一阶 *RC* 电路的零状态响应

RC 电路的零状态响应是指在换路前，电容元件初始储能 $u_C(0_-)=0$ 的情况下，由外加电源激励在电路中产生的响应。因此分析 RC 电路的零状态响应，实质就是分析电容的充电过程。

图 4 所示的 *RC* 电路中开关 S 闭合前，电容电压 $u_C(0_-)=0$，电路处于零状态。当 t=0 时刻开关 S 闭合，电路与直流电源接通，电源向电容元件开始充电。根据换路定律，换路瞬间 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=0$。

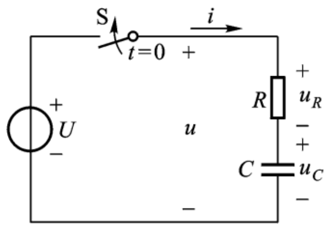


图 4　*RC* 充电电路

(1) 电容电压 u_C 的变化规律

根据基尔霍夫电压定律得

$$u_R+u_C=i_CR+u_C=U$$

将 $i_C=C\dfrac{du_C}{dt}$ 代入，得

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=U \qquad \text{一阶常系数线性非齐次微分方程}$$

(2) 解方程

微分方程的全解 u_C 由两部分组成，一个是特解特解 u_C'，另一个是通解 u_C''。即

$$u_C=u_C'+u_C''$$

u_C' 为特解，即稳态分量，当电路达到稳态时，电容器充电完毕，电容两端电压等于电源电压，即 $u_C'=u_C(\infty)=U$。

u_C'' 为对应的齐次方程的通解，对应的齐次方程为

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0$$

其解　　$u_C''=Ae^{pt}=Ae^{-\frac{t}{RC}}$

微分方程的全解为

$$u_C = u'_C + u''_C = U + Ae^{-\frac{t}{\tau}}$$

根据初始条件，定积分常数 A。当 $t = 0+= 0$ 时，

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0$$

所以

$$u_C(0_+) = U + A = 0$$

$$A = -U$$

则

$$u''_C = -Ue^{-\frac{t}{\tau}}$$

电容电压 u_C 的全解为

$$u_C = u'_C + u''_C = U + (-Ue^{-\frac{t}{\tau}}) = U(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

u_C 随时间变化曲线如图 5 所示。

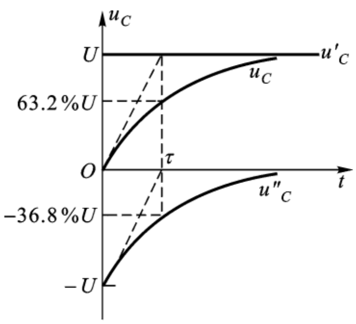


图 5 u_C 的变化曲线

由图可见，u'_C 不随时间变化，u''_C 按指数规律衰减而趋于零。因此，电压 u_C 按指数规律随时间增长而趋于稳态值。

充电电流 i_C 的变化规律为

$$i_C = C\frac{du_C}{dt} = \frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(3) u_C 与 i_C 随时间变化的响应曲线

u_C 与 i_C 随时间变化的响应曲线如图 6 所示。

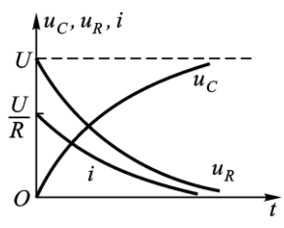


图 6 零状态时 u_C、i_C、u_R 变化曲线

由图可见，电压电压 u_C 随时间按指数规律增长，最后趋于稳定值 U；充电电

流i_C随时间指数规律从$i_c(0_+)=\dfrac{U}{R}$值逐渐衰减为零，这时充电结束。

(4) 时间常数

当$t=\tau$时，

$$u_C=U(1-e^{-\frac{t}{\tau}})=U(1-e^{-1})=0.632U$$

也就是$t=\tau$时，电容电压u_C上升到稳态值 U 的 63.2%。

在工程实际中，由于 t=(3～5)τ 时$u_C\approx U$，电容充电过程基本结束，电路达到稳态，这时电容电压的稳态值$u_C(\infty)=U$ 。

3. 一阶 *RC* 电路的全响应

RC 电路的全响应是指在换路前，电容元件具有初始储能，同时又有外施电源的激励，这时在电路中所产生的响应称 *RC* 电路的全响应。

(1) 电压 u_C 的变化规律

根据叠加定理，可以把 *RC* 电路的全响应看成是零输入响应$U_0e^{-\frac{t}{\tau}}$和零状态响应$U(1-e^{-\frac{t}{\tau}})$叠加的结果。即

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

$$u_C=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+U\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\quad(t\geq 0)$$

RC 电路的全响应实质上是稳态分量 U 和暂态分量叠加的结果。

全响应 = 零输入响应 + 零状态响应

即：

$$u_C=U_0\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}+U\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}})\quad(t\geq 0)$$

$$=U+(U_0-U)\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}\qquad(t\geq 0)$$

(2) 电流i_C的变化规律

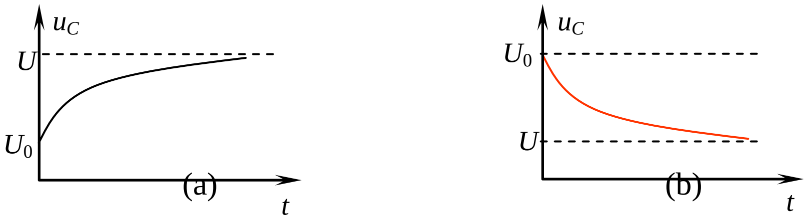
$$i_C=C\frac{du_C}{dt}=\frac{U-U_0}{R}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

(3) 讨论

在电容电压与电流表达式中，U 为电容电压的稳态值，U_0为电容电压的初始值。

当 $U>U_0$时，换路后，电容处于充电状态，u_C随时间按指数规律上升，响应曲线如图 7(a)所示，这时电流i_C为充电电流。

当 $U<U_0$时，则换路后，电容处于放电状态，u_C随时间按指数规律衰减，响应曲线如图 7(b)所示，这时电流i_C为放电电流。



7　全响应时 u_C 变化曲线

(a) $U>U_0$　　(b) $U<U_0$