Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 3

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Exponentialform einer komplexen Zahl, Eulersche Formel Potenzgleichungen und deren Eigenschaften.
- Sie können komplexe Zahlen in der arithmetischen, in der trigonometrischen und Exponentialform darstellen und von einer in die andere Form umwandeln.
- Sie können die Grundrechenarten für die komplexen Zahlen anwenden.
- Sie können komplexe Zahlen sowohl potenzieren als auch aus ihnen die Wurzel ziehen.

1. Aussagen über die Exponentialform

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede komplexe Zahl lässt sich in Exponentialform darstellen.	X	
b) Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in Exponentialform darstellen.		X
c) Der Term $2e^{i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.	X	
d) Der Term $2e^{-i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.	X	
e) Der Term $-2e^{-i\pi}$ ist die Exponentialform von -2.		X

2. Konversion zwischen arithmetischer und Exponentialform

Wandeln Sie folgende komplexe Zahlen in Exponentialform bzw. in arithmetische Form um.

a) 4 – 4i

b) $-\sqrt{3}+i$

c) $2e^{-i\pi/6}$

d) $\sqrt{2}e^{i3\pi/4}$

a)

Umrechnung von arithmetischer in Exponentialform:

$$z = x + y\mathrm{i} \to r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$$

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \arctan(y/x) + \sigma\pi$$

mit $\sigma = 0$ für $x \geq 0$ und $\sigma = \pm 1$ für $x < 0$

(Wahl des Vorzeichens $\rightsquigarrow$ φ im Standardbereich $(-\pi, \pi])$

$$r = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}, \quad \varphi = \arctan(-1) + \sigma\pi = -\pi/4 + 0$$

$$z = 4\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$$

b)

$$r = \sqrt{3+1} = 2, \quad \varphi = \arctan(-1/\sqrt{3}) + \sigma\pi = -\pi/6 + \pi = 5\pi/6$$

$$z = 2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}5\pi/6}$$

(Korrektur des Winkels um $+\pi$ wegen $x = -\sqrt{3} < 0$)

c)

Umrechnung in arithmetische Form:

$$z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} \to x + y\mathrm{i}$$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

$$x = 2\cos(-\pi/6) = \sqrt{3}, \quad y = 2\sin(-\pi/6) = -1$$

$$z = \sqrt{3} - \mathrm{i}$$

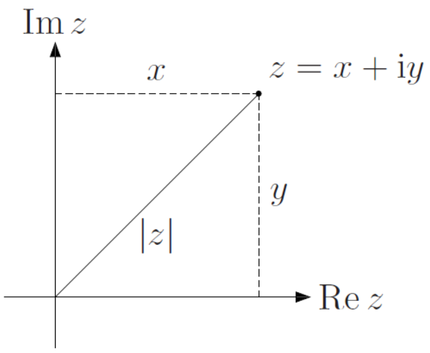
d)

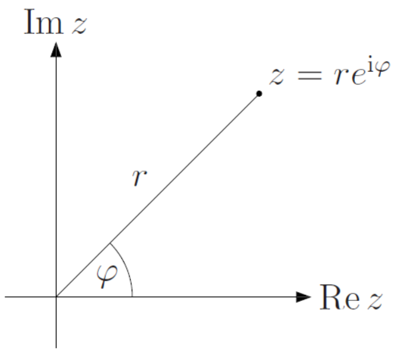
$$x = \sqrt{2}\,\cos(3\pi/4) = -1, \quad y = \sqrt{2}\,\sin(3\pi/4) = 1$$

$$z = -1 + \mathrm{i}$$

3. Umwandlung komplexer Zahlen

Berechnen Sie $2e^{-i\pi/3} - \sqrt{3} + i$ und geben Sie das Ergebnis sowohl in arithmetischer als auch in Exponentialform an.





Umwandlung von $z_1 = 2e^{-i\pi/3}$ in arithmetische Form:

$$r\,\exp(\mathrm{i}\,\varphi) = r\cos\varphi\, +\, \mathrm{i}\,\sin\varphi$$

mit $r = 2,\ \varphi = -\pi/3 \quad \rightsquigarrow$

$$z_1 = 2\cos(-\pi/3)\, +\, \mathrm{i}\,2\sin(-\pi/3) = 1\, -\, \sqrt{3}\,\mathrm{i}$$

Es ergibt sich für die Summe $z = x + iy = z_1 - \sqrt{3} + i = 1 - \sqrt{3} + \left(1 - \sqrt{3}\right)i$

Umwandlung in Exponentialform:

$$r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2+(1-\sqrt{3})^2} = \sqrt{2}\left|1-\sqrt{3}\right| = \sqrt{6}-\sqrt{2}$$
$$\varphi = \arctan(x/y)+\sigma\pi = \arctan(1)-\pi = -3\pi/4 \qquad (\sigma=-1)$$

Standardbereich des Arkustangens $= [-\pi/2, \pi/2] \quad \rightsquigarrow$
Korrektur um $\sigma\pi$ je nach Lage von $x+iy$ in den vier Quadranten

$$\sigma = \begin{cases} 0, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \wedge y \geq 0 \\ -1, & x < 0 \wedge y < 0 \end{cases}$$

$x = y = 1-\sqrt{3} < 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma = -1$
$z = (\sqrt{6}-\sqrt{2})e^{-i3\pi/4}$

4. Potenzgleichungen
Bestimmen Sie die Lösungsmenge der jeweiligen Potenzgleichung.

a) $z^2 = -49$ b) $z^2 = i$ c) $z^3 = -8$
d) $z^3 = -27i$ e) $z^3 = 1-\sqrt{3}i$ f) $z^4 = -8+8\sqrt{3}i$

a) $z^2 = -49$

-49 in Exponentialform: $r = 49$ $\varphi = \pi$

$\rightarrow z^2 = 49\, e^{i\pi + 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

$z = 7 \cdot e^{i\frac{\pi}{2} + k\pi}$

$z_1 = 7 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} = 7 \cdot i$

$z_2 = 7 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi} = -7i$

b) $z^2 = i$

i in Exponentialform: $r = 1$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$z^2 = e^{i\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ $k \in \mathbb{Z}$

$z = e^{i\frac{\pi}{4} + k\pi}$

$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$z_2 = e^{i\frac{5}{4}\pi} = \cos\frac{5}{4}\pi + i \sin\frac{5}{4}\pi$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{2} - i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$

c) $z^3 = -8$

-8 in Exponentialform: $r = 8 \quad \varphi = \pi$

$z^3 = 8 \cdot e^{i\pi + 2k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$z = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi}$

$z_1 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}} = \sqrt[3]{8} \cdot (\cos\frac{\pi}{3} + i \cdot \sin\frac{\pi}{3})$

$= \sqrt[3]{8} \cdot (\frac{1}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\sqrt{3}) = 1 + i\sqrt{3}$

$z_2 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\pi} = 2 \cdot (\cos\pi + i \cdot \sin\pi)$

$= 2$

$z_3 = \sqrt[3]{8} \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2(\cos\frac{5}{3}\pi + i \cdot \sin\frac{5}{3}\pi)$

$= 1 - i \cdot \sqrt{3}$

d) $z^3 = -27i$

$-27i$ in Exponentialform: $r = 27 \quad \varphi = \frac{3}{2}\pi$

$z^3 = 27 \cdot e^{i\frac{3}{2}\pi + 2k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = 3 \cdot e^{i\frac{1}{2}\pi} = 3 \cdot (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$

$= 3i$

$z_2 = 3 \cdot e^{i\frac{7}{6}\pi} = 3 \cdot (\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

$= -\frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$

$z_3 = 3 \cdot e^{i\frac{11}{6}\pi} = 3 \cdot (\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi)$

$= \frac{3}{2}\sqrt{3} - \frac{3}{2}i$

e) $z^3 = 1 - \sqrt{3}i$

$1-\sqrt{3}i$ in Exponentialform: $r = 2 \quad \varphi = \frac{5}{3}\pi$

$\hookrightarrow$ im 4. Quadranten, d.h.

$\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$

$z^3 = 2 \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi + 2k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$z_1 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{5}{9}\pi} = \sqrt[3]{2}\,(\cos\frac{5}{9}\pi + i\sin\frac{5}{9}\pi)$

$= -0{,}219 + 1{,}241 \cdot i$

$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot e^{i\frac{11}{9}\pi} = \sqrt[3]{2}\,(\cos\frac{11}{9}\pi + i\sin\frac{11}{9}\pi)$

$= -0{,}965 - 0{,}81 \cdot i$

$z_3 = \sqrt[3]{2}\, e^{i\frac{17}{9}\pi} = \sqrt[3]{2}\,(\cos\frac{17}{9}\pi + i\sin\frac{17}{9}\pi)$

$= 1{,}184 - 0{,}431 \cdot i$

f) $z^4 = -8 + 8\sqrt{3}i \leftarrow$ im 2. Quadranten

$-8+8\sqrt{3}i$ in Exponentialform:

$r = \sqrt{8^2 + 8^2 \cdot 3} = 16$

$\varphi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi = \frac{2}{3}\pi$

$z^4 = 16 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi + 2k\pi} \qquad k \in \mathbb{Z}$

$z = 2 \cdot e^{i\frac{1}{6}\pi + \frac{1}{2}k\pi}$

$z_1 = 2 \cdot e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\,(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$

$= \sqrt{3} + i$

$z_2 = 2 \cdot e^{i\frac{2}{3}\pi} = 2\,(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$

$= -1 + \sqrt{3}i$

$z_3 = 2 \cdot e^{i\frac{7}{6}\pi} = 2 \cdot (\cos\frac{7}{6}\pi + i\sin\frac{7}{6}\pi)$

$= -\sqrt{3} - i$

$z_4 = 2 \cdot e^{i\frac{5}{3}\pi} = 2 \cdot (\cos\frac{5}{3}\pi + i\sin\frac{5}{3}\pi)$

$= 1 - \sqrt{3}i$

5. Aussagen über Potenzgleichungen

Gegeben sei die Potenzgleichung

$$z^n = w \text{ mit } w \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für jede Wahl von w hat die Gleichung mindestens 1 Lösung in $\mathbb{C}$.	X	
b) Für jede Wahl von w hat die Gleichung genau n Lösungen in $\mathbb{C}$.		X
c) Ist n gerade und z eine Lösung der Gleichung, dann ist auch $-z$ eine Lösung.	X	
d) Sei $w \in \mathbb{R}$ und z eine Lösung der Gleichung, dann ist auch z^* eine Lösung.	X	
e) Alle Lösungen der Gleichung haben denselben Betrag.	X	
f) Alle Lösungen der Gleichung haben dasselbe Argument.		X

6. Aussagen über komplexe Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $Re(z) \in \mathbb{R}$.	X	
b) Es gilt $z = 1$ genau dann, wenn $Im(z) = Re(z) = 1$.		X
c) Es gilt $z_1^* = z_2$ genau dann, wenn $z_2^* = z_1$.	X	
d) Es gibt ein $z \in \mathbb{C}$, so dass $z^2 = i$.	X	
e) Falls $\lvert z_1 \rvert \leq \lvert z_2 \rvert$, dann gilt auch $z_1 \leq z_2$.		X

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 3

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über die exponentielle Form komplexer Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *komplexe Zahl* lässt sich in *exponentieller Form* darstellen.	●	○
b) Jede *komplexe Zahl* lässt sich eindeutig in *exponentieller Form* darstellen.	○	●
c) Der Term $2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ ist eine *exponentielle Form* von -2.	●	○
d) Der Term $2\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi}$ ist eine *exponentielle Form* von -2.	●	○
e) Der Term $-2\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ ist eine *exponentielle Form* von -2.	○	●

2. Umkehrungen der Euler-Formel

Die Euler-*Formel* lässt sich auch umkehren, so dass *Sinus* und *Cosinus* mit Hilfe der *natürlichen Exponentialfunktion* ausgedrückt werden können. Wir zeigen mehrere Varianten, um die *Umkehrformeln* für *Sinus* und *Cosinus* zu beweisen.

Variante 1: Es sei $\varphi \in \mathbb{R}$. Mit Hilfe der Euler-*Formel* erhalten wir

$$\underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}}} = \frac{\cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi) - \cos(-\varphi) - \mathrm{i}\cdot\sin(-\varphi)}{2\mathrm{i}}$$

$$= \frac{\cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi) - \cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi)}{2\mathrm{i}} = \frac{2\cdot\mathrm{i}\cdot\sin(\varphi)}{2\cdot\mathrm{i}} = \underline{\underline{\sin(\varphi)}} \tag{1}$$

$$\underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}}} = \frac{\cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi) + \cos(-\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(-\varphi)}{2}$$

$$= \frac{\cos(\varphi) + \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi) + \cos(\varphi) - \mathrm{i}\cdot\sin(\varphi)}{2} = \frac{2\cdot\cos(\varphi)}{2} = \underline{\underline{\cos(\varphi)}}. \tag{2}$$

Variante 2: Aus den Formeln zur Rekonstruktion von *Imaginär-* und *Realteil* aus einer *komplexen Zahl* und ihrer *komplex Konjugierten* erhalten wir

$$\underline{\underline{\sin(\varphi)}} = \mathrm{Im}\big(\mathrm{cis}(\varphi)\big) = \mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\big) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\big)^*}{2\mathrm{i}} = \underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2\mathrm{i}}}} \tag{3}$$

$$\underline{\underline{\cos(\varphi)}} = \mathrm{Re}\big(\mathrm{cis}(\varphi)\big) = \mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\big) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\big)^*}{2} = \underline{\underline{\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}}{2}}}\,. \tag{4}$$

3. Potenz-Gleichungen mit komplexen Lösungen

Wir bestimmen jeweils die *Lösungsmenge* der *Potenz-Gleichung* in $\mathbb{C}$.

a) Wir betrachten die *Potenz-Gleichung*

$$z^2 = -49 = 49 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \tag{5}$$

mit *Exponent* $n = 2$ und rechter Seite verschieden von Null. Es existieren daher zwei *Lösungen* in $\mathbb{C}$, nämlich

$$z_1 = \sqrt{49} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}} = 7 \cdot \mathrm{i} \tag{6}$$

$$z_2 = \sqrt{49} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{2}} = 7 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3\pi}{2}} = 7 \cdot (-\mathrm{i}) = -7 \cdot \mathrm{i}. \tag{7}$$

Die *Potenz-Gleichung* (5) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \big\{-7\mathrm{i},\ 7\mathrm{i}\big\}.}} \tag{8}$$

b) Wir betrachten die *Potenz-Gleichung*

$$z^2 = \mathrm{i} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}} \tag{9}$$

mit *Exponent* $n = 2$ und rechter Seite verschieden von Null. Es existieren daher zwei *Lösungen* in $\mathbb{C}$, nämlich

$$z_1 = \sqrt{1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2\cdot 2}} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{4}} = \cos(\pi/4) + \mathrm{i}\cdot\sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \tag{10}$$

$$z_2 = \sqrt{1} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2\cdot 2}+\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{2}} = 1 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{5\pi}{4}} = \cos(5\pi/4) + \mathrm{i}\cdot\sin(5\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}. \tag{11}$$

Die *Potenz-Gleichung* (9) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2} + \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2} - \mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.}} \tag{12}$$

c) Wir betrachten die *Potenz-Gleichung*

$$z^3 = -8 = 8 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} \tag{13}$$

mit *Exponent* $n = 3$ und rechter Seite verschieden von Null. Es existieren daher drei *Lösungen* in $\mathbb{C}$, nämlich

$$z_1 = \sqrt[3]{8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}} = 2\cdot\cos(\pi/3) + 2\cdot\mathrm{i}\cdot\sin(\pi/3) = 2\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} \tag{14}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = 2 \cdot (-1) = -2 \tag{15}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt[3]{8} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\cdot\frac{4\pi}{3}} = 2\cdot\cos(5\pi/3) + 2\cdot\mathrm{i}\cdot\sin(5\pi/3) = 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot\mathrm{i}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}. \end{aligned} \tag{16}$$

Die *Potenz-Gleichung* (13) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \big\{\,1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i},\ -2,\ 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}\,\big\}.}} \tag{17}$$

d) Wir betrachten die *Potenz-Gleichung*

$$z^3 = -27\mathrm{i} = 27 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3\pi}{2}} \tag{18}$$

mit *Exponent* $n = 3$ und rechter Seite verschieden von Null. Es existieren daher drei *Lösungen* in $\mathbb{C}$, nämlich

$$z_1 = \sqrt[3]{27} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{3\pi}{2\cdot 3}} = 3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}} = 3 \cdot \mathrm{i} \tag{19}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{27} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}} = 3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{7\pi}{6}} = 3 \cdot \cos(7\pi/6) + 3 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(7\pi/6)$$

$$= -3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i} \tag{20}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{27} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\cdot\frac{4\pi}{3}} = 3 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{11\pi}{6}} = 3 \cdot \cos(11\pi/6) + 3 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(11\pi/6)$$

$$= 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 3 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i}. \tag{21}$$

Die *Potenz-Gleichung* (18) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ 3\mathrm{i},\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i},\ \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\,\mathrm{i} \right\}}}. \tag{22}$$

e) Wir betrachten die *Potenz-Gleichung*

$$z^3 = 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i} =: w \tag{23}$$

mit *Exponent* $n = 3$ und rechter Seite verschieden von Null. Es existieren daher drei *Lösungen* in $\mathbb{C}$. Zunächst schreiben wir die rechte Seite w von (23) in *exponentieller Form*. Es gilt

$$|w| = \sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 \tag{24}$$

$$\arg(w) = 2\pi + \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}\,. \tag{25}$$

Die *Potenz-Gleichung* (23) kann somit geschrieben werden als

$$z^3 = |w| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\arg(w)} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{5\pi}{3}}. \tag{26}$$

Die *Lösungen* von (23) sind

$$z_1 = \sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{5\pi}{3\cdot 3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{9}\,\mathrm{i}} \tag{27}$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{5\pi}{9}+\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{11\pi}{9}\,\mathrm{i}} \tag{28}$$

$$z_3 = \sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{5\pi}{9}+\mathrm{i}\cdot\frac{4\pi}{3}} = \sqrt[3]{2} \cdot \mathrm{e}^{\frac{17\pi}{9}\,\mathrm{i}}. \tag{29}$$

Die *Potenz-Gleichung* (23) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{5\pi}{9}\,\mathrm{i}},\ \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{11\pi}{9}\,\mathrm{i}},\ \sqrt[3]{2}\,\mathrm{e}^{\frac{17\pi}{9}\,\mathrm{i}} \right\}}}. \tag{30}$$

f) Wir betrachten die *Potenz-Gleichung*

$$z^4 = -8 + 8\sqrt{3}\,\mathrm{i} =: w \tag{31}$$

mit *Exponent* $n = 4$ und rechter Seite verschieden von Null. Es existieren daher vier *Lösungen* in $\mathbb{C}$. Zunächst schreiben wir die rechte Seite w von (31) in *exponentieller Form.* Es gilt

$$|w| = \sqrt{(-8)^2 + \left(8\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{64 + 64 \cdot 3} = \sqrt{4 \cdot 64} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{64} = 2 \cdot 8 = 16 \tag{32}$$

$$\arg(w) = \pi + \arctan\left(\frac{8 \cdot \sqrt{3}}{-8}\right) = \pi + \arctan\left(-\sqrt{3}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}\,. \tag{33}$$

Die *Potenz-Gleichung* (31) kann somit geschrieben werden als

$$z^4 = |w| \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\arg(w)} = 16 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3}}. \tag{34}$$

Die *Lösungen* von (31) sind

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[4]{16} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{3\cdot 4}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}\,\mathrm{i}} = 2 \cdot \cos(\pi/6) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(\pi/6) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \sqrt{3} + \mathrm{i} \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[4]{16} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{4}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\,\mathrm{i}} = 2 \cdot \cos(2\pi/3) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(2\pi/3) = -2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i} \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt[4]{16} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\cdot\frac{4\pi}{4}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{7\pi}{6}\,\mathrm{i}} = 2 \cdot \cos(7\pi/6) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(7\pi/6) = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{1}{2} \\ &= -\sqrt{3} - \mathrm{i} \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= \sqrt[4]{16} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{\pi}{6} + \mathrm{i}\cdot\frac{6\pi}{4}} = 2 \cdot \mathrm{e}^{\frac{5\pi}{3}\,\mathrm{i}} = 2 \cdot \cos(5\pi/3) + 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \sin(5\pi/3) = 2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \mathrm{i} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i}. \end{aligned} \tag{38}$$

Die *Potenz-Gleichung* (31) hat daher die *Lösungsmenge*

$$\underline{\underline{\mathbb{L} = \left\{ \sqrt{3} + \mathrm{i},\ -1 + \sqrt{3}\,\mathrm{i},\ -\sqrt{3} - \mathrm{i},\ 1 - \sqrt{3}\,\mathrm{i} \right\}}}\,. \tag{39}$$

4. Aussagen über Potenz-Gleichungen mit komplexen Lösungen

Es seien $w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}^+$. Betrachten Sie die allgemeine *Potenz-Gleichung*

$$z^n = w. \tag{40}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Für jede Wahl von w hat (40) mindestens eine *Lösung* in $\mathbb{C}$.	●	○
b) Für jede Wahl von w hat (40) genau n *Lösungen* in $\mathbb{C}$.	○	●
c) Ist n gerade und z eine *Lösung* von (40), dann ist auch $-z$ eine *Lösung* von (40).	●	○
d) Ist $w \in \mathbb{R}$ und z eine *Lösung* von (40), dann ist auch z^* eine *Lösung* von (40).	●	○
e) Alle *Lösungen* von (40) haben den gleichen *Betrag*.	●	○
f) Alle *Lösungen* von (40) haben das gleiche *Argument*.	○	●

5. Aussagen über komplexe Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt $\mathrm{Re}(z) \in \mathbb{R}$.	●	○
b) Es gilt $z = 1$ genau dann, wenn $\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Re}(z) = 1$.	○	●
c) Es gilt $z_1^* = z_2$ genau dann, wenn $z_2^* = z_1$.	●	○
d) Es gibt ein $z \in \mathbb{C}$, so dass $z^2 = \mathrm{i}$.	●	○
e) Falls $\lvert z_1 \rvert \leq \lvert z_2 \rvert$, dann gilt auch $z_1 \leq z_2$.	○	●