

用凯特摆测重力加速度

一、实验简介

1818 年 Kater 设计出一种物理摆，他巧妙地利用物理摆的共轭点避免和减少了某些不易测准的物理量对实验结果的影响，提高了测量重力加速度的精度。19 世纪 60 年代雷普索里德对此作了改进，成为当时测重力加速度最精确的方法。波斯坦大地测量所曾同时以五个 Kater 摆花了八年时间（1896–1904）测得当地重力加速度的值 $G = (981.274 \pm 0.003) \text{ cm} / \text{s}^2$ 。凯特摆测量重力加速度的方法不仅在科学史上有重要价值，而且在实验设计思想上亦有值得学习的地方。

本实验的目的是学习凯特摆的设计思想和技巧，掌握一种比较精确的测量重力加速度的方法。

二、实验原理

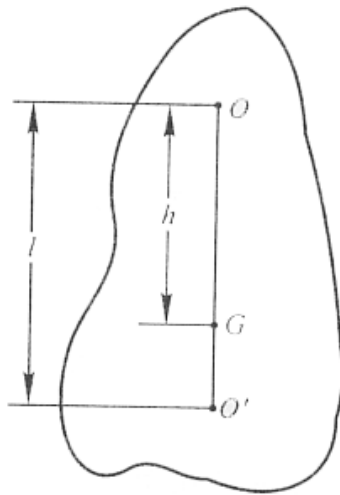


图 1 复摆示意图

图 1 是复摆示意图，设一质量为 m 的刚体，其重心 G 到转轴 O 的距离为 h ，绕 O 轴的转动惯量为 I ，当摆幅很小时，刚体绕 O 轴摆动的周期 T 为：

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}} \quad (1)$$

式中 g 为当地的重力加速度。

设复摆绕通过重心 G 的轴的转动惯量为 I_G ，当 G 轴与 O 轴平行时，有

$$I = I_G + mh^2 \quad (2)$$

代入式 (1) 得：

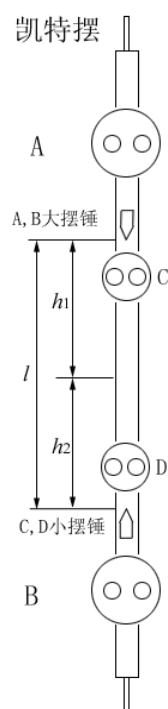
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + mh^2}{mgh}} \quad (3)$$

对比单摆周期的公式

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \text{ 可得}$$

$$l = \frac{I_G + mh^2}{mh} \quad (4)$$

上式中 l 称为复摆的等效摆长。因此只要测出周期和等效摆长便可求得重力加速度。



上图是凯特摆摆杆的示意图。对凯特摆而言，两刀口间的距离就是该摆的等效摆长 l 。在实验中当两刀口位置确定后，通过调节 A、B、C、D 四摆锤的位置可使正、倒悬挂时的摆动周期 T_1 和 T_2 基本相等。由公式 (3) 可得

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + mh_1^2}{mgh_1}} \quad (5)$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{I_G + mh_2^2}{mgh_2}} \quad (6)$$

其中 T_1 和 h_1 为摆绕 O 轴的摆动周期和 O 轴到重心 G 的距离。当 $T_1 \approx T_2$ 时， $h_1 + h_2 = l$ 即为等效摆长。由式(5)和(6)消去 I_G ，可得：

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2l} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(2h_1 - l)} = a + b \quad (7)$$

此式中， l 、 T_1 、 T_2 都是可以精确测定的量，而 h_1 则不易测准。由此可知，a 项可以精确求得，而 b 项则不易精确求得。但当 $T_1 = T_2$ 以及 $|2h_1 - l|$ 的值较大时，b 项的值相对 a 项是非常小的，这样 b 项的不精确对测量结果产生的影响就微乎其微了。

三、实验内容

1. 正确调节仪器，测量凯特摆的等效摆长 l ，并利用

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgh}}$$

粗略估算摆动周期 T 值，以作为调节 T_1 、 T_2 的参考。

2. 调节四个摆锤的位置，使 T_1 与 T_2 逐渐靠近，当 $|T_1 - T_2| \leq 0.001\text{S}$ 时，测量 T_1 和 T_2 的值。
3. 测量 l ， h_1 的值。
4. 根据上述测量值计算重力加速度 g 及不确定度 u_g 。

四、实验仪器

包括凯特摆、光电探测器和多用数字测试仪。



实物照片

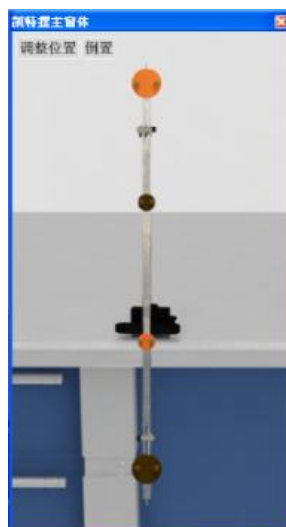


仿真实验中的仪器

1. 凯特摆

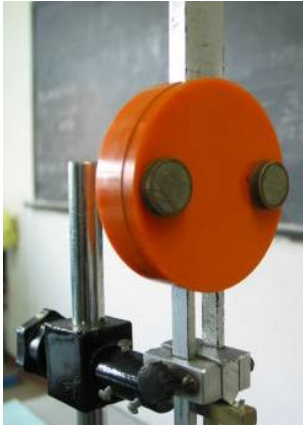


实物照片



仿真实验中的仪器

凯特摆的两端共大小 4 个摆锤，调节摆锤的位置可以改变凯特摆的重心，两端相同的位置各有一个固定刀口。实验之前需要先调节凯特摆的重心位置，重心调节完成的标志是：使用任何一个刀口时，凯特摆的摆动周期相同。可将摆杆悬挂到支架上，使摆杆能在铅垂面内自由摆动。



凯特摆的大摆锤图



凯特摆的小摆锤图

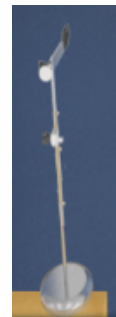


凯特摆固定刀口和 V 形刀承

2. 光电探测器



实物照片



仿真实验中的仪器

摆杆摆动时，摆针须经过光电探测器方可记录摆动周期。光电探测器的另一端接到多用数字测试仪，两次同向经过光电门的时间为摆动周期。

3. 多用数字测试仪



实物照片



仿真实验中的仪器

多用数字测试仪可测速度、加速度、频率等。本实验中主要用来测周期，可记录一个或多个周期的时间。

五、实验指导

实验重点、难点：

1. 学习一种比较精确的测量重力加速度的方法。
2. 学习凯特摆的实验设计思想和技巧。
3. 选定两刀口间的距离，通过调节 A、B、C、D 四摆锤的位置，使得该摆以两个刀口为悬点的摆动周期基本相等。

操作指导：

1. 主窗口

正确进入凯特摆测重力加速度实验场景窗体，如图图 1 实验场景。在场景的左下方有一个浮动的仪器栏，可以点击和拖动仪器栏中的仪器，把你所需要的仪器拖动到实验主场景中。

在实验场景中，可以在一定范围内拖动指定仪器，把鼠标放在仪器上面，按下 Delete 键，可以删除指定仪器。双击场景中的仪器可以进入仪器的调节窗体。首次进入实验时，一些仪器可能已经在场景中了，用户可根据实验需要往场景中添加仪器或删除仪器。



图 1 实验场景

2. 凯特摆调节

在场景中双击凯特摆，可以进入凯特摆的调节窗体，如图图 2 凯特摆调节主窗体，所示：



图 2 凯特摆调节主窗体

把鼠标放在凯特摆上托拖动凯特摆到一定角度（一般在 5° 范围内），松开鼠标，凯特摆便开始摆动。摆动窗体如图图 3 摆动窗体，所示：



图 3 摆动窗体

点击摆动窗体中的“停止摆动”按钮 ，凯特摆停止摆动，并返回到凯特摆主窗体。

- “调整位置”。在凯特摆主窗体中点击菜单栏中的“调整位置”按钮 ，跳转到调整凯特部件位置窗体，如图图 4 调整凯特摆部件位置窗体，所示：



图 4 调整凯特摆部件位置窗体

在此窗体中，可以在竖直方向拖动凯特摆的四个摆锤和两个刀口的位置，从而可以改变凯特摆重心位置和等效摆长的大小。点击或按下窗体中的向上按钮可以向上微微移动选中的部件，点击或按下窗体中的向下按钮可以向下微微移动选中的部件，窗体最左边的图片为当前选中的部件。

调整好部件位置后，点击右上角的“停止调整”按钮 **停止调整**，系统返回到凯特摆主窗体。

- “倒置”，在凯特摆主窗体中，点击“倒置”按钮 **倒置**，可以使凯特摆的摆轴在上下两个刀口所在位置之间切换。

3. 多用数字测试仪调节

在场景中双击多用数字测试仪，系统进入多用数字测试仪调节窗体，如图图 7 多用数字测试仪调节窗体，所示：



图 5 多用数字测试仪调节窗体

由上图可以看出，在多用数字测试仪上有很多按钮，与本实验相关的按钮有“电源开关按钮”、“复位按钮”、“B 输入按钮”、“计数按钮”、“计数类型旋钮”和“计数单位旋钮”。

(1) “计数类型按钮”，实验开始时，打开电源，把计数类型按钮打到“计数档”，如图图 8 计数类型按钮，所示：（注：本实验只用到计数档，其它档未作处理）



图 6 计数类型按钮

(2) “B 开关”，系统默认脉冲信号从 B 端口输入，所以实验开始时要把 B 开关打到最左端，如图图 9 B 开关档，所示：



图 7 B 开关档

(3) “计数开关”，实验开始后，“计数开关”打到停止档，多用数字测试仪在记录一个周期时间后自动停止；打到计数档，多用数字测试仪会一直记录时间，直到把“计数开关”再次打到停止档为止。

(4) “复位开关”，点击复位开关，多用数字测试仪会重新开始记录周期和时间。

(5) “计数单位旋钮”，左击此旋钮，旋钮按逆时针旋转，右击此按钮，旋钮按顺时针旋转。

本实验中，系统默认信号从 B 端口输入，所以实验开始要把 B 开关置为 B 档。计数单位旋钮打到 0.1ms 档。计数类型旋钮打到计数档。

4. 米尺的使用

双击桌面上的米尺图标，可以弹出米尺测量凯特部件位置窗体，如图图 8 测量窗体所示：

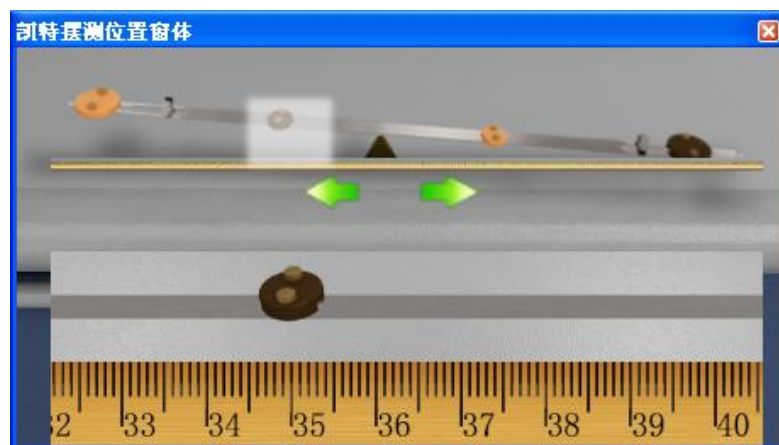


图 8 测量窗体

窗体主要由水平放置的凯特摆、测重心刀口和米尺组成，可以在水平方向上左右拖动测重心刀口，点击或按下窗体中的向左或向右按钮可以向左或向右微微移动测重心刀口，当刀口所在位置在凯特摆的重心上，凯特摆将与桌面平行，如图 9 平衡窗体，所示：

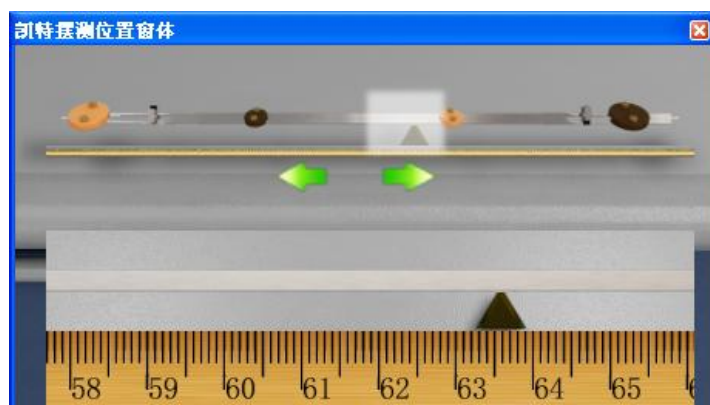


图 9 平衡窗体

此时通过米尺可以读出凯特摆的当前重心位置。移动凯特摆上的白色矩形框，下面的大尺将显示白色矩形框所在的凯特摆的位置。把白色矩形框移到凯特摆左刀口的位置，读出左刀口的位置；再把白色矩形框移到凯特摆右刀口的位置，读出右刀口的位置。这样就可以计算出左刀口到重心的距离，左刀口到右刀口的距离，即等效摆长。

5. 光电探测器

在实验室场景里将光电探测器位置放好（要正对凯特摆或复摆下缘的遮光板，为了方便调整，光电探测器水平位置可以偏离凯特摆或复摆正下方一定范围，竖直方向不作太多要求）。打开数字测试仪电源开关，选择适当的时标，然后按“复

位”键进行测量。计停开关打到“停止”档时，数字测试仪记录一个周期后自动停止计数。打到“计数”档时，数字测试仪将连续记录（A 组数码管显示周期数，B 组数码管显示总时间），直到切换到“停止”档（记录完当前周期后自动停止计数）。在场景中双击光电探测器，进入光电探测器调节窗体，如图 10 光电探测器调整窗体，所示：

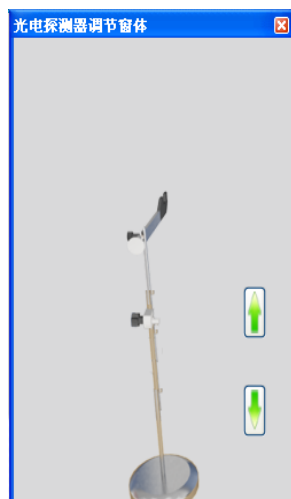


图 10 光电探测器调整窗体

点击向上按钮，可以向上微微移动光电门；点击向下按钮，可以向下微微移动光电门。

6. 实验操作

（1）放置好凯特摆和光电探测器的位置，光电探测器在凯特摆的正下方，凯特摆的摆针经过光电探测器的光电门。

（2）打开多用数字测试仪，B 开关置为 B 档；计数单位旋钮置为 0.1ms 档；计数类型旋钮置为计数类档；当测 1 个周期时间时，计停开关置为停止档，记录多个周期时，例如记录 10 个周期，开始把计停开关置为计数档，等到显示屏幕上显示 10 个周期时，把计停开关置为停止档，多用数字测试仪会在记录完 10 个周期时自然停止计数。一次测量完毕后，点击复位按钮，可以重新开始计数。

（3）使凯特摆摆动，测量其正、倒放置的摆动周期。调节凯特摆，直到凯特摆正、倒放置的摆动周期近似相等（正、倒放置的周期差的绝对值小于 0.001s）为止。

(4) 双击桌面上的米尺图标，在弹出的测量窗体中测出凯特摆两刀口间距离 l 、重心位置、左刀口到重心的距离 h_1 （测量方法在仪器使用中已经介绍），记下测量数据。

(5) 根据测量数据和周期公式

$$\frac{4\pi^2}{g} = \frac{T_1^2 + T_2^2}{2l} + \frac{T_1^2 - T_2^2}{2(2h_1 - l)}$$

计算出重力加速度 g 。