Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungsblatt LA 8

Computational and Data Science
FS2024

Lösungen

Mathematik 2

Lernziele:
- Sie kennen die Begriffe charakteristisches Polynom, charakteristische Gleichung, Eigenwert, Eigenvektor, Spektrum und Eigenraum und deren wichtigste Eigenschaften.
- Sie können das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren einer quadratischen Matrix berechnen.
- Sie können die Eigenschaften einer Matrix bzw. linearen Abbildung anhand ihrer Eigenwerte/Eigenvektoren beurteilen und umgekehrt.

1. Aussagen über Eigenwerte und -vektoren

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Jede quadratische Matrix hat mindestens einen reellen Eigenwert.		X
b) Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Eigenvektoren einer Matrix, dann gilt dies auch für $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.		X
c) Sind $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zwei Eigenvektoren einer Matrix zum selben Eigenwert λ, dann gilt dies auch für $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$.	X	
d) Eine 3x3 Matrix hat maximal drei verschiedene Eigenwerte.	X	
e) Gilt spec(A) = {0}, dann gilt: tr(A) = 0.		X
f) Gilt 0 ∈ spec(A), dann gilt: det(A) = 0.	X	

2. Eigenwerte und -vektoren der Standardmatrizen in 2D

Betrachten Sie die Standardmatrizen $\mathbb{E}$, $\mathbb{1}$, P, Z_a, P_x, P_y, S_x und S_y.

a) Welche reellen Eigenwerte und Eigenvektoren der Standardmatrizen können Sie ohne zu rechnen angeben?

b) Berechnen Sie das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und Eigenvektoren der Standardmatrizen.

a)

Die *Matrix* $\mathbb{1}$ beschreibt die *Identität* auf $\mathbb{R}^2$, die jeden *Vektor* auf sich selber abbildet. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(\mathbb{1}) = \{1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(\mathbb{1}) = \mathbb{R}^2}}.$$

Die *Matrix* $\mathbb{i}$ beschreibt die *Drehung* um den *Ursprung* um den *Winkel* $\pi/2$. Diese Operation kann für keinen von Null verschiedenen *Vektor* als *Multiplikation* mit einer *reellen Zahl* aufgefasst werden. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(\mathbb{i}) = \varnothing}}.$$

Die *Matrix* P beschreibt die *Punktspiegelung* am *Ursprung*. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P) = \{-1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(P) = \mathbb{R}^2}}.$$

Die *Matrix* Z_a beschreibt die *Streckung* am *Ursprung* um den *Faktor* $a \in \mathbb{R}$. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* a. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(Z_a) = \{a\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(Z_a) = \mathbb{R}^2}}.$$

Die *Matrix* P_x beschreibt die *Projektion* auf die x-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 0, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P_x) = \{0,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(P_x) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2(P_x) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}}.$$

Die *Matrix* P_y beschreibt die *Projektion* auf die y-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 0, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P_y) = \{0,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(P_y) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2(P_y) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}.$$

Die *Matrix* S_x beschreibt die *Spiegelung* an der x-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(S_x) = \{-1,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(S_x) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2(S_x) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}}.$$

Die *Matrix* S_y beschreibt die *Spiegelung* an der y-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(S_y) = \{-1,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(S_y) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2(S_y) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}.$$

b)

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von $\mathbb{E}$ ergeben sich zu

$$\operatorname{tr}(\mathbb{1}) = 1 + 1 = 2$$

$$\det(\mathbb{1}) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1$$

$$\underline{\underline{p_{\mathbb{1}}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbb{1}) \cdot \lambda + \det(\mathbb{1}) = \underline{\underline{\lambda^2 - 2\,\lambda + 1.}}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{\mathbb{1}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = 1.$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von $\mathbb{1}$, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(\mathbb{1}) = \{1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{cc} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}.$$

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1(\mathbb{1})}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von $\mathbb{i}$ ergeben sich zu

$\operatorname{tr}(\mathbb{i}) = 0 + 0 = 0$

$\det(\mathbb{i}) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = 1$

$\underline{\underline{p_{\mathbb{i}}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbb{i}) \cdot \lambda + \det(\mathbb{i}) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + 1 = \underline{\underline{\lambda^2 + 1.}}$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{\mathbb{i}}(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

und hat offensichtlich keine *reellen Lösungen*. Es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(\mathbb{i}) = \varnothing.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von P ergeben sich zu

$\operatorname{tr}(P) = -1 - 1 = -2$

$\det(P) = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1$

$\underline{\underline{p_P(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(P) \cdot \lambda + \det(P) = \underline{\underline{\lambda^2 + 2\,\lambda + 1.}}$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_P(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = -1.$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von P, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P) = \{-1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

E_1: $\boxed{\begin{array}{cc} -1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & -1-(-1) \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}$.

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1(P)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von Z_a ergeben sich zu

$\mathrm{tr}(Z_a) = a + a = 2a$

$\det(Z_a) = a \cdot a - 0 \cdot 0 = a^2 - 0 = a^2$

$\underline{\underline{p_{Z_a}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(Z_a) \cdot \lambda + \det(Z_a) = \underline{\underline{\lambda^2 - 2a\,\lambda + a^2.}}$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{Z_a}(\lambda) = \lambda^2 - 2a\,\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = a.$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von Z_a, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(Z_a) = \{a\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

E_1: $\boxed{\begin{array}{cc} a-a & 0-0 \\ 0-0 & a-a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}$.

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1(Z_a)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von P_x ergeben sich zu

$\mathrm{tr}(P_x) = 1 + 0 = 1$

$\det(P_x) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0$

$\underline{\underline{p_{P_x}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(P_x) \cdot \lambda + \det(P_x) = \lambda^2 - 1 \cdot \lambda + 0 = \underline{\underline{\lambda^2 - \lambda.}}$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{P_x}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1)$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von P_x, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(P_x) = \{0, 1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{cc} 0-1 & 0-0 \\ 0-0 & 0-0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \end{array}}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{array}{cc} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & [1] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & [1] \end{array}}.$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(P_x)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}$$

$$\underline{\underline{E_2(P_x)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von P_y ergeben sich zu

$$\operatorname{tr}(P_y) = 0 + 1 = 1$$

$$\det(P_y) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0 - 0 = 0$$

$$\underline{\underline{p_{P_y}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(P_y) \cdot \lambda + \det(P_y) = \lambda^2 - 1 \cdot \lambda + 0 = \underline{\underline{\lambda^2 - \lambda.}}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{P_y}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1)$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von P_y, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P_y) = \{0, 1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{cc} 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 0-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & [1] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & [1] \end{array}}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{array}{cc} 1-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \end{array}}.$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(P_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}}$$

$$\underline{\underline{E_2(P_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von S_x ergeben sich zu

$$\mathrm{tr}(S_x) = 1 - 1 = 0$$

$$\det(S_x) = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = -1$$

$$\underline{\underline{p_{S_x}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(S_x) \cdot \lambda + \det(S_x) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + (-1) = \underline{\underline{\lambda^2 - 1.}}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{S_x}(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von S_x, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(S_x) = \{-1, 1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1\colon \boxed{\begin{matrix} -1-1 & 0-0 \\ 0-0 & -1-(-1) \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [-2] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & 0 \end{matrix}}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{matrix} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-(-1) \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & [2] \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & [1] \end{matrix}}.$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(S_x)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}$$

$$\underline{\underline{E_2(S_x)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \mathrm{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\mathrm{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}}$$

Spur, Determinante und charakteristisches Polynom von S_y ergeben sich zu

$$\mathrm{tr}(S_y) = -1 + 1 = 0$$

$$\det(S_y) = (-1) \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = -1$$

$$\underline{\underline{p_{S_y}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(S_y) \cdot \lambda + \det(S_y) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + (-1) = \underline{\underline{\lambda^2 - 1.}}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{S_y}(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1)$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1.$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von S_y, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(S_y) = \{-1, 1\}.}}$$

Bestimmung der Eigenvektoren:

$$E_1\colon \boxed{\begin{matrix} -1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & -1-1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & [-2] \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} 0 & [1] \end{matrix}}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{matrix} 1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [2] & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & 0 \end{matrix}}.$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(S_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}}$$

$$\underline{\underline{E_2(S_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}}.$$

3. Eigenwerte und -vektoren bestimmen

Berechnen Sie jeweils das charakteristische Polynom, die reellen Eigenwerte und die reellen Eigenvektoren der Matrix.

a) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Da die Matrix diagonal ist, entsprechen die Eigenwerte den Einträgen in der Hauptdiagonale.

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 \Rightarrow spec(A) = \{2, 3\}$

$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(3-\lambda) = 6 - 5\lambda + \lambda^2 = p_A(\lambda)$

$\vec{E}_1$ zu $\lambda_1 = 2$: $\quad \vec{E}_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vec{E}_2$ zu $\lambda_2 = 3$: $\quad \vec{E}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda) - 2$

$= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0$

$\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3) \stackrel{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 3$

$\vec{E}_1$ zu $\lambda_1 = 0$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$x + y = 0 \iff x = -y$ setze $y = t$

$\vec{E_1} = t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{E_2}$ zu $\lambda_2 = 3$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-2x + y = 0 \iff x = \frac{1}{2} y$ setze $y = t$

$\vec{E_2} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\det \begin{pmatrix} -\lambda & 6 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 12 = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \lambda^2 - 12 = 0$

$\lambda_{1/2} = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$

$\vec{E_1}$ zu $\lambda_1 = 2\sqrt{3}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2\sqrt{3} & 6 & 0 \\ 2 & -2\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} -2\sqrt{3} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$-2\sqrt{3}x + 6y = 0 \iff x = \sqrt{3}y$ setze $y = t$

$\vec{E_1} = t \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{E_2}$ zu $\lambda_2 = -2\sqrt{3}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2\sqrt{3} & 6 & 0 \\ 2 & 2\sqrt{3} & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|c} 2\sqrt{3} & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$2\sqrt{3}x + 6y = 0 \iff x = -\sqrt{3}y$ setze $y = t$

$\vec{E_2} = t \cdot \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\det \begin{pmatrix} -\lambda & -6 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 12 = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \stackrel{!}{=} 0 \quad \lambda^2 + 12 \stackrel{!}{=} 0 \iff \lambda^2 = -12$

$\to$ nicht lösbar in $\mathbb{R}$

$\to$ keine reellen Eigenwerte / -vektoren

e) $\det\left[\begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -3 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 2-\lambda \\ 0 & -3 \end{matrix}\right] =$

$= (1-\lambda)(2-\lambda)\cdot(-\lambda) - (-3)\cdot(-1)\cdot(1-\lambda)$

$= (1-\lambda)\cdot[(2-\lambda)\cdot(-\lambda) - 3] = (1-\lambda)\cdot[\lambda^2 - 2\lambda - 3]$

$= p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \overset{!}{=} 0 \qquad (1-\lambda)[\lambda^2 - 2\lambda - 3] \overset{!}{=} 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_{2/3} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = 1 \pm 2$

$\lambda_2 = 3 \qquad \lambda_3 = -1$

$\vec{E}_1$ zu $\lambda_1 = 1$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$-3y - z = 0 \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{3}z \qquad$ setze $z = t$

$2x + y - z = 0 \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \frac{1}{6}z + \frac{1}{2}z$

$= \frac{2}{3}z$

$\vec{E}_1 = t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{E}_2$ zu $\lambda_2 = 3$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ |+ \\ |:(-3) \end{matrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ |+ \end{matrix} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$-y - z = 0 \Leftrightarrow \quad y = -z \qquad$ setze $z = t$

$2x - y - z = 0 \Leftrightarrow \quad x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z = 0$

$\vec{E}_2 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\vec{E}_3$ zu $\lambda_3 = -1$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} |\cdot(-1) \\ +\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{array}$$

$-3y + z = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}z$ setze $z = t$

$2x + 3y - z = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = -\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}z = 0$

$\vec{E}_3 = t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

f) $\det \left[\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} -\lambda & 1 \\ 0 & -\lambda \\ 1 & 0 \end{matrix} \right] = -\lambda^3 + 1 = p_A(\lambda)$

$p_A(\lambda) \overset{!}{=} 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 + 1 \overset{!}{=} 0 \qquad \lambda^3 = 1$

$\lambda = 1$

dreifacher Eigenwert

$\vec{E}_1$ zu $\lambda = 1$:

$$\left.\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right. \;\; + \qquad \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$y - z = 0 \Leftrightarrow y = z$ setze $z = t$

$-x + y = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

$\vec{E}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

4. Eigenwerte und -vektoren mit Python/Numpy bestimmmen
Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren aus Aufgabe 3 mit Python/Numpy.

a)
```
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([[2,0],[0,3]]);
# Berechnungen:
EW,EV=np.linalg.eig(A); # EW=Eigenwert, EV=Eigenvektor
# Ausgabe:
print('Eigenwerte =',EW);
print('Eigenvektoren =',EV);
```

b) – f) analog

5. Eigenwerte und -vektoren mit Python/Sympy bestimmmen
Berechnen Sie die Eigenwerte und -vektoren aus Aufgabe 3 mit Python/Sympy.

a)
```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing(),
# Parameter:
A=sp.Matrix([[2,0],[0,3]]);
# Berechnungen:
[EV,EW]=A.diagonalize(); # EV=Eigenvektoren in Matrixform; EW
(Eigenwerte)=Einträge in Hauptdiagonale
ew=A.eigenvals(); # Eigenwert und dessen Multiplizität
ev=A.eigenvects(); #Eigenwert, Multiplizität und zugehöriger
Eigenvektor
# Ausgabe:
dp.display(EV);
dp.display(EW);
dp.display(ew);
dp.display(ev);
```

b) – f) analog

6. Eigenwerte/-vektoren zu quadrierter/invertierter Matrix
Gegeben sei ein Eigenvektor $\vec{v}$ zum Eigenwert λ einer Matrix A.
a) Ist $\vec{v}$ auch Eigenvektor von A^2? Und falls ja, zu welchem Eigenwert?
b) Wenn A zudem invertierbar sei, ist dann $\vec{v}$ auch ein Eigenvektor zu A^{-1}? Und falls ja, zu welchem Eigenwert?

a)
Aus $\mathbf{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$ folgt

$$\mathbf{A}^2\,\boldsymbol{v} = \mathbf{A}(\lambda\,\boldsymbol{v}) = \lambda^2\,\boldsymbol{v}\,,$$

sodass also $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ^2 von $\mathbf{A}^2$ ist.

b)
Aus $\mathbf{A}\,\boldsymbol{v} = \lambda\,\boldsymbol{v}$ folgt

$$\boldsymbol{v} = \mathbf{A}^{-1}\,(\mathbf{A}\,\boldsymbol{v}) = \mathbf{A}^{-1}\,(\lambda\,\boldsymbol{v}) = \lambda\,(\mathbf{A}^{-1}\boldsymbol{v})\,,$$

sodass also $\boldsymbol{v}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ^{-1} von $\mathbf{A}^{-1}$ ist.

7. Aussagen über 2 Matrizen in 3D

Gegeben seien die beiden Matrizen

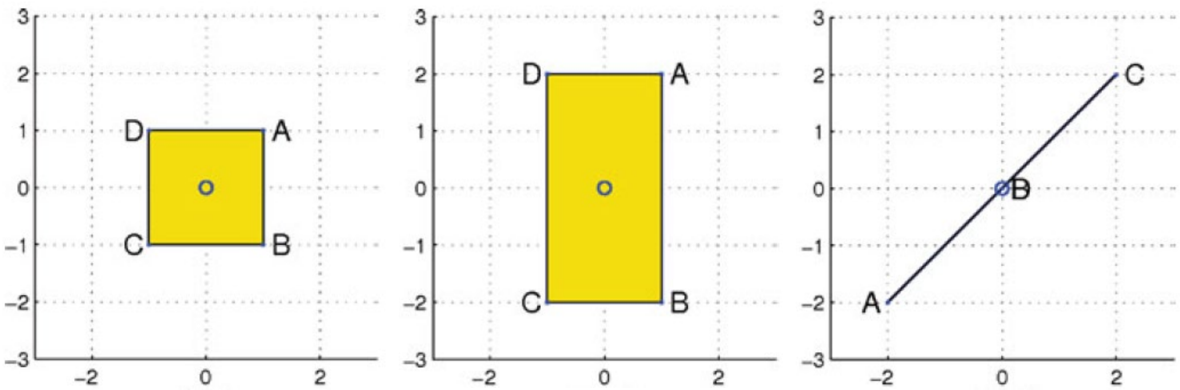
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?

	wahr	falsch
a) Das charakteristische Polynom von A hat den Grad 1.		X
b) A ist orthogonal.	X	
c) Es gilt: spec(A) = spec(B).		X
d) B hat genau 2 verschiedene Eigenwerte.		X
e) $\sqrt{2} \cdot \hat{e}_x$ ist ein Eigenvektor von B.	X	
f) Es gilt: $A^{12} \cdot \hat{e}_y = -B \cdot \hat{e}_z$.	X	

8. Eigenwerte- und vektoren bestimmen

In der folgenden Abbildung zeigt das erste Bild ein aus den Punkten A, B, C, D gebildetes Quadrat um den Ursprung. Die folgenden Abbildungen zeigen Bilder des Quadrats unter zwei verschiedenen linearen Abbildungen $\phi_{1,2}$.
Bestimmen Sie die Eigenwerte und -vektoren der Abbildungen.



1. Das zweite Bild zeigt das Bild des Quadrats unter der Abbildung Φ_1. Wir sehen, dass das Quadrat in Richtung $(0,1)^\top$ um Faktor 2 gestreckt wird, in Richtung $(1,0)^\top$ keine Änderung vorliegt. Das heisst, dass $\Phi_1((0,1)^\top) = 2(0,1)^\top$ und $\Phi_1((1,0)^\top) = (1,0)^\top$. Damit haben wir schon die zwei Eigenwerte $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ von Φ_1 bestimmt und kennen auch Eigenvektoren $(0,1)^\top$ und $(1,0)^\top$.
2. Im dritten Bild sehen wir das Bild des Quadrats unter Φ_2, wo offenbar die Punkte D und B auf den Ursprung abgebildet wurden. Das bedeutet, dass $\Phi_2((-1,1)^\top) = (0,0)^\top$, und wir erhalten den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 0$ mit einem Eigenvektor $(-1,1)^\top$. Die Punkte A und C wurden nicht nur um Faktor 2 gestreckt, sondern auch am Ursprung gespiegelt, also ist $\Phi_2((1,1)^\top) = -2(1,1)^\top$, und wir erhalten den zweiten Eigenwert $\lambda_2 = -2$ mit Eigenvektor $(1,1)^\top$. Diese Abbildung ist aber weder eine Projektion, noch eine Spiegelung oder Streckung im klassischen Sinne, doch bezogen auf den Eigenwert 0 hat sie zumindest einen Charakter einer Projektion auf die Gerade $G:\ x_1 - x_2 = 0$.

9. Unternehmen

Ein Unternehmen produziert in der Periode t drei Güter in den Quantitäten x_t, y_t und z_t, die in der Folgeperiode t + 1 teilweise als Rohstoffe wieder verwendet werden. Es gilt der Zusammenhang

$$\begin{pmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \\ z_{t+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1/2 & 0 \\ b & 1 & c \\ 0 & c & 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Die Matrix A besitzt den Eigenwert $\lambda = 3/2$ und den zugehörigen Eigenvektor $\begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $u > 0$.

a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c, der Matrix A.

b) Interpretieren Sie den Eigenwert λ und den Eigenvektor $\begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix}$ bezogen auf die Aufgabenstellung, wenn ein gleichmässiger Wachstumsprozess unterstellt wird.

c) Die Gesamtoutput für die 3 Güter im Zeitpunkt t beträgt 200 Einheiten. Wie verteilen sich diese Einheiten bei Unterstellung eines gleichförmigen Wachstumsprozesses auf x_t, y_t und z_t? Geben Sie die Anzahl der zu produzierenden Güter für die Perioden t +1 und t + 2 an, wenn ein gleichmässiger Wachstumsprozess unterstellt wird.

a)
Einsetzen des Eigenwerts und -vektors:

$$\begin{pmatrix} a-\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ b & 1-\frac{3}{2} & c \\ 0 & c & \frac{3}{4}-\frac{3}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ & \left(a-\tfrac{3}{2}\right)u + \tfrac{1}{2}u + 0 = 0 \Rightarrow a - \tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = 1 \\ & bu + \left(1-\tfrac{3}{2}\right)u + c\cdot 0 = 0 \Rightarrow b - \tfrac{1}{2} = 0 \Rightarrow b = \tfrac{1}{2} \\ & 0\cdot u + cu - \tfrac{3}{4}\cdot 0 = 0 \Rightarrow c = 0 \end{aligned}$$

b)
$\lambda = \frac{3}{2} = 1.5$ bedeutet gleichmäßiges Wachstum der Produktion der 3 Güter in einer Zeitperiode um 50 %.

Wieso x^T?

$\boldsymbol{x}^T = (u, u, 0)$: Das gleichmäßige Wachstum um 50 % wird erreicht, falls die Produktionsmengen der Güter 1,2 identisch sind und Gut 3 nicht produziert wird.

c)
Gesamtproduktion $= 200 = u + u \Rightarrow u = 100$

$\Rightarrow$ Produktion in t: $\begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 0 \end{pmatrix}$, in $t+1$: $\begin{pmatrix} 150 \\ 150 \\ 0 \end{pmatrix}$, in $t+2$: $\begin{pmatrix} 225 \\ 225 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fachhochschule Graubünden
University of Applied Sciences

Übungblatt LA 8

Computational and Data Science BSc FS 2023

Lösungen

Analysis und Lineare Algebra 2

1. Aussagen über Eigenwerte und Eigenvektoren

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Jede *quadratische Matrix* hat mindestens einen *reellen Eigenwert.*	○	●
b) Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ zwei *Eigenvektoren* einer *Matrix*, dann gilt dies auch für $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{w}$.	○	●
c) Sind $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ zwei *Eigenvektoren* einer *Matrix* zum gleichen *Eigenwert* λ, dann gilt dies auch für $\mathbf{u} := \mathbf{v} + \mathbf{w}$.	●	○
d) Eine *Matrix* $A \in \mathbb{M}(3, 3, \mathbb{R})$ hat maximal drei verschiedene *Eigenwerte.*	●	○
e) Gilt $\operatorname{spec}(A) = \{0\}$, dann gilt $\operatorname{tr}(A) = 0$.	○	●
f) Gilt $\operatorname{spec}(A) \ni 0$, dann gilt $\det(A) = 0$.	●	○

2. Charakteristisches Polynom in 2D

Wir betrachten eine *Matrix* $A \in \mathbb{M}(2, 2, \mathbb{R})$ mit *charakteristischem Polynom* $p_A(\lambda)$.

a) Es gilt

$$\begin{aligned}\underline{\underline{p_A(\lambda)}} &= \det(\lambda \cdot \mathbb{1} - A) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} {A^1}_1 & {A^1}_2 \\ {A^2}_1 & {A^2}_2 \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda - {A^1}_1 & -{A^1}_2 \\ -{A^2}_1 & \lambda - {A^2}_2 \end{bmatrix}\right) \\ &= \left(\lambda - {A^1}_1\right) \cdot \left(\lambda - {A^2}_2\right) - \left(-{A^2}_1\right) \cdot \left(-{A^1}_2\right) \\ &= \lambda^2 - {A^1}_1 \cdot \lambda - \lambda \cdot {A^2}_2 + {A^1}_1 \cdot {A^2}_2 - {A^2}_1 \cdot {A^1}_2 \\ &= \lambda^2 - \left({A^1}_1 + {A^2}_2\right) \cdot \lambda + {A^1}_1 \cdot {A^2}_2 - {A^2}_1 \cdot {A^1}_2 \\ &= \underline{\underline{\lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A).}} \end{aligned} \tag{1}$$

b) Aus (1) erhalten wir für p_A die *Diskriminante*

$$\underline{\underline{D_A}} = \operatorname{tr}^2(A) - 4 \cdot 1 \cdot \det(A) = \underline{\underline{\operatorname{tr}^2(A) - 4 \cdot \det(A).}} \tag{2}$$

3. Eigenwerte und Eigenvektoren der Standard-Matrizen in 2D

Wir betrachten die *Standard-Matrizen* $\mathbb{1}$, $\mathbb{i}$, P, Z_a, P_x, P_y, S_x und S_y in 2D.

a) Die *Matrix* $\mathbb{1}$ beschreibt die *Identität* auf $\mathbb{R}^2$, die jeden *Vektor* auf sich selber abbildet. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(\mathbb{1}) = \{1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(\mathbb{1}) = \mathbb{R}^2.}} \tag{3}$$

Die *Matrix* $\mathbb{i}$ beschreibt die *Drehung* um den *Ursprung* um den *Winkel* $\pi/2$. Diese Operation kann für keinen von Null verschiedenen *Vektor* als *Multiplikation* mit einer *reellen Zahl* aufgefasst werden. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(\mathbb{i}) = \varnothing.}} \tag{4}$$

Die *Matrix* P beschreibt die *Punktspiegelung* am *Ursprung*. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P) = \{-1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1(P) = \mathbb{R}^2.}} \tag{5}$$

Die *Matrix* Z_a beschreibt die *Streckung* am *Ursprung* um den *Faktor* $a \in \mathbb{R}$. Dies entspricht bei allen *Vektoren* in $\mathbb{R}^2$ genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* a. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}\big(Z_a\big) = \{a\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(Z_a\big) = \mathbb{R}^2.}} \tag{6}$$

Die *Matrix* P_x beschreibt die *Projektion* auf die x-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 0, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}\big(P_x\big) = \{0,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(P_x\big) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2\big(P_x\big) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}} \tag{7}$$

Die *Matrix* P_y beschreibt die *Projektion* auf die y-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 0, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}\big(P_y\big) = \{0,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(P_y\big) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2\big(P_y\big) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}.}} \tag{8}$$

Die *Matrix* S_x beschreibt die *Spiegelung* an der x-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}\big(S_x\big) = \{-1,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(S_x\big) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2\big(S_x\big) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}} \tag{9}$$

Die *Matrix* S_y beschreibt die *Spiegelung* an der y-Achse. Bei allen *Vektoren parallel* zur x-Achse entspricht dies genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* -1, während dies bei allen *Vektoren parallel* zur y-Achse genau der *Multiplikation* mit der *reellen Zahl* 1 entspricht. Demnach gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}\big(S_y\big) = \{-1,1\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_1\big(S_y\big) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2\big(S_y\big) = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}.}} \tag{10}$$

b) Wir berechnen jeweils das *charakteristische Polynom*, die *reellen Eigenwerte* und die *reellen Eigenvektoren* der *Standard-Matrizen.* Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von $\mathbb{1}$ sind

$$\operatorname{tr}(\mathbb{1}) = 1 + 1 = 2 \tag{11}$$

$$\det(\mathbb{1}) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1 \tag{12}$$

$$\underline{\underline{p_{\mathbb{1}}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbb{1}) \cdot \lambda + \det(\mathbb{1}) = \underline{\underline{\lambda^2 - 2\,\lambda + 1.}} \tag{13}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{\mathbb{1}}(\lambda) = \lambda^2 - 2\,\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \tag{14}$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = 1. \tag{15}$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von $\mathbb{1}$, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(\mathbb{1}) = \{1\}.}} \tag{16}$$

Wir schreiben das LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* in einem Gauss-*Schema* und wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{cc} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}. \tag{17}$$

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1(\mathbb{1})}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}} \tag{18}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von $\mathbb{i}$ sind

$$\operatorname{tr}(\mathbb{i}) = 0 + 0 = 0 \tag{19}$$

$$\det(\mathbb{i}) = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 0 + 1 = 1 \tag{20}$$

$$\underline{\underline{p_{\mathbb{i}}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(\mathbb{i}) \cdot \lambda + \det(\mathbb{i}) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + 1 = \underline{\underline{\lambda^2 + 1.}} \tag{21}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{\mathbb{i}}(\lambda) = \lambda^2 + 1 \tag{22}$$

und hat offensichtlich keine *reellen Lösungen.* Es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(\mathbb{i}) = \varnothing.}} \tag{23}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von P sind

$$\operatorname{tr}(P) = -1 - 1 = -2 \tag{24}$$

$$\det(P) = (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = 1 - 0 = 1 \tag{25}$$

$$\underline{\underline{p_P(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}(P) \cdot \lambda + \det(P) = \underline{\underline{\lambda^2 + 2\,\lambda + 1.}} \tag{26}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_P(\lambda) = \lambda^2 + 2\,\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 \tag{27}$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = -1. \tag{28}$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von P, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}(P) = \{-1\}.}} \tag{29}$$

Wir schreiben das LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* in einem GAUSS-*Schema* und wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{rr} -1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & -1-(-1) \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}. \tag{30}$$

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1(P)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}} \tag{31}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von Z_a sind

$$\mathrm{tr}\big(Z_a\big) = a + a = 2a \tag{32}$$

$$\det\big(Z_a\big) = a \cdot a - 0 \cdot 0 = a^2 - 0 = a^2 \tag{33}$$

$$\underline{\underline{p_{Z_a}(\lambda)}} = \lambda^2 - \mathrm{tr}\big(Z_a\big) \cdot \lambda + \det\big(Z_a\big) = \underline{\underline{\lambda^2 - 2a\,\lambda + a^2.}} \tag{34}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{Z_a}(\lambda) = \lambda^2 - 2a\,\lambda + a^2 = (\lambda - a)^2 \tag{35}$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = a. \tag{36}$$

Dies ist gerade der *reelle Eigenwert* von Z_a, es ist also

$$\underline{\underline{\mathrm{spec}\big(Z_a\big) = \{a\}.}} \tag{37}$$

Wir schreiben das LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* in einem GAUSS-*Schema* und wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{cc} a-a & 0-0 \\ 0-0 & a-a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{array}}. \tag{38}$$

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1\big(Z_a\big)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \underline{\underline{\mathbb{R}^2.}} \tag{39}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von P_x sind

$$\operatorname{tr}(P_x) = 1 + 0 = 1 \tag{40}$$

$$\det(P_x) = 1 \cdot 0 - 0 \cdot 0 = 0 - 0 = 0 \tag{41}$$

$$\underline{\underline{p_{P_x}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(P_x) \cdot \lambda + \det(P_x) = \lambda^2 - 1 \cdot \lambda + 0 = \underline{\underline{\lambda^2 - \lambda.}} \tag{42}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{P_x}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1) \tag{43}$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1. \tag{44}$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von P_x, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}\big(P_x\big) = \{0, 1\}.}} \tag{45}$$

Wir schreiben die LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* jeweils in einem Gauss-*Schema* und wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1{:}\ \boxed{\begin{array}{cc} 0-1 & 0-0 \\ 0-0 & 0-0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \end{array}} \tag{46}$$

$$E_2{:}\ \boxed{\begin{array}{cc} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & [1] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & [1] \end{array}}\,. \tag{47}$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1\big(P_x\big)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}} \tag{48}$$

$$\underline{\underline{E_2\big(P_x\big)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}} \tag{49}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von P_y sind

$$\operatorname{tr}(P_y) = 0 + 1 = 1 \tag{50}$$

$$\det(P_y) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0 - 0 = 0 \tag{51}$$

$$\underline{\underline{p_{P_y}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(P_y) \cdot \lambda + \det(P_y) = \lambda^2 - 1 \cdot \lambda + 0 = \underline{\underline{\lambda^2 - \lambda.}} \tag{52}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{P_y}(\lambda) = \lambda^2 - \lambda = \lambda \cdot (\lambda - 1) \tag{53}$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1. \tag{54}$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von P_y, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(P_y) = \{0, 1\}.}} \tag{55}$$

Wir schreiben die LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* jeweils in einem Gauss-*Schema* und wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{cc} 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 0-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & [1] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & [1] \end{array}} \tag{56}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{array}{cc} 1-0 & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \end{array}}. \tag{57}$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1(P_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \tag{58}$$

$$\underline{\underline{E_2(P_y)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}.}} \tag{59}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von S_x sind

$$\operatorname{tr}(S_x) = 1 - 1 = 0 \tag{60}$$

$$\det(S_x) = 1 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 = -1 - 0 = -1 \tag{61}$$

$$\underline{\underline{p_{S_x}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(S_x) \cdot \lambda + \det(S_x) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + (-1) = \underline{\underline{\lambda^2 - 1.}} \tag{62}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{S_x}(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) \tag{63}$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1. \tag{64}$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von S_x, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(S_x) = \{-1, 1\}.}} \tag{65}$$

Wir schreiben die LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* jeweils in einem Gauss-*Schema* und wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{cc} -1-1 & 0-0 \\ 0-0 & -1-(-1) \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [-2] & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \end{array}} \tag{66}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{array}{cc} 1-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-(-1) \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & [2] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & [1] \end{array}}. \tag{67}$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1\big(S_x\big)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}}} \tag{68}$$

$$\underline{\underline{E_2\big(S_x\big)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}.}} \tag{69}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von S_y sind

$$\operatorname{tr}(S_y) = -1 + 1 = 0 \tag{70}$$

$$\det(S_y) = (-1)\cdot 1 - 0\cdot 0 = -1 - 0 = -1 \tag{71}$$

$$\underline{\underline{p_{S_y}(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(S_y)\cdot\lambda + \det(S_y) = \lambda^2 - 0\cdot\lambda + (-1) = \underline{\underline{\lambda^2 - 1.}} \tag{72}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_{S_y}(\lambda) = \lambda^2 - 1 = (\lambda+1)\cdot(\lambda-1) \tag{73}$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 1. \tag{74}$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von S_y, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}\big(S_y\big) = \{-1, 1\}.}} \tag{75}$$

Wir schreiben die LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* jeweils in einem Gauss-*Schema* und wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{rr} -1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & -1-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & 0 \\ 0 & [-2] \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} 0 & [1] \end{array}} \tag{76}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{array}{rr} 1-(-1) & 0-0 \\ 0-0 & 1-1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [2] & 0 \\ 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 0 \end{array}}. \tag{77}$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1\big(S_y\big)}} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \tag{78}$$

$$\underline{\underline{E_2\big(S_y\big)}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}.}} \tag{79}$$

4. Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen

Wir berechnen jeweils das *charakteristische Polynom*, die *reellen Eigenwerte* und die *reellen Eigenvektoren* der *Matrix.*

a) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{80}$$

Weil *diagonal* ist, sind die *reellen Eigenwerte* gerade die *Diagonalen-Elemente*. Es gilt

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(A) = \{2, 3\}.}} \tag{81}$$

Für das *charakteristische Polynom* von A erhalten wir

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p_A(\lambda)}} &= \big(\lambda - \lambda_1\big) \cdot \big(\lambda - \lambda_2\big) = (\lambda - 2) \cdot (\lambda - 3) = \lambda^2 - 2 \cdot \lambda - 3 \cdot \lambda - 2 \cdot (-3) \\ &= \underline{\underline{\lambda^2 - 5\,\lambda + 6.}} \end{aligned} \tag{82}$$

Die *reellen Eigenräume* von A sind

$$\underline{\underline{E_1 = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_x\}}} \quad \text{und} \quad \underline{\underline{E_2 = \operatorname{span}\{\hat{\mathbf{e}}_y\}.}} \tag{83}$$

b) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}. \tag{84}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von A sind

$$\operatorname{tr}(A) = 1 + 2 = 3 \tag{85}$$

$$\det(A) = 1 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 2 - 2 = 0 \tag{86}$$

$$\underline{\underline{p_A(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = \lambda^2 - 3\,\lambda + 0 = \underline{\underline{\lambda^2 - 3\,\lambda.}} \tag{87}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\,\lambda = \lambda \cdot (\lambda - 3) \tag{88}$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = 3. \tag{89}$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von A, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(A) = \{0, 3\}.}} \tag{90}$$

Wir schreiben die LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* jeweils in einem GAUSS-*Schema* und wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{cc} 0-1 & 0-1 \\ 0-2 & 0-2 \end{array}} \;\Leftrightarrow\; \begin{array}{r} \\ 2 \end{array}\boxed{\begin{array}{cc} [1] & 1 \\ 2 & 2 \end{array}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 1 \\ 0 & 0 \end{array}} \;\Leftrightarrow\; \boxed{\begin{array}{cc} [1] & 1 \end{array}} \tag{91}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{matrix} 3-1 & 0-1 \\ 0-2 & 3-2 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ -1 \end{matrix}\boxed{\begin{matrix} [2] & -1 \\ -2 & 1 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [2] & -1 \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & -\frac{1}{2} \end{matrix}}. \tag{92}$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1}} = \left\{ \begin{bmatrix} -y \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}} \tag{93}$$

$$\underline{\underline{E_2}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot y \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}}}. \tag{94}$$

c) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{95}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von A sind

$$\operatorname{tr}(A) = 0 + 0 = 0 \tag{96}$$

$$\det(A) = 0 \cdot 0 - 2 \cdot 6 = 0 - 12 = -12 \tag{97}$$

$$\underline{\underline{p_A(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda - 12 = \underline{\underline{\lambda^2 - 12.}} \tag{98}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_A(\lambda) = \lambda^2 - 12 = \left(\lambda + \sqrt{12}\right) \cdot \left(\lambda - \sqrt{12}\right) \tag{99}$$

und hat die beiden *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = -\sqrt{12} = -2\sqrt{3} \quad \text{und} \quad \lambda_2 = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}. \tag{100}$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von A, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(A) = \left\{-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right\}.}} \tag{101}$$

Wir schreiben die LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* jeweils in einem GAUSS-*Schema* und wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{matrix} -2\sqrt{3}-0 & 0-6 \\ 0-2 & -2\sqrt{3}-0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \sqrt{3} \end{matrix}\boxed{\begin{matrix} [1] & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 3 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & \sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & \sqrt{3} \end{matrix}} \tag{102}$$

$$E_2\colon \boxed{\begin{matrix} 2\sqrt{3}-0 & 0-6 \\ 0-2 & 2\sqrt{3}-0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{matrix} \\ \sqrt{3} \end{matrix}\boxed{\begin{matrix} [1] & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -3 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & -\sqrt{3} \\ 0 & 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} [1] & -\sqrt{3} \end{matrix}}. \tag{103}$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$\underline{\underline{E_1}} = \left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \cdot y \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}} \tag{104}$$

$$\underline{\underline{E_2}} = \left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{3} \cdot y \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}. \tag{105}$$

d) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}. \tag{106}$$

Die *Spur*, die *Determinante* und das *charakteristische Polynom* von A sind

$$\operatorname{tr}(A) = 0 + 0 = 0 \tag{107}$$

$$\det(A) = 0 \cdot 0 - 2 \cdot (-6) = 0 + 12 = 12 \tag{108}$$

$$\underline{\underline{p_A(\lambda)}} = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A) \cdot \lambda + \det(A) = \lambda^2 - 0 \cdot \lambda + 12 = \underline{\underline{\lambda^2 + 12.}} \tag{109}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_A(\lambda) = \lambda^2 + 12 \tag{110}$$

und hat offensichtlich keine *reellen* Lösungen. Demnach ist

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(A) = \varnothing}} \tag{111}$$

und die *Matrix* A hat $\underline{\underline{\text{keine } \textit{reellen Eigenvektoren.}}}$

e) Wir betrachten die *Matrix*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}. \tag{112}$$

Das *charakteristische Polynom* von A ist

$$\begin{aligned} \underline{\underline{p_A(\lambda)}} = \det(\lambda \cdot \mathbb{1} - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 - 0 & 0 - 0 \\ 0 - 2 & \lambda - 2 & 0 + 1 \\ 0 - 0 & 0 + 3 & \lambda - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 3 & \lambda \end{vmatrix} \\ &= 0 \cdot 0 \cdot 1 + (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot \lambda + (-2) \cdot 3 \cdot 0 - (-2) \cdot 0 \cdot \lambda - 0 \cdot (\lambda - 2) \cdot 0 \\ &\quad - (\lambda - 1) \cdot 3 \cdot 1 = 0 + (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 2) \cdot \lambda + 0 - 0 - 0 - (\lambda - 1) \cdot 3 \\ &= (\lambda - 1) \cdot \big((\lambda - 2) \cdot \lambda - 3\big) = (\lambda - 1) \cdot \big(\lambda^2 - 2\,\lambda - 3\big) = (\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 3) \\ &= \underline{\underline{(\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 3).}} \end{aligned} \tag{113}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_A(\lambda) = (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 1) \cdot (\lambda - 3) \tag{114}$$

und hat die drei *reellen* Lösungen

$$\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 1 \quad \text{und} \quad \lambda_3 = 3. \tag{115}$$

Dies sind gerade die *reellen Eigenwerte* von A, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(A) = \{-1, 1, 3\}.}} \tag{116}$$

Wir schreiben die LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* jeweils in einem GAUSS-*Schema* und wenden das GAUSS-JORDAN-*Verfahren* an. Es gilt

$$
\begin{aligned}
E_1\colon & \boxed{\begin{array}{rrr} -1-1 & 0-0 & 0-0 \\ 0-2 & -1-2 & 0+1 \\ 0-0 & 0+3 & -1-0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ 2 \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}} \\
& \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 3 \end{array} \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [3] & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [3] & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & -\frac{1}{3} \end{array}}
\end{aligned}
\tag{117}
$$

$$
\begin{aligned}
E_2\colon & \boxed{\begin{array}{rrr} 1-1 & 0-0 & 0-0 \\ 0-2 & 1-2 & 0+1 \\ 0-0 & 0+3 & 1-0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} 1 \\ \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{rrr} [2] & 1 & -1 \\ 0 & [1] & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [2] & 0 & -\frac{4}{3} \\ 0 & [1] & \frac{1}{3} \end{array}} \\
& \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & -\frac{2}{3} \\ 0 & [1] & \frac{1}{3} \end{array}}
\end{aligned}
\tag{118}
$$

$$
\begin{aligned}
E_3\colon & \boxed{\begin{array}{rrr} 3-1 & 0-0 & 0-0 \\ 0-2 & 3-2 & 0+1 \\ 0-0 & 0+3 & 3-0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ -2 \\ \\ \end{array} \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 1 \end{array} \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array}} \\
& \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & 0 \\ 0 & [1] & 1 \end{array}}.
\end{aligned}
\tag{119}
$$

Durch Ablesen aus den *reduzierten Stufenformen* erhalten wir die *reellen Eigenräume*

$$
\underline{\underline{E_1}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \cdot z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{\sqrt{10}}{10} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}} \tag{120}
$$

$$
\underline{\underline{E_2}} = \left\{ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \cdot z \\ -\frac{1}{3} \cdot z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{\sqrt{14}}{14} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}}} \tag{121}
$$

$$
\underline{\underline{E_3}} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{span}\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span}\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}}}. \tag{122}
$$

f) Wir betrachten die *Matrix*

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{123}
$$

Das *charakteristische Polynom* von A ist

$$\underline{\underline{p_A(\lambda)}} = \det(\lambda \cdot \mathbb{1} - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 0 & 0 - 1 & 0 - 0 \\ 0 - 0 & \lambda - 0 & 0 - 1 \\ 0 - 1 & 0 - 0 & \lambda - 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix}$$
$$= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) + \lambda \cdot \lambda \cdot \lambda + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot \lambda - (-1) \cdot \lambda \cdot 0 - \lambda \cdot 0 \cdot (-1)$$
$$= -1 + \lambda^3 + 0 - 0 - 0 - 0 = \underline{\underline{\lambda^3 - 1.}} \tag{124}$$

Die *charakteristische Gleichung* lautet

$$0 = p_A(\lambda) = \lambda^3 - 1 \tag{125}$$

und hat die *reelle* Lösung

$$\lambda_1 = 1. \tag{126}$$

Diese ist gerade der *reelle Eigenwert* von A, es ist also

$$\underline{\underline{\operatorname{spec}(A) = \{1\}.}} \tag{127}$$

Wir schreiben das LGLS zur Bestimmung der zugehörigen *reellen Eigenvektoren* in einem Gauss-*Schema* und wenden das Gauss-Jordan-*Verfahren* an. Es gilt

$$E_1\colon \boxed{\begin{array}{ccc} 1-0 & 0-1 & 0-0 \\ 0-0 & 1-0 & 0-1 \\ 0-1 & 0-0 & 1-0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{r} \\ \\ 1 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} [1] & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}}$$
$$\Leftrightarrow \begin{array}{r} -1 \\ \\ 1 \end{array}\boxed{\begin{array}{rrr} [1] & -1 & 0 \\ 0 & [1] & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & -1 \\ 0 & [1] & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{rrr} [1] & 0 & -1 \\ 0 & [1] & -1 \end{array}}. \tag{128}$$

Durch Ablesen aus der *reduzierten Stufenform* erhalten wir den *reellen Eigenraum*

$$\underline{\underline{E_1}} = \left\{ \begin{bmatrix} z \\ z \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \right\} = \operatorname{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} = \underline{\underline{\operatorname{span} \left\{ \frac{\sqrt{3}}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}}}. \tag{129}$$

5. Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen mit Python/Numpy

Wir berechnen die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* aus Aufgabe 4 mit Python/Numpy. Dazu implementieren wir den folgendne Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```python
# Python initialisieren:
import numpy as np;
# Parameter:
A=np.array([...]);
# Berechnungen:
[S,E]=np.linalg.eig(A);
# Ausgabe:
print(f"S = {S}");
print(f"E = \n{E}");
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[2,0],[0,3]]);
```

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[1,1],[2,2]]);
```

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[0,6],[2,0]]);
```

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[0,-6],[2,0]]);
```

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[1,0,0],[2,2,-1],[0,-3,0]]);
```

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=np.array([[0,1,0],[0,0,1],[1,0,0]]);
```

6. Eigenwerte und Eigenvektoren berechnen mit Python/Sympy

Wir berechnen die *Eigenwerte* und *Eigenvektoren* aus Aufgabe 4 mit Python/Sympy. Dazu implementieren wir den folgendne Code, den wir für jede Teilaufgabe modifizieren.

```
# Python initialisieren:
import IPython.display as dp;
import sympy as sp;
# Python konfigurieren:
sp.init_printing();
# Parameter:
A=sp.Matrix([...]);
# Berechnungen:
[E,D]=A.diagonalize();
# Ausgabe:
dp.display(D);
dp.display(E);
```

a) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=sp.Matrix([[2,0],[0,3]]);
```

b) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=sp.Matrix([[1,1],[2,2]]);
```

c) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=sp.Matrix([[0,6],[2,0]]);
```

d) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=sp.Matrix([[0,-6],[2,0]]);
```

e) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=sp.Matrix([[1,0,0],[2,2,-1],[0,-3,0]]);
```

f) Wir modifizieren den Code.

```
# Parameter:
A=sp.Matrix([[0,1,0],[0,0,1],[1,0,0]]);
```

7. Eigenvektoren und Symmetrie in 2D

Wir betrachten eine *Matrix* $A \in \mathbb{M}(2, 2, \mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

a) Ist A *schiefsymmetrisch*, dann gibt es ein $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so dass

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}. \tag{130}$$

Spur und *Determinante* von A sind

$$\mathrm{tr}(A) = 0 + 0 = 0 \tag{131}$$

$$\det(A) = 0 \cdot 0 - a \cdot (-a) = 0 + a^2 = a^2. \tag{132}$$

Für die *Diskriminante* des *charakteristischen Polynoms* erhalten wir daraus

$$D_A = \mathrm{tr}^2(A) - 4 \det(A) = 0^2 - 4 \cdot a^2 = -4\,a^2 < 0. \tag{133}$$

Demnach hat das *charakteristische Polynom* keine *reellen Nullstellen* bzw. A keine *reellen Eigenwerte* und damit auch keine *reellen Eigenvektoren*.

b) Ist A *symmetrisch*, dann gibt es $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}. \tag{134}$$

Spur und *Determinante* von A sind

$$\mathrm{tr}(A) = a + c \tag{135}$$

$$\det(A) = a \cdot c - b \cdot b = ac - b^2. \tag{136}$$

Für die *Diskriminante* des *charakteristischen Polynoms* erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} D_A &= \mathrm{tr}^2(A) - 4 \det(A) = (a + c)^2 - 4 \cdot \left(ac - b^2\right) = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac + 4b^2 \\ &= a^2 - 2ac + c^2 + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{137}$$

Wir betrachten die Fälle $D_A = 0$ und $D_A > 0$ getrennt.

Fall 1: $D_A = 0$: In diesem Fall muss gelten

$$b = 0 \wedge c = a. \tag{138}$$

Die *Matrix* A hat also die Form

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = a \cdot \mathbb{1}. \tag{139}$$

Demnach ist jeder *Vektor* in $\mathbb{R}^2$ ein *reeller Eigenvektor* von A zum *reellen Eigenwert* $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Fall 2: $D_A > 0$: In diesem Fall hat das *charakteristische Polynom* von A zwei voneinander verschiedene *reelle Nullstellen* bzw. A zwei voneinander verschiedene *reelle Eigenwerte*, zu denen zwei *linear unabhängige, reelle Eigenvektoren* existieren.

In beiden Fällen existieren zwei *linear unabhängige, reellen Eigenvektoren* von A.

8. Aussagen über zwei Matrizen in 3D

Wir betrachten die *Matrizen*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{140}$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche falsch?	**wahr**	**falsch**
a) Das *charakteristische Polynom* von A hat den *Grad* 1.	○	●
b) A ist *orthogonal*.	●	○
c) Es gilt $\mathrm{spec}(B) = \mathrm{spec}(A)$.	○	●
d) B hat genau zwei verschiedene *Eigenwerte*.	○	●
e) $\sqrt{2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x$ ist ein *Eigenvektor* von B.	●	○
f) Es gilt $A^{12} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y = -B \cdot \hat{\mathbf{e}}_z$.	●	○