第一节　对弧长的曲线积分

1．计算$\int_L \sqrt{1+4y}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为抛物线$y=x^2 \quad (0\le x\le 2)$．【答案：$\frac{38}{3}$】

2. 计算$\int_L ye^{-x}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为曲线$x=\ln(1+t^2),\ y=2\arctan t-t+3$，由$t=0$到$t=1$间的一段弧.

【答案：$\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}$】

3.计算$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$,其中$L$是圆弧　$\rho=2\cos\theta$.【答案：8】

4.计算$\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$,其中$\Gamma$为空间曲线$\begin{cases} x^2+y^2=a^2, \\ z=1 \end{cases}$ $(a>0)$.【答案：$2\pi a(a^2+1)$】

5.设螺旋形弹簧一圈的方程为$x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$,其中$a>0,\ 0\le t\le 2\pi$,它的线密度$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求它关于$z$轴的转动惯量$I_z$.【答案：$\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(2a^2+\frac{8}{3}k^2\pi^2)$】

第二节　对坐标的曲线积分

1. 计算$\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}\,y$，其中$L$是上半椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，方向为顺时针方向.【答案：$-\frac{16}{3}$】

2. 计算$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}\,x+(x-y)\,\mathrm{d}\,y$,其中：

（1）L是从$A(1,1)$经B（2,1）到$C(2,3)$的折线段；【答案：$\frac{5}{2}$】

（2）L是从$A(1,1)$到$C(2,3)$的直线段.【答案：$\frac{5}{2}$】

3.计算$\int_\Gamma x\,\mathrm{d}\,x+y\,\mathrm{d}\,y+(x+y-1)\,\mathrm{d}\,z$，其中$\Gamma$为由点$A(1,1,1)$到点$B(1,3,4)$的有向线段.【答案：10】

4. 在变力 $\vec{F}$ 的作用下，一质点沿螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt \end{cases}$（常数 $a>0, b>0$）从点 $A(a,0,0)$ 移动到点 $B(a,0,2\pi b)$，$\vec{F}$ 的方向始终指向原点,大小与该点到原点的距离成正比,比例系数为 $k>0$.

求: (1) $\vec{F}$ 的坐标表达式;【答案：$\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$】

(2) $\vec{F}$ 对质点所做的功.【答案：$-2kb^2\pi^2$】

5. 设 Γ 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧，试将第二类的曲线积分 $\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ 化成第一类的曲线积分.【答案：$\int_\Gamma \frac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\,\mathrm{d}s$】

6. 计算曲线积分 $\oint_\Gamma (z-y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从 z 轴正向看去 Γ 为顺时针方向.【答案：-2π】

第三节　格林公式及其应用

1 .计算$\oint_L (y^2 + xe^{2y})\,\mathrm{d}x + (x^2e^{2y} - x^2)\,\mathrm{d}y$，其中$L$为闭曲线$(x-2)^2 + y^2 = 4$取正向.

【答案：-16π】

2. 计算$\int_L (2y + y^3)\,\mathrm{d}x + (4x + 3xy^2)\,\mathrm{d}y$，其中$L$是沿曲线$y = \sqrt{1-x^2}$从点$\mathrm{A}(0,1)$到点$\mathrm{B}(1,0)$的有向弧.【答案：$-\dfrac{\pi}{2}$】

3. 计算 I=$\int_L (2xy^3 - y^2\cos x)\,\mathrm{d}x + (1 - 2y\sin x + 3x^2y^2)\,\mathrm{d}y$，其中 L 为在抛物线$2x = \pi y^2$上由点$O(0,0)$到 A（$\dfrac{\pi}{2}$,1)的一段有向弧.【答案：$\dfrac{\pi^2}{4}$】

4. 验证在整个xOy面内$(x^4 + 4xy^3)\,\mathrm{d}x + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\mathrm{d}y$是某个函数的全微分，并求出一个这样的

函数.【答案：$\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5$】

5. 设曲线积分$\int\limits_L xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$与路径无关,其中具有连续导数,且$\varphi(0)=0$,

(1) 求$\varphi(x)$的表达式；(2) 计算$\int_{(0,0)}^{(1,1)}xy^2\,\mathrm{d}x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}y$.【答案：(1) x^2；(2) $\frac{1}{2}$】

6.设质点A在力$\vec{F}=\frac{e^x}{1+y^2}\vec{i}+\frac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}\vec{j}$的作用下,沿着曲线$x^2+(y-1)^2=1$的逆时针方向从

$O(0,0)$ 运动到 $A(1,1)$,求在此运动过程中力 $\vec{F}$ 对质点 A 所作的功.【答案：$\frac{1}{2}(e-1)$】

7.计算 $\oint_L \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$,其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$, L 的方向为逆时针方向.【答案：$-\pi$】

第四节 对面积的曲面积分

1.计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{1}{(1+x+y)^2}\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为$x+y+z=1$，$x\geq 0$，$y\geq 0$，$z\geq 0$.【答案：$\sqrt{3}(\ln 2-\frac{1}{2})$】

2.计算$\iint\limits_{\Sigma}(xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax$所割下的部分（$a>0$）.

【答案：$\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$】

3. 已知物质曲面$z=3-(x^2+y^2)$ $(z\geq 1)$的面密度$\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z$，求此物质曲面的质量.

【答案：13π】

4. 求密度为常数 μ 的圆锥曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$ 的质心坐标.【答案：$(0,0,\dfrac{2}{3})$】

5. 设 Σ 为椭球面 $\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分（即 $z\ge 0$ 部分），点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，Π 为 Σ 在点 P 的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 Π 的距离，求

(1) $\rho(x,y,z)$ 的表达式；【答案：$\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$】

(2) $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.【答案：$\dfrac{3}{2}\pi$】

第五节　对坐标的曲面积分

1. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围立体表面取外侧.【答案：$\dfrac{\pi}{2}$】

2.计算 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 取上侧.【答案：$\dfrac{4}{3}\pi a^3$】

3.将第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为第一类曲面积分并计算其值，其中 Σ 为曲面 $z=8-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2$ 在 xOy 平面上方部分的上侧.【答案：192π】

第六节　高斯公式　通量与散度

1.计算积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y-z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z+3x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，取内侧.【答案：$-4\pi R^3$】

2.计算积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中$\Sigma$为抛物面$z=x^2+y^2$与圆柱面$x^2+y^2=1$和坐标面在第二卦限中所围立体表面的外侧.【答案：$\dfrac{\pi}{8}$】

3.计算积分$\iint\limits_{\Sigma}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$,$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在平面$z=4$下方的部分,取下侧.
【答案： 0】

4. 计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，取下侧.【答案：$\dfrac{1}{2}\pi$】

5.求向量场$\vec{A}=(x^3-2yz)\vec{i}+(y^3-3xz)\vec{j}+(z^3-xy)\vec{k}$的散度$\operatorname{div}\vec{A}$.【答案：$3x^2+3y^2+3z^2$】

6. 设流速场$\vec{v}=(x^3+z^2)\vec{i}+(y^3+x^2)\vec{j}+(z^3+y^2)\vec{k}$, 求在单位时间内穿过上半球面

$z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 上侧的流量 Φ.【答案：$\dfrac{\pi \mathrm{R}^4(24\mathrm{R}+5)}{20}$】

7. 设 Σ 是一光滑的闭曲面, V 是 Σ 所围的立体体积, $\vec{r}$ 是点（x,y,z）的向径, $r=|\vec{r}|$, Σ 在点（x,y,z）处的外法线方向的单位向量 $\vec{n}^o=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$,其中 α, β, γ 为 Σ 面上点（x,y,z）处的外法线方向的方向角, θ 是 $\vec{n}^o$ 与 $\vec{r}$ 的夹角.

（1）求 $\cos\theta$ 的表达式;【答案：$\cos\theta=\dfrac{x}{r}\cos\alpha+\dfrac{y}{r}\cos\beta+\dfrac{z}{r}\cos\gamma$】

（2）证明 $V=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} r\cos\theta\,\mathrm{d}S$.

第七节　斯托克斯公式　环流量与旋度

1. 利用斯托克斯公式, 计算$\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\,\mathrm{d}\,x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}\,y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}\,z$, 其中$\Gamma$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线, 从$z$轴正向看, Γ为逆时针方向.【答案：-24】

2. 求向量场$\vec{A}=-y\vec{i}+x\vec{j}+c\vec{k}$（c 为常数）,沿闭曲线$\Gamma$的环流量, 其中$\Gamma$为柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=0$的交线,从$z$轴正向看方向为逆时针方向. 【答案：$2\pi$】

3. 求向量场$\vec{A}=(3z-2y)\vec{i}+(4x-5z)\vec{j}+(y-3x)\vec{k}$的旋度$\mathbf{rot}\ \vec{A}$. 【答案：$6\vec{i}+6\vec{j}+6\vec{k}$】

第一节　常数项级数的概念和性质

1. 根据定义判断下列级数是否收敛,若收敛求出其和:

(1) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}+\cdots$;　【答案：收敛, $\frac{1}{2}$ 】

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$;　【答案：发散】

2. 利用性质判别下列级数的敛散性:

(1) $\frac{8^2}{9}+\frac{8^3}{9^2}+\frac{8^4}{9^3}+\cdots+\frac{8^{n+1}}{9^n}+\cdots$　【答案：收敛】

(2) $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{2n}-\frac{1}{3^n}+\cdots$;　【答案：发散】

(3) $\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots$；【答案：发散】

(4）$0.01+\sqrt{0.01}+\sqrt[3]{0.01}+\cdots+\sqrt[n]{0.01}+\cdots$.　【答案：发散】

3.设数列$\{na_n\}$收敛，级数$\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n-a_{n-1})$收敛，证明级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$收敛.

第二节　常数项级数的审敛法

1.用比较审敛法判别下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+a^2}}$；【答案：发散】

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$；【答案：收敛】

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{\sqrt{n}})$；【答案：发散】

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2n^3-n}$.【答案：收敛】

2. 用比值审敛法或根值审敛法判别下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{n!}$;【答案：发散】

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+1}{3n-1})^{n}$；【答案：收敛】

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{4}{5})^{n}$;【答案：收敛】

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[n]{n}}{2^{n}}$;【答案：收敛】

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^{n}}\cos^{2}\frac{n\pi}{3}$.【答案：收敛】

3.根据正常数a的取值,讨论下列级数的敛散性

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}$ ；　　【答案：当$a>1$时,收敛；当$0<a\le 1$时发散】

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n\cdot n!}{n^n}$. 【答案：当$0<a<e$时收敛；当$a\ge e$时发散】

4.判别下列交错级数的敛散性，如果收敛，是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $\frac{1}{\ln 2}-\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 5}+\cdots$;　　【答案：条件收敛】

(2) $1-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\cdots$;【答案：绝对收敛】

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$;　　【答案：条件收敛】

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{n^2}}{n!}$.　【答案：发散】

5.设正项数列$\{a_n\}$单调减少，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1+a_n}\right)^n$是否收敛？并说明理由.

6. 证明题：

（1）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛，又 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 是收敛的正项级数，证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 绝对收敛；

（2）设有方程 $x^n + nx - 1 = 0$，其中 n 为正整数，证明此方程存在唯一正实根 x_n，并证明当 $\alpha > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$ 收敛.

第三节　幂级数

1.求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2\cdot 2^n}$；【答案：$[-2\,,2]$】

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{2}{n})^n x^n$ ；【答案：$(-1\,,1)$ 】

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$；【答案：$(-\sqrt{2}\,,\sqrt{2})$】

（4）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{\sqrt{n}}$.【答案：$[4\,,6)$ 】

2.利用逐项求导或逐项积分，求下列级数的和函数:

(1) $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\cdots$;【答案：$\arctan x(-1\le x\le 1)$】

(2) $1\cdot 2x+2\cdot 3x^2+\cdots+n(n+1)x^n+\cdots$;【答案：$\frac{2x}{(1-x)^3}(-1<x<1)$】

(3) $1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n+1}+\cdots$. 【答案：$\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln(1-x), & -1\le x<0, 0<x<1\\ 1, & x=0\end{cases}$】

3.构造恰当的幂级数，求数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$的和. 【答案：3】

第四节　函数展开成幂级数

1.利用已知函数的幂级数展开式, 将下列函数展开成 x 的幂级数.

(1) xe^{x^2};　【答案：$xe^{x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}(-\infty<x<+\infty)$】

(2) $\ln(a+x)\ (a>0)$;　【答案：$\ln(a+x)=\ln a+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{na^n}x^n\,(-a<x\le a)$】

(3) $\cos^2 x$;　【答案：$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}\,(-\infty<x<+\infty)$】

(4) $\frac{1}{(1-x)^2}$.　【答案：$\frac{1}{(x-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}(-1<x<1)$.】

2. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $(x+4)$ 的幂级数.

【答案：$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n\ (-6<x<-2)$.】

3. 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展开成 x 的幂级数，并求数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和.

【答案：$\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\quad(-1\le x<1)$；$\frac{\pi}{4}$】

4. 试将 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x})$ 展开成 x 的幂级数, 并证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}=1$.

【答案：$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}x^{n-1}\ (-\infty<x<+\infty)$.】

第七节　傅立叶级数

1. 已知周期函数 $f(x)$ 的周期为 2π，求 $f(x)$ 的傅里叶级数的和函数 $S(x)$,如果 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上的表达式为：

(1) $f(x)=x^2,-\pi\le x<\pi$;【答案：$S(x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$】

(2) $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi\le x<0,\\ 0, & 0\le x<\pi.\end{cases}$【答案：$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\ne(2k+1)\pi,\ k\in Z\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=\pm\pi,\pm3\pi,\cdots\end{cases}$】

2. 将下列以 2π 为周期的函数展开成傅里叶级数,其中函数 $f(x)$ 在一个周期内的表达式分别为:

(1) $f(x)=x,-\pi\le x<\pi$;【答案：$f(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx\ (-\infty<x<+\infty,\ x\ne\pm\pi,\pm3\pi,\cdots)$】

(2) $f(x)=\begin{cases}-\pi, & -\pi\le x\le 0,\\ x, & 0<x<\pi\end{cases}$.【答案：$f(x)=-\dfrac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n-1}{n^2\pi}\cos nx+\dfrac{1-2\cdot(-1)^n}{n}\sin nx]$,

$(-\infty < x < +\infty \quad , \quad x \neq 0 \,, \pm\pi \,, \pm 2\pi \,, \pm 3\pi \,, \cdots)$】

3. 将函数 $f(x) = x^2 (-\pi \le x \le \pi)$ 展开成周期为 2π 的傅立叶级数,并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和.

【答案：$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos nx}{n^2} \,, (-\pi \le x \le \pi) \,; \frac{\pi^2}{6}$】

4. 设 $f(x)$ 以 10 为周期, 且 $f(x) = 10 - x, 5 < x \le 15$,试将 $f(x)$ 展开成傅立叶级数.

【答案：$f(x) = \frac{10}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{5} x \,, (-\infty < x < +\infty \,, x \neq \pm 5 \,, \pm 15 \,, \cdots).$】

5. 将函数 $f(x)=x-1\,(0\le x\le 2)$ 展开为周期为 4 的余弦级数.

【答案：$f(x)=-\dfrac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}\cos\dfrac{(2n-1)\pi x}{2}$, $0\le x\le 2$.】

第一节　微分方程的基本概念

1．验证下列各题中的函数是所给微分方程的解：

（1）$(1-x^2)y''-xy'=0, y=\arcsin x$；

（2）$y''-3y'+2y=0, y=C_1e^x+C_2e^{2x}$.

2.已知下列各题中的函数是某微分方程的通解,求满足相应初始条件的特解：

（1）$y=x+C\sqrt{1+x^2}, y\big|_{x=0}=1$；【答案：$y=x+\sqrt{1+x^2}$】

（2）$y=C_1e^x+C_2e^{2x}, y\,|_{x=0}=0, y'\,|_{x=0}=1$.【答案：$y=-e^x+e^{2x}$】

3.已知曲线上任意一点(x,y)处的切线垂直于该点与坐标原点的连线, 试建立该曲线满足的微分方程.
【答案：$yy'+x=0$】

4.设质量为m的物体,在时间$t=0$时自由下落,所受空气阻力与物体的下落速度成正比（比例系数为k）,试建立物体下落的距离s与时间t的函数所满足的微分方程.

第二节　可分离变量的微分方程

1．求下列微分方程的通解:

(1) $xy'-y\ln y=0$；【答案：$y=e^{Cx}$】

（2）$y'=2x(y^2+y')$；　【答案：$\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{2}\ln|2x-1|+x+C$】

(3) $(x+xy^2)\mathrm{d}x-(x^2y+y)\mathrm{d}y=0$.【答案：$y^2=C(1+x^2)-1$】

2.求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

(1) $y'=e^{2x-y},\quad y|_{x=0}=0$;【答案：$e^y=\dfrac{1}{2}e^{2x}+\dfrac{1}{2}$】

(2) $\cos y\,\mathrm{d}\,x+(1+e^{-x})\sin y\,\mathrm{d}\,y=0,\ y|_{x=0}=\dfrac{\pi}{4}$.【答案：$\cos y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+e^{x})$】

3.一条曲线通过点（2,3）,它在两坐标轴间的任一切线线段均被切点平分,求此曲线方程.【答案：$xy=6$】

4.已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续且满足 $f(x)=e^{-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}$，求 $f(x)$.【答案： $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$】

第三节　齐次方程

1．求下列微分方程的通解:

（1）$xy' - y = x\tan\dfrac{y}{x}$ ；　【答案：$\sin\dfrac{y}{x} = Cx$ 】

（2）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{4xy}{x^2 + y^2}$.【答案：$y = C(y^2 - 3x^2)^2$ 】

2．求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$(y^2 - 3x^2)\,\mathrm{d}\,y + 2xy\,\mathrm{d}\,x = 0, y\big|_{x=0} = 1$；【答案：$y^3 = y^2 - x^2$ 】

（2）$y' = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}, y\big|_{x=1} = 2$.【答案：$y^2 = 2x^2(\ln|x| + 2)$】

3.设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续,若由曲线 $y = f(x)$,直线 $x = 1, x = t(t > 1)$ 与 x 轴所围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体体积为 $v(t) = \dfrac{\pi}{3}\left[t^2 f(t) - f(1)\right]$.试求 $y = f(x)$ 所满足的微分方程,并求该微分方程满足条件 $y\big|_{x=2} = \dfrac{2}{9}$ 的解.【答案：$y = \dfrac{x}{1 + x^3}$】

第四节　一阶线性微分方程

1．求下列微分方程的通解:

（1）$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\dfrac{2y}{x+1}=(x+1)^{\frac{5}{2}}$ ；【答案：$y=(x+1)^2[\dfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}+C]$】

（2）$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=x+\sin t$；【答案：$x=Ce^t-\dfrac{1}{2}(\cos t+\sin t)$】

(3) $y\mathrm{d}x-(x-y^2\cos y)\mathrm{d}y=0$；【答案：$x=y(C-\sin y)$】

（4）$y'-\dfrac{4}{x}y=x\sqrt{y}$.【答案：$\sqrt{y}=x^2(\dfrac{1}{2}\ln|x|+C)$】

2.求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$x^2y'+xy=y^2,\quad y\big|_{x=1}=1$;【答案：$y=\dfrac{2x}{1+x^2}$】

（2）$x\ln x\,\mathrm{d}\,y+(y-\ln x)\,\mathrm{d}\,x=0,\quad y\big|_{x=e}=1$.【答案：$y=\dfrac{1}{2}(\ln x+\dfrac{1}{\ln x})$】

3.设 $y=f(x)$ 是第一象限内连接点 $A(0,1),B(1,0)$ 的一段连续曲线,$M(x,y)$ 为该曲线上任一点,点 C 为 M 在 x 轴上的投影,O 为坐标原点.若梯形 $OCMA$ 的面积与曲边三角形 CBM 的面积之和为 $\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{1}{3}$,求:（1）$f(x)$ 满足的微分方程;【答案：$f'(x)-\dfrac{1}{x}f(x)=x-\dfrac{1}{x},f(0)=1$】

（2）$f(x)$ 的表达式.【答案：$f(x)=(x-1)^2$】

4. 设 $x>0$ 时, 函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(1)=2$, 在 $x>0$ 时存在可微函数 $u=u(x,y)$ 使得

$\mathrm{d}u = 4x^3 y\,\mathrm{d}x + xf(x)\,\mathrm{d}y$，求函数 $f(x)$ 及 $u(x,y)$.【答案：$f(x)=x^3+\dfrac{1}{x}, u(x,y)=y(x^4+1)+C$】

5.一质量为 m 的质点作直线运动,从速度为零的时刻起,有一个和时间成正比（比例系数为 k_1）的水平力作用于它,同时质点又受到介质的阻力,此阻力与速度成正比（比例系数为 k_2）,求质点的运动速度 v 与时间 t 的函数关系.【答案：$v=\dfrac{mk_1}{k_2^2}e^{-\frac{k_2}{m}t}+\dfrac{k_1}{k_2}(t-\dfrac{m}{k_2})$】

第五节　可降阶的高阶微分方程

1.求下列微分方程的通解:

（1）$y''' = e^{2x} - \cos x$;【答案：$y = \frac{1}{8}e^{2x} + \sin x + \frac{1}{2}C_1 x^2 + C_2 x + C_3$】

（2）$xy'' + y' = 0$;【答案：$y = C_1 \ln|x| + C_2$】

(3) $yy'' - y'^2 = 0$.【答案：$y = C_2 e^{C_1 x}$】

2.求下列微分方程满足所给初始条件的特解:

（1）$(1+x^2)y'' = 2xy',\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=3$;【答案：$y = x^3 + 3x + 1$】

（2）$y''=e^{2y}$，$y\big|_{x=0}=y'\big|_{x=0}=0$.【答案：$e^{2y}-1=\tan^2 x$】

3.设 $y=y(x)$ 是一条凸的连续曲线,其上任意一点 (x,y) 处的曲率为 $\dfrac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$,此曲线上点（0,1）处的切线方程为 $y=x+1$.求该曲线方程.【答案：$y=\ln\left|\cos(x-\dfrac{\pi}{4})\right|+1+\dfrac{1}{2}\ln 2$】

4.设有一质量为 m 的物体,在空中由静止开始下落,如果空气阻力为 kv（其中 k 为常数,v 为物体的运动速度）.试求物体下落的距离 s 与时间 t 的函数关系.【答案：$s=\dfrac{mg}{k}(t+\dfrac{m}{k}e^{-\frac{k}{m}t}-\dfrac{m}{k})$】

第六节　高阶线性微分方程

1.验证函数 $y_1=e^{2x}, y_2=xe^{2x}$ 都是方程 $y''-4y'+4y=0$ 的解,并写出方程的通解.
【答案： $y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}$ 】

2.验证 $Y(x)=C_1e^x+C_2e^{2x}$ 是方程 $y''-3y'+2y=\mathrm{e}^{5x}$ 所对应齐次方程的通解, $y*=\dfrac{1}{12}e^{5x}$ 是原方程的一个特解,并写出原方程的通解.【答案： $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\dfrac{1}{12}e^{5x}$ 】

3.已知 $y_1=x$ 是方程 $x^2y''+xy'-y=0$ 的一个特解,用代换 $y=xu(x)$ 求方程的另一个特解 y_2 ,并写出此方程的通解.【答案： $y=C_1x+\dfrac{C_2}{x}$ 】

4.设函数 $y_1^*=1, y_2^*=x^2+1, y_3^*=e^x$ 是非齐次线性方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=f(x)$ 的三个特解,求对应齐次线性方程的通解以及原方程的通解.

第七节　常系数齐次线性微分方程

1．求下列微分方程的通解：

（1）$y''-3y'-4y=0$；【答案：　$y=C_1e^{4x}+C_2e^{-x}$ 】

（2）$y''-2y'=0$；【答案：　$y=C_1+C_2e^{2x}$ 】

（3）$y''-4y=0$；【答案：　$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-2x}$ 】

（4）$y''-6y'+9y=0$；【答案：　$y=(C_1+C_2x)e^{3x}$ 】

（5）$y''+6y'+13y=0$；【答案：　$y=e^{-3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$】

（6）$y''' - 5y'' + 4y' = 0$.【答案： $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{4x}$】

2.求下列微分方程满足所给初始条件的特解：

（1）$y'' - 3y' - 4y = 0,\quad y\big|_{x=0} = 0$，$y'\big|_{x=0} = -5$;【答案： $y = -e^{4x} + e^{-x}$】

（2）$y'' - 4y' + 13y = 0,\quad y\big|_{x=0} = 0$，$y'\big|_{x=0} = 3$.【答案： $y = e^{2x}\sin 3x$】

3.试求由方程 $y'' - y' = 0$ 所确定的一条积分曲线 $y = y(x)$,使它在点（0,1）处与直线 $y = 3x + 1$ 相切.

【答案： $y = -2 + 3e^x$】

1. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,而 $z=f(e^x\sin y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=ze^{2x}$,求 $f(u)$.

【答案: $f(u)=C_1e^u+C_2e^{-u}$ 】

第八节　常系数非齐次线性微分方程

1.求下列微分方程的通解：

（1）$2y''+y'-y=2e^{x}$;【答案：　$y=C_1e^{\frac{x}{2}}+C_2e^{-x}+e^{x}$】

（2）$y''-3y'+2y=xe^{x}$;【答案：　$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}-(\frac{x^2}{2}+x)e^{x}$】

（3）$y''+4y'+5y=\sin x$;【答案：　$y=e^{-2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)-\frac{1}{8}\cos x+\frac{1}{8}\sin x$】

（4）$y''+4y=\cos^2 x$.【答案：$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}x\sin 2x$】

2.求下列微分方程满足已给初始条件的特解：

（1）$y''+y=2x^2-3,\ y\big|_{x=0}=1,\ y'\big|_{x=0}=2$;【答案：$y=8\cos x+2\sin x+2x^2-7$】

（2）$y''-10y'+9y=e^{2x}$，$y\big|_{x=0}=\dfrac{6}{7}$，$y'\big|_{x=0}=\dfrac{33}{7}$.【答案：　$y=\dfrac{1}{2}e^{x}+\dfrac{1}{2}e^{9x}-\dfrac{1}{7}e^{2x}$】

3. 设函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $y''-3y'+2y=2e^{x}$，且其图形在点（0,1）处的切线与曲线 $y=x^{2}-x+1$ 在该点的切线重合,求函数 $y=y(x)$.【答案：　$y=e^{x}-2xe^{x}$】

4. 设函数 $f(x)$ 具有二阶连续导数, $f(0)=0,\ f'(0)=1$,且曲线积分

$\int_L [x^2 y + xy^2 - f(x)y]\mathrm{d}x + [f'(x) + x^2 y]\mathrm{d}\,y$ 与积分路径无关,

（1）求 $f(x)$；【答案：$f(x) = 2\cos x + \sin x + x^2 - 2$】

（2）计算 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} [x^2 y + xy^2 - f(x)y]\mathrm{d}\,x + [f'(x) + x^2 y]\mathrm{d}\,y$.【答案：$I = -2\sin 1 + \cos 1 + \dfrac{5}{2}$】

5.设函数 $\varphi(x)$ 连续,且满足 $\varphi(x) = e^x + \int_0^x (t - x)\varphi(t)\mathrm{d}t$,求 $\varphi(x)$.

【答案：$\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(\cos x + \sin x + e^x)$】

《高等数学》第二学期数值实验报告

任课教师__________学号__________姓名__________成绩__________

实验日期__________电脑机号__________

一、实验内容

熟练掌握MATLAB软件的基本命令和操作，用MATLAB软件解决函数的极限、导数、极值与最值等的计算问题.

二、实验题目：用MATLAB软件求解下面各题(题目中的m为你学号的最后两位数)

1. 求 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,m)}\dfrac{m\sin(xy^2)}{xy}$ 的极限；　　2.求函数$z=x^m\cos my$的二阶偏导数；

3. 计算$\int_0^1 dy\int_0^{1-y}\mathrm{d}\,x\int_0^{1-x-y}[1+mx+(m+1)y+(m-1)z]^m\,\mathrm{d}\,z$；

4. 已知制作一个背包的成本为50元.如果每一个背包的售出价为x元，售出的背包数为$n=my-x$，其中$x+y=100$.问什么样的售出价格能带来最大利益?

★输入命令：

1.

2.

3.

4.

★运行结果：

1.

2.

3.

4.

三、实验感想：

实验老师：__________

批改日期：__________