Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 6

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Schwerpunkt, Flächenschwerpunkt, Polarkoordinaten, Zylinderkoordinaten und ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können mit Hilfe der Integration den Schwerpunkt homogener Flächen und von Rotationskörpern berechnen.
- Sie können kartesische in Polarkoordinaten umwandeln und umgekehrt.

1. Schwerpunkt Rotationskörper

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch Drehung der Funktion $f(x) = \ln x\,, 1 \leq x \leq e$ um die x-Achse entsteht.

Zuerst Berechnung des Volumens des Rotationskörpers (Integral durch 2malige partielle Integration lösen – Integrand ist $1 \cdot (\ln x)^2$):

$$V_x = \pi \cdot \int_1^e (\ln x)^2 \, dx = \pi \left[x \left((\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 2 \right) \right]_1^e = \pi (e - 2) = 2{,}257$$

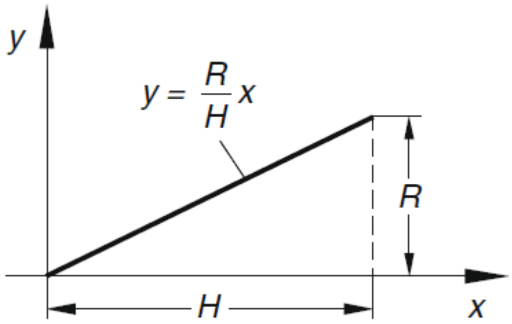
Der Schwerpunkt liegt auf der x-Achse, d. h. $y_s = 0$. Integral durch 2malige partielle Integration lösen.

$$x_s = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_1^e x (\ln x)^2 \, dx = \frac{1}{e - 2} \left[\frac{1}{2} x^2 \left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right) \right]_1^e = \frac{e^2 - 1}{4(e - 2)} = 2{,}224$$

2. Kreiskegel

Gegeben sei ein homogener gerader Kreiskegel mit Radius R, Höhe H und Dichte ρ. Bestimmen Sie das Volumen des Kreiskegels und seinen Schwerpunkt.

Wir legen den Kegel so ins xy-Koordinatensystem, dass die x-Achse der Symmetrieachse des Kreiskegels entspricht, seine Spitze im Ursprung des Koordinatensystems ist und der Kegel durch Rotation der Geraden $y = \frac{R}{H} x$ um die x-Achse entsteht.



Volumen:
$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} [\frac{1}{3}x^3]_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen auf der x-Achse (y_s=0):
$x_s = \frac{\pi}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \int_0^H x \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{3}{R^2 H} \int_0^H x \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{3}{R^2 H} \cdot \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx$
$= \frac{3}{H^3} [\frac{1}{4}x^4]_0^H = \frac{3}{H^3}\frac{1}{4}H^4 = \frac{3}{4}H$

3. Kartesische in Polarkoordinaten
Wie lauten die Polarkoordinaten der Punkte P_1(4;-12), P_2(-3;-3) und P_3(5;-4)?
Hinweis: Fertigen Sie eine Lageskizze an.

$P_1: \; r = \sqrt{160} = 12{,}649; \quad \varphi = 288{,}43°; \qquad P_2: \; r = \sqrt{18} = 4{,}243; \quad \varphi = 225°;$
$P_3: \; r = \sqrt{41} = 6{,}403; \quad \varphi = 321{,}34°$

4. Polar- in kartesische Koordinaten
Von einem Punkt P sind die Polarkoordinaten r und φ bekannt. Wie lauten seine kartesischen Koordinaten?
a) $r = 10, \varphi = 35°$ b) $r = 3{,}56, \varphi = 256{,}5°$ c) $r = 9, \varphi = 120°$

a) P(8,192;5,736) b) P(-0,831;-3,462) c) P(-4,5;7,794)

5. Funktionen in Polarkoordinaten umwandeln
a) Geben Sie die Gleichung für einen Kreis mit Radius 5 um den Ursprung in 2D in kartesischen und Polarkoordinaten an.
b) Gegeben ist die in Polarkoordinaten dargestellte Funktion der impliziten Funktionsgleichung $(x^2 + y^2)^2 - 2xy = 0$.
(i) Wie lautet die Funktionsgleichung in Polarkoordinaten?
(ii) Skizzieren Sie den Kurvenverlauf.

a)
Kreisgleichung um den Ursprung in kartesischen Koordinaten, allgemein:
$x^2 + y^2 = r^2$ mit r: Radius des Kreises
Hier: r = 5 → $x^2 + y^2 = 25$

Umwandlung in Polarkoordinaten:
mit $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi$ ergibt sich:
$$(r\cos\varphi)^2 + (r\sin\varphi)^2 = 25$$
$$r^2\cos\varphi^2 + r^2\sin\varphi^2 = 25$$

$$r^2(\cos\varphi^2 + \sin\varphi^2) = 25$$
$$r^2 = 25$$
$r = 5$ – dies stellt die Kreisgleichung in Polarkoordinaten dar.

b), (i)

$x = r \cdot \cos\varphi; \quad y = r \cdot \sin\varphi; \quad x^2 + y^2 = r^2 \quad \Rightarrow$

$(x^2 + y^2)^2 - 2xy = r^4 - 2r^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = r^2(r^2 - 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi) = 0 \quad \Rightarrow$

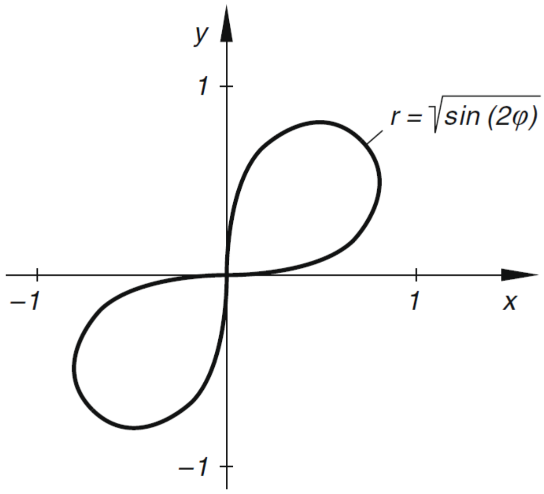
$r^2 - 2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt{\underbrace{2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi}_{\sin(2\varphi)}} = \sqrt{\sin(2\varphi)}$

(ii)

$r \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\varphi \cdot \cos\varphi \geq 0$ (beide Faktoren müssen daher *gleiches* Vorzeichen haben)

Quadrant	I	II	III	IV
sin	+	+	−	−
cos	+	−	−	+

Somit gibt es nur Punkte im 1. und 3. Quadrant



6. Funktionen in kartesische Koordinaten umwandeln

Wandeln Sie die folgenden Funktionsgleichungen in kartesische Koordinaten um.

a) $r = \frac{a}{b\cos\varphi + c\sin\varphi}, a, b, c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

b) $r^2 = 2e^2\cos(2\varphi)$

a)

mit $x = r\cos\varphi, y = r\sin\varphi, r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ergibt sich:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Einsetzen in die Ausgangsgleichung:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{a}{b \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + c \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+y^2} &= \frac{a}{\frac{bx+cy}{\sqrt{x^2+y^2}}} \\
&= \frac{a\sqrt{x^2+y^2}}{bx+cy}
\end{aligned}
$$

Nun auf beiden Seiten mit (bx + cy) multiplizieren und durch $\sqrt{x^2+y^2}$ teilen ergibt: bx + cy -a = 0.

b)

Additionstheorem nutzen:

$$
\begin{aligned}
\cos 2\varphi &= \cos^2\varphi - \sin^2\varphi \\
r^2 &= 2e^2\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\
\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 &= 2e^2\left(\frac{x^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2} - \frac{y^2}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2}\right) \\
x^2+y^2 &= 2e^2\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,.
\end{aligned}
$$

Mit $x^2 + y^2$ multiplizieren und auf eine Seite bringen:

$$
\left(x^2+y^2\right)^2 - 2e^2\left(x^2-y^2\right) = 0
$$

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 6

Computational and Data Science BSc
FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über parametrisierte Flächen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Jede *parametrisierte Fläche* lässt sich als *Graph* einer *Funktion* in *zwei Variablen* darstellen.	○	●
b) Jeder *Graph* einer *Funktion* in *zwei Variablen* lässt sich als *parametrisierte Fläche* darstellen.	●	○
c) Alle *Sphären* im Raum lassen sich als *parametrisierte Flächen* darstellen.	●	○
d) Die *Parametrisierung* einer *parametrisierten Fläche* ist eine *Funktion* des Typs $\mathbf{P}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$.	○	●
e) Die *Parametrisierung* einer *parametrisierten Fläche* ist in jedem Fall *injektiv*.	○	●
f) Die *Parametrisierung* einer *parametrisierten Fläche* ist in jedem Fall *surjektiv*.	○	●

2. Parametrisierte Flächen plotten mit Python/Numpy

Wir plotten die *parametrisierten Flächen* aus Aufgabe 3 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import matplotlib.pyplot as pl;
from mpl_toolkits import mplot3d;
import numpy as np;
# Parameter:
u_0=...; u_E=...; v_0=...; v_E=...; N_u=...; N_v=...; fig=...;
# Funktionen:
def P(u,v): x=...; y=...; z=...; return x,y,z;
# Daten:
u_data=np.linspace(u_0,u_E,N_u);
v_data=np.linspace(v_0,v_E,N_v);
[u_grid,v_grid]=np.meshgrid(u_data,v_data);
[x_grid,y_grid,z_grid]=P(u_grid,v_grid);
# Plot:
fh=pl.figure(fig); ax=pl.axes(projection='3d');
ax.plot_surface(x_grid,y_grid,z_grid,cmap='viridis');
```

```
ax.set_xlabel(r'$x$'); ax.set_ylabel(r'$y$'); ax.set_zlabel(r'$z$');
ax.set_box_aspect((np.ptp(x_grid),np.ptp(y_grid),np.ptp(z_grid)));
```

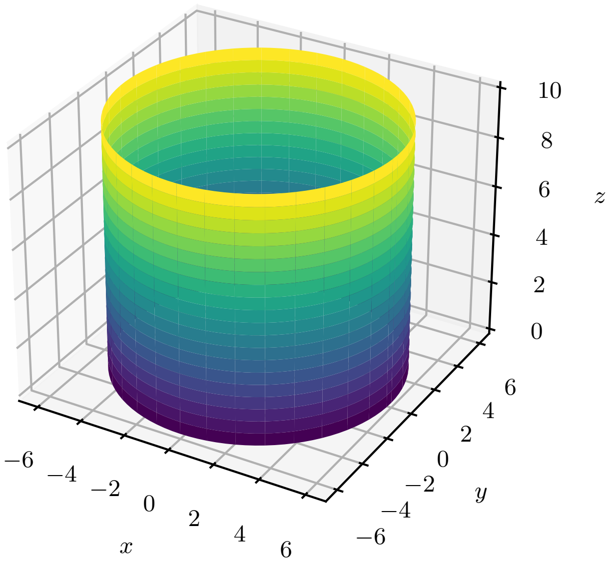
a) Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(\varphi; z) = \begin{bmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{für } R, H > 0;\ \varphi \in [0, 2\pi[;\ z \in [0, H]. \tag{1}$$

Wir wählen die Werte $R = 6$ und $H = 10$ und modifizieren den Code.

```
# Parameter:
R=6; H=10; u_0=0; u_E=2*np.pi; v_0=0; v_E=H;
N_u=101; N_v=21; fig=1;
# Funktionen:
def P(u,v): x=R*np.cos(u); y=R*np.sin(u); z=v; return x,y,z;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



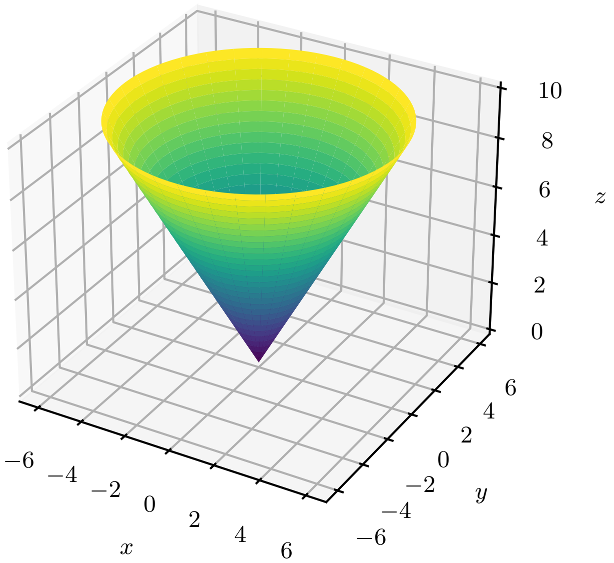
b) Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(\varphi; r) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ \frac{H}{R} \cdot r \end{bmatrix} \quad \text{für } R, H > 0;\ \varphi \in [0, 2\pi[;\ r \in [0, R]. \tag{2}$$

Wir wählen die Werte $R = 6$ und $H = 10$ und modifizieren den Code.

```
# Parameter:
R=6; H=10; u_0=0; u_E=2*np.pi; v_0=0; v_E=R;
N_u=101; N_v=31; fig=fig+1;
# Funktionen:
def P(u,v): x=v*np.cos(u); y=v*np.sin(u); z=H/R*v; return x,y,z;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



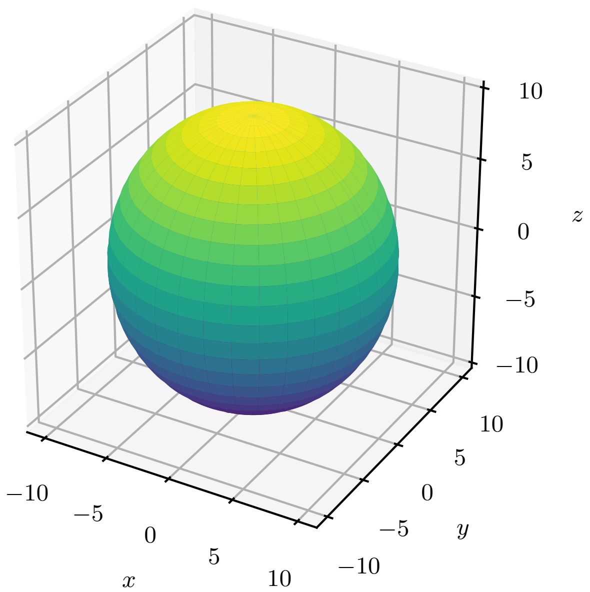
c) Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(\theta;\varphi) = \begin{bmatrix} R\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ R\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ R\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{für } R>0 \wedge \theta\in[0,\pi] \wedge \varphi\in[0,2\pi[\,. \tag{3}$$

Wir wählen den Wert $R = 10$ und modifizieren den Code.

```
# Parameter:
R=10; u_0=0; u_E=np.pi; v_0=0; v_E=2*np.pi;
N_u=51; N_v=101; fig=fig+1;
# Funktionen:
def P(u,v):
        x=R*np.sin(u)*np.cos(v); y=R*np.sin(u)*np.sin(v);
        z=R*np.cos(u); return x,y,z;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



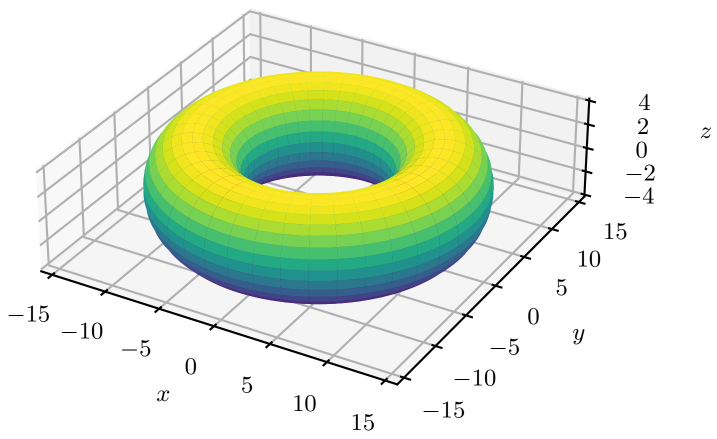
d) Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(\theta;\varphi) = \begin{bmatrix} \big(R + r\cdot\sin(\theta)\big)\cdot\cos(\varphi) \\ \big(R + r\cdot\sin(\theta)\big)\cdot\sin(\varphi) \\ r\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{für } R > r > 0 \,\wedge\, \theta,\varphi \in [0, 2\pi[\,. \tag{4}$$

Wir wählen die Werte $R = 10$ und $r = 4$ und modifizieren den Code.

```
# Parameter:
R=10; r=4; u_0=0; u_E=2*np.pi; v_0=0; v_E=2*np.pi;
N_u=61; N_v=121; fig=fig+1;
# Funktionen:
def P(u,v):
        x=(R+r*np.sin(u))*np.cos(v); y=(R+r*np.sin(u))*np.sin(v);
        z=r*np.cos(u); return x,y,z;
```

Es wird der folgende Plot erzeugt.



3. Parametrisierte Flächen berechnen

Wir berechnen jeweils die *Koordinatenbasis-Vektorfelder*, den *Normalen-Vektor*, die *Metrik*, die *Mass-Funktion* und den *Flächeninhalt* der angegebenen *parametrisierten Fläche*.

a) Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(\varphi;z) = \begin{bmatrix} R\cdot\cos(\varphi) \\ R\cdot\sin(\varphi) \\ z \end{bmatrix} \quad \text{für } R, H > 0;\ \varphi \in [0, 2\pi[\,;\ z \in [0, H]. \tag{5}$$

Durch *Ableiten* erhalten wir die *Koordinatenbasis-Vektorfelder*

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_1}} = \mathbf{P}_{,\varphi}(\varphi;z) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -R\cdot\sin(\varphi) \\ +R\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}}} \tag{6}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_2}} = \mathbf{P}_{,z}(\varphi;z) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}}. \tag{7}$$

Die *Skalar-Produkte* der *Koordinatenbasis-Vektorfelder* ergeben die *Metrik*

$$\underline{\underline{\big[\, g_{\mu\nu} \,\big]}} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1 \,, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 \,, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2 \,, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2 \,, \mathbf{e}_2 \rangle \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{8}$$

Durch Bilden der *Determinante* finden wir die *Mass-Funktion*

$$\underline{\underline{\sqrt{g}}} = \sqrt{R^2 \cdot 1 - 0 \cdot 0} = \sqrt{R^2} = \underline{\underline{R.}} \tag{9}$$

Zunächst berechnen wir

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} -R \cdot \sin(\varphi) \\ +R \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \cdot 1 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - (-R) \cdot \sin(\varphi) \cdot 1 \\ -R \cdot \sin(\varphi) \cdot 0 - R \cdot \cos(\varphi) \cdot 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

Durch *Normierung* mit der *Mass-Funktion* erhalten wir den *Einheitsnormalen-Vektor*

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{R} \cdot \begin{bmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}}}. \tag{11}$$

Mit Hilfe des *Mass-Integrals* erhalten wir den *Flächeninhalt*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \int_M 1 \,\mathrm{d}A = \int_U \sqrt{g} \,\mathrm{d}U = \int_0^{2\pi} \int_0^H R \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}\varphi = R \cdot \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^H 1 \,\mathrm{d}z \\ &= R \cdot \Big[\, \varphi \,\Big]\Big|_0^{2\pi} \cdot \Big[\, z \,\Big]\Big|_0^{H} = R \cdot (2\pi - 0) \cdot (H - 0) = R \cdot 2\pi \cdot H = \underline{\underline{2\pi R H.}} \end{aligned} \tag{12}$$

b) Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(\varphi; r) = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ \frac{H}{R} \cdot r \end{bmatrix} \quad \text{für } R, H > 0;\ \ \varphi \in [0, 2\pi[;\ \ r \in [0, R]. \tag{13}$$

Durch *Ableiten* erhalten wir die *Koordinatenbasis-Vektorfelder*

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_1}} = \mathbf{P}_{,\varphi}(\varphi; r) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -r \cdot \sin(\varphi) \\ +r \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}}} \tag{14}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_2}} = \mathbf{P}_{,r}(\varphi; r) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \frac{H}{R} \end{bmatrix}}}. \tag{15}$$

Die *Skalar-Produkte* der *Koordinatenbasis-Vektorfelder* ergeben die *Metrik*

$$\underline{\underline{\left[g_{\mu\nu}\right]}} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_2 \rangle \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{H^2}{R^2} \end{bmatrix}}}. \tag{16}$$

Durch Bilden der *Determinante* finden wir die *Mass-Funktion*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\sqrt{g}}} &= \sqrt{r^2 \cdot \left(1 + \frac{H^2}{R^2}\right) - 0 \cdot 0} = \sqrt{r^2 \cdot \left(\frac{R^2}{R^2} + \frac{H^2}{R^2}\right)} = \sqrt{\frac{r^2}{R^2} \cdot \left(R^2 + H^2\right)} \\ &= \underline{\underline{\frac{r}{R} \cdot \sqrt{R^2 + H^2}}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Zunächst berechnen wir

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 &= \begin{bmatrix} -r \cdot \sin(\varphi) \\ +r \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ \frac{H}{R} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{H}{R} - 0 \cdot \sin(\varphi) \\ 0 \cdot \cos(\varphi) - (-r) \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{H}{R} \\ -r \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi) - r \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{H}{R} \\ r \cdot \sin(\varphi) \cdot \frac{H}{R} \\ -r \end{bmatrix} = \frac{r \cdot H}{R} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\frac{R}{H} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{18}$$

Durch *Normierung* mit der *Mass-Funktion* erhalten wir den *Einheitsnormalen-Vektor*

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\frac{r}{R} \cdot \sqrt{R^2 + H^2}} \cdot \frac{r \cdot H}{R} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\frac{R}{H} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\frac{H}{\sqrt{R^2 + H^2}} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ -\frac{R}{H} \end{bmatrix}}}. \tag{19}$$

Mit Hilfe des *Mass-Integrals* erhalten wir den *Flächeninhalt*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \int_M 1 \, \mathrm{d}A = \int_U \sqrt{g} \, \mathrm{d}U = \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r}{R} \cdot \sqrt{R^2 + H^2} \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{R} \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^R r \, \mathrm{d}r = \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{R} \cdot \Big[\varphi\Big]\Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[r^2\Big]\Big|_0^R \\ &= \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{R} \cdot (2\pi - 0) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(R^2 - 0\right) = \frac{\sqrt{R^2 + H^2}}{R} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} \cdot R^2 \\ &= \underline{\underline{\pi R \sqrt{R^2 + H^2}}}. \end{aligned} \tag{20}$$

c) Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(\theta; \varphi) = \begin{bmatrix} R \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ R \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{für } R > 0 \wedge \theta \in [0, \pi] \wedge \varphi \in [0, 2\pi[. \tag{21}$$

Durch *Ableiten* erhalten wir die *Koordinatenbasis-Vektorfelder*

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_1}} = \mathbf{P}_{,\theta}(\theta; \varphi) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} R \cdot \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ -R \cdot \sin(\theta) \end{bmatrix}}} \tag{22}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_2}} = \mathbf{P}_{,\varphi}(\theta;\varphi) = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -R\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ +R\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}}}. \tag{23}$$

Die *Skalar-Produkte* der *Koordinatenbasis-Vektorfelder* ergeben die *Metrik*

$$\underline{\underline{\left[\, g_{\mu\nu} \,\right]}} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_2 \rangle \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cdot\sin^2(\theta) \end{bmatrix}}}. \tag{24}$$

Durch Bilden der *Determinante* finden wir die *Mass-Funktion*

$$\underline{\underline{\sqrt{g}}} = \sqrt{R^2\cdot R^2\cdot\sin^2(\theta) - 0\cdot 0} = \sqrt{R^4\cdot\sin^2(\theta)} = R^2\cdot|\sin(\theta)| = \underline{\underline{R^2\cdot\sin(\theta).}} \tag{25}$$

Zunächst bemerken wir, dass der *Ortsvektor* $\mathbf{P}(\theta;\varphi)$ überall *senkrecht* auf der *Sphäre* steht und nach aussen zeigt. Wir wählen daher

$$\mathbf{n} = \mathbf{P}(\theta;\varphi) = \begin{bmatrix} R\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ R\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ R\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{26}$$

Durch *Normierung* erhalten wir den *äusseren Einheitsnormalen-Vektor*

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{|\mathbf{n}|}\cdot\mathbf{n} = \frac{1}{R}\cdot\begin{bmatrix} R\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ R\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ R\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}}}. \tag{27}$$

Mit Hilfe des *Mass-Integrals* erhalten wir den *Flächeninhalt*

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A}} &= \oint_M 1\,\mathrm{d}A = \int_U \sqrt{g}\,\mathrm{d}U = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2\cdot\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = R^2\cdot\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi\cdot\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= R^2\cdot\Big[\varphi\Big]\Big|_0^{2\pi}\cdot(-1)\cdot\Big[\cos(\theta)\Big]\Big|_0^{\pi} = R^2\cdot(2\pi-0)\cdot(-1)\cdot\Big(\cos(\pi)-\cos(0)\Big) \\ &= R^2\cdot 2\pi\cdot(-1)\cdot(-1-1) = R^2\cdot 2\pi\cdot 2 = \underline{\underline{4\pi R^2.}} \end{aligned} \tag{28}$$

d) Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(\theta;\varphi) = \begin{bmatrix} \big(R + r\cdot\sin(\theta)\big)\cdot\cos(\varphi) \\ \big(R + r\cdot\sin(\theta)\big)\cdot\sin(\varphi) \\ r\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix} \quad \text{für } R > r > 0 \,\wedge\, \theta,\varphi \in [0, 2\pi[\,. \tag{29}$$

Durch *Ableiten* erhalten wir die *Koordinatenbasis-Vektorfelder*

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_1}} = \mathbf{P}_{,\theta}(\theta;\varphi) = \begin{bmatrix} \big(0 + r\cdot\cos(\theta)\big)\cdot\cos(\varphi) \\ \big(0 + r\cdot\cos(\theta)\big)\cdot\sin(\varphi) \\ -r\cdot\sin(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r\cdot\cos(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ r\cdot\cos(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ -r\cdot\sin(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{r \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix}}} \tag{30}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{e}_2}} = \mathbf{P}_{,\varphi}(\theta;\varphi) = \begin{bmatrix} -\big(R + r \cdot \sin(\theta)\big) \cdot \sin(\varphi) \\ +\big(R + r \cdot \sin(\theta)\big) \cdot \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\big(R + r \cdot \sin(\theta)\big) \cdot \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}}}. \tag{31}$$

Die *Skalar-Produkte* der *Koordinatenbasis-Vektorfelder* ergeben die *Metrik*

$$\underline{\underline{\big[\, g_{\mu\nu} \,\big]}} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_1 \,, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_1 \,, \mathbf{e}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{e}_2 \,, \mathbf{e}_1 \rangle & \langle \mathbf{e}_2 \,, \mathbf{e}_2 \rangle \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & \big(R + r \cdot \sin(\theta)\big)^2 \end{bmatrix}}}. \tag{32}$$

Durch Bilden der *Determinante* finden wir die *Mass-Funktion*

$$\underline{\underline{\sqrt{g}}} = \sqrt{r^2 \cdot \big(R + r \cdot \sin(\theta)\big)^2 - 0 \cdot 0} = \sqrt{r^2 \cdot \big(R + r \cdot \sin(\theta)\big)^2} = r \cdot \big(R + r \cdot \sin(\theta)\big)$$

$$= \underline{\underline{r \cdot R + r^2 \cdot \sin(\theta).}} \tag{33}$$

Zunächst berechnen wir

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = \big(R + r \cdot \sin(\theta)\big) \cdot r \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \big(r \cdot R + r^2 \cdot \sin(\theta)\big) \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot 0 + \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) - \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot 0 \\ \cos(\theta) \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\varphi) + \cos(\theta) \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$= \big(r \cdot R + r^2 \cdot \sin(\theta)\big) \cdot \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big) \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \big(r \cdot R + r^2 \cdot \sin(\theta)\big) \cdot \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Durch *Normierung* mit der *Mass-Funktion* erhalten wir den *Einheitsnormalen-Vektor*

$$\underline{\underline{\hat{\mathbf{n}}}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{r \cdot R + r^2 \cdot \sin(\theta)} \cdot \big(r \cdot R + r^2 \cdot \sin(\theta)\big) \cdot \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}}}. \tag{35}$$

Mit Hilfe des *Mass-Integrals* erhalten wir den *Flächeninhalt*

$$\underline{\underline{A}} = \oint_M 1\,\mathrm{d}A = \int_U \sqrt{g}\,\mathrm{d}U = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(r\cdot R + r^2\cdot\sin(\theta)\Big)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{2\pi}\Big(r\cdot R + r^2\cdot\sin(\theta)\Big)\,\mathrm{d}\theta = \Big[\varphi\Big]\Big|_0^{2\pi}\cdot\Big[r\cdot R\cdot\theta - r^2\cdot\cos(\theta)\Big]\Big|_0^{2\pi}$$
$$= (2\pi - 0)\cdot\Big(r\cdot R\cdot 2\pi - r^2\cdot\cos(2\pi) - 0 + r^2\cdot\cos(0)\Big)$$
$$= 2\pi\cdot\big(2\pi\cdot r\cdot R - r^2\cdot 1 + r^2\cdot 1\big) = 2\pi\cdot 2\pi\cdot r\cdot R = \underline{\underline{4\pi^2 rR.}} \tag{36}$$

4. Aussagen über parametrisierte Flächen

Wir betrachten eine *parametrisierte Fläche* M mit *Parametrisierung* $\mathbf{P} : U \to M$, *Koordinatenbasis-Vektorfelder* $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$, *Normalen-Vektor* $\mathbf{n}$ und *Mass-Funktion* $\sqrt{g}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) In jedem Fall zeigen $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ *tangential* zu M.	●	○
b) In jedem Fall gilt $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$.	○	●
c) In jedem Fall ist $\mathbf{n}$ eine *Linearkombination* von $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$.	○	●
d) In jedem Fall gilt $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{n}$ und $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{n}$.	●	○
e) In jedem Fall gilt $\sqrt{g} = \lvert\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2\rvert$.	●	○
f) Die *Metrik* ist genau dann *diagonal*, wenn gilt $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$.	●	○

5. Aussagen über eine parametrisierte Fläche

Wir betrachten die *parametrisierte Fläche*

$$\mathbf{P}(u;v) = \begin{bmatrix} 1+u+v \\ 2-u+2v \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{für } u \in [0,1] \wedge v \in [0,2]. \tag{37}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Es gilt $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{e}}_z$.	●	○
b) Die *Fläche* ist ein Rechteck.	○	●
c) Die *Fläche* ist ein *Parallelogramm*.	●	○
d) Die *Metrik* ist eine *diagonale Matrix*.	○	●
e) Weil die *Fläche* teil einer *Ebene* ist, gilt $\sqrt{g} = 1$.	○	●
f) Der *Flächeninhalt* beträgt 2.	○	●

6. Aussagen über den Fluss von Vektorfeldern

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Um den *Fluss* durch eine *Fläche* zu berechnen, muss man das *Vektorfeld* im gesamten Raum kennen.	○	●
b) Verdoppelt man die *Länge* aller *Vektoren*, dann verdoppelt man auch den *Fluss* eines *Vektorfeldes* durch eine *Fläche*.	●	○
c) Steht ein *Vektorfeld* überall *senkrecht* auf dem *Einheitsnormalenvektor* einer *Fläche*, dann verschwindet der *Fluss* durch diese *Fläche*.	●	○
d) Verschwindet der *Fluss* eines *Vektorfeldes* durch eine *Fläche*, dann steht es überall *senkrecht* auf dem *Einheitsnormalenvektor* dieser *Fläche*.	○	●
e) Für jedes *Vektorfeld* verschwindet der *Fluss* durch eine *geschlossene Fläche*.	○	●
f) Für jedes *homogene Vektorfeld* verschwindet der *Fluss* durch eine *geschlossene Fläche*.	●	○

7. Berechnen von sphärischen Flüssen

Wir berechnen jeweils den *Fluss* des *Vektorfeldes* durch die *Sphäre* S mit *Mittelpunkt* am *Ursprung* und *Radius* $R = 2$. Die *Massfunktion* und der *äussere Einheitsnormalenvektor* in der üblichen *Parametrisierung* dieser *Sphäre* sind

$$\sqrt{g} = R^2 \cdot \sin(\theta) = 2^2 \cdot \sin(\theta) = 4 \cdot \sin(\theta) \quad \text{bzw.} \quad \hat{\mathbf{n}} = \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}. \tag{38}$$

a) Wir betrachten entlang der *Sphäre* S das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y; z) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}(\theta; \varphi) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{39}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \right\rangle = 0 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) + 0 \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) + 3 \cdot \cos(\theta) \\ &= 0 + 0 + 3 \cdot \cos(\theta) = 3\,\cos(\theta). \end{aligned} \tag{40}$$

Für den *Fluss* des *Vektorfeldes* durch die *Sphäre* S erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}}} &= \oint_S \langle \mathbf{v}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A = \int_U \langle \mathbf{v}\,, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \sqrt{g} \, \mathrm{d}U = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} 3 \cdot \cos(\theta) \cdot 4 \cdot \sin(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi \\ &= 3 \cdot 4 \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta) \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = \frac{3 \cdot 4}{2} \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin(2\theta) \, \mathrm{d}\theta \\ &= 6 \cdot \Big[\varphi \Big] \Big|_0^{2\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[-\cos(2\theta) \Big] \Big|_0^{\pi} = 3 \cdot (2\pi - 0) \cdot \Big(-\cos(2\pi) + \cos(0) \Big) \\ &= 3 \cdot 2\pi \cdot (-1 + 1) = 6\pi \cdot 0 = \underline{\underline{0}}. \end{aligned} \tag{41}$$

b) Wir betrachten entlang der *Sphäre* S das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}(\theta;\varphi) = \begin{bmatrix} R\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ R\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ R\cdot\cos(\theta) \end{bmatrix} = R\cdot\hat{\mathbf{n}} = 2\cdot\hat{\mathbf{n}}. \tag{42}$$

Es gilt

$$\langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle = \langle 2\cdot\hat{\mathbf{n}}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle = 2\cdot\langle\hat{\mathbf{n}}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle = 2\cdot 1 = 2. \tag{43}$$

Für den *Fluss* des *Vektorfeldes* durch die *Sphäre* S erhalten wir daraus

$$\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}}} = \oint_S \langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle\,\mathrm{d}A = \oint_S 2\,\mathrm{d}A = 2\cdot\oint_S 1\,\mathrm{d}A = 2\cdot A = 2\cdot 4\pi\cdot R^2 = 8\cdot\pi\cdot 2^2 = \underline{\underline{32\pi.}} \tag{44}$$

c) Wir betrachten entlang der *Sphäre* S das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}(\theta;\varphi) = \begin{bmatrix} -R\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ R\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ 2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{45}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle &= \left\langle \begin{bmatrix} -2\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ 2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix} \right\rangle \\ &= -2\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi)\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi) + 2\cdot\sin(\theta)\cdot\cos(\varphi)\cdot\sin(\theta)\cdot\sin(\varphi) + 0\cdot\cos(\theta) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned} \tag{46}$$

Für den *Fluss* des *Vektorfeldes* durch die *Sphäre* S erhalten wir daraus

$$\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}}} = \oint_S \langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle\,\mathrm{d}A = \oint_S 0\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{0.}} \tag{47}$$

8. Konstante Flüsse durch Zylinder und Sphären

Wir bearbeiten die folgenden Teilaufgaben.

a) Es sei $r = \sqrt{x^2+y^2}$. Wir betrachten entlang der *Zylinder-Mantelfläche* Z mit der z-Achse als *Symmetrieachse*, *Radius* $R > 0$ und *Höhe* $H > 0$ das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \frac{f(r)}{r}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{v}(\varphi;z) = \frac{f(R)}{R}\cdot\begin{bmatrix} R\cdot\cos(\varphi) \\ R\cdot\sin(\varphi) \\ 0 \end{bmatrix} = f(R)\cdot\hat{\mathbf{n}}. \tag{48}$$

Es gilt

$$\langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle = \langle f(R)\cdot\hat{\mathbf{n}}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle = f(R)\cdot\langle\hat{\mathbf{n}}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle = f(R)\cdot 1 = f(R). \tag{49}$$

Für den *Fluss* des *Vektorfeldes* durch die *Zylinder-Mantelfläche* Z erhalten wir daraus

$$\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{v}}(R)}} = \int_Z \langle \mathbf{v}\,,\hat{\mathbf{n}}\rangle\,\mathrm{d}A = \int_Z f(R)\,\mathrm{d}A = f(R)\int_Z 1\,\mathrm{d}A = f(R)\cdot A = \underline{\underline{f(R)\cdot 2\pi RH.}} \tag{50}$$

b) Wenn der *Fluss* aus Teilaufgabe a) nicht vom *Radius* R des *Zylinders* abhängen soll, dann gibt es eine *Konstante* $C \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$C = \Phi_{\mathbf{v}}(R) = f(R) \cdot 2\pi RH \qquad \Big| : \big(2\pi RH\big) \tag{51}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{C}{2\pi RH} = f(R). \tag{52}$$

Die *Funktion* $f(r)$ muss in diesem Fall von der Form

$$\underline{\underline{f(r) = \frac{C}{2\pi Hr} \sim \frac{1}{r}}} \tag{53}$$

sein, d.h. sie fällt mit dem *Kehrwert* der *Zylinder-Mantelfläche* mit *Radius* r ab.

c) Es sei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Wir betrachten entlang der *Sphäre* S mit *Mittelpunkt* am *Ursprung* und *Radius* $R > 0$ das *Vektorfeld*

$$\mathbf{w}(x; y; z) = \frac{g(r)}{r} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; \mathbf{w}(\theta; \varphi) = \frac{g(R)}{R} \cdot \begin{bmatrix} R \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\theta) \cdot \sin(\varphi) \\ R \cdot \cos(\theta) \end{bmatrix} = g(R) \cdot \hat{\mathbf{n}}. \tag{54}$$

Es gilt

$$\langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = \langle g(R) \cdot \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = g(R) \cdot \langle \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{n}} \rangle = g(R) \cdot 1 = g(R). \tag{55}$$

Für den *Fluss* des *Vektorfeldes* durch die *Sphäre* S erhalten wir daraus

$$\underline{\underline{\Phi_{\mathbf{w}}(R)}} = \oint_S \langle \mathbf{w}, \hat{\mathbf{n}} \rangle \, \mathrm{d}A = \oint_S g(R) \, \mathrm{d}A = g(R) \oint_S 1 \, \mathrm{d}A = g(R) \cdot A = \underline{\underline{g(R) \cdot 4\pi R^2.}} \tag{56}$$

d) Wenn der *Fluss* aus Teilaufgabe c) nicht vom *Radius* R der *Sphäre* abhängen soll, dann gibt es eine *Konstante* $C \in \mathbb{R}$, so dass gilt

$$C = \Phi_{\mathbf{w}}(R) = g(R) \cdot 4\pi R^2 \qquad \Big| : \big(4\pi R^2\big) \tag{57}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{C}{4\pi R^2} = g(R). \tag{58}$$

Die *Funktion* $g(r)$ muss in diesem Fall von der Form

$$\underline{\underline{g(r) = \frac{C}{4\pi r^2} \sim \frac{1}{r^2}}} \tag{59}$$

sein, d.h. sie fällt mit dem *Kehrwert* der *Fläche* der *Spähre* mit *Radius* r ab.