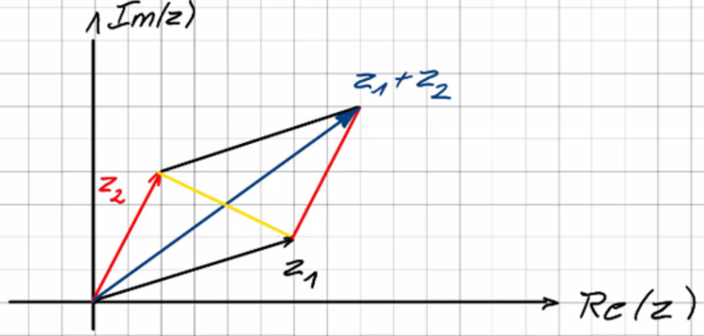
- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ Dreiecksungleichung
- $|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$



Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 2

Computational and Data Science
FS2024

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Gaußsche Zahlenebene, arithmetische und trigonometrische Form einer komplexen Zahl und Arg-Funktion und deren Eigenschaften.
- Sie können komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene darstellen.
- Sie können komplexe Zahlen von der arithmetischen in die trigonometrische Form und umgekehrt umwandeln.
- Sie können einfache Brüche und Potenzen von komplexen Zahlen durch Anwenden der Rechenregeln vereinfachen.
- Sie können quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten lösen.

---

1. Aussagen über die Gaußsche Zahlenebene
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Gaußsche Zahlenebene wurde im 20. Jahrhundert eingeführt.		
b) Jede komplexe Zahl wird durch einen Punkt in der Gaußschen Zahlenebene dargestellt.		
c) Die x-Achse der Gaußschen Zahlenebene entspricht der Re-Achse.		
d) Die komplexe Zahl z = 2 + 3i entspricht dem Punkt (2;3i) in der Gaußschen Zahlenebene.		
e) Die komplexen Zahlen z, für welche gilt $z^2 = -3$, liegen auf der Im-Achse.		
f) Die komplexen Zahlen $z \epsilon \mathbb{C}$ mit |z| = 1 bilden den Einheitskreis in der Gaußschen Zahlenebene.		

2. Komplexe Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene
Zeichnen Sie die gegebenen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene ein.

a) 2i   b) 3 + i   c) -2
d) -1 + 2i   e) -2 - 2i   f) 3 – 2i

3. Aussagen über die trigonometrischer Form komplexer Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede komplexe Zahl lässt sich in trigonometrischer Form darstellen.		
b) Jede komplexe Zahl lässt sich eindeutig in trigonometrischer Form darstellen.		
c) Der Term 2cis(π/2) ist eine trigonometrische Form von 2i.		
d) Der Term 2cis(-3π/2) ist eine trigonometrische Form von 2i.		
e) Der Term 2cis(5π/2) ist eine trigonometrische Form von 2i.		
f) Der Term -2cis(π/2) ist eine trigonometrische Form von 2i.		

4. Darstellung der Arg-Funktion

a) Prüfen Sie nach, dass die Funktion $f(z) = \arctan\frac{Im(z)}{Re(z)}$ keine vollständige Darstellung der Arg-Funktion ist.

b) Finden Sie den Funktionsterm der Arg-Funktion in der Variante $arg: \mathbb{C} \rightarrow]-\pi; \pi[$.

c) Finden Sie den Funktionsterm der Arg-Funktion in der Variante $arg: \mathbb{C} \rightarrow [0; 2\pi[$.

5. Konversion in die arithmetische Form

Geben Sie die jeweilige komplexe Zahl in arithmetischer Form an.

a) 4cis(π/2)
b) 2cis(-π/3)
c) cis(3π/4)
d) 2cis(3π)
e) $\frac{1}{2}\mathrm{cis}(75°)$
f) $\sqrt{2}\mathrm{cis}(-105°)$

6. Konversion in die trigonometrische Form

Geben Sie die jeweilige komplexe Zahl in trigonometrischer Form an.

a) 3
b) -5
c) 2i
d) -3i
e) 3 – 4i
f) -12 + 5i

7. Trigonometrische Zahlen mit Python/Numpy

Berechnen Sie die Konversion aus Aufgabe 5 und 6 mit Python/Numpy.

8. Aussagen über quadratische Gleichungen

Gegeben sei die allgemeine quadratische Gleichung
$ax^2 + bx + c = 0$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Koeffizienten a,b,c können so gewählt werden, dass es keine Lösung in $\mathbb{R}$ gibt.		
b) Die Koeffizienten a,b,c können so gewählt werden, dass es keine Lösung in $\mathbb{C}$ gibt.		
c) Für jede Wahl der Koeffizienten a,b,c liegen zwei verschieden Lösungen in $\mathbb{C}$ vor.		
d) Die Koeffizienten a,b,c können so gewählt werden, dass $x_1 = 1$ und $x_2 = i$ die beiden Lösungen sind.		
e) Gibt es 2 Lösungen x_1 und x_2, dann gilt entweder $x_2 = x_1^*$ oder $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.		
f) Die Anzahl der Lösungen kann anhand der Diskriminante beurteilt werden.		

9. Quadratische Gleichungen

Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichung in $\mathbb{C}$ mit Hilfe der Mitternachtsformel.

a) $x^2 + 1 = 0$	b) $x^2 - 10x + 74 = 0$	c) $2x^2 + 4 = x$
d) $3t^2 = -30t - 507$	e) $w = 2 + w^2$	f) $s(s + 1) = 2s^2 + 1$

FH GR Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 2

Computational and Data Science BSc
FS 2023

Analysis und Lineare Algebra 2

Lernziele/Kompetenzen

- Sie kennen die Begriffe Gauss-*Ebene*, *arithmetische Form*, *trigonometrische Form*, *Arg-Funktion*, *Konversion*, *quadratische Gleichung* mit *reellen Koeffizienten*, *Diskriminante* und *Mitternachtsformel* sowie ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie kennen die verschiedenen Varianten der *Arg-Funktion* und die dazu passenden *Funktionsterme*.
- Sie können *komplexe Zahlen* in der Gauss-*Ebene* darstellen.
- Sie können *komplexe Zahlen* von der *arithmetischen Form* in die *trigonometrische Form* *konvertieren* und umgekehrt.
- Sie können die *Lösungsmenge* einer *quadratischen Gleichung* mit *reellen Koeffizienten* mit Hilfe der *Diskriminante* beurteilen und durch die *Mitternachtsformel* berechnen.

1. Aussagen über die Gauss-Ebene

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die Gauss-*Ebene* wurde im 20. Jh. eingeführt.	○	⊗
b) Jede *komplexe Zahl* entspricht einem *Punkt* in der Gauss-*Ebene*.	⊗	○
c) Die *reelle Zahlengerade* entspricht der Re-Achse.	⊗	○
d) Die *komplexe Zahl* $z = 2 + 3\mathrm{i}$ entspricht dem *Punkt* $(2\,;3\mathrm{i})$.	○	⊗
e) Die *komplexen Zahlen* z, für welche gilt $z^2 = -3$ liegen auf der Im-Achse.	⊗	○
f) Die *komplexen Zahlen* $z \in \mathbb{C}$ mit $\lvert z \rvert = 1$ bilden den *Einheitskreis* in der Gauss-*Ebene*.	⊗	○

$\sqrt{-3} = \sqrt{-1 \cdot 3} = \sqrt{i^2 \cdot 3}$

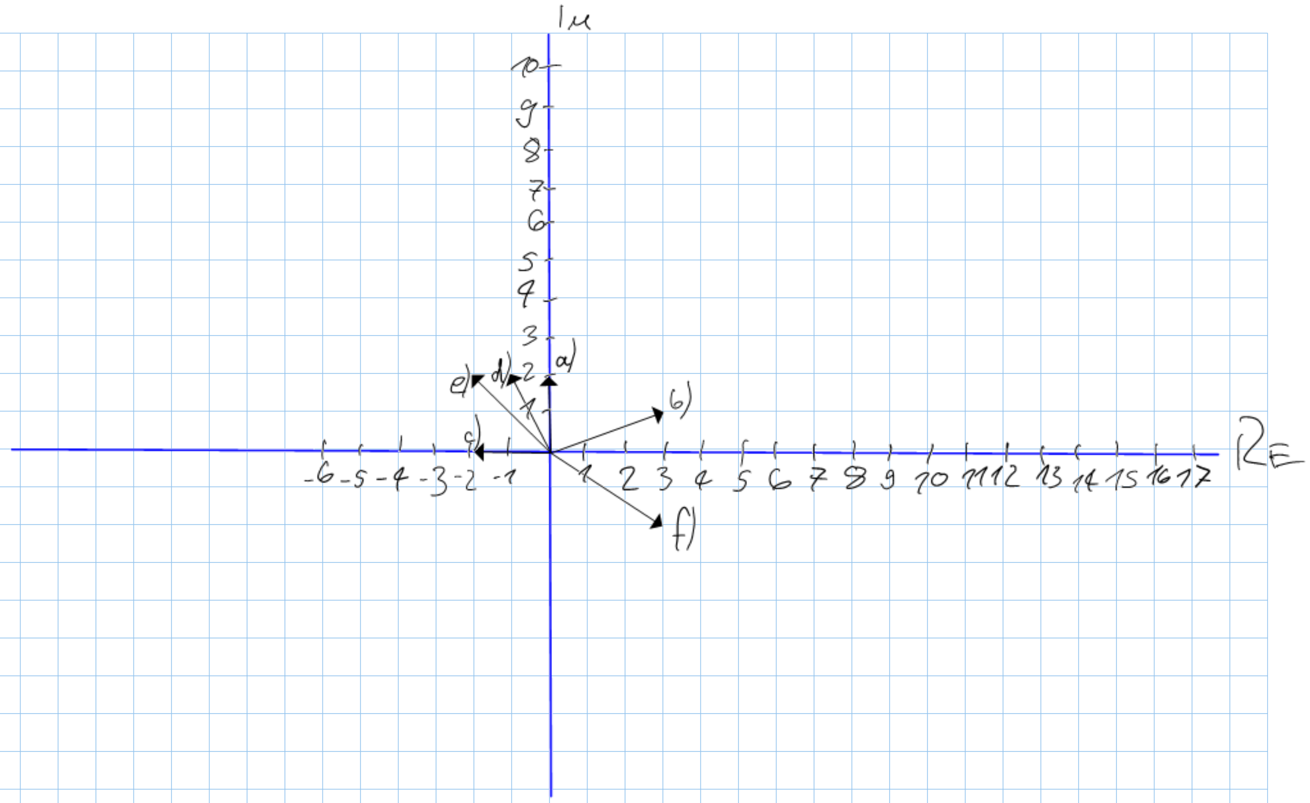
2. Komplexe Werte in der Gauss-Ebene

Zeichnen Sie jeweils die gegebene *komplexe Zahl* in der Gauss-*Ebene* ein.

a) $2\mathrm{i}$ **c)** -2 **e)** $-2 - 2\mathrm{i}$

b) $3 + \mathrm{i}$ **d)** $-1 + 2\mathrm{i}$ **f)** $3 - 2\mathrm{i}$

2.


Im
Re
a)
b)
c)
d)
e)
f)
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17

3. Aussagen über die trigonometrische Form komplexer Zahlen

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	wahr	falsch
a) Jede *komplexe Zahl* lässt sich in *trigonometrischer Form* darstellen.	☒	○
b) Jede *komplexe Zahl* lässt sich eindeutig in *trigonometrischer Form* darstellen.	○	☒
c) Der Term $2\,\mathrm{cis}(\pi/2)$ ist eine *trigonometrische Form* von 2i.	☒	○
d) Der Term $2\,\mathrm{cis}(-3\pi/2)$ ist eine *trigonometrische Form* von 2i.	☒	○
e) Der Term $2\,\mathrm{cis}(5\pi/2)$ ist eine *trigonometrische Form* von 2i.	☒	○
f) Der Term $-2\,\mathrm{cis}(\pi/2)$ ist eine *trigonometrische Form* von -2i.	○	☒

MUSS IMMER POSITIV SEIN

4. Darstellung der Arg-Funktion
In dieser Lernaufgabe lernen Sie zwei Varianten der *Arg-Funktion* kennen.

a) Prüfen Sie nach, dass die *Funktion*

$$f(z) = \arctan\left(\frac{\mathrm{Im}(z)}{\mathrm{Re}(z)}\right) \tag{1}$$

keine vollständige Darstellung der *Arg-Funktion* ist.

b) Finden Sie den *Funktionsterm* der *Arg-Funktion* in der *Zürcher-Variante*

$$\arg : \mathbb{C} \to \,]-\pi, \pi]. \tag{2}$$

c) Finden Sie den *Funktionsterm* der *Arg-Funktion* in der *Basler-Variante*

$$\arg : \mathbb{C} \to [0, 2\pi\,[\,. \tag{3}$$

5. Konversion in die arithmetische Form
Geben Sie jeweils die gegebene *komplexe Zahl* in *arithmetischer Form* an.

a) $4\ \mathrm{cis}(\pi/2)$

b) $2\ \mathrm{cis}(-\pi/3)$

c) $\mathrm{cis}(3\pi/4)$

d) $2\ \mathrm{cis}(3\pi)$

e) $\frac{1}{2}\ \mathrm{cis}(75°)$

f) $\sqrt{2}\ \mathrm{cis}(-105°)$

6. Konversion in die arithmetische Form mit Python/Numpy
Berechnen Sie die *Konversionen* aus Aufgabe 5 mit Python/Numpy.

7. Konversion in die trigonometrische Form
Geben Sie jeweils die gegebene *komplexe Zahl* in *trigonometrischer Form* an.

a) 3

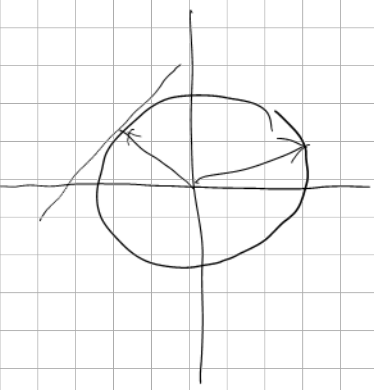
b) -5

c) 2i

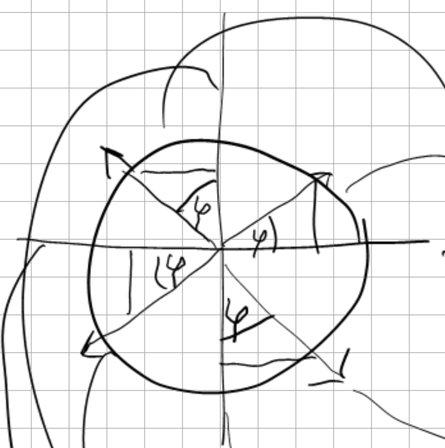
d) -3i

e) $3 - 4$i

f) $-12 + 5$i



$$\mathrm{ARG}(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x = 0 \quad y > 0 \\ \mathrm{ARG}\left(\frac{y}{x}\right) & x > 0 \quad y > 0 \\ \pi & x < 0 \quad y = 0 \\ \mathrm{ARG}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2} & x < 0 \quad y > 0 \\ \frac{3}{2}\pi & x = 0 \quad y < 0 \\ \mathrm{ARG}\left(\frac{y}{x}\right) + \pi & x < 0 \quad y < 0 \\ 2\pi & x > 0 \quad y = 0 \end{cases}$$



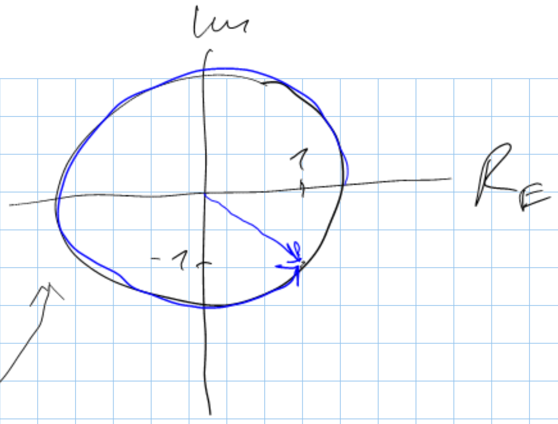
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$	$x > 0,\ y > 0$
$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2}$	$x < 0,\ y > 0$
$\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi$	$x < 0,\ y < 0$
$\arctan\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{3}{2}\pi$	$x > 0,\ y < 0$
0	$x > 0,\ y = 0$
$\frac{\pi}{2}$	$x = 0,\ y > 0$
π	$x < 0,\ y = 0$
$\frac{3}{2}\pi$	$x = 0,\ y < 0$

4a) $f(z) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}()}{\operatorname{Re}()}\right)$ }

$f(1 + -1 \cdot i) = \arctan\left(\frac{1}{-1}\right)$

$= \arctan(-1)$

$= 3 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$



5. Konversion in die arithmetische Form

Geben Sie jeweils die gegebene *komplexe Zahl* in *arithmetischer Form* an.

a) $4\,\text{cis}(\pi/2)$ **c)** $\text{cis}(3\pi/4)$ **e)** $\frac{1}{2}\,\text{cis}(75^\circ)$

b) $2\,\text{cis}(-\pi/3)$ **d)** $2\,\text{cis}(3\pi)$ **f)** $\sqrt{2}\,\text{cis}(-105^\circ)$

a) $4\,\text{cis}(\pi/2) = 4\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 4i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

$= 4 \cdot 0 + 4i \cdot 1 = 4i$

b) $2\,\text{cis}\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 2\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + 2i \cdot \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2i \cdot \frac{-\sqrt{3}}{2} = 1 + \frac{2\cdot\sqrt{3}}{\cancel{2}}\,i$

$= 1 + \sqrt{3}\,i$

c) $\text{cis}\left(3 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(3\frac{\pi}{4}\right) + i \cdot \sin\left(3\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

d) a) $2\,\text{cis}(3\pi) = 2 \cdot \cos\left(3\frac{1}{\pi}\right) + 2i \cdot \sin\left(3\frac{1}{\pi}\right) = 2 \cdot 0{,}577666 + 2i \cdot 0{,}816$

$= 1{,}155 + 1{,}63i$

b) $2\,\text{cis}(3\pi) = 2\,\text{cis}(\pi)$

$= 2 \cdot \cos(\pi) + 2i \cdot \sin(\pi)$

$= 2 \cdot -1 + 2i \cdot 0$

$= -2$

e) $\frac{1}{2}\,\text{cis}(75^\circ)$

$= \frac{1}{2}\cos(75^\circ) + \frac{1}{2}i \cdot \sin(75^\circ)$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}i \cdot \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{2}i \cdot \frac{\sqrt{3} + 1}{2 \cdot \sqrt{2}}$

$= \frac{\sqrt{3} - 1}{4 \cdot \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} + 1}{4 \cdot \sqrt{2}}\,i$

$\frac{\sqrt{2 \cdot 3} - \sqrt{2}}{\sqrt{16}}$

$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{8}}$

$= \frac{\cancel{\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)}{\cancel{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{8}}$

$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{8}}$

$\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{24}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2 \cdot \sqrt{2}}$

f) $\sqrt{2}\,\text{cis}(-105^\circ)$

$= \sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1 - \sqrt{3}}{2} - i\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

$\sqrt{2} \cdot \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

$= \frac{-\sqrt{12} + \sqrt{4}}{\sqrt{16}} = \frac{-\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 3} + \sqrt{2 \cdot 2}}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}$

$= \frac{-\sqrt{3} + 1}{2}$

$\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{16}}$

$\frac{-\sqrt{2 \cdot 3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}}$

$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$

$\cancel{\sqrt{2}} \cdot \frac{1 - \sqrt{3}}{2\cancel{\sqrt{2}}}$

7. Konversion in die trigonometrische Form

Geben Sie jeweils die gegebene *komplexe Zahl* in *trigonometrischer Form* an.

a) 3 **c)** $2i$ **e)** $3-4i$

b) -5 **d)** $-3i$ **f)** $-12+5i$

a) $3\,\mathrm{cis}(0)$

b) $5\cos(\pi) + i\cdot 5\cdot\sin(\pi)$

c) $2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\cdot 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

d) $3\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\cdot 3\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)$

e) $5\cdot\cos(-53{,}13^\circ) + i\,5\cdot\sin(53{,}13^\circ)$

f) $13\cos(157{,}38^\circ) + i\cdot 13(157{,}38^\circ)$

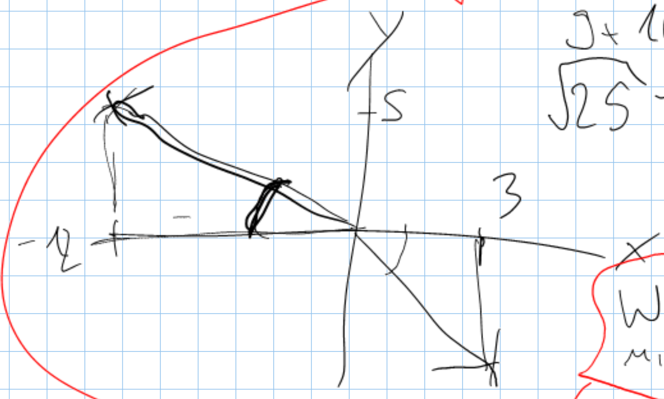
$144+25$

$\sqrt{169}$

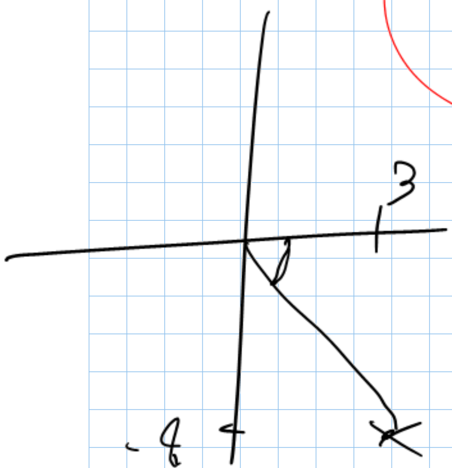
13

$9+16=25$

$\sqrt{25}=5$ $\frac{y}{x}$



WIE KANN DER WINKEL IN π MIT DEM TS BERECHNE



$180^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{5}{12}\right) = ?$

ALLES IN GRAD ODER ALLES IN RAD

$$\boxed{\begin{aligned} 1\,\text{RAD} &= \frac{180^\circ}{\pi} \\ x\,\text{RAD} &= \frac{180^\circ}{\pi}\cdot x \\ x^\circ &= \frac{\pi}{180}\cdot x \end{aligned}}$$

8. Konversion in die trigonometrische mit Python/Numpy

Berechnen Sie die *Konversionen* aus Aufgabe 7 mit Python/Numpy.

9. Aussagen über Quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten

Es seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Betrachten Sie die allgemeine *quadratische Gleichung*

$$ax^2 + bx + c = 0. \qquad \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Koeffizienten* a, b und c können so gewählt werden, dass (4) in $\mathbb{R}$ keine *Lösung* hat.	☒	○
b) Die *Koeffizienten* a, b und c können so gewählt werden, dass (4) in $\mathbb{C}$ keine *Lösung* hat.	○	☒
c) Für jede Wahl der *Koeffizienten* a, b und c hat (4) in $\mathbb{C}$ zwei verschiedene *Lösungen*.	○	☒
d) Die *Koeffizienten* a, b und c können so gewählt werden, dass $x_1 = 1$ und $x_2 = \mathrm{i}$ die *Lösungen* von (4) sind.	○	☒
e) Hat (4) die zwei *Lösungen* x_1 und x_2, dann gilt entweder $x_2 = x_1^*$ oder $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.	☒	○
f) Die Anzahl *Lösungen* von (4) kann anhand der *Diskriminante* von (4) beurteilt werden.	☒	○

10. Quadratische Gleichungen mit komplexen Lösungen

Finden Sie jeweils sämtliche *Lösungen* der *quadratischen Gleichung* in $\mathbb{C}$ mit Hilfe der *Mitternachtsformel*.

a) $x^2 + 1 = 0$

b) $x^2 - 10x + 74 = 0$

c) $2x^2 + 4 = x$

d) $3t^2 = -30t - 507$

e) $w = 2 + w^2$

f) $s\,(s+1) = 2s^2 + 1$

a) $x^2+1=0$

$\frac{-0 \pm \sqrt{0^2-4\cdot1\cdot1}}{2} = \frac{\pm\sqrt{-4}}{2} = \frac{\pm\sqrt{i^2 4}}{2} = \frac{\pm 2i}{2} = \pm i$

$x_1 = i$, $x_2 = -i$

b) $1 \; -10 \; 74$

$\frac{10 \pm \sqrt{100-4\cdot1\cdot74}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{196\, i^2}}{2} = \frac{10 \pm 14i}{2} = \frac{2(5\pm7i)}{2} = 5\pm7i$

$4\cdot74 = 296$, $100-296 = -196$, $\sqrt{196} = 14$

$x_1 = 5+7i$, $x_2 = 5-7i$

c) $2x^2+4=x$

$= 2x^2 - x + 4 = 0$

$\frac{1 \pm \sqrt{1-4\cdot2\cdot4}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{31}\, i}{4}$

MNF: $-1^2 = 1$, $1-32=-31$, $\sqrt{31\, i^2} = \sqrt{31}\, i$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{31}\, i}{4}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{31}\, i}{4}$

d) $0 = -3t^2 - 30t - 507 \quad |\cdot -1$

$3t^2 + 30t + 507 = 0$

$\frac{-30 \pm \sqrt{900 - 4\cdot3\cdot507}}{6} = \frac{-30 \pm \sqrt{6084\, i^2}}{6} = \frac{-30 \pm 78i}{6} = \frac{6(-5\pm13i)}{6} = -5\pm13i$

$30\cdot30 = 900$, $-12\cdot507 = 5070+1014$, $= -6084$ $+900$, $\sqrt{6084} = 78$; $\sqrt{5184} = 72$

$30:2=15$, $78:2=39$, $15:3=5$, $39:3=13$, $2\cdot3=6$

$x_1 = -5+13i$, $x_2 = -5-13i$

$x_1 = -5+12i$, $x_2 = -5-12i$

e) $w = 2 + w^2 \quad |TV$

$= w^2 - w + 2$

$\frac{1\pm\sqrt{1-8}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{7 i^2}}{2}$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{7}i}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{7}i}{2}$

f) $s(s+1) = 2s^2+1 \quad |TV$

$s^2 + s = 2s^2 + 1$

$s^2 - s + 1 = 0$

$\frac{1\pm\sqrt{1-4\cdot1\cdot1}}{2}$; $1-4=-3$, $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}i$

$x_1 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$