

Übungsblatt Ana 2

Computational and Data Science
FS2025

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, Substitution und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Methode der Substitution anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale zu berechnen.
- Sie können bestimmte Integrale näherungsweise auf eine vorgegebene Anzahl Dezimalstellen mit Python/Numpy berechnen.

1. Aussagen über Integrale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: existiert zu f eine Stammfunktion, so ist diese eindeutig.		
b) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\int f(x)dx + \int g(x)dx = \int (f(x) + g(x))dx$.		
c) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\int f(x)dx \cdot \int g(x)dx = \int (f(x) \cdot g(x))dx$.		
d) Für die integrierbaren Funktionen $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $\int_a^b f(x)g(x)dx = c \int_a^b g(x)dx$.		
e) Für die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $\int_a^b f(x)dx = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$.		
f) Für die integrierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: $a < b \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(x) dx$.		

2. Aussagen über die Methode der Substitution

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Methode Substitution basiert auf der Kettenregel der Differentialrechnung.		
b) Mit Hilfe der Methode der Substitution kann jede Verschachtelung von zwei Funktionen problemlos integriert werden.		
c) Die Methode der Substitution eignet sich zur Integration von Produkten der Form $x \cdot f(x^2)$.		
d) Es gilt: $\int_1^2 \sin(2x) dx = 1/2 \int_1^2 \sin u du$.		
e) Es gilt: $\int_1^2 \sin(2x) dx = \int_2^4 \sin u du$.		

3. Stammfunktionen durch Methode der Substitution bestimmen

Bestimmen Sie die unbestimmten Integrale mit der Methode der Substitution.

- | | |
|----------------------------|--------------------------------|
| a) $\int \sqrt{5-x} dx$ | b) $\int \sqrt{5x+12} dx$ |
| c) $\int e^{4x+2} dx$ | d) $\int x(x^2-1)^3 dx$ |
| e) $\int \sqrt[3]{1-x} dx$ | f) $\int x \cdot \cos(x^2) dx$ |
| g) $\int \sin x \cos x dx$ | h) $\int \sinh x \cosh x dx$ |
| i) $\int \tan x dx$ | j) $\int \cot x dx$ |
| k) $\int \tanh x dx$ | l) $\int \coth x dx$ |

4. Bestimmte Integrale mit der Methode der Substitution berechnen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit der Methode der Substitution.

- | | |
|---|------------------------------------|
| a) $\int_3^5 \frac{x}{x^2-4} dx$ | b) $\int_0^2 \frac{4x}{2x^2+9} dx$ |
| c) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{25-x^2}} dx$ | d) $\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2} dx$ |
| e) $\int_0^{\pi/2} \cos(2x + \frac{\pi}{3}) dx$ | f) $\int_0^{10} 5xe^{-x^2} dx$ |

5. Integrale mit Python/Numpy berechnen

Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit dem Befehl trapz in Python/Numpy.

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $\int_0^\pi \sin x dx$ | b) $\int_2^5 \frac{1+x}{1-x} dx$ |
| c) $\int_{-2}^0 3^x dx$ | d) $\int_2^{100} \frac{\sin x}{1+3x} dx$ |
| e) $\int_{0,01}^1 \log_2 x dx$ | f) $\int_2^3 \log_x 10 dx$ |

6. Trapezformel

Berechnen Sie das Integral $\int_1^2 \frac{1-e^{-x}}{x} dx$ näherungsweise unter Zuhilfenahme der Trapezformel für jeweils 10 (einfache) Streifen (Endergebnis auf 4 Nachkommastellen).