Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 11 Ana

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Kurve, Spur, Geschwindigkeits-/Tangentenvektor, Beschleunigungsvektor, Tangenteneinheitsvektor, Hauptnormalenvektor, Binormalenvektor, Parametrisierung, Bogenlänge, Vektorfeld, Kurven-/Linienintegral und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Spur einer parametrisierten Kurve in 2D skizzieren.
- Sie können ein Vektorfeld in 2D skizzieren.
- Sie können die Bogenlänge einer Kurve berechnen.
- Sie können Linienintegrale berechnen.

---

1. Aussagen über parametrisierte Kurven

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Eine parametrisierte Kurve kann durch $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dargestellt werden.	X	
b) Eine parametrisierte Kurve ist stets injektiv.		X
c) Eine parametrisierte Kurve ist für $n \geq 2$ niemals surjektiv.	X	
d) Haben zwei parametrisierte Kurven dieselbe Spur, dann haben sie auch dieselbe Geschwindigkeit.		X
e) Haben zwei parametrisierte Kurven dieselbe Spur, dann haben sie auch denselben Tangenteneinheitsvektor.		X

2. Spur von parametrisierten Kurven

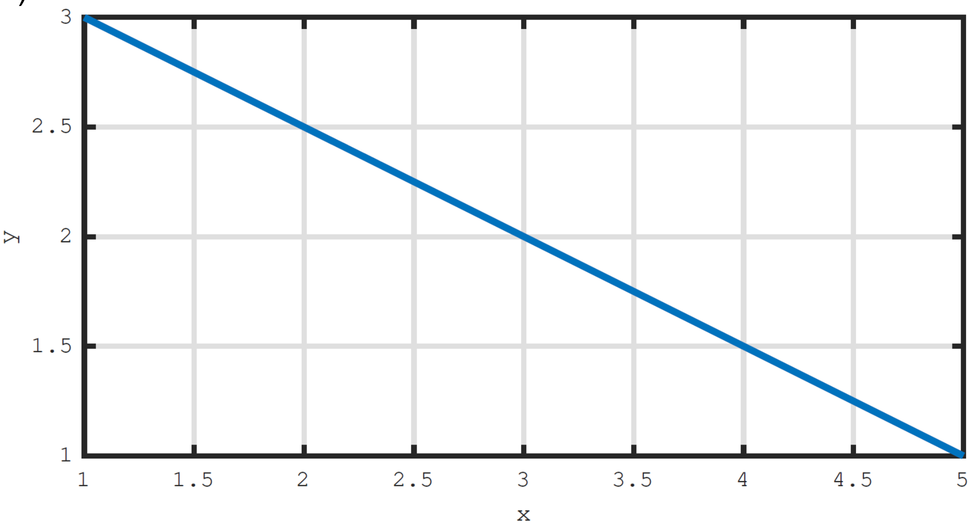
Skizzieren Sie jeweils die Spur der Kurve für einen geeigneten Bereich von $t \in \mathbb{R}$.

a) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 3-t \end{pmatrix}$ b) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$ c) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ t \end{pmatrix}$

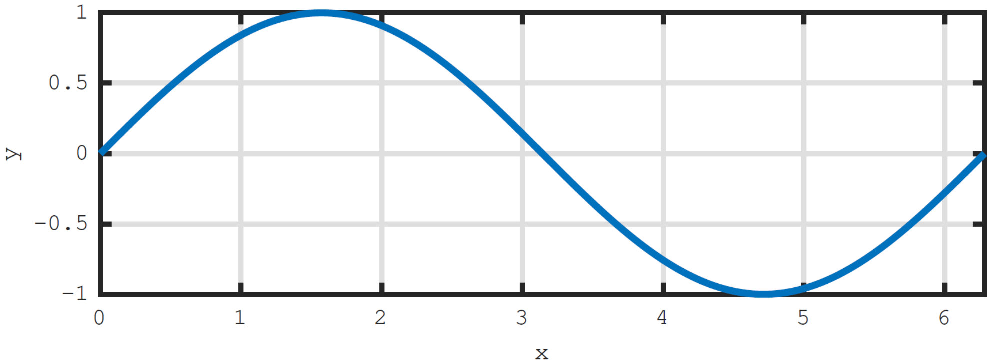
d) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ e) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ f) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2^{-\frac{t}{2\pi}} \cos t \\ 2^{-\frac{t}{2\pi}} \sin t \end{pmatrix}$

g) Plotten Sie die Spur der Kurven aus a) – f) mit Python/Numpy.

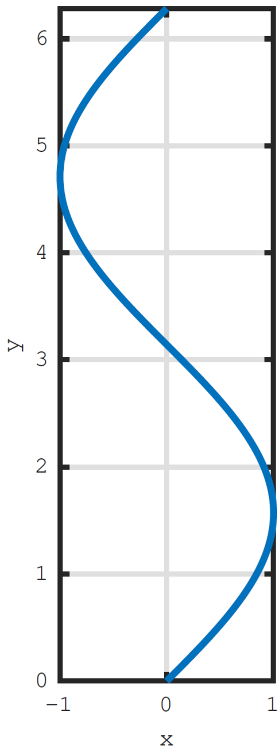
a)


3
2.5
2
1.5
1
y
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
x

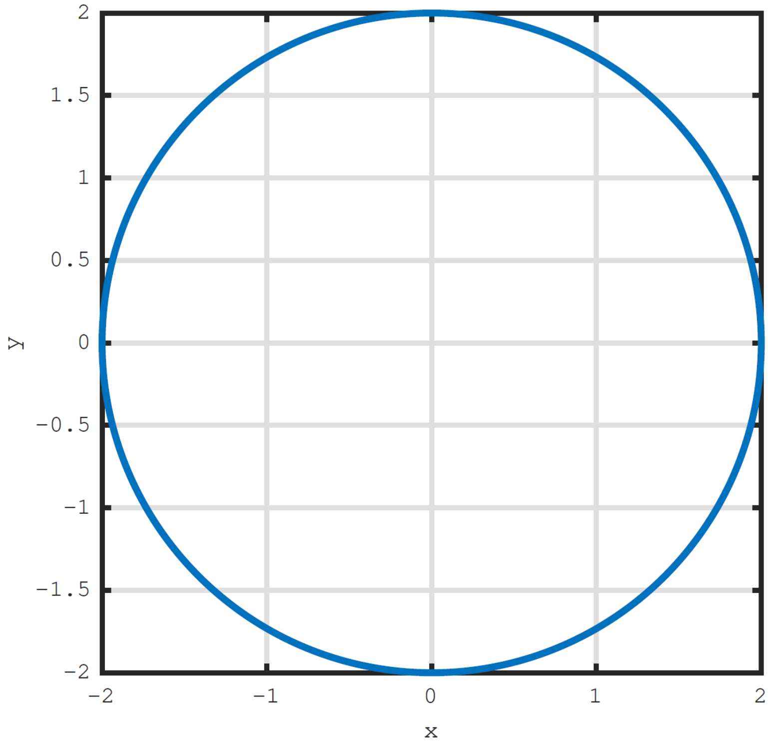
b)


1
0.5
0
−0.5
−1
y
0
1
2
3
4
5
6
x

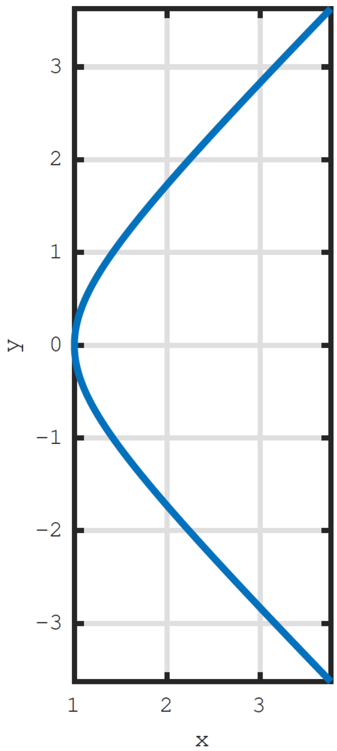
c)


6
5
4
3
2
1
0
y
−1
0
1
x

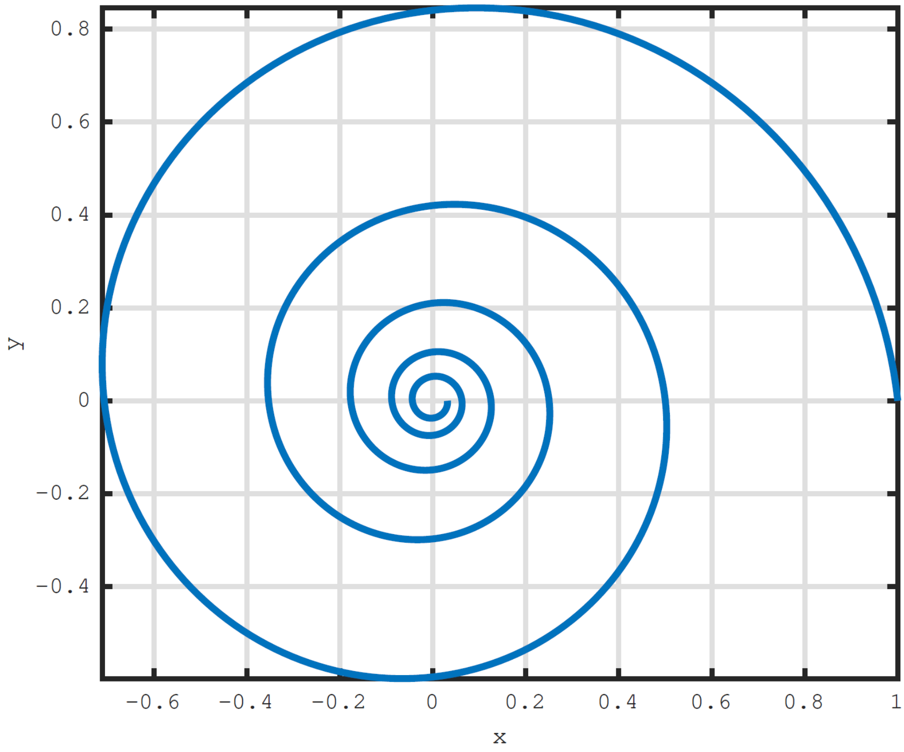
d)



e)



f)



g)

Für a):

```
# Python initialisieren
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter
t_0=0; t_E=2*np.pi; N=41; lw=3; fig=1;
# Funktionen
def gamma(t):  # Definition der parametrisierten Kurve
    x=1+2*t;
    y=3-t;
    return x,y;
# Daten
t_data=np.linspace(t_0,t_E,N);
[x_data,y_data]=gamma(t_data);
# Plot
fh=pl.figure(fig);
pl.plot(x_data,y_data,linewidth=lw);
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y');
pl.grid('on'); pl.axis('image');
```

➔ analog für b) – f)

3. Geschwindigkeits- und Tangenteneinheitsvektor → FS23 CDS Blatt 4 A4

Berechnen Sie jeweils den Tangenteneinheitsvektor und skizzieren Sie diesen entlang der Spur.

a) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ 2-t \end{pmatrix}$ b) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t - 3 \\ 3\sin t + 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t + 2 \\ 2\sin t + 1 \end{pmatrix}$

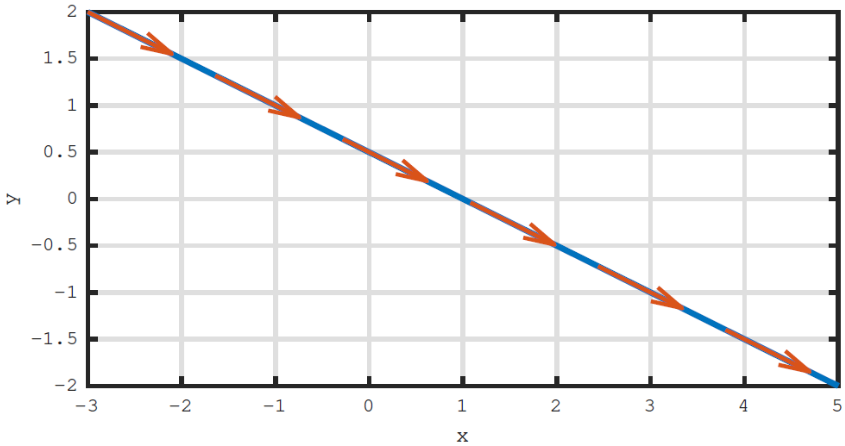
a)
Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu

$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 1-0 \\ 0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$|\dot{\vec{\gamma}}(t)| = \sqrt{5}$

$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{2}{-1}$



b)
Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu

$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau)+0 \\ 3\,\cos(\tau)+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 3\,\cos(\tau) \end{bmatrix}$$

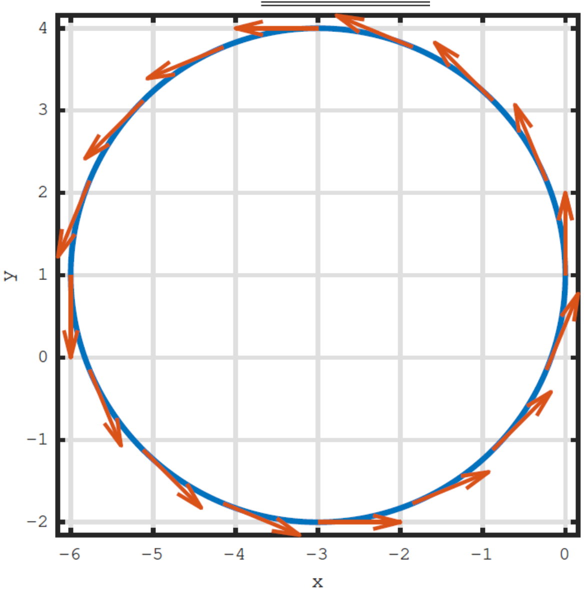
$|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$:

$$\sqrt{(-3)^2\sin^2(\tau)+3^2\cos^2(\tau)} = \sqrt{9\,\sin^2(\tau)+9\,\cos^2(\tau)}$$

$$= \sqrt{9\cdot\left(\sin^2(\tau)+\cos^2(\tau)\right)} = \sqrt{9} = 3.$$

$\vec{T}(t)$:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 3\,\cos(\tau) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\sin(\tau) \\ \cos(\tau) \end{bmatrix}}}$$



c)
Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu
$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} -3\sin(\tau)+0 \\ 2\cos(\tau)+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\sin(\tau) \\ 2\cos(\tau) \end{bmatrix}$$

$|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$:

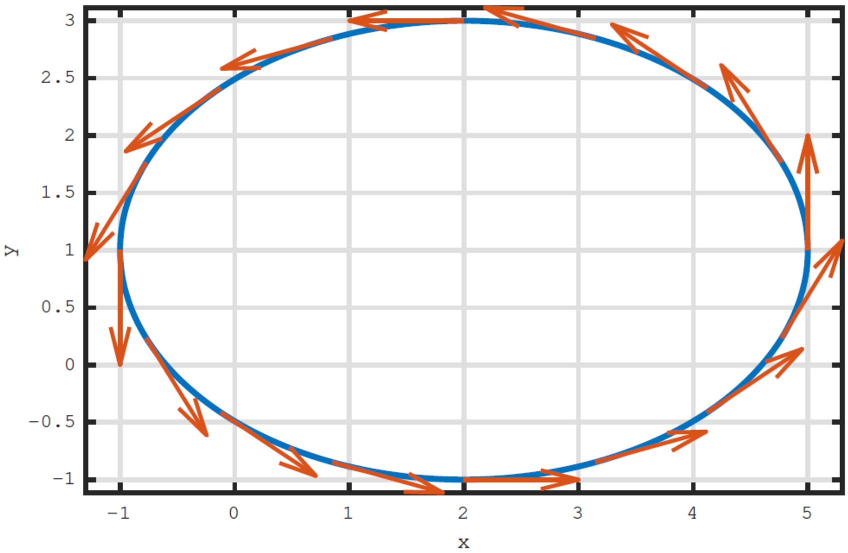
$$\sqrt{(-3)^2\sin^2(\tau)+2^2\cos^2(\tau)} = \sqrt{9\sin^2(\tau)+4\cos^2(\tau)}$$

$$= \sqrt{5\sin^2(\tau)+4\sin^2(\tau)+4\cos^2(\tau)} = \sqrt{5\sin^2(\tau)+4\cdot\left(\sin^2(\tau)+\cos^2(\tau)\right)}$$

$$= \sqrt{5\sin^2(\tau)+4}.$$

$\vec{T}(t)$:

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5\sin^2(\tau)+4}}\begin{bmatrix} -3\sin(\tau) \\ 2\cos(\tau) \end{bmatrix}}}$$



4. Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor
Differenzieren Sie die gegebenen Kurven zweimal nach t, um den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor zu bestimmen.

a) $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ e^t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ b) $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \\ t \end{pmatrix}$

a)

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} 2\cdot\cos(2t) \\ e^t \\ -2\cdot\sin(2t) \end{pmatrix}; \qquad \ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -4\cdot\sin(2t) \\ e^t \\ -4\cdot\cos(2t) \end{pmatrix}$$

b)

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t}\cdot\cos t - \sin t\cdot e^{-t} \\ -e^{-t}\cdot\sin t + \cos t\cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sin t + \cos t)\cdot e^{-t} \\ -(\sin t - \cos t)\cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -(\cos t - \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ -(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Ableitungen von Skalar- und Vektorprodukten

Gegeben seien die folgenden parameterabhängigen Vektoren:

$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ t \end{pmatrix}.$

Bestimmen Sie die 1. Ableitung der folgenden Skalar- und Vektorprodukte mit Hilfe der entsprechenden Produktregel:

a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ b) $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ c) $\vec{a} \times \vec{b}$ d) $\vec{a} \times \vec{c}$

a)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos t \\ 2 \cdot \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 2t \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \cos t + 4t \cdot \sin t + 3t^4 - 2t \cdot \sin t + 2t^2 \cdot \cos t + 2t^4 =$$

$$= 5t^4 + 2t \cdot \sin t + 2(1 + t^2) \cdot \cos t$$

b)

$$\frac{d}{dt}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \dot{\vec{b}} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{c}} = 3t^2 - 4 \cdot e^{-t} \cdot \sin t$$

c)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{b} + \vec{a} \times \dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos t \\ 2 \cdot \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 2t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2t^3 - 6t^2 \cdot \sin t \\ 6t^2 \cdot \cos t - t^2 \\ 2 \cdot \sin t - 4t \cdot \cos t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2t^3 - 2t^3 \cdot \cos t \\ -2t^3 \cdot \sin t - 2t^2 \\ 2t \cdot \cos t + 2t^2 \cdot \sin t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4t^3 - 6t^2 \cdot \sin t - 2t^3 \cdot \cos t \\ -3t^2 - 2t^3 \cdot \sin t + 6t^2 \cdot \cos t \\ 2(1 + t^2) \cdot \sin t - 2t \cdot \cos t \end{pmatrix}$$

d)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \times \vec{c}) = \dot{\vec{a}} \times \vec{c} + \vec{a} \times \dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix} 3t^2 + (t^3 - 3t^2) \cdot e^{-t} \\ -2t - (t^3 - 3t^2) \cdot e^{-t} \\ (1 - 3t + t^2) \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

6. Bogenlänge

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen.

a) $\vec{\gamma}: [0, a] \to \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}(t) = t\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 1\end{pmatrix}$.

b) $\vec{\gamma}: [0,4\pi] \to \mathbb{R}^3, \overrightarrow{\gamma}(t) = \begin{pmatrix}-t\cos t + \sin t\\ \cos t + \mathrm{t}\sin t\\ \frac{t^2}{4}\end{pmatrix}$

a)

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\\ 1\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos t - t\cdot\sin t\\ \sin t + t\cdot\cos t\\ 1\end{pmatrix}$$

Bogenlänge:

$$s(\vec{\gamma}) = \int_0^a |\dot{\vec{\gamma}}(t)|\,dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{(\cos t - t\sin t)^2 + (\sin t + t\cdot\cos t)^2 + 1}\,dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{\cos^2 t \cancel{-2t\sin t\cos t} + t^2\sin^2 t + \sin^2 t + \cancel{2t\sin t\cos t} + t^2\cos t + 1}\quad dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{\underbrace{\cos^2 t + \sin^2 t}_{=1} + t^2(\underbrace{\sin^2 t + \cos^2 t}_{=1}) + 1}\quad dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{2 + t^2}\quad dt = \int_0^a \sqrt{2(1 + \tfrac{1}{2}t^2)}\quad dt$$

$$= \int_0^a \sqrt{2}\cdot\sqrt{1 + \frac{t^2}{2}}\quad dt$$

Substitution: $t = \sqrt{2}x$ $\qquad \frac{dt}{dx} = \sqrt{2}$

$$= \int_0^{a/\sqrt{2}} \sqrt{2}\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot\sqrt{2}\,dx$$

$$= 2\cdot\frac{1}{2}\left[x\cdot\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh} x\right]_0^{a/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1+\frac{1}{2}a^2} + \operatorname{arsinh}\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$$

b)

$$\vec{\dot{y}}(t) = \begin{pmatrix} -\cos t + t\cdot\sin t + \cos t \\ -\sin t + \sin t + t\cdot\cos t \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cdot\sin t \\ t\cdot\cos t \\ \frac{1}{2}t \end{pmatrix}$$

$$s(\vec{y}(t)) = \int_0^{4\pi} \sqrt{t^2\cdot\sin^2 t + t^2\cos^2 t + \frac{1}{4}t^2}\, dt$$

$$= \int_0^{4\pi} \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}t^2}\, dt = \int_0^{4\pi} t\cdot\frac{1}{2}\sqrt{5}\, dt$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{5}\cdot\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{4\pi} = \frac{1}{4}\sqrt{5}\cdot 16\pi^2$$

$$= 4\cdot\sqrt{5}\,\pi^2$$

7. Vektorfelder

Skizzieren Sie jeweils die gegebenen Vektorfelder.

a) $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}25 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

c) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ d) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

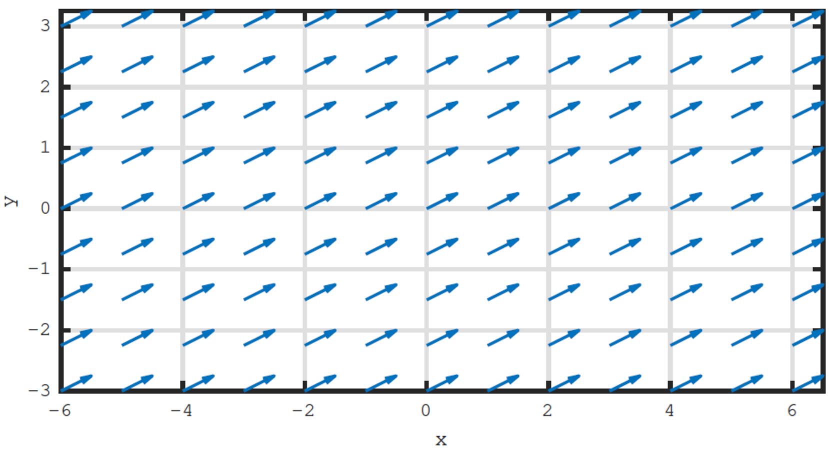
e) Plotten Sie das Vektorfeld aus a) – d) mit Python/Numpy.

a)

Dies ist ein homogenes Vektorfeld, da sich die Länge und Richtung des Vektors nicht ändern und somit unabhängig von x und y sind.

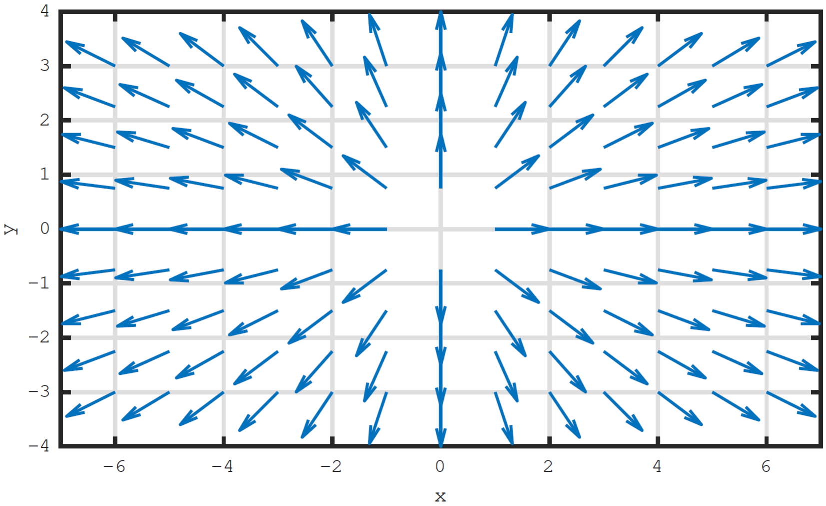
$$v(x;y) = \sqrt{0.5^2 + 0.25^2} \approx 0.6$$

$$m(x;y) = \frac{0.25}{0.5} = 0.5\,.$$



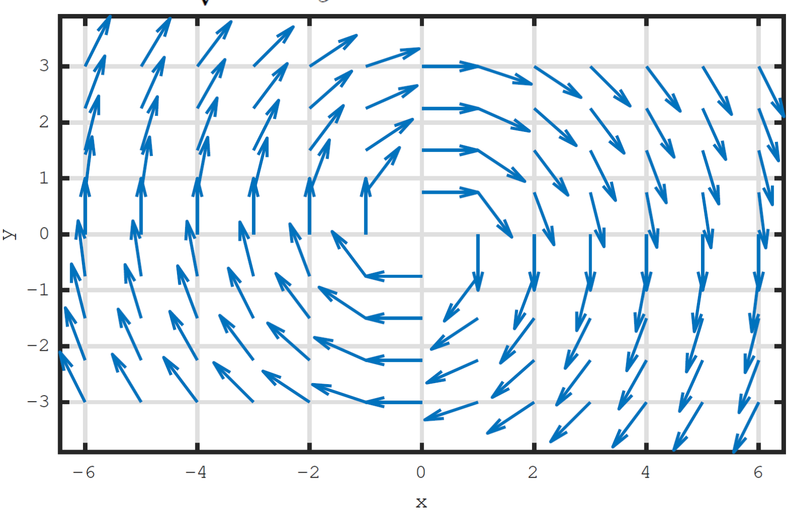
b)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 1$$



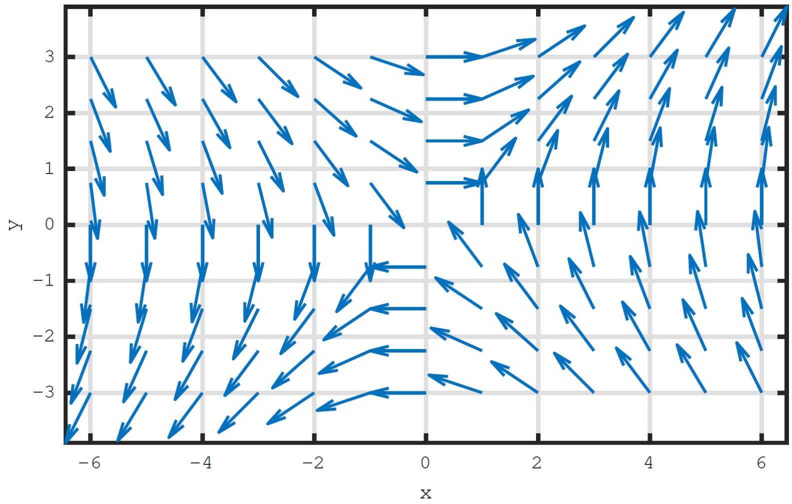
c)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{y^2+(-x)^2} = 1$$



d)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{y^2+x^2} = 1$$



e)
Code für b) (a), c), d) analog):

```
# Python initialisieren
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter
x_0=-6; x_E=6; y_0=-3; y_E=3; #Intervalle auf x- und y-Achse
festlegen
N_x=13; N_y=9; #Anzahl Intervalle auf x- und y-Achse
sc=16; # für Skalierung beim Quiverplot (findet umgekehrt
statt 1/sc)
lw=0.005; # Linienstärke
fig=1;
# Funktionen
def v(x,y):                          # Vektorfeld definieren
        v_x=x/((x**2+y**2)**0.5);
        v_y=y/((x**2+y**2)**0.5);
        return v_x,v_y;
# Daten
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x); # Generieren von Punkten auf
x-Achse
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y); # Generieren von Punkten auf
y-Achse
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data); # Generieren von
Punktepaaren (x,y)
[v_x_grid,v_y_grid]=v(x_grid,y_grid); # Vektoren für die
jeweiligen (x,y) bestimmen
# Plot
pl.figure(fig);
pl.quiver(x_grid,y_grid,v_x_grid,v_y_grid,scale=sc,width=lw);
# Plot eines Vektorfeldes
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y'); # x- und y-Achsenbeschriftung
pl.grid('on'); # Gitter wird angezeigt
pl.axis('image'); # Achse wird entsprechend dem Datenlimit
skaliert
```

8. Kurvenintegrale

Bestimmen Sie die folgenden skalaren bzw. vektoriellen Kurvenintegrale:

a) $\vec{\gamma}: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, f(x,y,z) = x^2 + yz.$

b) $\vec{\gamma}$ ist die Verbindungsstrecke von (0;0) nach (1;1) und $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \\ e^x \end{pmatrix}$.

a)

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\dot{\vec{\gamma}}(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2}$$

$$f(\vec{\gamma}(t)) = \cos^2 t + t \cdot \sin t$$

$$\int_\gamma f(\vec{\gamma}(t) \cdot |\dot{\vec{\gamma}}(t)|)\, dt = \int_0^{2\pi} (\cos^2 t + t \cdot \sin t)\sqrt{2}\, dt$$

$\int \cos^2 t\, dt$ & $\int t \cdot \sin t\, dt$ mittels partieller Integration lösen:

- $$\int \cos^2 t\, dt = \int \underset{\uparrow}{\cos t} \cdot \underset{\downarrow}{\cos t}\, dt = \sin t \cdot \cos t - \int \sin t \cdot (-\sin t)\, dt$$

$$= \sin t \cdot \cos t + \int \underbrace{\sin^2 t}_{1-\cos^2 t}\, dt = \sin t \cdot \cos t + \int 1\, dt - \int \cos^2 t\, dt$$

$$\Rightarrow 2\int \cos^2 t\, dt = \sin t \cdot \cos t + \int 1\, dt$$

$$= \sin t \cdot \cos t + t$$

$$\int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2} \cdot \sin t \cdot \cos t + \frac{1}{2} t$$

- $$\int \underset{\downarrow}{t} \cdot \underset{\uparrow}{\sin t}\, dt = t \cdot (-\cos t) - \int 1 \cdot (-\cos t)\, dt$$

$$= -t \cdot \cos t + \int \cos t\, dt$$

$$= -t \cdot \cos t + \sin t$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\vec{\gamma}(t)) \cdot |\dot{\vec{\gamma}}(t)| \, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}(\cos^2 t + t \cdot \sin t) \, dt$$

$$= \sqrt{2}\left[\frac{1}{2} \cdot \sin t \cdot \cos t + \frac{1}{2} t + \sin t - t \cdot \cos t\right]_0^{2\pi}$$

$$= \sqrt{2} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 2\pi - 2\pi - (0)\right] = -\sqrt{2}\,\pi$$

b)

Parametrisierung $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \quad t \in [0;1]$

$$\dot{\vec{\gamma}}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v}(\vec{\gamma}(t)) = \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$\langle \vec{v}(\vec{\gamma}(t)), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} 2t \\ e^t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = 2t + e^t$$

$$\int_\gamma \langle \vec{v}(\vec{\gamma}(t)), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle \, dt = \int_0^1 (2t + e^t) \, dt$$

$$= \left[t^2 + e^t\right]_0^1 = 1 + e - 1 = e$$

9. Kurvenintegrale II

Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\vec{w}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch
$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x + y^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie sowohl für $\vec{v}$ als auch für $\vec{w}$ jeweils das Kurvenintegral von $A = (0;1)$ nach $B = (1;2)$

a) längs der Verbindungsgeraden
b) längs des Streckenzugs bestehend aus den Strecken von A nach $(1;1)$ und von $(1;1)$ nach B,
c) längs der Parabel $y = x^2 + 1$.

a) $\vec{\gamma}_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1+t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0;1] \quad$ $\dot{\vec{\gamma}}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{\gamma}_{21}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0;1] \quad$ $\dot{\vec{\gamma}}_{21}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{\gamma}_{22}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0;1] \quad$ $\dot{\vec{\gamma}}_{22}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{\gamma}_3(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2+1 \end{pmatrix}$ $\quad t \in [0;1] \quad$ $\dot{\vec{\gamma}}_3(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$

betrachte $\vec{v} = \begin{pmatrix} x^2-y \\ x+y^2 \end{pmatrix}$

a) $$\int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} t^2-1-t \\ t+(1+t)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (t^2-1-t+t+t^2+2t+1)\, dt$$

$$= \int_0^1 (2t^2+2t)\, dt = \left[\frac{2}{3}t^3 + t^2\right]_0^1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3}$$

b) $$\int_{\gamma_{21}} \left\langle \begin{pmatrix} t^2-1 \\ t+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (t^2-1)\, dt$$

$$= \left[\frac{1}{3}t^3 - t\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$$

$$\int_{\gamma_{22}} \left\langle \begin{pmatrix} 1-1-t \\ 1+(1+t)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (1+1+2t+t^2)\, dt$$

$$= \left[2t + t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_0^1 = 2 + 1 + \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$$

$$\int_{\gamma_{21}} \ldots + \int_{\gamma_{22}} \ldots = -\frac{2}{3} + \frac{10}{3} = \frac{8}{3}$$

c) $\int_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} t^2 - t^2 - 1 \\ t + (t^2+1)^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt$

$= \int_0^1 \left(-1 + 2t(t + t^4 + 2t^2 + 1) \right) dt$

$= \int_0^1 (-1 + 2t^2 + 2t^5 + 4t^3 + 2t) \, dt$

$= \left[-t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{3}t^6 + t^4 + t^2 \right]_0^1$

$= -1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{3} + 1 + 1 = 2$

betrachte $\vec{w} = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$

a) $\int_{\gamma_1} \left\langle \begin{pmatrix} t + (1+t)^2 \\ 2t(1+t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt$

$= \int_0^1 (t + 1 + 2t + t^2 + 2t + 2t^2) \, dt = \int_0^1 (3t^2 + 5t + 1) \, dt$

$= \left[t^3 + \frac{5}{2}t^2 + t \right]_0^1 = 1 + \frac{5}{2} + 1 = \frac{9}{2}$

b) $\int_{\gamma_{21}} \left\langle \begin{pmatrix} t+1 \\ 2t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (t+1) \, dt$

$= \left[\frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$

$\int_{\gamma_{22}} \left\langle \begin{pmatrix} 1 + (1+t)^2 \\ 2 \cdot 1 \cdot (1+t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle dt = \int_0^1 (2 + 2t) \, dt$

$= \left[2t + t^2 \right]_0^1 = 2 + 1 = 3$

$\int_{\gamma_{21}} \ldots + \int_{\gamma_{22}} \ldots = \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$

c) $\int\limits_{\gamma_3} \left\langle \begin{pmatrix} t+(t^2+1)^2 \\ 2t(t^2+1) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle dt$

$= \int_0^1 (t + t^4 + 2t^2 + 1 + (2t^3 + 2t)\cdot 2t)\, dt$

$= \int_0^1 (t^4 + 2t^2 + t + 1 + 4t^4 + 4t^2)\, dt$

$= \int_0^1 (5t^4 + 6t^2 + t + 1)\, dt = \left[t^5 + 2t^3 + \frac{1}{2}t^2 + t \right]_0^1$

$= 1 + 2 + \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{2}$

$\longrightarrow \int\limits_{\gamma} \langle \vec{w}, d\vec{s} \rangle$ hängt nicht vom Weg sondern nur von Anfangs- und Endpunkt ab; das Integral ist wegunabhängig