电工技术与电子技术

第4章 正弦交流电路

主讲教师：刘玉英

RLC串联的交流电路

主讲人：刘玉英

*RLC*串联的交流电路

主要内容：

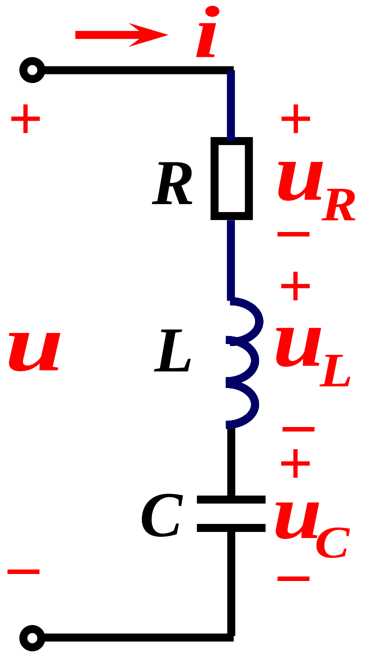
*RLC*串联的交流电路中电压与电流的相量关系；有功功率、无功功率以及视在功率的计算。

重点难点：

电压三角形、阻抗三角形、功率三角形的应用。

RLC串联的交流电路

1 电流、电压的关系



RLC串联交流电路中

设：$i=\sqrt{2}I\sin\omega t$

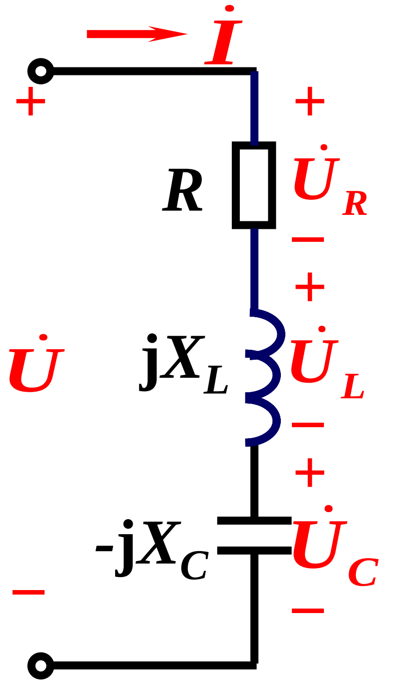
$U \overset{?}{=} IR + I\omega L + I\,1/\omega C$

讨论

交流电路、$\dot{U}$ $\dot{I}$与参数R、L、C、ω 间的关系如何？

RLC串联的交流电路

1 电流、电压的关系



(1) 相量式

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

设 $\dot{I} = I\angle 0°$（参考相量）

则 $\dot{U}_R = \dot{I}R$

$$\dot{U}_L = \dot{I}(jX_L)$$

$$\dot{U}_C = \dot{I}(-jX_C)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{I}R + \dot{I}(jX_L) + \dot{I}(-jX_C)\\ &= \dot{I}[R + j(X_L - X_C)]\end{aligned}}$$

总电压与总电流的相量关系式

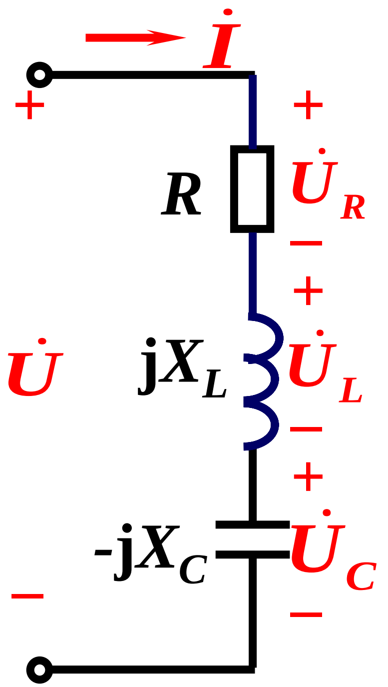
RLC串联的交流电路

1 电流、电压的关系

根据 $\dot{U}=\dot{I}[R+\mathrm{j}(X_L-X_C)]$

令 $Z=R+\mathrm{j}(X_L-X_C)$ 则 $\boxed{\dot{U}=\dot{I}Z}$

$$Z=\frac{\dot{U}}{\dot{I}}=\frac{U\angle\psi_u}{I\angle\psi_i}=\frac{U}{I}\angle\psi_u-\psi_i=|Z|\angle\varphi$$



Z 的模表示 *u*、*i* 的大小关系，辐角（阻抗角）为 *u*、*i* 的相位差。

1 电流、电压的关系

$$\boxed{\mathbf{Z} = |\mathbf{Z}| \angle \varphi = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)}$$

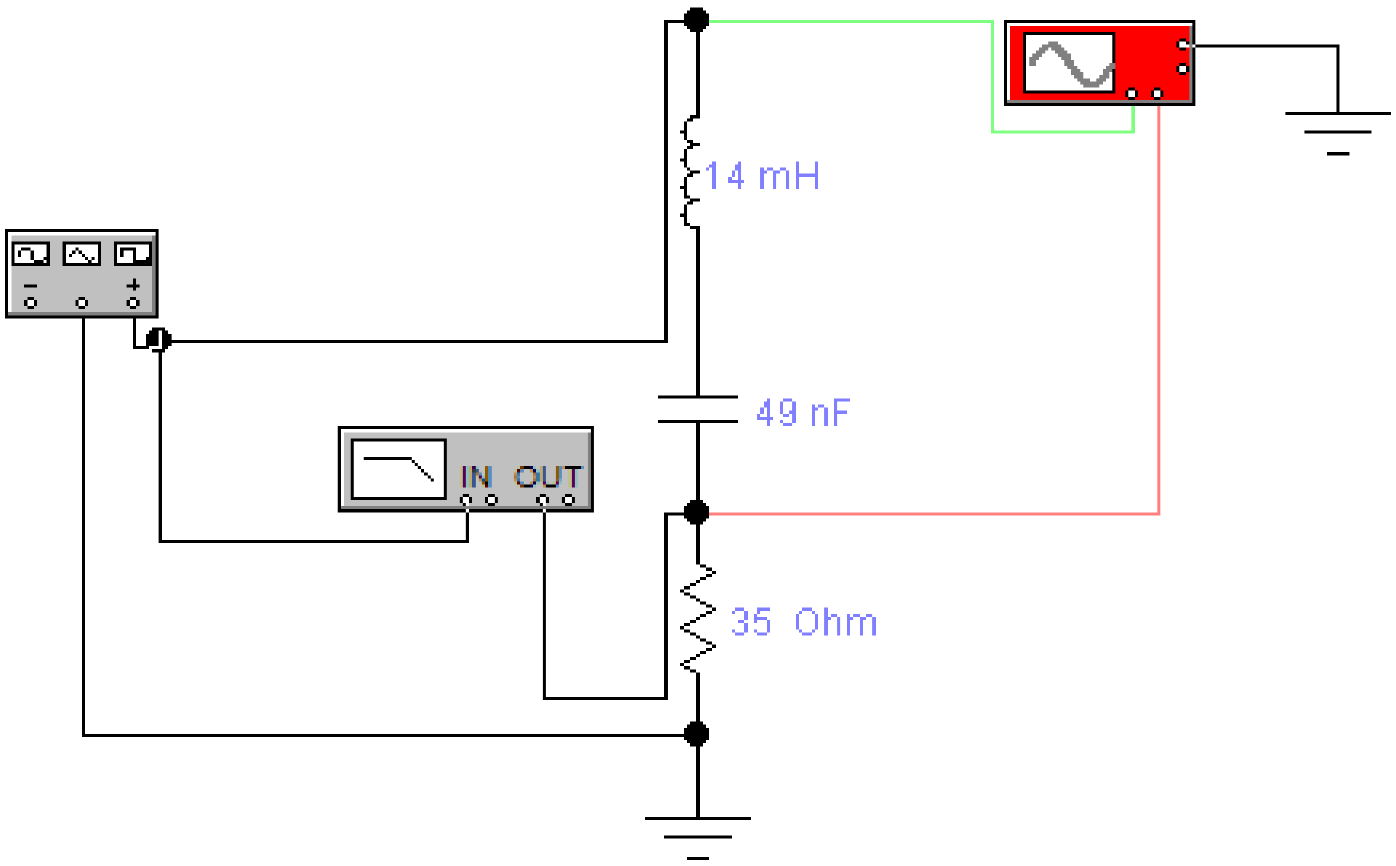
阻抗模：$|Z| = \dfrac{U}{I} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$

阻抗角：$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctan \dfrac{X_L - X_C}{R} = \arctan \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$

问题讨论：

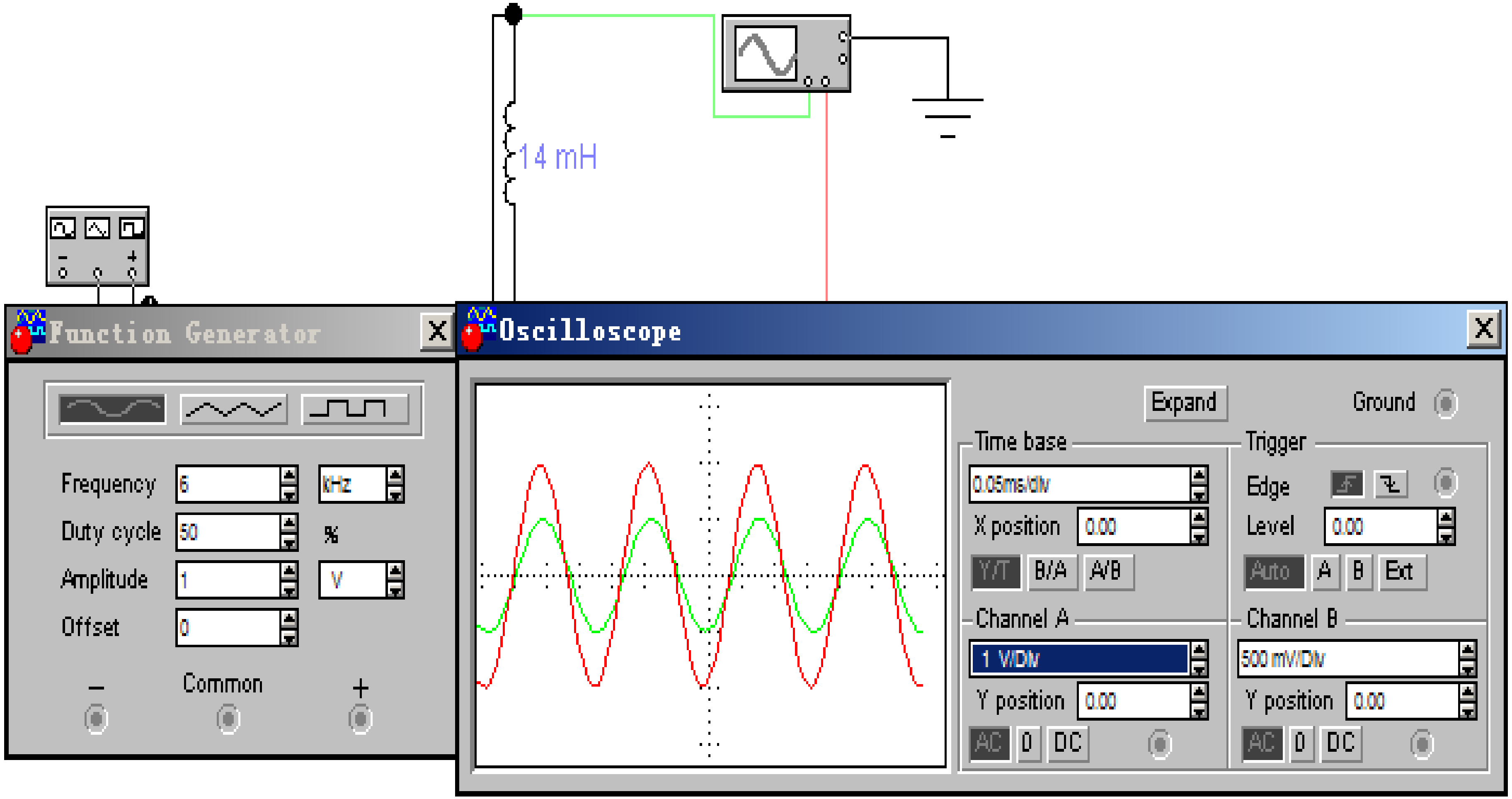
这个*RLC*电路呈现什么性质？

电路参数与电路性质到底是什么关系呢？

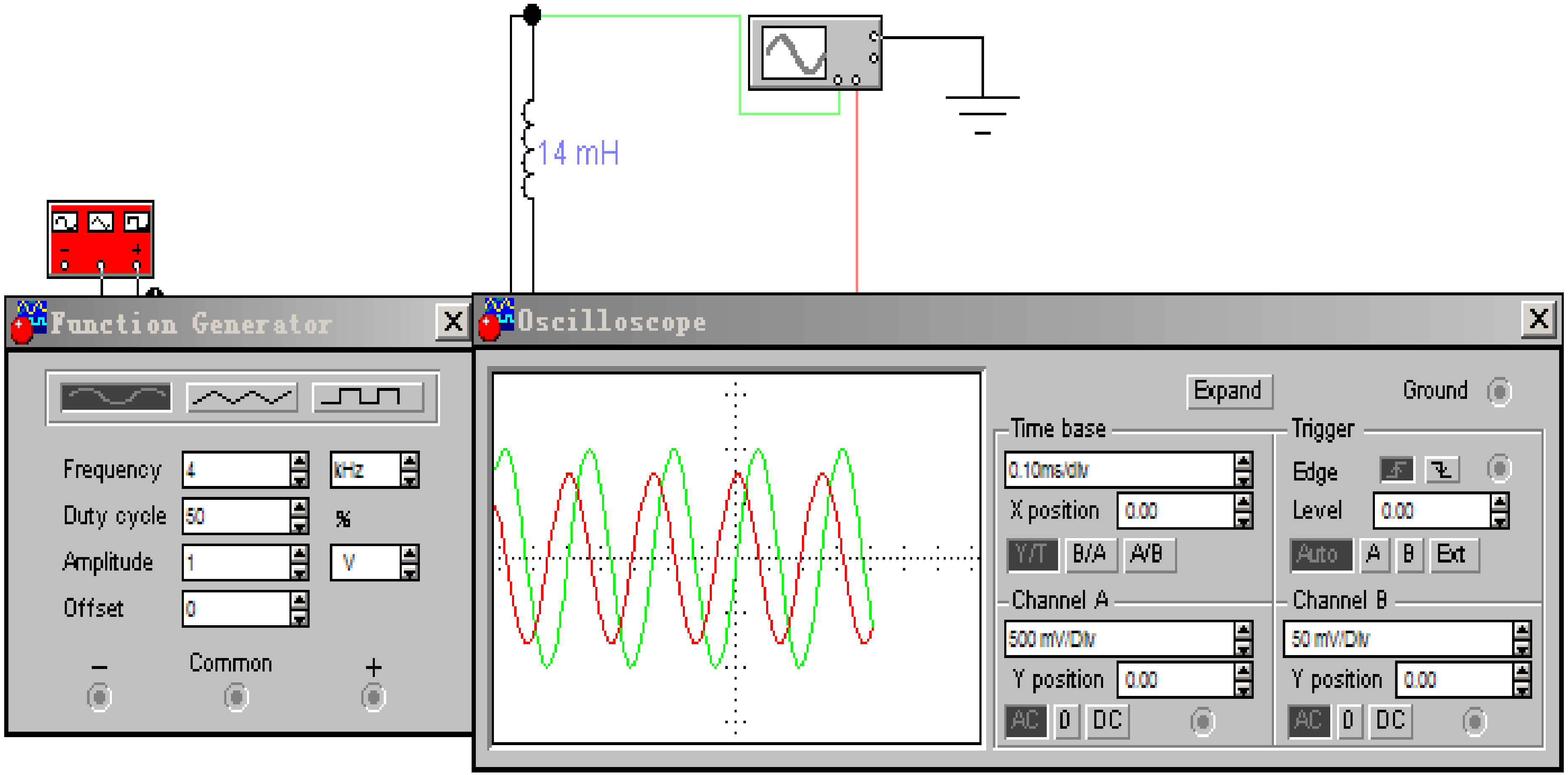


用EWB仿真*RLC*串联电路

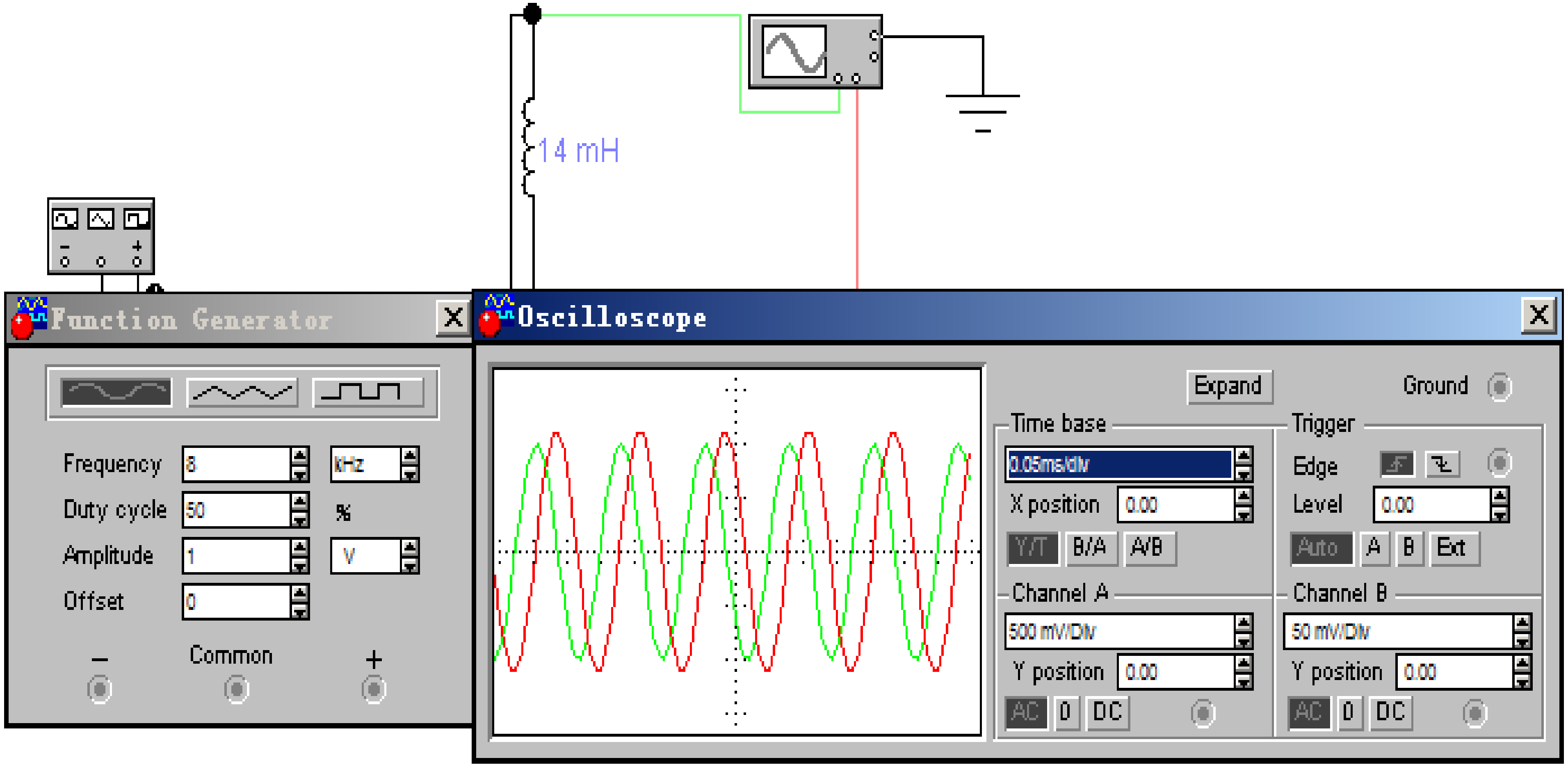
RLC串联交流电路


14 mH
Function Generator
Frequency
6
KHz
Duty cycle
50
%
Amplitude
1
V
Offset
0
Common
Oscilloscope
Expand
Ground
Time base
0.05ms/div
X position
0.00
Y/T
B/A
A/B
Trigger
Edge
Level
0.00
Auto
A
B
Ext
Channel A
1 V/Div
Y position
0.00
AC
0
DC
Channel B
500 mV/Div
Y position
0.00
AC
0
DC

*RLC*串联交流电路


14 mH
Function Generator
Frequency
4
kHz
Duty cycle
50
%
Amplitude
1
V
Offset
0
Common
Oscilloscope
Expand
Ground
Time base
0.10ms/div
X position
0.00
Y/T
B/A
A/B
Trigger
Edge
Level
0.00
Auto
A
B
Ext
Channel A
500 mV/Div
Y position
0.00
AC
0
DC
Channel B
50 mV/Div
Y position
0.00
AC
0
DC

RLC串联交流电路


14 mH
Function Generator
Frequency 8 kHz
Duty cycle 50 %
Amplitude 1 V
Offset 0
Common
Oscilloscope
Expand
Ground
Time base
0.05ms/div
X position 0.00
Y/T B/A A/B
Trigger
Edge
Level 0.00
Auto A B Ext
Channel A
500 mV/Div
Y position 0.00
AC 0 DC
Channel B
50 mV/Div
Y position 0.00
AC 0 DC

1 电流、电压的关系

阻抗角：$\varphi = \psi_u - \psi_i = \arctan \dfrac{X_L - X_C}{R} = \arctan \dfrac{\omega L - 1/\omega C}{R}$

电路参数与电路性质的关系：

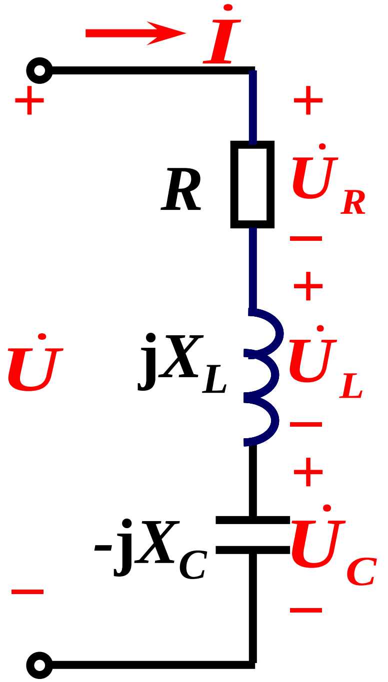
当 $X_L > X_C$ 时， $\varphi > 0$， u 超前 i —— 呈感性

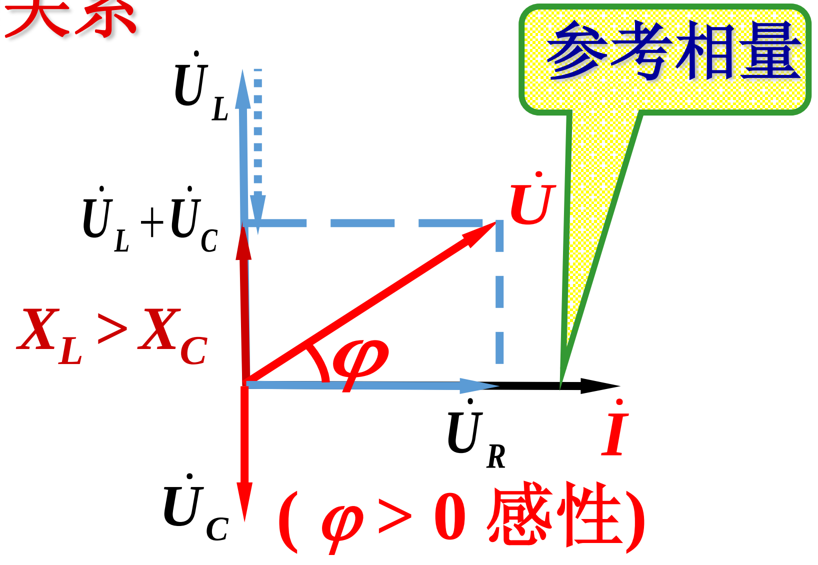
当 $X_L < X_C$ 时， $\varphi < 0$， u 滞后 i —— 呈容性

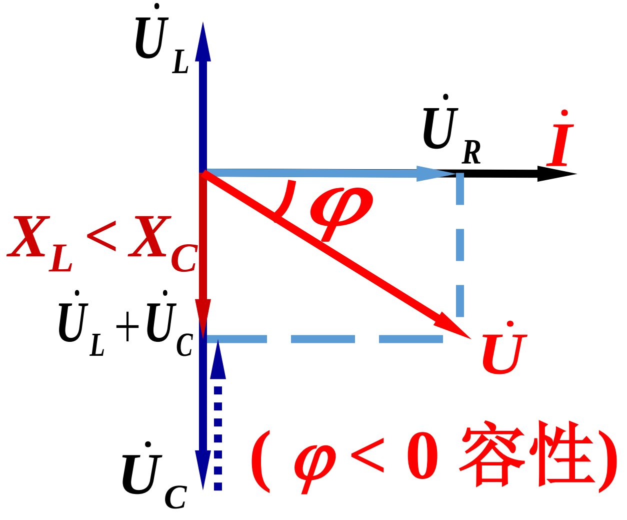
当 $X_L = X_C$ 时， $\varphi = 0$， u、i 同相 —— 呈电阻性

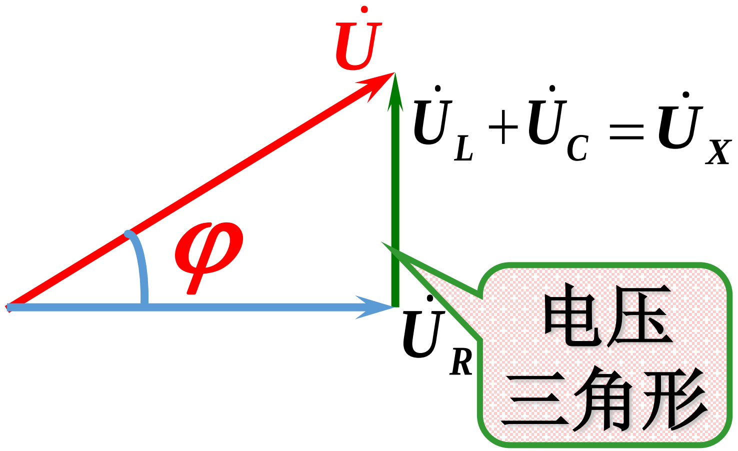
1 电流、电压的关系

(2) 相量图







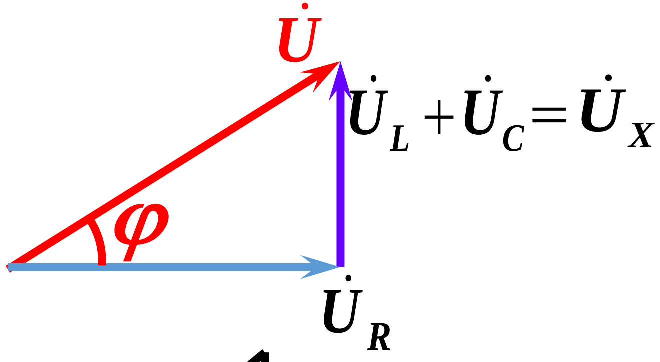


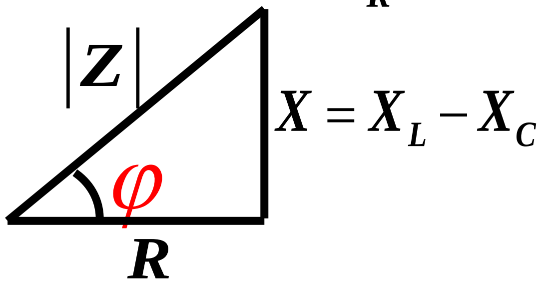
由电压三角形可得:

$$U_R = U\cos\varphi$$
$$U_X = U\sin\varphi$$

*RLC*串联交流电路

(2) 相量图





由阻抗三角形:

$$R=|Z|\cos\varphi$$

$$X=|Z|\sin\varphi$$

由相量图可求得:

$$U=\sqrt{U_R^{\ 2}+(U_L-U_C)^2}$$

$$=I\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$$

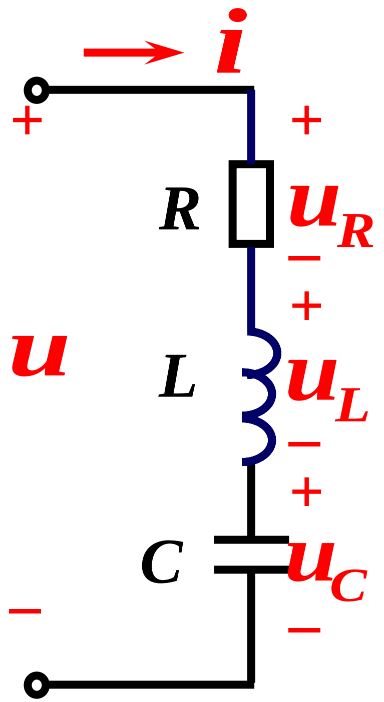
$$=I\sqrt{R^2+X^2}$$

$$=I|Z|$$

$$|Z|=\sqrt{R^2+(X_L-X_C)^2}$$

$$\varphi=\arctan\frac{X_L-X_C}{R}$$

2 功率关系



(1) 瞬时功率

设：$i = I_m \sin\omega t$

$$u = U_m \sin(\omega t + \varphi)$$

$$p = u \cdot i = U_m \sin(\omega t + \varphi) \cdot I_m \sin\omega t$$

$$= \underbrace{U_m I_m \cos\varphi \sin^2 \omega t}_{\text{耗能元件上的瞬时功率}} + \underbrace{UI \sin\varphi \ \sin 2\omega t}_{\text{储能元件上的瞬时功率}}$$

在每一瞬间,电源提供的功率一部分被耗能元件消耗掉,一部分与储能元件进行能量交换。

2 功率关系

(2) 平均功率*P* (有功功率)

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t$$

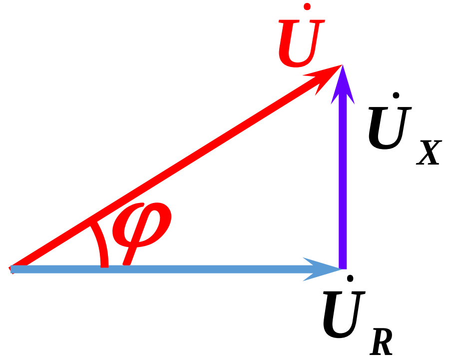
$$=\frac{1}{T}\int_0^T[UI\cos\varphi-UI\cos(2\omega t+\varphi)]\mathrm{d}t$$

$$=UI\cos\varphi$$ 单位：W

总电压　总电流　*u* 与 *i* 的夹角

cos*φ* 称为功率因数，用来衡量对电源的利用程度。

根据电压三角形可得：



$$P=UI\cos\varphi=U_RI=I^2R$$

电阻消耗的电能

2 功率关系

(3) 无功功率Q

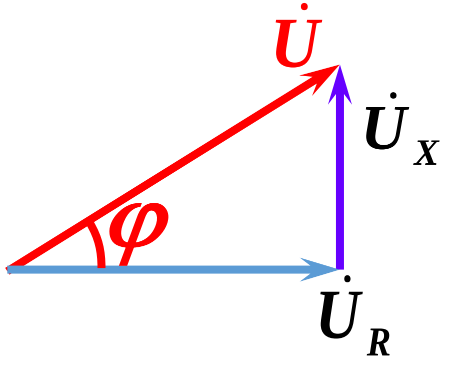
电感和电容与电源之间的能量互换

$$Q = U_L I - U_C I = (U_L - U_C) I = I^2 (X_L - X_C)$$

根据电压三角形可得：

$$Q = UI \sin\varphi$$ 单位：var

总电压　总电流　u 与 i 的夹角



2 功率关系

(4) 视在功率 S

电路中总电压与总电流有效值的乘积。

$$\boxed{S = UI = |Z| I^2}$$ 单位：V·A

注： $S_N = U_N I_N$ 称为发电机、变压器 等供电设备的容量，可用来衡量发电机、变压器可能提供的最大有功功率。

$$\boxed{S = \sqrt{P^2 + Q^2}}$$

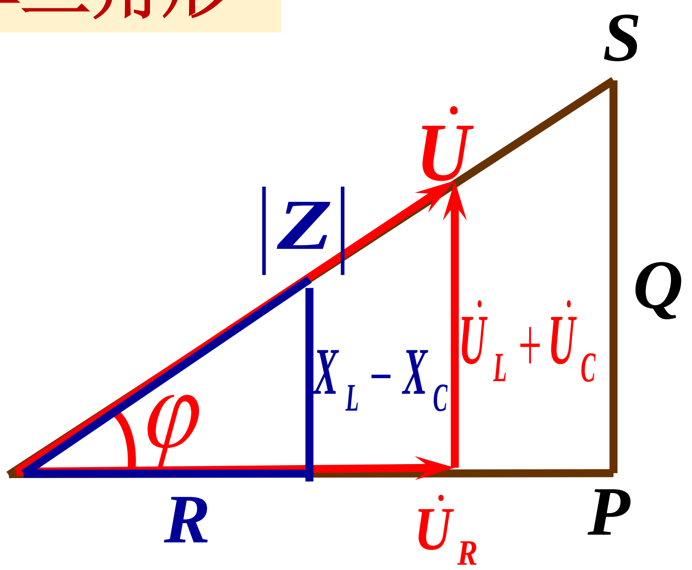
$$S \cancel{=} P + Q$$

阻抗三角形、电压三角形、功率三角形

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = S\cos\varphi$$

$$Q = S\sin\varphi$$



例1：在RLC串联交流电路中，已知: $u = 220\sqrt{2}\sin(314t + 20^\circ)\text{V}$

$R = 30\Omega, L = 127\text{mH}, C = 40\mu\text{F}$

求: (1)电流的有效值 I 与瞬时值 i ; (2) 各部分电压的有效值与瞬时值；(3) 作相量图；(4)有功功率 P、无功功率 Q 和视在功率 S 。

解：

$$X_L = \omega L = 314 \times 127 \times 10^{-3}\Omega = 40\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{314 \times 40 \times 10^{-6}}\Omega = 80\Omega$$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{30^2 + (40 - 80)^2}\Omega = 50\Omega$$

方法1：(1) $I = \dfrac{U}{|Z|} = \dfrac{220}{50}\text{A} = 4.4\text{A}$

$$\varphi = \arctan\frac{X_L - X_C}{R} = \arctan\frac{40-80}{30} = -53°$$

因为$\varphi = \psi_u - \psi_i = -53°$，所以$\psi_i = 73°$

$$i = 4.4\sqrt{2}\sin(314t + 73°)\text{A}$$

(2) $U_R = IR = 4.4 \times 30\text{V} = 132\text{V}$

$$u_R = 132\sqrt{2}\sin(314t + 73°)\text{V}$$

$$U_L = IX_L = 4.4 \times 40\text{V} = 176\text{V}$$

$$u_L = 176\sqrt{2}\sin(314t + 163°)\text{V}$$

方法1：解：$U_C = IX_C = 4.4 \times 80 = 352\text{V}$

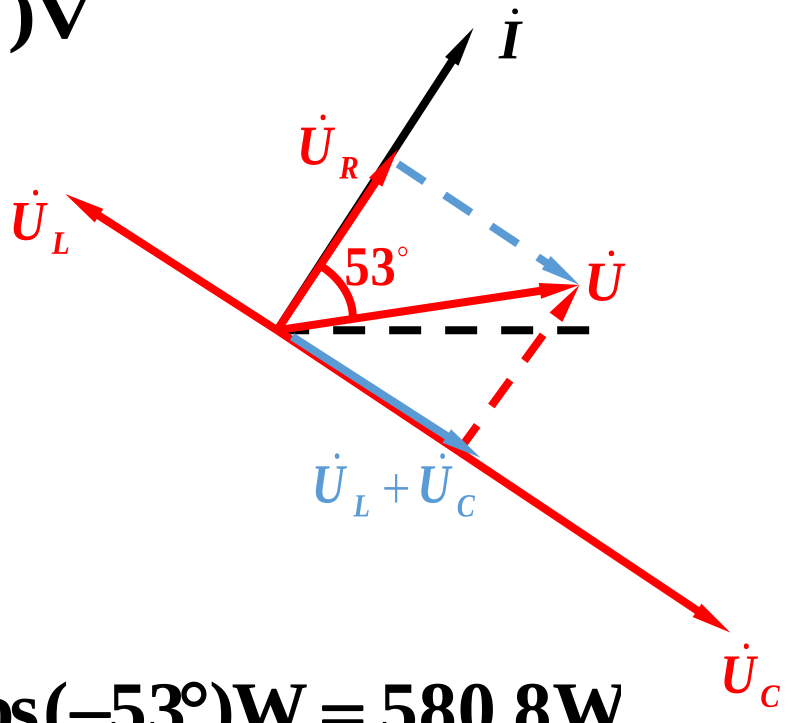
$$u_C = 352\sqrt{2}\sin(314t - 17^\circ)\text{V}$$

通过计算可看出：

$$U \neq U_R + U_L + U_C$$

而是 $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$

(3)相量图



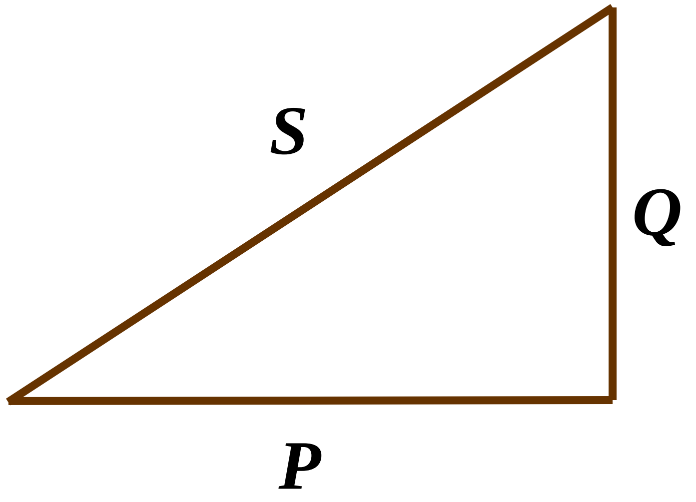
(4) $P = UI\cos\varphi = 220 \times 4.4 \times \cos(-53^\circ)\text{W} = 580.8\text{W}$

或 $P = U_R I = I^2 R = 580.8\text{W}$

$$P = 580.8\text{W}$$

(4) $$Q = UI\sin\varphi = 220\times 4.4\times\sin(-53°)\text{var}$$
$$= -774.4\ \text{var}$$

$$Q = I^2(X_L - X_C) = 4.4^2\times(48-80)$$
$$= -774.4\ \text{var}$$ (电容性)



视在功率

$$S = UI = 220\times 4.4 = 968\text{VA}$$

$$S = \sqrt{p^2 + Q^2} = \sqrt{580.8^2 + (-774.4)^2} = 968\text{VA}$$

方法2：复数运算

解：$\dot{U}=220\angle 20^\circ\text{V}$

$$Z=R+\mathrm{j}(X_L-X_C)=(30-\mathrm{j}40)\Omega=50\angle -53^\circ\ \Omega$$

$$\dot{I}=\frac{\dot{U}}{Z}=\frac{220\angle 20^\circ}{50\angle -53^\circ}\text{A}=4.4\angle 73^\circ\text{A}$$

$$\dot{U}_R=\dot{I}R=4.4\angle 73^\circ\times 30\text{V}=132\angle 73^\circ\text{V}$$

$$\dot{U}_L=\mathrm{j}\dot{I}X_L=\mathrm{j}4.4\times 40\angle 73^\circ\text{V}=176\angle 163^\circ\text{V}$$

$$\dot{U}_C=-\mathrm{j}\dot{I}X_C=-\mathrm{j}4.4\times 80\angle 73^\circ\text{V}=352\angle -17^\circ\text{V}$$

小　结

1. 电流、电压的关系

$$\dot{U} = \dot{I}Z$$

$$Z = R + \mathrm{j}(X_L - X_C)$$

2. 功率关系

$P = UI\cos\varphi$　　单位：W

$Q = UI\sin\phi$　　单位：Var

$S = UI = |Z|I^2$　　单位：VA