·大学教学·

# 均匀圆柱体对其中心轴转动惯量的计算方法

刘 娜 刘继兵

(湖北师范学院 物理与电子科学学院, 湖北 黄石 435002)

**摘 要**: 在普通物理教材中, 大多教材里直接写出均匀圆柱体对其中心轴转动惯量的表达式, 而没有写出详细求解过程。本文通过选取不同的微元, 运用几种方法计算了均匀圆柱体对其中心轴的转动惯量。

**关键词**: 均匀圆柱体; 转动惯量; 计算方法

**中图分类号**: O415 **文献标识码**: A **文章编号**: 1006-7353(2011)04-0025-02

转动惯量是大学物理中刚体力学部分一个十分重要的物理量, 大多数普通物理教材[1]中仅直接写出均匀圆柱体对其中心轴转动惯量的表达式, 而没有详细写出求解过程。我们通过选取不同的微元, 运用几种方法对其进行计算[2][3]。设均匀圆柱体的质量为 $m$, 底面半径为 $R$, 体密度为 $\rho$, 高为 $L$。

**方法 1**

建立如图 1 所示的直角坐标系, 在坐标 $z$ 处取一厚度为 $dz$ 的圆盘作为微元, 此圆盘的质量 $dm = \rho\pi R^2 dz$, 由圆盘对中心轴的转动惯量表达式, 其对 $z$ 轴的转动惯量 $dI = \frac{1}{2}R^2 dm = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 dz$。

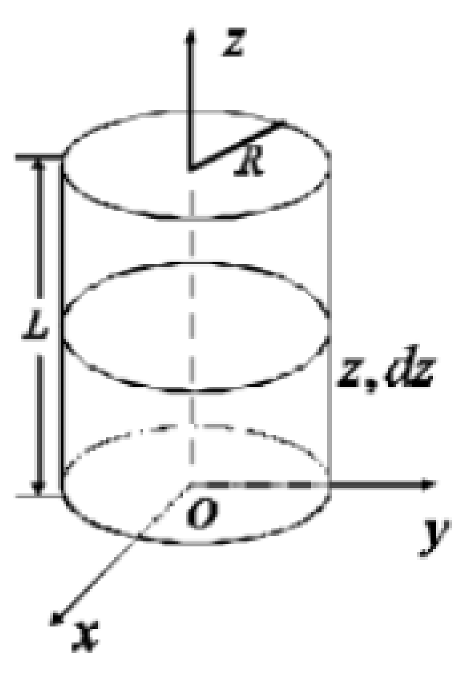


图 1

则整个圆柱体的转动惯量

$$I = \int dI = \int_0^L \frac{1}{2}\rho\pi R^4 dz = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 L = \frac{1}{2}mR^2。$$

**方法 2**

取底面半径为 $r$, 厚度为 $dr$ 的圆柱面作为微元(如图 2), 则其质量 $dm = \rho 2\pi r L dr$, 转动惯量 $dI = r^2 dm = 2\pi\rho L r^3 dr$。

则整个圆柱体的转动惯量

$$I = \int dI = \int_0^R 2\pi\rho L r^3 dr = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 L = \frac{1}{2}mR^2$$

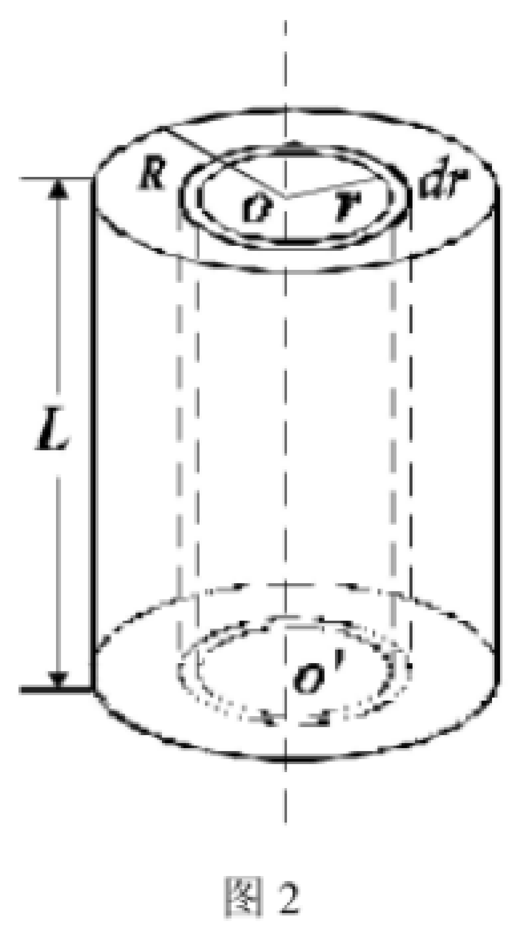


图 2

收稿日期: 2011-04-20.

基金项目: 2009 年湖北师范学院教研项目, 项目编号: 2009027; 2010 年度湖北师范学院青年基金项目, 项目编号: 2010C19.

作者简介: 刘娜(1982—), 女, 山东省淄博市人, 硕士, 研究方向: 理论物理.

**方法 3**

类似方法 2, 先将将圆柱体分成很多无限薄的圆柱面, 圆柱面的底面半径为 $r$, 厚度为 $dr$, 再取线度为 $dl$ 的细长棒作为微元(图 3 为截面图), 极坐标为 $\theta$, 细长棒长为 L, 则质量 $dm = \rho L dr dl = \rho L dr \cdot r d\theta$, 转动惯量 $dI = r^2 dm = \rho L r^3 dr d\theta$ 。

则整个圆柱体的转动惯量

$$I = \int dI = \rho L \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 L = \frac{1}{2}mR^2$$

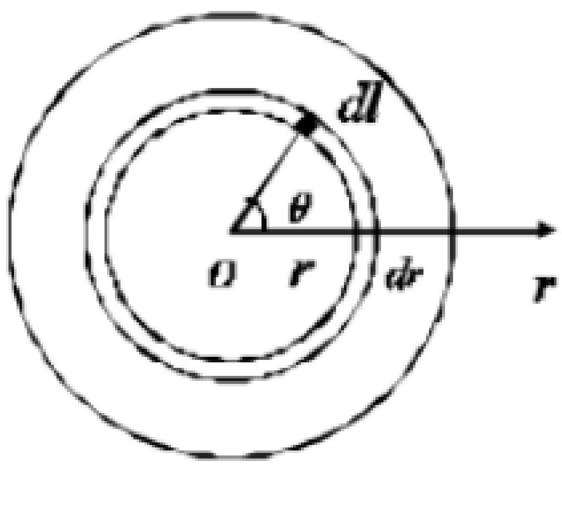


图 3

**方法 4**

利用柱坐标进行计算。在圆柱体内取任意微元 $dv$, 坐标为 $(r, \theta, z)$, 则 $dm = \rho r dr d\theta dz$, 此微元的转动惯量 $dI = r^2 dm = \rho r^3 dr d\theta dz$ 。

则整个圆柱体的转动惯量

$$I = \int dI = \rho \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2}\rho\pi R^4 L = \frac{1}{2}mR^2$$

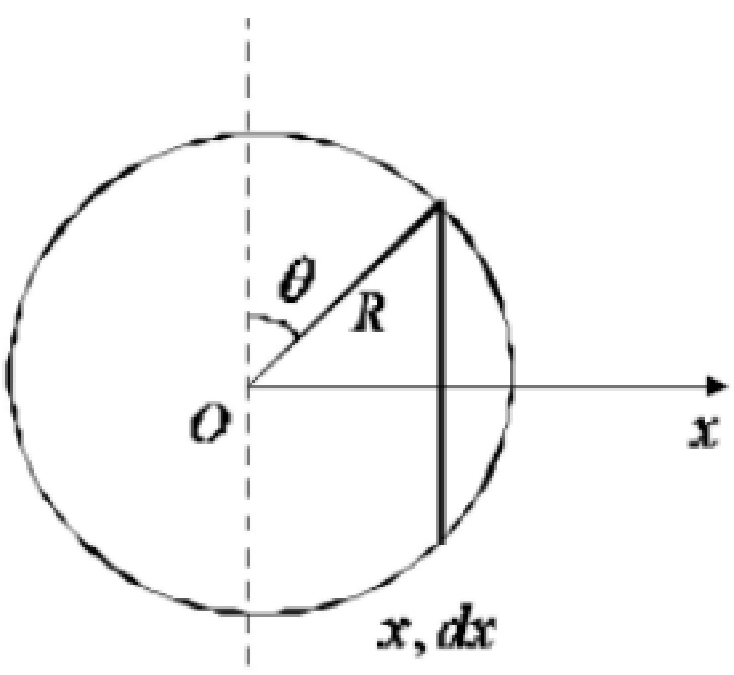


图 4

**方法 5**

建 $x$ 轴, 方向垂直于中心轴, 图 4 为圆柱体底面, 取坐标为 $x$, 厚度为 $dx$ 的长方形薄板作为微元, 此薄板长为 $L$, 宽为 $2R\cos\theta$。先计算此薄板的转动惯量。在薄板上取一细长棒, 如图 5, 此细长棒长为 $2R\cos\theta$, 宽为 $dl$, 质量 $dm = \rho \cdot 2R\cos\theta dx dl$ 。

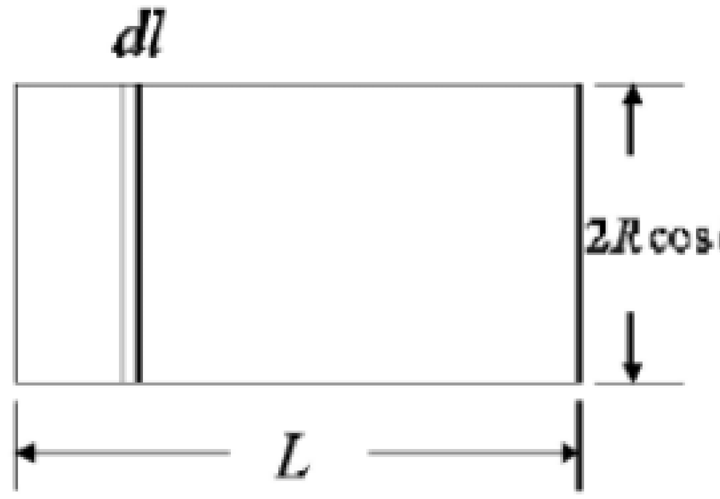


图 5

则细长棒到转轴距离为 $R\sin\theta$, 由平行轴定理, 细长棒对转轴的转动惯量

$$dI' = (R\sin\theta)^2 dm + \frac{1}{12}(2R\cos\theta)^2 dm$$
$$= 2\rho R^3 \sin^2\theta\cos\theta dx dl +$$

$\frac{2}{3}\rho R^3\cos^3\theta dx dl$ 由此得薄板对转轴的转动惯量

$$dI = \rho dx \int_0^L \left(2R^3\sin^2\theta\cos\theta + \frac{2}{3}R^3\cos^3\theta\right) dl$$
$$= 2\rho L R^3 \left(\sin^2\theta\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right) dx$$

由 $x = R\sin\theta$ 得: $dx = R\cos\theta d\theta$, 将上式中的 $dx$ 替换并作积分, 得到整个圆柱体的转动惯量

$$I = \int dI$$
$$= 2\rho L R^4 \cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin^2\theta\cos^2\theta + \frac{1}{3}\cos^4\theta\right) d\theta$$
$$= \frac{1}{2}\rho\pi R^4 L = \frac{1}{2}mR^2$$

**参 考 文 献**

[1] 程守洙, 江之永. 普通物理学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1998.
[2] 同济大学数学系. 高等数学[M]. 北京: 高等教育出版社, 2007.
[3] 史博, 张辉, 麻晓敏. 圆柱体对垂直其中心轴并过中心的转轴转动惯量的几种计算方法[J]. 物理与工程, 2010, 20(5): 67-68.