第四讲：图像的正交变换

任课教师：寇旗旗

计算机科学与技术学院

问题的提出：

人类视觉所感受到的是在空间域和时间域的信号。但是，往往许多问题在频域中讨论时，有其非常方便分析的一面。

主要内容

4.1 离散傅里叶变换

4.1.1一维离散傅里叶变换

4.1.2一维快速傅里叶变换

4.1.3二维离散傅里叶变换

4.1.4二维离散傅里叶变换的性质

4.1.5离散傅里叶变换在图像处理中的应用

离散傅里叶变换（**Discrete Fourier Transform，DFT**）

4.1.1一维DFT

（1）定义

对于有限长数字序列 $f(x), x=0,1,\cdots N-1$

- 一维DFT定义

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-j\frac{2\pi ux}{N}} \qquad u=0,1,2,\cdots,N-1$$

- 一维IDFT定义 $f(x) \Leftrightarrow F(u)$

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)e^{j\frac{2\pi ux}{N}} \qquad x=0,1,2,\cdots,N-1$$

4.1.1一维DFT

（1）定义

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)W^{ux} \qquad u=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$W=e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

$$f(x)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1} F(u)W^{-ux} \qquad x=0,1,2,\cdots,N-1$$

W因子具有周期性和对称性

e^(ix)=cosx+isinx

$$W^{u\pm rN}=e^{-j\frac{2\pi}{N}(u\pm rN)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}u}\times e^{\mp j2\pi r}=e^{-j\frac{2\pi}{N}u}=W^{u}$$

$$W^{u\pm\frac{N}{2}}=e^{-j\frac{2\pi}{N}\left(u\pm\frac{N}{2}\right)}=e^{-j\frac{2\pi}{N}u}\times e^{\mp j\pi}=-e^{-j\frac{2\pi}{N}u}=-W^{u}$$

合理安排重复出现的相乘运算，减少计算工作量

4.1.1一维DFT

（2）实例

- 一个长为4的数字序列，求其DFT

$$F(u)=\sum_{x=0}^{3} f(x)W^{ux}=f(0)W^{0}+f(1)W^{u}+f(2)W^{2u}+f(3)W^{3u}$$

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} W^{0} & W^{0} & W^{0} & W^{0} \\ W^{0} & W^{1} & W^{2} & W^{3} \\ W^{0} & W^{2} & W^{4} & W^{6} \\ W^{0} & W^{3} & W^{6} & W^{9} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

W的对称性：

$$W^{2}=-W^{0}$$

$$W^{3}=-W^{1}$$

W的周期性：

$$W^{4}=W^{0}$$

$$W^{6}=W^{2}$$

$$W^{9}=W^{1}$$

4.1.1一维DFT

（2）实例

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & -W^0 & -W^1 \\ W^0 & -W^0 & W^0 & -W^0 \\ W^0 & -W^1 & -W^0 & W^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W^1 & -1 & -W^1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -W^1 & -1 & W^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(0)+f(2)+\left[f(1)+f(3)\right] \\ f(0)-f(2)+\left[f(1)-f(3)\right]W^1 \\ f(0)+f(2)-\left[f(1)+f(3)\right] \\ f(0)-f(2)-\left[f(1)-f(3)\right]W^1 \end{pmatrix}$$

4.1.2一维FFT

（1）原理

$$F(u)=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)e^{-\frac{j2\pi ux}{N}}=\sum_{x=0}^{N-1} f(x)W_N^{ux}$$

$$=\sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x)W_N^{2ux}+\sum_{x=0}^{N/2-1} f(2x+1)W_N^{u(2x+1)}$$

$$\underline{\underline{M\triangleq\frac{N}{2}}}\sum_{x=0}^{M-1} f(2x)W_M^{ux}+\sum_{x=0}^{M-1} f(2x+1)W_M^{ux}W_N^{u}$$

$$=F_e(u)+W_N^{u}F_o(u)$$

$$0\le u\le M$$

$$W_{2N}^{k}=W_N^{k/2}$$

（分成奇数项和偶数项之和）

4.1.2一维FFT

（1）原理

$$F(u+M)=F_e(u+M)+W_N^{u+M}F_o(u+M)$$

$$=F_e(u)+W_N^{u+M}F_o(u)$$

周期性

$$F(u+M)=F_e(u+M)+W_N^{u+M}F_o(u+M)$$

$$=F_e(u)+W_N^{u+M}F_o(u)$$

$$M\triangleq\frac{N}{2}$$

$$\therefore F(u+M)=F_e(u)-W_N^{u}F_o(u)$$

4.1.2一维FFT

（1）原理

- 将原函数分为奇数项和偶数项，通过不断的一个奇数一个偶数的相加（减），最终得到需要的结果
- FFT是将复杂的运算变成两个数相加（减）的简单运算的重复。

$$F(u)=F_e(u)+W_N^{u+M}F_o(u)$$

$$F(u+M)=F_e(u)-W_N^{u}F_o(u)$$

4.1.2一维FFT

（2）实例

- 一个长为8的数字序列，利用FFT算法求其DFT

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

偶数区

$$\begin{bmatrix} f_0 \\ f_2 \\ f_4 \\ f_6 \end{bmatrix}$$

偶数区 $\begin{bmatrix} f_0 \\ f_4 \end{bmatrix}$

$$F^{(0)}(0) = f_0 + W_2^0 f_4$$
$$F^{(0)}(1) = f_0 - W_2^0 f_4$$

奇数区 $\begin{bmatrix} f_2 \\ f_6 \end{bmatrix}$

$$F^{(2)}(0) = f_2 + W_2^0 f_6$$
$$F^{(2)}(1) = f_2 - W_2^0 f_6$$

蝶形运算

$$F^{(0)}(0) = F^{(0)}(0) + W_4^0 F^{(2)}(0)$$
$$F^{(0)}(1) = F^{(0)}(1) + W_4^1 F^{(2)}(1)$$
$$F^{(0)}(2) = F^{(0)}(0) - W_4^0 F^{(2)}(0)$$
$$F^{(0)}(3) = F^{(0)}(1) - W_4^1 F^{(2)}(1)$$

奇数区

$$\begin{bmatrix} f_1 \\ f_3 \\ f_5 \\ f_7 \end{bmatrix}$$

偶数区 $\begin{bmatrix} f_1 \\ f_5 \end{bmatrix}$

$$F^{(1)}(0) = f_1 + W_2^0 f_5$$
$$F^{(1)}(1) = f_1 - W_2^0 f_5$$

奇数区 $\begin{bmatrix} f_3 \\ f_7 \end{bmatrix}$

$$F^{(3)}(0) = f_3 + W_2^0 f_7$$
$$F^{(3)}(1) = f_3 - W_2^0 f_7$$

$$F^{(1)}(0) = F^{(1)}(0) + W_4^0 F^{(3)}(0)$$
$$F^{(1)}(1) = F^{(1)}(1) + W_4^1 F^{(3)}(1)$$
$$F^{(1)}(2) = F^{(1)}(0) - W_4^0 F^{(3)}(0)$$
$$F^{(1)}(3) = F^{(1)}(1) - W_4^1 F^{(3)}(1)$$

4.1.2一维FFT

（2）实例

- 一个长为8的数字序列，利用FFT算法求其DFT

$$\begin{aligned}
F^{(0)}(0) &= F^{(0)}(0)+W_4^0F^{(2)}(0)\\
F^{(0)}(1) &= F^{(0)}(1)+W_4^1F^{(2)}(1)\\
F^{(0)}(2) &= F^{(0)}(0)-W_4^0F^{(2)}(0)\\
F^{(0)}(3) &= F^{(0)}(1)-W_4^1F^{(2)}(1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F^{(1)}(0) &= F^{(1)}(0)+W_4^0F^{(3)}(0)\\
F^{(1)}(1) &= F^{(1)}(1)+W_4^1F^{(3)}(1)\\
F^{(1)}(2) &= F^{(1)}(0)-W_4^0F^{(3)}(0)\\
F^{(1)}(3) &= F^{(1)}(1)-W_4^1F^{(3)}(1)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

$$\begin{aligned}
F(0) &= F^{(0)}(0)+W_8^0F^{(1)}(0)\\
F(1) &= F^{(0)}(1)+W_8^1F^{(1)}(1)\\
F(2) &= F^{(0)}(2)+W_8^2F^{(1)}(2)\\
F(3) &= F^{(0)}(3)+W_8^3F^{(1)}(3)\\
F(4) &= F^{(0)}(0)-W_8^0F^{(1)}(0)\\
F(5) &= F^{(0)}(1)-W_8^1F^{(1)}(1)\\
F(6) &= F^{(0)}(2)-W_8^2F^{(1)}(2)\\
F(7) &= F^{(0)}(3)-W_8^3F^{(1)}(3)
\end{aligned}$$

4.1.3二维DFT

（1）定义

- 正变换：

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cdot e^{-j2\pi(\frac{xu}{M}+\frac{yv}{N})}$$

$$f(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)$$

- 反变换：

$$f(x,y)=\frac{1}{MN}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)\cdot e^{j2\pi(\frac{xu}{M}+\frac{yv}{N})}$$

4.1.3二维DFT

（1）定义

$$F(u,v)=R(u,v)+jI(u,v)=\left|F(u,v)\right|e^{j\varphi(u,v)}$$

- 傅里叶谱 $\left|F(u,v)\right|=\sqrt{R^2(u,v)+I^2(u,v)}$
- 相位谱 $\varphi(u,v)=arctan\dfrac{I(u,v)}{R(u,v)}$
- 功率谱 $E(u,v)=\left|F(u,v)\right|^2=R^2(u,v)+I^2(u,v)$

4.1.3二维DFT

（2）例程

- 函数

Y = fft(X)　Y = ifft(X)　Y = fft2(X)　Y = ifft2(X)

Y = fftshift(X)　Y=ifftshift(X)

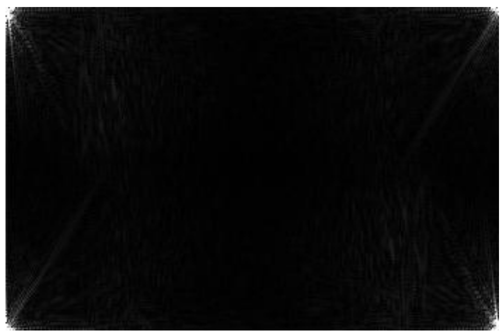
- 程序

```
Image=imread('desert.jpg');
grayI=rgb2gray(Image);
DFTI1=fft2(grayI);
ADFTI1=abs(DFTI1);
top=max(ADFTI1(:));
bottom=min(ADFTI1(:));
ADFTI1=(ADFTI1-bottom)/(top-bottom)*100;
```

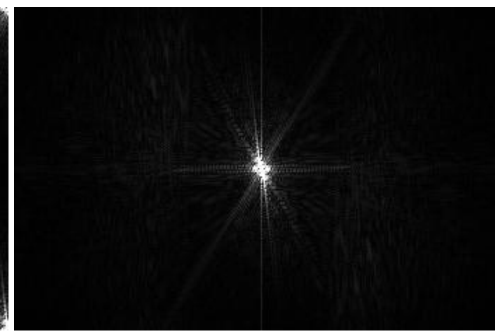
（2）例程

```
ADFTI2=fftshift(ADFTI1);
subplot(131),imshow(Image),title('原图');
subplot(132),imshow(ADFTI1),title('原频谱图');
subplot(133),imshow(ADFTI2),title('移位频谱图');
```

原图



规格化频谱图

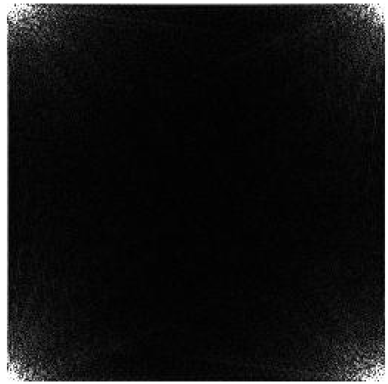


频谱搬移

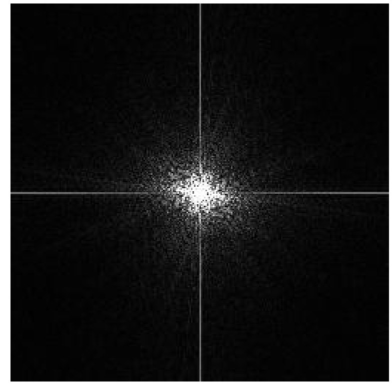
4.1.3二维DFT

（2）例程

原图



规格化频谱图



频谱搬移

频谱搬移图中间部分为低频部分，越靠外边频率越高。图像中的能量主要集中在低频区，高频能量很少或为零。

4.1.4二维DFT的性质

主要内容：

（1）可分性

（2）线性和周期性

（3）几何变换性

共轭对称性　　平移特性

旋转性　　比例变换特性

（4）Parseval定理

（5）卷积定理

4.1.4二维DFT的性质

（1）可分性

- 原理

$$F(u,v)=\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\frac{xu}{M}}e^{-j2\pi\frac{yv}{N}}$$

$$=\sum_{x=0}^{M-1}\left[\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\frac{yv}{N}}\right]e^{-j2\pi\frac{xu}{M}}$$

$$=\sum_{x=0}^{M-1}\left\{\mathscr{F}_y\left[f(x,y)\right]\right\}e^{-j2\pi\frac{xu}{M}}$$

$$=\mathscr{F}_x\left\{\mathscr{F}_y\left[f(x,y)\right]\right\}$$

二维DFT可用一维DFT来实现：先对每一列进行FFT，再对每一行进行FFT；或相反顺序

4.1.4二维DFT的性质

（1）可分性

- 实例

有一幅图像 $f=\begin{bmatrix}1&0&2&1\\0&3&1&2\\3&1&0&2\\2&3&1&0\end{bmatrix}$ 利用FFT算法求其DFT变换

列变换

第一列 $\begin{pmatrix}1\\0\\3\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1+W_2^0\times 3=4\\1-W_2^0\times 3=-2\end{pmatrix}\\\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0+W_2^0\times 2=2\\0-W_2^0\times 2=-2\end{pmatrix}\end{matrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4+W_4^0\times 2\\-2+W_4^1\times(-2)\\4-W_4^0\times 2\\-2-W_4^1\times(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-2+2j\\2\\-2-2j\end{pmatrix}$

4.1.4二维DFT的性质

（1）可分性

- 实例

其他列
$$\begin{pmatrix}0\\3\\1\\3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}7\\-1\\-5\\-1\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}2\\1\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}4\\2\\0\\2\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}1\\2\\2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}5\\-1-2j\\1\\-1+2j\end{pmatrix}$$

列变换后
$$\begin{pmatrix}6 & 7 & 4 & 5\\-2+2j & -1 & 2 & -1-2j\\2 & -5 & 0 & 1\\-2-2j & -1 & 2 & -1+2j\end{pmatrix}$$

4.1.4二维DFT的性质

（1）可分性

- 实例

行变换

$$\begin{pmatrix}6\\7\\4\\5\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}22\\2-2j\\-2\\2+2j\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-2+2j\\-1\\2\\-1-2j\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2\\-2+2j\\2+4j\\-6+2j\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\-5\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2\\2+6j\\6\\2-6j\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}-2-2j\\-1\\2\\-1+2j\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}-2\\-6-2j\\2-4j\\-2-2j\end{pmatrix}$$

最终二维DFT $F(u,v)=\begin{pmatrix}22 & 2-2j & -2 & 2+2j\\-2 & -2+2j & 2+4j & -6+2j\\-2 & 2+6j & 6 & 2-6j\\-2 & -6-2j & 2-4j & -2-2j\end{pmatrix}$

4.1.4二维DFT的性质

（2）线性和周期性

$$\boxed{\mathscr{F}\left[a_1 f_1(x,y)+a_2 f_2(x,y)\right]=a_1\mathscr{F}\left[f_1(x,y)\right]+a_2\mathscr{F}\left[f_2(x,y)\right]}$$

若 $\mathscr{F}\left[f(x,y)\right]=F(u,v) \qquad 0\le x,u<M, 0\le y,v<N$

$$F(u,v)=F(u+M,v)=F(u,v+N)=F(u+M,v+N)$$
$$f(x,y)=f(x+M,y)=f(x,y+N)=f(x+M,y+N)$$

4.1.4二维DFT的性质

（3）几何变换性

- 共轭对称性

若 $\mathscr{F}\left[f(x,y)\right]=F(u,v)$ $\quad \mathscr{F}\left[f(-x,-y)\right]=F(-u,-v)$

则 $F(u,v)=F^{*}(-u,-v)$ $\quad F^{*}(-u,-v)$ 是Fourier变换的共轭函数

- 平移特性

若 $\mathscr{F}\left[f(x,y)\right]=F(u,v)$

$$f(x-x_0,y-y_0)\Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi\left(\frac{x_0u}{M}+\frac{y_0v}{N}\right)}$$

$$f(x,y)e^{j2\pi\left(\frac{xu_0}{M}+\frac{yv_0}{N}\right)}\Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

频谱搬移的原理

4.1.4二维DFT的性质

（3）几何变换性

- 旋转性

空间域函数$f(x, y)$旋转某一角度，变换域此函数的DFT也旋转同样的角度。反之，也成立

若$f(\gamma,\theta) \Leftrightarrow F(k,\phi)$ 则$f(\gamma,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(k,\phi+\theta_0)$

- 比例变换特性

若$\mathscr{F}\left[f(x,y)\right]=F(u,v)$ 则 $f(ax,by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$

4.1.4二维DFT的性质

（3）几何变换性

- 例程

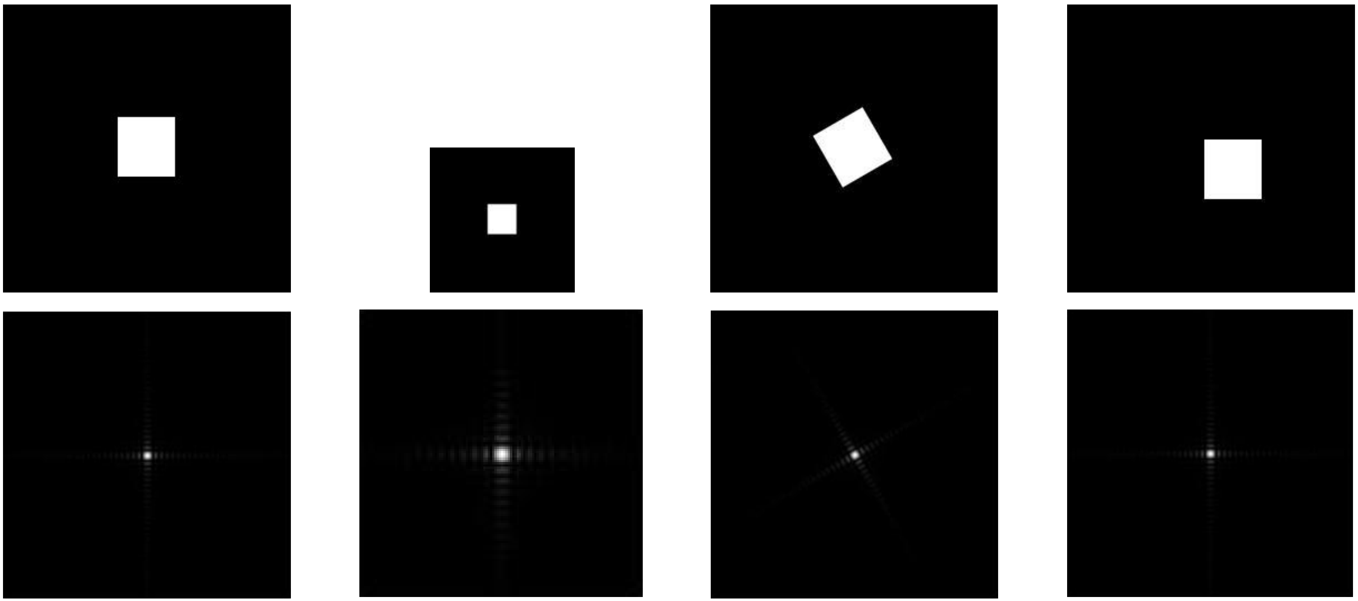
对一幅图像进行几何变换，再进行DFT，验证性质

```
Image=rgb2gray(imread('block.bmp'));
scale=imresize(Image,0.5,'bilinear');
rotate=imrotate(Image,30,'bilinear','crop');
tform=maketform('affine',[1 0 0;0 1 0;20 20 1]);
trans=imtransform(Image,tform,'XData',
                [1 size(Image,2)],'YData',[1,size(Image,1)]);
Originaldft=abs(fftshift(fft2(Image)));
Scaledft=abs(fftshift(fft2(scale)));
Rotatedft=abs(fftshift(fft2(rotate)));
Transdft=abs(fftshift(fft2(trans)));
figure,imshow(Image),title('原图');
…
```

4.1.4二维DFT的性质

（3）几何变换性

- 例程



原图及频谱　缩小及频谱　旋转及频谱　平移及频谱

4.1.4二维DFT的性质

（4）Parseval定理

若 $\mathscr{F}\left[f(x,y)\right]=F(u,v)$

$$\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left|f(x,y)\right|^2=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}\left|F(u,v)\right|^2$$

变换前后不损失能量，仅改变信号的表现形式，变换编码的基本条件。

4.1.4二维DFT的性质

（5）卷积定理

若 $\mathscr{F}\left[f(x,y)\right]=F(u,v)$ $\mathscr{F}\left[g(x,y)\right]=G(u,v)$

$$f(x,y)*g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)\cdot G(u,v)$$

$$f(x,y)\cdot g(x,y)\Leftrightarrow F(u,v)*G(u,v)$$

4.1.5DFT在图像处理中的应用

（1）描述图像信息

- 傅立叶描绘子
  - 描绘子：表征图像特征的一系列符号，
  - 描绘子的几何变换不变性：图像内容不变，仅产生几何变换，描绘子唯一。
  - 闭合区域边界上的点列用复数序列表示：

$$z(n)=x(n)+iy(n) \qquad n=0,1,\cdots,N-1$$

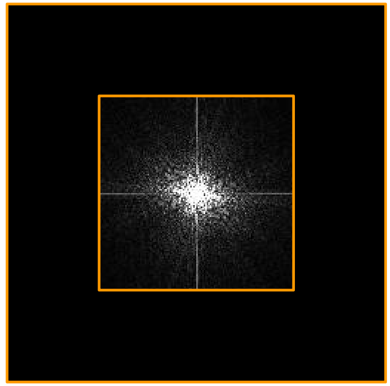
$z(n)$的DFT系数$Z(k)$ 称为傅立叶描绘子。

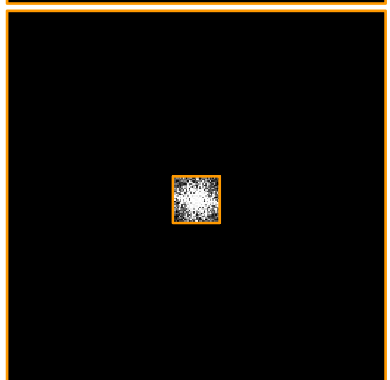
  - $Z(k)$系数幅值具有旋转不变性和平移不变性，相位信息具有缩放不变性。

4.1.5DFT在图像处理中的应用

（2）在图像滤波中的应用

- 能量聚集在中间：低频部分
- 低通滤波

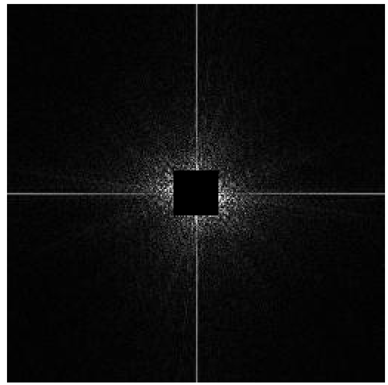


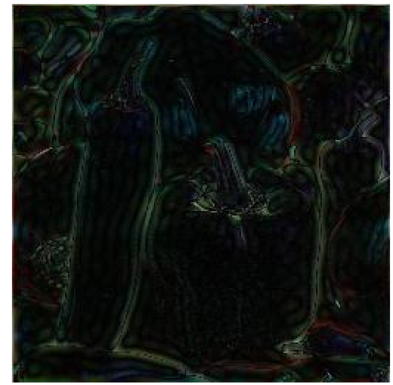


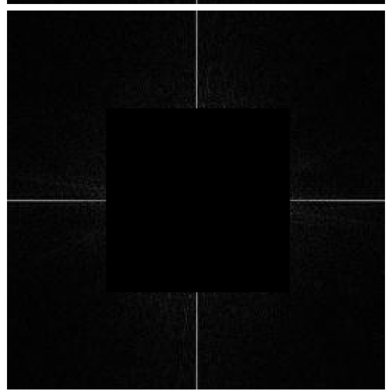
4.1.5DFT在图像处理中的应用

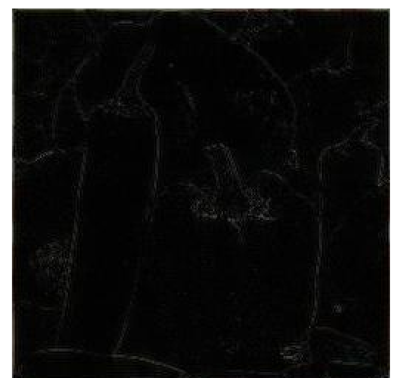
（2）在图像滤波中的应用

- 能量聚集在中间：低频部分
- 高通滤波









4.1.5DFT在图像处理中的应用

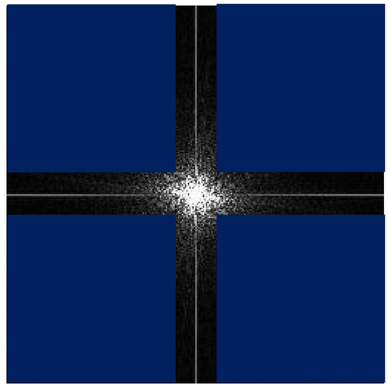
（3）在图像压缩中的应用

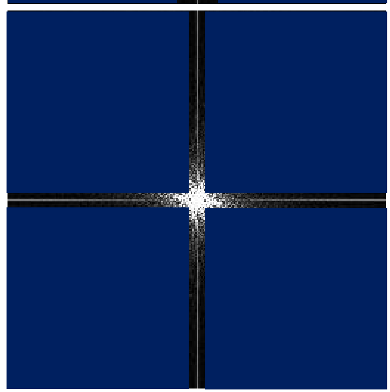
- 由Parseval定理知，变换前后能量不发生损失，只是改变了信号的表现形式，DFT变换系数表现的是各个频率点上的幅值；
- 高频反映细节、低频反映景物概貌，往往认为可将高频系数置为0，降低数据量；
- 同时由于人眼的惰性，合理地设置高频系数为0，图像质量一定范围内的降低不会被人眼察觉到。

4.1.5DFT在图像处理中的应用

（3）在图像压缩中的应用

- 能量聚集在中间：低频部分





（4）卷积性质的应用

- 抽象来看，图像处理算法可以认为是图像信息经过了滤波器的滤波（如：平滑滤波、锐化滤波等）。
- 如果滤波器的结构比较复杂时，直接进行时域中的卷积运算是不可思议的。

$$f_g = g * f$$

$$F_g(u,v) = G(u,v) \cdot F(u,v)$$

$$f_g = IDFT\left(F_g\right)$$

4.1.5DFT在图像处理中的应用

- 例程

打开一幅图像，对其进行DFT变换及频域滤波

```
Image=imread('desert.jpg');
grayIn=rgb2gray(Image);
[h,w]=size(grayIn);
DFTI=fftshift(fft2(grayIn));
cf=30;
HDFTI=DFTI;
HDFTI(h/2-cf:h/2+cf,w/2-cf:w/2+cf)=0;
grayOut1=uint8(abs(ifft2(ifftshift(HDFTI))));
subplot(131),imshow(Image),title('原图');
subplot(132),imshow(grayOut1),title('高通滤波');
```

4.1.5DFT在图像处理中的应用

- 例程

```
LDFTI=zeros(h,w);
LDFTI(h/2-cf:h/2+cf,w/2-cf:w/2+cf)=
                          DFTI(h/2-cf:h/2+cf,w/2-cf:w/2+cf);
grayOut2=uint8(abs(ifft2(ifftshift(LDFTI))));
subplot(133),imshow(grayOut2),title('低通滤波');
```

原图

高通滤波

低通滤波

4.2 离散余弦变换

问题的提出：

Fourier变换的一个最大的问题是：它的参数都是复数，在数据的描述上相当于实数的两倍。为此，我们希望有一种能够达到相同功能但数据量又不大的变换。

在此期望下，产生了离散余弦变换(Discrete Cosine Transform-简称DCT)变换。

4.2 离散余弦变换

4.2.1一维离散余弦变换

4.2.2二维离散余弦变换

4.2.3离散余弦变换在图像处理中的应用

离散余弦变换（Discrete Cosine Transform，DCT）

4.2.1一维DCT

（1）定义

对于有限长数字序列$f(x), x=0,1,\cdots N-1$

- 一维DCT变换定义

$$F(u)=C(u)\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{x=0}^{N-1}f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad u=0,1,\cdots,N-1$$

- 一维IDCT变换定义

$$f(x)=\sqrt{\frac{2}{N}}\sum_{u=0}^{N-1}C(u)F(u)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N} \quad x=0,1,\cdots,N-1$$

其中$C(u)=\begin{cases}\frac{1}{\sqrt{2}} & u=0\\ 1 & u=1,2,\ldots,N-1\end{cases}$

4.2.1一维DCT

（2）实例

- 一个长为4的数字序列，求其DCT

$$F(u)=C(u)\sqrt{\frac{2}{4}}\sum_{x=0}^{3}f(x)\cos\frac{(2x+1)u\pi}{8}\qquad u=0,1,2,3$$

$$\begin{cases}
F(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sum\limits_{x=0}^{3}f(x)\\
F(1)=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\sum\limits_{x=0}^{3}f(x)\cos\dfrac{(2x+1)\pi}{8}\\
F(2)=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\sum\limits_{x=0}^{3}f(x)\cos\dfrac{2(2x+1)\pi}{8}\\
F(3)=\sqrt{\dfrac{1}{2}}\sum\limits_{x=0}^{3}f(x)\cos\dfrac{3(2x+1)\pi}{8}
\end{cases}$$

$$\begin{pmatrix}F(0)\\F(1)\\F(2)\\F(3)\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos\frac{\pi}{8}&\cos\frac{3\pi}{8}&\cos\frac{5\pi}{8}&\cos\frac{7\pi}{8}\\ \cos\frac{2\pi}{8}&\cos\frac{6\pi}{8}&\cos\frac{10\pi}{8}&\cos\frac{14\pi}{8}\\ \cos\frac{3\pi}{8}&\cos\frac{9\pi}{8}&\cos\frac{15\pi}{8}&\cos\frac{21\pi}{8}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(0)\\f(1)\\f(2)\\f(3)\end{pmatrix}$$

（2）实例

■ 一维DCT变换的矩阵形式表示

$$F = Af$$

$$A=\sqrt{\frac{2}{N}}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{1}{2N}\pi & \cos\frac{3}{2N}\pi & \cdots & \cos\frac{(2N-1)}{2N}\pi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\frac{N-1}{2N}\pi & \cos\frac{3(N-1)}{2N}\pi & \cdots & \cos\frac{(2N-1)(N-1)}{2N}\pi \end{pmatrix}$$

4.2.2二维DCT

（1）定义

$$F(u,v)=\frac{2}{\sqrt{MN}}C(u)C(v)\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2M}\right]\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]$$

$$f(x,y)=\frac{2}{\sqrt{MN}}\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}C(u)C(v)F(u,v)\cos\left[\frac{\pi(2x+1)u}{2M}\right]\cos\left[\frac{\pi(2y+1)v}{2N}\right]$$

$$x,u=0,1,2,\cdots,M-1$$

$$y,v=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$C(u),C(v)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2}} & u,v=0\\ 1 & u,v=1,2,\ldots,N-1\end{cases}$$

4.2.2二维DCT

（1）定义

- 二维DCT变换的矩阵形式表示

$$F = AfA^T \qquad f = A^T FA$$

$$A = \sqrt{\frac{2}{N}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \cdots & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\frac{1}{2N}\pi & \cos\frac{3}{2N}\pi & \cdots & \cos\frac{(2N-1)}{2N}\pi \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos\frac{N-1}{2N}\pi & \cos\frac{3(N-1)}{2N}\pi & \cdots & \cos\frac{(2N-1)(N-1)}{2N}\pi \end{pmatrix}$$

4.2.2二维DCT

（2）实例

- 一幅图像 $f(x,y)=\begin{pmatrix}0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}$ 用矩阵算法求其DCT

$$A=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \cos\frac{\pi}{8}&\cos\frac{3\pi}{8}&\cos\frac{5\pi}{8}&\cos\frac{7\pi}{8}\\ \cos\frac{2\pi}{8}&\cos\frac{6\pi}{8}&\cos\frac{10\pi}{8}&\cos\frac{14\pi}{8}\\ \cos\frac{3\pi}{8}&\cos\frac{9\pi}{8}&\cos\frac{15\pi}{8}&\cos\frac{21\pi}{8}\end{pmatrix}$$

幅值大

$$F=\begin{pmatrix}2&-1.848&0&0.764\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

幅值小

4.2.2二维DCT

（3）例程

- 函数

Y = dct(X)　　Y = idct(X)

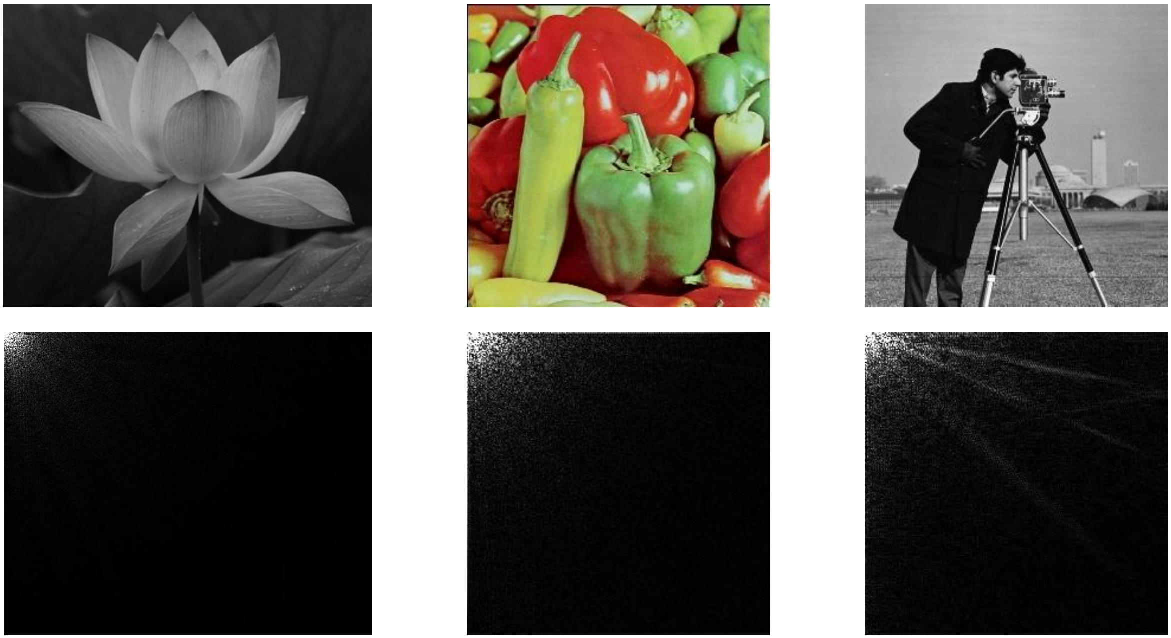
Y = dct2(X)　Y = idct2(X)

- 程序

```
Image=imread('cameraman.jpg');
grayI=rgb2gray(Image);
DCTI=dct2(grayI);
ADCTI=abs(DCTI);
top=max(ADCTI(:));
bottom=min(ADCTI(:));
ADCTI=(ADCTI-bottom)/(top-bottom)*100;
figure,imshow(ADCTI);
```

4.2.2二维DCT

（3）例程



能量主要集中在左上角低频分量处

4.2.3DCT在图像处理中的应用

- DCT具有很强的“能量集中”特性：大多数的能量集中在离散余弦变换后的低频部分。
- DCT在图像处理中主要用于对图像（包括静止图像和运动图像）进行有损数据压缩。如静止图像编码标准JPEG、运动图像编码标准MPEG中都使用了离散余弦变换。

4.2.3DCT在图像处理中的应用

- 例程

  打开一幅图像，对其进行DCT变换，将高频置零并进行反变换

```
Image=imread('desert.jpg');
grayIn=rgb2gray(Image);
DCTI=dct2(grayIn);
cf=60;
FDCTI=zeros(h,w);
FDCTI(1:cf,1:cf)=DCTI(1:cf,1:cf);
grayOut=uint8(abs(idct2(FDCTI)));
subplot(121),imshow(Image),title('原图');
subplot(122),imshow(grayOut),title('压缩重建');
```

4.3 K-L变换

- K-L变换（ Karhunen-Loeve Transform）是建立在统计特性基础上的一种变换，又称为霍特林（Hotelling）变换或主成分分析。
- K-L变换的突出优点是相关性好，是均方误差（MSE，Mean Square Error）意义下的最佳变换，它在数据压缩技术中占有重要地位。

4.3 K-L变换

4. 3. 1K-L变换原理

4. 3. 2图像K-L变换

4.3 K-L变换

K-L变换：对于一个任意维度向量，都可以用一个完备的正交归一向量系来展开。展开之后是一个有无穷多项的无穷级数，如果只选取有限项来表示这一向量，就达到了**降维**的目的。而选取有限项势必会存在误差，选取的项数越多误差会越小，但是项数增加就会影响降维的效果。

如何在这二者之间找到一个平衡？

K-L变换将任意维度向量分解为各个正交向量之和，使每个向量所携带的信息都尽可能多，达到了以最少项数，包含最多信息的目的。在不丢失主要信息的条件下，起到了最好的降维效果。

4.3.1K-L变换原理

（1）K-L展开式

- 展开

设一连续的随机函数 $x(t), T_1 \le t \le T_2$ ，可用已知

的正交函数集 $\{\varphi_j(x), j=1,2,\cdots\}$ 的线性组合展开

$$x(t)=a_1\varphi_1(t)+a_2\varphi_2(t)+\cdots+a_j\varphi_j(t)+\cdots=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\varphi_j(t)$$

$T_1 \le t \le T_2$， a_j为展开式系数

$\varphi_j(t)$:连续正交函数, $\int_{T_1}^{T_2}\varphi_n(t)\cdot\overline{\varphi}_m(t)dt=\begin{cases}1 & m=n\\0 & m\ne n\end{cases}$

4.3.1K-L变换原理

（1）K-L展开式

- 采样

将$x(t)$和$\varphi_j(t)$在$[T_1, T_2]$内等间隔采样n个离散点：

$x(t) \to \{x(1), x(2), \cdots x(n)\}$，$\varphi_j(t) \to \{\varphi_j(1), \varphi_j(2), \cdots \varphi_j(n)\}$，

表示成向量：

$$X = \begin{pmatrix} x(1) & x(2) & \cdots & x(n) \end{pmatrix}^T$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_j(1) & \varphi_j(2) & \cdots & \varphi_j(n) \end{pmatrix}^T \quad j = 1, 2, \cdots, n$$

4.3.1K-L变换原理

（1）K-L展开式

- 近似

$$X=\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j=\Phi A \qquad A=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}^T$$

$$\Phi=\begin{pmatrix}\varphi_1 & \varphi_2 & \cdots & \varphi_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1(1) & \varphi_2(1) & \cdots & \varphi_n(1)\\ \varphi_1(2) & \varphi_2(2) & \cdots & \varphi_n(2)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1(n) & \varphi_2(n) & \cdots & \varphi_n(n)\end{pmatrix}$$

4.3.1K-L变换原理

（2）离散K-L变换

- 原理
  - K-L展开：$X=\sum_{j=1}^{\infty} a_j u_j$

    u_j为确定的完备正交归一向量系
  - 用有限的m项来估计X，即：$\hat{X}=\sum_{j=1}^{m} a_j u_j$
  - 计算均方误差

$$\overline{\varepsilon^2}=E\left[\left(X-\hat{X}\right)^T\left(X-\hat{X}\right)\right]=E\left[\sum_{j=m+1}^{\infty} a_j u_j \cdot \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j u_j\right]$$

$$u_i^T u_j=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad a_j=u_j^T X$$

4.3.1K-L变换原理

（2）离散K-L变换

$$\overline{\varepsilon^2}=E\left[\sum_{j=m+1}^{\infty}a_j^2\right]=E\left[\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j^T XX^T u_j\right]=\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j^T E\left[XX^T\right]u_j=\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j^T\psi u_j$$

- 利用Lagrange乘数法求均方误差取极值时的u

$$h(u_j)=\sum_{j=m+1}^{\infty}u_j^T\psi u_j-\sum_{j=m+1}^{\infty}\lambda\left[u_j^T u_j-1\right]$$

对u_j求导数，得 $(\psi-\lambda_j I)u_j=0, j=m+1,\cdots,\infty$

λ_j为ψ的特征值，u_j为λ_j对应的特征向量，此时：$\overline{\varepsilon^2}=\sum_{j=m+1}^{\infty}\lambda_j$

（2）离散K-L变换

- 选取矩阵ψ的m个最大特征值对应的特征向量来逼近X时，均方误差最小
- 这m个特征向量所组成的正交坐标系称作X所在的n维空间的m维K-L变换坐标系。
- X在K-L坐标系上的展开系数向量A称作**X的K-L变换**

（2）离散K-L变换

- 性质

$$\psi u_j = \lambda_j u_j \qquad \psi U = U D_\lambda \qquad D_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

U为正交矩阵 $\psi = U D_\lambda U^T$

$$X = UA$$

$$\psi = E\left[XX^T\right] = E\left[UAA^TU^T\right] = UE\left[AA^T\right]U^T = UD_\lambda U^T$$

$$E\left[AA^T\right] = D_\lambda$$

4.3.1K-L变换原理

（2）离散K-L变换

- 性质
  - 变换后的向量A的自相关矩阵,是**对角矩阵**,且对角元素就是X的自相关矩阵的特征值
  - 显然，通过**K-L变换，消除了原有向量X的各分量之间的相关性**，即变换后的数据A的各分量之间的信息是相互独立的。

4.3.1K-L变换原理

（2）离散K-L变换

- 产生矩阵
  - 由于总体均值向量常常没有什么意义，常把数据的协方差矩阵作为K-L坐标系的产生矩阵

$$\Sigma = E\left[(X-\mu)(X-\mu)^T\right]$$

4.3.1K-L变换原理

（2）离散K-L变换

- 实例

向量集为 $\left\{\begin{matrix} \omega_1:(0\quad 0\quad 0)^T,(1\quad 0\quad 1)^T,(1\quad 0\quad 0)^T,(1\quad 1\quad 0)^T \\ \omega_2:(0\quad 0\quad 1)^T,(0\quad 1\quad 1)^T,(0\quad 1\quad 0)^T,(1\quad 1\quad 1)^T \end{matrix}\right\}$

采用自相关矩阵作为产生矩阵对其进行K-L变换。

- 自相关矩阵

$$\psi = E\left[xx^T\right] = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} x_i x_i^T$$

$$= \frac{1}{8}\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}\right\} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 2 & 1\\1 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

4.3.1K-L变换原理

（2）离散K-L变换

- 实例
  - 求特征值　令 $|\psi-\lambda I|=0$，即

$$\begin{vmatrix}2-4\lambda & 1 & 1\\ 1 & 2-4\lambda & 1\\ 1 & 1 & 2-4\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-4\lambda & 4\lambda-1 & 0\\ 0 & 1-4\lambda & 4\lambda-1\\ 1 & 1 & 2-4\lambda\end{vmatrix}=(1-4\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 1 & 2-4\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-4\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 2-4\lambda\end{vmatrix}=4(1-4\lambda)^2(1-\lambda)=0$$

$$\lambda_1=1 \quad \lambda_2=1/4 \quad \lambda_3=1/4$$

4.3.1K-L变换原理

（2）离散K-L变换

- 实例
  - 求特征向量

$$\psi-\lambda_1 I=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ x_2=x_3\\ x_3=x_3\end{cases}$$

$$\psi-\lambda_2 I=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow x_3=-\left(x_1+x_2\right)$$

$$u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T \quad u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\end{pmatrix}^T \quad u_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\end{pmatrix}^T$$

（2）离散K-L变换

- 实例
  - 变换矩阵U $\lambda_1 > \lambda_2 = \lambda_3$ $U = (u_1, u_2)$
  - 计算K-L变换 $A = U^T X$

$$\omega_1^* : \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}^T \right\}$$

$$\omega_2^* : \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^T, \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{3}} & 0 \end{pmatrix}^T \right\}$$

4.3.1K-L变换原理

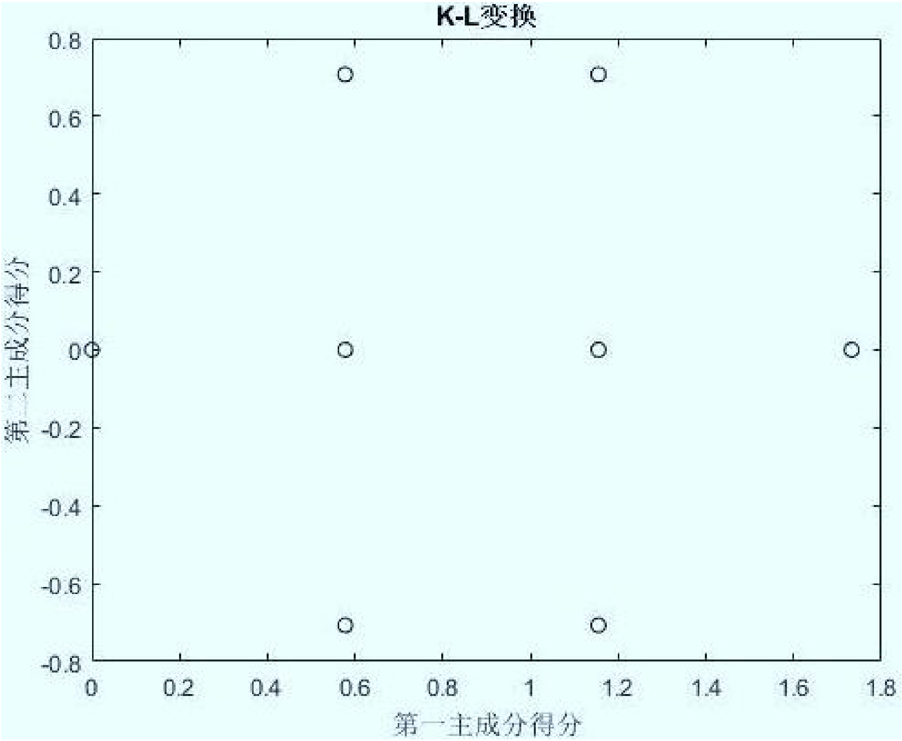
（2）离散K-L变换

- 例程

```
X=[0 0 0;1 0 1;1 0 0;1 1 0;0 0 1;0 1 1;0 1 0;1 1 1]';
[n, N]=size(X);
V=X*X'/N;
[coeff, D]=eigs(V);
[D_sort,index] = sort(diag(D),'descend');
D=D(index,index);
coeff = coeff(:,index);
score=coeff'*X;
figure; plot(score(1,:),score(2,:),'ko'),title('K-L变换');
xlabel('第一主成分得分');ylabel('第二主成分得分');
```

（2）离散K-L变换

- 例程


K-L变换
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
第二主成分得分
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
第一主成分得分

4.3.2图像K-L变换

（1）原理

- 将二维图像采用行堆叠或列堆叠转换为一维处理
  - 设一幅大小为M×N的图像$f(x,y)$，在某个传输通道上传输了L次，由于受到各种因素的随机干扰，接收的图像是一个图像集合：

$$\{f_1(x,y), f_2(x,y), \cdots, f_L(x,y)\}$$

  - 采用行堆叠将每一幅M×N的图像表示为MN维的向量：

$$f_i = \begin{bmatrix} f_i(0,0) \\ f_i(0,1) \\ \vdots \\ f_i(M-1, N-1) \end{bmatrix}$$

4.3.2图像K-L变换

（1）原理

- 定义f向量的协方差矩阵和相应变换核矩阵

$$\Sigma_f = E\left[\left(f-\mu_f\right)\left(f-\mu_f\right)^T\right] \approx \frac{1}{L}\left[\sum_{i=1}^{L} f_i f_i^T\right] - \mu_f \mu_f^T$$

设λ_i和u_i为Σ_f的特征值和特征向量且降序排列

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \cdots > \lambda_{\mathrm{M\times N}}$$

$$U = \left(u_1, u_2, \cdots, u_{M\times N}\right) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{MN1} \\ u_{12} & u_{22} & \cdots & u_{MN2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1MN} & u_{2Mn} & \cdots & u_{MNMN} \end{pmatrix}$$

- 二维K-L变换 $F = U^T\left(f-\mu_f\right)$

4.3.2图像K-L变换

- **在图像压缩中的应用**

- 数字图像压缩编码就是采取各种手段，在保证达到所要求的图像质量的前提下，尽量消除图像信号的冗余信息，减少表示图像所需的比特数。
- K-L变换要根据具体的图像的统计特性(图像的协方差矩阵)来决定它的变换矩阵，这赋予K-L变换最大优点:去相关性好，能将信号在变换域的相关性全部解除。
- K-L变换是最小均方误差(MMSE，Minimum Mean Square Error)意义下的最佳变换。

4.3.2图像K-L变换

在图像压缩中的计算过程

- 首先读取图片信息，将图片信息以像素为单位整合成一个固定大小矩阵。然后以上下两行，左右两列相邻的四个像素为一组，构成一随机向量，随机向量中有四个随机变量，而每一组的四个值为该四个随机变量的一组样本。
- 求该随机向量的协方差矩阵并求取协方差矩阵的特征向量和特征值，通过K-L变换,求出展开式中的系数矩阵,选取特征值最大的一组系数，其余三组舍弃。
- 保留的系数向量与对应的特征向量相乘，还原图片信息。相当于四个像素点用一个带系数的特征向量表示，将图片存贮空间缩小为之前的四分之一。

4.3.2图像K-L变换

在人脸识别中的应用

- 人脸识别分为：人脸检测、人脸跟踪、人脸比对三个部分。在K-L变换中，主要进行人脸检测。
- 在人脸识别中，可以用K-L变换对人脸图像的原始空间进行转换，即构造人脸图像数据集的协方差矩阵,求出协方差矩阵的特征向量,再依据特征值的大小对这些特征向量进行排序，这些特征向量表示特征的一个集合，它们共同表示一个人脸图像。
- 在人脸识别领域，人们常称这些特征向量为特征脸。每一个体人脸图像都可以确切地表示为一组特征脸的线性组合。

4.3.2图像K-L变换

■ 在人脸识别中的计算过程

- 首先构建人脸图片信息库，并进行预处理。
- 在matlab 中使用imresize函数将其尺寸压缩成64×64的RGB彩色图片,随后使用rgb2gray 函数将图片转换为灰度图,并将矩阵数据按行展开,排列一个列向量。
- 做K-L变换后得到系数向量矩阵和正交基。然后对测试图片在相同的正交基下做K-L变换，求得系数向量。
- 最后对比测试图片的系数向量与原信息库中的系数向量矩阵，求距离向量，选取最小的距离所代表的的人脸，即为人脸识别的预测结果。

4.3.2图像K-L变换

（2）实现

由于图像维数MN一般很高，直接求解特征值和特征向量不现实，一般采用奇异值分解的方法

原图

第一主成分重建

4.4 Radon变换

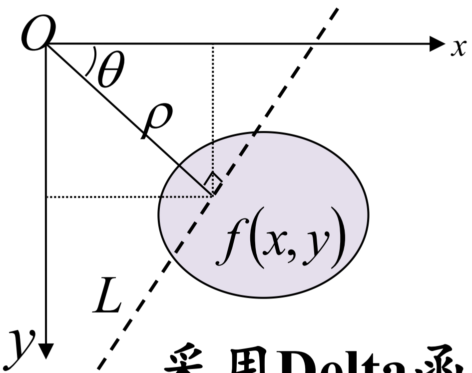
4. 4. 1Radon变换的原理

4. 4. 2Radon变换的实现

4. 4. 3Radon变换的性质

4. 4. 4Radon变换的应用

4.4.1Radon变换的原理



直线L：$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$

将函数*f*(*x*,*y*)沿直线*L*做线积分

$$R(\rho,\theta) = \int_L f(x,y)\,ds$$

采用Delta函数表示直线*L*

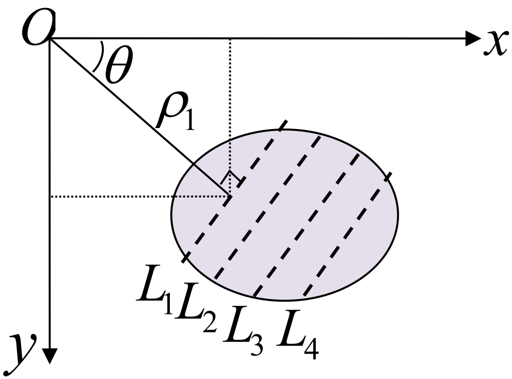
$$\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho) = \begin{cases} 0, & x\cos\theta + y\sin\theta - \rho \neq 0 \\ 1, & x\cos\theta + y\sin\theta - \rho = 0 \end{cases}$$

- **Radon变换对**

$$R(\rho,\theta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\delta(x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)\,dx\,dy$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^{\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial R/\partial\rho}{x\cos\theta + y\sin\theta - \rho}\,d\rho$$

4.4.1Radon变换的原理



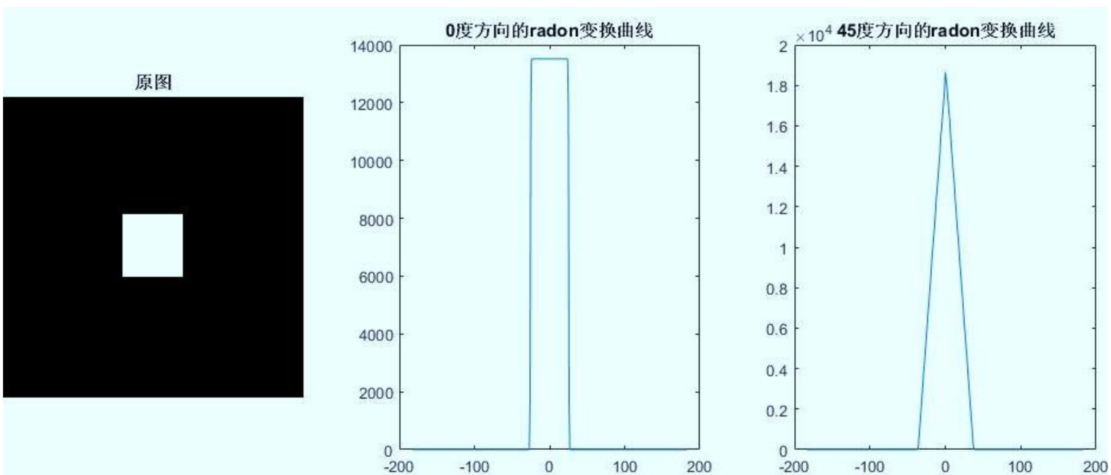
对一幅图像，在某一特定角度下的Radon变换会产生*n*个线积分值，构成一个*n*维的向量，称为$f(x,y)$在角度θ下的投影

Radon变换即*xy*空间向$\rho\theta$空间的投影，$\rho\theta$空间每一点对应*xy*空间一条线

4.4.2Radon变换的实现

- 例程1：对图像进行指定方向上的Radon变换

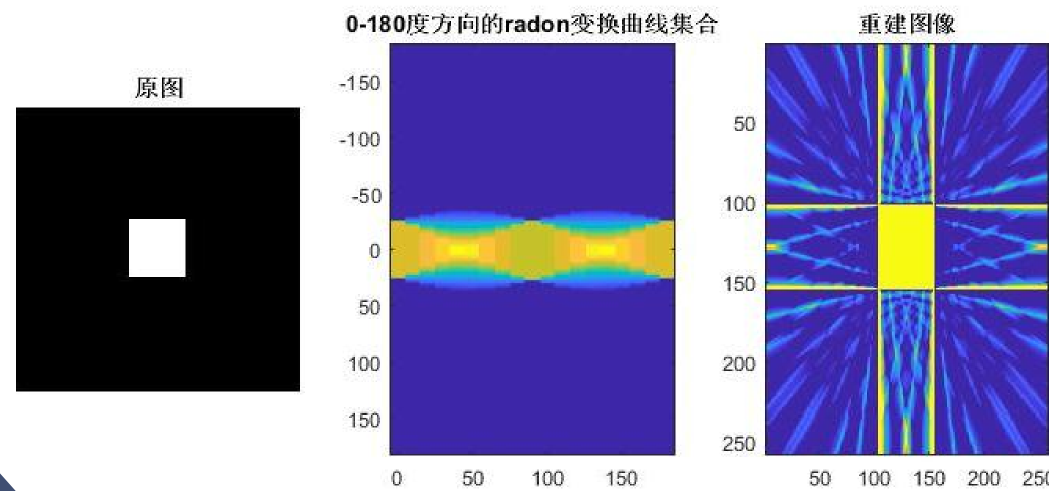
```
Image=rgb2gray(imread('block.bmp'));
[R1,X1]=radon(Image,0);        [R2,X2]=radon(Image,45);
subplot(131),imshow(Image),title('原图');
subplot(132),plot(X1,R1),title('0°方向上的Radon变换');
subplot(133),plot(X2,R2),title('45°方向上的Radon变换');
```



4.4.2Radon变换的实现

- 例程2：对图像进行Radon变换和反变换

```
Image=rgb2gray(imread('block.bmp'));
theta=0:10:180;[R,X]=radon(Image,theta);   result=iradon(R,theta);
subplot(131),imshow(Image),title('原图');
subplot(132),imagesc(theta,X,R),title('radon变换曲线集合');
subplot(133),image(result),title('重建图像');
```



4.4.3Radon变换的性质

- 线性

$$\mathscr{R}\left[a_1 f_1 + a_2 f_2\right] = a_1 \mathscr{R}\left[f_1\right] + a_2 \mathscr{R}\left[f_2\right]$$

- 平移性

$$\mathscr{R}\left[f\left(x-\Delta x, y-\Delta y\right)\right] = R\left(\rho-\Delta\rho, \theta\right) \quad \Delta\rho = \Delta x\, cos\,\theta + \Delta y\, sin\,\theta$$

- 相似性

若 $\mathscr{R}\left[f\left(x, y\right)\right] = R\left(\rho, \cos\theta, sin\,\theta\right)$

$$\mathscr{R}\left[f\left(ax, by\right)\right] = \frac{1}{|ab|} R_f\left(\rho, \frac{\cos\theta}{a}, \frac{sin\,\theta}{b}\right)$$

$(cos\,\theta, sin\,\theta)$ 为 θ 方向上的单位矢量

4.4.3Radon变换的性质

- 微分

原函数求偏微分
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f\left(x + \Delta x / \cos\theta, y\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta x / \cos\theta} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{f\left(x, y + \Delta y / \sin\theta\right) - f\left(x, y\right)}{\Delta y / \sin\theta} \end{cases}$$

进行Radon变换
$$\begin{cases} \mathscr{R}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right] = \cos\theta \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{R\left(\rho + \Delta x, \theta\right) - R\left(\rho, \theta\right)}{\Delta x} \\ \mathscr{R}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] = \sin\theta \lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{R\left(\rho + \Delta y, \theta\right) - R\left(\rho, \theta\right)}{\Delta y} \end{cases}$$

得
$$\begin{cases} \mathscr{R}\left[\dfrac{\partial f}{\partial x}\right] = \cos\theta \dfrac{\partial R\left(\rho, \theta\right)}{\partial \rho} \\ \mathscr{R}\left[\dfrac{\partial f}{\partial y}\right] = \sin\theta \dfrac{\partial R\left(\rho, \theta\right)}{\partial \rho} \end{cases}$$

4.4.4Radon变换的应用

- 可用来检测图像中的线段

  图像中高灰度值的线段在$\rho\theta$空间形成亮点，低灰度值的线段形成暗点，对图像中线段的检测可转化为在$\rho\theta$空间对亮点、暗点的检测

- 计算出原图中各方向上的投影值，可以作为方向特征用于目标检测和识别

- 改变图像的表现形式，为相关处理提供便利

4.5 小波变换

4.5.1小波

4.5.2一维小波变换

4.5.3二维小波变换

4.5.4小波变换在图像处理中的应用

4.5.1小波

（1）定义

设函数$\psi(t)$满足：$\int_R \psi(t)dt = 0$ ，对其进行平移和伸缩产生函数族：$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \qquad a,b \in R, a \neq 0$

$\psi(t)$称为基小波或母小波，a为伸缩因子（尺度因子），b为平移因子，$\psi_{a,b}(t)$为$\psi(t)$生成的连续小波

（2）特点

- 紧支撑性

  小波函数在小范围内波动，能量有限，超出一定范围时，波动幅度迅速衰减，具有速降性。

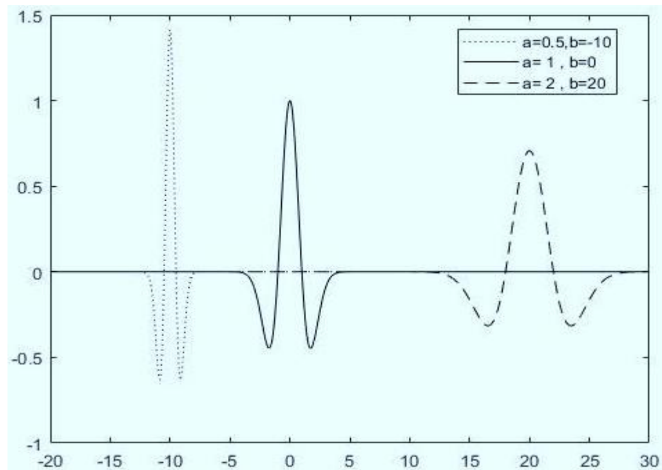
- 变化性

  小波函数随尺度因子的变化而变化

- K阶消失矩

$$\int_R t^k \psi(t)\,dt = 0$$

$$k = 0, 1, \cdots, K-1$$



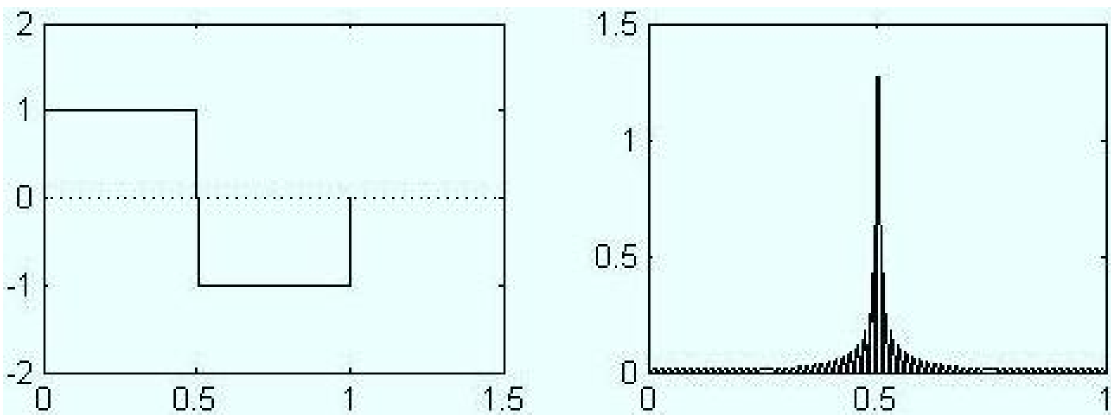
Marr小波参数取不同值的波形

4.5.1小波

（3）实例

- Haar小波

$$\begin{cases} \psi_H(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < 1/2 \\ -1 & 1/2 \le t < 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \\ \Psi_H(\omega) = \dfrac{1 - 2e^{-\frac{i\omega}{2}} + e^{-i\omega}}{\omega i} \end{cases}$$



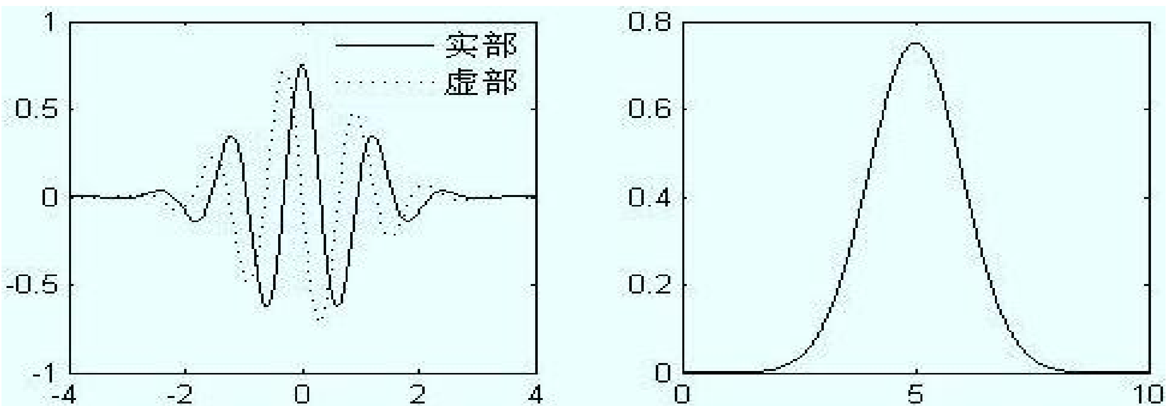
Harr小波及其频谱

4.5.1小波

（3）实例

- Morlet小波

$$\begin{cases}\psi(t)=\pi^{-1/4}\left(e^{-i\omega_0 t}-e^{-\omega_0^2/2}\right)e^{-t^2/2}\\ \Psi(\omega)=\pi^{-1/4}\left[e^{-(\omega-\omega_0)^2/2}-e^{-\omega_0^2/2}e^{-\omega^2/2}\right]\end{cases}$$

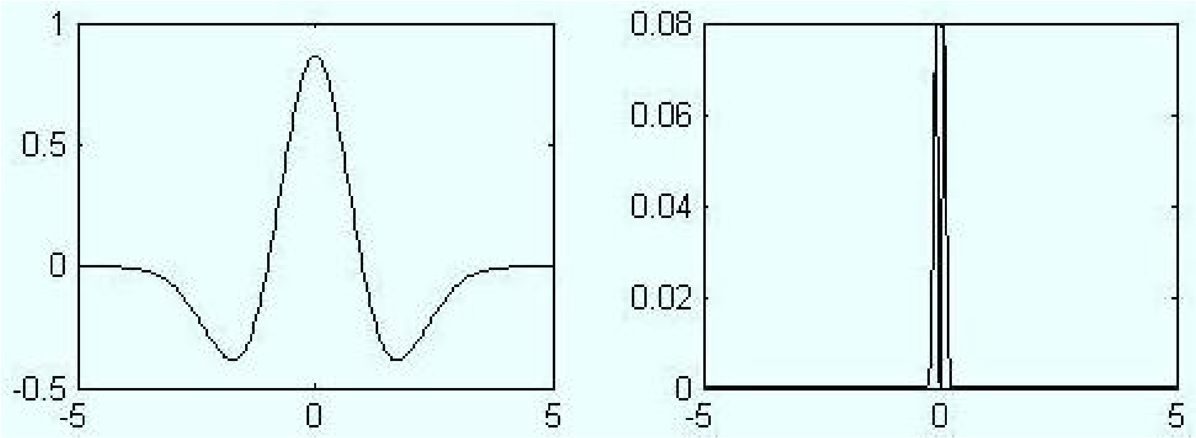


Morlet小波及其频谱

（3）实例

- **Mexico草帽小波**

$$\psi(t)=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\pi^{-1/4}\right)\left(1-t^2\right)e^{-t^2/2}$$



Mexico草帽小波小波及其频谱

4.5.2一维小波变换

（1）连续小波变换

设$f(t)$、$\psi(t)$是平方可积函数，且$\psi(t)$满足允许性条件

称$W_f(a,b)=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_R f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt$为$f(t)$的连续小波变换

$\psi^*(t)$是$\psi(t)$的共轭函数

4.5.2一维小波变换

（1）连续小波变换

设$\psi_a(t)=|a|^{-1/2}\psi\left(\dfrac{t}{a}\right)$，令$\tilde{\psi}_a(t)=\psi_a(-t)$

小波变换定义改写为：

$$W_f(a,b)=|a|^{-1/2}\int_R f(t)\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right)dt=|a|^{-1/2}\int_R f(t)\psi^*\left(-\frac{b-t}{a}\right)dt$$

$$=|a|^{-1/2}\int_R f(t)\tilde{\psi}^*\left(\frac{b-t}{a}\right)dt=f(t)*\tilde{\psi}_a(t)$$

小波变换是原始信号用一组不同尺度的带通滤波器进行滤波，将信号分解到一系列频带上

4.5.2一维小波变换

（2）时频特性

分析小波$\psi_{a,b}(t)$时、频窗中心和时、频窗半径，可得：

时窗中心：$t^* = at_\psi^* + b$　　时窗半径：$\Delta t = a\Delta t_\psi$

频窗中心：$\omega^* = \frac{1}{a}\omega_\psi^*$　　频窗半径：$\Delta\omega = \frac{1}{a}\Delta\omega_\psi$

$t_\psi^*, \Delta t_\psi, \omega_\psi^*, \Delta\omega_\psi$是基小波$\psi(t)$的时、频窗中心、半径

$$2\Delta t \cdot 2\Delta\omega = 4a\Delta t_\psi \cdot \frac{1}{a}\Delta\omega_\psi = 4\Delta t_\psi \cdot \Delta\omega_\psi$$

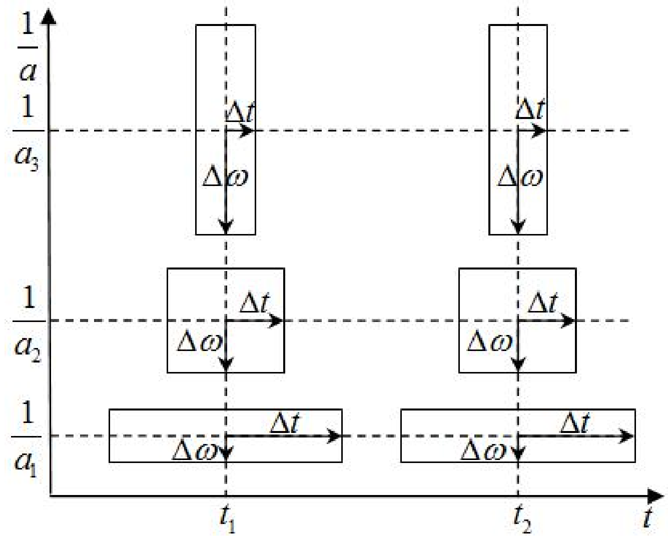
对于固定的b，当a>1时，随着a的增大，时窗增宽，频窗变窄；但窗口面积不变。

4.5.2一维小波变换

（2）时频特性

小波变换分析信号具有自适应的时频窗口：

- 检测高频分量，尺度参数$a>0$变小，时窗变窄，频窗增高，主频ω^*变大；
- 检测低频特性，尺度参数$a>0$增大，时窗变宽，频窗降低，主频ω^*变小；



小波变换的时-频平面

4.5.2一维小波变换

（3）离散小波变换

将小波参数ab离散化：$\psi_{j,k}(t)=a_0^{-j/2}\psi\left(a_0^{-j}t-k\right)$， $j,k\in Z$

$W_f(j,k)=\int_R f(t)\psi_{j,k}^*(t)dt$ 称为$f(t)$的离散小波变换

离散化参数的选择决定了离散小波变换能否实现

4.5.2一维小波变换

（4）正交小波

设$\psi(t)\in L^2(R)$是一个允许小波，取 $a_0=2$

$\psi_{j,k}(t)=2^{-j/2}\psi\left(2^{-j}t-k\right)$， $j,k\in Z$构成$L^2(R)$的标准正交基

称 $\psi(t)$为正交小波，$\psi_{j,k}(t)$是正交小波函数，相应的

离散小波变换 $W_f(j,k)=\left\langle f(t),\psi_{j,k}(t)\right\rangle$为正交小波变换。

可采用多分辨分析方法构造正交小波基

4.5.3二维小波变换

（1）定义

设 $f(x,y)\in L^2(R^2)$，$\int_R\int_R \psi(x,y)dxdy=0$，称

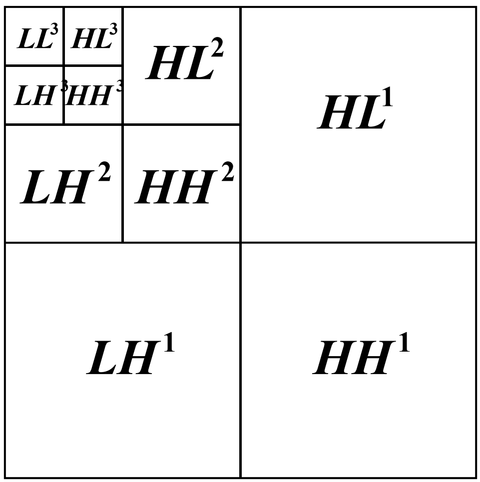
$$W_f(a,b_1,b_2)=\int_R\int_R f(x,y)\frac{1}{a}\psi^*\left(\frac{x-b_1}{a},\frac{y-b_2}{a}\right)dxdy$$

为$f(x,y)$的二维连续小波变换，逆变换为：

$$f(x,y)=\frac{1}{C_\psi}\int_0^{+\infty}\frac{da}{a^3}\iint_{R^2}W_f(a,b_1,b_2)\psi\left(\frac{x-b_1}{a},\frac{y-b_2}{a}\right)db_1db_2$$

4.5.3二维小波变换

（2）图像小波分解



L：低频分量

H：高频分量

LH：垂直方向上的高频信息

HL：水平方向上的高频信息

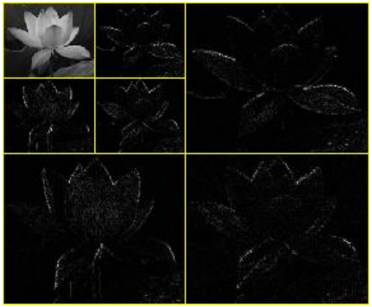
HH：对角线方向的高频信息

4.5.3二维小波变换

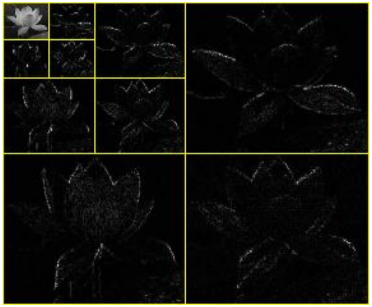
（2）图像小波分解

原图

一级小波分解



二级小波分解



三级小波分解

三级分解重构

4.5.3二维小波变换

（3）例程

- 函数
  - 一级二维离散小波变换
    [CA,CH,CV,CD]=dwt2(X,’wname’) 或
    [CA,CH,CV,CD]=dwt2(X, Lo_D, Hi_D)
  - 一级二维离散小波逆变换
    X=idwt2(CA,CH,CV,CD,’wname’) 或
    X=idwt2(CA,CH,CV,CD, Lo_D, Hi_D)
  - 多级二维小波分解
    [C,S] = wavedec2(X,N,'wname') 或
    [C,S] = wavedec2(X,N,Lo_D,Hi_D)

4.5.3二维小波变换

（3）例程

- **函数**
  - 多级二维小波重构

    X = waverec2(C,S,'wname') 或

    X = waverec2(C,S,Lo_R,Hi_R)
  - 提取二维小波分解的低频系数

    A = appcoef2(C,S,'wname',N) 或

    A = appcoef2(C,S,Lo_R,Hi_R，N)
  - 提取二维小波分解的高频系数

    D = detcoef2(O,C,S,N) 或

    [H,V,D] = detcoef2('all',C,S,N)

4.5.3二维小波变换

（3）例程

- 一级分解及重构程序

```
Image=imread('cameraman.jpg');
subplot(1,3,1),imshow(Image),title('原图');
grayI=rgb2gray(Image);
[ca1,ch1,cv1,cd1]=dwt2(grayI,'db4');
DWTI1=[wcodemat(ca1,256),wcodemat(ch1,256);
            wcodemat(cv1,256),wcodemat(cd1,256)];
subplot(1,3,2),imshow(DWTI1/256),title('一级分解');
result=idwt2(ca1,ch1,cv1,cd1,'db4');
subplot(1,3,3),imshow(result,[]),title('一级重构');
```

4.5.3二维小波变换

（3）例程

- 二级分解及重构程序

```
Image=imread('cameraman.jpg');
grayI=rgb2gray(Image);
[c,s]=wavedec2(grayI,2,'db4');
ca2=appcoef2(c,s,'db4',2);
[ch2,cv2,cd2] = detcoef2('all',c,s,2);
[ch1,cv1,cd1] = detcoef2('all',c,s,1);
ca1=[wcodemat(ca2,256),wcodemat(ch2,256);
        wcodemat(cv2,256),wcodemat(cd2,256)];
```

4.5.3二维小波变换

（3）例程

- 二级分解及重构程序

```
k=s(2,1)*2-s(3,1);
ch1=padarray(ch1,[k k],1,'pre');
cv1=padarray(cv1,[k k],1,'pre');
cd1=padarray(cd1,[k k],1,'pre');
  %填充一级小波高频系数数组，使两级系数维数一致
DWTI2=[ca1,wcodemat(ch1,256);
             wcodemat(cv1,256),wcodemat(cd1,256)];
subplot(1,2,1),imshow(DWTI2/256),title('二级分解');
result= waverec2(c,s,'db4');
subplot(1,2,2),imshow(result,[]),title('二级重构');
```

4.5.3二维小波变换

（3）例程

原图

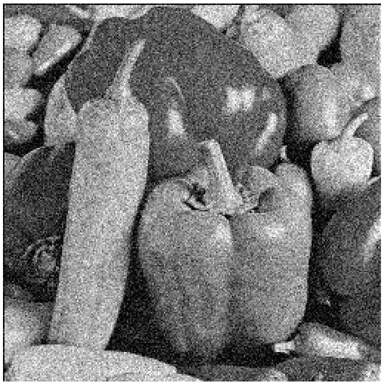
二级小波分解子带图

二级分解重构图

4.5.4小波变换在图像处理中的应用

（1）滤波降噪

高斯噪声图像



wdencmp

函数降噪

硬阈值降噪

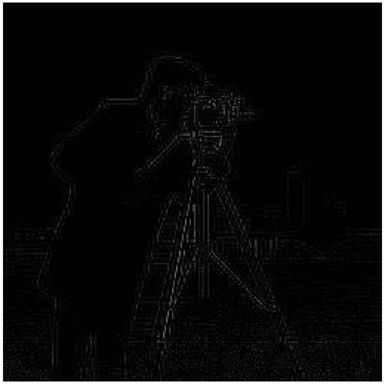
软阈值降噪

4.5.4小波变换在图像处理中的应用

（2）边缘检测

利用边缘突变对应高频信息的特性，通过将低频系数置零、保留高频系数，实现了边缘检测

原图



边缘检测

4.5.4小波变换在图像处理中的应用

（3）压缩编码

小波变换后，图像能量集中在少部分的小波系数上，可以通过简单的量化方法，将较小能量的小波系数省去，保留能量较大的小波系数，从而达到压缩的目的

4.5.4小波变换在图像处理中的应用

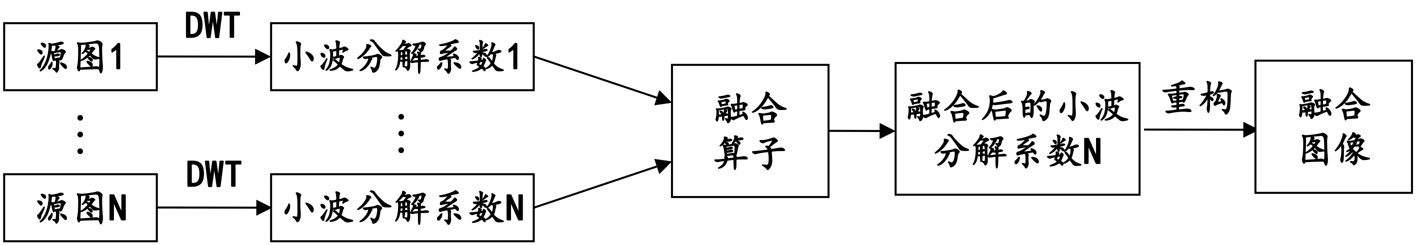
（4）图像增强

小波变换将图像分解为大小、位置和方向不同的分量，根据需要改变某些分量系数，从而使得感兴趣的分量放大，不需要的分量减小，达到图像增强的目的。

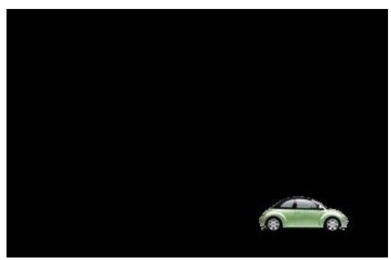
4.5.4小波变换在图像处理中的应用

（5）图像融合

将原图像进行小波分解，在小波域通过一定的融合算子融合小波系数，再重构生成融合的图像




背景图


前景图


融合图

思考与计算

- 4.1一幅4×4的数字图像 $f=\begin{bmatrix}1&0&2&0\\3&0&4&0\\5&0&6&0\\7&0&8&0\end{bmatrix}$，利用FFT对其进行二维DFT运算。
- 4.2对上题中的图像求其DCT变换。
- 4.3设随机向量x的一组样本如下：

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}^T,\begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix}^T\right\}$$

计算其协方差矩阵，并对其进行离散K-L变换。

- 4.4简述对小波变换的理解。
- 4.5小波变换中的多分辨分析的含义是什么？

编程实践

- 4.6利用MATLAB编程，打开一幅图像，对其进行DFT变换，并置其不同区域内的系数为零，进行IDFT，观察其输出效果。
- 4.7利用MATLAB编程，打开一幅图像，对其进行DCT变换，并置其不同区域内的系数为零，进行IDCT，观察其输出效果。