

# Übungsblatt LA 7

Computational and Data Science  
FS2025

## Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:

- Sie kennen die Begriffe Spur, Determinante, Leibnizsche Formel, Regel von Sarrus, Gramsche Matrix und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie kennen die Formel zur Berechnung von Massen (Länge, Fläche, Volumen ...) und können sie anwenden.
- Sie können die Eigenschaften einer Matrix anhand ihrer Spur und Determinante beurteilen.
- Sie können die Determinante quadratischer Matrizen in 2D und 3D berechnen.
- Sie können die Determinanten einer quadratischen Matrix mit Hilfe des Gaußschen Verfahrens berechnen.

### 1. Aussagen über die Spur

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Spur ist für jede Matrix definiert.		X
b) Ob eine Matrix regulär oder singulär ist, lässt sich nicht alleine anhand der Spur beurteilen.	X	
c) Für alle orthogonalen Matrizen gilt: $\text{tr}(A^T \cdot A) = n$ .	X	
d) Für alle quadratischen $n \times n$ Matrizen gilt: $\text{tr}(A \cdot B - B \cdot A) = 0$ .	X	
e) Für alle quadratischen $n \times n$ Matrizen gilt: $\text{tr}(A \cdot B) = \text{tr}(A) \cdot \text{tr}(B)$ .		X
f) Die Matrix $A$ ist schiefsymmetrisch, wenn gilt: $\text{tr}(A) = 0$ .		X

### 2. Spur und Determinante der Standardmatrizen in 2D

Bestimmen Sie für die Standardmatrizen  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{I}$ ,  $P$ ,  $Z_\lambda$ ,  $P_x$ ,  $P_y$ ,  $S_x$  und  $S_y$  jeweils die Spur und die Determinante.

Die Matrizen  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{I}$ ,  $P$  beschreiben Drehungen, die Matrizen sind somit orthogonal. Es gilt folglich:  $\det(\mathbb{E}) = \det(\mathbb{I}) = \det(P) = 1$ .

Die Matrizen  $P_x$ ,  $P_y$  beschreiben Projektionen. Sie sind deshalb singulär und somit gilt:  $\det(P_x) = \det(P_y) = 0$ .

Die Matrizen  $S_x$  und  $S_y$  beschreiben Spiegelungen. Da Spiegelungen nicht orientierungstreu sind, gilt:  $\det(S_x) = \det(S_y) = -1$ .

Die Matrix  $Z_\lambda$  beschreibt eine Streckung um den Faktor  $\lambda$ . Dabei vergrößern sich die Flächen um den Faktor  $\lambda^2$  und es folgt:  $\det(Z_\lambda) = \lambda^2$ .

$$\underline{\underline{\text{tr}(\mathbb{1})}} = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$$

$$\underline{\underline{\det(\mathbb{1})}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\text{tr}(\mathfrak{i})}} = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 + 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(\mathfrak{i})}} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\text{tr}(P)}} = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = -1 + (-1) = \underline{\underline{-2}}$$

$$\underline{\underline{\det(P)}} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\text{tr}(Z_\lambda)}} = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda + \lambda = \underline{\underline{2\lambda}}$$

$$\underline{\underline{\det(Z_\lambda)}} = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}\right) = \lambda \cdot \lambda - 0 \cdot 0 = \lambda^2 - 0 = \underline{\underline{\lambda^2}}$$

$$\underline{\underline{\text{tr}(P_x)}} = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 + 0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\det(P_x)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\text{tr}(P_y)}} = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$$

$$\underline{\underline{\det(P_y)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\text{tr}(S_x)}} = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 + (-1) = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(S_x)}} = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = \underline{\underline{-1}}$$

$$\underline{\underline{\text{tr}(S_y)}} = \text{tr}\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = -1 + 1 = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{\det(S_y)}} = \det\left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = \underline{\underline{-1}}.$$

### 3. Spur und Determinante berechnen

Berechnen Sie jeweils die Spur und die Determinante.

a)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

b)  $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

c)  $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

d)  $\begin{pmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & -4 \\ 6 & -3 & 12 \end{pmatrix}$

e)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{pmatrix}$

f)  $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} & 8 & -\sqrt{2} \\ -13 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{17} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

g)  $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & -6 & 18 \\ 4 & -3 & 9 & 6 & 10 \\ -2 & 4 & -6 & -1 & -1 \\ -6 & 11 & -23 & -14 & 9 \end{pmatrix}$

h)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

a)

$$\underline{\underline{\text{tr}(A) = 2 + 5 = 7.}}$$

$$\underline{\underline{\det(A) = 2 \cdot 5 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2.}}$$

b)

$$\text{tr}(A) = 2 + 6 = 8$$

Da bei der Matrix  $A$  die 2. Spalte ein Vielfaches der Ersten ist, verschwindet die Determinante:  $\det(A) = 0$ .

c)

$$\underline{\underline{\text{tr}(A) = (-1) + 2 + (-1) = 0.}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\det(A)}} &= (-1) \cdot 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \cdot 0 - 0 \cdot 3 \cdot (-1) - (-1) \cdot 2 \cdot 0 \\ &= 2 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = \underline{\underline{2.}} \end{aligned}$$

d)

$$\text{tr}(A) = -2 - 2 + 12 = 8$$

Die zweite Zeile von  $A$  ist ein Vielfaches der ersten Zeile. Deswegen verschwindet die Determinante:  $\det(A) = 0$ .

e)

$$\underline{\underline{\text{tr}(A)}} = 1 + (-2) + 3 + (-2) = \underline{\underline{0.}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\det(A)}} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 12 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 6 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 15 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 = \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 \\ &= 2 \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 6 & -2 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) \\ &= \begin{vmatrix} [1] & 0 & 3 & 0 \\ 0 & [1] & 0 & -3 \\ 0 & 0 & [6] & 7 \\ 0 & 0 & 0 & [2] \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = 1 \cdot 1 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1) \cdot (-1) = \underline{\underline{24.}} \end{aligned}$$

f)

$$\underline{\underline{\text{tr}(A)}} = 1 + 3 + 0 + 0 = \underline{\underline{4.}}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\det(A)}} &= \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} & 8 & -\sqrt{2} \\ -13 & 3 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{17} & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 1 & \sqrt{3} & 8 \\ 0 & -13 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{17} & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^3 \\ &= \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 8 & 1 & \sqrt{3} \\ 0 & [\sqrt{2}] & -13 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{17} & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2} = \begin{vmatrix} [-\sqrt{2}] & 8 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & [\sqrt{2}] & 3 & -13 \\ 0 & 0 & [-1] & \sqrt{17} \\ 0 & 0 & 0 & [2] \end{vmatrix} \cdot (-1)^{3+2+1} \\ &= -\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-1)^6 = \underline{\underline{4.}} \end{aligned}$$

g)

$$\underline{\underline{\text{tr}(A)}} = 2 - 3 + 9 - 1 + 9 = 16$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\det(A)}} &= \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 & -6 \\ 2 & 4 & -3 & 9 & 6 \\ -1 & -2 & 4 & -6 & -1 \\ -3 & -6 & 11 & -23 & -14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -11 & 21 \end{vmatrix} \\ &= 3 \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 2 & -8 & -11 & 21 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & -4 & -7 & 14 \\ 0 & 0 & -6 & -11 & 15 \end{vmatrix} \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -6 \end{vmatrix} \cdot (-1) = \begin{vmatrix} [2] & -3 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & [1] & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & [2] & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & [1] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [-6] \end{vmatrix} \cdot (-1) \\
&= 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-6) \cdot (-1) = \underline{\underline{24.}}
\end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned}
\underline{\underline{\det(A)}} &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot (-1)^2 \\
&= -1 \cdot \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \cdot 1 = \begin{vmatrix} [1] & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [-2] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [1] & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [2] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & [\sqrt{2}] \end{vmatrix} \\
&= 1 \cdot (-2) \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{-4\sqrt{2}.}}
\end{aligned}$$

#### 4. Spur und Determinante mit Python/Numpy bestimmen

Berechnen Sie jeweils Spur und Determinante der Matrizen aus Aufgabe 3 mit Python/Numpy.

a)

```
# Initialisieren
import numpy as np;
# Parameter
A=np.array([[2,3],[4,5]]);
# Berechnungen
spur=np.trace(A);
determinante=np.linalg.det(A);
# Ausgabe
print('Spur =', spur);
print('Determinante =', round(determinante,3));
```

Berechnung für b) – h) analog.

## 5. Aussagen über die Determinante

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Determinante ist nur für quadratische Matrizen definiert.	X	
b) Ob eine quadratische Matrix regulär oder singular ist, lässt sich nicht nur anhand der Determinante beurteilen.		X
c) Für eine quadratische $n \times n$ Matrix $A$ und eine orthogonale $n \times n$ Matrix $Q$ gilt: $\det(QA) = \det(A)$ .	X	
d) Für quadratische $n \times n$ Matrizen $A$ und $B$ gilt: $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$ .		X
e) Gilt $A = A^{-1}$ , dann folgt: $\det(A) \in \{-1; 1\}$ .	X	
f) $A$ sei eine schiefsymmetrische $n \times n$ Matrix. Für ungerade $n$ gilt: $\det(A) = 0$ .	X	

## 6. Aussagen über 2 Matrizen in 2D

Gegeben sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Matrix $A$ ist orthogonal.	X	
b) Die Matrix $B$ beschreibt eine Spiegelung an einer Geraden.		X
c) Es gilt: $\det(B) = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$ .	X	
d) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ , so dass $B^n = 0$ .	X	
e) Die Matrizen $A$ und $B$ kommutieren nicht, d. h. es gilt $A \cdot B \neq B \cdot A$ .	X	
f) Es gilt $B = B^{-1}$ .		X

## 7. Aussagen über 2 Matrizen in 3D

Gegeben sind die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Die Matrix $A$ ist singular.	X	
b) Die Matrix $A^{102}$ ist symmetrisch.	X	
c) Es gilt: $\det(B) = \det(A)$ .		X
d) Es gilt: $\det(A) = \text{tr}(A)$ .	X	
e) Es gilt: $A \cdot B = B \cdot A$ .		X

## 8. Determinante mit Parameter

Für welche reellen Parameter  $\lambda$  verschwinden die Determinanten?

a)  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix}$       b)  $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}$

a)

Determinante bestimmen:

$$(1-\lambda)(-2-\lambda) - 2 = \lambda^2 + \lambda - 4 = 0$$

Mitternachtsformel verwenden, dies ergibt:  $\lambda_1 = 1,562$  und  $\lambda_2 = -2,562$

b)

Determinante bestimmen (da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt, braucht man nur die Elemente der Hauptdiagonalen multiplizieren):

$$(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

Dies ergibt:  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 3$ ,  $\lambda_3 = 2$