第4章 对偶原理

李政伟

中国矿业大学 计算机科学与技术学院

对偶是一种普遍现象

修辞手法

窗含西岭千秋雪，门泊东吴万里船。

横眉冷对千夫指，俯首甘为孺子牛。

即从巴峡穿巫峡，便下襄阳向洛阳。

志士惜日短，愁人嫌夜长。

黑发不知勤学早，白首方悔读书迟。

企业管理

怎样充分利用现有人力、物力去完成更多的任务
怎样用最少的人力、物力消耗去完成给定的任务

4.1 线性规划中的对偶理论

一、拼盘销售问题

甲方：从原材料制作并销售拼盘
乙方：购买甲方的拼盘

原料	拼盘A	拼盘B	原料库存
苹果	5	4	1000
橘子	3	8	2000
托盘	1	1	500
拼盘售价	100	200	

甲方角度：在库存资源限制下，制定拼盘的销售数量，实现销售金额最大化

$$
\begin{aligned}
\max\ & 100x_1 + 200x_2 \\
\text{s.t.}\ & 5x_1 + 4x_2 \le 1000 \\
& 3x_1 + 8x_2 \le 2000 \\
& x_1 + x_2 \le 500 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}
$$

4.1 线性规划中的对偶理论

二、拼盘回购问题

甲方：以原材料形式回购拼盘，恢复库存
乙方：将从甲方购回的拼盘回售给甲方

原料	拼盘A	拼盘B	原料库存
苹果	5	4	1000
橘子	3	8	2000
托盘	1	1	500
拼盘售价	100	200	

甲方角度：在乙方拼盘回购价限制下，制定回购价格，使得回购成本最少。

$$\begin{aligned} \min\ & 1000y_1 + 2000y_2 + 500y_3 \\ \text{s.t.}\ & 5y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 100 \\ & 4y_1 + 8y_2 + y_3 \geq 200 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \max\ & 100x_1 + 200x_2 \\ \text{s.t.}\ & 5x_1 + 4x_2 \leq 1000 \\ & 3x_1 + 8x_2 \leq 2000 \\ & x_1 + x_2 \leq 500 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

1. 对称形式的对偶

原问题

$$\min \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{c}^T \in \mathbb{R}^n \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

$\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{m \times n} \quad \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} \Rightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \\ \boldsymbol{A}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} \geq b_1 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \geq b_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{A}_m\boldsymbol{x} \geq b_m \end{cases}$$

对偶问题

$$\max \boldsymbol{wb}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{wA} \leq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{w}^T \in \mathbb{R}^m$

$$\boldsymbol{wA} \leq \boldsymbol{c} \Rightarrow \boldsymbol{w}(\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \ldots, \boldsymbol{p}_n) \leq \boldsymbol{c} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{wp}_1 \leq c_1 \\ \boldsymbol{wp}_2 \leq c_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{wp}_n \leq c_n \end{cases}$$

根据对称对偶的定义，原问题中约束条件$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x} \geq b_i$的个数，恰好等于对偶变量的个数；原问题中变量的个数，恰好等于对偶问题中约束条件$\boldsymbol{wp}_j \leq c_j$的个数.

对偶问题的对偶

原问题

$$\min \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

其对偶问题

$$\max \boldsymbol{wb}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{wA} \leq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$$

等价于

$$\min \boldsymbol{w} * (-\boldsymbol{b})$$

$$\text{s.t.} \, \boldsymbol{w} * (-\boldsymbol{A}) \geq -\boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0}$$

对偶问题的对偶问题为

$$\max\, (-c)\boldsymbol{x}$$

$$\text{s.t.} \, (-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \leq -\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

等价于

$$\min \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

例4.1.1 设原问题为

$$
\begin{aligned}
\min\ & x_1 - x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \geq 5 \\
& x_1 - 2x_2 \geq 1 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{c} = (1, -1) \quad \boldsymbol{b} = (5,1)^{\boldsymbol{T}}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

那么，上述问题的对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max\ & 5w_1 + w_2 \\
\text{s.t.}\ & w_1 + w_2 \leq 1 \\
& w_1 - 2x_2 \leq -1 \\
& w_1, w_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

1. 对称形式的对偶

- **对称形式的对偶规划的要点**：

  (1) min变成max

  (2) 系数向量与右端向量互换

  (3) 系数矩阵转置

  (4) ≥ 变 ≤

- 原问题中约束条件的个数=对偶问题中变量的个数
- 原问题中变量的个数=对偶问题中约束条件的个数

主观题 10分

设置

设原问题为

$$
\begin{aligned}
\min\ & 8x_1 + 16x_2 + 12x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 4x_2 \ge 2 \\
& 2x_1 + 4x_3 \ge 3 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}
$$

列出其对偶问题。

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

2. 非对称形式的对偶

具有等式约束的线性规划问题

$$\min \boldsymbol{cx}$$
$$\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \qquad (4.1.3)$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

改写成等价形式

$$\min \boldsymbol{cx}$$
$$\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$$
$$-\boldsymbol{Ax} \geq -\boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

即

$$\min \boldsymbol{cx}$$
$$\text{s.t.}\ \ \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \geq \begin{bmatrix} \boldsymbol{b} \\ -\boldsymbol{b} \end{bmatrix} \qquad (4.1.4)$$
$$\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$$

根据定义，(4.1.4)的对偶问题是

$$\max \boldsymbol{ub} - \boldsymbol{vb}$$
$$\text{s.t.}\ \ (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} \\ -\boldsymbol{A} \end{pmatrix} = \boldsymbol{uA} - \boldsymbol{vA} \leq \boldsymbol{c}$$
$$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \geq \boldsymbol{0}$$

令$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$，显然$\boldsymbol{w}$没有非负限制，得

$$\max \boldsymbol{wb}$$
$$\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{wA} \leq \boldsymbol{c} \qquad (4.1.5)$$

$\boldsymbol{w}$无非负限制

例4.1.2 给定原问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\
& 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\boldsymbol{c} = (5,4,3) \quad \boldsymbol{b} = (4,5)^{T}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

其对偶问题为

$$
\begin{aligned}
\max\ & 4w_1 + 5w_2 \\
\text{s.t.}\ & w_1 + 3w_2 \leq 5 \\
& w_1 + 2w_2 \leq 4 \\
& w_1 + w_2 \leq 3
\end{aligned}
$$

3. 一般情形

设原问题为

$$\min \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x} &\leq \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad (4.1.6)$$

$\boldsymbol{A}_1$是$m_1 \times n$矩阵　$\boldsymbol{b}_1$是m_1维列向量

$\boldsymbol{A}_2$是$m_2 \times n$矩阵　$\boldsymbol{b}_2$是m_2维列向量

$\boldsymbol{A}_3$是$m_3 \times n$矩阵　$\boldsymbol{b}_3$是m_3维列向量

引入松弛变量，改写为

$$\min \boldsymbol{cx}$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{aligned} \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_s &= \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x} \qquad &= \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{A}_3\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_t &\leq \boldsymbol{b}_3 \\ \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{x}_t &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

$\boldsymbol{x}_s$是m_1个松弛变量组成的m_1维列向量

$\boldsymbol{x}_t$是m_3个松弛变量组成的m_3维列向量

3. 一般情形

即 $$\min \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{0}\cdot \boldsymbol{x}_s + 0\cdot \boldsymbol{x}_t$$

$$\text{s.t.} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{I}_{m_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}_s \\ \boldsymbol{x}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}_1 \\ \boldsymbol{b}_2 \\ \boldsymbol{b}_3 \end{bmatrix} \qquad (4.1.7)$$

$$\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{x}_t \geq \boldsymbol{0}$$

按照非对称对偶的定义，(4.1.7)式的对偶问题为

$$\max \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{w}_2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{w}_3\boldsymbol{b}_3$$

$$\text{s.t.} \ [\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{w}_3] \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & -\boldsymbol{I}_{m_1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{m_2} \end{bmatrix} \leq [\boldsymbol{c}, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}]$$

$\boldsymbol{w}_1$是m_1维行向量

$\boldsymbol{w}_2$是m_2维行向量

$\boldsymbol{w}_1$是m_3维行向量

即

$$\max \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{w}_2\boldsymbol{b}_2 + \boldsymbol{w}_3\boldsymbol{b}_3$$

$$\text{s.t.} \ \boldsymbol{w}_1\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{w}_2\boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{w}_3\boldsymbol{A}_3 \leq \boldsymbol{c} \qquad (4.1.8)$$

$$\boldsymbol{w}_1 \geq \boldsymbol{0}$$

$\boldsymbol{w}_3 \leq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{w}_2$无限制

4.1 线性规划中的对偶理论

min 原问题约束		max 对偶问题约束		
$A_i x \geq b_i$	$\longleftrightarrow$ $w \geq 0$	$wp_i \leq c_i$	$\longleftrightarrow$	$x \geq 0$
$=$	$\longleftrightarrow$ w无约束	$=$	$\longleftrightarrow$	x无约束
$\leq$	$\longleftrightarrow$ $w \leq 0$	$\geq$	$\longleftrightarrow$	$x \leq 0$

对偶规划的一般规则：

(1)若原问题是极**大/小**化问题，那么对偶问题就是极**小/大**化问题。

(2)在原问题和对偶问题中，**约束右端向量**与目标函数中**系数向量**恰好对换。

(3)对于极**小**化问题的“≥”型**约束**(极**大**化问题中的“≤”型约束)，相应的对偶变量有**非负限制**；对于极**小**化问题的“<”型约束(极**大**化问题的“≥”型约束)，相应对偶变量有**非正限制**；对于原问题的“=”型约束，相应对偶变量**无正负限制**。

(4)对于极**小**化问题的具有**非负限制的变量**(极**大**化问题的具有**非正限制的变量**)，在其对偶问题中，相应的约束为“≤”型不等式；对极**小**化问题的具有**非正限制的变量**(极**大**化问题的具有**非负限制的变量**)，在其对偶问题中，相应的约束为“≥”型不等式；对于原问题中无正负限制的变量，在其对偶问题中，相应的约束为等式。

4.1 线性规划中的对偶理论

例4.1.3 写出对应的对偶问题：

$$\max\ -x_1 + x_2 + x_3$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ \ & x_1 + x_2 + 2x_3 \le 25, \\ & -x_1 + 2x_2 - x_3 \ge 2, \\ & x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ & x_1, x_2 \ge 0, \end{aligned} \qquad (4.1.9)$$

解 在原问题中，$\boldsymbol{c} = (-1,1,1)$,

$$\boldsymbol{A} = [\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

根据规则(1)和(2)，对偶问题应极小化$\boldsymbol{wb}$，根据规则(4)，在对偶问题中，与x_1, x_2对应的约束应是“≥”型不等式

$$\boldsymbol{wp}_1 \ge c_1 \quad 及 \quad \boldsymbol{wp}_2 \ge c_2$$

与x_3对应的约束是等式，即 $\boldsymbol{wp}_3 = c_3$

根据规则(3)，与原问题(4.1.9)的第1个约束对应的对偶变量$w_1 \ge 0$，与第2个约束对应的对偶变量$w_2 \le 0$，与第3个约束对应的对偶变量w_3无正负限制。因此(4.1.9)式的对偶问题为

$$\min\ 25w_1 + 2w_2 + 3w_3$$
$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ \ & w_1 - w_2 + w_3 \ge -1, \\ & w_1 + 2w_2 - w_3 \ge 1, \\ & 2w_1 - w_2 + w_3 = 1, \\ & w_1 \ge 0, w_2 \le 0, \end{aligned}$$

规则总结

<table>
<tr><td></td><td>min</td><td>max</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3">约束</td><td>≥型不等式</td><td>非负限制，即≥ 0</td><td rowspan="3">变量</td></tr>
<tr><td>≤型不等式</td><td>非正限制，即≤ 0</td></tr>
<tr><td>=</td><td>无限制</td></tr>
<tr><td rowspan="3">变量</td><td>非负限制，即≥ 0</td><td>≤型不等式</td><td rowspan="3">约束</td></tr>
<tr><td>非正限制，即≤ 0</td><td>≥型不等式</td></tr>
<tr><td>无限制</td><td>=</td></tr>
</table>

主观题 10分

设置

原问题为

$$
\begin{aligned}
\min\ & 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 6, \\
& x_1 - x_2 + x_3 \leq 3, \\
& -x_1 + x_2 + x_3 = 5, \\
& x_1 \geq 0,\ x_2\text{无限制},\ x_3 \leq 0
\end{aligned}
$$

试给出对偶问题

正常使用主观题需2.0以上版本雨课堂

作答

4.1.2 对偶定理

原问题

$$\begin{aligned} &\min \boldsymbol{cx} \\ &\text{s.t.}\quad \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

对偶问题

$$\begin{aligned} &\max \boldsymbol{wb} \\ &\text{s.t.}\quad \boldsymbol{wA} \leq \boldsymbol{c} \\ &\qquad\quad \boldsymbol{w} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

4.1.2 对偶定理

定理4.1.1 设$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$分别是(4.1. 1)式和(4.1.2)式的可行解，则$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$.

证明 由于$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{w}^{(0)} \geq \boldsymbol{0}$，则有

$$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}, \qquad (4.1.10)$$

由于 $\boldsymbol{c} \geq \boldsymbol{w}^{(\mathbf{0})}\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{0}$，则有

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}\boldsymbol{x}^{(0)} \qquad (4.1.11)$$

因此

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$$

对于对偶中的两个问题，每一个问题的任何一个可行解处的目标函数值都给出另一个问题的目标函数值的界。极小化问题给出极大化问题的目标函数值的上界；极大化问题给出极小化问题的目标函数值的下界。

4.1.2 对偶定理

原问题

$$\min 20x_1 + 20x_2$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 1 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 &\geq 3 \\ 3x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

对偶问题

$$\min w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{aligned} w_1 + 2w_2 + 2w_3 + 3w_4 &\leq 20 \\ 2w_1 + w_2 + 3w_3 + 2w_4 &\leq 20 \\ w_j \geq 0, j &= 1,2,3,4 \end{aligned}$$

1)原问题任一可行解$x = (1,1)^T$
目标值=40.
40是对偶问题最优目标值的上界.

2)对偶问题任一可行解$w = (1\ 1\ 1\ 1)^T$
目标值=10.
10是原问题最优目标值的下界.

几个重要推论

推论1 若$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$分别是原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的可行解，且$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$，则$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$分别是原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的最优解。

证明：对原问题的任意可行解$\boldsymbol{x}^{(0)}$

由定理1可知，$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}\geq\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$，而$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$

则$\boldsymbol{x}^{(0)}$为原问题的最优解同理，$\boldsymbol{w}^{(0)}$为对偶问题的最优解

推论2 对偶规划(4.1.1)和(4.1.2)有最优解的充要条件是它们同时有可行解。

推论3 若原问题(4.1.1)的目标函数值在可行域上无下界，则对偶问题(4.1.2)无可行解；反之，若对偶问题(4.1.2)的目标函数值在可行域上无上界，则原问题(4.1.1)无可行解。

4.1.2 对偶定理

原问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & 20x_1 + 20x_2 \\
\text{s.t.}\ & x_1 + 2x_2 \geq 1 \\
& 2x_1 + x_2 \geq 2 \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 3 \\
& 3x_1 + 2x_2 \geq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

对偶问题

$$
\begin{aligned}
\min\ & w_1 + 2w_2 + 3w_3 + 4w_4 \\
\text{s.t.}\ & w_1 + 2w_2 + 2w_3 + 3w_4 \leq 20 \\
& 2w_1 + w_2 + 3w_3 + 2w_4 \leq 20 \\
& w_j \geq 0, j = 1,2,3,4
\end{aligned}
$$

$x^* = (\frac{1}{5}, \frac{6}{5})$，最优值为28

$w^* = (0,0,4,4)$，最优值为28

4.1.2 对偶定理

强对偶定理：若原问题，对偶问题均有可行解则原问题，对偶问题均有最优解，且原问题，对偶问题的最优目标函数值相等.

证明：

设原问题，对偶问题的可行解分别为$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$

对于原问题的任意可行解$\boldsymbol{x}$，有$\boldsymbol{cx} \geq \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$

所以$\boldsymbol{cx}$在可行域内有下界

故原问题有最优解

同理对于对偶问题的任意可行解$\boldsymbol{w}$,有$\boldsymbol{wb} \leq \boldsymbol{cx}^{(0)}$

所以$\boldsymbol{wb}$在可行域内有上界

故对偶问题有最优解

4.1.2 对偶定理

定理4.1.2 设原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)中有一个问题存在最优解，则另一个问题也存在最优解，且两个问题的目标函数的最优值相等.

证明 引进松弛变量，把原问题(4.1.1)写成等价形式：

$$\begin{aligned}&\min \boldsymbol{cx}\\&\text{s.t.}\ \ \boldsymbol{Ax}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b}\\&\qquad \boldsymbol{x}\geq\boldsymbol{0}\ \ \boldsymbol{v}\geq\boldsymbol{0}\end{aligned}$$

设最优解是 $\boldsymbol{y}^{(0)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}^{(0)}\\ \boldsymbol{v}^{(0)}\end{bmatrix}$

相应的最优基是$\boldsymbol{B}$，这时所有判别数均非正，即 $w^{(0)}\boldsymbol{p}_j-c_j\leq 0,\forall j$

矩阵表示 $w^{(0)}\boldsymbol{A}\leq\boldsymbol{c}$

松弛向量 $w^{(0)}(-\boldsymbol{I})\leq\boldsymbol{0} \Rightarrow w^{(0)}\geq\boldsymbol{0}$

$$w^{(0)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{C}_B\boldsymbol{y}_B^{(0)}=\boldsymbol{cx}$$

4.1.2 对偶定理

推论 若线性规划(4.1.1)存在一个对应基$\boldsymbol{B}$的最优基本可行解，则单纯形乘子

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c}_p \boldsymbol{B}^{-1}$$

是对偶问题(4.1.2)的一个最优解。

4.1.3 互补松弛性质

定理4.1.3 设$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$分别是原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的可行解，那么$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$都是最优解的充要条件是，对所有i和j，下列关系成立：

(1) 如果$x_j^{(0)}$>0，就有$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{c}_j$；

(2) 如果$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j < \boldsymbol{c}_j$，就有$x_j^{(0)} = 0$；

(3) 如果$w_i^{(0)}$>0，就有$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)} = b_i$；

(4) 如果$\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)} > b_i$，就有$w_i^{(0)}$=0

其中$\boldsymbol{p}_j$是$\boldsymbol{A}$的第j列，$\boldsymbol{A}_i$是$\boldsymbol{A}$的第i行。

证明： 先证明必要性

设$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$分别是原问题(4.1.1)和对偶问题(4.1.2)的最优解，由于$\mathrm{c} \geq \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}$以及$\boldsymbol{x}^{(0)} \geq 0$，则有

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \qquad (4.1.16)$$

由于$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{b}$和$\boldsymbol{w}^{(0)} \geq 0$，则

$$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \geq \boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b} \qquad (4.1.18)$$

4.1.3 互补松弛性质

由于$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$分别是原问题和对偶问题的最优解，则根据定理4.1.2，有

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b} \qquad (4.1.18)$$

由(4.1.16)和(4.1.18)得

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b} \qquad (4.1.19)$$

由(4.1.19)得

$$(c-\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=0 \qquad (4.1.20)$$

$$\boldsymbol{w}^{(0)}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{0} \qquad (4.1.21)$$

由于$\boldsymbol{c}-\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\geq\boldsymbol{0},\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\geq\boldsymbol{0}$，因此

$$\left(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j\right)x_j^{(0)}=0, \qquad j=1,\cdots,n$$

因此，关系(1)和(2)成立。

4.1.3 互补松弛性质

再证充分性

设$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$分别是原问题和对偶问题的最优解，且关系式(1)~(4)成立。

由于式(1)~(2)成立，则对于每一个j，有

$$\left(\boldsymbol{c}_j-\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j\right)x_j^{(0)}=0 \qquad (4.1.22)$$

因此，可以推出 $\left(\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}\right)\boldsymbol{x}^{(0)}=0$，即

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad (4.1.23)$$

由于式(3)~(4)成立，则对于每一个i，有

$$w_i^{(0)}\left(\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}^{(0)}-b_i\right)=0 \qquad (4.1.24)$$

因此，可以推出 $\boldsymbol{w}^{(0)}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)}-\boldsymbol{b}\right)=0$，即

$$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(0)} \qquad (4.1.25)$$

由(4.1.23)和(4.1.25)得

$$\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{b}$$

4.1.3 互补松弛性质

定理4.1.4 设$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$分别是原问题(4.1.3)和对偶问题(4.1.5)的可行解，那么$\boldsymbol{x}^{(0)}$和$\boldsymbol{w}^{(0)}$ 都是最优解的充要条件是，对于所有j，下列关系成立:

(1)如果$x_j^{(0)} > 0$,就有$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{c}_j$;

(2)如果$\boldsymbol{w}^{(0)}\boldsymbol{p}_j < \boldsymbol{c}_j$，就有$x_j^{(0)} = 0$.

4.1.3 互补松弛性质

例4.1.4 原问题为

$$\min 2x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\text{s.t.}\ \ 3x_1 - x_2 + x_3 \geq 1,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \geq 2,$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0,$$

其对偶问题为

$$\min w_1 + 2w_2$$
$$\text{s.t.}\ \ 3w_1 + w_2 \leq 2$$
$$-w_1 + 2w_2 \leq 3$$
$$w_1 - 3w_2 \leq 1$$
$$w_1, w_2 \geq 0$$

对偶问题的最优解为 $w^* = (w_1, w_2) = (\frac{1}{7}, \frac{11}{7})$

试用互补松弛定理求原问题的最优解.

解

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 2, \end{cases}$$

把x_3 =0代入上述方程组，得

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 1, \\ x_1 + 2x_2 = 2, \end{cases}$$

解此方程组，得$x_1 = \frac{4}{7}, x_2 = \frac{5}{7}$,

因此原问题的最优解是

$$\boldsymbol{x}^* = (x_1, x_2, x_3)^T = (\frac{4}{7}, \frac{5}{7}, 0)^T$$

目标函数的最优值$f_{\min} = \frac{23}{7}$

The end