

Übungsblatt 12 Ana

Computational and Data Science
FS2025

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Divergenz, Rotation, quellenfrei, wirbelfrei, konservativ, Potential-/Gradientenfeld und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können die Rotation und Divergenz von Vektorfeldern bestimmen.
- Sie können bestimmen, ob ein Vektorfeld quellen- bzw. wirbelfrei ist.

1. Divergenz von Vektorfeldern

Bestimmen Sie die Divergenz der folgenden Vektorfelder.

a) $\vec{F}(x, y) = \begin{pmatrix} x^3 + 1 \\ xy^2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{v}(x, y) = \begin{pmatrix} x \cdot e^{-y} \\ y \cdot e^{-x} \end{pmatrix}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x^3z^2 \\ x^2 - z^2 \\ xyz \end{pmatrix}$ d) $\vec{v}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy - x^2z \\ 2yz^2 \\ x^2y - yz \end{pmatrix}$

2. Rotation von Vektorfeldern

Bestimmen Sie die Rotation der folgenden Vektorfelder.

a) $\vec{F}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$ b) $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy - z^2 \\ 2xyz \\ x^2z - y^2z \end{pmatrix}$

c) $\vec{F}(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} (x\hat{e}_x + y\hat{e}_y + z\hat{e}_z)$

3. Potentialfeld bestimmen

Zeigen Sie, dass das räumliche Vektorfeld $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xz + y^2 \\ 2xy \\ x^2 \end{pmatrix}$ wirbelfrei und

somit als Gradient eines skalaren Feldes $\phi(x, y, z)$ darstellbar ist. Bestimmen Sie dieses Potentialfeld.

4. Aussagen über ein Vektorfeld

Gegeben sei das Vektorfeld

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ xy \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) \vec{v} ist konservativ.		
b) \vec{v} ist quellenfrei.		
c) \vec{v} ist wirbelfrei.		
d) Es gibt ein Skalarfeld ϕ , so dass $\vec{v} = \nabla\phi$.		

5. Laplace-Operator

Welche Funktion erhält man, wenn man den Laplace-Operator auf das Skalarfeld

$$\phi(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^2 \text{ anwendet?}$$