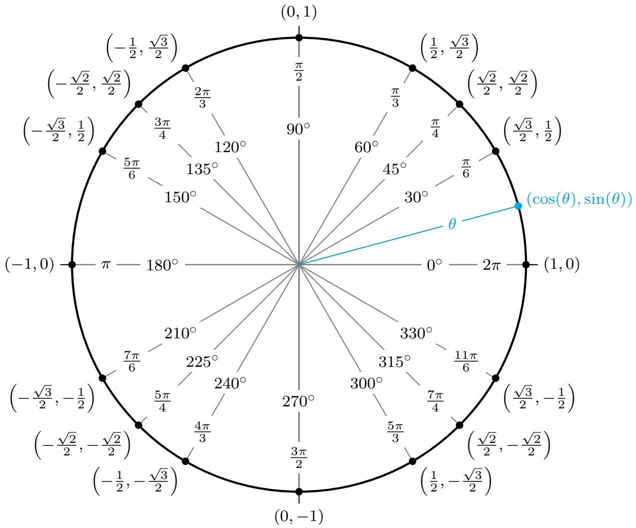
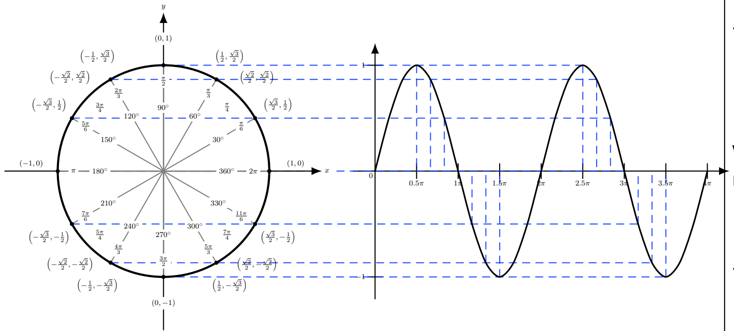
Analysis

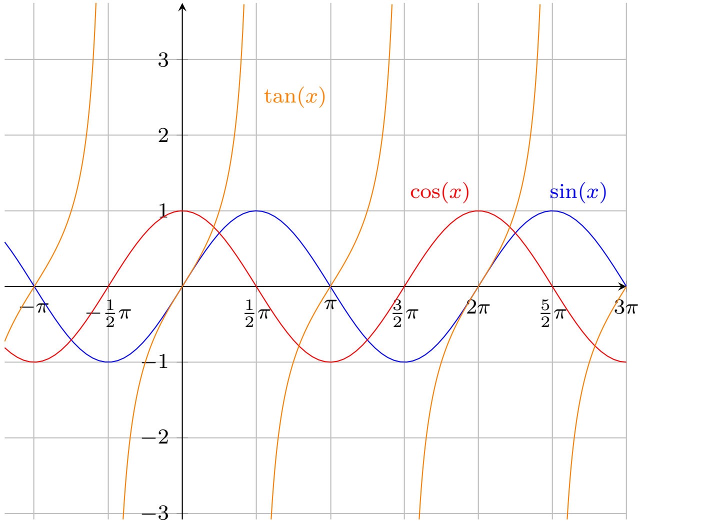
Trigonometrie

Einheitskreis





Sin	Cos	Tan	Cot
G	A	G	A
H	H	A	G



Integrale

Substitution

Normale Substitution

$$\int_a^b f(g(x))dx \quad | \quad u(x) = g(x) \quad | \quad u'(x) = g'(x) \quad | \quad du = u'(x)\cdot dx$$

$$\int_{u(a)}^{u(b)} u(x)\frac{1}{u'(x)}\,du \quad | \quad dx = \frac{1}{u'(x)}\,du \tag{1}$$

Wenn nach einer Substitution noch ein x in der Gleichung vorhanden ist, muss dieses in ein u umgewandelt werden.

$$\int \frac{e^{2x}}{1+e^2}\,dx \quad | \quad u = 1+e^x \quad | \quad u' = e^x \quad | \quad du = e^x\,dx \Leftrightarrow du = \frac{1}{e^x}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{u}\cdot\frac{1}{e^x}\,du = \int \frac{e^x}{u}\,du \quad | \quad u = 1+e^x \Leftrightarrow e^x = u-1$$

$$\int \frac{u-1}{u}\,du = \int \frac{u}{u} - \frac{1}{u}\,du = \int 1 - \frac{1}{u}\,du = \underline{\underline{u - \ln|u| + c}}$$

Umgekehrte Substitution (Example)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx \quad | \quad x = \sin u \quad | \quad x' = \cos u$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 u}\cdot\cos u\,du \quad | \quad dx = \cos u\,du \Leftrightarrow du = \frac{1}{\cos u}\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 u\,du \quad = \quad \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin 2u}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}$$

Standardintegrale

Standard

$$\int a^a\,dx = \frac{a^x}{\ln x} \tag{2}$$

Sinus

$$\int \sin x\cdot\cos x\,dx = \frac{1}{2}\cdot\sin^2 x + c \tag{3}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x + c \tag{4}$$

Cosinus

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x + c \tag{5}$$

$$\int \cot x\,dx = \frac{1}{\tan x} + c = \ln|\sin x| + c = \frac{\cos x}{\sin x} + c \tag{6}$$

$$\int \coth x\,dx = \frac{\cosh x}{\sinh x} + c \tag{7}$$

Tangents

$$\int \tan x\,dx = \frac{1}{\cot x} + c = -\ln|\cos x| + c = \frac{\sin x}{\cos x} + c \tag{8}$$

$$\int \tanh x\,dx = \frac{\sinh x}{\cosh x} + c \tag{9}$$

Add these derrivatives somewhere usefull

$$\frac{d}{dx}\tan x = 1 + \tan^2 x \tag{10}$$

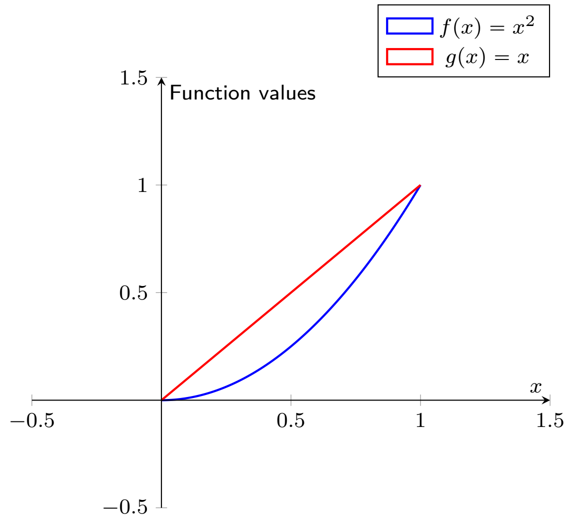
$$\frac{d}{dx}\cot x = -1 - \cot^2 x \tag{11}$$

Integralfläche berechnen (analytisch)

Sobald sich Funktionen schneiden, muss das Integral aufgeteilt werden. Wenn die Fläche über/unter der X-Achse berechnet werden soll, kann diese als Funktion $g(x) = 0$ angesehen werden.

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \tag{12}$$

Scale Plot and make a better example



Anleitung

1. Funktionen gleich setzen, um Nullstellen zu berechnen
2. Integrale bilden
3. Berechnen

Trapezformel (Numerisch)

$S_1 = y_1 + y_n \qquad S_2 = y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}$

$$\frac{1}{2} \cdot h \cdot S_1 + h \cdot S_2 \tag{13}$$

1. Stützstellen bestimmen und ausrechnen
2. Mit Taschenrechner alle Stützstellen mittels Formel 13 zusammenrechnen

Volumenintegral berechnen

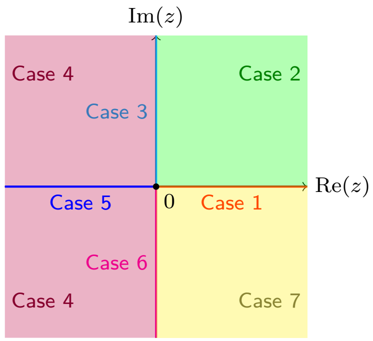
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx \tag{14}$$

Anleitung

1. Rotation um Y-Achse → Umkehrfunktion bestimmen
2. Mit der Formel 14 das Volumen berechnen

Komplexe Zahlen

$$\arg(z) = \begin{cases} 0 & \text{if } \operatorname{Re}(z) \geqslant 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \quad | \quad \text{CASE 1} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) & \text{if } \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0 \quad | \quad \text{CASE 2} \\ \frac{\pi}{2} & \text{if } \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) > 0 \quad | \quad \text{CASE 3} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) < 0 \quad | \quad \text{CASE 4} \\ \pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) < 0 \wedge \operatorname{Im}(z) = 0 \quad | \quad \text{CASE 5} \\ \frac{3\pi}{2} & \text{if } \operatorname{Re}(z) = 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0 \quad | \quad \text{CASE 6} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + 2\pi & \text{if } \operatorname{Re}(z) > 0 \wedge \operatorname{Im}(z) < 0 \quad | \quad \text{CASE 7} \end{cases}$$



Koordinaten

Kartesische Koordinaten
Ein System, das Punkte durch (x, y) beschreibt
Polarkoordinaten
Punkte werden durch den Abstand r und den Winkel φ dargestellt: (r, φ)
Polarkoordinaten - Komplexe Representation
$\operatorname{cis}\varphi = \cos\varphi \cdot i \cdot \sin\varphi$

Komplexe Zahlen: $z = r \cdot \operatorname{cis}\varphi$
Exponential Koordinaten
Verwendung der Euler'schen Formel: $z = re^{i\varphi}$

$$x = r \cdot \cos\phi \quad | \quad y = r \cdot \sin\phi \tag{15}$$

$$\varphi = \arctan\frac{x}{y} \tag{16}$$

$$z = re^{i\varphi} = x + iy = r \cdot \operatorname{cis}\varphi \tag{17}$$

Koordinaten Wechsel

Kartesisch ⇒ Polar

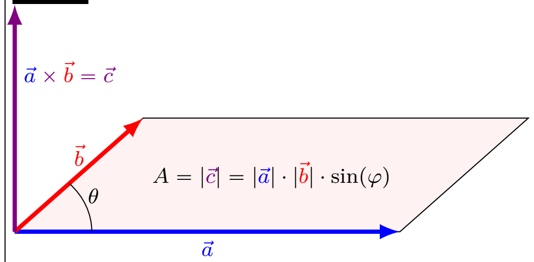
Polar ⇒ Kartesisch

(18)

(19)

Lineare Algebra

Vektoranalysis



Variabletabbele

Übungsaufgaben