Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt 7 Ana

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe Mehrfachintegral, Integrationsgebiet und ihre wichtigsten Eigenschaften.
- Sie können für die Vereinfachung von Zweifach- und Dreifachintegralen kartesische Koordinaten in Polar- bzw. Zylinderkoordinaten umwandeln.
- Sie können Mehrfachintegrale auf einfachen Gebieten in 2D und 3D berechnen und die Integrationsreihenfolge vertauschen.
- Sie können Masse, Volumen und Schwerpunkt mittels Mehrfachintegralen bestimmen.

---

1. Aussagen über Zweifachintegrale

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Ein Zweifachintegral beschreibt das Volumen zwischen dem Graphen einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und einem Gebiet in der xy-Ebene.	X	
b) Die Fläche eines Gebiets in 2D lässt sich mit Hilfe eines Zweifachintegrals berechnen.	X	
c) Für $f(x,y) \geq 0$ gilt: $\int_G \, f(x,y)dA \geq 0$ für jedes Gebiet G in der xy-Ebene.	X	
d) Für $f(x,y) \leq 0$ gilt: $\int_{x_0}^{x_E} \int_{y_0}^{y_E} f(x,y)\, dydx \leq 0$ für alle $x_0, x_E, y_0, y_E \in \mathbb{R}$.		X

2. Integrale über Rechtecke

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^1 \int_0^2 xy\, dx\, dy$
b) $\int_0^2 \int_0^1 x^2\, dx\, dy$
c) $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{2x+y}\, dx\, dy$
d) $\int_0^1 \int_1^e \frac{x^2}{y} dy\, dx$
e) $\int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2y)\, dx\, dy$
f) $\int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2y)\, dy\, dx$

a)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \int_0^2 xy \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^2 x\,\mathrm{d}x \cdot \int_0^1 y\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]\Big|_0^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[y^2\right]\Big|_0^1 = \frac{1}{4} \cdot (2^2 - 0) \cdot (1^2 - 0)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 1 = \underline{\underline{1.}}$$

b)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^2 \int_0^1 x^2 \, dx \, dy = \int_0^1 x^2 \, dx \cdot \int_0^2 1 \, dy = \frac{1}{3} \cdot \Big[x^3 \Big]\Big|_0^1 \cdot \Big[y \Big]\Big|_0^2 = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0) \cdot (2 - 0)$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}.$$

c)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^{\ln(3)} \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x+y} \, dx \, dy = \int_0^{\ln(3)} \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{y} \, dx \, dy = \int_0^{\ln(2)} \mathrm{e}^{2x} \, dx \cdot \int_0^{\ln(3)} \mathrm{e}^{y} \, dy$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big[\mathrm{e}^{2x} \Big]\Big|_0^{\ln(2)} \cdot \Big[\mathrm{e}^{y} \Big]\Big|_0^{\ln(3)} = \frac{1}{2} \cdot (\mathrm{e}^{2 \cdot \ln(2)} - \mathrm{e}^0) \cdot (\mathrm{e}^{\ln(3)} - \mathrm{e}^0) = \frac{1}{2} \cdot (2^2 - 1) \cdot (3 - 1)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (4 - 1) \cdot 2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2 = \underline{\underline{3.}}$$

d)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^1 \int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2}{y} \, dy \, dx = \int_0^1 x^2 \, dx \cdot \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{y} \, dy = \frac{1}{3} \cdot \Big[x^3 \Big]\Big|_0^1 \cdot \ln\Big(\frac{\mathrm{e}}{1}\Big) = \frac{1}{3} \cdot (1^3 - 0) \cdot \ln(\mathrm{e})$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

e)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^4 \int_{-1}^2 (2x + 6x^2 y) \, dx \, dy = \int_1^4 \Big[x^2 + 2x^3 y \Big]\Big|_{-1}^2 \, dy = \int_1^4 (4 + 16y - 1 + 2y) \, dy$$

$$= \int_1^4 (3 + 18y) \, dy = \Big[3y + 9y^2 \Big]\Big|_1^4 = 12 + 144 - 3 - 9 = \underline{\underline{144.}}$$

f)

$$\underline{\underline{I}} = \int_{-1}^2 \int_1^4 (2x + 6x^2 y) \, dy \, dx = \int_{-1}^2 \Big[2xy + 3x^2 y^2 \Big]\Big|_1^4 \, dx = \int_{-1}^2 (8x + 48x^2 - 2x - 3x^2) \, dx$$

$$= \int_{-1}^2 (6x + 45x^2) \, dx = \Big[3x^2 + 15x^3 \Big]\Big|_{-1}^2 = 12 + 120 - 3 + 15 = \underline{\underline{144.}}$$

3. Zweifachintegrale

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y) \, dx \, dy$ b) $\int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 \, dy \, dx$ c) $\int_1^2 \int_0^x e^{\frac{y}{x}} \, dy \, dx$

a)

$$\underline{\underline{I}} = \int_0^2 \int_{y^2}^{2y} (4x - y) \, dx \, dy = \int_0^2 \Big[2x^2 - yx \Big]\Big|_{y^2}^{2y} \, dy$$

$$= \int_0^2 \left(2 \cdot 4y^2 - y \cdot 2y - 2 \cdot y^4 + y \cdot y^2 \right) dy = \int_0^2 \left(6y^2 - 2y^4 + y^3 \right) dy$$

$$= \left[2y^3 - \frac{2y^5}{5} + \frac{y^4}{4} \right]\Bigg|_0^2 = 2 \cdot 2^3 - \frac{2 \cdot 2^5}{5} + \frac{2^4}{4} - 0 + 0 - 0 = 16 - \frac{64}{5} + 4 = 20 - \frac{64}{5}$$

$$= \frac{100}{5} - \frac{64}{5} = \underline{\underline{\frac{36}{5}}}.$$

b)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 \int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2 y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[y^2 \right] \Big|_{1-x}^{\sqrt{x}} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \left(x - (1-x)^2 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \left(x - 1 + 2x - x^2 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2 \cdot \left(3x - 1 - x^2 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \left(3x^3 - x^2 - x^4 \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{3x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right] \Big|_1^2$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3 \cdot 2^4}{4} - \frac{2^3}{3} - \frac{2^5}{5} - \frac{3 \cdot 1^4}{4} + \frac{1^3}{3} + \frac{1^5}{5} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(12 - \frac{8}{3} - \frac{32}{5} - \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(12 - \frac{7}{3} - \frac{31}{5} - \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{720}{60} - \frac{140}{60} - \frac{372}{60} - \frac{45}{60} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{163}{60} = \underline{\underline{\frac{163}{120}}}.$$

c)

$$\underline{\underline{I}} = \int_1^2 \int_0^x \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \left[x \cdot \mathrm{e}^{\frac{y}{x}} \right] \Big|_0^x \mathrm{d}x = \int_1^2 x \cdot \left(\mathrm{e}^{\frac{x}{x}} - \mathrm{e}^{\frac{0}{x}} \right) \mathrm{d}x = (\mathrm{e}-1) \int_1^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$= (\mathrm{e}-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right] \Big|_1^2 = (\mathrm{e}-1) \cdot \left(\frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right) = (\mathrm{e}-1) \cdot \left(\frac{4}{2} - \frac{1}{2} \right) = \underline{\underline{\frac{3}{2} \cdot (\mathrm{e}-1)}}.$$

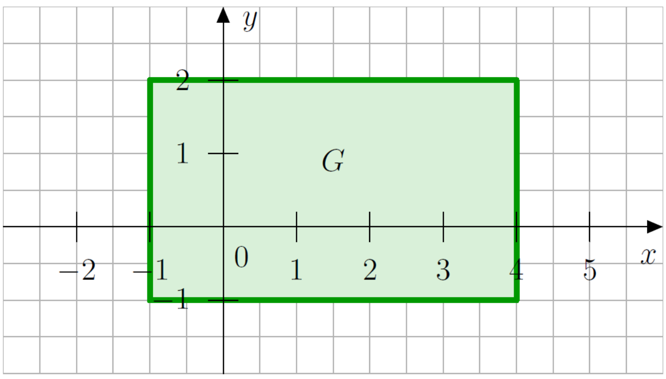
4. Integrale über Gebiete

Berechnen Sie das folgende Integral über das jeweils angegebene Gebiet G.

$$I = \int_G 2xy^2 \, dA$$

a) Rechteck mit Eckpunkten (-1;-1), (4;-1), (4;2), (-1;2)
b) Dreieck mit Eckpunkten (0;0), (3;1), (-2;1)

a)

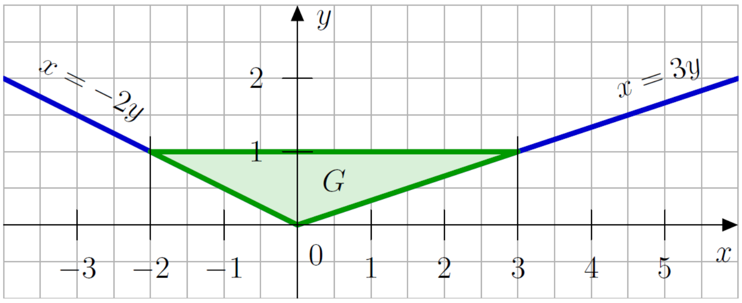


$$\underline{\underline{I}} = \int_G 2xy^2 \,\mathrm{d}A = 2 \int_G xy^2 \,\mathrm{d}A = 2 \int_{-1}^2 \int_{-1}^4 xy^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2 \int_{-1}^4 x \,\mathrm{d}x \cdot \int_{-1}^2 y^2 \,\mathrm{d}y$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2 \right] \Big|_{-1}^4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left[y^3 \right] \Big|_{-1}^2 = \left(4^2 - (-1)^2 \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2^3 - (-1)^3 \right) = (16-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot (8+1)$$

$$= 15 \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 = 5 \cdot 9 = \underline{\underline{45.}}$$

b)



$$\underline{\underline{I}} = \int_G 2xy^2 \,\mathrm{d}A = 2\int_G xy^2 \,\mathrm{d}A = 2\int_0^1 \int_{-2y}^{3y} xy^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 2\int_0^1 y^2 \int_{-2y}^{3y} x \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^1 y^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x^2\right]\Big|_{-2y}^{3y} \mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \cdot \left((3y)^2 - (-2y)^2\right) \mathrm{d}y = \int_0^1 y^2 \cdot (9y^2 - 4y^2) \,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^1 y^2 \cdot 5y^2 \,\mathrm{d}y = 5\int_0^1 y^4 \,\mathrm{d}y = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \left[x^5\right]\Big|_0^1 = 1^5 - 0^5 = 1 - 0 = \underline{\underline{1.}}$$

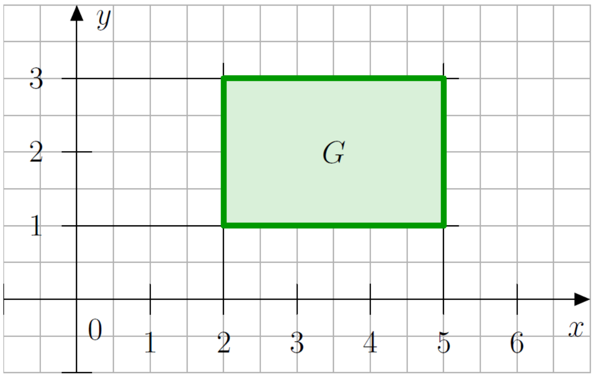
5. Integrationsreihenfolge tauschen

Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge für die folgenden Integrale.

a) $\int_1^3 \int_2^5 f(x,y)\,dx\,dy$ b) $\int_0^1 \int_{2x}^2 f(x,y)\,dy\,dx$ c) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)\,dx\,dy$

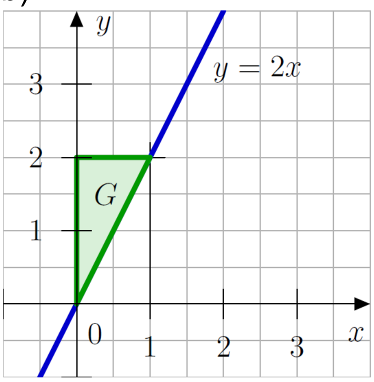
d) $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x,y)\,dx\,dy$ e) $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{x}}^5 f(x,y)\,dy\,dx$ f) $\int_1^3 \int_{\ln x}^3 f(x,y)\,dy\,dx$

a)



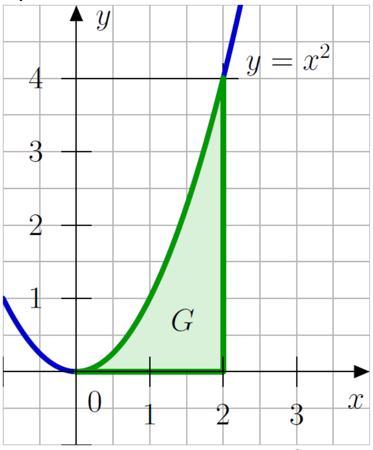
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f \,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_2^5 \int_1^3 f(x;y) \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}x.}}$$

b)



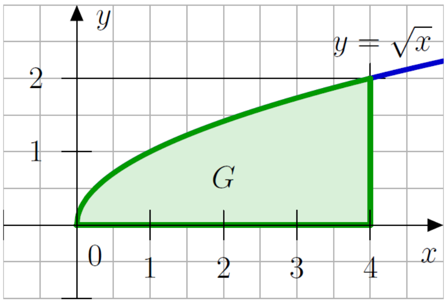
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{\frac{y}{2}} f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}}$$

c)



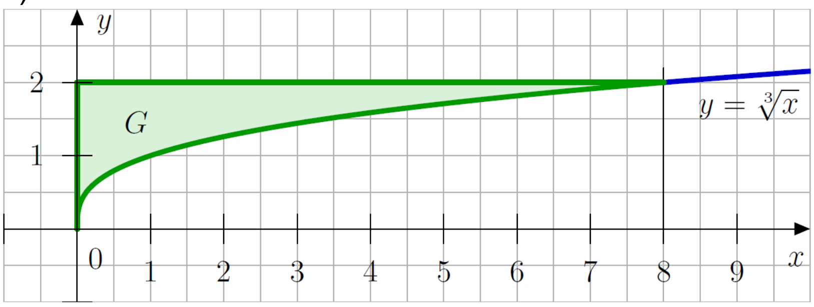
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{x^2} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.}}$$

d)



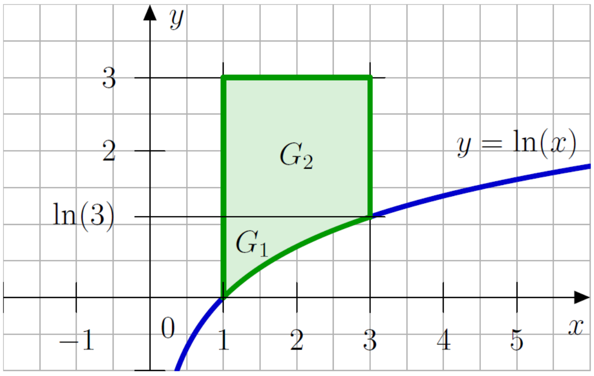
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x;y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.}}$$

e)



$$\underline{\underline{I}} = \int_G f\,\mathrm{d}A = \underline{\underline{\int_0^2 \int_0^{y^3} f(x;y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.}}$$

f)



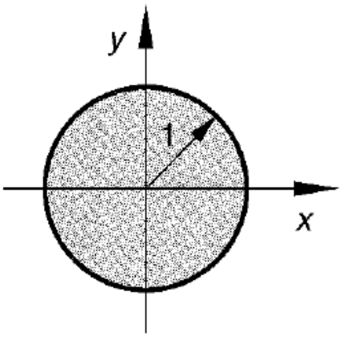
$$\underline{\underline{I}} = \int_G f \, \mathrm{d}A = \int_{G_1} f \, \mathrm{d}A + \int_{G_2} f \, \mathrm{d}A$$

$$= \underline{\underline{\int_0^{\ln(3)} \int_1^{e^y} f(x;y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \int_{\ln(3)}^3 \int_1^3 f(x;y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.}}$$

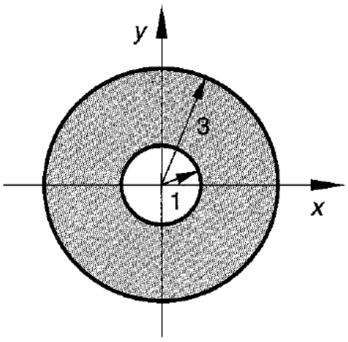
6. Doppelintegrale

Lösen Sie die beiden folgenden Integrale unter Verwendung von Polarkoordinaten.

a) $I = \iint_A (1 + x + y) dA$, wobei der Integrationsbereich der Einheitskreis sein soll.



b) $I = \iint_A (3\sqrt{x^2 + y^2} + 4) dA$, wobei der Integrationsbereich der angegebene Kreisring sein soll (Innenradius = 1, Aussenradius = 3).



a)

Unter Verwendung von *Polarkoordinaten* transformiert sich der *Integrand* wie folgt ($x = r \cdot \cos\varphi,\ y = r \cdot \sin\varphi$):

$$z = f(x; y) = 1 + x + y = 1 + r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi$$

Das *Flächenelement* dA lautet in Polarkoordinaten $dA = r\,dr\,d\varphi$, die *Integrationsgrenzen* sind (si

r-Integration: von $r = 0$ bis $r = 1$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Damit gilt:

$$I = \iint_{(A)} (1 + x + y)\,dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (1 + r \cdot \cos\varphi + r \cdot \sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (r + r^2 \cdot \cos\varphi + r^2 \cdot \sin\varphi)\,dr\,d\varphi$$

Wir integrieren zunächst nach r, dann nach φ.

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=0}^{1} (r + r^2 \cdot \cos\varphi + r^2 \cdot \sin\varphi)\,dr = \left[\frac{1}{2}\,r^2 + \frac{1}{3}\,r^3 \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3}\,r^3 \cdot \sin\varphi\right]_{r=0}^{1} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi - 0 - 0 - 0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

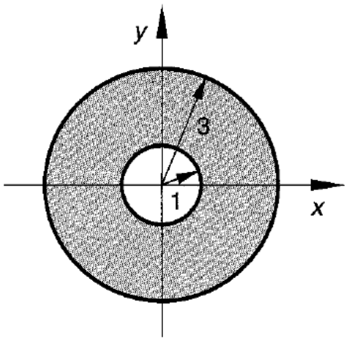
$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi\right) d\varphi = \left[\frac{1}{2}\,\varphi + \frac{1}{3} \cdot \sin\varphi - \frac{1}{3} \cdot \cos\varphi\right]_{0}^{2\pi} =$$

$$= \pi + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin(2\pi)}_{0} - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cos(2\pi)}_{1} - 0 - \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\sin 0}_{0} + \frac{1}{3} \cdot \underbrace{\cos 0}_{1} = \pi - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \pi$$

Ergebnis: $I = \pi$

b)

$I = \iint_A (3\sqrt{x^2 + y^2} + 4)\,dA$, wobei der Integrationsbereich der angegebene Kreisring sein soll.



Die *Transformationsgleichungen* für den Übergang von kartesischen Koordinaten zu Polarkoordinaten lauten:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi, \quad dA = r\,dr\,d\varphi$$

Die *Integrationsgrenzen* des kreisringförmigen Integrationsbereiches sind (sie

r-Integration: von $r = 1$ bis $r = 3$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$

Unter Berücksichtigung von

$$x^2 + y^2 = r^2 \cdot \cos^2 \varphi + r^2 \cdot \sin^2 \varphi = r^2 \underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)}_{1} = r^2$$

transformiert sich der *Integrand* des Doppelintegrals wie folgt:

$$z = f(x; y) = 3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4 = 3 \cdot \sqrt{r^2} + 4 = 3r + 4$$

Das Doppelintegral I lautet damit in Polarkoordinaten:

$$I = \iint_{(A)} (3 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} + 4)\, dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} (3r + 4)\, r\, dr\, d\varphi = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=1}^{3} (3r^2 + 4r)\, dr\, d\varphi$$

Die Auswertung erfolgt in der üblichen Weise (erst nach r, dann nach φ integrieren).

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=1}^{3} (3r^2 + 4r)\, dr = \left[r^3 + 2r^2 \right]_{r=1}^{3} = 27 + 18 - 1 - 2 = 42$$

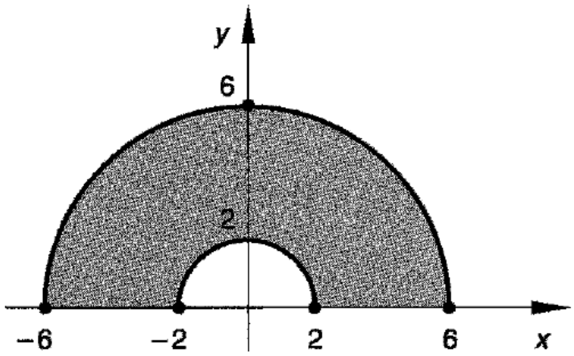
Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$I = \int_{\varphi=0}^{2\pi} 42\, d\varphi = 42 \cdot \int_{0}^{2\pi} 1\, d\varphi = 42 [\varphi]_{0}^{2\pi} = 42(2\pi - 0) = 84\pi$$

Ergebnis: $I = 84\pi$

7. Schwerpunkt

Bestimmen Sie den Flächenschwerpunkt S des skizzierten Kreisringausschnitts mit Innenradius $r_1 = 2$ und Aussenradius $r_2 = 6$.



Der *Integrationsbereich* für die Berechnung des *Flächenschwerpunktes* $S = (x_S; y_S)$ lautet:

r-Integration: von $r = 2$ bis $r = 6$

φ-Integration: von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$

Der benötigte *Flächeninhalt* A lässt sich *elementar* berechnen (als Differenz zweier Halbkreisflächen):

$$A = \frac{1}{2}(\pi r_2^2 - \pi r_1^2) = \frac{1}{2}\pi(r_2^2 - r_1^2) = \frac{1}{2}\pi(36 - 4) = 16\pi = 50{,}2655$$

Wegen der *Spiegelsymmetrie* der Fläche liegt der Schwerpunkt auf der y-Achse. Somit ist $x_S = 0$. Die *Ordinate* y_S berechnen wir mit dem folgenden Doppelintegral:

$$y_S = \frac{1}{A} \cdot \iint_{(A)} y\, dA = \frac{1}{16\pi} \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=2}^{6} r^2 \cdot \sin\varphi\, dr\, d\varphi$$

(Transformationsgleichungen: $y = r \cdot \sin\varphi$, Flächenelement $dA = r\,dr\,d\varphi$)

Innere Integration (nach der Variablen r)

$$\int_{r=2}^{6} r^2 \cdot \sin\varphi\,dr = \sin\varphi \cdot \int_{r=2}^{6} r^2\,dr = \sin\varphi\left[\frac{1}{3}\,r^3\right]_{r=2}^{6} = \frac{1}{3}\cdot\sin\varphi\left[r^3\right]_{r=2}^{6} =$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\sin\varphi\,(216-8) = \frac{208}{3}\cdot\sin\varphi$$

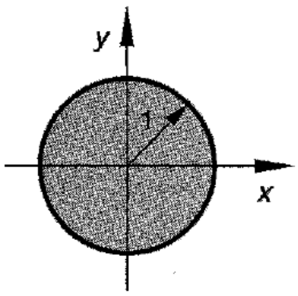
Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$y_S = \frac{1}{16\pi}\cdot\frac{208}{3}\cdot\int_{\varphi=0}^{\pi}\sin\varphi\,d\varphi = \frac{13}{3\pi}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} = \frac{13}{3\pi}\,(-\underbrace{\cos\pi}_{-1} + \underbrace{\cos 0}_{1}) = \frac{13}{3\pi}\,(1+1) = \frac{26}{3\pi} = 2{,}7587$$

Schwerpunkt: $S = (0;\,2{,}7587)$

8. Volumen zylinderförmiger Körper

Berechnen Sie das Volumen V des Körpers, der durch einen in der xy-Ebene gelegenen kreisförmigen Boden mit Radius r = 1 und einen Deckel mit der Fläche $z = e^{x^2+y^2}$ gebildet wird.



Wir verwenden *Polarkoordinaten* (wegen der *Kreis-* bzw. *Rotationssymmetrie*). Der kreisförmige „Boden" liefert den *Integrationsbereich*): $0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi$. Die Rotationsfläche bildet den „Deckel" des zylindrischen Körpers, ihre Gleichung in *Polarkoordinaten* erhalten wir wie folgt (Transformationsgleichungen: $x = r\cdot\cos\varphi,\ y = r\cdot\sin\varphi$):

$$x^2 + y^2 = r^2\cdot\cos^2\varphi + r^2\cdot\sin^2\varphi = r^2\underbrace{(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi)}_{1} = r^2 \quad\Rightarrow\quad z = e^{x^2+y^2} = e^{r^2}$$

(unter Verwendung des „trigonometrischen Pythagroas" $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$)

Damit gilt für das gesuchte Volumen:

$$V = \iint_{(A)} z\,dA = \int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1} e^{r^2}\cdot r\,dr\,d\varphi \qquad (\text{Flächenelement } dA = r\,dr\,d\varphi)$$

Innere Integration (nach der Variablen r)

Wir lösen das innere Integral mit Hilfe der folgenden *Substitution*:

$$u = r^2,\quad \frac{du}{dr} = 2r,\quad dr = \frac{du}{2r},\qquad \text{Grenzen}\ \begin{cases}\text{unten: } r = 0 \ \Rightarrow\ u = 0\\ \text{oben: } r = 1 \ \Rightarrow\ u = 1\end{cases}$$

$$\int_{r=0}^{1} e^{r^2}\cdot r\,dr = \int_{u=0}^{1} e^u\cdot\text{[redacted]}\cdot\frac{du}{2\,\text{[redacted]}} = \frac{1}{2}\cdot\int_{u=0}^{1} e^u\,du = \frac{1}{2}\left[e^u\right]_{u=0}^{1} = \frac{1}{2}\,(e^1 - e^0) = \frac{1}{2}\,(e-1)$$

Äußere Integration (nach der Variablen φ)

$$V = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e} - 1) \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} 1\,d\varphi = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e} - 1)\,\big[\varphi\big]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\,(\mathrm{e} - 1)\,(2\pi - 0) = (\mathrm{e} - 1)\,\pi$$

Volumen: $V = (\mathrm{e} - 1)\,\pi = 5{,}398$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt Ana 7

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über partielle Ableitungen

Wir betrachten $n \in \mathbb{N}^+$ und eine *Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Unter den *partiellen Ableitungen* von f versteht man die *Ableitungen* von f nach jeweils einer der n *Variablen*, wobei die andern formell wie *Konstanten* behandelt werden.	●	○
b) Die *partiellen Ableitungen* können mit Hilfe des *Differenzquotienten* definiert werden.	●	○
c) Die Rechenregeln für gewöhnliche *Ableitungen* einer *Funktion* in einer *Variablen* gelten auch für *partielle Ableitungen*.	●	○
d) Die *partiellen Ableitungen* von f sind *Funktionen* des Typs $f_{,\mu} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.	○	●
e) Ohne weitere Voraussetzungen gilt $f_{,\nu,\mu} = f_{,\mu,\nu}$ für alle $\mu, \nu \in \{1, \ldots, n\}$.	○	●
f) Es gilt $f_{,\nu,\mu} = f_{,\mu,\nu}$ für alle $\mu, \nu \in \{1, \ldots, \mathrm{n}\}$ falls $f_{,\nu,\mu}$ und $f_{,\mu,\nu}$ beide existieren und *stetig* sind.	●	○

2. Ableitungen von Funktionen in zwei Variablen

Wir berechnen jeweils den *Gradienten*, die HESSE-*Matrix* und die LAPLACE-*Ableitung* der angegebenen *Funktion*.

a) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x; y) = 3x + 5y. \tag{1}$$

Für *Gradient*, HESSE-*Matrix* und LAPLACE-*Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 + 0 \\ 0 + 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}}} \tag{2}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}} \tag{3}$$

$$\underline{\underline{\Delta f}} = \mathrm{tr}\big(\boldsymbol{\nabla}^2 f\big) = 0 + 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{4}$$

b) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x;y) = x^2 + 2xy - 3y^2. \tag{5}$$

Für *Gradient*, HESSE-*Matrix* und LAPLACE-*Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^{2-1} + 2 \cdot 1 \cdot y - 0 \\ 0 + 2x \cdot 1 - 3 \cdot 2y^{2-1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2x + 2y \\ 2x - 6y \end{bmatrix}}} \tag{6}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 0 & 0 + 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 - 0 & 0 - 6 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}}} \tag{7}$$

$$\underline{\underline{\Delta f}} = \operatorname{tr}\big(\nabla^2 f\big) = 2 - 6 = \underline{\underline{-4.}} \tag{8}$$

c) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x;y) = x^2y^2 + 1. \tag{9}$$

Für *Gradient*, HESSE-*Matrix* und LAPLACE-*Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x^{2-1} \cdot y^2 + 0 \\ x^2 \cdot 2y^{2-1} + 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2xy^2 \\ 2x^2y \end{bmatrix}}} \tag{10}$$

$$\underline{\underline{\nabla^2 f}} = \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 \cdot y^2 & 2x \cdot 2y^{2-1} \\ 2 \cdot 2x^{2-1}y & 2x^2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2y^2 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{bmatrix}}} \tag{11}$$

$$\underline{\underline{\Delta f}} = \operatorname{tr}\big(\nabla^2 f\big) = 2y^2 + 2x^2 = \underline{\underline{2\left(x^2 + y^2\right).}} \tag{12}$$

d) Wir betrachten die *Funktion*

$$f(x;y) = 2^{3x-5y}. \tag{13}$$

Für *Gradient*, HESSE-*Matrix* und LAPLACE-*Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{\nabla f}} = \begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \end{bmatrix} = \ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \cdot 1 - 0 \\ 0 - 5 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}}} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\nabla^2 f}} &= \begin{bmatrix} f_{,1,1} & f_{,1,2} \\ f_{,2,1} & f_{,2,2} \end{bmatrix} = \ln(2) \cdot \ln(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 3 \cdot (3 \cdot 1 - 0) & 3 \cdot (0 - 5 \cdot 1) \\ -5 \cdot (3 \cdot 1 - 0) & -5 \cdot (0 - 5 \cdot 1) \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\ln^2(2) \cdot 2^{3x-5y} \begin{bmatrix} 9 & -15 \\ -15 & 25 \end{bmatrix}}} \end{aligned} \tag{15}$$

$$\underline{\underline{\Delta f}} = \operatorname{tr}\big(\nabla^2 f\big) = \ln^2(2) \cdot 2^{3x-5y} \cdot (9 + 25) = \underline{\underline{34 \ln^2(2) \cdot 2^{3x-5y}.}} \tag{16}$$

e) Wir betrachten die *Funktion*

$$V(r;h) = \pi r^2 h. \tag{17}$$

Für *Gradient*, HESSE-*Matrix* und LAPLACE-*Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} V}} = \begin{bmatrix} V_{,1} \\ V_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi \cdot 2r^{2-1} \cdot h \\ \pi r^2 \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\pi r h \\ \pi r^2 \end{bmatrix}}} \tag{18}$$

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2 V}} = \begin{bmatrix} V_{,1,1} & V_{,1,2} \\ V_{,2,1} & V_{,2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \cdot 1 \cdot h & 2\pi r \cdot 1 \\ \pi \cdot 2r^{2-1} & 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 2\pi h & 2\pi r \\ 2\pi r & 0 \end{bmatrix}}} \tag{19}$$

$$\underline{\underline{\Delta V}} = \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{\nabla}^2 V\big) = 2\pi h + 0 = \underline{\underline{2\pi h.}} \tag{20}$$

f) Wir betrachten die *Funktion*

$$(t; x) = A \sin(\omega t - kx). \tag{21}$$

Für *Gradient*, HESSE-*Matrix* und LAPLACE-*Ableitung* erhalten wir

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} \psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{,0} \\ \psi_{,1} \end{bmatrix} = A \cos(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \cdot 1 - 0 \\ 0 - k \cdot 1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{A \cos(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \\ -k \end{bmatrix}}} \tag{22}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla}^2 \psi}} = \begin{bmatrix} \psi_{,0,0} & \psi_{,0,1} \\ \psi_{,1,0} & \psi_{,1,1} \end{bmatrix} &= -A \sin(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega \cdot (\omega \cdot 1 - 0) & \omega \cdot (0 - k \cdot 1) \\ -k \cdot (\omega \cdot 1 - 0) & -k \cdot (0 - k \cdot 1) \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{-A \sin(\omega t - kx) \begin{bmatrix} \omega^2 & -\omega k \\ -\omega k & k^2 \end{bmatrix}}} \end{aligned} \tag{23}$$

$$\underline{\underline{\Delta \psi}} = \operatorname{tr}\big(\boldsymbol{\nabla}^2 \psi\big) = \underline{\underline{-\big(\omega^2 + k^2\big) A \sin(\omega t - kx).}} \tag{24}$$

3. Aussagen über den Gradienten

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Der *Gradient* ist nur für *Skalarfelder* in 2D und 3D definiert.	○	●
b) Der *Gradient* eines *Skalarfeldes* ist ein *Vektorfeld.*	●	○
c) Ist der *Graph* von f die Hälfte einer *Sphäre*, dann ist $\boldsymbol{\nabla} f$ ein *homogenes Vektorfeld.*	○	●
d) Verschwindet der *Gradient* eines *Skalarfeldes* an jedem *Punkt*, dann ist das *Skalarfeld konstant.*	●	○
e) Es gilt die *Faktor-Regel* $\boldsymbol{\nabla}(a \cdot g) = a \cdot \boldsymbol{\nabla} g$.	●	○
f) Es gilt die *Produkt-Regel* $\boldsymbol{\nabla}(g \cdot h) = h \cdot \boldsymbol{\nabla} g + g \cdot \boldsymbol{\nabla} h$.	●	○

4. Divergenz und Rotation von Vektorfeldern in der Ebene

Wir berechnen jeweils *Divergenz* und *Rotation* des *Vektorfeldes*.

a) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} = 0 + 0 = \underline{\underline{0}} \tag{26}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{v})}} = v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} = 0 - 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{27}$$

b) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y) = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{28}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} = 1 + 1 = \underline{\underline{2}} \tag{29}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{v})}} = v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} = 0 - 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{30}$$

c) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y) = \begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} = 0 + 0 = \underline{\underline{0}} \tag{32}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{v})}} = v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2.}} \tag{33}$$

d) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y) = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}. \tag{34}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} = 0 + 0 = \underline{\underline{0}} \tag{35}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{v})}} = v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} = -1 - 1 = \underline{\underline{-2.}} \tag{36}$$

e) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y) = \begin{bmatrix} x^2 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} = 2x^{2-1} + 0 = \underline{\underline{2x.}} \tag{38}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{v})}} = v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} = 0 - 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{39}$$

f) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y) = \begin{bmatrix} 1 \\ xy \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} = 0 + x \cdot 1 = \underline{\underline{x}} \tag{41}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{v})}} = v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} = 1 \cdot y - 0 = \underline{\underline{y.}} \tag{42}$$

5. Aussagen über die Divergenz

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Divergenz* ist nur für *Vektorfelder* in 2D und 3D definiert.	○	●
b) Die *Divergenz* eines *Vektorfeldes* ist selbst wieder ein *Vektorfeld*.	○	●
c) Ist ein *Vektorfeld homogen*, dann verschwindet seine *Divergenz*.	●	○
d) Verschwindet die *Divergenz*, dann ist das *Vektorfeld homogen*.	○	●
e) Es gilt die *Summen-Regel* $\operatorname{div}(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \operatorname{div}(\mathbf{v}) + \operatorname{div}(\mathbf{w})$.	●	○
f) Es gilt die *Produkt-Regel* $\operatorname{div}(f \cdot \mathbf{v}) = f \cdot \operatorname{div}(\mathbf{v})$.	○	●

6. Divergenz und Rotation von Vektorfeldern im Raum

Wir berechnen jeweils *Divergenz* und *Rotation* des *Vektorfeldes*.

a) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x; y; z) = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{43}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = 0 + 0 + 0 = \underline{\underline{0}} \tag{44}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{v})}} = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0.}} \tag{45}$$

b) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\mathrm{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = 1 + 1 + 0 = \underline{\underline{2}} \tag{47}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{rot}(\mathbf{v})}} = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0.}} \tag{48}$$

c) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}. \tag{49}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\mathrm{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = 1 + 1 + 1 = \underline{\underline{3}} \tag{50}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{rot}(\mathbf{v})}} = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0.}} \tag{51}$$

d) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} -y \\ x \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{52}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\mathrm{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = 0 + 0 + 0 = \underline{\underline{0}} \tag{53}$$

$$\underline{\underline{\mathrm{rot}(\mathbf{v})}} = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 1-(-1) \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}}}. \tag{54}$$

e) Wir betrachten das *Vektorfeld*

$$\mathbf{v}(x;y;z) = \begin{bmatrix} -z \\ 2 \\ x \end{bmatrix}. \tag{55}$$

Für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{v})}} = v^1{}_{,1} + v^2{}_{,2} + v^3{}_{,3} = 0 + 0 + 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{56}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{v})}} = \begin{bmatrix} v^3{}_{,2} - v^2{}_{,3} \\ v^1{}_{,3} - v^3{}_{,1} \\ v^2{}_{,1} - v^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 0 \\ -1 - 1 \\ 0 - 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}}}. \tag{57}$$

7. Aussagen über die Rotation

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Die *Rotation* ist nur für *Vektorfelder* in 2D und 3D definiert.	○	●
b) Nur in 3 Dimensionen ist die *Rotation* eines *Vektorfeldes* selbst wieder ein *Vektorfeld.*	●	○
c) Verschwindet die *z-Komponente* eines *räumlichen Vektorfeldes*, dann steht seine *Rotation* senkrecht auf der x-y-Ebene.	○	●
d) Verschwindet die *Rotation*, dann ist das *Vektorfeld homogen.*	○	●
e) Es gilt die *Faktor-Regel* $\operatorname{rot}(a \cdot \mathbf{v}) = a \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{v})$.	●	○
f) In 3D gilt die *Produkt-Regel* $\operatorname{rot}(f \cdot \mathbf{v}) = \boldsymbol{\nabla} f \times \mathbf{v} + f \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{v})$.	●	○

8. Spezielle Divergenzen und Rotationen

Wir betrachten eine *Funktion* $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und ein *Vektorfeld* $\mathbf{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

a) Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{div}\big(\boldsymbol{\nabla} f\big)}} = \operatorname{div}\left(\begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ f_{,3} \end{bmatrix}\right) = f_{,1,1} + f_{,2,2} + f_{,3,3} = \underline{\underline{\Delta f.}} \tag{58}$$

b) Weil die *partiellen Ableitungen* einer *Funktion kommutieren*, gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}\big(\boldsymbol{\nabla} f\big)}} = \operatorname{rot}\left(\begin{bmatrix} f_{,1} \\ f_{,2} \\ f_{,3} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} f_{,3,2} - f_{,2,3} \\ f_{,1,3} - f_{,3,1} \\ f_{,2,1} - f_{,1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}. \tag{59}$$

c) Weil die *partiellen Ableitungen* einer *Funktion kommutieren*, gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\operatorname{div}\big(\operatorname{rot}(\mathbf{v})\big)}} = \operatorname{div}\left(\begin{bmatrix} {v^3}_{,2} - {v^2}_{,3} \\ {v^1}_{,3} - {v^3}_{,1} \\ {v^2}_{,1} - {v^1}_{,2} \end{bmatrix}\right) &= \big({v^3}_{,2} - {v^2}_{,3}\big)_{,1} + \big({v^1}_{,3} - {v^3}_{,1}\big)_{,2} + \big({v^2}_{,1} - {v^1}_{,2}\big)_{,3} \\ &= {v^3}_{,2,1} - {v^2}_{,3,1} + {v^1}_{,3,2} - {v^3}_{,1,2} + {v^2}_{,1,3} - {v^1}_{,2,3} \\ &= {v^3}_{,2,1} - {v^3}_{,1,2} + {v^2}_{,1,3} - {v^2}_{,3,1} + {v^1}_{,3,2} - {v^1}_{,2,3} = 0 + 0 + 0 = \underline{\underline{0}}.\end{aligned} \tag{60}$$

d) Weil die *partiellen Ableitungen* einer *Funktion kommutieren*, gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\operatorname{rot}\big(\operatorname{rot}(\mathbf{v})\big)}} = \operatorname{rot}\left(\begin{bmatrix} {v^3}_{,2} - {v^2}_{,3} \\ {v^1}_{,3} - {v^3}_{,1} \\ {v^2}_{,1} - {v^1}_{,2} \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} \big({v^2}_{,1} - {v^1}_{,2}\big)_{,2} - \big({v^1}_{,3} - {v^3}_{,1}\big)_{,3} \\ \big({v^3}_{,2} - {v^2}_{,3}\big)_{,3} - \big({v^2}_{,1} - {v^1}_{,2}\big)_{,1} \\ \big({v^1}_{,3} - {v^3}_{,1}\big)_{,1} - \big({v^3}_{,2} - {v^2}_{,3}\big)_{,2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {v^2}_{,1,2} - {v^1}_{,2,2} - {v^1}_{,3,3} + {v^3}_{,1,3} \\ {v^3}_{,2,3} - {v^2}_{,3,3} - {v^2}_{,1,1} + {v^1}_{,2,1} \\ {v^1}_{,3,1} - {v^3}_{,1,1} - {v^3}_{,2,2} + {v^2}_{,3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {v^2}_{,2,1} + {v^3}_{,3,1} - {v^1}_{,2,2} - {v^1}_{,3,3} \\ {v^1}_{,1,2} + {v^3}_{,3,2} - {v^2}_{,1,1} - {v^2}_{,3,3} \\ {v^1}_{,1,3} + {v^2}_{,2,3} - {v^3}_{,1,1} - {v^3}_{,2,2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} {v^1}_{,1,1} + {v^2}_{,2,1} + {v^3}_{,3,1} - {v^1}_{,1,1} - {v^1}_{,2,2} - {v^1}_{,3,3} \\ {v^1}_{,1,2} + {v^2}_{,2,2} + {v^3}_{,3,2} - {v^2}_{,1,1} - {v^2}_{,2,2} - {v^2}_{,3,3} \\ {v^1}_{,1,3} + {v^2}_{,2,3} + {v^3}_{,3,3} - {v^3}_{,1,1} - {v^3}_{,2,2} - {v^3}_{,3,3} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \big({v^1}_{,1} + {v^2}_{,2} + {v^3}_{,3}\big)_{,1} - {v^1}_{,1,1} - {v^1}_{,2,2} - {v^1}_{,3,3} \\ \big({v^1}_{,1} + {v^2}_{,2} + {v^3}_{,3}\big)_{,2} - {v^2}_{,1,1} - {v^2}_{,2,2} - {v^2}_{,3,3} \\ \big({v^1}_{,1} + {v^2}_{,2} + {v^3}_{,3}\big)_{,3} - {v^3}_{,1,1} - {v^3}_{,2,2} - {v^3}_{,3,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \operatorname{div}(\mathbf{v})_{,1} - \Delta v^1 \\ \operatorname{div}(\mathbf{v})_{,2} - \Delta v^2 \\ \operatorname{div}(\mathbf{v})_{,3} - \Delta v^3 \end{bmatrix} \\ &= \underline{\underline{\boldsymbol{\nabla} \operatorname{div}(\mathbf{v}) - \Delta\mathbf{v}}}.\end{aligned} \tag{61}$$

9. Eigenschaften des Ortsvektorfeldes

Wir betrachten das *Ortsvektorfeld* und seinen *Betrag*

$$\mathbf{r}(x;y;z) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad r(x;y;z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,. \tag{62}$$

Für jedes $p \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ sei

$$\mathbf{w}(p) = r^p \cdot \hat{\mathbf{r}} \tag{63}$$

das *faktorierte Ortsvektorfeld* auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

a) Mit Hilfe der *Ketten-Regel* erhalten wir

$$\underline{\underline{\nabla r}} = \begin{bmatrix} r_{,1} \\ r_{,2} \\ r_{,3} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{bmatrix} 2x^{2-1}+0+0 \\ 0+2y^{2-1}+0 \\ 0+0+2z^{2-1} \end{bmatrix} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \mathbf{r} = \underline{\underline{\hat{\mathbf{r}}.}} \tag{64}$$

b) Für *Divergenz* und *Rotation* von $\mathbf{r}$ erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\mathbf{r})}} = r^1{}_{,1} + r^2{}_{,2} + r^3{}_{,3} = 1+1+1 = \underline{\underline{3}} \tag{65}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\mathbf{r})}} = \begin{bmatrix} r^3{}_{,2} - r^2{}_{,3} \\ r^1{}_{,3} - r^3{}_{,1} \\ r^2{}_{,1} - r^1{}_{,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{bmatrix} = \underline{\underline{0.}} \tag{66}$$

c) Mit Hilfe der *Ketten-Regel* und (67) berechnen wir zunächst

$$\nabla \left(\frac{1}{r}\right) = \nabla r^{-1} = -r^{-1-1} \cdot \nabla r = -r^{-2} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \tag{67}$$

Daraus und mit Hilfe der *Produkt-Regeln* für *Divergenz* und *Rotation* erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}(\hat{\mathbf{r}})}} = \operatorname{div}\left(\frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}\right) = \left\langle \nabla\left(\frac{1}{r}\right), \mathbf{r} \right\rangle + \frac{1}{r} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{r}) = \left\langle -\frac{1}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}, r \cdot \hat{\mathbf{r}} \right\rangle + \frac{1}{r} \cdot 3$$

$$= -\frac{1}{r} \cdot \langle \hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{r}} \rangle + 3 \cdot \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} \cdot 1 + 3 \cdot \frac{1}{r} = \frac{3-1}{r} = \underline{\underline{\frac{2}{r}}} \tag{68}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}(\hat{\mathbf{r}})}} = \operatorname{rot}\left(\frac{1}{r} \cdot \mathbf{r}\right) = \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{r} \cdot \operatorname{rot}(\mathbf{r}) = \left(-\frac{1}{r^2} \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) \times \left(r \cdot \hat{\mathbf{r}}\right) + \frac{1}{r} \cdot 0$$

$$= -\frac{1}{r^2} \cdot r \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} + 0 = 0 + 0 = \underline{\underline{0.}} \tag{69}$$

d) Mit Hilfe der *Ketten-Regel* und (67) berechnen wir zunächst

$$\nabla r^p = p \cdot r^{p-1} \cdot \nabla r = p \cdot r^{p-1} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \tag{70}$$

Daraus und mit Hilfe der *Produkt-Regeln* für *Divergenz* und *Rotation* und durch Einsetzen von (71) und (72) erhalten wir

$$\underline{\underline{\operatorname{div}\big(\mathbf{w}(p)\big)}} = \operatorname{div}\big(r^p \cdot \hat{\mathbf{r}}\big) = \langle \boldsymbol{\nabla} r^p \,, \hat{\mathbf{r}} \rangle + r^p \cdot \operatorname{div}(\hat{\mathbf{r}}) = \big\langle p \cdot r^{p-1} \cdot \hat{\mathbf{r}} \,, \hat{\mathbf{r}} \big\rangle + r^p \cdot \frac{2}{r}$$

$$= p \cdot r^{p-1} \cdot \langle \hat{\mathbf{r}} \,, \hat{\mathbf{r}} \rangle + 2 \cdot r^{p-1} = p \cdot r^{p-1} + 2 \cdot r^{p-1} = \underline{\underline{(p+2) \cdot r^{p-1}}} \tag{71}$$

$$\underline{\underline{\operatorname{rot}\big(\mathbf{w}(p)\big)}} = \operatorname{rot}\big(r^p \cdot \hat{\mathbf{r}}\big) = \boldsymbol{\nabla} r^p \times \hat{\mathbf{r}} + r^p \cdot \operatorname{rot}(\hat{\mathbf{r}}) = p \cdot r^{p-1} \cdot \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} + r^p \cdot 0 = 0 + 0$$

$$= \underline{\underline{0.}} \tag{72}$$

e) Auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt

$$r > 0. \tag{73}$$

Gemäss (74) und (75) verschwindet die *Rotation* des *faktorierten Ortsvektorfeldes* $\mathbf{w}(p)$ in jedem Fall. Sowohl die *Divergenz* als auch die *Rotation* verschwinden demnach genau dann, wenn gilt

$$0 = \operatorname{div}\big(\mathbf{w}(p)\big) = (p+2) \cdot r^{p-1} \qquad \Big| : r^{p-1} \tag{74}$$

$$\Leftrightarrow \qquad 0 = p + 2 \qquad \Big| - 2. \tag{75}$$

Daraus erhalten wir die Bedingung

$$\underline{\underline{p = -2.}} \tag{76}$$

f) Auf $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gilt

$$r > 0. \tag{77}$$

Gemäss (74) und (75) ist die *Rotation* des *faktorierten Ortsvektorfeldes* $\mathbf{w}(p)$ in jedem Fall konstant. Sowohl die *Divergenz* als auch die *Rotation* sind demnach genau dann konstant, wenn gilt

$$c = \operatorname{div}\big(\mathbf{w}(p)\big) = (p+2) \cdot r^{p-1}. \tag{78}$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn entweder

$$(p+2) = 0 \quad \text{oder} \quad (p-1) = 0. \tag{79}$$

Daraus erhalten wir die Bedingung

$$\underline{\underline{p \in \{-2, 1\}.}} \tag{80}$$