第一节　对弧长的曲线积分

1．计算$\int_L \sqrt{1+4y}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为抛物线$y=x^2 \quad (0 \le x \le 2)$.【答案：$\frac{38}{3}$】

2. 计算$\int_L ye^{-x}\,\mathrm{d}s$，其中$L$为曲线$x=\ln(1+t^2),\ y=2\arctan t - t + 3$，由$t=0$到$t=1$间的一段弧.

【答案：$\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}\ln 2+\frac{3\pi}{4}$】

3.计算$\oint_L \sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s$，其中$L$是圆弧 $\rho = 2\cos\theta$.【答案：8】

4.计算$\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$,其中$\Gamma$为空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2=a^2,\\ z=1\end{cases}$ $(a>0)$.【答案：$2\pi a(a^2+1)$】

5.设螺旋形弹簧一圈的方程为$x=a\cos t, y=a\sin t, z=kt$,其中$a>0,\ 0\le t\le 2\pi$,它的线密度$\rho(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$,求它关于$z$轴的转动惯量$I_z$.【答案：$\pi a^2\sqrt{a^2+k^2}(2a^2+\frac{8}{3}k^2\pi^2)$】

第二节　对坐标的曲线积分

1. 计算$\int_L (x^2+2xy)\,\mathrm{d}\,y$, 其中$L$是上半椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1$，方向为顺时针方向.【答案：$-\frac{16}{3}$】

2. 计算$\int_L (x+y)\,\mathrm{d}\,x+(x-y)\,\mathrm{d}\,y$,其中：

（1）L是从$A(1,1)$经B（2,1）到$C(2,3)$的折线段；【答案：$\frac{5}{2}$】

（2）L是从$A(1,1)$到$C(2,3)$的直线段.【答案：$\frac{5}{2}$】

3.计算$\int_\Gamma x\,\mathrm{d}\,x+y\,\mathrm{d}\,y+(x+y-1)\,\mathrm{d}\,z$, 其中$\Gamma$为由点$A(1,1,1)$到点$B(1,3,4)$的有向线段.【答案：10】

4. 在变力 $\vec{F}$ 的作用下，一质点沿螺旋线 $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt \end{cases}$（常数 $a>0, b>0$）从点 $A(a,0,0)$ 移动到点 $B(a,0,2\pi b)$，$\vec{F}$ 的方向始终指向原点,大小与该点到原点的距离成正比,比例系数为 $k>0$.

求：(1) $\vec{F}$ 的坐标表达式；【答案：$\vec{F} = -k(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})$】

(2) $\vec{F}$ 对质点所做的功.【答案：$-2kb^2\pi^2$】

5. 设 Γ 为曲线 $x=t, y=t^2, z=t^3$ 上相应于 t 从 0 变到 1 的曲线弧，试将第二类的曲线积分 $\int_\Gamma P(x,y,z)\,\mathrm{d}x + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$ 化成第一类的曲线积分.【答案：$\int_\Gamma \dfrac{P+2xQ+3yR}{\sqrt{1+4x^2+9y^2}}\,\mathrm{d}s$】

6.计算曲线积分 $\oint_\Gamma (z-y)\,\mathrm{d}x + (x-z)\,\mathrm{d}y + (x-y)\,\mathrm{d}z$，其中 Γ 是曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x-y+z=2 \end{cases}$，从 z 轴正向看去 Γ 为顺时针方向.【答案：-2π】

第三节　格林公式及其应用

1 .计算 $\oint_L (y^2+xe^{2y})\,\mathrm{d}x+(x^2e^{2y}-x^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为闭曲线 $(x-2)^2+y^2=4$ 取正向.

【答案：-16π】

2. 计算 $\int_L (2y+y^3)\,\mathrm{d}x+(4x+3xy^2)\,\mathrm{d}y$,其中 L 是沿曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 从点 A $(0,1)$ 到点 B $(1,0)$ 的有向弧.【答案：$-\dfrac{\pi}{2}$】

3. 计算 I=$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)\,\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为在抛物线 $2x=\pi y^2$ 上由点 $O(0,0)$ 到 A（$\dfrac{\pi}{2}$,1）的一段有向弧.【答案：$\dfrac{\pi^2}{4}$】

4. 验证在整个 xOy 面内 $(x^4+4xy^3)\,\mathrm{d}\,x+(6x^2y^2-5y^4)\,\mathrm{d}\,y$ 是某个函数的全微分，并求出一个这样的函数.【答案：$\frac{1}{5}x^5+2x^2y^3-y^5$】

5. 设曲线积分 $\int_L xy^2\,\mathrm{d}\,x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y$ 与路径无关,其中具有连续导数,且 $\varphi(0)=0$,

(1) 求 $\varphi(x)$ 的表达式；(2) 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,\mathrm{d}\,x+y\varphi(x)\,\mathrm{d}\,y$. 【答案：(1) x^2； (2) $\frac{1}{2}$】

6.设质点 A 在力 $\vec{F}=\dfrac{e^x}{1+y^2}\vec{i}+\dfrac{2y(1-e^x)}{(1+y^2)^2}\vec{j}$ 的作用下,沿着曲线 $x^2+(y-1)^2=1$ 的逆时针方向从 $O(0,0)$ 运动到 $A(1,1)$,求在此运动过程中力 $\vec{F}$ 对质点 A 所作的功.【答案：$\dfrac{1}{2}(e-1)$】

7.计算 $\oint_L \dfrac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{2(x^2+y^2)}$,其中 L 为圆周 $(x-1)^2+y^2=2$, L 的方向为逆时针方向.【答案：$-\pi$】

第四节　对面积的曲面积分

1.计算 $\iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{(1+x+y)^2} \mathrm{d}S$，其中 Σ 为 $x+y+z=1$，$x \geq 0$，$y \geq 0$，$z \geq 0$．【答案：$\sqrt{3}(\ln 2-\frac{1}{2})$】

2.计算 $\iint\limits_{\Sigma} (xy+yz+zx)\mathrm{d}S$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=2ax$ 所割下的部分（$a>0$）．

【答案：$\frac{64\sqrt{2}}{15}a^4$】

3. 已知物质曲面 $z=3-(x^2+y^2)$ $(z \geq 1)$ 的面密度 $\mu(x,y,z)=x^2+y^2+z$，求此物质曲面的质量.

【答案：13π】

4. 求密度为常数μ的圆锥曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}\ (0\le z\le 1)$的质心坐标.【答案：$(0,0,\dfrac{2}{3})$】

5. 设Σ为椭球面$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+z^2=1$的上半部分（即$z\ge 0$部分），点$P(x,y,z)\in\Sigma$，$\Pi$为$\Sigma$在点$P$的切平面，$\rho(x,y,z)$为点$O(0,0,0)$到平面$\Pi$的距离，求

(1) $\rho(x,y,z)$的表达式；【答案：$\left(\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$】

(2) $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.【答案：$\dfrac{3}{2}\pi$】

第五节 对坐标的曲面积分

1. 计算 $I=\oiint\limits_{\Sigma} z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$，其中 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=1$ 所围立体表面取外侧.【答案：$\dfrac{\pi}{2}$】

2.计算 $\iint\limits_{\Sigma} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x$，$\Sigma$ 为上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 取上侧.【答案：$\dfrac{4}{3}\pi a^3$】

3.将第二类曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为第一类曲面积分并计算其值，其中 Σ 为曲面 $z=8-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}y^2$ 在 xOy 平面上方部分的上侧.【答案：192π】

第六节 高斯公式 通量与散度

1.计算积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(y-z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(z+3x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$\Sigma$为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$，取内侧.【答案：$-4\pi R^3$】

2.计算积分$I=\oiint\limits_{\Sigma}y^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y+xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x$,其中$\Sigma$为抛物面$z=x^2+y^2$与圆柱面$x^2+y^2=1$和坐标面在第二卦限中所围立体表面的外侧.【答案：$\dfrac{\pi}{8}$】

3.计算积分$\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,$\Sigma$为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$在平面$z=4$下方的部分,取下侧.【答案： 0】

4. 计算$\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z+1)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$，取下侧.【答案：$\dfrac{1}{2}\pi$】

5.求向量场$\vec{A}=(x^3-2yz)\vec{i}+(y^3-3xz)\vec{j}+(z^3-xy)\vec{k}$的散度$\mathrm{div}\,\vec{A}$.【答案：$3x^2+3y^2+3z^2$】

6. 设流速场 $\vec{v}=(x^3+z^2)\vec{i}+(y^3+x^2)\vec{j}+(z^3+y^2)\vec{k}$，求在单位时间内穿过上半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 上侧的流量 Φ．【答案：$\dfrac{\pi \mathrm{R}^4(24\mathrm{R}+5)}{20}$】

7. 设 Σ 是一光滑的闭曲面，V 是 Σ 所围的立体体积，$\vec{r}$ 是点（x,y,z）的向径，$r=|\vec{r}|$，Σ 在点 (x,y,z) 处的外法线方向的单位向量 $\vec{n}^o=\cos\alpha\vec{i}+\cos\beta\vec{j}+\cos\gamma\vec{k}$，其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 为 Σ 面上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向角，θ 是 $\vec{n}^o$ 与 $\vec{r}$ 的夹角.

（1）求 $\cos\theta$ 的表达式；【答案：$\cos\theta=\dfrac{x}{r}\cos\alpha+\dfrac{y}{r}\cos\beta+\dfrac{z}{r}\cos\gamma$】

（2）证明 $V=\dfrac{1}{3}\oiint\limits_{\Sigma} r\cos\theta\,\mathrm{d}S$.

第七节　斯托克斯公式　环流量与旋度

1. 利用斯托克斯公式, 计算$\oint_{\Gamma}(y^2-z^2)\,\mathrm{d}x+(2z^2-x^2)\,\mathrm{d}y+(3x^2-y^2)\,\mathrm{d}z$, 其中$\Gamma$是平面$x+y+z=2$与柱面$|x|+|y|=1$的交线, 从$z$轴正向看, Γ为逆时针方向.【答案：-24】

2. 求向量场$\vec{A}=-y\vec{i}+x\vec{j}+c\vec{k}$（c 为常数）,沿闭曲线$\Gamma$的环流量, 其中$\Gamma$为柱面$x^2+y^2=1$与平面$z=0$的交线,从$z$轴正向看方向为逆时针方向.【答案：$2\pi$】

3. 求向量场$\vec{A}=(3z-2y)\vec{i}+(4x-5z)\vec{j}+(y-3x)\vec{k}$的旋度$\mathbf{rot}\,\vec{A}$.【答案：$6\vec{i}+6\vec{j}+6\overline{k}$】