b) den Gradienten,
c) die Hesse-Matrix,
d) alle Nullstellen des Gradienten,
e) die Gleichung der Tangentialebene im Punkt $(3; 1)$.

3. Kritische Stellen in 3D

Bestimmen Sie alle kritischen Stellen der gegebenen Funktionen.

a) $f(x, y) = y^3 + x^2y - 3y + 8$ b) $f(x, y) = 3x^2y + y^3 - 27y + 4$

4. Aussagen über einen Python/Numpy Plot
Gegeben sei der Python Numpy/Plot einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Für die Falschfarbendarstellung wurde die Standardeinstellung in matplotlib verwendet (viridis).



Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Der Gradient der Funktion f verschwindet am Punkt $(-1; 0)$.		
b) Die Funktion f hat am Punkt $(2; 0)$ einen Sattelpunkt.		
c) Am Punkt $(1; 1{,}25)$ zeigt der Gradient der Funktion f in Richtung der x-Achse.		
d) Am Punkt $(-1; 1{,}25)$ ist der Gradient der Funktion f länger als am Punkt $(-2; 0{,}5)$.		
e) Es gilt: $\int_{-2}^{2} f(x; -1)dx = 0$.		

5. Richtungsableitung
Berechnen Sie für folgende Funktionen an den gegebenen Stellen $\vec{x}_0$ die Richtungsableitung in Richtung $\vec{r}$.

a) $f(x, y) = \frac{x}{x+y}, \vec{x}_0 = (1; 2), \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $f(x, y, z) = x \sin z - y \cos(2z)\,, \vec{x}_0 = (0; 0; 0), \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

c) $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 \sqrt{x_2} + x_4 e^{x_3}, \vec{x}_0 = (-1; 1; 0; 2), \vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy, \vec{x}_0 = (3; -2), \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Bestimmen Sie ausserdem, in welcher Richtung die Richtungsableitung maximal wird und auch wie gross dieser Maximalwert ist.

6. Aussagen über eine Funktion

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) = \sin x + \cos y$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Funktion f hat genau eine kritische Stelle.		
b) Der Graph von f steigt an keinem Punkt und in keine Richtung stärker als 45°.		
c) Die Funktion f hat an der Stelle $(0;0)$ einen Sattelpunkt.		
d) Die Funktion f hat an der Stelle $(\pi/2;0)$ ein lokales Maximum.		
e) Es gibt eine Gerade in der xy-Ebene, die auf einer Höhenlinie der Funktion f liegt.		

7. Extrema unter Nebenbedingungen

a) Bestimmen Sie die Extrema von $f(x,y) = 4 - \frac{1}{2}x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $g(x,y) = x + y - 1 = 0$.

b) Finden Sie ein Dreieck, das bei gegebenem Umfang U einen maximalen Flächeninhalt F hat.

Hinweis: Nach dem Satz des Heron gilt: $F(x,y,z) = \sqrt{\frac{U}{2}(\frac{U}{2} - x)(\frac{U}{2} - y)(\frac{U}{2} - z)}$,

wobei x, y, z die Seitenlängen des Dreiecks sind.

c) Sie möchten einen Quader basteln. Die Holzstangen für die Kanten des Quaders kosten 2 Euro pro Meter; die Kosten für den Stoff für die Seitenflächen des Quaders betragen 3 Euro je Quadratmeter. Sie haben 50 Euro zur Verfügung und möchten diese 50 Euro vollständig ausgeben. Ausserdem wollen Sie das Volumen des Quaders maximieren. Formulieren Sie diese Bastelarbeit als Maximierungsaufgabe mit Nebenbedingungen, und lösen Sie die Aufgabenstellung unter Verwendung Lagrange´scher Multiplikatoren.