Allgemein

Linearität

$$f(x) \cdot a = f(x \cdot a) \qquad \forall a \in \mathbf{R}, \forall x \in \mathbf{R}^n \tag{1}$$

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \qquad V_{x,y} \in \mathbf{R}^n \tag{2}$$

Lineares Beispiel: $f(x) = 3x$ mit $a = 3,\ x = 2,\ y = 5$

1. Homogenitätstest: $f(2 \cdot 3) \stackrel{?}{=} 3 \cdot f(2)$

   $f(6) = 6 \cdot 3 = 18$ vs. $3 \cdot 3 \cdot 2 = 3 \cdot 6 = 18 \quad \Rightarrow 18 = 18\ (\checkmark)$

2. Additivitätstest: $f(2) + f(5) \stackrel{?}{=} f(2 + 5)$

   $(3 \cdot 2) + (3 \cdot 5) = 6 + 15 = 21$ vs. $3 \cdot 7 = 21 \quad \Rightarrow 21 = 21\ (\checkmark)$

Gegenbeispiel: $f(x) = x^2$ mit $a = 2,\ x = 3,\ y = 4$

1. Homogenitätstest: $f(3 \cdot 2) \stackrel{?}{=} 2 \cdot f(3)$

   $f(6) = 6^2 = 36 \quad vs. \quad 2 \cdot 3^2 = 18 \quad \Rightarrow 36 \neq 18\ (\times)$

2. Additivitätstest: $f(3) + f(4) \stackrel{?}{=} f(3 + 4)$

   $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \quad vs. \quad 7^2 = 49 \quad \Rightarrow 25 \neq 49\ (\times)$

Injektiv

Surjektiv

Bijektiv

Analysis

Polynome

Hornerschema

Polynomial example: $p(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$ evaluated at $x = 1$

	2	3	4	5
1	·	2 ↘	5 ↘	9 ↘
	2	5	9	$\boxed{14}$

Where factors are calculated as:

$2 \times 1 + 3 = 5$

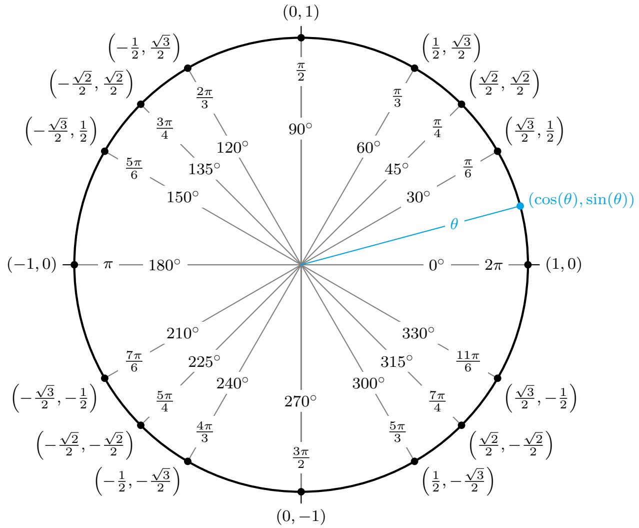
$5 \times 1 + 4 = 9$

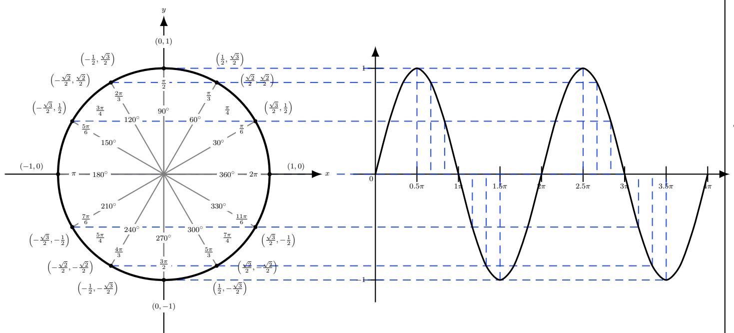
$9 \times 1 + 5 = 14$

Nusstellen erraten

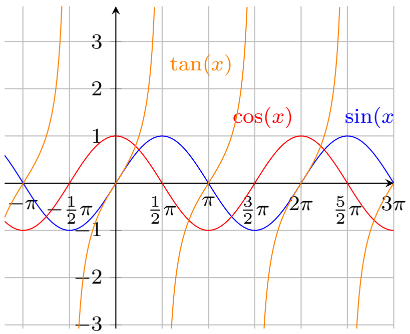
Trigonometrie

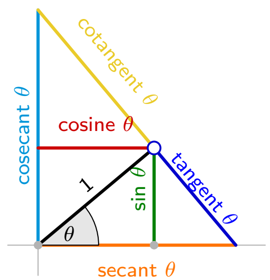
Einheitskreis





Sin	Cos	Tan	Cot
G	A	G	A
H	H	A	G





Integrale

Integrationsgrenzen tauschen

Satz von Fubini

Substitution

Normale Substitution

$$\int_a^b f(g(x))dx \quad | \quad u(x) = g(x) \quad | \quad u'(x) = g'(x) \quad | \quad du = u'(x) \cdot dx$$

$$\int_{u(a)}^{u(b)} u(x) \frac{1}{u'(x)}\, du \quad | \quad dx = \frac{1}{u'(x)}\, du \tag{3}$$

Wenn nach einer Substitution noch ein x in der Gleichung vorhanden ist, muss dieses in ein u umgewandelt werden.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^2}\, dx \quad | \quad u = 1 + e^x \quad | \quad u' = e^x \quad | \quad du = e^x\, dx \Leftrightarrow du = \frac{1}{e^x}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{u} \cdot \frac{1}{e^x}\, du = \int \frac{e^x}{u}\, du \quad | \quad u = 1 + e^x \Leftrightarrow e^x = u - 1$$

$$\int \frac{u-1}{u}\, du = \int \frac{u}{u} - \frac{1}{u}\, du = \int 1 - \frac{1}{u}\, du = \underline{\underline{u - \ln|u| + c}}$$

Umgekehrte Substitution (Example)

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx \quad | \quad x = \sin u \quad | \quad x' = \cos u$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 u} \cdot \cos u\, du \quad | \quad dx = \cos u\, du \Leftrightarrow du = \frac{1}{\cos u}\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\, du \quad = \quad \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

Standardintegrale

Standard

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln x} + c \qquad \int e^x\,dx = e^x \tag{4}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c \quad n \neq -1 \tag{5}$$

$$\int x^{-1}\,dx = \int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \tag{6}$$

Sinus

$$\int \sin x \cdot \cos x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x + c \tag{7}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + c \tag{8}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c \tag{9}$$

Cosinus

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int 1 + \tan^2 x = \tan x + c \tag{10}$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c \tag{11}$$

$$\int \cot x\,dx = \frac{1}{\tan x} + c = \ln|\sin x| + c = \frac{\cos x}{\sin x} + c \tag{12}$$

$$\int \coth x\,dx = \frac{\cosh x}{\sinh x} + c \tag{13}$$

Tangents

$$\int \tan x\,dx = \frac{1}{\cot x} + c = -\ln|\cos x| + c = \frac{\sin x}{\cos x} + c \tag{14}$$

$$\int \tanh x\,dx = \frac{\sinh x}{\cosh x} + c \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x \tag{16}$$

Add these derrivatives somewhere usefull

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x \tag{17}$$

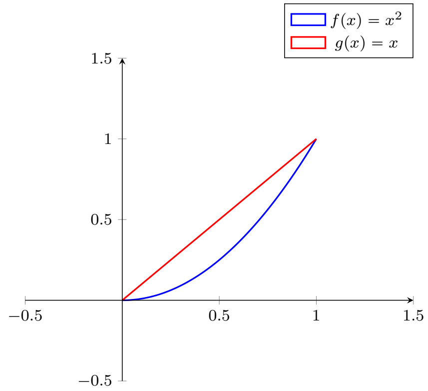
$$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x \tag{18}$$

Integralfläche berechnen (analytisch)

Sobald sich Funktionen schneiden, muss das Integral aufgeteilt werden. Wenn die Fläche über/unter der X-Achse berechnet werden soll, kann diese als Funktion $g(x) = 0$ angesehen werden.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \tag{19}$$

Scale Plot and make a better example



Anleitung

1. Funktionen gleich setzen, um Nullstellen zu berechnen
2. Integrale bilden
3. Berechnen

Trapezformel (Numerisch)

$S_1 = y_1 + y_n \qquad S_2 = y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot S_1 + h \cdot S_2 \tag{20}$$

1. Stützstellen bestimmen und ausrechnen
2. Mit Taschenrechner alle Stützstellen mittels Formel 20 zusammenrechnen

Partialle Integration

Formel

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \cdot f^k(x) \cdot g^{-1-k}(x) + (-1)^n \int f^n(x) \cdot g^{-n}(x)\,dx \tag{21}$$

$$\int f(x) \cdot g(x)\,dx = F(x) \cdot g(x) - \int F(x) \cdot g(x)\,dx \tag{22}$$

Vorzeichen	Differenzieren	Integrieren
+	f	g
-	f^1	g^{-1}
+	f^2	g^{-2}
$\pm$	$\vdots$	$\vdots$
$(-1)^{n-1}$	f^{n-1}	g^{-n+1}
$(-1)^n$	f^n	g^{-n}

Volumenintegral berechnen

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2\,dx \tag{23}$$

Anleitung

1. Rotation um Y-Achse → Umkehrfunktion bestimmen
2. Mit der Formel 23 das Volumen berechnen

Komplexe Zahlen

Imaginäre Zahlen

Konjugierte

Multiplikation

Division

Koordinaten

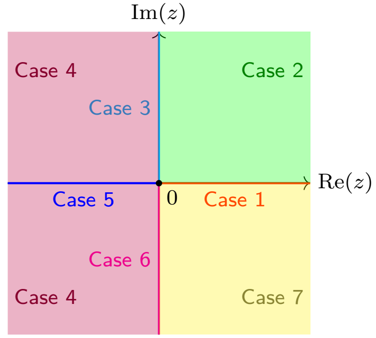
Kartesische Koordinaten
Ein System, das Punkte durch (x, y) beschreibt
Polarkoordinaten
Punkte werden durch den Abstand r und den Winkel φ dargestellt: (r, φ)
Polarkoordinaten - Komplexe Representation
$\operatorname{cis}\varphi = \cos\varphi \cdot i \cdot \sin\varphi$
Komplexe Zahlen: $z = r \cdot \operatorname{cis}\varphi$
Exponential Koordinaten
Verwendung der Euler'schen Formel: $z = re^{i\varphi}$

$$x = r \cdot \cos\phi \quad | \quad y = r \cdot \sin\phi \tag{24}$$

$$\varphi = \arctan\frac{x}{y} \tag{25}$$

$$z = re^{i\varphi} = x + iy = r \cdot \operatorname{cis}\varphi \tag{26}$$

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } \operatorname{Re}(z) \geqslant 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 & | \quad \text{CASE 1} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) & \text{if } \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0 & | \quad \text{CASE 2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0 & | \quad \text{CASE 3} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) < 0 & | \quad \text{CASE 4} \\ \pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 & | \quad \text{CASE 5} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{if } \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0 & | \quad \text{CASE 6} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + 2\pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0 & | \quad \text{CASE 7} \end{cases}$$



Koordinaten Wechsel

Kartesisch ⇒ Polar

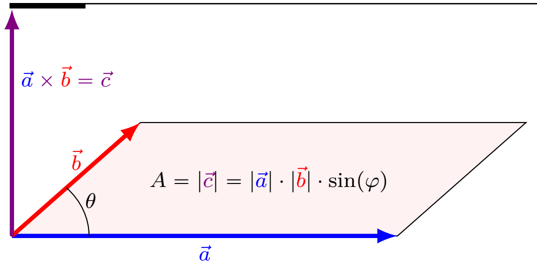
$$z = |\operatorname{Re}\{z\} + \operatorname{Im}\{z\}| \cdot \operatorname{cis}(\arg(z)) \tag{27}$$

1. Betrag von $|\mathrm{Re}\{z\} + \mathrm{Im}\{z\}|$ berechnen mittels $\sqrt{\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z}$
2. Bestimmen in welchem Quadrant die Zahl liegt
3. Taschenrechner mit RAD Modus $\frac{\text{CASE}}{\pi} \Rightarrow$ Winkel in $\pi = \varphi$
4. $|z| \cdot \mathrm{cis}\,\varphi$

Polar ⇒ Kartesisch

Lineare Algebra

Vektoranalysis



Nabla Operator

Tangentialebene

$$z = f(x_0; y_0) + \nabla f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + \nabla f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) \tag{28}$$

- Faktorisieren
- Additionsverfahren
- Umstellen und Einsetzen

Beispiel

$f(x, y) = x^3 + x^2 \cdot \ln y^2 + 1 - 3x$

$$\nabla f(x, y) = \begin{matrix} 3x^2 - 2x \cdot \ln y^2 + 1 - 3 \\ -\frac{2x^2 y}{y^2+1} \end{matrix}$$

$f(3; 1) = 27 - 9 \cdot \ln 2 - 9 = 18 - 9 \cdot \ln 2$

$\nabla f_x(3; 1) = 27 - 6 \ln 2 - 3 = 24 - 6 \ln 2$

$\nabla f_y(3; 1) = -9$

$-45 + 9 \ln 2 - 6x \ln 2 + 24x - 9y$

Totales Differential

Hessematrix

Extremwertstellen

Matrizen

Standardmatrizen

Determinante

2x2 Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot d) - (c \cdot b) \tag{29}$$

3x3 Matrizen

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{matrix} (a \cdot e \cdot i) + (b \cdot f \cdot g) + (c \cdot d \cdot h) \\ -(g \cdot e \cdot c) - (h \cdot f \cdot a) - (i \cdot d \cdot b) \end{matrix} \tag{30}$$

4x4 Matrizen / nxn Matrix

$$\begin{pmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} & d^{-} \\ e^{-} & f^{+} & g^{-} & h^{+} \\ i^{+} & j^{-} & k^{+} & l^{-} \\ m^{-} & n^{+} & o^{-} & p^{+} \end{pmatrix} = A$$

test

1. Spalte/Reihe mit den meisten Nullen auswählen
2. Die Vorfaktoren der Spalten/Reihenwerte mit der Vorzeichenmatrix (+, -) bestimmen
3. test

Inverse berechnen mittels Adjunkter Matrix

1. Determinante berechnen

Eigenwerte

Spur

Alle Einträge der Matrix auf der Diagonalen summiert. Aussagefähigkeit:

- $trace(A) = \sum_0^n \lambda_n$