Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 4

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Matrix, symmetrische/schiefsymmetrische Matrix, Einheitsmatrix, inverse Matrix, Transposition und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können Matrizen addieren, subtrahieren und mit einem Skalar bzw. mit einer anderen Matrix multiplizieren und bestimmen, ob diese Operationen für gegebene Matrizen durchführbar sind oder nicht.

---

1. Aussagen über Matrizen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Eine reelle 2 x 3 Matrix besteht aus 2 Zeilen und 3 Spalten.	X	
b) Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann als 1 x 1 Matrix aufgefasst werden.	X	
c) Ein Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}$ kann als reelle 3 x 1 Matrix interpretiert werden.	X	
d) Eine reelle 2 x 3 Matrix hat 8 Komponenten.		X
e) Wenn A eine 2123 x 8248 Matrix ist und B eine 8248 x 9178 Matrix, dann ist die Summe $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ definiert.		X
f) Wenn A eine 2123 x 8248 Matrix ist und B eine 8248 x 9178 Matrix, dann ist das Produkt $\mathrm{A}\bullet\mathrm{B}$ definiert.	X	
g) Wenn $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei Vektoren sind, dann ist das Produkt $\vec{v} \cdot \vec{u}^T$ definiert.	X	
h) Für zwei beliebige quadratische Matrizen gilt: $\mathrm{A}\bullet\mathrm{B}=\mathrm{B}\bullet\mathrm{A}$.		X
i) Für jede beliebige Matrix gilt: $(((A^T)^T)^T)^T = (A^T)^T$.	X	
j) Hat eine Matrix genau 13 Komponenten, so handelt es sich entweder um eine 13 x 1 oder eine 1 x 13 Matrix.	X	
k) Wenn A eine 16 x 20 Matrix und B eine 16 x 30 Matrix ist, dann ist das Produkt $\mathrm{A}^\mathrm{T}\bullet\mathrm{B}$ definiert.	X	
l) Für 2 beliebige 2 x 2 Matrizen A und B mit $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ gilt: $\mathrm{A}\bullet\mathrm{B}\neq\mathrm{B}\bullet\mathrm{A}$.		X
m) Ist eine 2 x 2 Matrix sowohl symmetrisch als auch schiefsymmetrisch, dann gilt: $\mathrm{A}=0$.	X	

2. Addition, Subtraktion, Transposition mit Matrizen

Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke mit den gegebenen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

a) $C = A + B$ b) $C = -2A$ c) $C = B/3$ d) $C = 2B - A$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}$$

e) $D + E + F$ f) $3D - 2(E + 5F)$ g) $3D^T - 3(E + 2F)^T$
h) $2(D + E) - 3(D^T - E^T)^T + 5(F - 2D)$

a)

$$\underline{\underline{C}} = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 3+9 & -1+3 \\ 4+(-6) & -2+6 & 8+3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & 12 & 2 \\ -2 & 4 & 11 \end{bmatrix}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{C}} = -2 \cdot A = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 4 & (-2)\cdot(-2) & (-2)\cdot 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -8 & 4 & -16 \end{bmatrix}}}.$$

c)

$$\underline{\underline{C}} = \frac{B}{3} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{3} & \frac{9}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{-6}{3} & \frac{6}{3} & \frac{3}{3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}}$$

d)

$$\underline{\underline{C}} = 2 \cdot B - A = \begin{bmatrix} 2\cdot(-3) - 1 & 2\cdot 9 - 3 & 2\cdot 3 - (-1) \\ 2\cdot(-6) - 4 & 2\cdot 6 - (-2) & 2\cdot 3 - 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -7 & 15 & 7 \\ -16 & 14 & -2 \end{bmatrix}}}$$

e)

$$\begin{pmatrix} 3 + 1 + 5 & 2 + 8 + 0 & 5 - 2 + 10 \\ -1 + 3 + 0 & 2 + 0 - 2 & 3 + 1 + 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 13 \\ 2 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

f)

$$\begin{pmatrix} -43 & -10 & -81 \\ -9 & 26 & -73 \end{pmatrix}$$

g)

$$\begin{pmatrix} -35 & -15 \\ -26 & 22 \\ -57 & -59 \end{pmatrix}$$

h)

$$\begin{pmatrix} -3 & 18 & -15 \\ 26 & -32 & 12 \end{pmatrix}$$

3. Matrizen berechnen mit Python/Numpy

Berechnen Sie die Matrizen aus Aufgabe 2a) – d) mit Python/Numpy.

```
# Initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[1,3,-1],[4,-2,8]]);
B=np.array([[-3,9,3],[-6,6,3]]);
# Berechnungen:
C=A+B;
E=-2*A;
F=(1/3)*B;
G=2*B-A;
# Ausgabe:
print('C=',C);
print('E=',E);
print('F=',F);
print('G=',G);
```

4. Produkte von Matrizen

Gegeben seien die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die jeweiligen Produkte der Matrizen.

a) $C = A \cdot B$ b) $C = B \cdot A$ c) $C = A \cdot \mathbb{E}$ d) $C = \mathbb{E} \cdot A$

a)

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2\cdot(-1)+4\cdot 2 & 2\cdot 4+4\cdot(-3) \\ 3\cdot(-1)+1\cdot 2 & 3\cdot 4+1\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+8 & 8-12 \\ -3+2 & 12-3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}.}}$$

b)

$$\underline{\underline{C}} = B \cdot A = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 2+4\cdot 3 & (-1)\cdot 4+4\cdot 1 \\ 2\cdot 2+(-3)\cdot 3 & 2\cdot 4+(-3)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+12 & -4+4 \\ 4-9 & 8-3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \neq A \cdot B.}}$$

c)

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1+4\cdot 0 & 2\cdot 0+4\cdot 1 \\ 3\cdot 1+1\cdot 0 & 3\cdot 0+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 0+4 \\ 3+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A.}}$$

d)

$$\underline{\underline{C}} = \mathbb{1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1\cdot 2+0\cdot 3 & 1\cdot 4+0\cdot 1 \\ 0\cdot 2+1\cdot 3 & 0\cdot 4+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 4+0 \\ 0+3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A.}}$$

➔ Die Multiplikation von Matrizen ist im Allgemeinen nicht kommutativ, d. h. abhängig von den Matrizen A und B kann entweder $AB = BA$ oder $AB \neq BA$ gelten.

5. Produkte mit Matrizen II

Gegeben seien die Matrizen

$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die jeweiligen Produkte der Matrizen.

a) $C = A^T \cdot A$ b) $C = A \cdot A^T$ c) $C = (A \cdot B)^T$
d) $C = A^T \cdot B^T$ e) $C = B^T \cdot A^T$ f) $C = (B^T \cdot A^T)^T$

Transponierte Matrizen:

$A^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$

a)

$$\underline{\underline{C}} = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+4 & -3-2 \\ -3-2 & 1+1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+1 & -6-1 \\ -6-1 & 4+1 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \neq A^T \cdot A.}}$$

c)

$$\underline{\underline{C}} = (A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 & (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6-3 & -3-4 \\ -4+3 & 2+4 \end{bmatrix}^T$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}}}.$$

d)

$$\underline{\underline{C}} = A^T \cdot B^T = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+2 & 9-8 \\ -2-1 & -3+4 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \neq (A \cdot B)^T.}}$$

e)

$$\underline{\underline{C}} = B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2\cdot 3+3\cdot(-1) & 2\cdot(-2)+3\cdot 1 \\ (-1)\cdot 3+4\cdot(-1) & (-1)\cdot(-2)+4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3 & -4+3 \\ -3-4 & 2+4 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = (A\cdot B)^T.}}$$

f)

$$\underline{\underline{C}} = \left(B^T \cdot A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = A\cdot B.}}$$

6. Produkte mit Matrizen III

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ \vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix},\ \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die jeweiligen Produkte (falls definiert) der Matrizen.

a) $A\cdot B$	b) $B\cdot A$	c) $A\cdot\vec{u}$	d) A^2	e) B^2
f) $\vec{v}^T\cdot\vec{u}$	g) $\vec{v}\cdot\vec{u}$	h) $\vec{u}\cdot\vec{v}^T$	i) $B^T\cdot\vec{v}$	j) $\vec{v}^T\cdot B$

a)

$$\underline{\underline{A\cdot B}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 45 & 58 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}.}}$$

b)

Das Produkt $B\cdot A$ ist nicht definiert.

c)

$$\underline{\underline{A\cdot\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -14 \\ -16 \\ -16 \end{bmatrix}.}}$$

d)

$$\underline{\underline{A^2}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4 & -22 & -1 \\ 31 & -24 & 37 \\ -19 & -7 & -3 \end{bmatrix}.}}$$

e)

Das Produkt B^2 ist nicht definiert.

f)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}^T\cdot\mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix} = \underline{\underline{18.}}$$

g)

Das Produkt $\vec{v}\cdot\vec{u}$ ist nicht definiert.

h)

$$\underline{\underline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -6 \\ -4 & -12 & 12 \end{bmatrix}}}.$$

i)

$$\underline{\underline{B^T \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -9 \\ -8 \end{bmatrix}}}.$$

j)

$$\underline{\underline{\mathbf{v}^T \cdot B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -9 & -8 \end{bmatrix} = \left(B^T \cdot \mathbf{v}\right)^T}}.$$

7. Matrizen berechnen mit Python/Numpy

Berechnen Sie die Matrizen aus Aufgabe 7 mit Python/Numpy.

```
# Initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[4,-3,2],[6,2,5],[-1,-2,3]]);
B=np.array([[3,4],[1,2],[5,6]]);
u=np.array([[0],[2],[-4]]);
v=np.array([[1],[3],[-3]])
# Berechnungen:
C=A@B;
# D=B@A; nicht definiert
E=A@u;
F=A@A;
# G=B@B; nicht definiert
H=v.T@u;
# J=v@u; nicht definiert
K=u@v.T;
L=B.T@v;
M=v.T@B;
# Ausgabe:
print('C= ',C);
print('D kann nicht gebildet werden');
print('E= ',E);
print('F= ',F);
print('G kannn nicht gebildet werden');
print('H= ',H);
print('J kannn nicht gebildet werden');
print('K= ',K);
print('L= ',L);
print('M= ',M);
```

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 4

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über Matrizen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Eine *reelle* 2×3-*Matrix* ist eine Tabelle aus *reellen Zahlen* mit 2 Zeilen und 3 Spalten.	●	○
b) Eine *reelle* 2×3-*Matrix* ist eine Tabelle aus *reellen Zahlen* mit 3 Zeilen und 2 Spalten.	○	●
c) Eine *reelle Zahl* $x \in \mathbb{R}$ kann als *reelle* 1×1-*Matrix* aufgefasst werden.	●	○
d) Ein *Vektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ kann als *reelle* 3×1-*Matrix* aufgefasst werden.	●	○
e) Eine *reelle* 2×3-*Matrix* hat 8 *Komponenten*.	○	●

2. Linearkombinationen von Matrizen

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Wir berechnen jeweils die angegebene *Linearkombination*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 & 9 & 3 \\ -6 & 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+(-3) & 3+9 & -1+3 \\ 4+(-6) & -2+6 & 8+3 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & 12 & 2 \\ -2 & 4 & 11 \end{bmatrix}}}. \tag{2}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = -2 \cdot A = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 1 & (-2)\cdot 3 & (-2)\cdot(-1) \\ (-2)\cdot 4 & (-2)\cdot(-2) & (-2)\cdot 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -2 & -6 & 2 \\ -8 & 4 & -16 \end{bmatrix}}}. \tag{3}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = \frac{B}{3} = \begin{bmatrix} \frac{-3}{3} & \frac{9}{3} & \frac{3}{3} \\ \frac{-6}{3} & \frac{6}{3} & \frac{3}{3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}}}. \tag{4}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = 2 \cdot B - A = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) - 1 & 2 \cdot 9 - 3 & 2 \cdot 3 - (-1) \\ 2 \cdot (-6) - 4 & 2 \cdot 6 - (-2) & 2 \cdot 3 - 8 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -7 & 15 & 7 \\ -16 & 14 & -2 \end{bmatrix}}}. \tag{5}$$

3. Linearkombinationen berechnen mit Python/Numpy

Wir berechnen die *Linearkombinationen* aus Aufgabe 2 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[1,3,-1],[4,-2,8]]);
B=np.array([[-3,9,3],[-6,6,3]]);
# Berechnungen:
C=...;
# Ausgabe:
print(f"C =\n{C}");
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=A+B;
```

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=-2*A;
```

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=B/3;
```

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=2*B-A;
```

4. Elementare Matrix-Produkte

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Wir berechnen jeweils das angegebene *Matrix-Produkt*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot B = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot (-3) \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 4 + 1 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 8 & 8 - 12 \\ -3 + 2 & 12 - 3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}}}. \tag{7}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = B \cdot A = \begin{bmatrix} (-1)\cdot 2 + 4\cdot 3 & (-1)\cdot 4 + 4\cdot 1 \\ 2\cdot 2 + (-3)\cdot 3 & 2\cdot 4 + (-3)\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+12 & -4+4 \\ 4-9 & 8-3 \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \neq A \cdot B.}} \tag{8}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot \mathbb{1} = \begin{bmatrix} 2\cdot 1 + 4\cdot 0 & 2\cdot 0 + 4\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 1\cdot 0 & 3\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 0+4 \\ 3+0 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A.}} \tag{9}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = \mathbb{1} \cdot A = \begin{bmatrix} 1\cdot 2 + 0\cdot 3 & 1\cdot 4 + 0\cdot 1 \\ 0\cdot 2 + 1\cdot 3 & 0\cdot 4 + 1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+0 & 4+0 \\ 0+3 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A.}} \tag{10}$$

Aus den Ergebnissen der Teilaufgaben a) bis d) können wir die folgenden Rechenregeln für *Matrizen* einsehen, welche tatsächlich allgemeingültig sind:

i) Die *Matrix-Multiplikation* ist nicht immer *kommutativ*, das heisst, es gibt sowohl *Matrizen* für welche gilt $A \cdot B = B \cdot A$, als auch *Matrizen*, für welche wir $A \cdot B \neq B \cdot A$ finden.

ii) Für jede beliebige $n \times n$-*Matrix* A gilt $A \cdot \mathbb{1} = \mathbb{1} \cdot A = A$. Die *Einheitsmatrix* spielt somit in der *Matrix-Algebra* eine vergleichbare Rolle, wie die Zahl *Eins* in der Algebra der *reellen Zahlen*.

5. Aussagen über Matrizen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Wenn A eine $2'123 \times 8'248$-*Matrix* und B eine $8'248 \times 9'178$-*Matrix* ist, dann ist die *Summe* $A + B$ definiert.	○	●
b) Wenn A eine $2'123 \times 8'248$-*Matrix* und B eine $8'248 \times 9'178$-*Matrix* ist, dann ist das *Produkt* $A \cdot B$ definiert.	●	○
c) Wenn $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ zwei *Vektoren* sind, dann ist das *Produkt* $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}^T$ definiert.	●	○
d) Für zwei beliebige, *quadratische Matrizen* gilt $A \cdot B = B \cdot A$.	○	●
e) Für jede beliebige *Matrix* gilt $\left(\left(\left(A^T\right)^T\right)^T\right)^T = \left(A^T\right)^T$.	●	○
f) Hat eine *Matrix* genau 11 *Komponenten*, dann handelt es sich um eine 11×1-*Matrix* oder um eine 1×11-*Matrix*.	●	○

6. Matrix-Produkt und Transposition

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

Für die *transponierten Matrizen* erhalten wir

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Wir berechnen jeweils die angegebenen *Matrix-Transpositionen* und *Matrix-Produkte* und bestimmen Sie die *Symmetrie-Eigenschaften* der Ergebnisse.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A^T \cdot A = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 \\ (-1) \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+4 & -3-2 \\ -3-2 & 1+1 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 13 & -5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}}}. \tag{13}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich $\underline{\underline{\textit{symmetrisch}}}$.

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A \cdot A^T = \begin{bmatrix} 3 \cdot 3 + (-1) \cdot (-1) & 3 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \\ (-2) \cdot 3 + 1 \cdot (-1) & (-2) \cdot (-2) + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+1 & -6-1 \\ -6-1 & 4+1 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 10 & -7 \\ -7 & 5 \end{bmatrix} \neq A^T \cdot A.}} \tag{14}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich $\underline{\underline{\textit{symmetrisch}}}$.

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = (A \cdot B)^T = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \\ (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 & (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 6-3 & -3-4 \\ -4+3 & 2+4 \end{bmatrix}^T$$
$$= \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}}}. \tag{15}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich weder *symmetrisch* noch *schiefsymmetrisch*.

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = A^T \cdot B^T = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) & 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \\ (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & (-1) \cdot 3 + 1 \cdot 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6+2 & 9-8 \\ -2-1 & -3+4 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \neq (A \cdot B)^T.}} \tag{16}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich weder *symmetrisch* noch *schiefsymmetrisch*.

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{C}} = B^T \cdot A^T = \begin{bmatrix} 2\cdot 3 + 3\cdot(-1) & 2\cdot(-2) + 3\cdot 1 \\ (-1)\cdot 3 + 4\cdot(-1) & (-1)\cdot(-2) + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6-3 & -4+3 \\ -3-4 & 2+4 \end{bmatrix}$$
$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix} = (A\cdot B)^T.}} \tag{17}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich weder *symmetrisch* noch *schiefsymmetrisch*.

f) Mit Hilfe des Ergebnisses aus Teilaufgabe e) erhalten wir

$$\underline{\underline{C}} = \left(B^T \cdot A^T\right)^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -7 & 6 \end{bmatrix}^T = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = A\cdot B.}} \tag{18}$$

$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Wenn wir die in Teilaufgabe e) gefundene Rechenregel anwenden, dann folgt auch

$$\underline{\underline{C}} = \left(B^T \cdot A^T\right)^T = \left((A\cdot B)^T\right)^T = \underline{\underline{A\cdot B = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}}}. \tag{19}$$

Das Ergebnis ist offensichtlich weder *symmetrisch* noch *schiefsymmetrisch*.

7. Matrix-Produkte von Matrizen unterschiedlicher Dimensionen

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A := \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B := \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} := \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}. \tag{20}$$

Wir berechnen, sofern definiert, die folgenden *Matrix-Produkte*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{A\cdot B}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 45 & 58 \\ 10 & 10 \end{bmatrix}}}. \tag{21}$$

b) Das Produkt $B \cdot A$ ist nicht definiert!

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{A\cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -14 \\ -16 \\ -16 \end{bmatrix}}}. \tag{22}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{A^2}} = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 6 & 2 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -4 & -22 & -1 \\ 31 & -24 & 37 \\ -19 & -7 & -3 \end{bmatrix}}}. \tag{23}$$

e) Das *Matrix-Quadrat* B^2 ist nicht definiert!

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\mathbf{v}^T \cdot \mathbf{u}}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \end{bmatrix} = \underline{\underline{18.}} \tag{24}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die *Matrix-Klammern* weggelassen, weil wir nicht zwischen rellen 1×1-*Matrizen* und *rellen Zahlen* unterscheiden.

g) Das Produkt $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ ist nicht definiert!

h) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^T}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -6 \\ -4 & -12 & 12 \end{bmatrix}}}. \tag{25}$$

i) Wir erhalten

$$\underline{\underline{B^T \cdot \mathbf{v}}} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -9 \\ -8 \end{bmatrix}}}. \tag{26}$$

j) Wir erhalten

$$\underline{\underline{\mathbf{v}^T \cdot B}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} -9 & -8 \end{bmatrix} = \left(B^T \cdot \mathbf{v}\right)^T}}. \tag{27}$$

8. Matrix-Produkte berechnen mit Python/Numpy

Wir berechnen die *Matrix-Produkte* aus Aufgabe 7 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```python
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[4,-3,2],[6,2,5],[-1,-2,3]]);
B=np.array([[3,4],[1,2],[5,6]]);
u=np.array([[0],[2],[-4]]);
v=np.array([[1],[3],[-3]]);
# Berechnungen:
C=...;
# Ausgabe:
print(f"C =\n{C}");
```

a) Wir modifizieren den Code.

```python
# Berechnungen:
C=A@B;
```

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Ausgabe:
print(f"Das Matrix-Produkt B*A ist nicht definiert!");
```

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=A@u;
```

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=A@A;
```

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Ausgabe:
print(f"Das Matrix-Produkt B*B ist nicht definiert!");
```

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=v.T@u;
```

g) Wir modifizieren den Code.

```
# Ausgabe:
print(f"Das Matrix-Produkt v*u ist nicht definiert!");
```

h) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=u@v.T;
```

i) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=B.T@v;
```

j) Wir modifizieren den Code.

```
# Berechnungen:
C=v.T@B;
```

9. Aussagen über Matrizen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede 5×8-*Matrix* hat genau 13 *Komponenten.*	○	●
b) Wenn A eine 23×45-*Matrix* und B eine 45×22-*Matrix* ist, dann ist das *Produkt* $A \cdot B$ definiert.	●	○
c) Wenn A eine 16×20-*Matrix* und B eine 16×30-*Matrix* ist, dann ist das *Produkt* $A^T \cdot B$ definiert.	●	○
d) Für zwei beliebige 2×2-*Matrizen* A und B mit $A \neq B$ gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$.	○	●
e) Für jede beliebige *Matrix* gilt $\left(\left(\left(A^T\right)^T\right)^T\right)^T = A^T$.	○	●
f) Ist eine 2×2-*Matrix* A sowohl *symmetrisch* als auch *schiefsymmetrisch*, dann gilt $A = 0$.	●	○

10. Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

Wir betrachten das *lineare Gleichungssystem*

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} 2x & - & y & = & 1 \\ -3x & + & 2y & = & 0. \end{array}\right. \tag{28}$$

a) Wir schreiben das LGSL (28) in einem Gauss-*Schema* und wenden das Gauss-*Verfahren* an. Wir erhalten

$$\boxed{\begin{array}{rr|r} 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ -\frac{3}{2} \end{array}\boxed{\begin{array}{rr|r} [2] & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rr|r} [2] & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rr|r} [2] & -1 & 1 \\ 0 & [1] & 3 \end{array}}. \tag{29}$$

Rang und *Defekt* sind offensichtlich

$$n_{\mathrm{R}} = 2 \quad \text{und} \quad n_{\mathrm{D}} = n_{\mathrm{V}} - n_{\mathrm{R}} = 2 - 2 = 0. \tag{30}$$

Die Variablen x und y sind beide *Pivot-Variablen*, es gibt keine *freien Parameter* und das LGLS ist offensichtlich *eindeutig lösbar*. Durch *Rückwärtseinsetzen* erhalten wir

$$\begin{aligned} 1 \cdot y = 3 \quad &\Rightarrow \quad y = 3 \\ 2 \cdot x - 1 \cdot y = 1 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{1+y}{2} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned} \tag{31}$$

Die *Lösungsmenge* ist demnach

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2;3)\}.}} \tag{32}$$

b) Um das LGLS (28) mit Hilfe einer *Matrix-Gleichung* zu schreiben, definieren wir eine 2×2-*Matrix* aus den Koeffizienten der linken Seite und eine 2×1-*Matrix* aus den Koeffizienten der rechten Seite. Wir erhalten

$$A := \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Ebenso "sammeln" wir die Variablen x und y als *Komponenten* einer 2×1-*Matrix*, d.h. wir definieren

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Die linke Seite des LGLS (28) ist nun einfach die *Matrix-Multiplikation* der *Matrix* A mit der *Matrix* $\mathbf{u}$, welche durch die Gleichung mit der *Matrix* $\mathbf{b}$ der rechten Seite gleichgesetzt wird. Das LGLS (28) kann somit geschrieben werden als

$$A \cdot \mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - y \\ -3x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathbf{b}. \tag{35}$$

Das LGLS (28) ist also äquivalent zur *Matrix-Gleichung*

$$\underline{\underline{A \cdot \mathbf{u} = \mathbf{b}}} \tag{36}$$

für die unbekannte 2×1-*Matrix* $\mathbf{u}$. Die *eindeutige Lösung* von (36) ist gemäss Teilaufgabe a) gegeben durch

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

c) Wir lösen das LGLS (28) bzw. die *Matrix-Gleichung* (36) mit Hilfe von `linalg.solve` in Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code.

```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[2,-1],[-3,2]]); b=np.array([1,0]);
# Berechnungen:
L=np.linalg.solve(A,b);
C=np.linalg.cond(A);
# Ausgabe:
print(f"L = {L}");
print(f"C = {C:#.{3}}");
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2;3)\}.}} \tag{38}$$

d) Wir lösen das LGLS (28) bzw. die *Matrix-Gleichung* (36) mit Hilfe der *inversen Matrix* und `linalg.inv` in Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgenden Code.

```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[2,-1],[-3,2]]); b=np.array([[1],[0]]);
# Berechnungen:
Ai=np.linalg.inv(A);
u=Ai@b;
# Ausgabe:
print(f"u =\n{u}");
```

Gemäss Ausgabe erhalten wir die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \{(2;3)\}.}} \tag{39}$$

11. Matrizen mit Python/Numpy erzeugen

Wir erzeugen jeweils eine Variable in Python/Numpy, welche die angegebene *Matrix* enthält.

a)`A=np.zeros((2,3));`

b) `B=np.ones((2,3));`

c) `C=np.array([np.r_[1.:6.],np.r_[6.:11.]]);`

d) `D=np.array([np.r_[1.:10.:2],np.r_[3.:16.:3]]);`

e) `E=np.eye(3);`

f) `F=-2*np.eye(3);`