

---

## 二元关系传递性的矩阵判别法

**摘要：**通过关系矩阵  $M_R$  研究有限集合上关系  $R$  的性质既直观又迅速，在有关二元关系的自反、反自反、对称、反对称以及可传递的研究中，前四种性质已有了关系矩阵判别方法。而可传递关系  $R$  的特征较为复杂，所以不易从其关系矩阵  $M_R$  中直接判别。本文对有限集合上的可传递关系进行了一般的讨论，并给出了定理及其证明，在此基础上给出通过其关系矩阵  $M_R$  判别关系  $R$  的可传递性的方法，使得对可传递关系的判别变得非常简洁、有效。判断一个二元关系是否具有传递性，从定义与关系图的方法比较繁琐，利用关系矩阵判断其传递性，能避免繁琐的过程，文中通过对二元关系传递性定义的深入分析，利用关系矩阵中元素的特点与关系，通过深入研究二元关系性质和相关定理，提出了四种利用关系矩阵判断传递性的有效方法，分别为中途点判别法、复合矩阵法、十字型法、传递闭包法，同时给阐述了各方法的实用性，给出了利用关系矩阵判定二元关系传递性的简捷高效的算法，具体算法在计算机上能够高速有效的运行，然后对传递性程度进行了研究，具有一定的理论价值跟现实价值。

**关键词：**二元关系；传递性；关系矩阵；传递闭包；

## Matrix Criterion For Transitive of Binary Relation

**Abstract:** Through the relationship matrix  $M_R$ , studying the nature of a finite set of relations  $R$  is intuitive and fast, in the reflexive anti-reflexive, symmetric, antisymmetric and transitive binary relations study, the nature of the first four have a relationship matrix Identification methods. But transitive relation  $R$  is complicated, so It is not easy to determine directly from their relationship matrix  $M_R$ . In this paper, it passed on a general discussion of a finite set of the transitive relationship, and gives the theorem and its proof, on this basis, identification methods for transitive of the relationship  $R$  is given by matrix  $M_R$  so that the identification for transitive of the relationship  $R$  could be passed very simply and effectively. Determining whether a binary relation is transitive or not is more complicated from the definition and diagram, the use of relation matrix can avoid the cumbersome process, the paper proposed four effective methods with relationship matrix through in-depth analysis for the definition of binary relation, the use of Characteristics and relationship of the elements in relationship matrix and through studying the nature of binary relations and related theorems, which were half-way point criterion, composite matrix, cross-shaped method, transitive closure Method, the methods were also be explained the practicality, the paper also given some simple and efficient algorithms based on relation matrix and the specific algorithms can run fast and effective in the computer, then the degree of transmission was studied, has some theoretical value and the actual value.

**Key words :** Binary relation ;Transitive ;Relationship Matrix ;Transitive closure;



## 1 前言

首先, 二元关系是离散数学中一个重要的内容, 是以有序对为元素的集合。定义在某一集合上的二元关系有自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性等性质。研究这些性质对掌握二元关系在计算机中的应用相当重要, 尤其是需要通过综合各种性质来进一步研究等价关系, 偏序关系等多种关系。实际判定某个二元关系的性质时, 传递性的判定是比较复杂的。如何能够简捷高效地判断二元关系的传递性极其重要。

其次, 等价关系主要是研究集合中的个体即元素间的同一性问题的工具。它在模式识别、模糊分析、数字电路设计、数据库理论分析等众多学科中都有广泛的应用正因为如此, 才使得等价关系在集合论中占据着举足轻重的位置。离散数学的知识告诉我们, 当一个关系同时具有自反性、对称性及传递性时, 才能称这个关系为等价关系, 也就是说, 要判断一个关系是否为等价关系, 就必须判断它是否同时具有自反性、对称性及传递性。于是判断传递性成为了判断等价关系的一个难点, 而判定一个关系是否具有传递性通常有定义法、关系图法及关系矩阵法 3 种方法, 但当一个给定的集合的元素个数较多时, 如何能简便快捷地作出判断却不是一件容易的事。这里在判定传递性的理论基础上, 给出了传递性的几个矩阵判别法, 并在计算机上实现了具体算法。

再次, 二元关系的传递性的理解及判断是教学的一个难点, 特别是当集合的元素个数较多时, 其判断较为困难。但通过二元关系的关系矩阵来讨论并通过 C++ 语言用计算机来进行判断就会容易一些, 若给定一个二元关系, 根据对应的关系矩阵的不同特征就可得到关系不同的性质。

最后, 判断一个二元关系是否具有传递性, 用定义与关系图的方法比较繁琐, 利用关系矩阵判断其传递性, 能避免繁琐的过程, 本文通过深入研究二元关系性质和相关定理, 给出了利用关系矩阵判定二元关系传递性的简捷高效的算法, 并给出具体算法在计算机上实现的结果, 并对传递性程度进行了研究, 具有一定的现实价值。

## 2 准备知识

### 2.1 定义的简述

定义 1<sup>[1]</sup>: 设  $A, B$  是两个集合, 集合  $A \times B$  的子集  $R$  称为从  $A$  到  $B$  的二元关系, 特别地, 当  $A = B$  时(记作  $X$ ),  $R$  称为  $X$  上的二元关系, 简称关系。

定义 2<sup>[1]</sup>: 对任意集合  $A$ , 定义  $A$  上的恒等关系

$$I_A = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \}$$

定义 3<sup>[1]</sup>: 设  $R$  为  $A$  上的关系, 若

$$\forall x \forall y \forall z (x, y, z \in A \wedge \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \rightarrow \langle x, z \rangle \in R)$$

则称  $R$  为  $A$  上传递的关系。

定义 4<sup>[1]</sup>: 设  $F, G$  为二元关系,  $G$  对  $F$  右复合记作  $F \circ G$ , 其中

$$F \circ G = \{ \langle x, y \rangle \mid \exists t (\langle x, t \rangle \in F \wedge \langle t, y \rangle \in G) \}$$

定义 5<sup>[1]</sup>: 设  $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ,  $R$  是  $A$  上的关系。令

$$r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若 } x_i R x_j \\ 0 & \text{若 } x_i \not R x_j \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

则

$$(r_{ij}) = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

是  $R$  的关系矩阵, 记作  $M_R$ 。

定义 6<sup>[1]</sup>: 设  $R$  为  $A$  上的关系,  $n$  为自然数, 则  $R$  的  $n$  次幂定义为

$$(1) \quad R^0 = \{ \langle x, x \rangle \mid x \in A \} = I_A$$

$$(2) \quad R^{n+1} = R^n \circ R$$

由以上定义可知, 对于  $A$  上的任何关系  $R_1$  和  $R_2$  都有

$$R_1^0 = R_2^0 = I_A$$

也就是说,  $A$  上的任何关系的 0 次幂都相等, 都等于  $A$  上的恒等关系。如果  $R$  是用关系矩阵  $M$  给出的, 则  $R^n$  的关系矩阵是  $M^n$  即  $n$  个矩阵  $M$  之积。与普通的矩阵乘法不同的是, 其中的相加是逻辑加, 即  $1+1=1$ ,  $1+0=1$ ,  $0+1=1$ ,  $0+0=0$ 。

## 2.2 定理及证明

定理 设  $R$  为  $A$  上的关系, 则

$$R \text{ 在 } A \text{ 上传递} \Leftrightarrow R \circ R \subseteq R$$

证明 必要性: 任取  $\langle x, y \rangle$  有

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &\in R \circ R \\ \Rightarrow \exists t (\langle x, t \rangle \in R \wedge \langle t, y \rangle \in R) \\ \Rightarrow \langle x, y \rangle &\in R \text{ (因为 } R \text{ 在 } A \text{ 上是传递的)} \end{aligned}$$

所以  $R \circ R \subseteq R$ 。

充分性：任取  $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$ ，则

$$\begin{aligned} & \langle x, y \rangle \in R \wedge \langle y, z \rangle \in R \\ \Rightarrow & \langle x, z \rangle \in R \circ R \\ \Rightarrow & \langle x, z \rangle \in R \text{ (因为 } R \circ R \subseteq R) \end{aligned}$$

所以  $R$  在  $A$  上是传递的。

因为关系的性质如传递性不仅反映在它的集合表达式上，也明显地反映在它的关系矩阵和它的关系图上。见表 1

表 1 传递性的各种表达

性质 表示	传递性
集合表达式	$R \circ R \subseteq R$
关系矩阵	$M^2 \subseteq M$
关系图	如果顶点 $x_i$ 到 $x_j$ 有边， $x_j$ 到 $x_k$ 有边，则从 $x_i$ 到 $x_k$ 有边

### 3 方法的提出及分析

#### 3.1 方法一：中途点判别法

设  $R$  是非空集合  $A$  上的二元关系。如果

$$\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R, a \neq b, b \neq c$$

则我们称点  $b$  是关系  $R$  的一个“中途点<sup>[12]</sup>”。

$R$  具有传递性，强调的正是对  $R$  中每一个这样的中途点  $b$ ，从所有对应的起点  $a$  到所有对应的终点  $c$  之间必有关系  $R$ ，即必有  $\langle a, c \rangle \in R$ 。注意这里有可能  $a = c$ 。

传递性定义的否定形式为： $R$  不具有传递性  $\Leftrightarrow R$  中存在某个中途点  $b$ ，  
 $\langle a, b \rangle \in R, \langle b, c \rangle \in R, a \neq b, b \neq c$  但  $\langle a, c \rangle \notin R$ 。

由此得到一种重要的特殊情况是：“当  $R$  中没有这样的中途点时， $R$  一定具有传递性”。特别，空关系  $\Phi$  和恒等关系  $I$  都具有传递性。据此在关系矩阵



$A = (a_{ij})_{n \times n}$  上的反映如下:

$R$  具有传递性  $\Leftrightarrow$  若对每一个  $a_{kk} (k = 1, 2, \dots, n)$  存在  $i, j$  使得  $a_{ik} = a_{kj} = 1$ , 则必有  $a_{ij} = 1$ 。 $R$  不具有传递性  $\Leftrightarrow A$  中存在某个  $k$ , 使得  $a_{ik} = a_{kj} = 1$ , 但是  $a_{ij} = 0$ 。

于是由此可以得到传递关系  $R$  的中途点判别法:

- 1) 依次选取  $A$  中主对角线上元素  $a_{kk} (k = 1, 2, \dots, n)$  (并以此元素为中心点划横、纵线各一条, 即在第  $k$  行与第  $k$  列上各划一条线, 可用实线表示);
- 2) 对第  $k$  行元素中依次找出所有非零元素, 设为  $a_{kj} (1 \leq j \leq n)$ , (并在此元素所在的第  $j$  列上划一条线, 可用虚线表示), 显然,  $a_{kj} = 1$ ;
- 3) 对第  $k$  列元素中依次找出所有非零元素, 设为  $a_{ik} (1 \leq i \leq n)$  (并在此元素所在的第  $i$  行上划一条线, 可用虚线表示), 显然,  $a_{ik} = 1$ ;
- 4) 判别: 若 2)、3) 中两条虚线的交点处的元素非零, 则可以判别关系  $R$  是可传递的, 反之则不是(见图 1)。

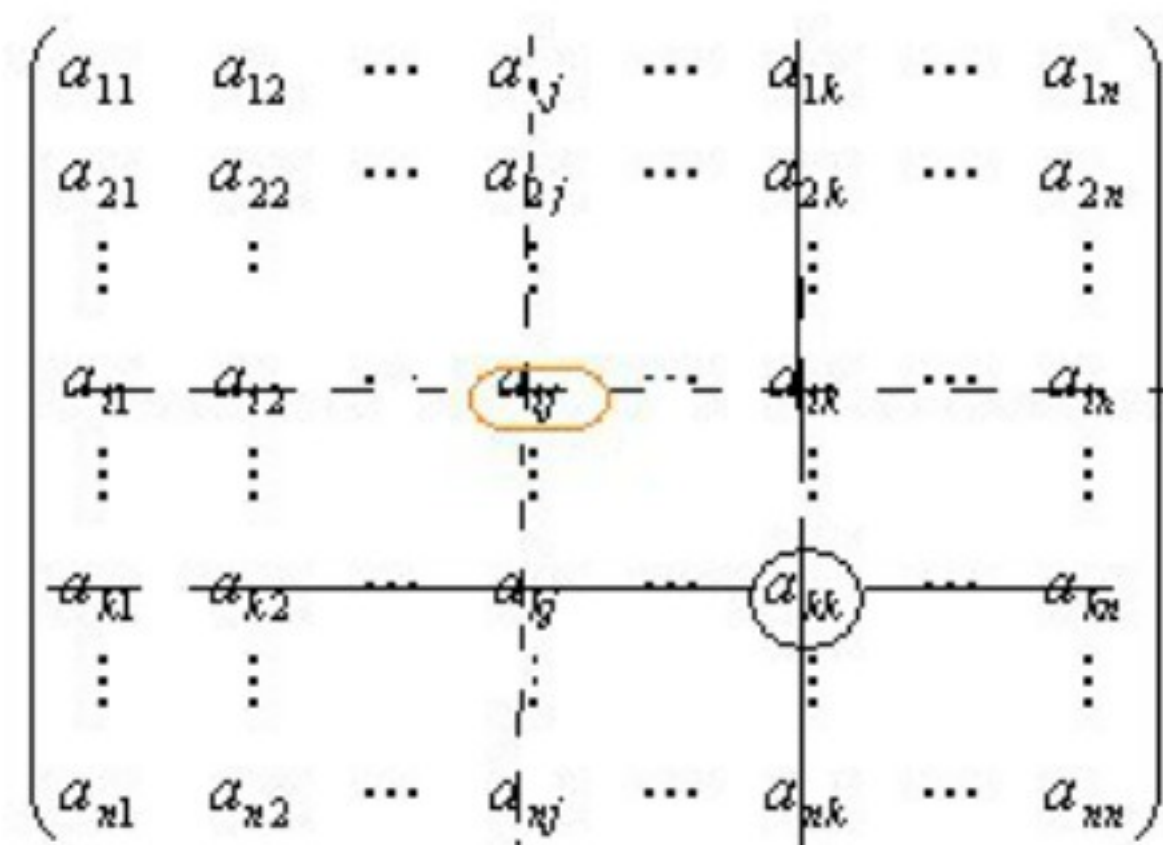


图 1 中途点判别法示意图

例 1: 已知

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ ,  $R = \{ \langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle, \langle b, c \rangle, \langle d, c \rangle, \langle e, c \rangle, \langle e, d \rangle, \langle e, e \rangle \}$ , 试判断  $R$  的传递性。

解: 先写出  $R$  的关系矩阵  $M$

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

当  $k = 1$  时，第一列元素全为 0，当  $k = 2$  时，对第二行、第二列画实线寻找 1 元素可得  $a_{23} = a_{12} = 1$ ，然后对第三列、第一行画虚线可得  $a_{13} = 1$ ，如下图 2 所示。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图 2  $k=2$  判别示意图

当  $k = 3$  时，第三行元素全为 0，当  $k = 4$  时，对第四行、第四列画实线寻找 1 元素可得  $a_{43} = a_{54} = 1$ ，然后对第三列、第五行画虚线可得  $a_{53} = 1$ ，如下图 3 所示。

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

图 3  $k=4$  判别示意图

当  $k = 5$  时，第五列元素全为 0，当  $k = 6$  时，只有  $a_{66} = 1$ ，显然成立。

综上得此关系是传递的。此种方法尤其适用于关系矩阵阶数较小时的判断。

### 3.2 方法二：复合矩阵法

设  $M$  是  $R$  的关系矩阵， $M[i, j]$  表示第  $i$  行第  $j$  列的元素。根据上面定理即  $R$  具有传递性  $\Leftrightarrow M^2 \subset M$ ，只要考查关系矩阵  $M$  中的零元素，当  $a_{ij} = 0$  时，看  $M^2$  中对应位置的  $b_{ij}$  是否为零，若  $b_{ij} = 0$ ，这说明  $R$  是传递的，若  $b_{ij} = 1$ ，则  $R$  不是传



递的。

如例 1 题得

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$M^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由复合矩阵判断法得此关系是可传递的。

此种方法尤其适用于零元素个数较少时的判断。

### 3.3 方法三：十字型法<sup>[8]</sup>

如下图所示，若  $a_{ik} = 1, i \neq k, i = 1, 2, \dots, n$ ，在第  $i$  行上画一条横线，若还有  $a_{kj} = 1, k \neq j, j = 1, 2, \dots, n$ ，则在第  $j$  列画一条竖线，则它们交于  $a_{ij}$  处，若  $a_{ij} = 1$ ，则  $R$  是可传递的；若  $a_{ij} = 0$ ，则  $R$  不是可传递的。若  $a_{ik} = 1, a_{kj} = 1$ ，并有  $k = j$ ，则作的两条线能交于  $a_{ik} = 1$  处。故可略去不作，此法也适用于零元素较多的情形（见图 4）。

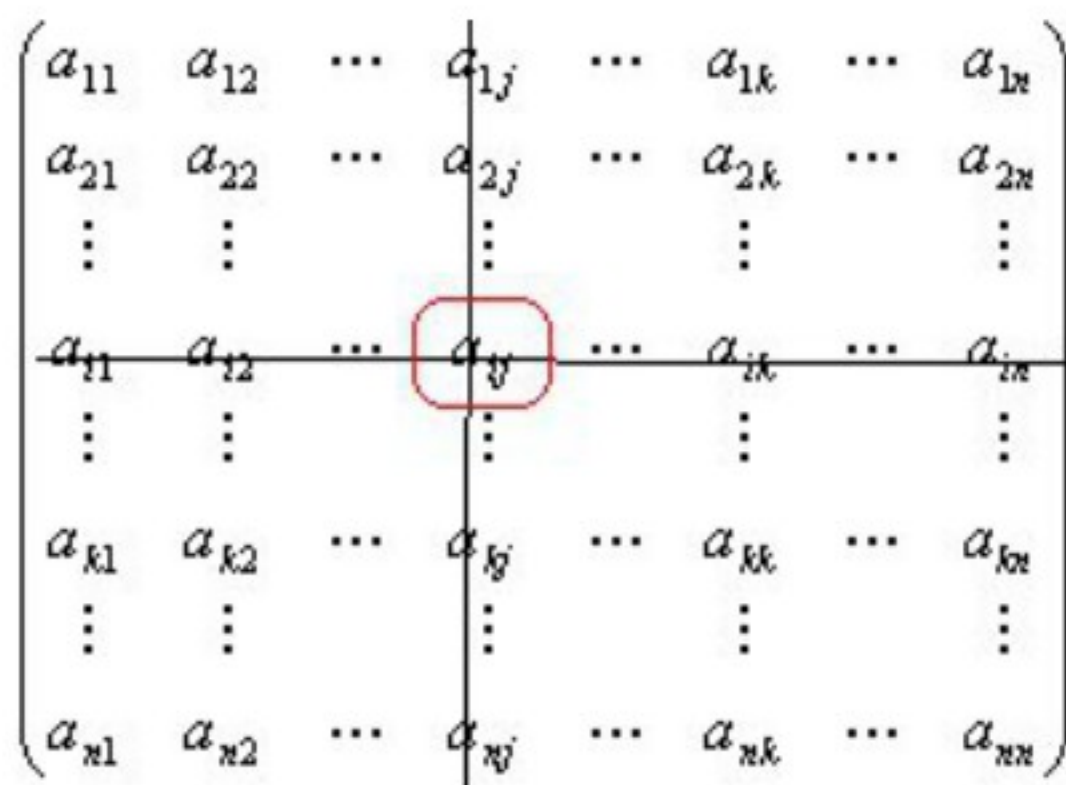


图 4 十字型判别法示意图

同样对例题 1 进行判别，

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

其中  $a_{12} = a_{23} = 1$ ，于是对第一行第三列画实线交于  $a_{13}$ ，且  $a_{13} = 1$ ；又有  $a_{54} = a_{43} = 1$ ，同样对第五行第三列画实线交于  $a_{53}$ ，且  $a_{53} = 1$ ，所以由十字型判别法得此关系传递。见图 5。

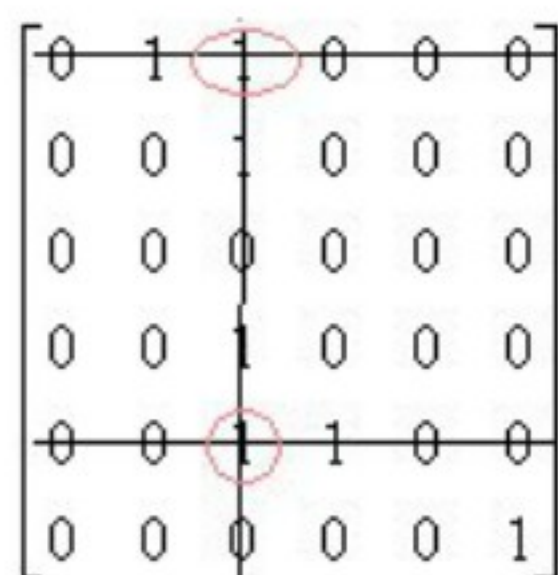


图 5 判别示意图

### 3.4 方法四：传递闭包法

传递闭包的定义：设  $R$  是非空集合  $A$  上的关系， $R$  的传递闭包是  $A$  上的关系  $R'$ ，使得  $R'$  满足以下条件：

- 1)  $R'$  是传递的
- 2)  $R \subseteq R'$
- 3) 对  $A$  上任何包含  $R$  的传递关系  $R''$  有  $R' \subseteq R''$

传递闭包记作  $t(R)$ 。根据传递性的定义可知  $R$  是传递的当且仅当  $t(R) = R$ 。故根

据 Warshall 算法<sup>[1]</sup>：

- 1) 置矩阵  $M$ ；
- 2) 置  $j = 1$ ；
- 3) 对所有  $i$ ，如果  $M[i, j] = 1$ ，则对  $k = 1, 2, \dots, n$ ，置  $M[i, k] = M[i, k] + M[j, k]$ ；
- 4)  $j = j + 1$ ；
- 5) 如果  $j \leq n$ ，则转到步骤(3)，否则停止。

可算出传递闭包矩阵，再比较是否与原关系矩阵相等，若相等则此关系是传递的，



否则不传递。根据 Warshall 算法的特点,只要将矩阵的行之间作对应逻辑加即可断定  $R$  是否是传递关系,即对于关系矩阵  $M$  中的非零元  $a_{ij} = 1$  将第  $j$  行元素对应加到(逻辑加)第  $i$  行元素上去,如果运算后,矩阵有变化,则  $R$  不是可传递的,如果矩阵没变化,则  $R$  是可传递的。此类算法适用于零元素较多的矩阵。

同样对例题 1 进行判别,

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由 Warshall 算法计算的矩阵序列如下所示:

因为第一列元素全为 1 故  $M_1$  不变, 得

$$M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

又因为  $M_1$  中第二列有  $a_{12} = 1$ , 所以把第二行加到(逻辑加)第一行得  $M_2$ ,

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同样对  $M_2$  的第三列寻找非 0 元素, 有  $a_{13} = a_{23} = a_{43} = a_{53} = 1$ , 于是依次把第三行的元素加到第一、二、四、五行得  $M_3$ 。

$$M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

同理可算得

$$M_4 = M_5 = M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

又因为  $t(R) = M_6$ ，且  $M_6 = M$ ，由传递闭包判别法得此关系是可传递的。

显然就这么笔算，显得有点复杂，为了简便，本文将算法在计算机用 C++ 给予了实现，如下：

```
#include <cstdlib>
#include <iostream>
#include <stdio.h>
#include <math.h>
using namespace std;

main()
{
    int n,k,j,i,flag3=1;
    printf("输入关系矩阵的维数 n:");
    scanf("%d",&n);
    FILE *fp;
    int m1[n][n],m3[n][n];
    fp=fopen("关系矩阵 1.txt","r");
    if(fp==NULL)
    {
        printf("cannot open 关系矩阵 1.txt\n");exit(0);
    }
    for(k=0;k<n;k++)
    for(j=0;j<n;j++)
        fscanf(fp,"%d",&m1[k][j]); //把文件中的关系矩阵存在数组 m1 中
    printf("关系矩阵 1:\n\n");
    for(k=0;k<n;k++)
    {
        for(j=0;j<n;j++)
            printf("%d ",m1[k][j]);
        printf("\n");
    }
    for(k=0;k<n;k++)
    {
        for(j=0;j<n;j++)
            m3[k][j]=m1[k][j];
    }
    for(i=0;i<n;i++)
        for(j=0;j<n;j++)
            for(k=0;k<n;k++)
```



```

        {
            if(m3[i][j]&&(m3[i][k]||m3[j][k]))
                m3[i][k]=1;
        }
    printf("\n 关系矩阵 1 的传递闭包为:\n\n");
    for(i=0;i<n;i++)
    { for(j=0;j<n;j++)
        printf("%2d",m3[i][j]);
        printf("\n");
    }
    for(k=0;k<n;k++)
    for(j=0;j<n;j++)
    {
        if(m3[k][j]>m1[k][j]) flag3=0;
    }
    if(flag3)
        printf("\n 具有传递性\n\n");
    else
        printf("\n 不具有传递性\n\n");

    system("PAUSE");
}

```

结果如下：

```

G:\DEV-CPP\传递闭包法.exe
输入关系矩阵的维数n:6
关系矩阵1:
0 1 1 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 0 0
0 0 0 0 0 1

关系矩阵1的传递闭包为:
0 1 1 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0
0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 0 0
0 0 0 0 0 1

具有传递性
请按任意键继续. . .

```

显然与以上结果相同。