Ableiten

Quotienten Regel

$$f(x) = \frac{z}{n} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{z' \cdot n - n' \cdot z}{n^2} \tag{1}$$

Standardableitungen

$$f(x) = a^{u(x)} \Leftrightarrow f'(x) = \ln a \cdot u'(x) \cdot a^{u(x)}$$

Integrations-Regeln

Lineare Integration

$$\int f(m \cdot x + q)\, dx = \frac{1}{m} F(m \cdot x + q) + c \tag{2}$$

$$\int (m \cdot x + q)^p\, dx = \frac{1}{m \cdot (p+1)} \cdot (m \cdot x + q)^{p+1} + c \tag{3}$$

$$\int a^{m \cdot x + q}\, dx = \frac{1}{m \cdot (p+1)} \cdot (m \cdot x + q)^{p+1} + c \tag{4}$$

$$\int y_0 \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}}\, dx = \frac{\sum}{\ln a} \cdot y_0 \cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}} + c \tag{5}$$

$$\int A \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)\, dt = -\frac{A}{\omega} \cdot \cos(\omega \cdot + \varphi) + c \tag{6}$$

Uneigentliche Integrale

Formeln

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{s \to \infty} \int_{x_0}^{s} f(x)\, dx \tag{7}$$

$$\int_{-\infty}^{x_E} f(x)\, dx = \lim_{s \to \infty} \int_{s}^{x_E} f(x)\, dx \tag{8}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{x_0} f(x)\, dx + \lim_{s \to \infty} \int_{x_0}^{s} f(x)\, dx \tag{9}$$

$$\int_{x_0}^{x_E} f(x)\, dx = \lim_{r \nearrow x_p} \int_{x_0}^{r} f(x)\, dx + \lim_{s \searrow x_p} \int_{s}^{X_E} f(x)\, dx \tag{10}$$

Standardintegrale

Standartintegrale

$$\int m\, dx = m \cdot x + q \tag{11}$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln x} + c \tag{12}$$

$$\int e^x\, dx = e^x \tag{13}$$

$$\int x^p\, dx = \frac{1}{p+1} \cdot x^{p+1} + c \quad n \neq -1 \tag{14}$$

$$\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c \tag{15}$$

$$\int_{x_0}^{x_E} x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x}\, dx = \ln \frac{x_E}{x_0} \tag{16}$$

Sinus

$$\int \sin x \cdot \cos x\, dx = \frac{1}{2} \cdot \sin^2 x + c \tag{17}$$

$$\int \sin^2 x\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x) + c \tag{18}$$

$$\int \sinh x\, dx = \cosh x + c \tag{19}$$

Cosinus

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \int 1 + \tan^2 x$$
$$= \tan x + c \tag{20}$$

$$\int \cosh x\, dx = \sinh x + c \tag{21}$$

$$\int \cot x\, dx = \frac{1}{\tan x} + c$$
$$= \ln|\sin x| + c = \frac{\cos x}{\sin x} + c \tag{22}$$

$$\int \coth x\, dx = \frac{\cosh x}{\sinh x} + c \tag{23}$$

Tangents

$$\int \tan x\, dx = \frac{1}{\cot x} + c$$
$$= -\ln|\cos x| + c = \frac{\sin x}{\cos x} + c \tag{24}$$

$$\int \tanh x\, dx = \frac{\sinh x}{\cosh x} + c \tag{25}$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \arctan x \tag{26}$$

Komplexe Zahlen

Koordinaten Arten

Kartesische Koordinaten

$$z = x + iy \tag{27}$$

Polarkoordinaten

Umrechnung kartesisch → polar:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \quad (x \neq 0)$$

Komplexe Polarform

$$\operatorname{cis}\varphi = \cos\varphi + i \sin\varphi$$

$$z = r \operatorname{cis}\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{28}$$

Euler-Form

$z = re^{i\varphi}$ (äquivalent zur Polarform) (29)

$$x = r \cdot \cos\phi \quad | \quad y = r \cdot \sin\phi \tag{30}$$

$$\varphi = \arctan \frac{x}{y} \tag{31}$$

$$z = re^{i\varphi} = x + iy = r \cdot \operatorname{cis}\varphi \tag{32}$$

Komplexe Zahlen

Allgemeines Komplexe Zahlen

$$i^2 = -1 \tag{33}$$

- Realteil von z : $\mathrm{Re}\{z\} := \mathrm{x}$
- Imaginärteil von z : $\mathrm{Im}\{z\} := \mathrm{y}$

Arithmetische Form

$$z = x + y \cdot i \tag{34}$$

- Betrag von z: $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$
- Komplex-Konjugierte von z : $z^* := x - y \cdot i$

Addition

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + (y_1 + y_2) \cdot i \tag{35}$$

Subtraktion

$$z_1 - z_2 = x_1 - x_2 + (y_1 - y_2) \cdot i \tag{36}$$

Multiplikation

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1) \cdot i \tag{37}$$

Division

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_2}{x_2^2 + y_2^2} \cdot i \tag{38}$$

Betrag und Konjugation

$$z \cdot z^* = |z|^2 \tag{39}$$

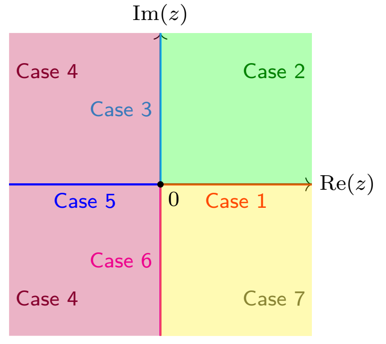
Komplexe aus dem Nenner bringen

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot z_2^*}{|z_2|^2} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{x_2^2 + y_2^2} \tag{40}$$

- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
- $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

- **Dreiecks-Ungleichung**
  $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
  $|z_1 - z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathrm{Re}(z) \geqslant 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0 & | \text{ CASE 1} \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) & \text{if } \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0 & | \text{ CASE 2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } \mathrm{Re}(z) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z) > 0 & | \text{ CASE 3} \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + \pi & \text{if } \mathrm{Re}(z) < 0 & | \text{ CASE 4} \\ \pi & \text{if } \mathrm{Re}(z) < 0 \wedge \mathrm{Im}(z) = 0 & | \text{ CASE 5} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{if } \mathrm{Re}(z) = 0 \wedge \mathrm{Im}(z) < 0 & | \text{ CASE 6} \\ \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) + 2\pi & \text{if } \mathrm{Re}(z) > 0 \wedge \mathrm{Im}(z) < 0 & | \text{ CASE 7} \end{cases}$$



Koordinaten Wechsel

Kartesisch ⇒ Polar

$$z = |\mathrm{Re}\{z\} + \mathrm{Im}\{z\}| \cdot \mathrm{cis}(\arg(z)) \tag{41}$$

1. Betrag von $|\mathrm{Re}\{z\} + \mathrm{Im}\{z\}|$ berechnen mittels $\sqrt{\mathrm{Re}^2 z + \mathrm{Im}^2 z}$
2. Bestimmen in welchem Quadrant die Zahl liegt
3. Taschenrechner mit RAD Modus $\frac{\text{CASE}}{\pi} \Rightarrow$ Winkel in $\pi = \varphi$
4. $|z| \cdot \mathrm{cis}\,\varphi$

Polar ⇒ Kartesisch

Lineare Algebra

Vektoranalysis

Begriffe

- Skalarfeld: Definiert was an jedem Punkt im Raum gemessen wird
- Levelmengen: Zeigen wo dieses Feld einen bestimmten Wert hat
- Gradientenfeld: Beschreibt, wie und wohin sich der Wert des Skalarfelds ändert

Vektorfelder

Einheitsvektorfeld: $\vec{v}(p) = \hat{v}(p)$ (42)

Homogenes Vektorfeld: $\vec{v}(p) = \vec{w}$ (43)

$$\vec{v} = \underbrace{\nabla\phi}_{\text{Gradientenfeld (quellenfrei)}} + \underbrace{\nabla \times \vec{A}}_{\text{Rotationsfeld (wirbelfrei)}} \tag{44}$$

- ϕ: Skalarpotential (quellenfreier Anteil)
- $\vec{A}$: Vektorpotential (wirbelfreier Anteil)
- Zerlegung nach dem Helmholtz-Theorem

Lineare Abbildung

$a(x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v}) = x \cdot a(\vec{u} + y \cdot a(\vec{v})$

Normalenvektor / Einheitsnormalenvektor

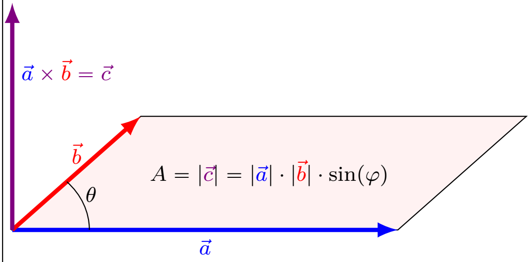
$$\vec{n} := \vec{e_u} \times \vec{e_v} \tag{45}$$

$$\hat{n} = \pm\frac{1}{|\vec{n}|} \cdot \vec{n} \tag{46}$$

Begriffe Vektoren

- **Skalarprodukt**
  - $\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \Rightarrow \vec{v} \perp \vec{w}$
  - $\langle a \cdot \vec{v}, \vec{w} \rangle = a \cdot \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle$
  - $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \perp \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$
  - $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = \arccos\left(\frac{\langle \vec{v}, \vec{w} \rangle}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}\right)$

Kreuzprodukt



Parameteriesierte Kurve

Anleitung

1. Funktion zeichnen
2. τ einsetzen und Wert für jeweilige Achse bestimmen
3. Grenzen bestimmen

Formeln

$\gamma : [\tau_0, \tau_E] \Rightarrow \mathbb{R}^n$

$$\tau \mapsto \vec{\gamma}(\tau) := \begin{bmatrix} \gamma_1(\tau) \\ \gamma_2(\tau) \\ \vdots \\ \gamma_n(\tau) \end{bmatrix} \tag{47}$$

- Geschwindigkeitsvektor: $\vec{v}(\tau) := \dot{\vec{\gamma}}(\tau)$
- Bahngeschwindigkeit: $\vec{v}(\tau) := |\vec{v}(\tau)|$
- Bahnvektor für $\vec{v}(\tau) \neq 0$: $\hat{e}(\tau) := \hat{v}(\tau)$
- Beschleunigungsvektor: $\vec{a}(\tau) := \dot{v}(\tau)$
- Bahnbeschleunigung: $a_B(\tau) := \langle a(\tau), \hat{e}(\tau) \rangle$
- Bahn: $B := \vec{\gamma}([\tau_0, \tau_E])$
- Ortsvektor zeigt von Ursprung auf Punkt der Bahn
- $x^2 \Rightarrow \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$

Kurven Integral

Skalares Kurvenintegral

$$\int_\gamma f\, d\vec{s} = \int_a^b f(\vec{\gamma}(t)) \cdot \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| dt \tag{48}$$

Vektorielles Kurvenintegral

$$\int_\gamma \langle \vec{v}(t), d\vec{s} \rangle = \int_a^b \langle \vec{v}(\vec{\gamma}(t)), \dot{\vec{\gamma}}(t) \rangle\, dt \tag{49}$$

Benötigt

- Funktion (Skalar) oder Vektorfeld (Vektoriell)
- Kurve
- Grenzen der Kurve

Anleitung

1. Kurve parameterisieren $\vec{v}$ oder $\vec{w}$
2. Tangentialvektor $\vec{\gamma}$
3. In
4. Sei $\langle \vec{w}, \hat{e} \rangle =: C \equiv$ konst dann gilt: $I = C \cdot \Delta s$

Bogenlänge

$$\Delta s = \int_a^b \left|\dot{\vec{\gamma}}(t)\right| dt \tag{50}$$

1. Gradient der Kurve ableiten
2. Betrag des Gradienten berechnen (Satz des Pythagoras)
3. In 50 einsetzen und integrieren

Standardkurven

Kreis mit Mittelpunkt M

$$s(\tau) = M + \begin{bmatrix} R \cdot \cos\tau \\ R \cdot \sin\tau \end{bmatrix} \tag{51}$$

Zylinder

$$P(\varphi; z) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos\varphi \\ R \cdot \sin\varphi \\ z \end{bmatrix} \tag{52}$$

$\varphi \in [0, 2\pi[\,; z \in [0, H]$

Kugel

$$P(\theta; \varphi) = \begin{bmatrix} R \cdot \sin\theta \cdot \cos\varphi \\ R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi \\ R \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \tag{53}$$

$\theta \in [0, \pi[\,; \varphi \in [0, 2\pi[$

R = Radius | r = Variable

Kegel

$$P(\varphi; r) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos\varphi \\ r \cdot \sin\varphi \\ \frac{H}{R} \cdot r \end{bmatrix} \tag{54}$$

$\varphi \in [0, 2\pi[\,; r \in [0, R]$

Turnus

$$P(\theta; \varphi) = \begin{bmatrix} (R + r \cdot \sin\theta) \cdot \cos\varphi \\ (R + r \cdot \sin\theta) \cdot \sin\varphi \\ r \cdot \cos\theta \end{bmatrix} \tag{55}$$

$\theta, \varphi \in [0, 2\pi[$

Gradient

$$\nabla f := \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ \vdots \\ f_{,n} \end{bmatrix} \quad (56)$$

- Faktor-Regel: $\nabla(a \cdot g(x)) = a \cdot \nabla g(x)$
- Summen-Regel: $\nabla(g(x) + h(x)) = \nabla g(x) + \nabla h(x)$
- Linearität: $\nabla(a \cdot g(x) + b \cdot h(x)) = a \cdot \nabla g(x) + b \cdot \nabla h(x)$
- Produkt-Regel: $\nabla(g(x) \cdot h(x)) = \nabla g(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot \nabla h(x)$
- Ketten-Regel $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$: $\nabla f = g'(h(x^1; \cdots; x^n)) \cdot \nabla h(x)$
- Ketten-Regel $\mathbb{R}^n \Rightarrow \mathbb{R}$: $f'(x) = \langle \nabla g(\vec{h}(x)), \vec{h}'(x) \rangle$

Hessematrix

$$H = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} & \cdots & f_{,1,n} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} & \cdots & f_{,2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{,n,1} & f_{,n,2} & \cdots & f_{,n,n} \end{bmatrix} \quad (57)$$

Schwarz-Clairaut-Young-Satz

$$H = H^T \quad (58)$$

Richtungsableitung

Formel

$$\frac{\nabla f(x_0; y_0)^T \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|} \quad (59)$$

$$|\nabla f| \quad (60)$$

$$\arctan |\nabla f| \quad (61)$$

Folgendes muss gegeben sein:

1. Richtung $\vec{r}$
2. Punkt $P(x_0; y_0)$
3. Gradient ∇f

Anleitung

1. Gradient berechnen
2. Betrag des Richtungsvektor berechnen
3. Punkt in Gradient einsetzen
4. Mit Formel 59 berechnen
5. Steilster Anstieg berechnen (Betrag des Gradienten) 60
6. Steigungswinkel 61

Divergenz

$$\nabla \cdot \vec{v} = v^1_{,1} + v^2_{,2} + \cdots + v^n_{,n} \quad (62)$$

- Quelle: $\nabla \cdot \vec{v} > 0$
- Senke: $\nabla \cdot \vec{v} < 0$
- Quellenfrei: $\nabla \cdot \vec{v} = 0$
- Faktor-Regel: $\nabla \cdot \vec{v} > 0$
- Summen-Regel: $\nabla \cdot \vec{v} + \vec{w} = \nabla \cdot \vec{v} + \nabla \cdot \vec{w}$
- Produkt-Regel: $\nabla \cdot f \cdot \vec{v} = \langle \nabla f, \vec{v} \rangle + fcdot \nabla \cdot \vec{v}$

Beispiel

$$\vec{v}\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xz - 4e^{2z} \\ 2z + 2xe^{-4y} \\ 3xy^2 z \end{pmatrix}$$

$$div\,\vec{v} = \vec{\nabla} \circ \vec{v}$$

1. Gradient berechnen :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = 3z$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = -4 \cdot 4x \cdot e^{-4y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = 3xy^2$$

2. Divergenz Gleichung aufstellen

$$div\,\vec{v} = \vec{\nabla} \circ \vec{v}$$

$$= \sum_{i=x}^{z} \partial_i v_i = 3z - 16x \cdot e^{-4y} + 3xy^2$$

3. Punkt in Gleichung einsetzen und Divergenz bestimmen: $P(x_P|y_P|z_P)$

Rotation

Rotation

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{v}^1_{,1} - \vec{v}^1_{,2} \quad (63)$$

Rotation in 3D

$$\operatorname{rot} v = \begin{bmatrix} v^3_{,2} - v^2_{,3} \\ v^1_{,3} - v^3_{,1} \\ v^2_{,1} - v^1_{,2} \end{bmatrix} \quad (64)$$

Tangentialebene

$$z = f(x_0; y_0) + \nabla f_x(x_0; y_0) \cdot (x - x_0) + \nabla f_y(x_0; y_0) \cdot (y - y_0) \quad (65)$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} f_x(x_0; y_0) \\ f_y(x_0; y_0) \\ -z \end{pmatrix} \quad (66)$$

66 Normalenvektor, welcher senkrecht auf der Tangentialebene steht

Priorisierung um den Gradienten in die Tangentialebenenform zu bekommen

1. Faktorisieren
2. Additionsverfahren
3. Umstellen und Einsetzen

Beispiel

$$f(x, y) = x^3 + x^2 \cdot \ln y^2 + 1 - 3x$$

$$\nabla f(x, y) = \begin{matrix} 3x^2 - 2x \cdot \ln y^2 + 1 - 3 \\ -\frac{2x^2 y}{y^2+1} \end{matrix}$$

$$f(3; 1) = 27 - 9 \cdot \ln 2 - 9 = 18 - 9 \cdot \ln 2$$

$$\nabla f_x(3; 1) = 27 - 6 \ln 2 - 3 = 24 - 6 \ln 2$$

$$\nabla f_y(3; 1) = -9$$

$$-45 + 9 \ln 2 - 6x \ln 2 + 24x - 9y$$

Totales Differential

Formel für das Totale Differential

$$df = f_x \cdot dx + f_y + \ldots + f_n \quad (67)$$

$$df = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i} \cdot d_{x_i} \quad (68)$$

Anleitung für das Totale Differential

1. Gradient der Funktion berechnen
2. Komponenten des Gradienten addieren
3. Falls benötigt Punkt für Komponenten x,y,.. etc. einsetzen

Extremwertstellen/Kritische Stellen

Lagrange Verfahren einfügen

$$\text{Kritische Stellen } = \nabla f \stackrel{!}{=} 0 \quad (69)$$

$$L(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) + \lambda \cdot g(\vec{x}) \quad (70)$$

$$\nabla L \stackrel{!}{=} 0 \quad (71)$$

(72)

Matrizen

Begriffe

- **Rechenregel**
  Transposition
  $\bullet (A^T)^T = a$ $\bullet\, (A + B)^T = A^T + B^T$ $\bullet\, (a \cdot A)^T = a \cdot A^T$
  Multiplikation
  $\bullet A^{n_1 \times m} \cdot B^{m \times n_2}$ $\bullet\, (a \cdot A) \cdot B = a \cdot (B \cdot A) = A \cdot (a \cdot B)$
  $\bullet (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ $\bullet\, A \cdot (B \cdot C) = A \cdot B + A \cdot C$
  $\bullet (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$ $\bullet\, (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

- **Spektrum**
  Menge der Eigenvektoren

- **Spur**
  Diagonale addiert $\operatorname{tr}(A) = A^1_1 + A^1_1 + \cdots + A^n_n = \sum_0^n \lambda_n$
  $\bullet \operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr}(A)$ $\bullet \operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$
  $\bullet \operatorname{tr}(a \cdot A) = a \cdot \operatorname{tr}(A)$ $\bullet \operatorname{tr}(A \cdot B) = \operatorname{tr}(B \cdot A)$

- **Bild und Kern**
  Bild
  $\operatorname{img}(a) = a(V) = \{\vec{w} \in \mathbb{W} \,|\, \vec{v} \in \mathbb{V} \text{ mit } a(\vec{v}) = \vec{w}\}$
  Kern
  $\ker(a) = \{\vec{v} \in \mathbb{V} \,|\, a(\vec{v}) = 0\}$
  $A \cdot \text{Kern} = \vec{0}$
  Ist $\ker(a) = 0$ dann hat a einen trivialen Kern. Eine reguläre Matrix hat einen trivialen Kern.
  Dimensionssatz
  dim(kern(A)) + dim(img(A)) = dim(A)

- **Regulärsatz**
  Einer quadratische Matrix A ist genau dann regulär, wenn gilt $\det(A) \neq 0$

- **Orthogonale Matrizen**
  $A^{-1} = A^T$
  $A^T \cdot A = \mathbb{1}$

- **Quadratische Matrizen**
  $\bullet n^2$ Komponenten
  $\bullet A^3 = A \cdot A \cdot A$ w

Definitheit

Hier noch erklären was Definit bedeutet und wie es zu bestimmen ist

Standardmatrizen

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (73)$$

$$\mathbb{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (74)$$

$$\mathbb{P}_{\curvearrowright x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (75)$$

$$\mathbb{P}_{\curvearrowright y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (76)$$

$$\mathbb{Z}_a = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad (77)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (78)$$

$$\mathbb{S}_{\curvearrowright x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (79)$$

$$\mathbb{S}_{\curvearrowright y} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (80)$$

$$\mathbb{R}_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (81)$$

$$\mathbb{R}_{\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (82)$$

$$\mathbb{R}_{-\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (83)$$

- 73: Einheitsmatrix
- 74: Punktspiegelungs-matrix
- 75: Projektionsmatrix auf X-Achse
- 76: Projektionsmatrix auf Y-Achse
- 77: Zentrische Komponenten Streckungs Matrix
- 78: Komponenten Streckungs Matrix

- 79 Spiegelungs-Matrix an der X-Achse
- 80 Spiegelungs-Matrix an der Y-Achse
- 81 Rotations-Matrix um den Ursprung 180◦
- 82 Rotations-Matrix mit Winkel φ
- 83 Rotations-Matrix mit Winkel φ im Gegenuhrezeigersin

Spaltenvektorkonstruktionsverfahren

noch nicht fertig Transformationsmatrix erklärung fehlt noch
Beispiel hinzufügen

1. Vektoren definieren (Einheitsvektoren)
2. Gleichung aufstellen S_{xy}
3. Erhaltene Vektoren zusammenbauen
4. Determinante berechnen

Determinante

Regeln

- $\det(A^T) = \det(A)$
- $\det(a \cdot A^T) = a^n \cdot \det(A)$
- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$ falls A regulär
- Zeilen-/Spaltentausch
  $\det(A) \mapsto -\det(A)$
- Multiplikation einer Zeile/Spalte mit a
  $\det(A) \mapsto a \cdot \det(A)$
- Invarianz: Subtrahiert man von einer Zeile ein vielfaches einer anderen Zeile, so ändert sich die Determinante nicht

2x2 Matrizen

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a \cdot d) - (c \cdot b) \quad (84)$$

3x3 Matrizen

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{matrix} (a \cdot e \cdot i) + (b \cdot f \cdot g) + (c \cdot d \cdot h) \\ -(g \cdot e \cdot c) - (h \cdot f \cdot a) - (i \cdot d \cdot b) \end{matrix} \quad (85)$$

4x4 Matrizen / nxn Matrix

$$\begin{pmatrix} a^{+} & b^{-} & c^{+} & d^{-} \\ e^{-} & f^{+} & g^{-} & h^{+} \\ i^{+} & j^{-} & k^{+} & l^{-} \\ m^{-} & n^{+} & o^{-} & p^{+} \end{pmatrix} = A^{4x4}$$

1. Spalte/Reihe mit den meisten Nullen auswählen
2. Die Vorfaktoren der Spalten/Reihenwerte mit der Vorzeichenmatrix (+, -) bestimmen

$$\det(A^{4\times4}) = \overbrace{D_a + D_e + D_i + D_m}^{\boxed{4}} = \underbrace{\begin{cases} D_a = \boxed{+} a \cdot \det\begin{pmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} \\ D_e = \boxed{-} e \cdot \det\begin{pmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} \\ D_i = \boxed{+} i \cdot \det\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{pmatrix} \\ D_m = \boxed{-} m \cdot \det\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{pmatrix} \end{cases}}_{\boxed{3}} \quad (86)$$

3. 3x3 Matrizen aufstellen durch abdecken der Zeilen und Spalten des jeweiligen Vorfaktors
4. Ergebnisse addieren ergibt die Determinante der 4x4 Matrix

Inverse berechnen mittels Adjunkter Matrix

Wichtiges

Benötigt

- Det(A) $\neq 0$
- 2x2 im Kopf | 3x3 mit Taschenrechner | 3x3 - nxn mit Adjunkte Matrix

- Det(A) $= 0 \not\Rightarrow A^{-1}$
  Det(A) $\neq 0 \Rightarrow A^{-1}$
- $(a \cdot A)^{-1} = \frac{1}{a} \cdot A^{-1}$
- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
- $(A^{-1})^{-1} = A$

2x2 Matrix

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad (87)$$

Anleitung 3x3, 4x4 - nxn

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{bmatrix} \boxed{+}\det\begin{pmatrix} f & g & h \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} e & g & k \\ i & k & l \\ m & o & p \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} e & f & h \\ i & j & l \\ m & n & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} e & f & g \\ i & j & k \\ m & n & o \end{pmatrix} \\ \boxed{-}\det\begin{pmatrix} b & c & d \\ j & k & l \\ n & o & p \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & c & d \\ i & k & l \\ m & o & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} a & b & d \\ i & j & l \\ m & n & p \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ i & j & k \\ m & n & o \end{pmatrix} \\ \boxed{+}\det\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ n & o & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ m & o & p \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ m & n & p \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ m & n & o \end{pmatrix} \\ \boxed{-}\det\begin{pmatrix} b & c & d \\ f & g & h \\ j & k & l \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & c & d \\ e & g & h \\ j & k & l \end{pmatrix} & \boxed{-}\det\begin{pmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{pmatrix} & \boxed{+}\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{pmatrix} \end{bmatrix}^{T} \quad (88)$$

1. Determinante von A berechnen
2. Determinanten der inneren Matrizen berechnen und das Ergebnis mit jeweiligem Vorzeichen eintragen (3x3 Spaltenweise mit TS ausrechnen)
3. Matrix transponieren
4. $A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}$ prüfen

Eigenwerte

Formeln

Charakteristisches Polynom

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda \cdot \mathbb{1} - A) \quad (89)$$

$$p_A(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + a_0 \quad (90)$$

Eigenwertproblem

$$A\vec{x} = \lambda \cdot \vec{x}, \qquad \vec{x} \neq \vec{0} \quad (91)$$

Wichtiger Satz

$$Rang(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A^{-1}\nexists$$
$$\Leftrightarrow A\vec{x} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \notin \mathrm{EW}(A) \quad (92)$$

Wichtiges

- $\lambda =$ Eigenwert
- $\vec{x} =$ Eigenvektor
- $a_n = 1$

- $a_{n-1} = -\operatorname{tr}(A)$
- $a_0 = (-1)^n \cdot \det(A)$

Anleitung

1. Gleichung des Charakteristischen Polynoms aufstellen
2. Determinante berechnen mit einer der folgenden Optionen:
   •85 3×3 Determinante - Regel von Sarü
   •86 N×N Determinante
3. 90 ⇔ Charakteristisches Polynom
   •Hinterer Teil zusammenfassen
   •Grad n •Max. n Lösungen
   •$n = 2 : p_A(\lambda) = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A)$
   •$n = 2$ falls $D > 0$: Mitternachtsformel **??**
   •$n > 2$ Hornerschema **??**

4. Prüfung der Ergebnisse der Eigenwerte
   •$\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=n}^{n} \lambda_k$ •$\det(A) = \prod_{k=n}^{n} \lambda_k$
   •EW von $A^{-1} = \frac{1}{\lambda}$
5. Ausrechnen der Eigenvektoren ist bei den Eigenvektoren beschrieben

$\boxed{1}$: 91 $\Rightarrow A\vec{x} - \lambda\vec{x} = \vec{0}$

89 : $(\underbrace{A - \mathbb{1}\lambda}_{A})\vec{x} = \vec{0}$

$$\boxed{2} : \det\left(\overbrace{\begin{pmatrix} A_{11}-\lambda_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda_{33} \end{pmatrix}}^{A}\right)\vec{x} \overset{!}{=} \vec{0}$$

$\boxed{3}$: 90 : $p_A(\lambda) = a_n \cdot \lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \cdots + a_1 \cdot \lambda + \overbrace{a_0}^{\text{Hinterer Teil}}$

Eigenvektoren

Notwendig für die Berechnung der Eigenvektoren

- Eigenwerte

Anleitung

1. Für jeden Eigenwert eine Tabelle aufstellen mit $A - \lambda_n$ damit es zum Rangverlust kommt
2. Mittels Gauss links unten Nullen Produzieren
3. Mittels Treppentrick freie Parameter bestimmen
4. Einsetzen
5. Faktor aus/rein multiplizieren, damit es ein ganzzahligen EW gibt

$\boxed{1}$: **Eigenvektor zu** λ_i

$$\boxed{2} : \begin{array}{r|r|r|l} x & y & z & 0 \\ \hline A_{11}-\lambda_i & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22}-\lambda_i & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda_i & 0 \end{array}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{3} : \begin{array}{r|r|r|l} x & y & z & 0 \\ \hline \boxed{A_{11}-\lambda_i} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ 0 & \boxed{A_{22}-\lambda_i} & A_{23} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{A_{33}-\lambda_i} & 0 \end{array}$$

$$\boxed{4} : \begin{pmatrix} t \cdot x \\ t \cdot y \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{5} : t \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

Diagonalisierung einer Matrix

Formel

$$S^{-1}AS = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A = SDS^{-1} \tag{93}$$

$$A\underbrace{Se_i}_{\vec{x}_i} = S(De_i) = S\lambda_i e_i = \lambda_i \cdot \underbrace{Se_i}_{\vec{x}_i}$$

$$\Rightarrow A\vec{x}_i = \lambda_i\vec{x}_i, \vec{x}_i \qquad (91)$$

Wichtiges

- A: Eine Matrix
- S: Matrix mit Eigenvektoren
- D: Diagonalmatrix mit Eigen- werten
- e_i: Spalteneinheitsvektor

Anleitung

1. Eigenwerte ausrechnen 91
2. Wenn n $>$ 2: Eigenvektoren normieren
3. Matrizen D und S aufstellen
4. Inverse von S ausrechnen
   •Bei orthogonaler Matrix: $S^{-1} = S^T$
   •Wenn n $\geqslant$ 3: Mit dem Adjunkten Verfahren die Matrix berechnen (88)
   •Wenn n $>$ 3 und Matrix nicht orthogonal: Gram-Schmidt-Orthogonalisierungsverfahren
5. 93 aufstellen

$\boxed{3}$

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \vec{x}_{EV_{1_1}} & \vec{x}_{EV_{2_1}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_1}} \\ \vec{x}_{EV_{1_2}} & \vec{x}_{EV_{2_2}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{EV_{1_n}} & \vec{x}_{EV_{2_n}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{EW_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{EW_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{EW_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_{EV_{1_1}} & \vec{x}_{EV_{2_1}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_1}} \\ \vec{x}_{EV_{1_2}} & \vec{x}_{EV_{2_2}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{EV_{1_n}} & \vec{x}_{EV_{2_n}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_n}} \end{pmatrix}^{-1} \tag{94}$$

Matrix Potenzieren

Benötigt

- Bei hohen Potenzen wird die Diagonalisierte Matrix benötigt 93

Formel

$$A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A = SDS^{-1} \cdot SDS^{-1} \cdot \ldots \cdot SDS^{-1} \tag{95}$$

$$A^m = SD^mS^{-1}$$

$$\frac{1}{a}\begin{pmatrix} \vec{x}_{EV_{1_1}} & \vec{x}_{EV_{2_1}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_1}} \\ \vec{x}_{EV_{1_2}} & \vec{x}_{EV_{2_2}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{EV_{1_n}} & \vec{x}_{EV_{2_n}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_n}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_{EW_1}^m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_{EW_2}^m & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_{EW_n}^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{x}_{EV_{1_1}} & \vec{x}_{EV_{2_1}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_1}} \\ \vec{x}_{EV_{1_2}} & \vec{x}_{EV_{2_2}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_2}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{x}_{EV_{1_n}} & \vec{x}_{EV_{2_n}} & \cdots & \vec{x}_{EV_{n_n}} \end{pmatrix}^{-1} \tag{96}$$