

Übungsblatt LA 10

Computational and Data Science
FS2025

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Bild, Kern, algebraische und geometrische Vielfachheit, ähnliche Matrix, Diagonalisierbarkeit einer Matrix und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können Bild und Kern einer linearen Abbildung berechnen.
- Sie können bestimmen, ob eine Matrix diagonalisierbar ist oder nicht und die Diagonalmatrix angeben.

1. Aussagen über Bild und Kern

Gegeben sei eine $m \times n$ Matrix A .

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: $\ker(A) \neq \emptyset$.		
b) Für $m = 2$ und $n = 3$ gilt: $\ker(A) \neq \{0\}$.		
c) Für $m = 3$ und $n = 2$ gilt: $\ker(A) \neq \{0\}$.		
d) Für $n = m$ und A regulär gilt: $\ker(A) \neq \{0\}$.		
e) Für $n = m$ und A singular gilt: $\ker(A) \neq \{0\}$.		
f) Für $m = 3$ und $n = 4$ gilt: $\dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{img}(A)) = 7$.		

2. Bild und Kern berechnen

Berechnen Sie jeweils Bild und Kern der gegebenen Matrix.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

3. Aussagen über 2 Matrizen in 3D

Gegeben seien die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Es gilt: $\text{img}(A) = \mathbb{R}^3$.		
b) Es gilt: $\ker(A^{12}) \neq \{0\}$.		
c) Es gilt: B ist orthogonal.		
d) Es gilt: $\text{tr}(2A + \sqrt{2}B) = 0$.		
e) Die Spaltenvektoren von B sind linear unabhängig.		
f) Es gilt: $\ker(B^3) = \ker(B)$.		

4. Eigenwerte

A sei eine $n \times n$ Matrix. Was lässt sich über die reellen Eigenwerte von A aussagen, falls gilt:

- a) $A = -A^T$
- b) $A^{-1} = A^T$
- c) $A = B^T B$, B sei eine $m \times n$ Matrix.

5. Diagonalmatrizen

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Bestimmen Sie die Eigenvektoren und zugehörigen Eigenräume obiger Matrizen.
- b) Welche der Matrizen sind ähnlich zu einer Diagonalmatrix?

6. Diagonalmatrix

Überprüfen Sie, dass $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 8 & 8 \\ -3 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

sind und bestimmen Sie die dazugehörigen Eigenwerte. Finden Sie eine Matrix C , so dass $C^{-1}AC$ eine Diagonalmatrix ist und berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$.