

Übungsblatt Ana 5

Computational and Data Science
FS2025

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Bogenlänge, Mantelfläche von Rotationskörpern, Massenmittelpunkt, Schwerpunkt, Flächenschwerpunkt und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können mit Hilfe der Integration die Bogenlänge einer ebenen Kurve, die Mantelfläche und das Volumen von Rotationskörpern und den Schwerpunkt homogener Flächen berechnen.

1. Kettenlinie

Welche Länge besitzt ein Drahtseil, das gemäss der Funktion $f(x) = \cosh x$ durchhängt, wenn beide Aufhängepunkte (spiegelsymmetrisch zur y-Achse) die gleiche Höhe und einen Abstand von 4 m voneinander besitzen?

2. Volumen und Masse einer Vase

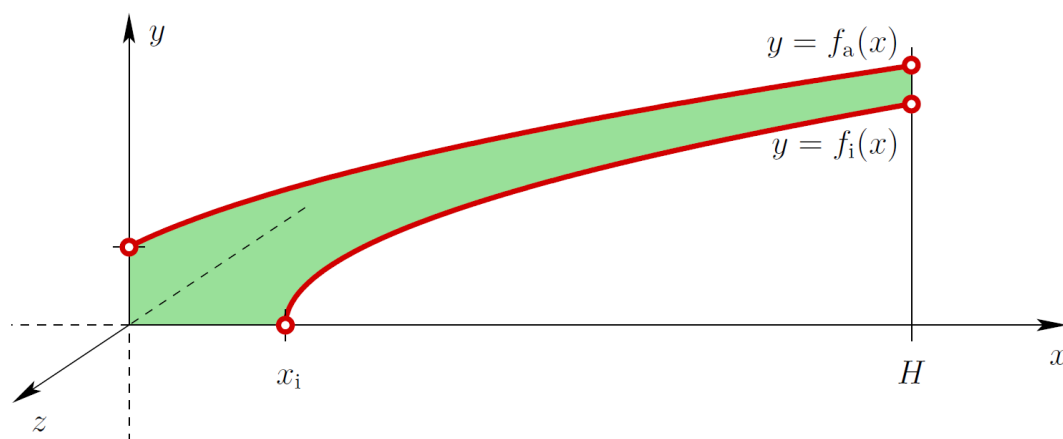
Es seien die Funktionen

$$f_a: [0, H] \rightarrow \mathbb{R}, f_a(x) = C \cdot \sqrt{x - x_a} \text{ und } f_i: [x_i, H] \rightarrow \mathbb{R}, f_i(x) = C \cdot \sqrt{x - x_i}$$

mit $x_a < 0 < H$ und $C > 0$ gegeben.

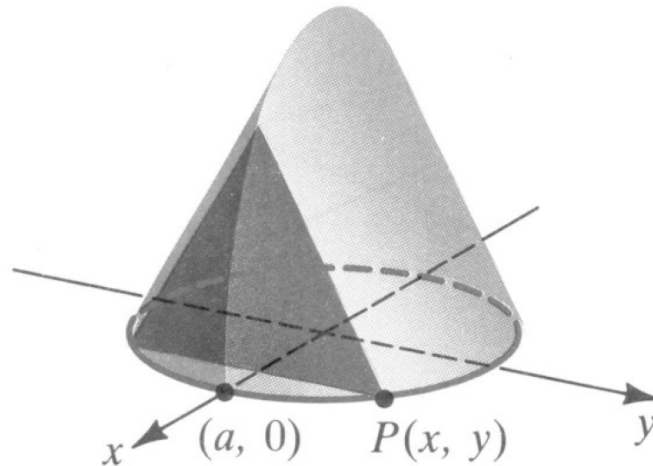
Die Vase entsteht durch Rotation um die x-Achse der Querschnittsfläche (grün in der Skizze), die durch die beiden Funktionen zwischen $x = 0$ und $x = H$ eingeschlossen wird.

- Wie gross muss H gewählt werden, damit die Vase das Volumen V_0 fassen kann?
- Welche Masse hat die leere Vase, wenn sie aus Glas der Dichte ρ_g gefertigt ist?



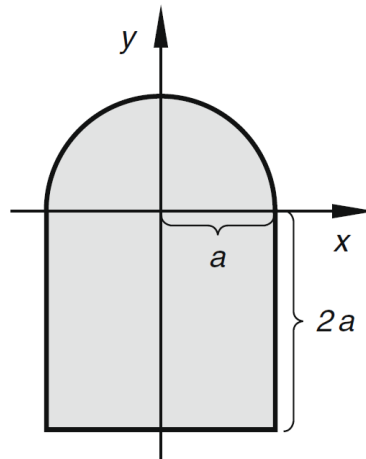
3. Volumen durch Integration des Querschnitts

Gegeben sei ein Körper, dessen Grundfläche ein Kreis sei und der im Querschnitt aus gleichseitigen Dreiecken besteht (siehe Skizze). Bestimmen Sie das Volumen des Körpers durch Integration des Querschnitts.



4. Flächenschwerpunkt

- a) Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt der skizzierten Fläche (Quadrat mit aufgesetztem Halbkreis).



- b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Geraden $y=x+2$ und der Parabel $y=x^2-4$ berandet wird.

5. Mantelfläche Rotationskörper

Bestimmen Sie die Mantelfläche M_x des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kettenlinie $f(x) = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$, $-c \leq x \leq c$ um die x-Achse entsteht.