Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 1

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Integral, Stammfunktion, lineare Substitution und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Methode der linearen Substitution anwenden, um bestimmte und unbestimmte Integrale von linear modifizierten Elementarfunktionen zu berechnen.
- Sie können den Flächeninhalt zwischen einer Funktion und den Koordinatenachsen bestimmen.
- Sie können den Flächeninhalt zwischen zwei sich schneidenden Funktionen bestimmen.
- Sie können das Volumen von Rotationskörpern bestimmen.

---

1. Aussagen über lineare Substitution

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Methode der linearen Substitution basiert auf der Kettenregel der Differentialrechnung.	X	
b) Die Methode der linearen Modifikation kann nur bei gegebenen Integrationsgrenzen angewandt werden.		X
c) Die Methode der linearen Modifikation eignet sich zur Integration von Linearkombinationen von Funktionen.		X
d) Es gilt: $\int \cos(3x+4)dx = \sin(3x+4) + c$.		X
e) Es gilt: $\int \cos(3x+4)dx = \frac{1}{3}\sin(x) + c$.		X

2. Aufleitung von linear modifizierten Funktionen

Berechnen Sie die folgenden unbestimmten Integrale unter Zuhilfenahme der linearen Substitution.

a) $\int (2x+7)^3 dx$

b) $\int (4-2x)^7 dx$

c) $\int 9 \cdot 2^{3x-5} dx$

d) $\int \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} dx$

e) $\int \frac{1}{\sqrt{4x-3}} dx$

f) $\int \sqrt{6-x} dx$

g) $\int (5x-3)^2 dx$

h) $\int (3-0{,}25x)^7 dx$

i) $\int 12 \cdot 7^{5-3x} dx$

j) $\int \frac{1}{6} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} dx$

k) $\int \frac{1}{\sqrt{6x+9}} dx$

l) $\int \frac{1}{2x-13} dx$

a)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (2x+7)^3 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2x+7)^4 + c = \underline{\underline{\frac{1}{8}(2x+7)^4 + c.}}$$

b)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (4-2x)^7 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{8} \cdot (4-2x)^8 + c = -\frac{1}{16}(4-2x)^8 + c$$

$$= -\frac{1}{16}\left(2 \cdot (2-x)\right)^8 + c = -\frac{1}{2^4} \cdot 2^8 \cdot (2-x)^8 + c = -2^4 \cdot (2-x)^8 + c$$

$$= \underline{\underline{-16\,(2-x)^8 + c.}}$$

c)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 9 \cdot 2^{3x-5} \, \mathrm{d}x = 9 \cdot \frac{1}{3\,\ln(2)} \cdot 2^{3x-5} + c = \underline{\underline{\frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{3x-5} + c.}}$$

d)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} + c = \underline{\underline{\frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} + c.}}$$

e)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{\sqrt{4x-3}} \, \mathrm{d}x = \int (4x-3)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (4x-3)^{\frac{1}{2}} + c$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}\sqrt{4x-3} + c\,.}}$$

f)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \sqrt{6-x} \, \mathrm{d}x = \int (6-x)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (6-x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \underline{\underline{-\frac{2}{3}\sqrt{(6-x)^3} + c.}}$$

g)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (5x-3)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} \cdot (5x-3)^3 + c = \underline{\underline{\frac{1}{15}(5x-3)^3 + c.}}$$

h)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (3-0.25x)^7 \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-0.25} \cdot \frac{1}{8} \cdot (3-0.25x)^8 + c = \underline{\underline{-\frac{1}{2}(3-0.25x)^8 + c.}}$$

i)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 12 \cdot 7^{5-3x} \, \mathrm{d}x = 12 \cdot \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{\ln(7)} \cdot 7^{5-3x} + c = \underline{\underline{-\frac{4}{\ln(7)} \cdot 7^{5-3x} + c.}}$$

j)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{6} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} + c = \underline{\underline{\frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} + c.}}$$

k)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{\sqrt{6x+9}}\,\mathrm{d}x = \int (6x+9)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (6x+9)^{\frac{1}{2}} + c$$

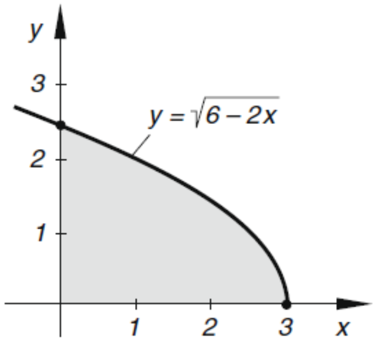
$$= \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{6x+9} + c.}}$$

l)

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{2x-13}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \ln(|2x-13|) + c.}}$$

3. Flächeninhalt

Welchen Flächeninhalt schliesst die Funktion $f(x) = \sqrt{6-2x}$ mit den beiden Koordinatenachsen ein?



Die Funktion f(x) schneidet die y-Achse bei x = 0 und die x-Achse bei x = 3 (hierfür die Nullstelle von f(x) bestimmen). Dies sind jeweils die obere und untere Integrationsgrenze.

$$\int_0^3 \sqrt{6-2x}dx = \int_0^3 (6-2x)^{1/2}dx = [\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot (6-2x)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = [-\frac{1}{3} \cdot (6-2x)^{\frac{3}{2}}]_0^3 = 2\sqrt{6}$$

4. Flächeninhalte bestimmen

a) Welche Fläche schliesst die Kurve $f(x) = 0{,}2x(x^2-4)$ mit der x-Achse im Intervall -3 ≤ x ≤ 3 ein?

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen den Parabeln $f(x) = x^2 - 2$ und $f(x) = -x^2 + 2x + 2$.

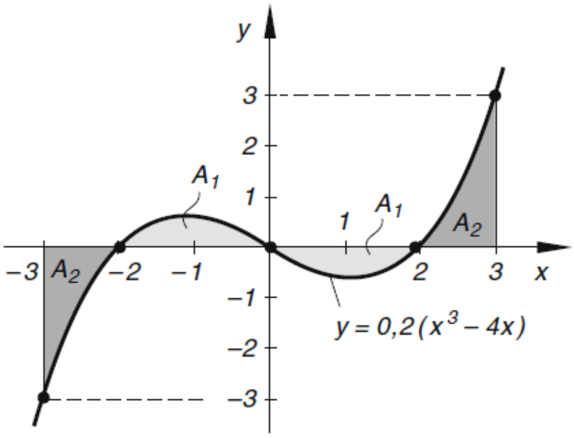
a)

Die Funktion f(x) ist punktsymmetrisch, d. h. es gilt: f(-x) = -f(x). Das bedeutet, man braucht nur 0 ≤ x ≤ 3 betrachten, um das Integral zu bestimmen, da die Flächen auf der Seite links vom Ursprung (A_1 und A_2) genau gleich gross sind wie rechts vom Ursprung. Für die Integralgrenzen müssen die Nullstellen von f(x) im Intervall 0 ≤ x ≤ 3 bestimmt werden: $f(x) = 0{,}2x(x^2-4) = 0$. Es ergibt sich $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

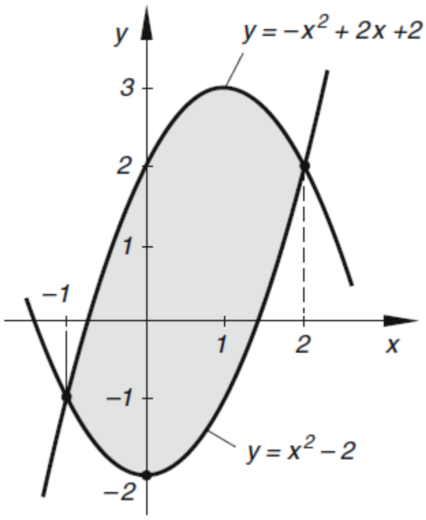
$$A_1 = \left| 0{,}2 \cdot \int_0^2 (x^3 - 4x)\,dx \right| = \left| 0{,}2 \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 \right]_0^2 \right| = 0{,}8$$

$$A_2 = 0{,}2 \cdot \int_2^3 (x^3 - 4x)\,dx = 0{,}2 \left[\frac{1}{4} x^4 - 2x^2 \right]_2^3 = 1{,}25$$

$A = 2(A_1 + A_2) = 4{,}1$



b)



Gleichsetzen der beiden Funktionen, um die Integrationsgrenzen zu erhalten:

$$x^2 - 2 = -x^2 + 2x + 2 \quad \Rightarrow$$

$$2(x^2 - x - 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 2$$

$$A = \int_{-1}^{2} [(-x^2 + 2x + 2) - (x^2 - 2)]\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{2} (-2x^2 + 2x + 4)\,dx =$$

$$= \left[-\frac{2}{3} x^3 + x^2 + 4x \right]_{-1}^{2} = 9$$

5. Volumen von Rotationskörpern

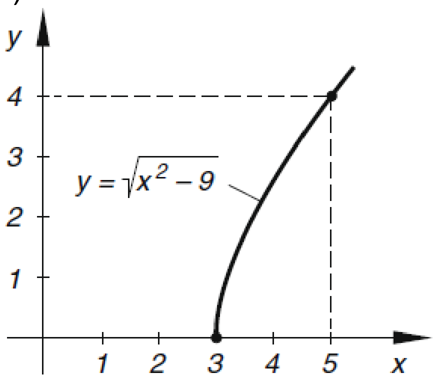
a) Durch Rotation der Kurve $f(x) = \sqrt{x}$ um die y-Achse entsteht ein trichterförmiger Drehkörper. Bestimmen Sie sein Volumen, wenn er in der Höhe y = 5 abgeschnitten wird.

b) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen eines Körpers, der durch Drehung des Kurvenstücks $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$, mit $3 \leq x \leq 5$
(i) um die x-Achse,
(ii) um die y-Achse
entsteht.

a)
Es muss zuerst die Umkehrfunktion gebildet werden:
$f(x) = \sqrt{x}$ besitzt als Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = x = y^2$
Integrationsgrenzen sind y = 0 und y = 5.

$$V_y = \pi \cdot \int_0^5 y^4 \, dy = \frac{\pi}{5} \left[y^5 \right]_0^5 = 625\,\pi = 1963{,}495$$

b)



(i)

$$V_x = \pi \cdot \int_3^5 (x^2 - 9) \, dx = \pi \left[\frac{1}{3} x^3 - 9x \right]_3^5 = \frac{44}{3} \pi = 46{,}077$$

(ii)

$$x^2 = y^2 + 9, \quad 0 \leq y \leq 4$$

$$V_y = \pi \cdot \int_0^4 (y^2 + 9) \, dy =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{3} y^3 + 9y \right]_0^4 = \frac{172}{3} \pi = 180{,}118$$

FH GR **Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 1

Computational and Data Science BSc
FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über lineare Modifikation

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die Methode der *linearen Modifikation* basiert auf der *Ketten-Regel* der *Differentialrechnung.*	●	○
b) In der Praxis ist die *lineare Modifikation* die am häufigsten anzuwendende Methode zur Berechnung von *nicht elementaren Integralen.*	●	○
c) Die Methode der *linearen Modifikation* kann nur bei gegebenen *Integrationsgrenzen* angewendet werden.	○	●
d) Die Methode der *linearen Modifikation* eignet sich zur *Integration* von *Linearkombinationen* von *Funktionen.*	○	●
e) Es gilt $\int \cos(3x+4)\,\mathrm{d}x = \sin(3x+4) + c$.	○	●
f) Es gilt $\int \cos(3x+4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \sin(x) + c$.	○	●

2. Aufleitung von linear modifizierten Funktionen

Wir berechnen die folgenden *unbestimmten Integrale* mit der Methode der *linearen Modifikation.*

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (2x+7)^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot (2x+7)^4 + c = \underline{\underline{\frac{1}{8}(2x+7)^4 + c.}} \tag{1}$$

b) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int (4-2x)^7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-2} \cdot \frac{1}{8} \cdot (4-2x)^8 + c = -\frac{1}{16}(4-2x)^8 + c \\ &= -\frac{1}{16}\big(2 \cdot (2-x)\big)^8 + c = -\frac{1}{2^4} \cdot 2^8 \cdot (2-x)^8 + c = -2^4 \cdot (2-x)^8 + c \\ &= \underline{\underline{-16\,(2-x)^8 + c.}}\end{aligned} \tag{2}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 9 \cdot 2^{3x-5}\,\mathrm{d}x = 9 \cdot \frac{1}{3\,\ln(2)} \cdot 2^{3x-5} + c = \underline{\underline{\frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{3x-5} + c.}} \tag{3}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{5} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{5} \cdot \frac{15}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} + c = \underline{\underline{\frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-10}{15}} + c.}} \tag{4}$$

e) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F(x)}} &= \int \frac{1}{\sqrt{4x-3}} \, \mathrm{d}x = \int (4x-3)^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (4x-3)^{\frac{1}{2}} + c \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{2} \sqrt{4x-3} + c\,.}} \end{aligned} \tag{5}$$

f) Wir erhalten

$$\begin{aligned} \underline{\underline{F(x)}} &= \int \sqrt{6-x} \, \mathrm{d}x = \int (6-x)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{-1} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} \cdot (6-x)^{\frac{3}{2}} + c \\ &= \underline{\underline{-\frac{2}{3} \sqrt{(6-x)^3} + c.}} \end{aligned} \tag{6}$$

3. Integrationsregel für lineare Modifikation

Wir betrachten eine *integrierbare Funktion* f mit *Aufleitung* F sowie $m, q \in \mathbb{R}$ mit $m \neq 0$. Dann gilt die *Integrationsregel* für *lineare Modifikation*

$$\int f(mx+q) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{m} \cdot F(mx+q) + c. \tag{7}$$

a) Wir beweisen die *Integrationsregel* für *lineare Modifikation* (7) von rechts nach links durch *Ableiten*. Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\left(\frac{1}{m} \cdot F(mx+q) + c\right)'}} &= \frac{1}{m} \cdot (mx+q)' \cdot F'(mx+q) + 0 = \frac{1}{m} \cdot m \cdot f(mx+q) \\ &= \underline{\underline{f(mx+q).}} \end{aligned} \tag{8}$$

b) Wir modifizieren die *Integrationsregel* für *lineare Modifikation* (7) auf den Fall, dass die *lineare Modifikation* im *Argument* von f in Taylor-*Form* gegeben ist. Durch *Ausmultiplizieren* der Taylor-*Form* im *Argument* des *Integranden* und Anwenden der *Integrationsregel* für *lineare Modifikation* (7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\int f\big(m \cdot (x-x_0) + y_0\big) \, \mathrm{d}x}} &= \int f\big(mx - mx_0 + y_0\big) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{m} \cdot F\big(mx - mx_0 + y_0\big) + c \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{m} \cdot F\big(m \cdot (x-x_0) + y_0\big) + c.}} \end{aligned} \tag{9}$$

c) Wir berechnen das *unbestimmte Integral* der *verallgemeinerten Potenzfunktion*

$$f(x) = (mx+q)^p. \tag{10}$$

Mit Hilfe der *Integrationsregel* für *lineare Modifikation* (7) erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\int f(x)\,\mathrm{d}x}} &= \int (mx+q)^p\,\mathrm{d}x = \frac{1}{m}\cdot\frac{1}{p+1}\cdot(mx+q)^{p+1}+c\\ &= \underline{\underline{\frac{1}{m\cdot(p+1)}\cdot(mx+q)^{p+1}+c.}}\end{aligned} \tag{11}$$

d) Wir berechnen das *unbestimmte Integral* der *verallgemeinerten Exponentialfunktion*

$$f(x) = G_0\cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}}. \tag{12}$$

Mit Hilfe der *Integrationsregel* für *lineare Modifikation* (9) erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\int f(x)\,\mathrm{d}x}} &= \int G_0\cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}}\,\mathrm{d}x = G_0\cdot\int a^{\frac{1}{\Sigma}\cdot(x-x_0)}\,\mathrm{d}x = G_0\cdot\frac{1}{\frac{1}{\Sigma}}\cdot\frac{1}{\ln(a)}\cdot a^{\frac{1}{\Sigma}\cdot(x-x_0)}+c\\ &= \underline{\underline{\frac{\Sigma}{\ln(a)}\cdot G_0\cdot a^{\frac{x-x_0}{\Sigma}}+c.}}\end{aligned} \tag{13}$$

e) Wir berechnen das *unbestimmte Integral* der *verallgemeinerten harmonischen Schwingungsfunktion*

$$f(t) = A\cdot\sin\bigl(\omega\cdot(t-t_0)+\varphi_0\bigr). \tag{14}$$

Mit Hilfe der *Integrationsregel* für *lineare Modifikation* (9) erhalten wir

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\int f(t)\,\mathrm{d}t}} &= \int A\cdot\sin\bigl(\omega\cdot(t-t_0)+\varphi_0\bigr)\,\mathrm{d}t = A\cdot\int\sin\bigl(\omega\cdot(t-t_0)+\varphi_0\bigr)\,\mathrm{d}t \qquad (15)\\ &= A\cdot\frac{1}{\omega}\cdot\Bigl(-\cos\bigl(\omega\cdot(t-t_0)+\varphi_0\bigr)\Bigr)+c = \underline{\underline{-\frac{1}{\omega}\cdot A\cdot\cos\bigl(\omega\cdot(t-t_0)+\varphi_0\bigr)+c.}}\end{aligned}$$

4. Aufleitung von linear modifizierten Funktionen

Wir berechnen die folgenden *unbestimmten Integrale* mit der Methode der *linearen Modifikation.*

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (5x-3)^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3}\cdot(5x-3)^3+c = \underline{\underline{\frac{1}{15}\,(5x-3)^3+c.}} \tag{16}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int (3-0.25x)^7\,\mathrm{d}x = \frac{1}{-0.25}\cdot\frac{1}{8}\cdot(3-0.25x)^8+c = \underline{\underline{-\frac{1}{2}\,(3-0.25x)^8+c.}} \tag{17}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int 12 \cdot 7^{5-3x}\,\mathrm{d}x = 12 \cdot \frac{1}{-3} \cdot \frac{1}{\ln(7)} \cdot 7^{5-3x} + c = \underline{\underline{-\frac{4}{\ln(7)} \cdot 7^{5-3x} + c.}} \tag{18}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{6} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \frac{18}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} + c = \underline{\underline{\frac{3}{\ln(2)} \cdot 2^{\frac{x-11}{18}} + c.}} \tag{19}$$

e) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\underline{\underline{F(x)}} &= \int \frac{1}{\sqrt{6x+9}}\,\mathrm{d}x = \int (6x+9)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} \cdot (6x+9)^{\frac{1}{2}} + c \\ &= \underline{\underline{\frac{1}{3}\sqrt{6x+9} + c.}}\end{aligned} \tag{20}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{F(x)}} = \int \frac{1}{2x-13}\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\frac{1}{2} \cdot \ln\big(|2x-13|\big) + c.}} \tag{21}$$

5. Aussagen über den Archimedes-Cauchy-Riemann-Approximationsprozess

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der Archimedes-Cauchy-Riemann-*Approximationsprozess* ist eine Standard-Methode zur Berechnung von *Stammfunktionen* bzw. *Integralen.*	○	●
b) Der Archimedes-Cauchy-Riemann-*Approximationsprozess* ist eine Standard-Methode zum Auffinden von *Integralen* in der Praxis.	●	○
c) Gilt $\delta y \approx \cosh(\delta x)$, dann folgt $y(x) = \sinh(\delta x)$.	○	●
d) Gilt $\delta y \approx \cosh(x) \cdot \delta x$, dann folgt $\Delta y = \sinh(x_{\mathrm{E}}) - \sinh(x_0)$.	●	○

6. Fenster eines Aquariums

Ein rechteckiges Fenster der Breite $B \approx 100\,\mathrm{cm} = 1.00\,\mathrm{m}$ und Höhe $H \approx 70\,\mathrm{cm} = 0.70\,\mathrm{m}$ gewährt Einblick in ein Zoo-Aquarium, dessen Wasserspiegel $D \approx 45\,\mathrm{cm} = 0.45\,\mathrm{m}$ oberhalb des oberen Fensterrandes liegt. Um die gesamte *Kraft* zu berechnen, welche das Wasser auf die Glasscheibe ausübt, verwenden wir einen Archimedes-Cauchy-Riemann-*Approximationsprozess*. Dabei gehen wir nach folgenden Schritten vor.

S1 **Lokal:** Wir betrachten einen kleinen, horizontalen Streifen des Fensters in der Tiefe z mit Höhe $\delta z > 0$. Die *Kraft* δF, welche das Wasser auf den Streifen ausübt, ist gegeben durch

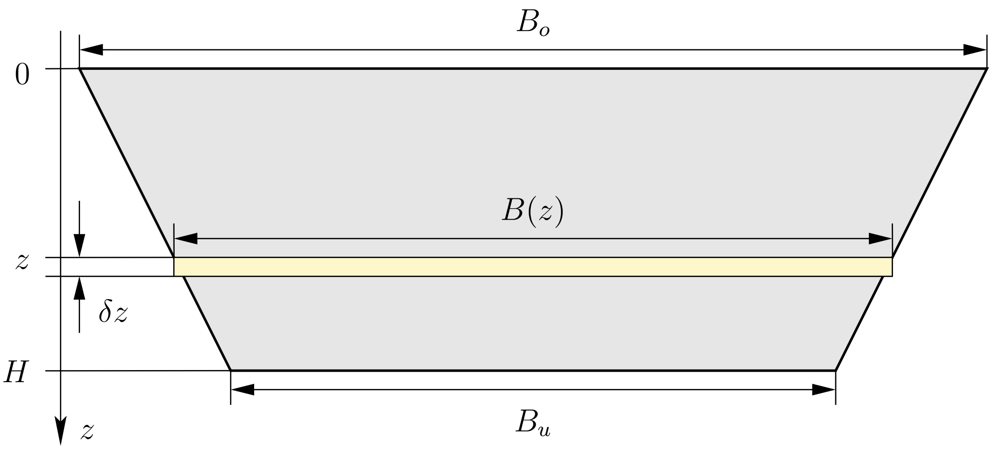
$$\underline{\delta F} \approx p(z) \cdot \delta A = \rho \cdot g \cdot z \cdot B \cdot \delta z = \underline{\rho \cdot g \cdot B \cdot z \cdot \delta z.} \tag{22}$$

S2 **Global:** Durch *Integration* über die Tiefe z können wir die gesamte *Kraft* berechnen, welche das Wasser auf die Glasscheibe ausübt. Wir erhalten

$$\underline{\underline{F}} = \int_D^{D+H} \rho \cdot g \cdot B \cdot z \,\mathrm{d}z = \rho \cdot g \cdot B \int_D^{D+H} z \,\mathrm{d}z = \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[z^2 \Big]\Big|_D^{D+H}$$
$$= \rho \cdot g \cdot B \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big((D+H)^2 - D^2 \Big) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot B \cdot \Big(D^2 + 2 \cdot D \cdot H + H^2 - D^2 \Big)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot B \cdot \Big(2 \cdot D \cdot H + H^2 \Big) = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot g \cdot B \cdot H \cdot (2 \cdot D + H)$$
$$\approx \frac{1}{2} \cdot 1.00 \cdot 10^3 \,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 9.81 \,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \cdot 1.00\,\mathrm{m} \cdot 0.70\,\mathrm{m} \cdot \Big(2 \cdot 0.45\,\mathrm{m} + 0.70\,\mathrm{m} \Big) \approx 5.5 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$$
$$= \underline{\underline{5.5\,\mathrm{kN.}}} \tag{23}$$

7. Wirkung des Wassers auf eine Staumauer

Wir betrachten einen Stausee der Länge L und Tiefe H. Die vertikale Staumauer sei überall gleich dick und habe die Form eines gleichschenkligen Trapezes mit Basis B_u und Oberkante B_o. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Um die gesamte *Kraft* zu berechnen, welche das Wasser auf die Staumauer ausübt, verwenden wir einen Archimedes-Cauchy-Riemann-*Approximationsprozess*. Dabei gehen wir nach folgenden Schritten vor.

S1 **Lokal:** Wir betrachten einen kleinen, horizontalen Streifen der Staumauer in der Tiefe z mit Höhe $\delta z > 0$. Die Breite $B(z)$ dieses Streifens ist eine *lineare Funktion* der Tiefe z. Setzen wir die Angaben aus der Skizze in die *Zwei-Punkt-Form* einer allgemeinen, *linearen Funktion* ein, dann erhalten wir

$$B(z) = \frac{B_u - B_o}{H - 0} \cdot \big(z - 0 \big) + B_o = \frac{B_u - B_o}{H} \cdot z + B_o. \tag{24}$$

Die *Kraft* δF, welche das Wasser auf den Streifen ausübt, ist gegeben durch

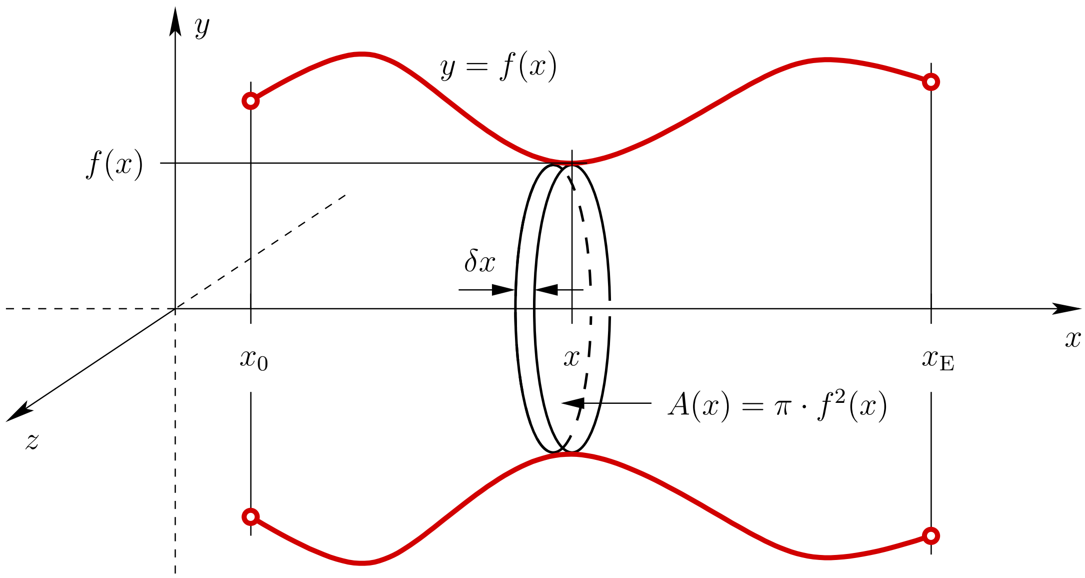
$$\underline{\delta F} \approx p(z) \cdot \delta A = \rho \cdot g \cdot z \cdot B(z) \cdot \delta z = \rho \cdot g \cdot z \cdot \left(\frac{B_u - B_o}{H} \cdot z + B_o \right) \cdot \delta z$$
$$= \underline{\rho \cdot g \cdot \left(\frac{B_u - B_o}{H} \cdot z^2 + B_o \cdot z \right) \cdot \delta z.} \tag{25}$$

S2 **Global:** Durch *Integration* über die Tiefe z können wir die gesamte *Kraft* berechnen, welche das Wasser auf die Staumauer ausübt. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{F}} &= \int_0^H \rho \cdot g \cdot \left(\frac{B_u - B_o}{H} \cdot z^2 + B_o \cdot z \right) \mathrm{d}z = \rho \cdot g \int_0^H \left(\frac{B_u - B_o}{H} \cdot z^2 + B_o \cdot z \right) \mathrm{d}z \\
&= \rho \cdot g \cdot \left[\frac{B_u - B_o}{H} \cdot \frac{z^3}{3} + B_o \cdot \frac{z^2}{2} \right] \Bigg|_0^H = \rho \cdot g \cdot \left(\frac{B_u - B_o}{H} \cdot \frac{H^3}{3} + B_o \cdot \frac{H^2}{2} - 0 - 0 \right) \\
&= \rho \cdot g \cdot \left(\frac{B_u - B_o}{3} \cdot H^2 + \frac{B_o}{2} \cdot H^2 \right) = \rho \cdot g \cdot H^2 \cdot \left(\frac{2 \cdot B_u - 2 \cdot B_o}{6} + \frac{3 \cdot B_o}{6} \right) \\
&= \rho \cdot g \cdot H^2 \cdot \frac{2 \cdot B_u - 2 \cdot B_o + 3 \cdot B_o}{6} = \underline{\underline{\rho \cdot g \cdot H^2 \cdot \frac{2 \cdot B_u + B_o}{6}}}\,. \qquad (26)
\end{aligned}$$

8. Volumen von Rotationskörpern

Seien $0 < x_0 < x_{\mathrm{E}}$ und $f : [x_0, x_{\mathrm{E}}] \to \mathbb{R}_0^+$ eine *stetige Funktion*. Wir betrachten den *Körper* K, welcher durch *Rotation* des *Graphen* von f um die x-Achse entsteht. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



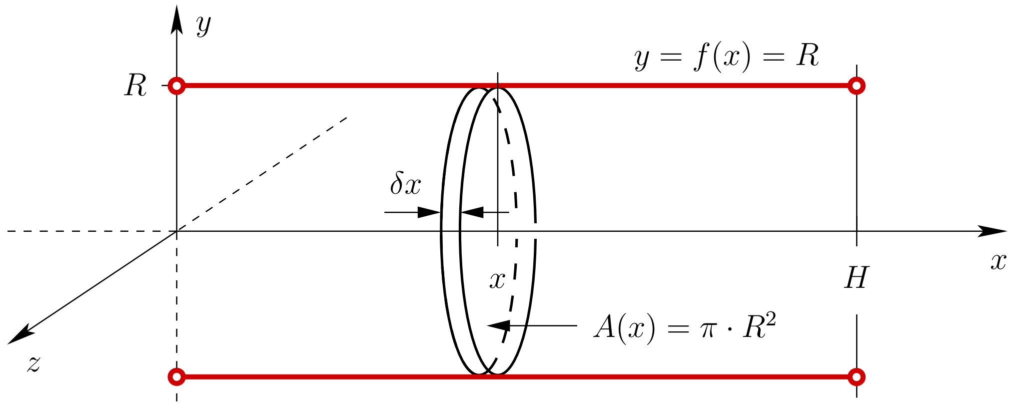
a) Wir unterteilen den *Körper* K entlang der x-Achse näherungsweise in kleine *Kreisscheiben* der *Dicke* δx. Für das *Volumen* δV einer solchen *Kreisscheibe* in Abhängigkeit ihrer Position x erhalten wir die Näherung

$$\underline{\underline{\delta V}} \approx A(x) \cdot \delta x = \underline{\underline{\pi \cdot f^2(x) \cdot \delta x.}} \qquad (27)$$

b) Durch *Integration* über x können wir das gesamte *Volumen* V des *Körpers* K berechnen. Wir erhalten

$$\underline{\underline{V}} = \int_{x_0}^{x_{\mathrm{E}}} \pi \cdot f^2(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\underline{\pi \int_{x_0}^{x_{\mathrm{E}}} f^2(x)\,\mathrm{d}x.}} \qquad (28)$$

c) Wir betrachten einen *Kreiszylinder* mit *Radius* R und *Höhe* H. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Der *Kreiszylinder* entsteht offensichtlich durch *Rotation* des *Graphen* der *konstanten Funktion*

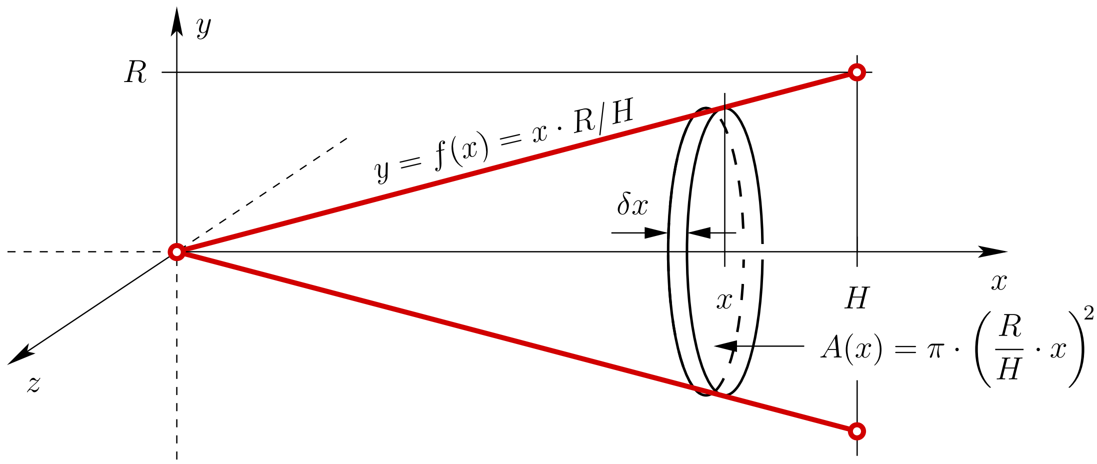
$$f(x) = R \tag{29}$$

um die x-Achse. Mit Hilfe der Formel (28) erhalten wir

$$\underline{\underline{V_{\text{zyl}}}} = \pi \int_{x_0}^{x_{\text{E}}} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^H R^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot R^2 \int_0^H \mathrm{d}x = \pi \cdot R^2 \cdot \Big[\, x \,\Big]\Big|_0^H = \pi \cdot R^2 \cdot (H - 0)$$
$$= \underline{\underline{\pi \cdot R^2 \cdot H}} \tag{30}$$

in Übereinstimmung mit der klassischen Formel aus der *Stereometrie*.

d) Wir betrachten einen geraden *Kreiskegel* mit *Grundflächenradius* R und *Höhe* H. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Der *Kreiskegel* entsteht offensichtlich durch *Rotation* des *Graphen* der *linearen Funktion*

$$f(x) = \frac{R}{H} \cdot x \tag{31}$$

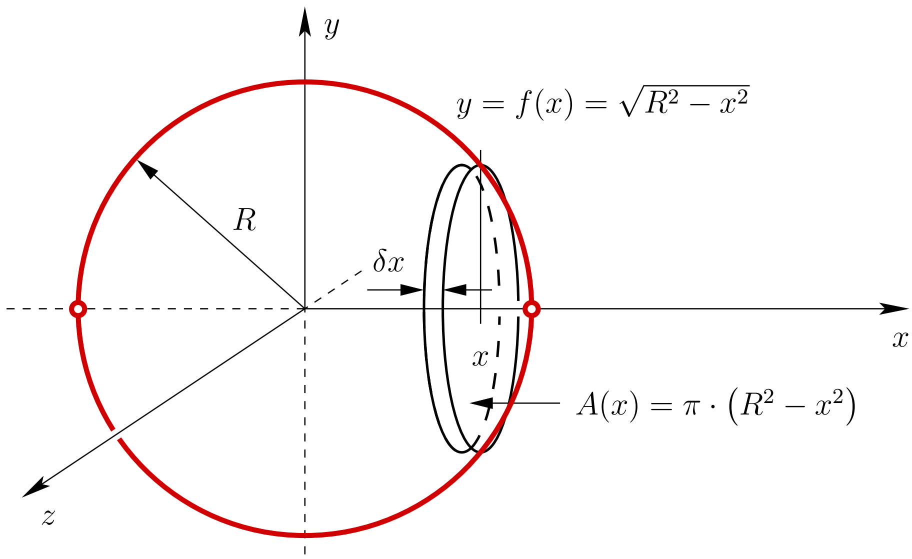
um die x-Achse. Mit Hilfe der Formel (28) erhalten wir

$$\underline{\underline{V_{\text{keg}}}} = \pi \int_{x_0}^{x_{\text{E}}} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H} \cdot x\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \int_0^H \frac{R^2}{H^2} \cdot x^2\,\mathrm{d}x = \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2\,\mathrm{d}x$$

$$= \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[x^3 \right]\Big|_0^H = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot \left(H^3 - 0^3\right) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{R^2}{H^2} \cdot H^3 = \underline{\underline{\frac{\pi}{3} \cdot R^2 \cdot H}} \tag{32}$$

in Übereinstimmung mit der klassischen Formel aus der *Stereometrie*.

e) Wir betrachten eine *Kugel* mit *Radius* R. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Die *Kugel* entsteht offensichtlich durch *Rotation* des *Graphen* der *Funktion*

$$f(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \tag{33}$$

um die x-Achse. Mit Hilfe der Formel (28) und durch Ausnutzen der *Kugel-Symmetrie* erhalten wir

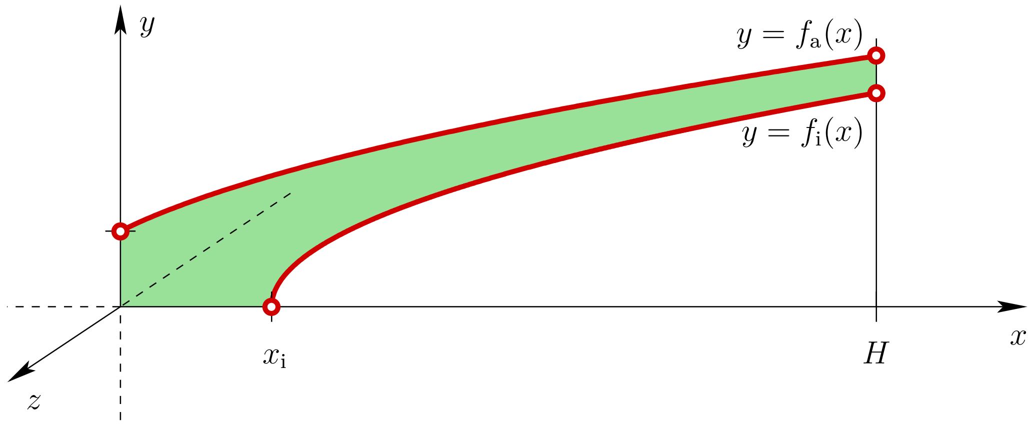
$$\begin{aligned}
\underline{\underline{V_{\text{kug}}}} &= \pi \int_{x_0}^{x_{\mathrm{E}}} f^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right)\mathrm{d}x = \pi \cdot 2 \int_0^R \left(R^2 - x^2\right)\mathrm{d}x \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \left[R^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]\Bigg|_0^R = 2 \cdot \pi \cdot \left(\left(R^2 \cdot R - \frac{1}{3} \cdot R^3 \right) - \left(R^2 \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 \right) \right) \\
&= 2 \cdot \pi \cdot \left(R^3 - \frac{1}{3} \cdot R^3 \right) = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \pi \cdot R^3 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi}{3} \cdot R^3}}
\end{aligned} \tag{34}$$

in Übereinstimmung mit der klassischen Formel aus der *Stereometrie*.

9. Volumen und Masse einer Vase
Es seien $x_\mathrm{a} < 0 < x_\mathrm{i} < H$ und $C > 0$. Wir betrachten die *Funktionen*

$$f_\mathrm{a} : [0, H] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f_\mathrm{a}(x) := C \cdot \sqrt{x - x_\mathrm{a}} \qquad \text{und} \qquad f_\mathrm{i} : [x_\mathrm{i}, H] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f_\mathrm{i}(x) := C \cdot \sqrt{x - x_\mathrm{i}} \tag{35}$$

sowie die Vase, welche durch Rotation der *Querschnittsfläche* (grün in der Skizze) des Glases zwischen den *Graphen* dieser beiden *Funktionen* um die x-Achse entsteht. Die Situation ist in der folgenden Skizze dargestellt.



a) Zunächst berechnen wir das *Innen-Volumen* der Vase. Mit Hilfe der Formel für das *Rotationskörper-Volumen* erhalten wir

$$\begin{aligned} V_\mathrm{i} &= \pi \int_{x_\mathrm{i}}^{H} f_\mathrm{i}^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{x_\mathrm{i}}^{H} C^2 \cdot \left(\sqrt{x - x_\mathrm{i}}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot C^2 \int_{x_\mathrm{i}}^{H} (x - x_\mathrm{i})\,\mathrm{d}x \\ &= \pi \cdot C^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\left(x - x_\mathrm{i}\right)^2 \right]\Big|_{x_\mathrm{i}}^{H} = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(\left(H - x_\mathrm{i}\right)^2 - 0 \right) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H - x_\mathrm{i}\right)^2. \end{aligned} \tag{36}$$

Wenn die Vase das *Volumen* V_0 fassen soll, dann muss gelten

$$V_0 = V_\mathrm{i} = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H - x_\mathrm{i}\right)^2 \qquad \Big| \cdot \frac{2}{\pi \cdot C^2} \tag{37}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0 = \left(H - x_\mathrm{i}\right)^2 \qquad \Big| \sqrt{\cdots} \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0} = \left|H - x_\mathrm{i}\right| = H - x_\mathrm{i} \qquad \Big| + x_\mathrm{i}. \tag{39}$$

Daraus erhalten wir eine Höhe von

$$\underline{\underline{H}} = x_\mathrm{i} + \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0} = \underline{\underline{x_\mathrm{i} + \frac{1}{C} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot V_0}}}\,. \tag{40}$$

b) Wir berechnen das *Aussen-Volumen* der Vase. Mit Hilfe der Formel für das *Rotationskörper-Volumen* erhalten wir

$$V_\mathrm{a} = \pi \int_{0}^{H} f_\mathrm{a}^2(x)\,\mathrm{d}x = \pi \int_{0}^{H} C^2 \cdot \left(\sqrt{x - x_\mathrm{a}}\right)^2 \mathrm{d}x = \pi \cdot C^2 \int_{0}^{H} (x - x_\mathrm{a})\,\mathrm{d}x$$

$$
\begin{aligned}
&= \pi \cdot C^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \Big[\big(x - x_\mathrm{a}\big)^2 \Big]\Big|_0^H = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \Big(\big(H - x_\mathrm{a}\big)^2 - \big(0 - x_\mathrm{a}\big)^2 \Big) \\
&= \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \Big(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_\mathrm{a} + x_\mathrm{a}^2 - x_\mathrm{a}^2 \Big) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \Big(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_\mathrm{a} \Big). \qquad (41)
\end{aligned}
$$

Das *Volumen* des Glases der Vase ist gerade die *Differenz* ihres *Aussen-* und *Innen-Volumens*. Gemäss (41) und (36) gilt

$$
\begin{aligned}
V_\mathrm{g} = V_\mathrm{a} - V_\mathrm{i} &= \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \Big(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_\mathrm{a} \Big) - \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \big(H - x_\mathrm{i} \big)^2 \\
&= \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \Big(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_\mathrm{a} - H^2 + 2 \cdot H \cdot x_\mathrm{i} - x_\mathrm{i}^2 \Big) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \Big(2 \cdot H \cdot \big(x_\mathrm{i} - x_\mathrm{a} \big) - x_\mathrm{i}^2 \Big) \\
&= \pi \cdot C^2 \cdot \left(H \cdot \big(x_\mathrm{i} - x_\mathrm{a} \big) - \frac{x_\mathrm{i}^2}{2} \right). \qquad (42)
\end{aligned}
$$

Wenn die Vase aus Glas der *Dichte* ρ_g gefertigt wird, dann erhalten wir daraus eine *Masse* von

$$
\underline{\underline{M_\mathrm{g}}} = \rho_\mathrm{g} \cdot V_\mathrm{g} = \underline{\underline{\pi \cdot C^2 \cdot \rho_\mathrm{g} \cdot \left(H \cdot \big(x_\mathrm{i} - x_\mathrm{a} \big) - \frac{x_\mathrm{i}^2}{2} \right)}}. \qquad (43)
$$