

Übungsblatt 9 Ana

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe partielle Ableitung, Tangentialebene, Gradient, totales Differential, Satz von Schwarz und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die partiellen Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen berechnen.
- Sie können die Tangentialebene in einem Punkt an ein Skalarfeld bestimmen.
- Sie können den Gradienten und das totale Differential von Skalarfeldern bestimmen.

1. Aussagen über partielle Ableitungen

Gegeben sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Unter einer partiellen Ableitung von f versteht man die Ableitung nach einer der n Variablen, wobei die anderen Variablen wie Konstanten betrachtet werden.	X	
b) Die partiellen Ableitungen können mit Hilfe des Differenzquotienten bestimmt werden.	X	
c) Die Rechenregeln für Ableitungen von einer Funktion in einer Variablen gelten auch für partielle Ableitungen von Funktionen in mehreren Variablen.	X	
d) Jede in einem Punkt P differenzierbare Funktion f ist dort partiell differenzierbar.	X	
e) Aus der Existenz von $\text{grad}(f(\vec{x}))$ folgt: die Tangentialebene an f ist in \vec{x} berechenbar.	X	

2. Ableitungswerte von Funktionen in zwei Variablen

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen die partiellen Ableitungen allgemein und an den gegebenen Stellen (x_0, y_0) .

a) $f(x, y) = \sqrt{2x + 3xy + 4y}, (x_0, y_0) = (1; 1)$

b) $f(x, y) = \cos(e^{xy} + xy), (x_0, y_0) = (0; 1)$

c) $f(x, y) = x^{2y}, (x_0, y_0) = (2; 1)$

Bestimmen Sie für die nachfolgenden Funktionen die partiellen Ableitungen.

d) $z = f(x, y) = (2x - 3y^2)^5$

e) $z = f(x, y) = (x^3 - y^2) \cdot \cosh(xy)$

f) $z = f(x, y) = \ln(2x + e^{3y})$

a)

Mit der Kettenregel ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x, y) = \frac{2 + 3y}{2\sqrt{2x + 3xy + 4y}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 3xy + 4y}} + \frac{3}{2} \frac{y}{\sqrt{2x + 3xy + 4y}},$$

$$f_y(x, y) = \frac{3x + 4}{2\sqrt{2x + 3xy + 4y}} = \frac{3}{2} \frac{x}{\sqrt{2x + 3xy + 4y}} + \frac{2}{\sqrt{2x + 3xy + 4y}}.$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(1, 1) = \frac{5}{6} \quad \text{und} \quad f_y(1, 1) = \frac{7}{6}.$$

b)

Ebenfalls aus der Kettenregel ergeben sich die partiellen Ableitungen:

$$f_x(x, y) = -\sin(e^{xy} + xy)(ye^{xy} + y),$$

$$f_y(x, y) = -\sin(e^{xy} + xy)(xe^{xy} + x).$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(0, 1) = -2\sin(1) \quad \text{und} \quad f_y(0, 1) = 0.$$

c)

Hier verwenden wir $f(x, y) = e^{2y \ln x}$ und erhalten

$$f_x(x, y) = 2y \cdot x^{2y-1},$$

$$f_y(x, y) = 2 \ln x \cdot e^{2y \ln x} = 2 \ln x \cdot x^{2y}.$$

Daraus resultieren die Werte

$$f_x(2, 1) = 4 \quad \text{und} \quad f_y(2, 1) = 8 \ln 2.$$

d)

Differenziert wird mit Hilfe der Kettenregel:

$$z = \underbrace{(2x - 3y^2)}_u^5 = u^5 \quad \text{mit} \quad u = 2x - 3y^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -6y$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 5u^4 \cdot 2 = 10u^4 = 10(2x - 3y^2)^4$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 5u^4 \cdot (-6y) = -30yu^4 = -30y(2x - 3y^2)^4$$

e)

Differenziert wird jeweils nach der *Produktregel*, wobei die (partiellen) Ableitungen des Faktors $\cosh(xy)$ mit Hilfe der *Kettenregel* gebildet werden:

$$z = \underbrace{(x^3 - y^2)}_u \cdot \underbrace{\cosh(xy)}_v = uv \quad \text{mit} \quad u = x^3 - y^2 \quad \text{und} \quad v = \cosh \underbrace{(xy)}_t = \cosh t \quad \text{mit} \quad t = xy$$

$$u_x = 3x^2, \quad u_y = -2y \quad \text{und} \quad v_x = (\sinh t) \cdot y = y \cdot \sinh(xy), \quad v_y = (\sinh t) \cdot x = x \cdot \sinh(xy)$$

$$\begin{aligned} z_x &= u_x v + v_x u = 3x^2 \cdot \cosh(xy) + y \cdot \sinh(xy) \cdot (x^3 - y^2) = \\ &= 3x^2 \cdot \cosh(xy) + (x^3 y - y^3) \cdot \sinh(xy) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_y &= u_y v + v_y u = -2y \cdot \cosh(xy) + x \cdot \sinh(xy) \cdot (x^3 - y^2) = \\ &= -2y \cdot \cosh(xy) + (x^4 - xy^2) \cdot \sinh(xy) \end{aligned}$$

f)

Wir benötigen jeweils die *Kettenregel*:

$$z = \ln \underbrace{(2x + e^{3y})}_u = \ln u \quad \text{mit} \quad u = 2x + e^{3y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3 \cdot e^{3y}$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u} = \frac{2}{2x + e^{3y}}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 3 \cdot e^{3y} = \frac{3 \cdot e^{3y}}{u} = \frac{3 \cdot e^{3y}}{2x + e^{3y}}$$

3. Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen 1. und 2. Ordnung.

a) $z = f(x, y) = x \cdot e^y - y \cdot e^x$

b) $z = f(x, y) = \ln(2y - x^2)$

c) $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 - 2xy}$.

a)

Alle Ableitungen erhält man durch *elementare* gliedweise (partielle) Differentiation.

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

$$z_x = \frac{\partial}{\partial x} [x \cdot e^y - y \cdot e^x] = 1 \cdot e^y - y \cdot e^x = e^y - y \cdot e^x$$

$$z_y = \frac{\partial}{\partial y} [x \cdot e^y - y \cdot e^x] = x \cdot e^y - 1 \cdot e^x = x \cdot e^y - e^x$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

$$z_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} z_x = \frac{\partial}{\partial x} [e^y - y \cdot e^x] = 0 - y \cdot e^x = -y \cdot e^x$$

$$\left. \begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} z_x = \frac{\partial}{\partial y} [e^y - y \cdot e^x] = e^y - 1 \cdot e^x = e^y - e^x \\ z_{yx} &= \frac{\partial}{\partial x} z_y = \frac{\partial}{\partial x} [x \cdot e^y - e^x] = 1 \cdot e^y - e^x = e^y - e^x \end{aligned} \right\} \Rightarrow z_{xy} = z_{yx}$$

$$z_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} z_y = \frac{\partial}{\partial y} [x \cdot e^y - e^x] = x \cdot e^y - 0 = x \cdot e^y$$

b)

Partielle Ableitungen 1. Ordnung

Wir verwenden wie folgt die *Kettenregel*:

$$z = \ln \underbrace{(2y - x^2)}_u = \ln u \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{u} \cdot (-2x) = \frac{-2x}{u} = \frac{-2x}{2y - x^2}$$

$$z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{u} \cdot 2 = \frac{2}{u} = \frac{2}{2y - x^2}$$

Partielle Ableitungen 2. Ordnung

z_{xx} erhalten wir, indem wir z_x mit Hilfe der *Quotientenregel* partiell nach x differenzieren:

$$z_x = \frac{-2x}{2y - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = -2x, \quad v = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad u_x = -2, \quad v_x = -2x$$

$$z_{xx} = \frac{\partial z_x}{\partial x} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{-2(2y - x^2) - (-2x)(-2x)}{(2y - x^2)^2} = \frac{-4y + 2x^2 - 4x^2}{(2y - x^2)^2} = \frac{-2x^2 - 4y}{(2y - x^2)^2}$$

z_{xy} erhält man aus z_x durch partielles Differenzieren nach y . Wir benötigen die *Kettenregel*:

$$z_x = \frac{-2x}{2y - x^2} = -2x \underbrace{(2y - x^2)^{-1}}_u = -2x \cdot u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_{xy} = \frac{\partial z_x}{\partial y} = \frac{\partial z_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = -2x(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2 = 4x \cdot u^{-2} = \frac{4x}{u^2} = \frac{4x}{(2y - x^2)^2}$$

Alternative: Sie differenzieren nach der *Quotientenregel*, wobei der Zähler eine *konstante*, d. h. von der Variablen y *unabhängige* Funktion ist.

z_{yx} erhalten wir, indem wir z_y mit Hilfe der *Quotienten-* oder *Kettenregel* partiell nach x differenzieren. Wir wollen an dieser Stelle die *Quotientenregel* verwenden:

$$z_y = \frac{2}{2y - x^2} = \frac{u}{v} \quad \text{mit} \quad u = 2, \quad v = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad u_x = 0, \quad v_x = -2x$$

$$z_{yx} = \frac{\partial z_y}{\partial x} = \frac{u_x v - v_x u}{v^2} = \frac{0(2y - x^2) - (-2x) \cdot 2}{(2y - x^2)^2} = \frac{4x}{(2y - x^2)^2}$$

Es gilt: $z_{xy} = z_{yx}$ (Satz von Schwarz).

z_{yy} erhalten wir, indem wir z_y mit Hilfe der *Ketten-* oder *Quotientenregel* partiell nach y differenzieren. Wir verwenden hier die *Kettenregel*:

$$z_y = \frac{2}{2y - x^2} = 2 \underbrace{(2y - x^2)^{-1}}_u = 2u^{-1} \quad \text{mit} \quad u = 2y - x^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2$$

$$z_{yy} = \frac{\partial z_y}{\partial y} = \frac{\partial z_y}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 2(-1 \cdot u^{-2}) \cdot 2 = -4u^{-2} = \frac{-4}{u^2} = \frac{-4}{(2y - x^2)^2}$$

c)

$$z_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y) = \frac{x - y}{\sqrt{x^2 - 2xy}}; \quad z_y = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 2xy}};$$

$$z_{xx} = \frac{1 \cdot \sqrt{x^2 - 2xy} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 2xy}} \cdot (2x - 2y)(x - y)}{x^2 - 2xy} =$$

$$= \frac{(x^2 - 2xy) - (x - y)^2}{(x^2 - 2xy)\sqrt{x^2 - 2xy}} = -\frac{y^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}};$$

$$z_{yy} = -\frac{x^2}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}; \quad z_{xy} = z_{yx} = \frac{xy}{\sqrt{(x^2 - 2xy)^3}}$$

4. Ableitungen in Funktion einsetzen

a) Zeigen Sie, dass die Funktion $z = f(x, y) = xy + x \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right)$, mit $x > 0$ und $y > 0$, die Gleichung $xz_x + yz_y = xy + z$ (bzw. in anderer Schreibweise: $x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = xy + z$) erfüllt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x, t) = e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)$, $a \in \mathbb{R}$ eine Lösung der Gleichung $a^2 \cdot f_{xx} = f_t$ (andere Schreibweise: $a^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t}$) ist.

a)

Die Funktion wird *vor* dem Differenzieren unter Verwendung der Rechenregel $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$ in eine *günstigere* Gestalt gebracht:

$$z = xy + x \cdot \ln\left(\frac{y}{x}\right) = xy + x(\ln y - \ln x) = xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(y + \ln y) - x \cdot \ln x$$

Gliedweises partiell differenzieren nach x unter Verwendung der *Produktregel* liefert dann:

$$z = \underbrace{x(y + \ln y)}_{\text{konst. Faktor}} - \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{\ln x}_v = x(y + \ln y) - (uv) \quad \text{mit} \quad u = x, \quad v = \ln x \quad \text{und} \quad u_x = 1, \quad v_x = \frac{1}{x}$$

$$z_x = 1(y + \ln y) - (u_x v + v_x u) = y + \ln y - \left(1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x\right) = y + \ln y - \ln x - 1$$

Die partielle Ableitung nach y lässt sich besonders einfach bilden:

$$z = \underbrace{x(y + \ln y)}_{\text{konst. Faktor}} - \underbrace{x \cdot \ln x}_{\text{konst. Summand}} \Rightarrow z_y = x \left(1 + \frac{1}{y}\right) - 0 = x + \frac{x}{y}$$

Wir setzen die Ausdrücke für z , z_x und z_y seitenweise in die vorgegebene Gleichung ein:

$$\begin{aligned} \text{Linke Seite: } x z_x + y z_y &= x(y + \ln y - \ln x - 1) + y \left(x + \frac{x}{y}\right) = xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x - x + xy + x = \\ &= 2xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(2y + \ln y - \ln x) \end{aligned}$$

$$\text{Rechte Seite: } xy + z = xy + x(y + \ln y - \ln x - 1) = 2xy + x \cdot \ln y - x \cdot \ln x = x(2y + \ln y - \ln x)$$

Ein Vergleich zeigt, dass beide Seiten übereinstimmen.

b)

Wir bilden zunächst die benötigten partiellen Ableitungen f_t und f_{xx} .

Partielle Ableitung f_t

$$f = e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x) = \sin(\pi x) \cdot e^{-\pi^2 a^2 t} = \sin(\pi x) \cdot e^u \quad \text{mit} \quad u = -\pi^2 a^2 t \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\pi^2 a^2$$

Mit der *Kettenregel* erhält man ($\sin(\pi x)$ ist ein konstanter Faktor):

$$f_t = \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \sin(\pi x) \cdot e^u \cdot (-\pi^2 a^2) = -\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot e^u = -\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot e^{-\pi^2 a^2 t}$$

Partielle Ableitung f_{xx}

Wir differenzieren die Funktion $f(x; t)$ zweimal nacheinander partiell nach x , wobei wir jedes Mal die *Kettenregel* benutzen ($e^{-\pi^2 a^2 t}$ ist dabei ein konstanter Faktor):

$$f = e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \underbrace{\sin(\pi x)}_u = e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin u \quad \text{mit} \quad u = \pi x \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \pi$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot (\cos u) \cdot \pi = \pi \cdot e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \cos u \quad \text{mit} \quad u = \pi x \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \pi$$

$$f_{xx} = \frac{\partial f_x}{\partial x} = \frac{\partial f_x}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = \pi \cdot e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot (-\sin u) \cdot \pi = -\pi^2 \cdot e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)$$

Wir multiplizieren f_{xx} mit a^2 und erhalten:

$$a^2 \cdot f_{xx} = a^2 [-\pi^2 \cdot e^{-\pi^2 a^2 t} \cdot \sin(\pi x)] = \underbrace{-\pi^2 a^2 \cdot \sin(\pi x) \cdot e^{-\pi^2 a^2 t}}_{f_t} = f_t$$

Die gegebene Funktion erfüllt somit (wie behauptet) die Differentialgleichung $a^2 \cdot f_{xx} = f_t$.

5. Tangentialebene

Bestimmen Sie die Tangentialebene zu

- a) $f(x, y) = \frac{x^3}{y+3}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2; 1)$.
 b) $f(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot e^{-x}$ im Punkt $(x_0, y_0) = (0; 1)$.
 c) $f(x, y) = 3 \cdot \sqrt{\frac{x^2}{y}} + 2 \cdot \cos(\pi(x + 2y))$ im Punkt $(x_0, y_0) = (2; 1)$.
 d) In welchem Punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ der Fläche $z = f(x, y) = x^2 + y^2 - 7$ verläuft die Tangentialebene parallel zur Ebene $z = f(x, y) = 8x + 2y$? Wie lautet die Gleichung dieser Tangentialebene?

a)

Wir berechnen zuerst die beiden partiellen Ableitungen

$$f_x = \frac{3x^2}{y+3}, \quad f_y = -\frac{x^3}{(y+3)^2}$$

und setzen dort den Punkt $(x_0, y_0) = (2, 1)$ ein:

$$f_x(2, 1) = \frac{12}{4} = 3, \quad f_y(2, 1) = -\frac{8}{16} = -0,5$$

Zusammen mit $f(2, 1) = \frac{8}{4} = 2$ ergeben diese Werte die Tangentialebene

$$z = 2 + 3(x - 2) - \frac{1}{2}(y - 1) = 3x - \frac{1}{2}y - 3,5$$

b)

$$z_x = (2x - x^2 - y^2) \cdot e^{-x}; \quad z_y = 2y \cdot e^{-x}; \quad z_x(0; 1) = -1; \quad z_y(0; 1) = 2$$

$$z - 1 = -1(x - 0) + 2(y - 1) \Rightarrow z = -x + 2y - 1$$

c)

$$z_x = 3y^{-1/2} - 2\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y); \quad z_y = -\frac{3}{2}xy^{-3/2} - 4\pi \cdot \sin(\pi x + 2\pi y);$$

$$z_x(2; 1) = 3; \quad z_y(2; 1) = -3; \quad P = (2; 1; 8); \quad z = 3x - 3y + 5$$

d)

Die gesuchte Tangentialebene muss in der x - bzw. y -Richtung den *gleichen* Anstieg haben wie die Ebene $z = 8x + 2y$, d. h. im (noch unbekannten) Flächenpunkt P_0 müssen die partiellen Ableitungen 1. Ordnung die Werte $f_x(x_0; y_0) = 8$ und $f_y(x_0; y_0) = 2$ haben. Mit $f_x(x; y) = z_x = 2x$ und $f_y(x; y) = z_y = 2y$ folgt also:

$$\left. \begin{array}{l} f_x(x_0; y_0) = 2x_0 = 8 \\ f_y(x_0; y_0) = 2y_0 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x_0 = 4, \quad y_0 = 1$$

Die zugehörige Höhenkoordinate ist $z_0 = f(x_0; y_0) = f(4; 1) = 16 + 1 - 7 = 10$.

Flächenpunkt: $P_0 = (x_0; y_0; z_0) = (4; 1; 10)$

Gleichung der Tangentialebene in $P_0 = (x_0; y_0; z_0) = (4; 1; 10)$

$$z - z_0 = f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$z - 10 = 8(x - 4) + 2(y - 1) = 8x - 32 + 2y - 2 = 8x + 2y - 34 \Rightarrow z = 8x + 2y - 24$$

6. Totales Differenzial

- a) Berechnen Sie das totale Differenzial dF der Funktion $F(x, y, z) = x^4 + 2x \cos y - \sqrt{2} \sin y \cos z$. Durch die Gleichung $F(x, y, z) = 0$ ist lokal um die Stelle $(1; \pi/2; \pi/4)$ eine Funktion $z = f(x, y)$ gegeben. Berechnen Sie das totale Differenzial $dz = df$ dieser Funktion an der genannten Stelle. Wie ändert sich demzufolge näherungsweise die Variable z , wenn man x und y jeweils um 0,1 erhöht?
- b) Bestimmen Sie das totale Differential der Funktion $u = u(x, y, z) = \ln \sqrt{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^3}$. Wie lautet es an der Stelle $(-1; 2; -2)$? Welchen Näherungswert für die abhängige Variable u liefert das totale Differential für die Änderungen $dx = 0,1$, $dy = -0,2$ und $dz = -0,1$?

a)

Partielle Ableitungen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} &= 4x^3 + 2 \cos(y) \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -2x \sin(y) - \sqrt{2} \cos(y) \cos(z) \\ \frac{\partial F}{\partial z} &= \sqrt{2} \sin(y) \sin(z)\end{aligned}$$

Damit:

$$dF = (4x^3 + 2 \cos(y)) dx + (-2x \sin(y) - \sqrt{2} \cos(y) \cos(z)) dy + \sqrt{2} \sin(y) \sin(z) dz$$

Auf der Funktion f gilt:

$$\begin{aligned}dF &= (4x^3 + 2 \cos(y)) dx + (-2x \sin(y) - \sqrt{2} \cos(y) \cos(z)) dy + \sqrt{2} \sin(y) \sin(z) dz \\ &= 0\end{aligned}$$

Damit gilt an der betrachteten Stelle $(x, y, z) = (1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$:

$$\begin{aligned}dF\left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) &= \left(4 + 2 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) dx + \left(-2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) dy \\ &\quad + \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) dz \\ &= (4 + 2 \cdot 0) dx + \left(-2 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) dy \\ &\quad + \sqrt{2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} dz \\ &= 4 dx - 2 dy + dz \\ &= 0\end{aligned}$$

Daraus:

$$dz = -4 dx + 2 dy$$

Für Änderungen $dx = dy = 0,1$ ergibt sich demzufolge als Änderung in z

$$dz = -4 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,1 = -0,4 + 0,2 = -0,2.$$

b)

Wir bringen die Funktion zunächst in eine für das Differenzieren *günstigere* Form:

$$u = \ln \sqrt{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^3} = \ln (2x^2 + 2y^2 + 2z^2)^{3/2} = \frac{3}{2} \cdot \ln (2x^2 + 2y^2 + 2z^2)$$

Rechenregel: $\ln a^n = n \cdot \ln a$

Es genügt, die partielle Ableitung u_x zu bilden, denn die Funktion ist *symmetrisch* in den drei unabhängigen Variablen x , y und z . Die Ableitung u_x erhalten wir wie folgt mit Hilfe der *Kettenregel*:

$$u = \frac{3}{2} \cdot \ln \underbrace{(2x^2 + 2y^2 + 2z^2)}_t = \frac{3}{2} \cdot \ln t \quad \text{mit} \quad t = 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \quad \text{und} \quad \frac{\partial t}{\partial x} = 4x$$

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{t} \cdot 4x = \frac{3}{2} \cdot \frac{4x}{2x^2 + 2y^2 + 2z^2} = \frac{3 \cdot 4x}{2 \cdot 2 (x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{3x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Wegen der erwähnten *Symmetrie* gilt (x wird durch y bzw. z ersetzt):

$$u_y = \frac{3y}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad u_z = \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Das *totale Differential* besitzt dann die folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} du &= u_x dx + u_y dy + u_z dz = \frac{3x}{x^2 + y^2 + z^2} dx + \frac{3y}{x^2 + y^2 + z^2} dy + \frac{3z}{x^2 + y^2 + z^2} dz = \\ &= \frac{3x dx + 3y dy + 3z dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{3(x dx + y dy + z dz)}{x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned}$$

An der Stelle $x = -1$, $y = 2$, $z = -2$ lautet das *totale Differential* wie folgt:

$$du = \frac{3(-1 dx + 2 dy - 2 dz)}{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \frac{3}{9} (-dx + 2 dy - 2 dz) = \frac{1}{3} (-dx + 2 dy - 2 dz)$$

Näherungswert für $dx = 0,1$, $dy = -0,2$ und $dz = -0,1$

$$\begin{aligned} u(x = -1; y = 2; z = -2) &= \frac{3}{2} \cdot \ln [2 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot (-2)^2] = \\ &= \frac{3}{2} \cdot \ln (2 + 8 + 8) = \frac{3}{2} \cdot \ln 18 = 4,3356 \end{aligned}$$

Totales Differential für $dx = 0,1$, $dy = -0,2$ und $dz = -0,1$:

$$du = \frac{1}{3} [-0,1 + 2 \cdot (-0,2) - 2 \cdot (-0,1)] = \frac{1}{3} (-0,1 - 0,4 + 0,2) = \frac{1}{3} \cdot (-0,3) = -0,1$$

Näherungswert: $u + du = 4,3356 - 0,1 = 4,2356$

Exakter Funktionswert: $u(x = -0,9; y = 1,8; z = -2,1) = 4,2427$

7. Volumenänderung Tonne → Papula Klausur S. 268 E52

Das Volumen einer Tonne wird nach der Formel $V = \frac{1}{3}\pi h(2R^2 + r^2)$ berechnet. Es liegen folgende Werte vor: $R = 1$ m, $r = 0,8$ m, $h = 1,5$ m. Wie ändert sich das Volumen V , wenn man bei unveränderter Höhe h den Radius R um 2% vergrößert und gleichzeitig den Radius r um 2,5% verkleinert?

Führen Sie sowohl eine exakte als auch eine näherungsweise Berechnung (totales Differenzial) durch.

Exakte Volumenänderung

Ausgangswerte: $R = 1 \text{ m}$, $r = 0,8 \text{ m}$, $h = 1,50 \text{ m}$

$$V_1 = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,50 (2 \cdot 1^2 + 0,8^2) \text{ m}^3 = 4,1469 \text{ m}^3$$

Neue Werte: $R = 1,02 \cdot 1 \text{ m} = 1,02 \text{ m}$, $r = 0,975 \cdot 0,8 \text{ m} = 0,78 \text{ m}$, $h = 1,50 \text{ m}$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot 1,50 (2 \cdot 1,02^2 + 0,78^2) \text{ m}^3 = 4,2242 \text{ m}^3$$

Exakte Volumenänderung: $\Delta V = V_2 - V_1 = (4,2242 - 4,1469) \text{ m}^3 = 0,0773 \text{ m}^3$

Prozentuale Änderung des Volumens: $\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100 \% = \frac{0,0773 \text{ m}^3}{4,1469 \text{ m}^3} \cdot 100 \% = 1,86 \%$

Näherungsrechnung mit dem totalen Differential

Es ändern sich die Radien R und r , nicht aber die Höhe h der Tonne. Daher können wir in diesem Zusammenhang das Volumen V als eine nur von R und r abhängige Funktion betrachten (*Alternative*: V als eine von R , r und h abhängige Funktion ansehen und im totalen Differential $dh = 0$ setzen):

$$V = f(R; r) = \frac{1}{3} \pi h (2R^2 + r^2)$$

$$dV = \frac{\partial V}{\partial R} dR + \frac{\partial V}{\partial r} dr = \frac{1}{3} \pi h \cdot 4R dR + \frac{1}{3} \pi h \cdot 2r dr = \frac{2}{3} \pi h (2R dR + r dr)$$

Wir verwenden noch die in der Praxis übliche Schreibweise (dV , dR , $dr \rightarrow \Delta V$, ΔR , Δr):

$$\Delta V = \frac{2}{3} \pi h (2R \Delta R + r \Delta r)$$

Mit $R = 1 \text{ m}$, $r = 0,8 \text{ m}$, $h = 1,50 \text{ m}$, $\Delta R = +0,02 \text{ m}$ und $\Delta r = -0,02 \text{ m}$ erhalten wir den folgenden *Näherungswert* für die Volumenänderung (in guter Übereinstimmung mit der *exakten* Änderung):

$$\Delta V = \frac{2}{3} \pi \cdot 1,50 [2 \cdot 1 \cdot 0,02 + 0,8 \cdot (-0,02)] \text{ m}^3 = \pi (0,04 - 0,016) \text{ m}^3 = 0,0754 \text{ m}^3$$

Prozentuale Änderung des Volumens: $\frac{\Delta V}{V_1} \cdot 100 \% = \frac{0,0754 \text{ m}^3}{4,1469 \text{ m}^3} \cdot 100 \% = 1,82 \%$

8. Aussagen über den Gradienten in 2D → FS23 CDS Blatt 9 A1

Gegeben sei eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Der Gradient von f ist tangential an den Graphen von f .		X
b) Der Gradient von f steht senkrecht auf dem Graphen von f .		X
c) Der Gradient von f ist tangential zu den Höhenlinien von f .		X
d) Der Gradient von f steht senkrecht auf den Höhenlinien von f .	X	
e) Der Betrag des Gradienten von f ist die maximale Steigung des Graphen von f .	X	