FH GR **Fachhochschule Graubünden**
University of Applied Sciences

Übungsblatt 7 Ana

Computational and Data Science
FS2025

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Mehrfachintegral, Integrationsgebiet und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können – z. B. für die Vereinfachung von Zweifach- und Dreifachintegralen - kartesische Koordinaten in Polar- bzw. Zylinderkoordinaten umwandeln.
- Sie können Mehrfachintegrale auf einfachen Gebieten in 2D und 3D berechnen und die Integrationsreihenfolge vertauschen.
- Sie können Masse, Volumen und Schwerpunkt mittels Mehrfachintegralen bestimmen.

---

1. Aussagen über Zweifachintegrale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Ein Zweifachintegral beschreibt das Volumen zwischen dem Graphen einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einem Gebiet in der xy-Ebene.	X	
b) Die Fläche eines Gebiets in 2D lässt sich mit Hilfe eines Zweifachintegrals berechnen.	X	
c) Für $f(x,y) \geq 0$ gilt: $\int_G f(x,y) dA \geq 0$ für jedes Gebiet G in der xy-Ebene.	X	
d) Für $f(x,y) \leq 0$ gilt: $\int_{x_0}^{x_E} \int_{y_0}^{y_E} f(x,y)\, dydx \leq 0$ für alle $x_0, x_E, y_0, y_E \in \mathbb{R}$.		X

2. Integrale über Rechtecke

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^1 \int_0^2 xy\, dx\, dy$

b) $\int_0^2 \int_0^1 x^2\, dx\, dy$

c) $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{2x+y}\, dx\, dy$

d) $\int_0^1 \int_1^e \frac{x^2}{y} dy\, dx$

e) $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2 y)\, dx\, dy$

f) $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2 y)\, dy\, dx$

a)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \int_0^2 xy \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_0^2 x \,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 y \,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right]\Big|_0^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[y^2 \right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot (2^2 - 0) \cdot (1^2 - 0)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 1 = \underline{\underline{1.}}$$

b)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^2\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^2 1\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\cdot\Big[x^3\Big]\Big|_0^1 \cdot \Big[y\Big]\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\cdot(1^3-0)\cdot(2-0)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

c)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^{\ln(3)}\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\ln(3)}\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^{\ln(3)} \mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\Big[\mathrm{e}^{2x}\Big]\Big|_0^{\ln(2)}\cdot\Big[\mathrm{e}^{y}\Big]\Big|_0^{\ln(3)} = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{e}^{2\cdot\ln(2)}-\mathrm{e}^0)\cdot(\mathrm{e}^{\ln(3)}-\mathrm{e}^0) = \frac{1}{2}\cdot(2^2-1)\cdot(3-1)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(4-1)\cdot 2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 = \underline{\underline{3.}}$$

d)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\cdot\Big[x^3\Big]\Big|_0^1\cdot\ln\Big(\frac{\mathrm{e}}{1}\Big) = \frac{1}{3}\cdot(1^3-0)\cdot\ln(\mathrm{e})$$

$$= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

e)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^4\int_{-1}^2 (2x+6x^2y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4\Big[x^2+2x^3y\Big]\Big|_{-1}^2\,\mathrm{d}y = \int_1^4 (4+16y-1+2y)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_1^4 (3+18y)\,\mathrm{d}y = \Big[3y+9y^2\Big]\Big|_1^4 = 12+144-3-9 = \underline{\underline{144.}}$$

f)

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^2\int_1^4 (2x+6x^2y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2\Big[2xy+3x^2y^2\Big]\Big|_1^4\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2 (8x+48x^2-2x-3x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^2 (6x+45x^2)\,\mathrm{d}x = \Big[3x^2+15x^3\Big]\Big|_{-1}^2 = 12+120-3+15 = \underline{\underline{144.}}$$

3. Zweifachintegrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^2\int_{y^2}^{2y}(4x-y)\,dx\,dy$ b) $\int_1^2\int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2y\,dy\,dx$ c) $\int_1^2\int_0^x e^{\frac{y}{x}}\,dy\,dx$

a)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^2\int_{y^2}^{2y} (4x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\Big[2x^2-yx\Big]\Big|_{y^2}^{2y}\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^2\big(2\cdot 4y^2 - y\cdot 2y - 2\cdot y^4 + y\cdot y^2\big)\,\mathrm{d}y = \int_0^2\big(6y^2-2y^4+y^3\big)\,\mathrm{d}y$$

$$= \Big[2y^3-\frac{2y^5}{5}+\frac{y^4}{4}\Big]\Big|_0^2 = 2\cdot 2^3-\frac{2\cdot 2^5}{5}+\frac{2^4}{4}-0+0-0 = 16-\frac{64}{5}+4 = 20-\frac{64}{5}$$

$$= \frac{100}{5}-\frac{64}{5} = \underline{\underline{\frac{36}{5}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[y^2 \right] \Big|_{1-x}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \left(x - (1-x)^2 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \left(x - 1 + 2x - x^2 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \left(3x - 1 - x^2 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(3x^3 - x^2 - x^4 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right] \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} - \frac{3 \cdot 1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(12 - \frac{8}{3} - \frac{32}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(12 - \frac{7}{3} - \frac{31}{5} - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{720}{60} - \frac{140}{60} - \frac{372}{60} - \frac{45}{60} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{163}{60} = \underline{\underline{\frac{163}{120}}} .$$

c)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_1^2 \left[x \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \right] \Big|_0^x \mathrm{d}x = \int_1^2 x \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{0}{x}} \right) \mathrm{d}x = (\mathrm{e} - 1) \int_1^2 x \, \mathrm{d}x$$

$$= (\mathrm{e} - 1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right] \Big|_1^2 = (\mathrm{e} - 1) \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = (\mathrm{e} - 1) \cdot \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{2} \cdot (\mathrm{e} - 1)}} .$$

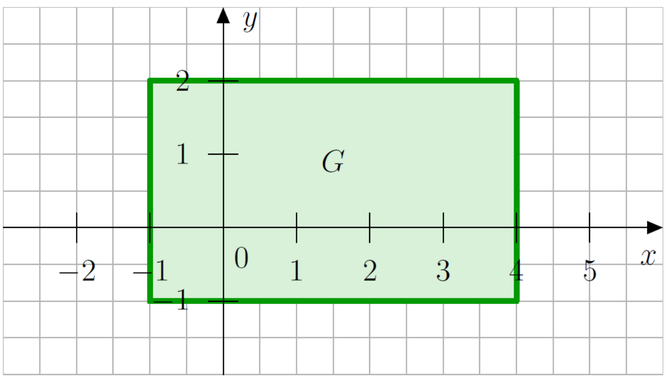
4. Integrale über Gebiete

Berechnen Sie das folgende Integral über das jeweils angegebene Gebiet G.

$$I = \int_G 2xy^2 \, dA$$

a) Rechteck mit Eckpunkten (-1;-1), (4;-1), (4;2), (-1;2)
b) Dreieck mit Eckpunkten (0;0), (3;1), (-2;1)

a)

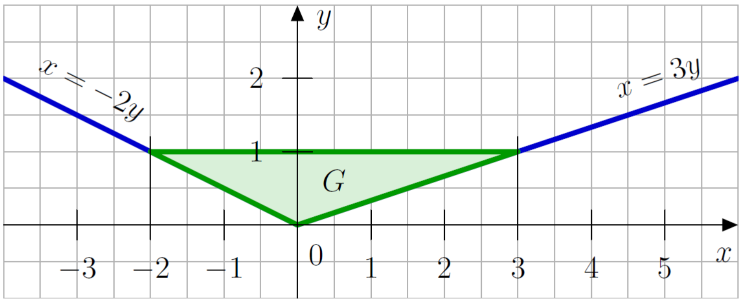


$$\underline{\underline{I}} = \int_G 2xy^2 \, \mathrm{d}A = 2 \int_G xy^2 \, \mathrm{d}A = 2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^4 xy^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 2 \int_{-1}^4 x \, \mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^2 y^2 \, \mathrm{d}y$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right] \Big|_{-1}^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[y^3 \right] \Big|_{-1}^2 = \left(4^2 - (-1)^2 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2^3 - (-1)^3 \right) = (16 - 1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (8 + 1)$$

$$= 15 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 = 5 \cdot 9 = \underline{\underline{45.}}$$

b)



$$\underline{\underline{I}} = \int_G 2xy^2 \,\mathrm{d}A = 2\int_G xy^2 \,\mathrm{d}A = 2\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 y^2 \int_{-2y}^{3y} x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]\Big|_{-2y}^{3y} \mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \cdot \left((3y)^2 - (-2y)^2\right) \mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \cdot (9y^2 - 4y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 y^2 \cdot 5y^2 \,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4 \,\mathrm{d}y =$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot [y^5]_0^1 = 1 - 0 = 1$$

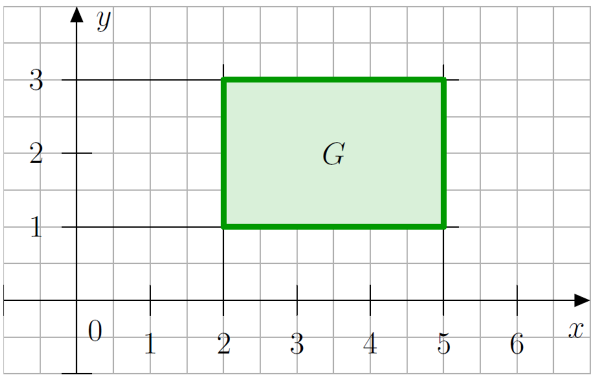
5. Integrationsreihenfolge tauschen

Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge für die folgenden Integrale.

a) $\int_1^3 \int_2^5 f(x,y)\,dx\,dy$ b) $\int_0^1 \int_{2x}^2 f(x,y)\,dy\,dx$ c) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\,dy$

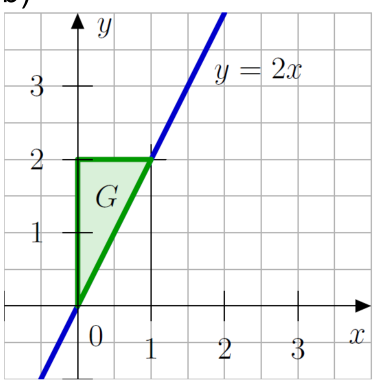
d) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x,y)\,dx\,dy$ e) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 f(x,y)\,dy\,dx$ f) $\int_1^3 \int_{\ln x}^3 f(x,y)\,dy\,dx$

a)



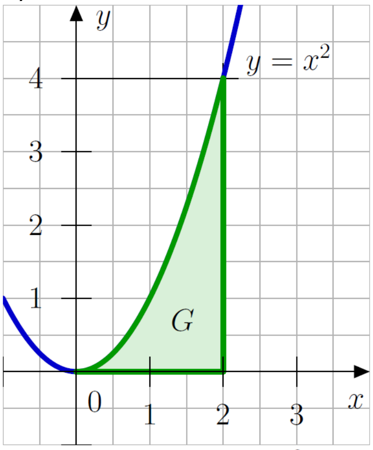
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_2^5 \int_1^3 f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.}}$$

b)



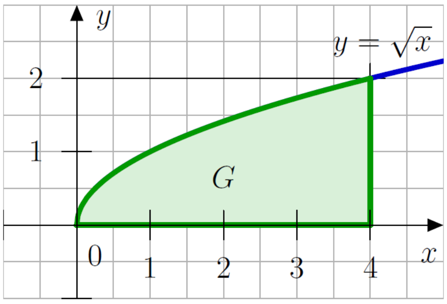
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f \, \mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} f(x;y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.}}$$

c)



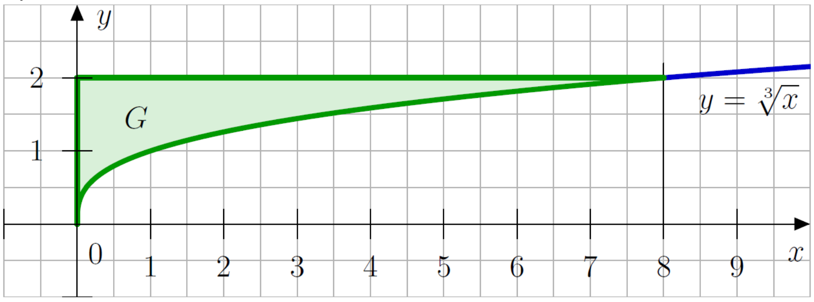
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f \, \mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x;y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.}}$$

d)



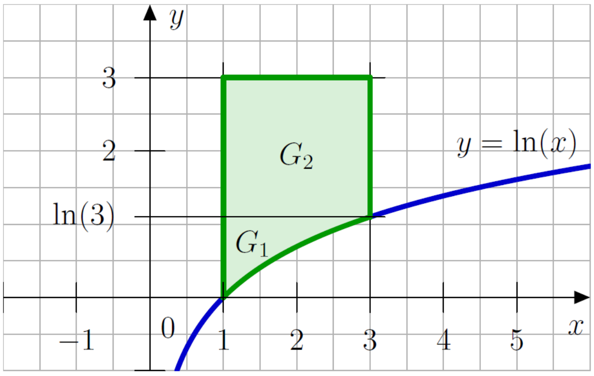
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f \, \mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x;y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.}}$$

e)



$$\underline{\underline{I}} = \int_G f \, \mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{y^3} f(x;y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.}}$$

f)



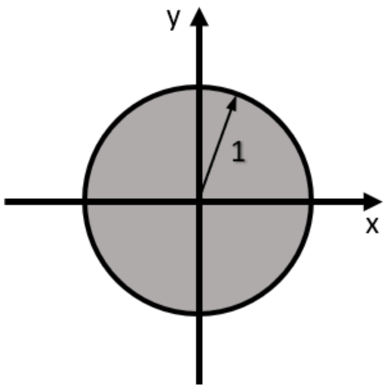
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f \,\mathrm{d}A = \int_{G_1} f \,\mathrm{d}A + \int_{G_2} f \,\mathrm{d}A$$

$$= \underline{\underline{\int_0^{\ln(3)} \int_1^{e^y} f(x;y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \int_{\ln(3)}^{3} \int_1^{3} f(x;y) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y.}}$$

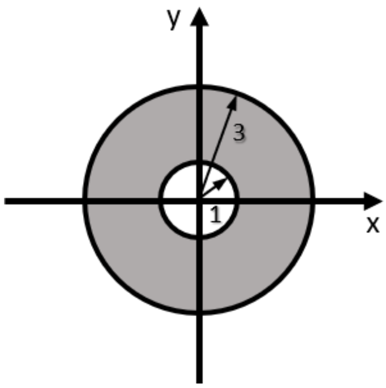
6. Doppelintegrale

Lösen Sie die beiden folgenden Integrale unter Verwendung von Polarkoordinaten.

a) $I = \iint_A (1 + x + y) dA$, wobei der Integrationsbereich der Einheitskreis sein soll.



b) $I = \iint_A (3\sqrt{x^2 + y^2} + 4) dA$, wobei der Integrationsbereich der angegebene Kreisring sein soll (Innenradius = 1, Aussenradius = 3).



a)

Unter Verwendung von *Polarkoordinaten* transformiert sich der *Integrand* wie folgt ($x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$):

$$z = f(x; y) = 1 + x + y = 1 + r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi$$

Das *Flächenelement* dA lautet in Polarkoordinaten $dA = r\,dr\,d\varphi$, die *Integrationsgrenzen* sind (si

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Damit gilt:

$$I = \iint_{(A)} (1 + x + y)\,dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (1 + r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (r + r^2 \cdot \cos\varphi + r^2 \cdot \sin\varphi)\,dr\,d\varphi$$

Wir integrieren zunächst nach r, dann nach φ.

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{1} (r + r^2 \cdot \cos\varphi + r^2 \cdot \sin\varphi)\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2 + \frac{1}{3}\,r^3 \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3}\,r^3 \cdot \sin\varphi\right]_{r=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi - 0 - 0 - 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

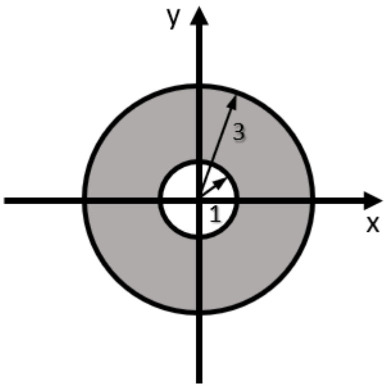
$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi\right) d\varphi = \left[\frac{1}{2}\,\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi - \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi\right]_{0}^{2\pi} =$$

$$= \pi + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - 0 - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} = \pi - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \pi$$

Ergebnis: $I = \pi$

b)

$I = \iint_A (3\sqrt{x^2 + y^2} + 4)\,dA$, wobei der Integrationsbereich der angegebene Kreisring sein soll.



Die *Transformationsgleichungen* für den Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten lauten:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad dA = r\,dr\,d\varphi$$

Die *Integrationsgrenzen* des kreisringförmigen Integrationsbereiches sind (sie

r-Integration: von $r = 1$ bis $r = 3$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Unter Berücksichtigung von

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi = r^2 \underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r^2$$

transformiert sich der *Integrand* des Doppelintegrals wie folgt:

$$z = f(x; y) = 3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4 = 3 \cdot \sqrt{r^2} + 4 = 3r + 4$$

Das Doppelintegral I lautet damit in Polarkoordinaten:

$$I = \iint_{(A)} (3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4)\,dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} (3r + 4)\,r\,dr\,d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} (3r^2 + 4r)\,dr\,d\varphi$$

Die Auswertung erfolgt in der üblichen Weise (erst nach r, dann nach φ integrieren).

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=1}^{3} (3r^2 + 4r)\,dr = \left[r^3 + 2r^2\right]_{r=1}^{3} = 27 + 18 - 1 - 2 = 42$$

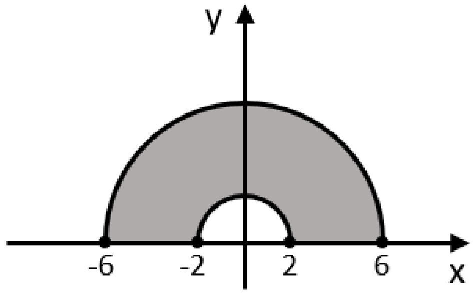
Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} 42\,d\varphi = 42 \cdot \int_{0}^{2\pi} 1\,d\varphi = 42\left[\varphi\right]_0^{2\pi} = 42(2\pi - 0) = 84\pi$$

Ergebnis: $I = 84\pi$

7. Schwerpunkt

Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt S des skizzierten Kreisringausschnitts mit Innenradius $r_1 = 2$ und Aussenradius $r_2 = 6$.



Der *Integrationsbereich* für die Berechnung des *Flächenschwerpunktes* $S = (x_S; y_S)$ lautet:

r-Integration: von $r = 2$ bis $r = 6$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

Der benötigte *Flächeninhalt* A lässt sich *elementar* berechnen (als Differenz zweier Halbkreisflächen):

$$A = \frac{1}{2}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = \frac{1}{2}\pi(r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2}\pi(36 - 4) = 16\pi = 50{,}2655$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Fläche liegt der Schwerpunkt auf der y-Achse. Somit ist $x_S = 0$. Die *Ordinate* y_S berechnen wir mit dem folgenden Doppelintegral:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y\, dA = \frac{1}{16\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=2}^{6} r^2 \cdot \sin\varphi \, dr\, d\varphi$$

(Transformationsgleichungen: $y = r \cdot \sin\varphi$, Flächenelement $dA = r\, dr\, d\varphi$)

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=2}^{6} r^2 \cdot \sin\varphi\, dr = \sin\varphi \cdot \int_{r=2}^{6} r^2\, dr = \sin\varphi \left[\frac{1}{3}\, r^3\right]_{r=2}^{6} = \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi \left[r^3\right]_{r=2}^{6} =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi\,(216 - 8) = \frac{208}{3} \cdot \sin\varphi$$

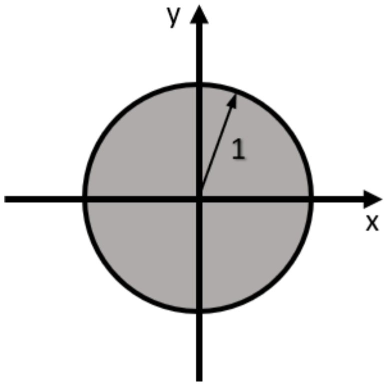
Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$y_S = \frac{1}{16\pi} \cdot \frac{208}{3} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \sin\varphi\, d\varphi = \frac{13}{3\pi} \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{13}{3\pi}\,(-\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1}) = \frac{13}{3\pi}\,(1+1) = \frac{26}{3\pi} = 2{,}7587$$

Schwerpunkt: $S = (0;\ 2{,}7587)$

8. Volumen zylinderförmiger Körper

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch einen in der xy-Ebene gelegenen kreisförmigen Boden mit Radius r = 1 und einen Deckel mit der Fläche $z = e^{x^2+y^2}$ gebildet wird.



Wir verwenden *Polarkoordinaten* (wegen der *Kreis*- bzw. *Rotationssymmetrie*). Der kreisförmige „Boden“ liefert den *Integrationsbereich*): $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$. Die Rotationsfläche bildet den „Deckel“ des zylindrischen Körpers, ihre Gleichung in *Polarkoordinaten* erhalten wir wie folgt (Transformationsgleichungen: $x = r \cdot \cos\varphi$, $y = r \cdot \sin\varphi$):

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2\varphi + r^2 \cdot \sin^2\varphi = r^2\,\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r^2 \quad \Rightarrow \quad z = e^{x^2+y^2} = e^{r^2}$$

(unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagroas“ $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

Damit gilt für das gesuchte Volumen:

$$V = \iint_{(A)} z\, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} e^{r^2} \cdot r\, dr\, d\varphi \qquad \text{(Flächenelement } dA = r\, dr\, d\varphi\text{)}$$

Innere Integration (nach der Variablen *r*)

Wir lösen das innere Integral mit Hilfe der folgenden *Substitution*:

$$u = r^2, \quad \frac{du}{dr} = 2r, \quad dr = \frac{du}{2r}, \qquad \text{Grenzen} \begin{cases} \text{unten: } r = 0 \quad \Rightarrow \quad u = 0 \\ \text{oben: } r = 1 \quad \Rightarrow \quad u = 1 \end{cases}$$

$$\int_{r=0}^{1} e^{r^2} \cdot r \, dr = \int_{u=0}^{1} e^{u} \cdot \cancel{r} \cdot \frac{du}{2\cancel{r}} = \frac{1}{2} \cdot \int_{u=0}^{1} e^{u} \, du = \frac{1}{2} \left[e^{u} \right]_{u=0}^{1} = \frac{1}{2} \left(e^{1} - e^{0} \right) = \frac{1}{2} (e - 1)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$V = \frac{1}{2} (e - 1) \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1 \, d\varphi = \frac{1}{2} (e - 1) \left[\varphi \right]_{0}^{2\pi} = \frac{1}{2} (e - 1)(2\pi - 0) = (e - 1)\pi$$

Volumen: $V = (e - 1)\pi = 5{,}398$