Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 11 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Kurve, Spur, Geschwindigkeits-/Tangentenvektor, Beschleunigungsvektor, Tangenteneinheitsvektor, Hauptnormalenvektor, Binormalenvektor, Parametrisierung, Bogenlänge, Vektorfeld, Kurven-/Linienintegral und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Spur einer parametrisierten Kurve in 2D skizzieren.
- Sie können ein Vektorfeld in 2D skizzieren.
- Sie können die Bogenlänge einer Kurve berechnen.
- Sie können Linienintegrale berechnen.

1. Aussagen über parametrisierte Kurven

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Eine parametrisierte Kurve kann durch $\vec{\gamma}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ dargestellt werden.	X	
b) Eine parametrisierte Kurve ist stets injektiv.		X
c) Eine parametrisierte Kurve ist für $n \geq 2$ niemals surjektiv.	X	
d) Haben zwei parametrisierte Kurven dieselbe Spur, dann haben sie auch dieselbe Geschwindigkeit.		X
e) Haben zwei parametrisierte Kurven dieselbe Spur, dann sie auch denselben Tangenteneinheitsvektor.		X

2. Spur von parametrisierten Kurven

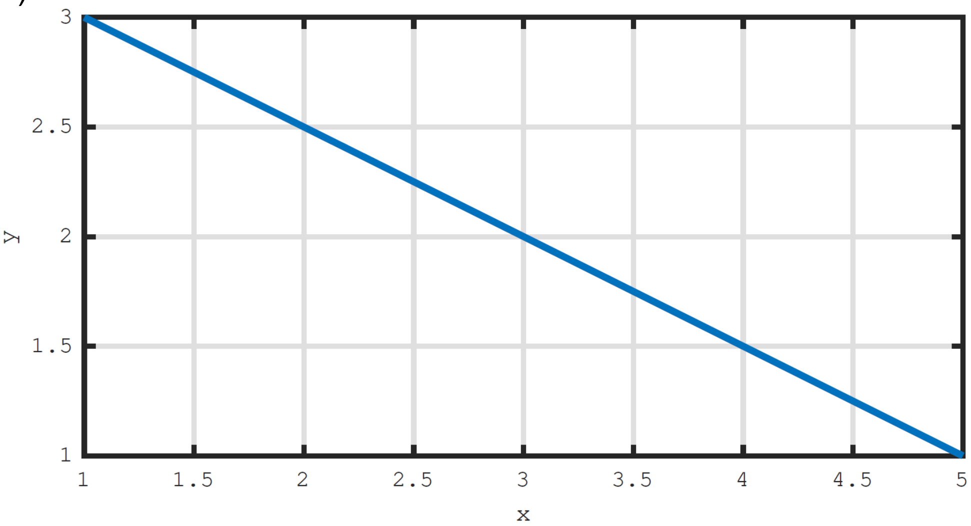
Skizzieren Sie jeweils die Spur der Kurve für einen geeigneten Bereich von $t \in \mathbb{R}$.

a) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 1+2t \\ 3-t \end{pmatrix}$ b) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ \sin t \end{pmatrix}$ c) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ t \end{pmatrix}$

d) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix}$ e) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$ f) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2^{-\frac{t}{2\pi}} \cos t \\ 2^{-\frac{t}{2\pi}} \sin t \end{pmatrix}$

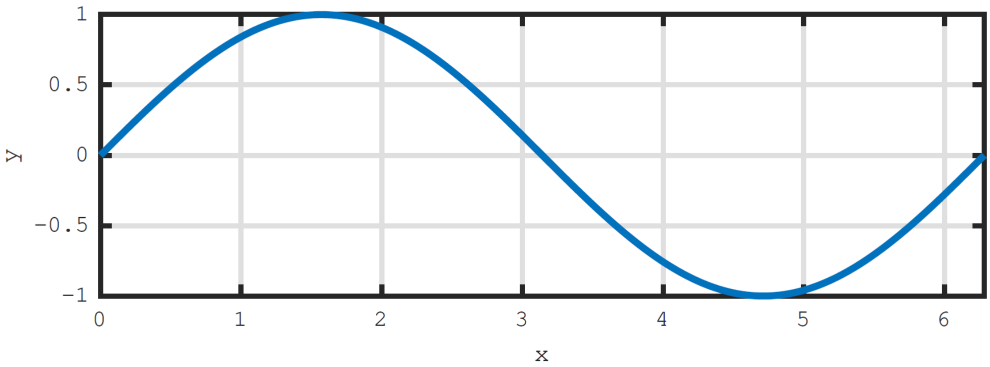
g) Plotten Sie die Spur der Kurven aus a) – f) mit Python/Numpy.

a)



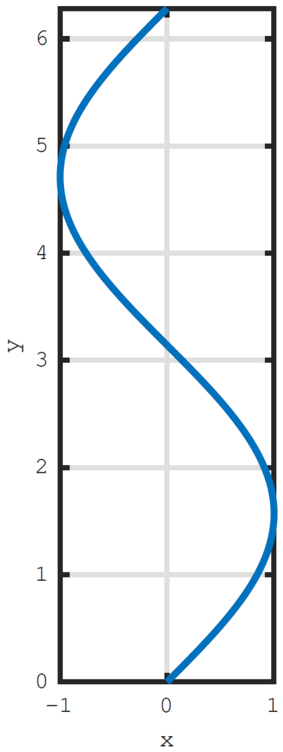
3
2.5
2
1.5
1
y
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
x

b)



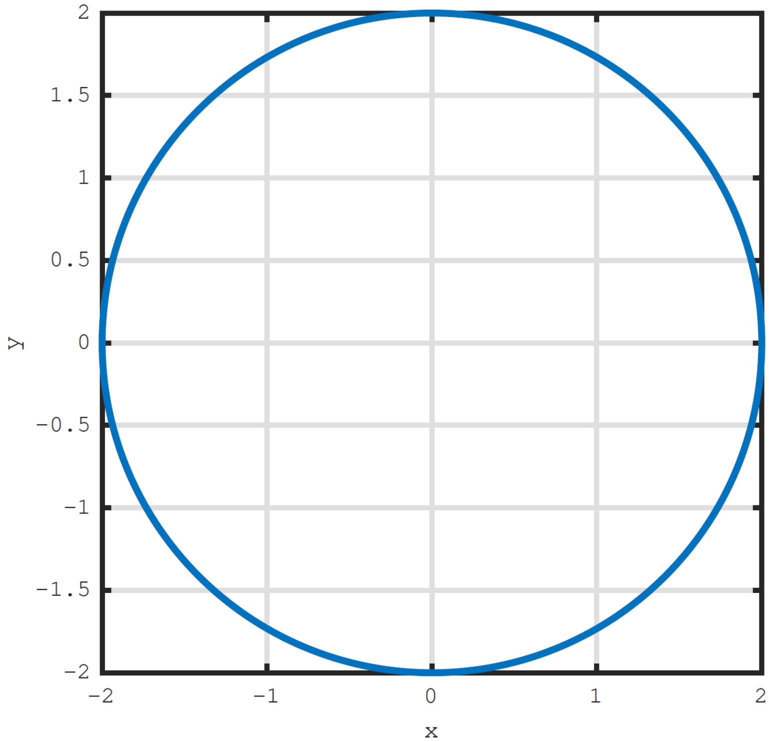
1
0.5
0
−0.5
−1
y
0
1
2
3
4
5
6
x

c)

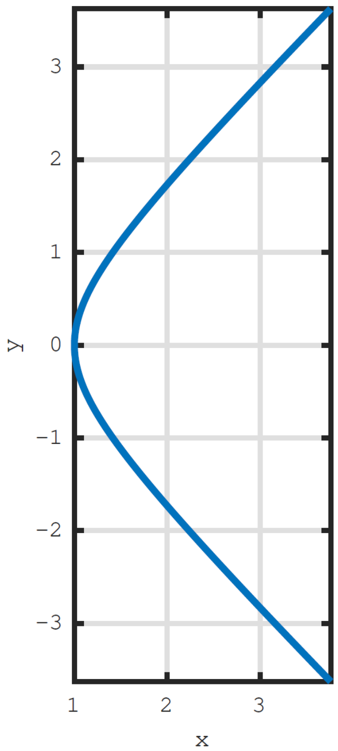


6
5
4
3
2
1
0
y
−1
0
1
x

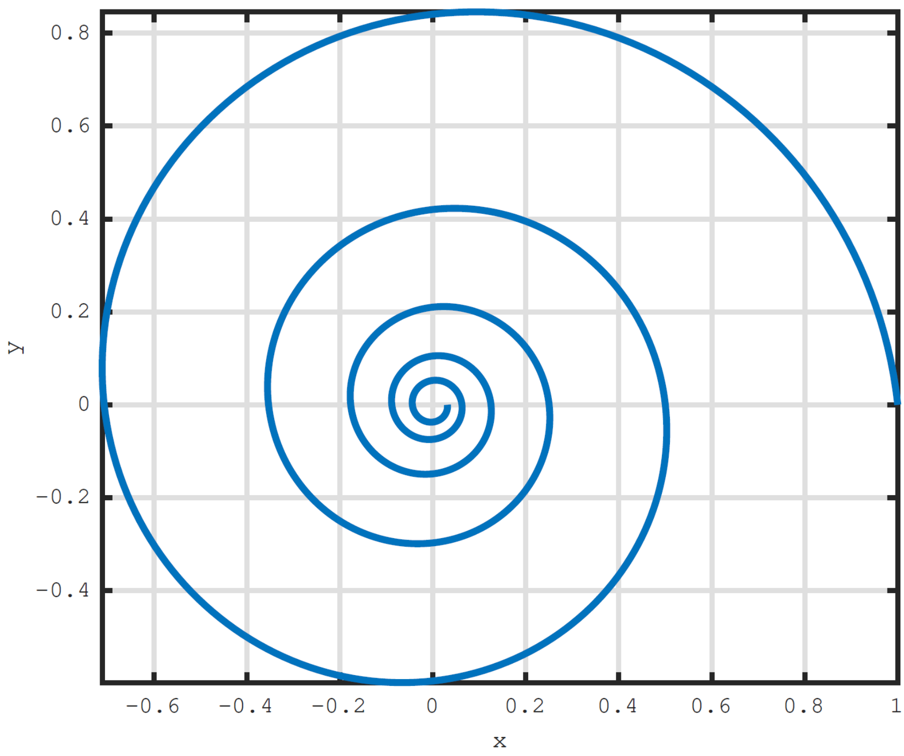
d)



e)



f)



g)
Für a):

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
t_0=0; t_E=2*np.pi; N=41; lw=3; fig=1;
# Funktionen:
def gamma(t):  # Definition der parametrisierten Kurve
    x=1+2*t;
    y=3-t;
    return x,y;
# Daten:
t_data=np.linspace(t_0,t_E,N);
[x_data,y_data]=gamma(t_data);
# Plot:
fh=pl.figure(fig);
pl.plot(x_data,y_data,linewidth=lw);
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y');
pl.grid('on'); pl.axis('image');
```

➔ analog für b) – f)

3. Geschwindigkeits- und Tangenteneinheitsvektor
Berechnen Sie jeweils den Tangenteneinheitsvektor und skizzieren Sie diesen entlang der Spur.

a) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 2t-3 \\ 2-t \end{pmatrix}$ b) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t - 3 \\ 3\sin t + 1 \end{pmatrix}$ c) $\vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} 3\cos t + 2 \\ 2\sin t + 1 \end{pmatrix}$

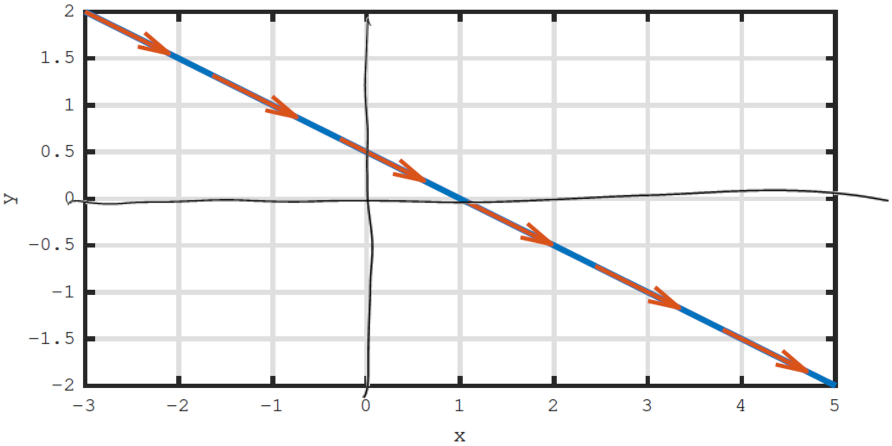
a)
Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu

$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} 2 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$|\dot{\vec{\gamma}}(t)| = \sqrt{5}$

$\vec{T}(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}\binom{2}{-1}$



b)
Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu

$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} -3\ \sin(\tau) + 0 \\ 3\ \cos(\tau) + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\ \sin(\tau) \\ 3\ \cos(\tau) \end{bmatrix}$$

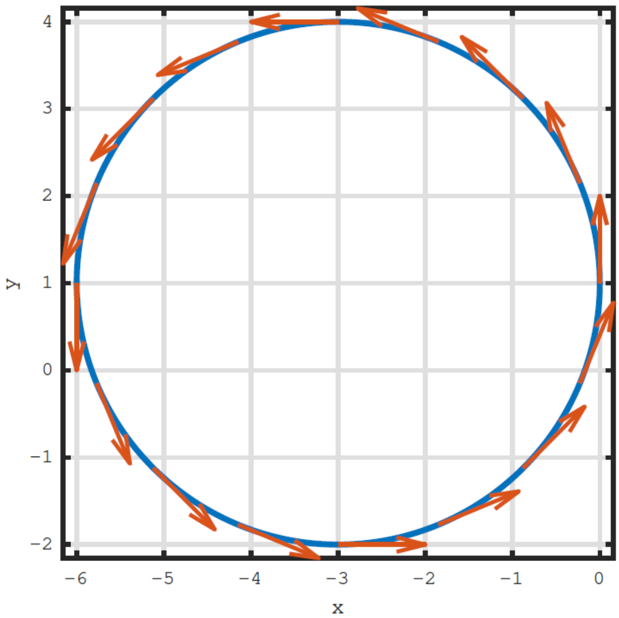
$|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$:

$$\sqrt{(-3)^2 \sin^2(\tau) + 3^2 \cos^2(\tau)} = \sqrt{9\ \sin^2(\tau) + 9\ \cos^2(\tau)}$$

$$= \sqrt{9 \cdot \left(\sin^2(\tau) + \cos^2(\tau)\right)} = \sqrt{9} = 3.$$

$\vec{T}(t)$:

$$\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -3\ \sin(\tau) \\ 3\ \cos(\tau) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -\sin(\tau) \\ \cos(\tau) \end{bmatrix}}}$$



c)

Geschwindigkeitsvektor und Tangenteneinheitsvektor ergeben sich zu

$\dot{\vec{\gamma}}(t)$:

$$\begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau)+0 \\ 2\,\cos(\tau)+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 2\,\cos(\tau) \end{bmatrix}$$

$|\dot{\vec{\gamma}}(t)|$:

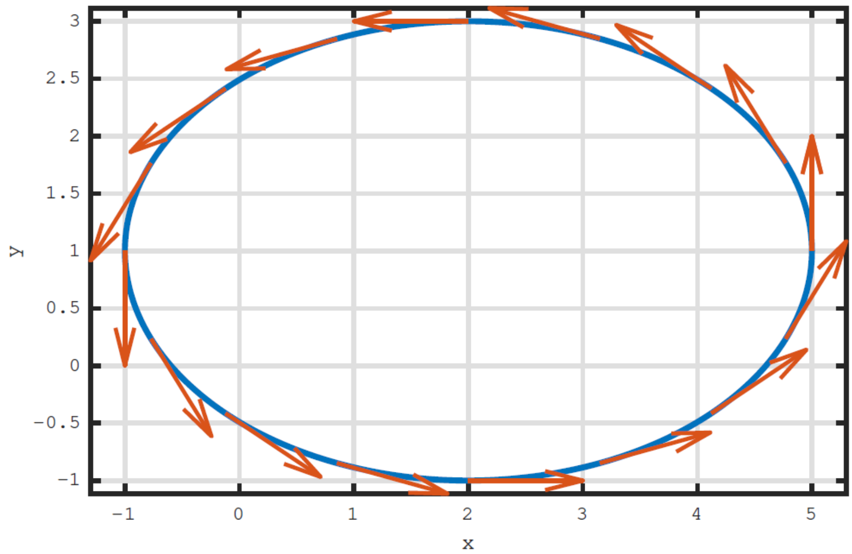
$$\sqrt{(-3)^2\sin^2(\tau)+2^2\cos^2(\tau)} = \sqrt{9\,\sin^2(\tau)+4\,\cos^2(\tau)}$$

$$= \sqrt{5\,\sin^2(\tau)+4\,\sin^2(\tau)+4\,\cos^2(\tau)} = \sqrt{5\,\sin^2(\tau)+4\cdot\left(\sin^2(\tau)+\cos^2(\tau)\right)}$$

$$= \sqrt{5\,\sin^2(\tau)+4}\,.$$

$\vec{T}(t)$:

$$\underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{5\,\sin^2(\tau)+4}}\begin{bmatrix} -3\,\sin(\tau) \\ 2\,\cos(\tau) \end{bmatrix}}}$$



4. Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor
Differenzieren Sie die gegebenen Kurven zweimal nach t, um den Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektor zu bestimmen.

a) $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ e^t \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$ b) $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \\ t \end{pmatrix}$

a)

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(2t) \\ e^t \\ -2 \cdot \sin(2t) \end{pmatrix}; \quad \ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -4 \cdot \sin(2t) \\ e^t \\ -4 \cdot \cos(2t) \end{pmatrix}$$

b)

$$\dot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \cdot \cos t - \sin t \cdot e^{-t} \\ -e^{-t} \cdot \sin t + \cos t \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(\sin t + \cos t) \cdot e^{-t} \\ -(\sin t - \cos t) \cdot e^{-t} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ddot{\vec{a}}(t) = \begin{pmatrix} -(\cos t - \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t + \cos t) \\ -(\cos t + \sin t) \cdot e^{-t} + e^{-t}(\sin t - \cos t) \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot e^{-t} \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$$

5. Ableitungen von Skalar- und Vektorprodukten
Gegeben seien die folgenden parameterabhängigen Vektoren:

$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \vec{b}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ t^2 \end{pmatrix}, \vec{c}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \\ t \end{pmatrix}.$

Bestimmen Sie die 1. Ableitung der folgenden Skalar- und Vektorprodukte mit Hilfe der entsprechenden Produktregel:

a) $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ b) $\langle \vec{b}, \vec{c} \rangle$ c) $\vec{a} \times \vec{b}$ d) $\vec{a} \times \vec{c}$

a)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \dot{\vec{a}} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos t \\ 2 \cdot \sin t \\ t^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \cdot \sin t \\ 2 \cdot \cos t \\ 2t \end{pmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \cos t + 4t \cdot \sin t + 3t^4 - 2t \cdot \sin t + 2t^2 \cdot \cos t + 2t^4 =$$

$$= 5t^4 + 2t \cdot \sin t + 2(1 + t^2) \cdot \cos t$$

b)

$$\frac{d}{dt}(\vec{b} \cdot \vec{c}) = \dot{\vec{b}} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \dot{\vec{c}} = 3t^2 - 4 \cdot e^{-t} \cdot \sin t$$

c)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{b}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{b}+\vec{a}\times\dot{\vec{b}} = \begin{pmatrix}1\\2t\\3t^2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\cdot\cos t\\2\cdot\sin t\\t^2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}t\\t^2\\t^3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\cdot\sin t\\2\cdot\cos t\\2t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2t^3-6t^2\cdot\sin t\\6t^2\cdot\cos t-t^2\\2\cdot\sin t-4t\cdot\cos t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2t^3-2t^3\cdot\cos t\\-2t^3\cdot\sin t-2t^2\\2t\cdot\cos t+2t^2\cdot\sin t\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}4t^3-6t^2\cdot\sin t-2t^3\cdot\cos t\\-3t^2-2t^3\cdot\sin t+6t^2\cdot\cos t\\2(1+t^2)\cdot\sin t-2t\cdot\cos t\end{pmatrix}$$

d)

$$\frac{d}{dt}(\vec{a}\times\vec{c}) = \dot{\vec{a}}\times\vec{c}+\vec{a}\times\dot{\vec{c}} = \begin{pmatrix}3t^2+(t^3-3t^2)\cdot e^{-t}\\-2t-(t^3-3t^2)\cdot e^{-t}\\(1-3t+t^2)\cdot e^{-t}\end{pmatrix}$$

6. Bogenlänge

Berechnen Sie die Bogenlänge der folgenden Funktionen.

a) $\gamma: [0, a] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = t\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}$.

b) $\gamma: [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3, \gamma(t) = \begin{pmatrix}-t\cos t+\sin t\\\cos t+\mathrm{t}\sin t\\\frac{t^2}{4}\end{pmatrix}$

a)

Für die Ableitung erhält man mit Hilfe der Produktregel

$$\dot{\gamma}(t)=\begin{pmatrix}\cos t\\\sin t\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos t-t\sin t\\\sin t+t\cos t\\1\end{pmatrix}.$$

Die Kurve hat damit die Länge

$$L=\int_0^a\|\dot{\gamma}(t)\|\,\mathrm{d}t=\int_0^a\|(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t,1)^\top\|\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^a\sqrt{(\cos t-t\sin t)^2+(\sin t+t\cos t)^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^a\sqrt{(1+t^2)(\sin^2 t+\cos^2 t)+1}\,\mathrm{d}t=\int_0^a\sqrt{2+t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{2}\int_0^a\sqrt{1+(t/\sqrt{2})^2}\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Substitution: } t = \sqrt{2}\,x,\ \ \mathrm{d}t = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{a/\sqrt{2}} \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\cdot\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2} + \operatorname{arsinh} x\right]_0^{a/\sqrt{2}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{1+(a/\sqrt{2})^2} + \operatorname{arsinh}(a/\sqrt{2}).$$

b)

Wir berechnen zuerst die Ableitung der Kurve.

$$\dot{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) - t(-\sin(t)) + \cos(t) \\ -\sin(t) + \sin(t) + t\cos(t) \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \\ \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

Der Betrag ergibt sich zu

$$\|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{t^2\sin^2(t) + t^2\cos^2(t) + \frac{t^2}{4}} == \sqrt{t^2(\sin^2(t)+\cos^2(t)) + \frac{1}{4}} = t\sqrt{1+\frac{1}{4}} = t\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Dieses Ergebnis wiederum eingesetzt in die Bogenlängenfunktion ergibt

$$L(t) = \int_0^t \|\dot{\gamma}(\tau)\|\mathrm{d}\tau = \int_0^t \tau\frac{\sqrt{5}}{2}\mathrm{d}\tau = \left[\tau^2\frac{\sqrt{5}}{4}\right]_0^t = t^2\frac{\sqrt{5}}{4}$$

7. Vektorfelder

Skizzieren Sie jeweils die gegebenen Vektorfelder.

a) $\vec{v}(x,y) = \binom{0{,}5}{0{,}25}$ b) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\binom{x}{y}$

c) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\binom{y}{-x}$ d) $\vec{v}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\binom{y}{x}$

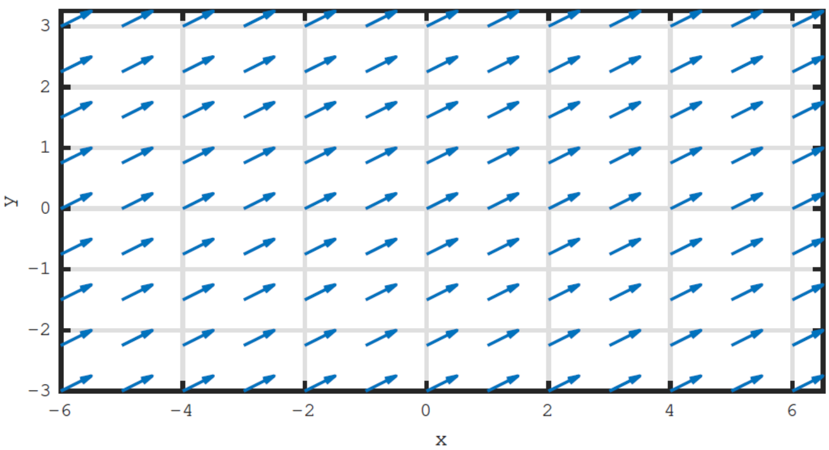
e) Plotten Sie das Vektorfeld aus a) – d) mit Python/Numpy.

a)

Dies ist ein homogenes Vektorfeld das sich die Länge und Richtung des Vektors nicht ändern und somit unabhängig von x und y sind.

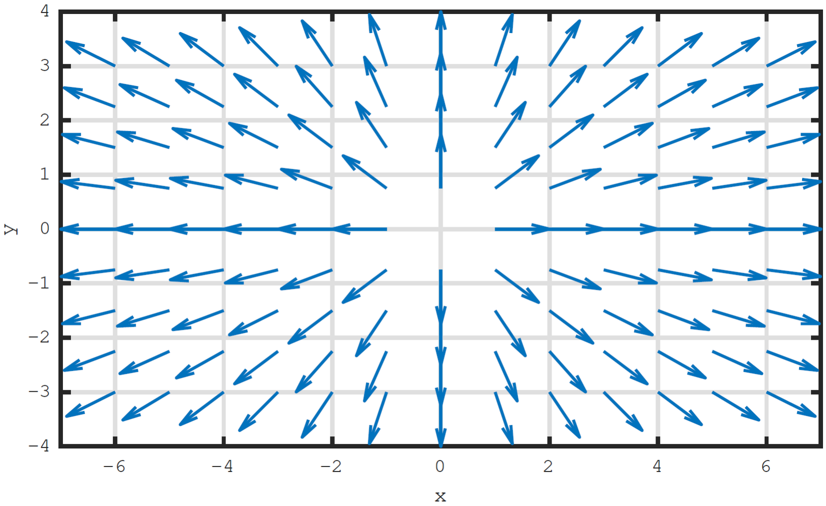
$$v(x;y) = \sqrt{0.5^2 + 0.25^2} \approx 0.6$$

$$m(x;y) = \frac{0.25}{0.5} = 0.5\,.$$



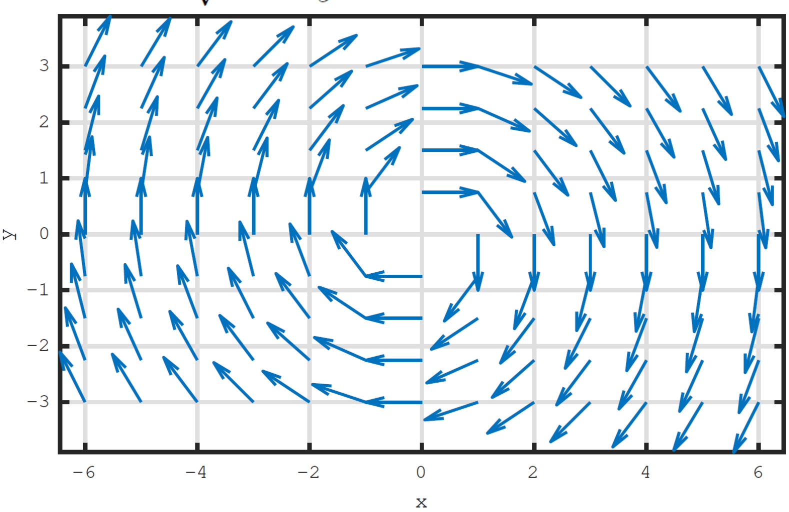
b)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{x^2+y^2} = 1$$



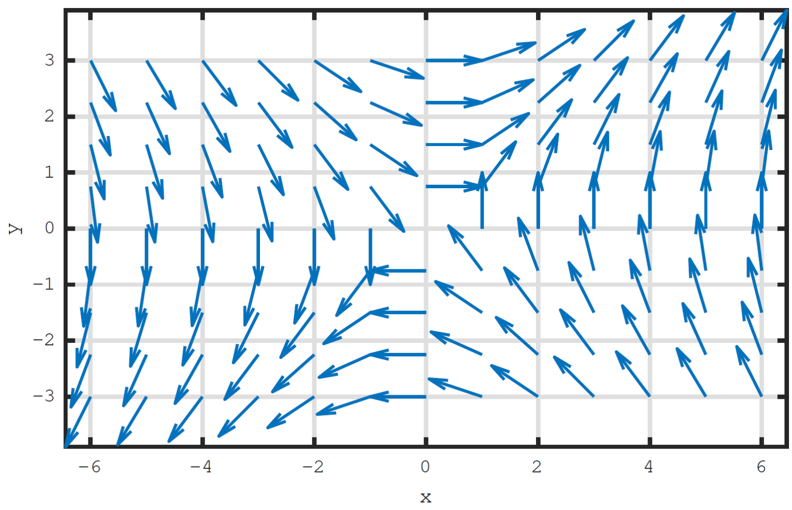
c)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{y^2+(-x)^2} = 1$$



d)
Es handelt sich um ein Einheitsvektorfeld, da gilt:

$$v(x;y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sqrt{y^2+x^2} = 1$$



e)

Code für b) (a), c), d) analog):

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
import numpy as np;
# Parameter:
x_0=-6; x_E=6; y_0=-3; y_E=3; #Intervalle auf x- und y-Achse
festlegen
N_x=13; N_y=9; #Anzahl Intervalle auf x- und y-Achse
sc=16; # für Skalierung beim Quiverplot (findet umgekehrt
statt 1/sc)
lw=0.005; # Linienstärke
fig=1;
# Funktionen:
def v(x,y):                          # Vektorfeld definieren
        v_x=x/((x**2+y**2)**0.5);
        v_y=y/((x**2+y**2)**0.5);
        return v_x,v_y;
# Daten:
x_data=np.linspace(x_0,x_E,N_x); # Generieren von Punkten auf
x-Achse
y_data=np.linspace(y_0,y_E,N_y); # Generieren von Punkten auf
y-Achse
[x_grid,y_grid]=np.meshgrid(x_data,y_data); # Generieren von
Punktepaaren (x,y)
[v_x_grid,v_y_grid]=v(x_grid,y_grid); # Vektoren für die
jeweiligen (x,y) bestimmen
# Plot:
pl.figure(fig);
pl.quiver(x_grid,y_grid,v_x_grid,v_y_grid,scale=sc,width=lw);
# Plot eines Vektorfeldes
pl.xlabel('x'); pl.ylabel('y'); # x- und y-Achsenbeschriftung
pl.grid('on'); # Gitter wird angezeigt
pl.axis('image'); # Achse wird entsprechend dem Datenlimit
skaliert
```

8. Kurvenintegrale

Bestimmen Sie die folgenden skalaren bzw. vektoriellen Kurvenintegrale:

a) $\vec{\gamma}: [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}, f(x,y,z) = x^2 + yz.$

b) $\vec{\gamma}$ ist die Verbindungsstrecke von (0;0) nach (1;1) und $\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} 2y \\ e^x \end{pmatrix}$.

a)

Für diese Kurve erhalten wir

$$\dot{\gamma}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)^\top, \quad \|\dot{\gamma}(t)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2},$$

und damit für das Integral

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(\cos t, \sin t, t)\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t + t \sin t \,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\left(\pi - t\cos t\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \cos t \,\mathrm{d}t\right) = -\sqrt{2}\pi.$$

b)

Die direkte Verbindungsstrecke ist gegeben durch $\gamma(t) = (t,t)^\top$, $t \in [0,1]$.

Das Kurvenintegral berechnet sich dann zu

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 \langle \boldsymbol{v}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \begin{pmatrix} 2t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 (2t + \mathrm{e}^t)\,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e} - 1 = \mathrm{e}.$$

9. Kurvenintegrale II

Gegeben seien die Vektorfelder $\vec{v}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und $\vec{w}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$\vec{v}(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y \\ x + y^2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w}(x,y) = \begin{pmatrix} x + y^2 \\ 2xy \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie sowohl für $\vec{v}$ als auch für $\vec{w}$ jeweils das Kurvenintegral von A=(0;1) nach B=(1;2)

a) längs der Verbindungsgeraden

b) längs des Streckenzugs bestehend aus den Strecken von A nach (1;1) und von (1;1) nach B,

c) längs der Parabel $y = x^2 + 1$.

Wir bezeichnen mit γ_1 die direkte Verbindungsstrecke von A und B, mit γ_2 den Streckenzug, bestehend aus $\gamma_{2,1}$ von A nach $(1,1)^\top$, gefolgt von $\gamma_{2,2}$ von $(1,1)^\top$ nach B und mit γ_3 die Verbindungskurve von A nach B entlang der Parabel $y = x^2 + 1$. Wir wählen die folgenden Parametrisierungen:

(a) $\gamma_1 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = (t, 1+t)^\top$

(b) $\gamma_{2,1} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{2,1}(t) = (t,1)^\top$ und $\gamma_{2,2} : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_{2,2}(t) = (1, 1+t)^\top$

(c) $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3(t) = (t, t^2+1)^\top$

Für das Kurvenintegral

$$\int_\gamma \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_a^b \boldsymbol{v}(\gamma(t))^\top \dot{\gamma}(t)\, \mathrm{d}t$$

erhält man folglich:

(a) $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - t - 1 + t + (1+t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{5}{3}$.
(b) $\int_{\gamma_2} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_{2,1}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s + \int_{\gamma_{2,2}} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - 1 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 1 + (1+t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}$.
(c) $\int_{\gamma_3} \boldsymbol{v} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - (t^2+1) + 2t[t + (t^2+1)^2] \,\mathrm{d}t = 2$.

Entsprechend ergibt sich im Vektorfeld $\boldsymbol{w}$:

(a) $\int_{\gamma_1} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - t - 1 + t + (1+t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.
(b) $\int_{\gamma_2} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_{\gamma_{2,1}} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s + \int_{\gamma_{2,2}} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - 1 \,\mathrm{d}t + \int_0^1 1 + (1+t)^2 \,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.
(c) $\int_{\gamma_3} \boldsymbol{w} \cdot \mathrm{d}s = \int_0^1 t^2 - (t^2+1) + 2t[t + (t^2+1)^2] \,\mathrm{d}t = \frac{9}{2}$.

In der Tat hängt der Wert des Integrals $\int_\gamma \boldsymbol{w}\, \mathrm{d}s$ für eine beliebige Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ nur vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ und vom Endpunkt $\gamma(b)$ der Kurve ab, d. h. das Integral ist *wegunabhängig* im $\mathbb{R}^2$.

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 11

Computational and Data Science
BSc FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über partielle Integration

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die Methode der *partiellen Integration* basiert auf der *Produkt-Regel* der *Differentialrechnung*.	●	○
b) Mit Hilfe der Methode der *partiellen Integration* kann jedes *Produkt* von zwei *Funktionen* problemlos *integriert* werden.	○	●
c) Die Methode der *partiellen Integration* kann nur bei gegebenen *Integrationsgrenzen* angewendet werden.	○	●
d) Die Methode der *partiellen Integration* eignet sich zur *Integration* von *Produkten* zwischen *Elementarfunktionen* und *Polynomen*.	●	○
e) Um ein *Produkt* von zwei *Funktionen* mit Hilfe der Methode der *partiellen Integration integrieren* zu können, muss man mindestens einen der *Faktoren* alleine *integrieren* können.	●	○
f) Mit Hilfe der Methode der *partiellen Integration* kann das *Integral* einer beliebigen, *differentierbaren Funktion* $f(x)$ auf die Berechnung des *Integrals* von $x \cdot f'(x)$ zurückgeführt werden und umgekehrt.	●	○

2. Partielle Integration

Für *differentierbare* und *integrierbare* Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ gilt die Regel der *partiellen Integration*

$$\int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} g(x) \cdot h'(x)\,\mathrm{d}x = \Big[g(x) \cdot h(x)\Big]\Big|_{x_0}^{x_\mathrm{E}} - \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} g'(x) \cdot h(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

a) Durch beidseitige *Integration* der *Produkt-Regel* der *Differentialrechnung* und Anwenden der NEWTON-LEIBNIZ-*Formel* auf der linken Seite erhalten wir

$$\big(g(x) \cdot h(x)\big)' = g(x)' \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \qquad \Big|\int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} \ldots\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} \big(g(x) \cdot h(x)\big)'\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} \Big(g(x)' \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)\Big)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \Big[g(x) \cdot h(x)\Big]\Big|_{x_0}^{x_\mathrm{E}} = \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} g(x)' \cdot h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} g(x) \cdot h'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Durch beidseitige Subtraktion des ersten *Integrals* auf der rechten Seite von (3) erhalten wir

$$\underline{\underline{\Big[g(x)\cdot h(x)\Big]\Big|_{x_0}^{x_\mathrm{E}} - \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} g'(x)\cdot h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} g(x)\cdot h'(x)\,\mathrm{d}x}} \tag{4}$$

in Übereinstimmung mit (1).

b) Wir verwenden die *Regel der partiellen Integration* ohne *Integrationsgrenzen*, um die allgemeine *Stammfunktion* von $\ln(x)$ zu finden. Gemäss (1) gilt

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{\ln(x)}\cdot \overset{\uparrow}{1}\,\mathrm{d}x = \ln(x)\cdot x - \int \ln'(x)\cdot x\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x) - \int \frac{1}{x}\cdot x\,\mathrm{d}x$$

$$= x\cdot\ln(x) - \int 1\,\mathrm{d}x = x\cdot\ln(x) - x + c = \underline{\underline{x\cdot\big(\ln(x)-1\big)+c.}} \tag{5}$$

3. Aufleiten mit partieller Integration

Wir berechnen die folgenden, *unbestimmten Integrale* durch *partielle Integration.*

a) Durch *partielle Integration* erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x}\cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = x\,\mathrm{e}^x - \int 1\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{x\,\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x + c = (x-1)\,\mathrm{e}^x + c.}} \tag{6}$$

b) Durch *partielle Integration* und Verwenden des Ergebnisses aus Teilaufgabe a) erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x^2}\cdot \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^x}\,\mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{e}^x - \int 2x\cdot\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = x^2\,\mathrm{e}^x - 2\,(x-1)\,\mathrm{e}^x + c$$

$$= \underline{\underline{\big(x^2-2x+2\big)\,\mathrm{e}^x + c.}} \tag{7}$$

c) Durch *partielle Integration* erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x}\cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = x\cdot\big(-\cos(x)\big) - \int 1\cdot\big(-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= -x\,\cos(x) + \int \cos(x)\,\mathrm{d}x = -x\,\cos(x) + \sin(x) + c = \underline{\underline{\sin(x) - x\,\cos(x) + c.}} \tag{8}$$

d) Durch *partielle Integration* erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x}\cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = x\cdot\sin(x) - \int 1\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{x\,\sin(x) + \cos(x) + c.}} \tag{9}$$

e) Durch *partielle Integration* und Verwenden des Ergebnisses aus Teilaufgabe d) erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x^2} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot \big(-\cos(x)\big) - \int 2x \cdot \big(-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x$$

$$= -x^2\,\cos(x) + 2\int x\,\cos(x)\,\mathrm{d}x = -x^2\,\cos(x) + 2x\,\sin(x) + 2\cos(x) + c$$

$$= \underline{\underline{2x\,\sin(x) + \big(2 - x^2\big)\cos(x) + c.}} \tag{10}$$

f) Durch *partielle Integration* und Verwenden des Ergebnisses aus Teilaufgabe c) erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \overset{\downarrow}{x^2} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = x^2 \cdot \sin(x) - \int 2x \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = x^2\,\sin(x) - 2\int x\,\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= x^2\,\sin(x) - 2\sin(x) + 2x\,\cos(x) + c = \underline{\underline{\big(x^2 - 2\big)\sin(x) + 2x\,\cos(x) + c.}} \tag{11}$$

4. Partielle Integration

Wir berechnen die folgenden, *bestimmten Integrale* durch *partielle Integration.*

a) Durch *partielle Integration* erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^3 \frac{x}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \overset{\downarrow}{x} \cdot \overbrace{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}^{\uparrow}\,\mathrm{d}x = \Big[\,x \cdot \sqrt{x+1}\,\Big]\Big|_0^3 - \int_0^3 \sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$$

$$= \Big[\,x \cdot \sqrt{x+1}\,\Big]\Big|_0^3 - \frac{2}{3} \cdot \Big[\,(x+1)^{\frac{3}{2}}\,\Big]\Big|_0^3$$

$$= 3 \cdot \sqrt{3+1} - 0 \cdot \sqrt{0+1} - \frac{2}{3} \cdot (3+1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} \cdot (0+1)^{\frac{3}{2}} = 6 - 0 - \frac{2}{3} \cdot 8 + \frac{2}{3}$$

$$= \frac{18}{3} - \frac{16}{3} + \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}\,. \tag{12}$$

b) Durch *partielle Integration* erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 x\sqrt{x-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \overset{\downarrow}{x} \cdot \overset{\uparrow}{\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x = \Big[\,x \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}}\,\Big]\Big|_1^2 - \int_1^2 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot (x-1)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \Big[\,x\,(x-1)^{\frac{3}{2}}\,\Big]\Big|_1^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{5} \cdot \Big[\,(x-1)^{\frac{5}{2}}\,\Big]\Big|_1^2$$

$$= \frac{2}{3} \cdot 2 \cdot (2-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \cdot 1 \cdot (1-1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15} \cdot (2-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{15} \cdot (1-1)^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{3} - 0 - \frac{4}{15} + 0$$

$$= \frac{20}{15} - \frac{4}{15} = \underline{\underline{\frac{16}{15}}}\,. \tag{13}$$

c) Durch *partielle Integration* erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 \overset{\downarrow}{\ln(x)} \cdot \overset{\uparrow}{x} \,\mathrm{d}x = \left[\ln(x) \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2\right]\Bigg|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{2} \cdot x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \cdot \ln(x)\right]\Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 x \,\mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \cdot \ln(x)\right]\Big|_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]\Big|_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \ln(2) - \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \ln(1) - \frac{1}{4} \cdot 2^2 + \frac{1}{4} \cdot 1^2$$
$$= 2 \cdot \ln(2) - 0 - 1 + \frac{1}{4} = \underline{\underline{2\,\ln(2) - \frac{3}{4}}}. \tag{14}$$

5. Integration von Quadraten trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen

Wir berechnen die folgenden, *unbestimmten Integrale* von *Quadraten* der *trigonometrischen* bzw. *hyperbolischen Funktionen* durch *partielle Integration*.

a) Durch *partielle Integration* und mit Hilfe des Pythagoras-*Satzes* für *trigonometrische Funktionen* finden wir die Gleichung

$$F(x) = \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{\sin(x)} \cdot \overset{\uparrow}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \sin(x) \cdot \big(-\cos(x)\big) - \int \cos(x) \cdot \big(-\cos(x)\big)\,\mathrm{d}x = -\sin(x)\,\cos(x) + \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\sin(x)\,\cos(x) + \int \big(1 - \sin^2(x)\big)\,\mathrm{d}x = -\sin(x)\,\cos(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\sin(x)\,\cos(x) + x + b - F(x). \tag{15}$$

Es gilt also

$$F(x) = -\sin(x)\,\cos(x) + x + b - F(x) \qquad \Big|\, + F(x) \tag{16}$$
$$2 \cdot F(x) = -\sin(x)\,\cos(x) + x + b \qquad \Big|\, : 2. \tag{17}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{-\sin(x)\,\cos(x) + x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{x - \sin(x)\,\cos(x)}{2} + c.}} \tag{18}$$

b) Durch *partielle Integration* und mit Hilfe des Pythagoras-*Satzes* für *trigonometrische Funktionen* finden wir die Gleichung

$$F(x) = \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{\cos(x)} \cdot \overset{\uparrow}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$$
$$= \cos(x) \cdot \sin(x) - \int \big(-\sin(x)\big) \cdot \sin(x)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\,\sin(x) + \int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \cos(x)\,\sin(x) + \int \big(1 - \cos^2(x)\big)\,\mathrm{d}x = \cos(x)\,\sin(x) + \int 1\,\mathrm{d}x - \int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$
$$= \cos(x)\,\sin(x) + x + b - F(x). \tag{19}$$

Es gilt also

$$F(x) = \cos(x)\ \sin(x) + x + b - F(x) \qquad \Big| + F(x) \tag{20}$$

$$2 \cdot F(x) = \cos(x)\ \sin(x) + x + b \qquad \Big| : 2. \tag{21}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{\cos(x)\ \sin(x) + x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{x + \cos(x)\ \sin(x)}{2} + c.}} \tag{22}$$

c) Durch *partielle Integration* und mit Hilfe des PYTHAGORAS-*Satzes* für *hyperbolische Funktionen* finden wir die Gleichung

$$F(x) = \int \sinh^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{\sinh}(x) \cdot \overset{\uparrow}{\sinh}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sinh(x) \cdot \cosh(x) - \int \cosh(x) \cdot \cosh(x)\,\mathrm{d}x = \sinh(x)\ \cosh(x) - \int \cosh^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sinh(x)\ \cosh(x) - \int \big(1 + \sinh^2(x)\big)\,\mathrm{d}x = \sinh(x)\ \cosh(x) - \int 1\,\mathrm{d}x - \int \sinh^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \sinh(x)\ \cosh(x) - x + b - F(x). \tag{23}$$

Es gilt also

$$F(x) = \sinh(x)\ \cosh(x) - x + b - F(x) \qquad \Big| + F(x) \tag{24}$$

$$2 \cdot F(x) = \sinh(x)\ \cosh(x) - x + b \qquad \Big| : 2. \tag{25}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{\sinh(x)\ \cosh(x) - x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{\sinh(x)\ \cosh(x) - x}{2} + c.}} \tag{26}$$

d) Durch *partielle Integration* und mit Hilfe des PYTHAGORAS-*Satzes* für *hyperbolische Funktionen* finden wir die Gleichung

$$F(x) = \int \cosh^2(x)\,\mathrm{d}x = \int \overset{\downarrow}{\cosh}(x) \cdot \overset{\uparrow}{\cosh}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \cosh(x) \cdot \sinh(x) - \int \sinh(x) \cdot \sinh(x)\,\mathrm{d}x = \cosh(x)\ \sinh(x) - \int \sinh^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \cosh(x)\ \sinh(x) - \int \big(\cosh^2(x) - 1\big)\,\mathrm{d}x = \cosh(x)\ \sinh(x) - \int \cosh^2(x)\,\mathrm{d}x + \int 1\,\mathrm{d}x$$

$$= \cosh(x)\ \sinh(x) - F(x) + x + b. \tag{27}$$

Es gilt also

$$F(x) = \cosh(x)\ \sinh(x) - F(x) + x + b \qquad \Big| + F(x) \tag{28}$$

$$2 \cdot F(x) = \cosh(x)\,\sinh(x) + x + b \qquad \Big| : 2. \tag{29}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(x)}} = \frac{\cosh(x)\,\sinh(x) + x + b}{2} = \underline{\underline{\frac{\cosh(x)\,\sinh(x) + x}{2} + c.}} \tag{30}$$

6. Aufleiten mit verschiedenen Methoden
Wir berechnen die folgenden, *unbestimmten Integrale* mit Hilfe der Methode der *partiellen Integration.*

a) Wir substituieren

$$u(x) := x^2 \;\Rightarrow\; u'(x) = 2x. \tag{31}$$

Wir zeigen mehrere Varianten, um das *unbestimmte Integral* zu berechnen.

Variante 1: Durch *strukturelle Ergänzung* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{u'}{1+u^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\cdot \arctan(u) + c = \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot \arctan\left(x^2\right) + c.}}\end{aligned} \tag{32}$$

Variante 2: Durch *Kalkulieren* mit den *Differentialsymbolen* erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 2x\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{2x} = \frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u \tag{33}$$

und somit

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x}{1+u^2}\cdot\frac{1}{2x}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cdot \arctan(u) + c \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2}\cdot \arctan\left(x^2\right) + c.}}\end{aligned} \tag{34}$$

b) Durch zweifache *partielle Integration* finden wir die Gleichung

$$\begin{aligned}F(t) &= \int \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{at}} \cdot \overset{\downarrow}{\sin(\omega t)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\cdot \mathrm{e}^{at}\cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a}\int \overset{\uparrow}{\mathrm{e}^{at}}\cdot \overset{\downarrow}{\cos(\omega t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{a}\cdot \mathrm{e}^{at}\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot \mathrm{e}^{at}\cdot\cos(\omega t) - \frac{\omega}{a}\int \mathrm{e}^{at}\cdot(-1)\cdot\sin(\omega t)\right) \\ &= \frac{1}{a}\cdot \mathrm{e}^{at}\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2}\cdot \mathrm{e}^{at}\cdot\cos(\omega t) - \frac{\omega^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{at}\cdot\sin(\omega t) \\ &= \mathrm{e}^{at}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2}\cdot\cos(\omega t\right) - \frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t).\end{aligned} \tag{35}$$

Es gilt also

$$F(t) = \mathrm{e}^{at}\cdot\left(\frac{1}{a}\cdot\sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2}\cdot\cos(\omega t)\right) - \frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t) \qquad \Big| + \frac{\omega^2}{a^2}\cdot F(t) \tag{36}$$

$$F(t) + \frac{\omega^2}{a^2} \cdot F(t) = \mathrm{e}^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t) \right) \tag{37}$$

$$\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right) \cdot F(t) = \mathrm{e}^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t) \right) \qquad \Bigg| : \left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right). \tag{38}$$

Daraus erhalten wir

$$\underline{\underline{F(t)}} = \frac{\mathrm{e}^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t)\right)}{\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right)} + c = \frac{\mathrm{e}^{at} \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot \sin(\omega t) - \frac{\omega}{a^2} \cdot \cos(\omega t)\right) \cdot a^2}{\left(1 + \frac{\omega^2}{a^2}\right) \cdot a^2} + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^{at} \cdot (a \cdot \sin(\omega t) - \omega \cdot \cos(\omega t))}{a^2 + \omega^2} + c.}} \tag{39}$$

c) Wir substituieren

$$u(r) := r^2 \;\Rightarrow\; u'(r) = 2r. \tag{40}$$

Wir zeigen mehrere Varianten, um das *unbestimmte Integral* zu berechnen.

Variante 1: Durch *strukturelle Ergänzung* und *partielle Integration* erhalten wir

$$\underline{\underline{F(r)}} = \int r^3 \cos(r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2} \int 2r \cdot r^2 \cdot \cos(r^2)\,\mathrm{d}r = \frac{1}{2} \int u' \cdot u \cdot \cos(u)\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{2} \int \overset{\downarrow}{u} \cdot \overset{\uparrow}{\cos}(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - \int 1 \cdot \sin(u)\,\mathrm{d}u \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - \int \sin(u)\,\mathrm{d}u \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - (-1) \cdot \cos(u) + \tilde{c} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) + \cos(u) \right) + c = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \left(r^2 \cdot \sin(r^2) + \cos(r^2) \right) + c.}} \tag{41}$$

Variante 2: Durch *Kalkulieren* mit den *Differentialsymbolen* und *partielle Integration* erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r} = 2r \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = 2r\,\mathrm{d}r \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}r = \frac{\mathrm{d}u}{2r} = \frac{1}{2r}\,\mathrm{d}u \tag{42}$$

und somit

$$\underline{\underline{F(r)}} = \int r^3 \cos(r^2)\,\mathrm{d}r = \int u \cdot r \cdot \cos(u) \cdot \frac{1}{2r}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} \int \overset{\downarrow}{u} \cdot \overset{\uparrow}{\cos}(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - \int 1 \cdot \sin(u)\,\mathrm{d}u \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - \int \sin(u)\,\mathrm{d}u \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) - (-1) \cdot \cos(u) + \tilde{c} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(u \cdot \sin(u) + \cos(u) \right) + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \left(r^2 \cdot \sin(r^2) + \cos(r^2) \right) + c.}} \tag{43}$$

7. Aufleiten mit Python/Sympy

Wir berechnen die *unbestimmten Integrale* aus Aufgabe 6 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
a,r,t,x,omega=sp.symbols('a r t x omega');
# Berechnungen:
F=sp.simplify(sp.integrate(...,...));
# Ausgabe:
dp.display(F);
```

a) Wir betrachten das *unbestimmte Integral*

$$F(x) = \int \frac{x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x. \tag{44}$$

Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
F=sp.simplify(sp.integrate(x/(1+x**4),x));
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{2}\cdot\arctan\left(x^2\right) + c.}} \tag{45}$$

b) Wir betrachten das *unbestimmte Integral*

$$F(t) = \int \mathrm{e}^{at}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t. \tag{46}$$

Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
F=sp.simplify(sp.integrate(sp.exp(a*t)*sp.sin(omega*t),t));
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{F(t) = \frac{\mathrm{e}^{at}\cdot(a\cdot\sin(\omega t) - \omega\cdot\cos(\omega t))}{a^2+\omega^2} + c.}} \tag{47}$$

c) Wir betrachten das *unbestimmte Integral*

$$F(r) = \int r^3\cos\left(r^2\right)\mathrm{d}r. \tag{48}$$

Wir modifizieren den Code.

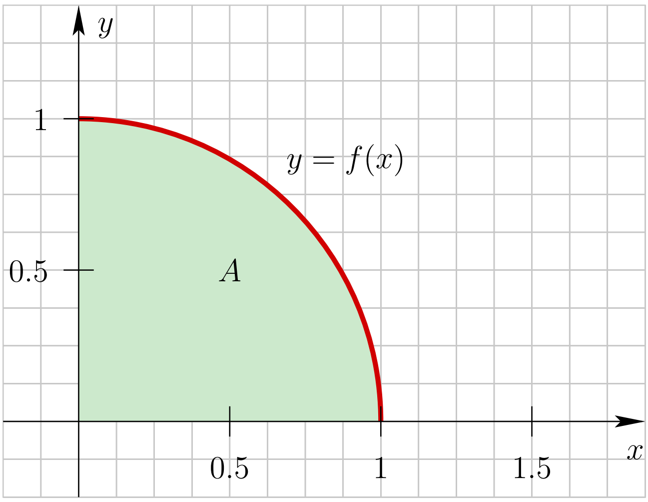
```
# Berechnungen:
F=sp.simplify(sp.integrate(r**3*sp.cos(r**2),r));
```

Gemäss Ausgabe ist

$$\underline{\underline{F(r) = \frac{1}{2} \cdot \Big(r^2 \cdot \sin\big(r^2\big) + \cos\big(r^2\big) \Big) + c.}} \tag{49}$$

8. Fläche des Einheitskreises

Wir berechnen die *Fläche* des *Einheitskreises*, indem wir einen geeigneten Teil des *Kreisbogens* als *Graph* einer *Funktion* im x-y-Diagramm auffassen und *integrieren*. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Für alle *Punkte* $\big(x\,;y\big)$ auf dem *Einheitskreis* gilt

$$1 = x^2 + y^2 = x^2 + f^2(x) \qquad \Big|\, - x^2 \tag{50}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 1 - x^2 = f^2(x) \qquad \Big|\, \sqrt{\ldots}\,. \tag{51}$$

Auf der oberen Hälfte des *Einheitskreises* ist $f(x) \geq 0$ und wir erhalten für f den *Funktionsterm*

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,. \tag{52}$$

Die *Fläche* des *Einheitskreises* ist demnach

$$A_{\mathrm{K}} = 4 \cdot A = 4 \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{53}$$

Als *Substitution* wählen wir

$$x := \sin(u) \qquad \Big|\, (\ldots)' \tag{54}$$

$$\Rightarrow \qquad 1 = \cos(u) \cdot u' \qquad \Big|\, : \cos(u). \tag{55}$$

Für $\cos(u) \neq 0$ gilt somit

$$u' = \frac{1}{\cos(u)}\,. \tag{56}$$

Wir zeigen mehrere Varianten, um das *bestimmte Integral* aus (53) zu berechnen.

Variante 1: Durch *strukturelle Ergänzung* erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A_{\mathrm{K}}}} &= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{1-\sin^2(u)}\cdot\frac{\cos(u)}{\cos(u)}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{\cos^2(u)}\cdot\cos(u)\cdot u'\,\mathrm{d}x \\ &= 4\int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \big|\cos(u)\big|\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big[\sin(u)\cdot\cos(u)+u\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\Big(\sin(\pi/2)\cdot\cos(\pi/2)+\frac{\pi}{2}-\sin(0)\cdot\cos(0)-0\Big) \\ &= 2\cdot\Big(0+\frac{\pi}{2}-0-0\Big) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi.}} \end{aligned} \tag{57}$$

Variante 2: Durch *Kalkulieren* mit den *Differentialsymbolen* erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\cos(u)} \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}u = \frac{1}{\cos(u)}\,\mathrm{d}x \;\Leftrightarrow\; \mathrm{d}x = \cos(u)\,\mathrm{d}u \tag{58}$$

und somit

$$\begin{aligned}\underline{\underline{A_{\mathrm{K}}}} &= 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{1-\sin^2(u)}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^1 \sqrt{\cos^2(u)}\,\mathrm{d}x \\ &= 4\int_{\arcsin(0)}^{\arcsin(1)} \big|\cos(u)\big|\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u)\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(u)\,\mathrm{d}u \\ &= 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\Big[\sin(u)\cdot\cos(u)+u\Big]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2\cdot\Big(\sin(\pi/2)\cdot\cos(\pi/2)+\frac{\pi}{2}-\sin(0)\cdot\cos(0)-0\Big) \\ &= 2\cdot\Big(0+\frac{\pi}{2}-0-0\Big) = 2\cdot\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\pi.}} \end{aligned} \tag{59}$$