Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 5

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Bogenlänge, Mantelfläche von Rotationskörpern, Massenmittelpunkt, Schwerpunkt, Flächenschwerpunkt,und ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können mit Hilfe der Integration die Bogenlänge einer ebenen Kurve, die Mantelfläche und das Volumen von Rotationskörpern und den Schwerpunkt homogener Flächen und Rotationskörper berechnen.

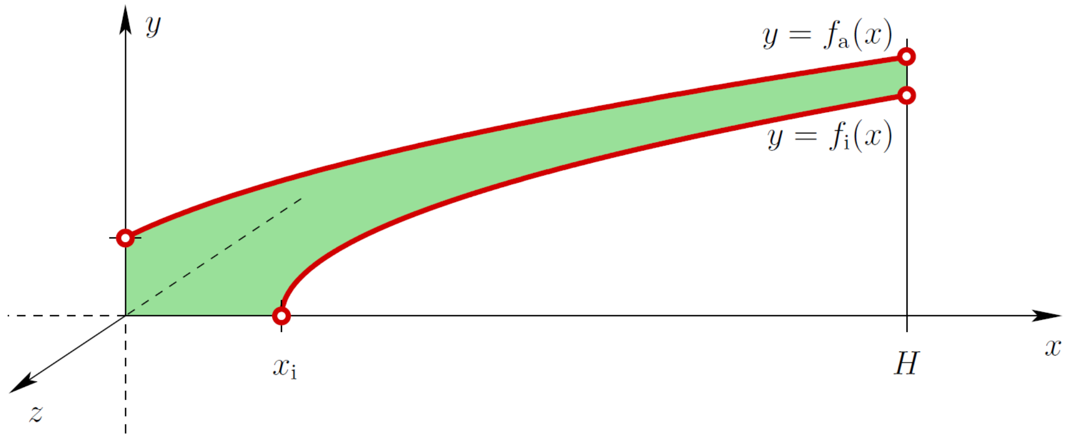
1. Kettenlinie
Welche Länge besitzt ein Drahtseil, das gemäss der Funktion $f(x) = \cosh x$ durchhängt, wenn beide Aufhängepunkte (spiegelsymmetrisch zur y-Achse) die gleiche Höhe und einen Abstand von 4 m voneinander besitzen?

Zur Bestimmung der Bogenlänge einer ebenen Kurve nutzen wir die Formel $L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx$, wobei wir a = -2 und b = 2 wählen.
Wir können die Funktionsgleichung umschreiben: $f(x) = \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
Ableitung bilden: $f'(x) = \sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
Integrand berechnen: $\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2} = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)^2} = \sqrt{1+\frac{1}{4}e^{2x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}}$
$= \sqrt{\frac{1}{4}e^{2x}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-2x}} = \sqrt{\frac{1}{4}(e^{2x}+2+e^{-2x})} = \frac{1}{2}\sqrt{(e^x+e^{-x})^2} = \frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$
Integral berechnen und somit Bogenlänge bestimmen:

$$L = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})dx = 2 \cdot \frac{1}{2}\int_0^2 (e^x + e^{-x})dx = [e^x - e^{-x}]_0^2 = e^2 - e^{-2} = 7{,}254$$

2. Volumen und Masse einer Vase
Es seien die Funktionen
$f_a\colon [0, H] \to \mathbb{R}, f_a(x) = C \cdot \sqrt{x - x_a}$ und $f_i\colon [x_i, H] \to \mathbb{R}, f_i(x) = C \cdot \sqrt{x - x_i}$
mit $x_a < 0 < H$ und $C > 0$ gegeben.
Die Vase entsteht durch Rotation um die x-Achse der Querschnittsfläche (grün in der Skizze), die durch die beiden Funktionen zwischen $x = 0$ und $x = H$ eingeschlossen wird.

a) Wie gross muss H gewählt werden, damit die Vase das Volumen V_0 fassen kann?
b) Welche Masse hat die leere Vase, wenn sie aus Glas der Dichte ρ_g gefertigt ist?



a)
Das Innenvolumen der Vase ergibt sich allgemein zu

$$V_i = \pi \int_{x_i}^{H} f_i^2(x)\,dx = \pi \int_{x_i}^{H} C^2 \cdot \left(\sqrt{x - x_i}\right)^2 dx = \pi \cdot C^2 \int_{x_i}^{H} (x - x_i)\,dx$$

$$= \pi \cdot C^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[(x - x_i)^2 \right]\Big|_{x_i}^{H} = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left((H - x_i)^2 - 0 \right) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot (H - x_i)^2$$

Die Vase soll das vorgegebene Volumen V_0 fassen:

$$V_0 = V_i = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot (H - x_i)^2 \qquad \Big| \cdot \frac{2}{\pi \cdot C^2}$$

$$\frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0 = (H - x_i)^2 \qquad \Big| \sqrt{\cdots}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0} = |H - x_i| = H - x_i \qquad \Big| + x_i.$$

Somit erhalten wir für die Höhe:

$$\underline{\underline{H}} = x_i + \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot C^2} \cdot V_0} = \underline{\underline{x_i + \frac{1}{C} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi} \cdot V_0}}}.$$

b)
Um das Glasvolumen der Vase zu bestimmen, berechnen wir auch das sogenannte Aussenvolumen V_a und ziehen von diesem anschliessend das Innenvolumen V_i ab:

$$V_a = \pi \int_{0}^{H} f_a^2(x)\,dx = \pi \int_{0}^{H} C^2 \cdot \left(\sqrt{x - x_a}\right)^2 dx = \pi \cdot C^2 \int_{0}^{H} (x - x_a)\,dx$$

$$= \pi \cdot C^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[(x - x_a)^2 \right]\Big|_{0}^{H} = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left((H - x_a)^2 - (0 - x_a)^2 \right)$$

$$= \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_a + x_a^2 - x_a^2 \right) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_a \right)$$

$$V_g = V_a - V_i = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_a \right) - \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot (H - x_i)^2$$

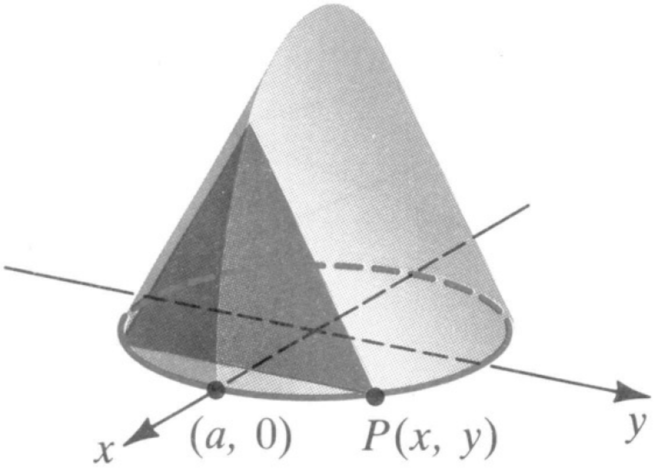
$$= \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(H^2 - 2 \cdot H \cdot x_a - H^2 + 2 \cdot H \cdot x_i - x_i^2 \right) = \frac{\pi \cdot C^2}{2} \cdot \left(2 \cdot H \cdot (x_i - x_a) - x_i^2 \right)$$

$$= \pi \cdot C^2 \cdot \left(H \cdot (x_i - x_a) - \frac{x_i^2}{2} \right).$$

Jetzt können wir die Masse bestimmen:

$$\underline{\underline{M_g}} = \rho_g \cdot V_g = \underline{\underline{\pi \cdot C^2 \cdot \rho_g \cdot \left(H \cdot (x_i - x_a) - \frac{x_i^2}{2} \right)}}.$$

3. Volumen durch Integration des Querschnitts
Gegeben sei ein Körper, deren Grundfläche ein Kreis sei und der im Querschnitt aus gleichseitigen Dreiecken besteht (siehe Skizze). Bestimmen Sie das Volumen des Körpers durch Integration des Querschnitts.



Wir bestimmen die Fläche der gleichseitigen Dreiecke, die eine Seitenlänge von s(x) und eine Höhe h(x) haben, unter Zuhilfenahme des Satzes von Pythagoras.
Für den Kreis gilt: $x^2 + y^2 = a^2$
Für die Seitenlänge ergibt sich: $s(x) = 2 \cdot y = 2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$
Für die Höhe ergibt sich: $h(x) = \sqrt{(s(x))^2 - (\frac{1}{2}s(x))^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot s(x)$
Dreicksfläche (0,5 mal Grundseite mal Höhe) ist somit:

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot s^2(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4 \cdot (a^2 - x^2) = \sqrt{3} \cdot (a^2 - x^2)$$

Durch Integration ergibt sich das Volumen

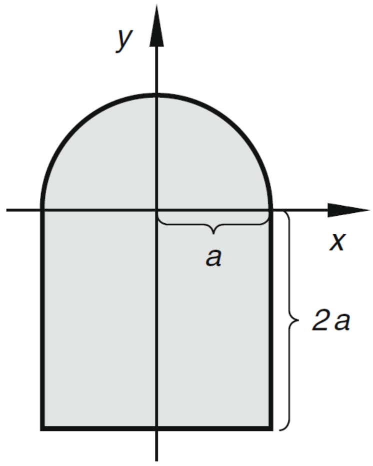
$$\underline{\underline{V}} = \int_{-a}^{a} A(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} A(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{a} \sqrt{3} \cdot (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x = 2 \cdot \sqrt{3} \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)\,\mathrm{d}x$$

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left[a^2 \cdot x - \frac{1}{3} \cdot x^3 \right]\Bigg|_{0}^{a} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(a^2 \cdot a - \frac{1}{3} \cdot a^3 - 0 + 0 \right)$$

$$= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(a^3 - \frac{1}{3} \cdot a^3 \right) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{3} \right) = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot a^3 \cdot \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot a^3}}.$$

4. Flächenschwerpunkt

a) Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt der skizzierten Fläche (Quadrat mit aufgesetztem Halbkreis).



b) Bestimmen Sie den Schwerpunkt der Fläche, die von der Geraden $y=x+2$ und der Parabel $y=x^2-4$ berandet wird.

a)
Zuerst die obere und untere begrenzende Funktion bestimmen (y_o und y_u).

$$y_o = \sqrt{a^2 - x^2}; \quad y_u = -2a$$

Dann die Fläche ausrechnen.

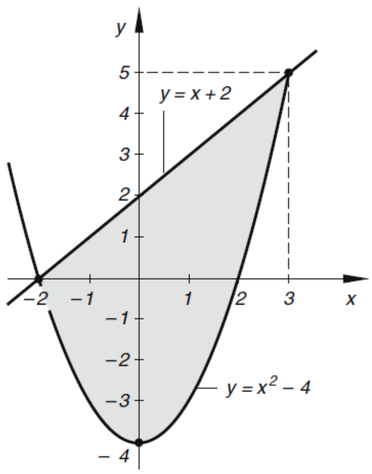
$$A = 4a^2 + \frac{\pi}{2} a^2 = 5{,}5708\, a^2$$

Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen auf der y-Achse, d. h. $x_s = 0$ und es muss nur der y_s Wert bestimmt werden.

$$y_S = \frac{1}{2A} \cdot \int_{-a}^{a} [(a^2 - x^2) - 4a^2]\, dx = \frac{1}{A} \cdot \int_{0}^{a} [(a^2 - x^2) - 4a^2]\, dx =$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \int_{0}^{a} (-x^2 - 3a^2)\, dx = \frac{1}{5{,}5708\, a^2} \left[-\frac{1}{3} x^3 - 3a^2 x \right]_0^a = -0{,}598\, a$$

b)
Zuerst Bestimmung der Schnittpunkte der beiden Funktionen, um die Fläche berechnen zu können.



$$x^2 - 4 = x + 2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 3$$

$$A = \int_{-2}^{3} [(x+2) - (x^2 - 4)]\, dx =$$

$$= \int_{-2}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 6x \right]_{-2}^{3} = 125/6$$

Nun lassen sich x- und y-Wert des Schwerpunkts bestimmen:

$$x_s = \frac{1}{A} \cdot \int_{-2}^{3} x[(x+2) - (x^2 - 4)]\, dx =$$

$$= \frac{1}{A} \cdot \int_{-2}^{3} (-x^3 + x^2 + 6x)\, dx =$$

$$= \frac{6}{125} \left[-\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{3} x^3 + 3x^2 \right]_{-2}^{3} = 0{,}5$$

$$y_s = \frac{1}{2A} \cdot \int_{-2}^{3} [(x+2)^2 - (x^2 - 4)^2]\, dx = \frac{1}{2A} \cdot \int_{-2}^{3} (-x^4 + 9x^2 + 4x - 12)\, dx =$$

$$= \frac{3}{125} \left[-\frac{1}{5} x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 12x \right]_{-2}^{3} = 0$$

Der Flächenschwerpunkt liegt also auf der x-Achse: $S = (0{,}5; 0)$

5. Schwerpunkt Rotationskörper

Bestimmen Sie den Schwerpunkt des Rotationskörpers, der durch Drehung der Funktion $f(x) = \ln x, 1 \leq x \leq e$ um die x-Achse entsteht.

Zuerst Berechnung des Volumens des Rotationskörpers (Integral durch 2malige partielle Integration lösen – Integrand ist $1 \cdot (\ln x)^2$):

$$V_x = \pi \cdot \int_{1}^{e} (\ln x)^2\, dx = \pi \left[x((\ln x)^2 - 2 \cdot \ln x + 2) \right]_{1}^{e} = \pi(e - 2) = 2{,}257$$

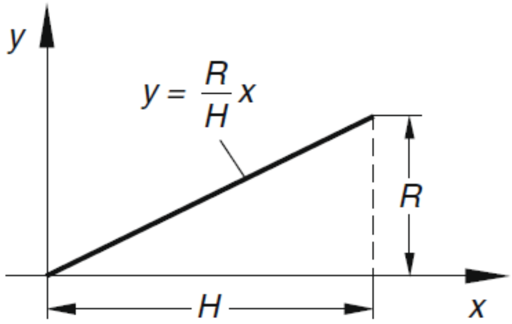
Der Schwerpunkt liegt auf der x-Achse, d. h. $y_s = 0$. Integral durch 2malige partielle Integration lösen.

$$x_s = \frac{\pi}{V_x} \cdot \int_{1}^{e} x(\ln x)^2\, dx = \frac{1}{e - 2} \left[\frac{1}{2} x^2 \left((\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} \right) \right]_{1}^{e} = \frac{e^2 - 1}{4(e - 2)} = 2{,}224$$

6. Kreiskegel

Gegeben sei ein homogener gerader Kreiskegel mit Radius R, Höhe H und Dichte ρ. Bestimmen Sie das Volumen des Kreiskegels und seinen Schwerpunkt.

Wir legen den Kegel so ins xy-Koordinatensystem, dass die x-Achse der Symmetrieachse des Kreiskegels entspricht, seine Spitze im Ursprung des Koordinatensystems ist und der Kegel durch Rotation der Geraden $y = \frac{R}{H}x$ um die x-Achse entsteht.



Volumen:

$$V = \pi \int_0^H \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^2 dx = \pi \frac{R^2}{H^2} [\tfrac{1}{3}x^3]_0^H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

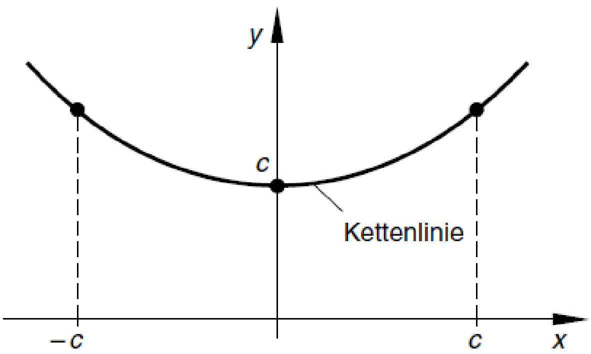
Der Schwerpunkt liegt aus Symmetriegründen auf der x-Achse (y_s=0):

$$x_S = \frac{\pi}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} \int_0^H x \left(\frac{R}{H}x\right)^2 dx = \frac{3}{R^2 H} \int_0^H x \frac{R^2}{H^2} x^2 dx = \frac{3}{R^2 H} \cdot \frac{R^2}{H^2} \int_0^H x^3 dx$$

$$= \frac{3}{H^3} [\tfrac{1}{4}x^4]_0^H = \frac{3}{H^3}\frac{1}{4}H^4 = \frac{3}{4}H$$

7. Mantelfläche Rotationskörper

Bestimmen Sie die Mantelfläche M_x des Rotationskörpers, der durch Drehung der Kettenlinie $f(x) = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right), -c \le x \le c$ um die x-Achse entsteht.



Bestimmung der Mantelfläche bei Rotation um x-Achse:

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

Ableiten der Funktion f(x)=y, Bestimmung des Radikanden im Integral und des Integranden:

$$y' = c \cdot \sinh\left(\frac{x}{c}\right) \cdot \frac{1}{c} = \sinh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$1 + (y')^2 = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{c}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{1 + (y')^2} = \cosh\left(\frac{x}{c}\right)$$

$$y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} = c \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) \cdot \cosh\left(\frac{x}{c}\right) = c \cdot \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right)$$

Berechnung des Integrals (siehe Übungsblatt 3 Analysis Aufgabe 2j):

$$M_x = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi c \cdot 2 \cdot \int_0^c \cosh^2\left(\frac{x}{c}\right) dx = 4\pi c \left[\frac{x}{2} + \frac{\sinh\left(\frac{2x}{c}\right)}{4/c}\right]_0^c =$$

$$= 4\pi c \left[\frac{x}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh\left(\frac{2x}{c}\right)\right]_0^c = 4\pi c \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh 2 - 0 - \frac{c}{4} \cdot \underbrace{\sinh 0}_{0}\right) = 4\pi c \left(\frac{c}{2} + \frac{c}{4} \cdot \sinh 2\right) =$$

$$= 4\pi c \cdot \frac{c}{2} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \sinh 2\right)}_{2{,}8134} = 2\pi c^2 \cdot 2{,}8134 = 5{,}6268\, \pi c^2 = 17{,}6771 \cdot c^2$$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 5

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über Zweifach-Integrale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Ein *Zweifach-Integral* beschreibt das *Volumen* zwischen dem *Graphen* einer *Funktion* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einem *Gebiet* in der x-y-Ebene.	●	○
b) Die *Fläche* eines *Gebiets* in 2D lässt sich mit Hilfe eines *Zweifach-Integrals* berechnen.	●	○
c) Gemäss FUBINI-*Satz* darf die *Integrationsreihenfolge* eines *Zweifach-Integrals* nicht vertauscht werden.	○	●
d) Mit Hilfe des FUBINI-*Satzes* kann man nur *Integrale* über *achsenparallele Rechtecke* berechnen.	○	●
e) Für $f(x; y) \geq 0$ gilt $\int_G f(x; y)\,\mathrm{d}A \geq 0$ für jedes *Gebiet* G in der x-y-Ebene.	●	○
f) Für $f(x; y) \leq 0$ gilt $\int_{x_0}^{x_\mathrm{E}} \int_{y_0}^{y_\mathrm{E}} f(x; y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \leq 0$ für alle $x_0, x_\mathrm{E}, y_0, y_\mathrm{E} \in \mathbb{R}$.	○	●

2. Integrale über Rechtecke

Wir berechnen die folgenden *Integrale* über *Rechtecke*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \int_0^2 xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]\Big|_0^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[y^2\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot (2^2 - 0) \cdot (1^2 - 0)$$
$$= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 1 = \underline{\underline{1.}} \tag{1}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^2 \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^2 1\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3} \cdot \left[x^3\right]\Big|_0^1 \cdot \left[y\right]\Big|_0^2 = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0) \cdot (2 - 0)$$
$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}. \tag{2}$$

c) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^{\ln(3)}\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x+y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\ln(3)}\int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x}\cdot\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x\cdot\int_0^{\ln(3)}\mathrm{e}^{y}\,\mathrm{d}y$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\Big[\mathrm{e}^{2x}\Big]\Big|_0^{\ln(2)}\cdot\Big[\mathrm{e}^{y}\Big]\Big|_0^{\ln(3)} = \frac{1}{2}\cdot(\mathrm{e}^{2\cdot\ln(2)}-\mathrm{e}^0)\cdot(\mathrm{e}^{\ln(3)}-\mathrm{e}^0) = \frac{1}{2}\cdot(2^2-1)\cdot(3-1)$$
$$= \frac{1}{2}\cdot(4-1)\cdot 2 = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2 = \underline{\underline{3.}} \tag{3}$$

d) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{y}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x\cdot\int_1^{\mathrm{e}}\frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\cdot\Big[x^3\Big]\Big|_0^1\cdot\ln\Big(\frac{\mathrm{e}}{1}\Big) = \frac{1}{3}\cdot(1^3-0)\cdot\ln(\mathrm{e})$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}\,.}} \tag{4}$$

e) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^4\int_{-1}^2 \big(2x+6x^2y\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^4\Big[x^2+2x^3y\Big]\Big|_{-1}^2\,\mathrm{d}y = \int_1^4\big(4+16y-1+2y\big)\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_1^4\big(3+18y\big)\,\mathrm{d}y = \Big[3y+9y^2\Big]\Big|_1^4 = 12+144-3-9 = \underline{\underline{144.}} \tag{5}$$

f) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^2\int_1^4 \big(2x+6x^2y\big)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2\Big[2xy+3x^2y^2\Big]\Big|_1^4\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^2\big(8x+48x^2-2x-3x^2\big)\,\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^2\big(6x+45x^2\big)\,\mathrm{d}x = \Big[3x^2+15x^3\Big]\Big|_{-1}^2 = 12+120-3+15 = \underline{\underline{144.}} \tag{6}$$

3. Zweifach-Integrale

Wir berechnen die folgenden *Zweifach-Integrale*.

a) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^2\int_{y^2}^{2y}\big(4x-y\big)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2\Big[2x^2-yx\Big]\Big|_{y^2}^{2y}\,\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^2\big(\,2\cdot 4y^2-y\cdot 2y-2\cdot y^4+y\cdot y^2\,\big)\,\mathrm{d}y = \int_0^2\big(\,6y^2-2y^4+y^3\,\big)\,\mathrm{d}y$$
$$= \Big[2y^3-\frac{2y^5}{5}+\frac{y^4}{4}\Big]\Big|_0^2 = 2\cdot 2^3-\frac{2\cdot 2^5}{5}+\frac{2^4}{4}-0+0-0 = 16-\frac{64}{5}+4 = 20-\frac{64}{5}$$
$$= \frac{100}{5}-\frac{64}{5} = \underline{\underline{\frac{36}{5}\,.}} \tag{7}$$

b) Wir erhalten

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y \, dy \, dx = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[y^2 \right]\Big|_{1-x}^{\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \left(x - (1-x)^2 \right) dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot (x - 1 + 2x - x^2) \, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot (3x - 1 - x^2) \, dx$$
$$= \frac{1}{2} \int_1^2 (3x^3 - x^2 - x^4) \, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]\Big|_1^2$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} - \frac{3 \cdot 1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(12 - \frac{8}{3} - \frac{32}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(12 - \frac{7}{3} - \frac{31}{5} - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{720}{60} - \frac{140}{60} - \frac{372}{60} - \frac{45}{60} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{163}{60} = \underline{\underline{\frac{163}{120}}} . \tag{8}$$

c) Wir erhalten

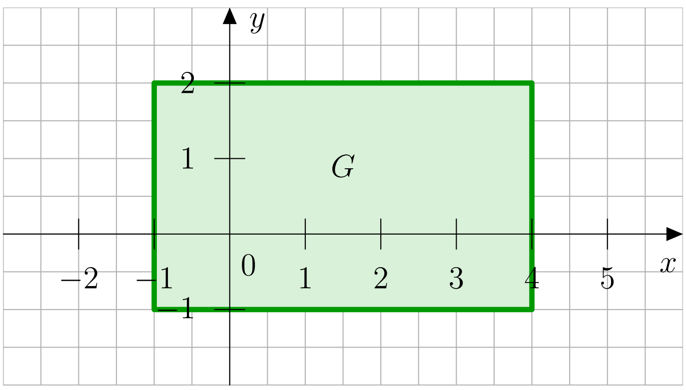
$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 \int_0^x e^{\frac{y}{x}} \, dy \, dx = \int_1^2 \left[x \cdot e^{\frac{y}{x}} \right]\Big|_0^x dx = \int_1^2 x \cdot \left(e^{\frac{x}{x}} - e^{\frac{0}{x}} \right) dx = (e-1) \int_1^2 x \, dx$$
$$= (e-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right]\Big|_1^2 = (e-1) \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = (e-1) \cdot \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{2} \cdot (e-1)}} . \tag{9}$$

4. Integrale über Gebiete

Wir berechnen das folgende *Integral* über das jeweils angegebene *Gebiet* G.

$$I = \int_G 2xy^2 \, dA \tag{10}$$

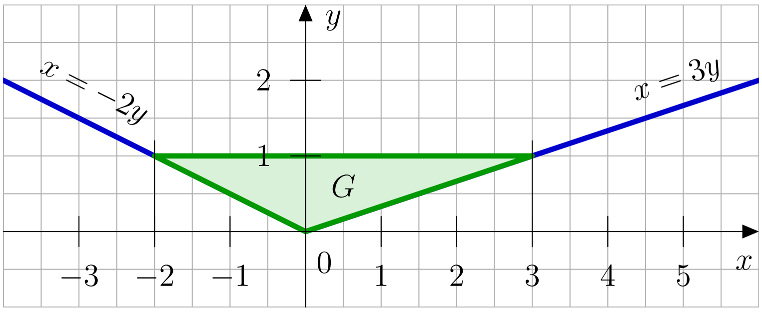
a) Wir betrachten das *Rechteck* G mit *Eckpunkten* $(-1; -1)$, $(4; -1)$, $(4; 2)$, $(-1; 2)$.



Mit Hilfe des Fubini-*Satzes* und der Skizze erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_G 2xy^2 \, dA = 2 \int_G xy^2 \, dA = 2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^4 xy^2 \, dx \, dy = 2 \int_{-1}^4 x \, dx \cdot \int_{-1}^2 y^2 \, dy$$
$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right]\Big|_{-1}^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[y^3 \right]\Big|_{-1}^2 = \left(4^2 - (-1)^2 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2^3 - (-1)^3 \right) = (16-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (8+1)$$
$$= 15 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 = 5 \cdot 9 = \underline{\underline{45.}} \tag{11}$$

b) Wir betrachten das *Dreieck* G mit *Eckpunkten* $(0;0)$, $(3;1)$, $(-2;1)$.



Mit Hilfe des FUBINI-*Satzes* und der Skizze erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_G 2xy^2 \,\mathrm{d}A = 2\int_G xy^2 \,\mathrm{d}A = 2\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 y^2 \int_{-2y}^{3y} x \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]\Big|_{-2y}^{3y} \mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \cdot \left((3y)^2 - (-2y)^2\right) \mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \cdot \left(9y^2 - 4y^2\right) \mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 y^2 \cdot 5y^2 \,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4 \,\mathrm{d}y = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[x^5\right]\Big|_0^1 = 1^5 - 0^5 = 1 - 0 = \underline{\underline{1.}} \tag{12}$$

5. Aussagen über ein Zweifach-Integral

Wir betrachten das *Integral*

$$I(r) = \int_{\left\{\sqrt{x^2+y^2} \le r\right\}} \sqrt{x^2+y^2} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{für } r \in \mathbb{R}^+. \tag{13}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Für alle $r \in \mathbb{R}^+$, kann $I(r)$ mit Hilfe des FUBINI-*Satzes* berechnet werden.	●	○
b) $I(r)$ *steigt monoton* mit $r \in \mathbb{R}^+$.	●	○
c) Für $r \in \mathbb{R}^+$ gilt $I(r) > 0$.	●	○
d) Verdoppelt man r, dann vervierfacht man $I(r)$.	○	●
e) Es gilt $\lim_{r\to 0} I(r) = 0$.	●	○
f) Für alle $r \in \mathbb{R}^+$ gilt $I(r) > \pi r^3$.	○	●

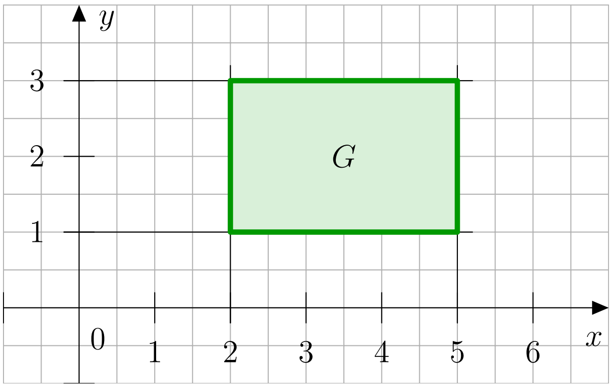
6. Integrationsreihenfolge tauschen

Wir tauschen jeweils die *Integrationsreihenfolge* für folgende *Integrale*.

a) Wir betrachten das *Integral*

$$I = \int_1^3 \int_2^5 f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f\,\mathrm{d}A. \tag{14}$$

Das *Integrationsgebiet* G ist in der folgenden Skizze dargestellt.



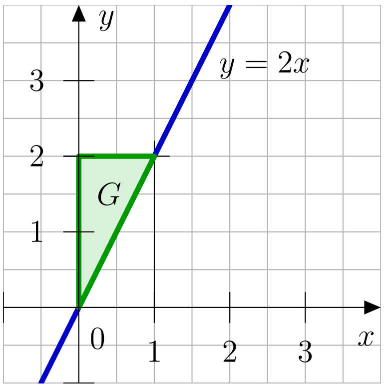
Durch Tauschen der *Integrationsreihenfolge* mit Hilfe des Fubini-*Satzes* und der Skizze erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_2^5 \int_1^3 f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.}} \tag{15}$$

b) Wir betrachten das *Integral*

$$I = \int_0^1 \int_{2x}^2 f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_G f\,\mathrm{d}A. \tag{16}$$

Das *Integrationsgebiet* G ist in der folgenden Skizze dargestellt.



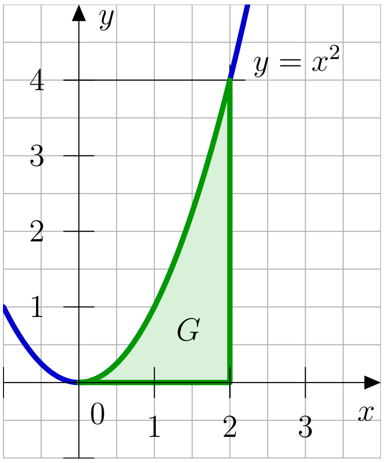
Durch Tauschen der *Integrationsreihenfolge* mit Hilfe des Fubini-*Satzes* und der Skizze erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}} \tag{17}$$

c) Wir betrachten das *Integral*

$$I = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f\,\mathrm{d}A. \tag{18}$$

Das *Integrationsgebiet* G ist in der folgenden Skizze dargestellt.



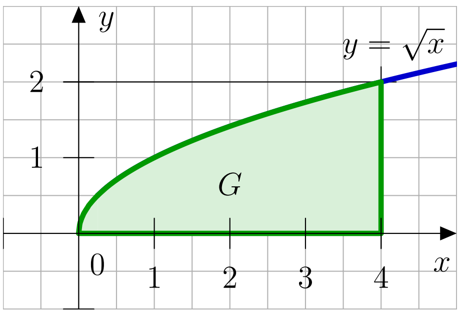
Durch Tauschen der *Integrationsreihenfolge* mit Hilfe des Fubini-*Satzes* und der Skizze erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.}} \tag{19}$$

d) Wir betrachten das *Integral*

$$I = \int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_G f\,\mathrm{d}A. \tag{20}$$

Das *Integrationsgebiet* G ist in der folgenden Skizze dargestellt.



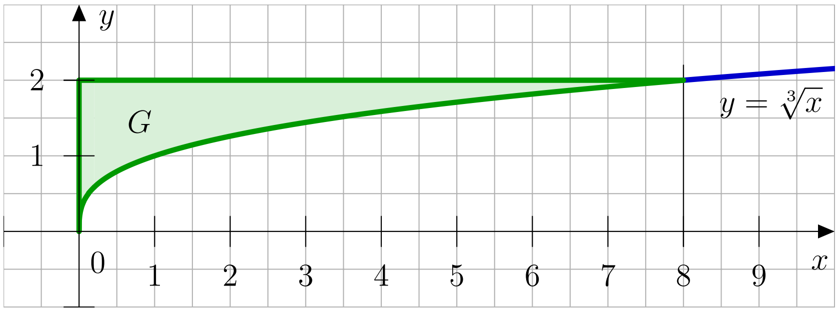
Durch Tauschen der *Integrationsreihenfolge* mit Hilfe des Fubini-*Satzes* und der Skizze erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.}} \tag{21}$$

e) Wir betrachten das *Integral*

$$I = \int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^2 f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_G f\,\mathrm{d}A. \tag{22}$$

Das *Integrationsgebiet* G ist in der folgenden Skizze dargestellt.



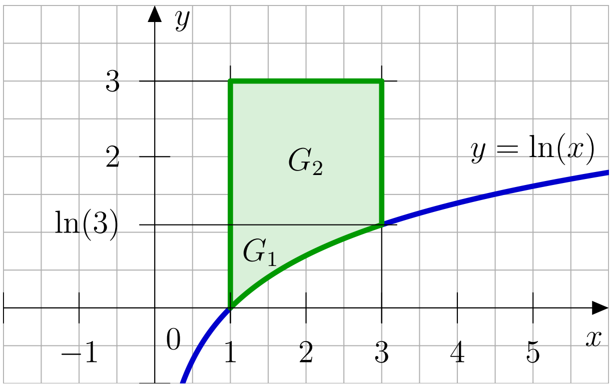
Durch Tauschen der *Integrationsreihenfolge* mit Hilfe des FUBINI-*Satzes* und der Skizze erhalten wir

$$\underline{\underline{I}} = \int_G f \, \mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{y^3} f(x; y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.}} \tag{23}$$

f) Wir betrachten das *Integral*

$$I = \int_1^3 \int_{\ln(x)}^3 f(x; y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_G f \, \mathrm{d}A. \tag{24}$$

Das *Integrationsgebiet* G ist in der folgenden Skizze dargestellt.



Durch Tauschen der *Integrationsreihenfolge* mit Hilfe des FUBINI-*Satzes* und der Skizze erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{I}} &= \int_G f \, \mathrm{d}A = \int_{G_1} f \, \mathrm{d}A + \int_{G_2} f \, \mathrm{d}A \\ &= \underline{\underline{\int_0^{\ln(3)} \int_1^{\mathrm{e}^y} f(x; y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{\ln(3)}^3 \int_1^3 f(x; y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.}} \end{aligned} \tag{25}$$

7. Masse der Luft in einem Schacht

Wir betrachten einen *quaderförmigen*, vertikalen Bergwerksschacht Q mit *Länge* $L \approx 10.0\,\mathrm{m}$, *Breite* $B \approx 7.00\,\mathrm{m}$ und *Tiefe* $H \approx 3.50\,\mathrm{km} = 3.50 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$. Überall im Schacht herrscht die gleiche *Temperatur* und am Eingang oben hat die Luft eine *Dichte* von $\rho_0 \approx 1.13\,\mathrm{kg/m^3}$. Wenn der *Luftdruck* sich über eine *Höhendifferenz* von $\Sigma \approx 5.50\,\mathrm{km} = 5.50 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$ halbiert, kann die *Luftdichte* im Schacht ausgedrückt werden durch die *verallgemeinerte Exponentialfunktion*

$$\rho(x; y; z) = \rho_0 \cdot a^{\frac{z-z_0}{\Sigma}} = \rho_0 \cdot 2^{\frac{z-0}{\Sigma}} = \rho_0 \cdot 2^{\frac{z}{\Sigma}}. \tag{26}$$

Durch *Integration* der *Luftdichte* über den Schacht Q erhalten wir die *Luftmasse*

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{M}} &= \int_Q \rho \,\mathrm{d}V = \int_0^L \int_0^B \int_0^H \rho(x; y; z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^L \int_0^B \int_0^H \rho_0 \cdot 2^{\frac{z}{\Sigma}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \rho_0 \cdot \int_0^L 1\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^B 1\,\mathrm{d}y \cdot \int_0^H 2^{\frac{z}{\Sigma}}\,\mathrm{d}z = \rho_0 \cdot \Big[\, x \,\Big]\Big|_0^L \cdot \Big[\, y \,\Big]\Big|_0^B \cdot \frac{\Sigma}{\ln(2)} \cdot \Big[\, 2^{\frac{z}{\Sigma}} \,\Big]\Big|_0^H \\
&= \rho_0 \cdot (L-0) \cdot (B-0) \cdot \frac{\Sigma}{\ln(2)} \cdot \Big(2^{\frac{H}{\Sigma}} - 2^{\frac{0}{\Sigma}} \Big) = \rho_0 \cdot L \cdot B \cdot \frac{\Sigma}{\ln(2)} \cdot \Big(2^{\frac{H}{\Sigma}} - 1 \Big) \\
&\approx 1.13\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 10.0\,\mathrm{m} \cdot 7.00\,\mathrm{m} \cdot \frac{5.50 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{\ln(2)} \cdot \Big(2^{\frac{3.50 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}{5.50 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}} - 1 \Big) \approx 3.48 \cdot 10^5\,\mathrm{kg} = \underline{\underline{348\,\mathrm{t.}}}
\end{aligned} \tag{27}$$