第2章 线性规划的基本性质

李政伟

中国矿业大学 计算机科学与技术学院

2.1标准形式及图解法

2.1.1 标准形式

$$\begin{cases} \min \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \qquad i = 1, \dots, m, \\ \qquad x_j \geq 0, \qquad\qquad j = 1, \dots, n, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

假设

$b_i \geq 0$，否则两端乘以-1.

$x_j \geq 0$，否则$x_j = x_j' - x_j''$，

其中$x_j' \geq 0$，$x_j'' \geq 0$.

当$x_j \geq l_j$时，令$x_j' = x_j - l_j$

当$x_j \leq u_j$时，令$x_j' = u_j - x_j$

$$\begin{cases} \min \boldsymbol{cx} \\ \text{s.t.}\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \\ \qquad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

其中$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，$\boldsymbol{c}$是n维行向量， $\boldsymbol{b}$是m维列向量。

2.1.1 标准形式

$$\begin{aligned}
&\min c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s.t.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
&\qquad\; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\vdots \\
&\qquad\; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \le b_m \\
&\qquad\; x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

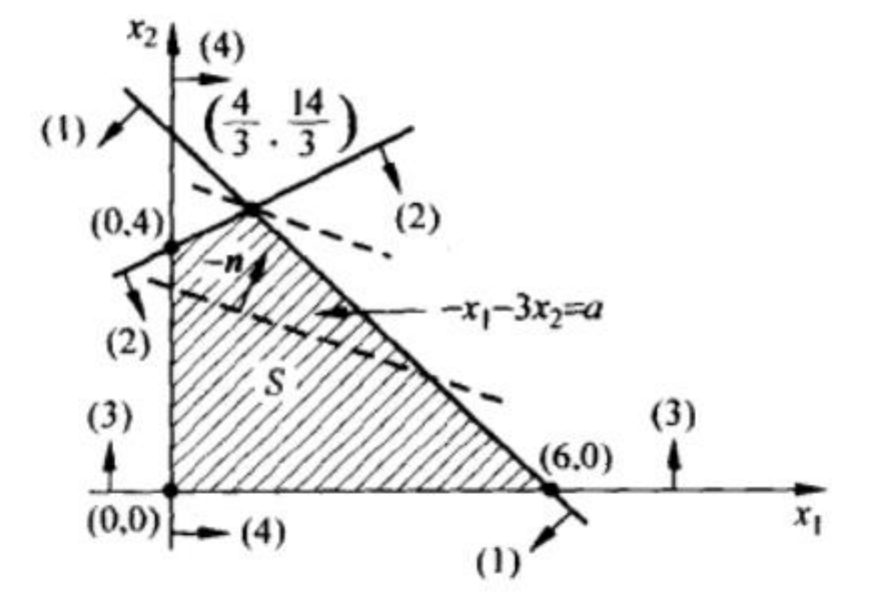
引入**松弛变量**$x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$，则式(2.1.3)化成下列标准形式

$$\begin{aligned}
&\min c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
&\text{s.t.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\
&\qquad\; a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\
&\qquad\qquad\qquad\vdots \\
&\qquad\; a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \\
&\qquad\; x_j \ge 0, \qquad j = 1, \dots, n+m
\end{aligned}$$

2.1.2 图解法

例2.1.1 求解下列线性规划问题：

$$\min -x_1 - 3x_2$$
$$\text{s.t. } x_1 + x_2 \leq 6$$
$$-x_1 + 2x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$



解 平面上的多边形，其顶点为：

$$(0,0), \quad (6,0), \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{14}{3}\right), \quad (0,4)$$

目标函数等值线方程为

$$-x_1 - 3x_2 = \alpha$$

当α取不同数值时，得到不同的等值线。

等值线的法向量n=(-1,- 3)^T，也是目标函数的梯度，指向目标函数增大的方向。

用上述方法得到极小点(4/3, 14/3)^T.

2.2 基本性质

2.2.1 可行域

定理2.2.1 线性规划的可行域是凸集。

2.2.2 最优极点

$$\min \boldsymbol{cx}$$
$$\text{s.t.}\ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b},$$
$$\boldsymbol{x} \geq 0, \qquad (2.1.2)$$

设可行域的极点为$\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{x}^{(k)}$，极方向为$\boldsymbol{d}^{(1)}, \boldsymbol{d}^{(2)}, \dots, \boldsymbol{d}^{(l)}$，根据定理1.4.1，任何可行点$\boldsymbol{x}$可以表示为

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \boldsymbol{x}^{(j)} + \sum_{j=1}^{l} \mu_j \boldsymbol{d}^{(j)}$$
$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1,$$
$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k,$$
$$\mu_j \geq 0, j = 1, \dots, l, \qquad (2.2.1)$$

2.2.2 最优极点

$$\min \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{cx}^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (\boldsymbol{cd}^{(j)})\mu_j$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j &= 1, \\ \lambda_j \geq 0, j &= 1, \ldots, k, \\ \mu_j \geq 0, j &= 1, \ldots, l, \end{aligned} \qquad (2.2.2)$$

由于$\mu_j \geq 0$，可以任意大，因此若对于某个j有$\boldsymbol{cd}^{(j)} < 0$，则$(\boldsymbol{cd}^{(j)})\mu_j$随着$\mu_j$的增大而无限减小，从而目标函数值趋向$-\infty$。对于这种情形，称该问题是**无界**的，或称不存在有限最优值。

如果对于所有j，有$\boldsymbol{cd}^{(j)} \geq 0$，这时为极小化目标函数，令

$$\mu_j = 0, j = 1, \ldots, l,$$

2.2.2 最优极点

$$\min \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(j)})\lambda_j$$

$$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, \qquad (2.2.4)$$

$$\lambda_j \geq 0, j = 1, \dots, k,$$

在上述问题中，令

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(p)} = \min_{1\leq j\leq k} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(j)} \qquad (2.2.5)$$

当

$$\lambda_p = 1 \text{及} \lambda_j = 0, j \neq p \qquad (2.2.6)$$

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(j)})\lambda_j + \sum_{j=1}^{l} (\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}^{(j)})\mu_j$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(j)})\lambda_j$$

$$\geq \sum_{j=1}^{k} (\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(p)})\lambda_j = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(p)}$$

因此极点$\boldsymbol{x}^{(p)}$是线性规划(2.1.2)的最优解。

2.2.2 最优极点

定理2.2.2 设线性规划(2.1.2)的可行域非空，则有以下结论

(1)线性规划(2.1.2)存在有限最优解的充要条件是所有$\boldsymbol{c}\boldsymbol{d}^{(j)}$为非负数。其中$\boldsymbol{d}^{(j)}$是可行域的极方向。

(2)若线性规划(2.1.2)存在有限最优解，则目标函数的最优值可在某个极点上达到。

在本书中，以下把存在有限最优解均称为存在最优解，而把无界问题归入不存在最优解的情形。

2.2.3 最优基本可行解

在线性规划(2.1.2)中，设矩阵$\boldsymbol{A}$的秩为m，又假设$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}]$，其中$\boldsymbol{B}$是$m$阶可逆矩阵.

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\\boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}$$

将$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$改写为

$$\boldsymbol{Ax}=[\boldsymbol{B},\boldsymbol{N}]\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\\boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}=\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{Bx}_B+\boldsymbol{Nx}_N=\boldsymbol{b}$$

上式两端左乘$\boldsymbol{B}^{-1}$，并移项，得到

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N$$

特别地，令$\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{0}$，则得到解

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\\boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

2.2.3 最优基本可行解

定义2.2.1

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix} \qquad (2.2.9)$$

称为方程组$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$的一个**基本解**。
$\boldsymbol{B}$称为**基矩阵**。简称为**基**。
$\boldsymbol{x}_B$的各分量称为**基变量**。基变量的全体$x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_m}$称为一组基。
$\boldsymbol{x}_N$的各分量称为**非基变量**.
若$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geq\boldsymbol{0}$，则称为约束条件$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$， $\boldsymbol{x}\geq 0$ 的**基本可行解**。相应地，称$\boldsymbol{B}$为**可行基矩阵**， $x_{B_1}, x_{B_2}, \dots, x_{B_m}$称为一组**可行基**。
若$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}>\boldsymbol{0}$，即基变量的取值均为正数，则称基本可行解**是非退化的**。
若满足$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geq\boldsymbol{0}$且至少有一个分量是零，则称基本可行解是**退化的基本可行解**。

2.2.3 最优基本可行解

例2.2.1 考虑下列不等式定义的多面集：

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ \qquad\quad x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0, \end{cases} \tag{2.2.10}$$

引进松弛变量x_3, x_4，把(2. 2. 10)式化成

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad\quad = 8 \\ \qquad\quad x_2 \qquad + x_4 = 2 \\ x_j \geq 0, j = 1, \ldots, 4 \end{cases} \tag{2.2.11}$$

试求(2.2.11)式的基本可行解。

2.2.3 最优基本可行解

解 方程组的系数矩阵 $A=(p_1,p_2,p_3,p_4)=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$,

令 $B=(p_1,p_2)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

解得基本解 $x^{(1)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(4,2,0,0)^T$

令 $B=(p_1,p_4)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

解得基本解 $x^{(2)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(8,0,0,2)^T$

令 $B=(p_2,p_3)=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$

解得基本解 $x^{(3)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(0,2,4,0)^T$

令 $B=(p_2,p_4)=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$

解得基本解 $x^{(4)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(0,4,0,-2)^T$

令 $B=(p_3,p_4)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

解得基本解 $x^{(5)}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(0,0,8,2)^T$

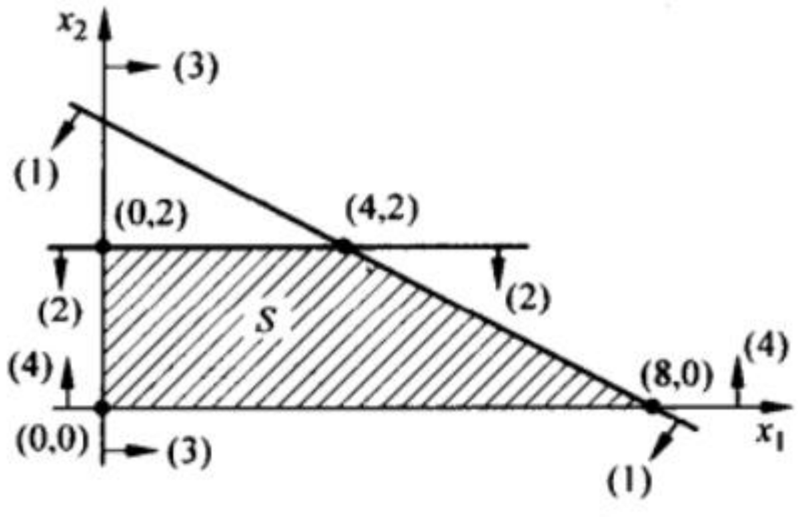


图 2.2.1

2.2.3 最优基本可行解

$x^{(1)}=(4,2,0,0)^T$　　$x^{(4)}=(0,4,0,-2)^T$

$x^{(2)}=(8,0,0,2)^T$　　$x^{(5)}=(0,0,8,2)^T$

$x^{(3)}=(0,2,4,0)^T$

其中，$x^{(1)}$，$x^{(2)}$，$x^{(3)}$，$x^{(5)}$是基本可行解，$x^{(4)}$则不是。

一般地，当A是$m\times n$矩阵，A的秩为m时，基本可行解的个数不会超过

$$\binom{n}{m}=\frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

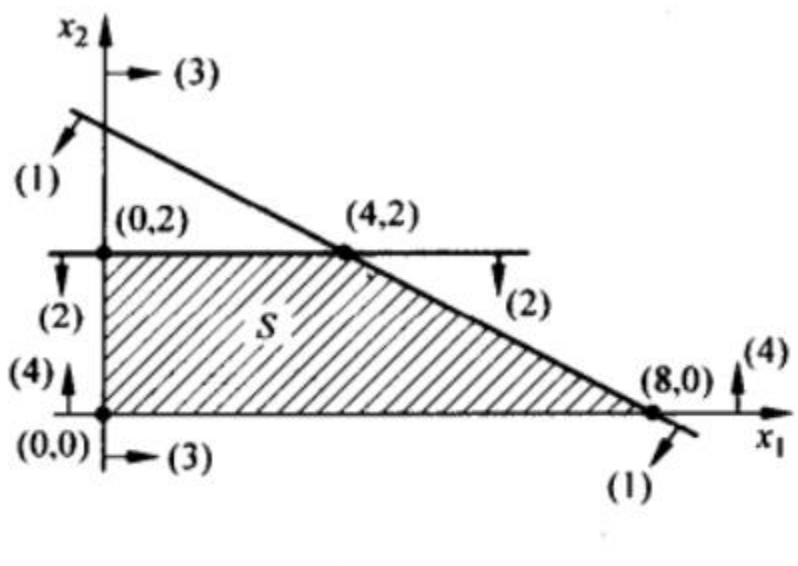


图 2.2.1

注：对于线性规划(2.1.2)，基本可行解与可行域的极点之间总存在着对应关系.

定理2.2.3 令 $K=\{x|Ax=b,x\geq 0\}$，A是$m\times n$矩阵，A的秩为m，则K的极点集与$Ax=b,x\geq 0$的基本可行解集等价。

定理2.2.4 如果$Ax=b,x\geq 0$有可行解，则一定存在基本可行解。其中A是$m\times n$矩阵，其秩为m。

The end