

# 《数学建模竞赛》课程论文

姓 名：许万鹏

学 号：05191643

学 院：资源与地球科学学院

队友姓名：孔英权、邓俊

任课教师：王志俊

开课时间：2019-2020 学年第二学期

评阅意见：
-------

论文成绩：
-------

## 摘要

标枪投掷距离的远近受到运动员水平、标枪的技术参数、比赛环境三方面因素的影响，为了得到更远的投掷距离，研究出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等要素至关重要。因此本文对标枪投掷运动体系进行研究和优化。

针对问题一，要求算出所给型号标枪沿标枪中轴线剖面面积、标枪表面积和标枪形心的位置。本文建立以最小二乘法为基础的曲线拟合模型，对标枪外形曲线进行枪身、枪头、把手三者的分段拟合。首先画出所给数据散点图，然后建立曲线拟合方程，画出拟合曲线，最终得出结果：标枪割面积为  $6.352 \times 10^4 \text{mm}^2$ 、标枪表面积为  $2.098 \times 10^5 \text{mm}^2$ 、枪尾到形心距离为  $1585 \text{mm}$ 、形心到枪头为  $1055 \text{mm}$ 。

针对问题二，要求根据所给数据找出标枪飞行过程中的运动规律。本文建立多元回归模型分析投掷距离和出手速度、出手角、初始攻角三者之间的关系，得到回归方程为  $y = -60.5415 + 4.3088x_1 + 0.4769x_2 - 0.0443x_3$ ，投掷距离主要受出手角度和出手速度的影响。

针对问题三，要求建立标枪飞行的数学模型并计算相应条件下的投掷距离。本文在研究空气对运动物体的作用力、标枪飞行的受力情况的基础上，对标枪出手瞬间进行动力学分析及转动惯量的计算。对第一问进行抛体运动的研究，得出标枪的投掷距离为  $90.4847 \text{m}$ 。对第二问采用粒子群算法得出最佳的出手角为  $37^\circ$ ，初始攻角为  $-0.17^\circ$ ，最远的投掷距离为  $90.3545 \text{m}$ 。

针对问题四，要求在不同风向和风速的条件下建立标枪飞行的数学模型。本文先探讨空气动力学理论，为后文实际问题解决做铺垫；然后建立动力学模型，研究动量定理、动量矩定理、动能定理等，得出刚体平面运动微分方程；最后结合连续性方程和动量方程建立动网格守恒方程，从而得出问题结果，结果在表格中展示。

针对问题五，要求分析运动员出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等要素对标枪投掷距离影响的相对重要性。本文建立模糊综合评判模型得到模糊综合评价结果向量，再根据最大隶属度原则判断各影响因素与标枪投掷距离的关系，从而得到其相对关系：出手速度与投掷距离呈线性关系；标枪的最佳出手角为  $42^\circ$ ；最佳初始俯仰角速度在  $-0.17 \text{rad/s} - 0 \text{rad/s}$  范围内；在顺风或逆风的情况下，风速在  $-6 \text{m/s} - 6 \text{m/s}$ ，投掷距离与风速成正比关系。

## 一 问题重述

### 1.1 问题背景

标枪的投掷是一项历史悠久的田径比赛项目。标枪投掷距离的远近受到运动员水平（出手速度、出手角、初始攻角、出手高度、出手时标枪的初始俯仰角速度等）、标枪的技术参数（标枪的长度、重量、几何形状、重心的位置、形心的位置等）和比赛环境（空气的密度与粘度、风力、风向等）三方面因素的影响。因此，对标枪的构造、标枪的飞行过程，以及出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等要素对标枪投掷距离影响的分析至关重要。

### 1.2 问题提出

(1) 问题一要求根据现有某型标枪的测量尺寸数据（见附件）估算出该型标枪沿标枪中轴线剖面面积、标枪表面积和标枪形心的位置。

(2) 问题二要求根据现有某标枪比赛中 24 名运动员使用同型号标枪投掷的实测数据（见附件）对这些数据进行分析，建立合适的数学模型，找出标枪飞行过程中的运动规律。

(3) 问题三要求，假设某型标枪的几何参数同问题一，重心位于形心前 $10\text{cm}$ （重心在枪尖与形心之间），出手时标枪的初始俯仰角速度为 0。在无风的前提下，对标枪投掷出手瞬间、出手后的受力及运动情况进行分析，建立标枪飞行的数学模型并求解如下问题：

①假设某运动员投掷出手速度为 $29.70\text{m/s}$ 、出手角为 $36.6^\circ$ 、初始攻角为 $-0.9^\circ$ ，请估算出标枪的投掷距离。

②假设某运动员投掷出手速度为 $30\text{m/s}$ ，请给出最佳的出手角和初始攻角使得投掷距离最大并估算出标枪的投掷距离。

(4) 问题四要求，假设标枪技术参数同问题 3，风向分别为顺风 and 逆风，风速分别为 $3\text{mm/ss}$ ， $6\text{mm/ss}$ 和 $9\text{mm/ss}$ ，运动员投掷出手速度为 $31.70\text{mm/ss}$ 。建立标枪飞行的数学模型，给出最佳出手角、最佳初始攻角、最佳初始俯仰角速度使得投掷距离最大，并填写表。

(5) 问题五要求，标枪技术参数同问题 3，分析运动员出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等要素对标枪投掷距离影响的相对重要性。

## 二 问题分析

标枪投掷距离的远近受到运动员水平（出手速度、出手角、初始攻角、出手高度、出手时标枪的初始俯仰角速度等）、标枪的技术参数（标枪的长度、重量、几何形状、重心的位置、形心的位置等）和比赛环境（空气的密度与粘度、风力、风向等）三方面因素的影响。为了得到更远的投掷距离，研究出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等要素至关重要。

针对问题一，要求算出所给型号标枪沿标枪中轴线剖面面积、标枪表面积和标枪形心的位置。为了更加精确地反映标枪外形曲线，本文对这些数据进行插值与拟合处理：建立以最小二乘法为基础的曲线拟合模型，对标枪外形曲线进行枪身、枪头、把手三者的分段拟合，这样让拟合效果更加精准。首先画出所给数据散点图，然后建立曲线拟合方程，画出拟合曲线，因为所呈现的出来的曲线形状，大致为多项式函数曲线一部分；

再结合实际标枪外形大致轮廓,本文选择多项式曲线对枪身轮廓进行拟合。最后得出结果:标枪割面积为 $6.352 \times 10^4 \text{mm}^2$ 、标枪表面积为 $2.098 \times 10^5 \text{mm}^2$ 、枪尾到形心距离为1585mm、形心到枪头为1055mm。

针对问题二,要求根据所给数据找出标枪飞行过程中的运动规律。本题是对数据进行分析,要找出投掷距离和出手速度、出手角、初始攻角三者之间的关系,因此建立多元回归模型并且进行检验。最终得到回归方程为  $y = -60.5415 + 4.3088x_1 + 0.4769x_2 - 0.0443x_3$ , 投掷距离主要受出手角度和出手速度的影响。

针对问题三,要求在无风的前提下对标枪投掷出手瞬间、出手后的受力及运动情况进行分析,建立标枪飞行的数学模型,并计算相应条件下的投掷距离。本文首先研究空气对运动物体的作用力、标枪飞行的受力情况;然后对标枪出手瞬间进行动力学分析,及采用扭摆法进行转动惯量的计算。对于第一问,因标枪运动轨迹类似于抛体运动,因此采用运动学的斜抛运动规律解决问题,得出标枪的投掷距离为11.4847m。对于第二问,要求得到最佳的出手角和初始攻角,并且估算出标枪的投掷距离。因此采用粒子群算法,得出最佳的出手角为 $42^\circ$ ,初始攻角为 $-0.2^\circ$ ,最远的投掷距离为11.3545 m。

针对问题四,要求在不同风向和风速的条件下建立标枪飞行的数学模型。因为要考虑空气阻力对标枪的作用,所以需要结合空气动力学理论,研究流体运动,为后文实际问题解决做铺垫;然后建立动力学模型,研究动量定理、动量矩定理、动能定理等,得出刚体平面运动微分方程;最后结合连续性方程和动量方程建立动网格守恒方程,从而得出问题结果,结果在后文表格中展示。

针对问题五,要求分析运动员出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等要素对标枪投掷距离影响的相对重要性。本文建立模糊综合评判模型得到模糊综合评价结果向量,再根据最大隶属度原则判断各影响因素与标枪投掷距离的关系,从而得出结论如下:

- (1) 出手速度与标枪的投掷距离基本上呈线性关系。
- (2) 标枪的出手角在  $0^\circ - 42^\circ$  时,随着出手角的增加,标枪的投掷距离线性增加,超过  $42^\circ$  以后,其射程略有减小。因此,标枪的最佳出手角为  $42^\circ$ 。
- (3) 初始俯仰角速度小于  $0 \text{ rad/s}$  时标枪飞行的远度要更远一些。最佳初始俯仰角速度大约在  $-0.17 \text{ rad/s} - 0 \text{ rad/s}$  范围内。
- (4) 风向及风速对标枪的投掷距离的影响显著。在顺风或逆风的情况下,风速在  $-6 \text{ m/s} - 6 \text{ m/s}$ , 投掷距离与风速成正比关系。

### 三 问题假设

- (1) 投射角度 $\alpha$ 与投射初速度 $v$ 是两个相互独立的量。
- (2) 忽略标枪在飞行过程中的进动影响。
- (3) 重力加速度 $g$ 取值为 $9.8 \text{m/s}^2$ ,并在投掷的任意点都相等。
- (4) 标枪运动轨迹在同一平面内,且地面处处水平。

## 四 符号说明

符号	说明
$\beta$	标枪初始攻角
$\alpha$	标枪出手角度
$\gamma$	持枪角
$v_0$	标枪初速度
$h$	标枪出手高度
$V_m$	风速
$S$	标枪飞行距离
$F_d$	空气阻力
$M$	俯仰力矩
$C_d$	阻力系数
$S_{\text{表面积}}$	标枪表面积
$S_{\text{割面积}}$	标枪割面积
$X_h Y_h$	约束反力

## 五 模型的建立与求解

### 5.1 问题一的求解

由于某型号标枪测量尺寸表有较多的离散的测量数据，因此，需要对这些数据进行插值与拟合处理。其目的是为了从这些数据中寻找它们反映出来的规律，即通过已知的数据去确定某一类已知函数的参数或找某个近似函数，使所得到的近似的数对已知数据有较高的拟合度，更加精确地反映标枪外形曲线。标枪外形曲线如下图图 1 标枪外形图所示：

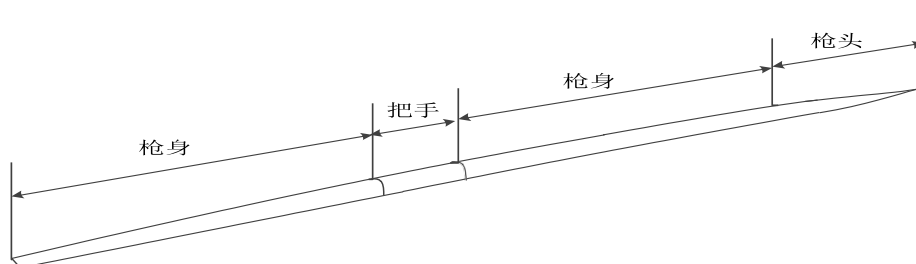


图 1 标枪外形图

#### 5.1.1 曲线拟合模型

根据现有某型标枪的测量尺寸数据，估算出该型标枪沿标枪中轴线剖面面积、标枪表面积和标枪形心的位置。为了更清楚认识枪身、枪头、把手三者对应直径的关系，本文建立曲线拟合模型，利用MATLAB 的拟合工具箱，画出拟合曲线。

##### (1) 插值

在某模型标枪给定 $n$ 个离散数据点（称为节点） $(x_{ik}, y_k)$ ， $k = 1, 2, \dots, n$ 。对于 $x_i$ 且

$x_i \neq x_{ik}$ , 求 $x_i$ 所对应的 $y$ 的值称为内插。

$f(x)$ 为定义在给定区间上的函数,  $x_{11}, x_{12}, x_{13}, \dots, x_{in}$ 为区间上 $n$ 个互不相同的点, 若函数  $g(x)$ 满足:

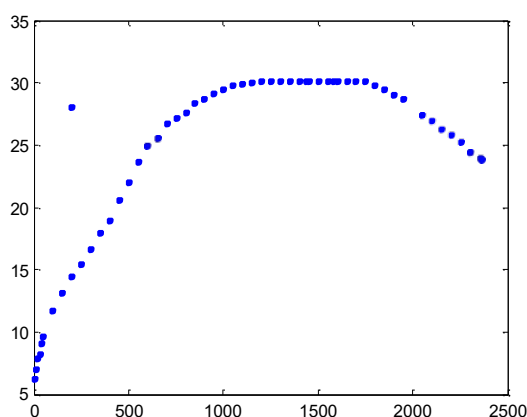
$$g(x_{ik}) = f(x_{ik})$$

则称 $g(x_{ik})$ 为 $f(x_{ik})$ 关于节点在区间上的插值函数。

## (2) 拟合

根据观察已有数据, 以及标枪外形基本特征可知, 标枪大致分为三部分: 枪身、枪头、把手。枪身部分直径逐步增大, 枪头部分直径逐步减少, 把手部分直径不变。为了使拟合效果最佳, 本文按标枪外形分段拟合, 采用最小二乘法<sup>[1]</sup>在曲线中的应用建立曲线拟合模型。

### ① 根据已有数据绘制枪身与对应直径的散点图:



观察枪身数据及所呈现的出来的曲线形状, 大致为多项式函数曲线一部分; 再结合实际标枪外形大致轮廓, 本文选择多项式曲线对枪身轮廓进行拟合。

### ② 拟合曲线方程

多项式函数表达式的建立:

$$f(x) = p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4$$

根据最小二乘法原理有

$$M = \sum_{i=1}^n (f(x) - p_1x^3 + p_2x^2 + p_3x + p_4)$$

令 $p_i$ 合理取值, 使得 $M$ 取值最小, 即 $\frac{\partial M}{\partial p_i} = 0$ 时 $M$ 可以取到最小值。

$$\frac{\partial M}{\partial p_i} = \sum_{i=1}^n (f(x) - 3p_1x^2 + 2p_2x + p_3 + p_4)$$

令上式为零, 解关于 $p_i$ 的方程组, 运用 MATLAB 工具箱解以上正弦函数表达式的系数, 进而得出拟合曲线方程:

$$f(x) = 1.039x^3 - 6.074x^2 + 3.625x + 30.16$$

拟合曲线如下图图 2 所示:

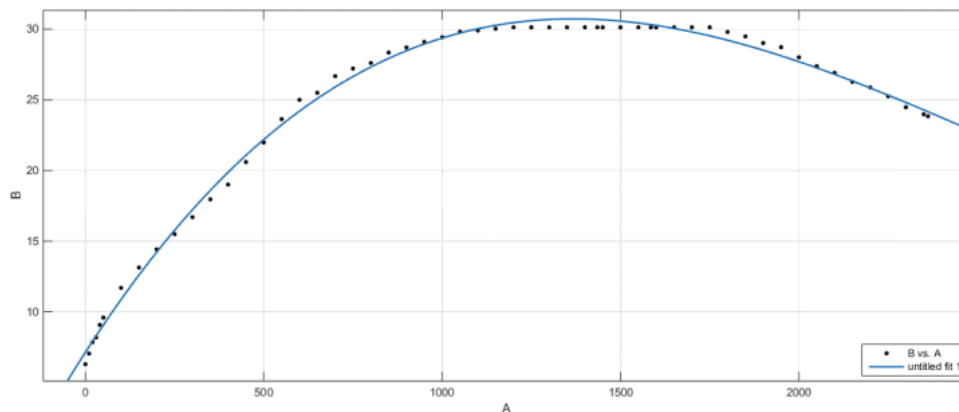
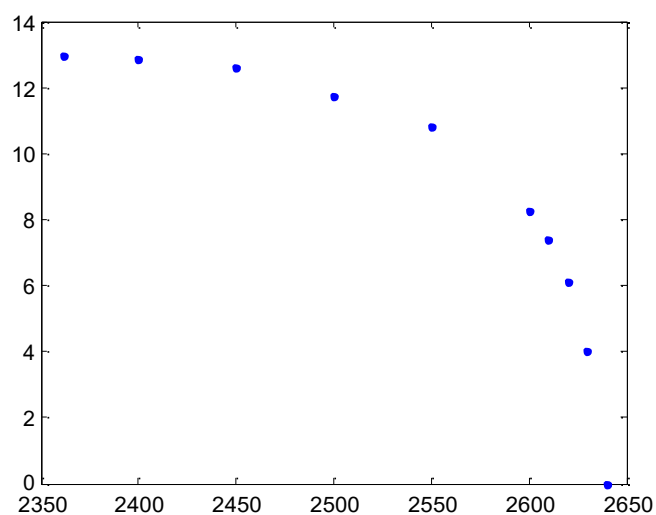


图 2

拟合度为 97.84%，拟合效果较好。

③ 同理，根据枪头与对应的直径绘制散点图：



建立多项式函数表达式

$$f(x) = p_1x^4 + p_2x^3 + p_3x^2 + p_4x + p_5$$

解得拟合函数为

$$f(x) = -2.12x^4 - 5.12x^3 - 2.436x^2 - 0.5645x + 11.46$$

拟合曲线如下图图 3 所示：

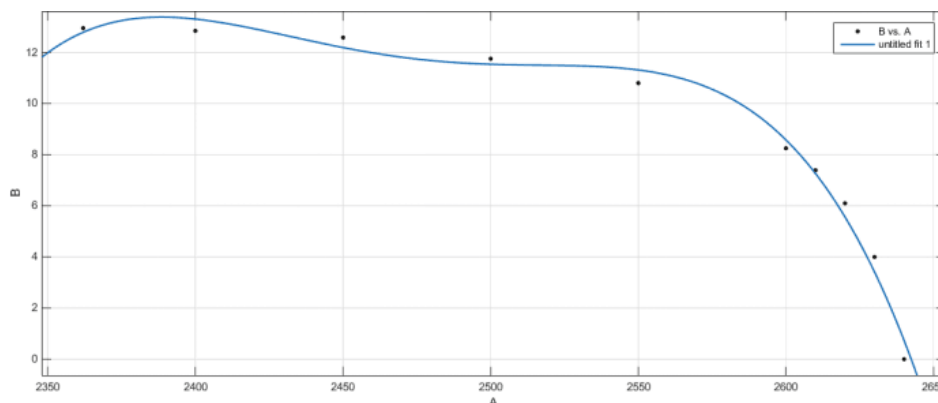


图 3

拟合度为 98.82%，拟合效果较好。

④ 由于把手部分直径不变割面积可直接求出，因此不需要进行拟合曲线。

### 5.1.2 割面积，表面积，形心的求解

由以上对已有数据的插值拟合，近似描述标枪外形曲线，得到的拟合方程，再利用辛普森梯形数值积分和MATLAB 软件积分语句，求解各面积。

$$S_{\text{割面积}} = \int_0^L D(x) dx$$

$$S_{\text{表面积}} = \int_0^L \pi D(x) \sqrt{1 + \left(\frac{D'(x)}{2}\right)^2} dx$$

$$L_{\text{形心}} = \int_0^L D(x) x dx / S_{\text{割面积}}$$

经计算得出结果：

标枪割面积、标枪表面积分别为：

$$6.352 \times 10^4 \text{mm}^2, 2.098 \times 10^5 \text{mm}^2$$

枪尾到形心：

$$l = 1585 \text{mm}$$

形心到枪头：

$$l_0 = 1055 \text{mm}$$

## 5.2 问题二的求解

问题二是对某标枪比赛中 24 名运动员使用同型号标枪投掷的实测数据进行分析，要求建立合适的数学模型，找出标枪飞行过程中的运动规律。

附件中所给项目有选手的出手速度、出手角、初始攻角以及投掷距离，为找出其运动规律，我们需要根据这些数据，找出投掷距离和出手速度、出手角、初始攻角三者之间的关系。因此，本文对数据进行线性回归分析<sup>[2]</sup>，建立多元回归模型解决问题。

### 5.2.1 多元回归模型

(1) 定义



多元回归模型是用来进行回归分析的数学模型(含相关假设),称为回归模型。只含有一个回归变量的回归模型称为一元回归模型,否则称为多元回归模型。

设因变量为 $y$ ,  $k$ 个自变量分别为 $x_1, x_2, \dots, x_k$ , 描述因变量 $y$ 如何依赖于自变量 $x_1, x_2, \dots, x_k$ 和误差项 $\varepsilon$ 的方程称为多元回归模型。其一般形式可表示为:  $y = B_0 + B_1x_1 + B_2x_2 + \dots + B_kx_k + E$ 。式中,  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_k$ 是模型的参数;  $\varepsilon$ 为误差项。

多元回归分析是指分析因变量和自变量之间关系,回归分析的基本思想是:虽然自变量和因变量之间没有严格的、确定性的函数关系,但可以设法找出最能代表它们之间关系的数学表达形式。其分析步骤如下:

a. 确定几个特定的变量之间是否存在相关关系,如果存在的话,找出它们之间合适的数学表达式;

b. 根据一个或几个变量的值,预测或控制另一个变量的取值,并且可以知道这种预测或控制能达到什么样的精确度;

c. 进行因素分析。例如在对于共同影响一个变量的许多变量(因素)之间,找出哪些是重要因素,哪些是次要因素,这些因素之间又有什么关系等等。

## (2) 模型建立

本文通过分析出手速度、出手角、初始攻角(自变量)和投掷距离(因变量)之间的相关性,来建立出手速度、出手角、初始攻角和投掷距离之间关系的数学模型。其多元回归模型建立如下:

$$Q = \sum_{i=1}^n [y_i - (b_0 + b_1x_{1i} + \dots + b_kx_{ki})]^2$$

$Q$  为实测值与  $y_i$  线性函数  $\hat{y} = b_0 + b_1x_{1i} + \dots + b_kx_{ki}$  的残差平方和, 使  $Q = \min(b_0, b_1, \dots, b_k)$

求 $Q$ 关于 $b_0, b_1, \dots, b_k$ 的偏导数, 令其为 0。即  $\frac{\partial Q}{\partial b_i} = 0, i = 1, 2, \dots, k$ 。经整理为:

$$\begin{aligned} nb_0 + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{ki} &= \sum_{i=1}^n y_i \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{1i} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}^2 + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{ki} &= \sum_{i=1}^n x_{1i}y_i \\ &\dots \\ b_0 \sum_{i=1}^n x_{ki} + b_1 \sum_{i=1}^n x_{1i}x_{ki} + \dots + b_k \sum_{i=1}^n x_{ki}^2 &= \sum_{i=1}^n x_{ki}y_i \end{aligned}$$

上式称为多元线性回归的正规方程组, 令

$$X_{n(k+1)} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & x_{k1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & x_{kn} \end{bmatrix} Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$$

则由矩阵运算法则, 正规方程组的矩阵形式为:

$$X^T X \hat{X} = X^T Y$$

假设  $(X^T X)^{-1}$  存在, 上式两边乘以  $(X^T X)^{-1}$  得:

$$\hat{B} = [\hat{b}_0, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_k]^T = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

最后解得k元线性方程为:

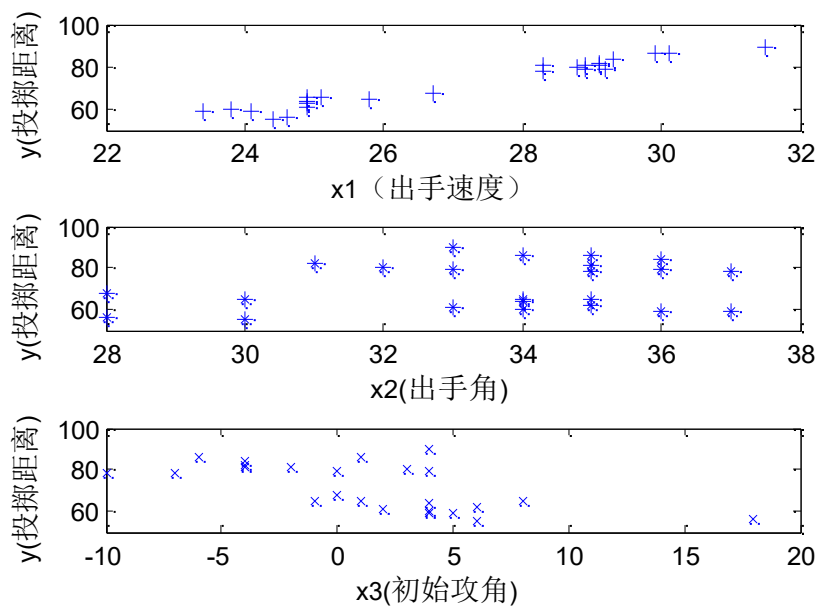
$$\hat{y} = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_1 + \dots + \hat{b}_k x_k$$

结合实际 24 名运动员实测数据进行回归分析, 参数如下表表 1 回归分析参数表:

表 1 回归分析参数表

$x_1$ 出手速度(米/秒)	$x_2$ 出手角(度)	$x_3$ 初始攻角(度)	y投掷距离(米)
31.5	33	4	89.58
30.1	34	1	86.3
29.9	35	-6	86.08
29.3	36	-4	83.8
29.1	31	-4	82.04
29.1	35	-4	81.06
28.9	35	-2	81
28.3	32	3	80.76
28.8	33	4	79.58
29.2	36	0	79.14
28.9	35	-7	78.76
28.3	37	-10	78.16
26.7	28	0	67.56
25.1	35	-1	65.22
24.9	34	8	65.16
25.8	30	1	65.04
24.9	34	4	63.74
24.9	35	6	62.32
24.9	33	2	60.8
23.8	34	4	59.82
23.4	37	4	59.1
24.1	36	5	58.84
24.6	28	18	56.5
24.4	30	6	55.56

由 MATLAB 进行回归:



得出回归方程为:

$$y = -60.5415 + 4.3088x_1 + 0.4769x_2 - 0.0443x_3$$

由多元线性回归参数进行多元回归分析, 可以看出本模型的建立是可靠的, 与实际情况相符。根据回归模型的计算得出拟合值与实际值及残差关系, 如表 2:

表 2

实测值	拟合值	残差
89.58	89.45	-1.165
86.3	86.7	0.9775
86.08	86	0.8321
83.8	83.5	0.7492
82.04	82.07	2.2352
81.06	82.01	-0.6522
81	80.9	0.2382
80.76	80.56	4.2357
79.58	78.8	0.4687
79.14	79.21	-3.3026
78.76	78.66	-2.2234
78.16	78.89	-1.3248
67.56	67.8	-0.2958
65.22	65.43	0.876

65.16	65.34	2.5535
65.04	65.04	0.1528
63.74	63.67	0.9563
62.32	62.33	-0.852
60.8	60.21	-1.5955
59.82	60.01	1.776
59.1	59.2	1.3489
58.84	58.32	-1.4061
56.5	56.78	-1.5094
55.56	55.35	-3.0733

相关系数分析：

	$x_1$	$x_2$	$x_3$
y	0.43088	0.4769	-0.0443

由上表可知 $x_2$ ,  $x_1$ 对y投掷距离影响较大, 因此投掷距离主要受出手角度和出手速度的影响。

### (3) 模型检验

总离差平方和

$$TSS = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

回归平方和

$$ESS = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2$$

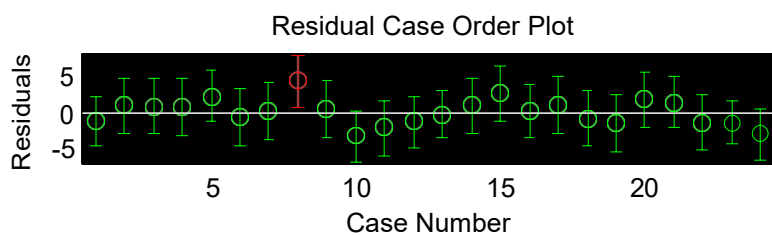
剩余平方和

$$RSS = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2$$

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

该统计量越接近于 1, 模型的拟合优度越高。

残差图：



经 MATLAB 计算得：

$$TSS = 2.8303e + 03 \quad RSS = 1.5247e + 13 \quad ESS = 1.5247e + 13$$

可决系数为 0.9735，因此该模型的拟合优度较好。

### 5.3 问题三的求解

假设某型标枪的几何参数同问题 1，重心位于形心前10cm(重心在枪尖与形心之间)出手时标枪的初始俯仰角速度为 0。在无风的前提下，本文对标枪投掷出手瞬间、出手后的受力及运动情况进行分析，建立标枪飞行的数学模型。

#### 5.3.1 空气对运动物体的作用力

空气对在其内部运动的物体的作用，归结为在物体表面上连续分布的法向力和切向力的作用，这些力可简化为一个空气动力主向量 $\vec{F}$ 以及这些力对任意参考点的力矩 $\vec{M}$ 。

空气动力方向量 $\vec{F}$ 在气流坐标系 $x, y, z$ 各轴上的投影，分别称为阻力 $X$ 、举力 $Y$ 和仰力 $Z$ 。主向量 $\vec{F}$ 在飞行器连体坐标系 $x_1, y_1, z_1$ 各轴上的相应投影称为轴向力 $X_1$ 、法向力 $Y_1$ 和横向力 $Z_1$ 。对任意参考点的空气动力方矩 $\vec{M}$ 在任一坐标系中的投影名称都是相同的，对纵轴的分力矩称为滚转力矩，对垂直轴的分力矩称为偏航力矩，对横轴的分力矩称为俯仰力矩。当物体的运动速度给定时，气动力和力矩的大小及作用方向与物体相对于飞行速度向量 $\vec{V}_\infty$ 的方位有关，也就是说，同攻角 $\alpha$ 以及偏航角 $\beta$  (向量 $\vec{V}_\infty$ 和 $x_1o_1y_1$ 平面的夹角)有关。标枪在空气当中的受力如下图图 4 空气中的受力图所示：

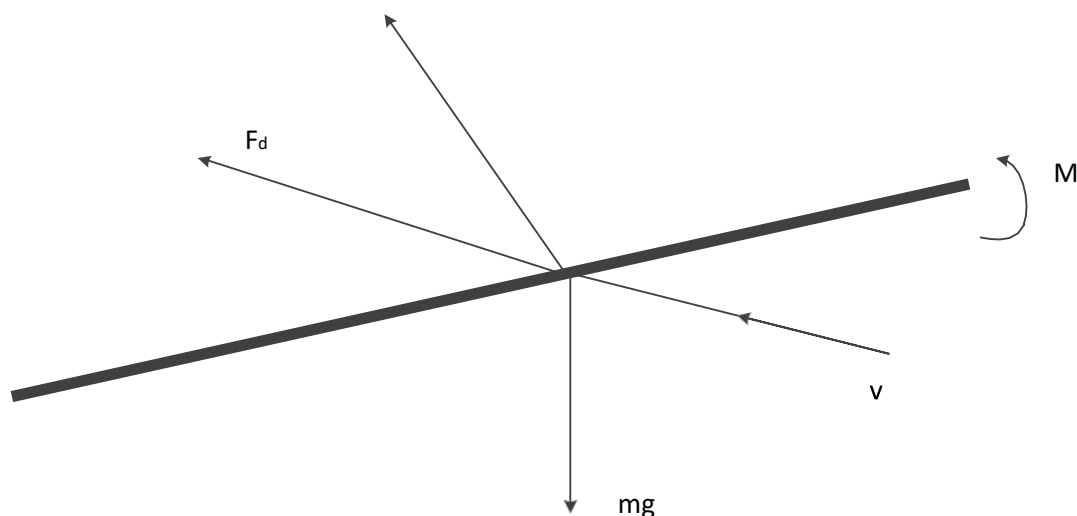


图 4 空气中的受力图

因为标枪受升力影响较小，可以忽略不计。因此本文重点研究阻力对标枪运动的影响。

空气的阻力是由气流绕过物体流动所引起的切向应力和压强差造成的，一般可以分为摩擦阻力、压差阻力两种。摩擦阻力与空气的粘性有关；压差阻力与物体的形状有一定的关系。因为空气是有粘性的，当气流流过物体表面时，紧贴物体表面的一层空气就会粘在表面上，这层空气的流速为零，随着离该表面距离的增大，相对应的空气层的流速也将增大，直到某距离后速度才又等于自由流速。这就使得气流在内外层之间有速度差，使得物体在空气中运动时受到阻力的作用。我们把产生的这种阻力称为摩擦阻力。当空气流经不同形状的物体表面时，由于物体形状和空气粘性等因素的影响，使气流速度在物体的前后发生变化而引起压强的变化而形成了压差阻力。可以用下面的公式来描

述:

$$F_d = C_d \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 S$$

式中,  $\rho$  是空气的密度,  $v$  是物体和气流的相对速度,  $C_d$  是阻力系数,  $S$  是飞行物的特征面积, 可以取标枪的表面积或标枪纵截面积, 阻力系数是个无量纲的比例系数。

### 5.3.2 标枪飞行的受力情况

#### ① 标枪飞行时的气动力分析

当人体将标枪从手中投掷出去以后, 由于标枪在空气中运动时受到空气的作用力, 致使标枪的飞行远度受到很大的影响。以下对标枪飞行的模拟均是在考虑空气作用力的情况下进行的。下图图 5 气动力示意图是标枪飞行时的气动力示意图:

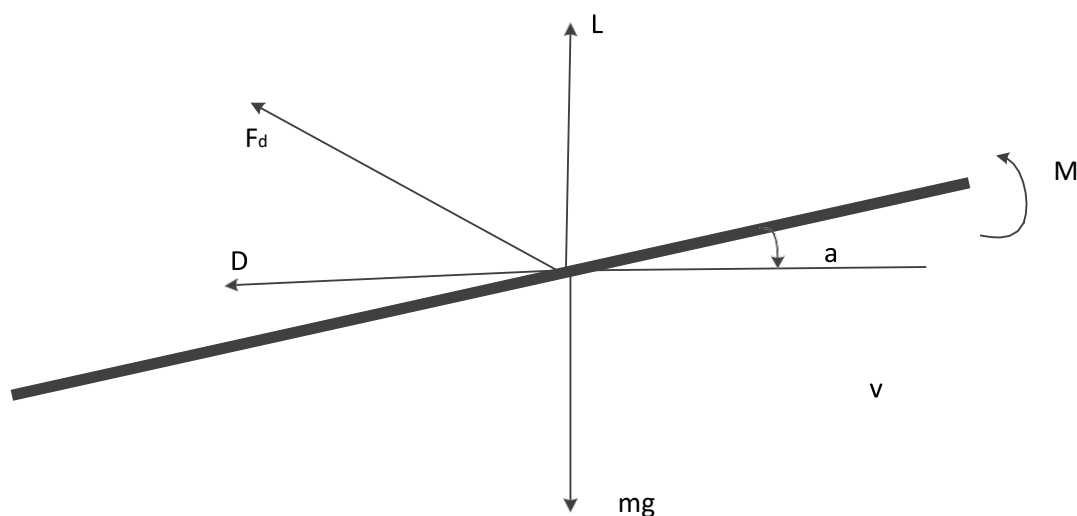


图 5 气动力示意图

其中,  $D$  是标枪受到的空气阻力,  $L$  是标枪受到的空气升力,  $R$  是气动力的合力,  $G$  是标枪的重力,  $v$  是来流的速度。标枪飞行时, 由于气动力合力的作用点(压力中心  $P$ )偏离标枪的重心, 与重心不在同一位置, 因而会产生使标枪俯仰(抬头或低头)的力矩  $\vec{M}$ , 称之为俯仰力矩, 并对标枪飞行的轨迹产生较大的影响。

#### ② 出手瞬间动力学分析-多刚体系统的力学模型

为了更深入了解标枪投掷时的运动情况, 理解标枪投掷的技术原理, 本文将从运动学的角度对标枪投掷出手瞬间、出手后受力和标枪飞行的轨迹做分析。

从运动员起跑处至标枪投掷瞬间这一过程, 选出手瞬间进行动力学推导, 如图 6 动力学分析图:

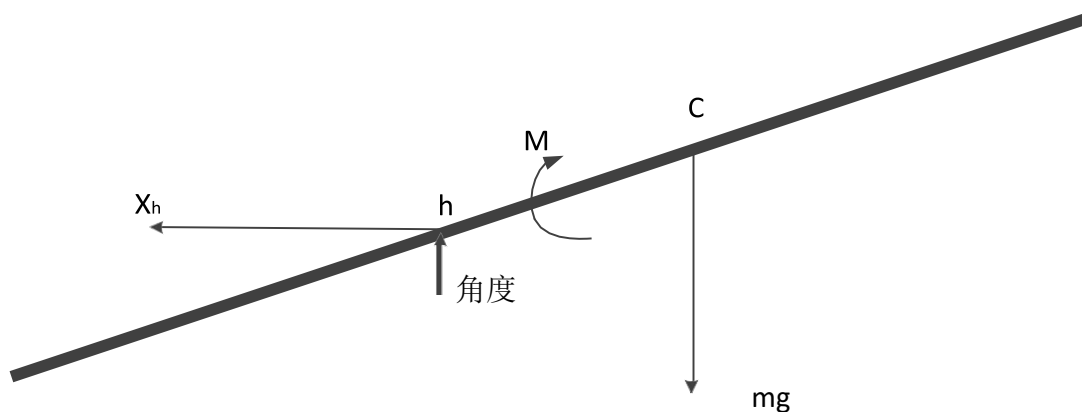


图 6 动力学分析图

在对人体投掷标枪运动的研究中，目前通常使用的人体力学模型均是由十五个刚体组成的，其中头、上下躯干、左右手、上臂、前臂、大腿、小腿、足都是由一些简单几何形状（椭圆或椭圆柱或圆锥台）的均质刚体模型来代替。各刚体的连接部位(关节)为球铰或平面铰。在掷标枪运动中，将各肢体抽象为刚体，同时也将标枪假定为刚体。因此，将人体-标枪简化为多刚体系统的力学模型。在本文的研究中，根据人体-标枪运动的动作特点，将人体-标枪系统简化为由刚体组成的模型。

③转动惯量的计算是采用扭摆法，计算式如下：

$$J_y = J_z = \frac{M \times g \times a^2}{4\pi^2 h} \left( \frac{T}{n} \right)^2$$

式中 $J_y$ 、 $J_z$ 为标枪绕 $y$ 轴、 $z$ 轴的转动惯量，单位为 $\frac{kg}{m^2}$ ； $M$ 为标枪质量，单位为 $kg$ ； $h$ 为挂线长度，单位为 $m$ ； $a$ 为悬挂点至标枪重心的水平距离，单位为 $m$ ， $\frac{h}{a}$ 通常取 3~5； $\frac{T}{n}$ 为标枪扭摆平均周期， $n$ 是扭摆次数，一般取 20 次， $T$ 是扭摆 $n$ 次的时间，单位为 $s$ 。

### 5.3.3 问题（1）的求解

假设某运动员投掷出手速度为 $29.70m/s$ 、出手角为 $36.6^\circ$ 、初始攻角为 $-0.9^\circ$ 。

在出手瞬间标枪上的力有：重力 $mg$ ，肘关节与腕关节的约束反力 $X_h$ 、 $Y_h$ ，关节对标枪的力矩 $M$ 。

设标枪质心以下到把手部位长度为 $l_1$ ，质心以上部位长度为 $l_2$

$$m\ddot{x} = -X_h$$

$$m\ddot{y} = Y_h - mg$$

$$J\omega = -M - X_h l_2 \sin(\theta - 4\pi) - Y_h l_2 \cos(\theta - 4\pi) = -M - X_h l_2 \sin \theta - Y_h l_2 \cos \theta$$

出手后标枪受力有：重力 $mg$ ，空气阻力

投掷手在出手高度为 $H_0$ 的A点，以出手角度为 $\beta_0$ ，初速度为 $V_0$ 投出器械，器械重心就会沿一条曲线，该曲线经过与A点同高的B点落于地面上的C点。根据运动学可知，在不考虑空气阻力的情况下，这条曲线将近似为抛物线。运动轨迹如下图图 7 运动轨迹图所示：

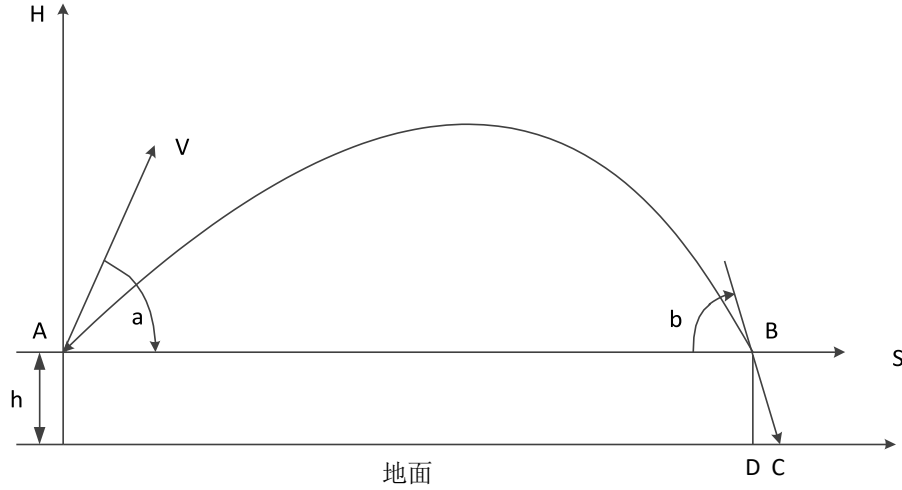


图 7 运动轨迹图

因此，为简单起见，先按抛物线轨迹来分析标枪的运动。把运动轨迹分为AB段和BC段，其中AB段是主要阶段。器械由A点投出，经过最高点而落到与A点同高的B点。根据运动学的斜抛运动可知，水平投掷距离为：

$$AB = S_1 = V_0^2 \sin(2\beta_0) / g$$

器械由B运动到C的水平距离DC，可以近似地把曲线BC看成是直线，其斜角近似等于出手角度 $\beta_0$ ，因此得：

$$DC = S_2 = H_0 / \tan(\beta_0)$$

所以，总投掷距离为：

$$S = S_1 + S_2 = \frac{V_0^2 \sin(2\beta_0)}{g} + H_0 / \tan(\beta_0)$$

由上式可知，影响投掷距离的因素有 $V_0$ 、 $\beta_0$ 和 $H_0$ 。实际上，影响投掷距离的因素不仅有初速度、出手角度和出手高度，还有初始攻角即初速度方向与标枪长轴之间的夹角、初始俯仰角速度即出手时标枪长轴围绕通过质心横轴转动的角速度等初始条件，以及标枪本身的参数和天气因素等。

代入数据到公式，得结果如下：

标枪的投掷距离为90.4847m。

### 5.3.4 问题（2）的求解

假设某运动员投掷出手速度为30m/s，本文采用粒子群算法<sup>[3]</sup>进行求解。给出使得投掷距离最大最佳的出手角和初始攻角，并且估算出标枪的投掷距离。

#### ①算法原理：

PSO 用于解决优化问题。在 PSO 中，每个优化问题的潜在解都是搜索空间中的一只鸟，称之为粒子。所有的粒子都有一个由被优化的函数决定的适值(fitness value)，每个粒子还有一个速度决定它们飞翔的方向和距离。然后粒子们就追随当前的最优粒子在解空间中搜索。

PSO 初始化为一群随机粒子（随机解），然后通过迭代找到最优解。在每一次迭代



中，粒子通过跟踪两个极值来更新自己；第一个就是粒子本身所找到的最优解，这个解称为个体极值；另一个极值是整个种群目前找到的最优解，这个极值是全局极值。

假设在一个D维的目标搜索空间中，有N个粒子组成一个群落，其中第i个粒子表示为一个D维的向量：

$$X_i = (x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{iD}) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

第i个粒子的“飞行”速度也是一个D维的向量，记为：

$$V_i = (v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{iD}) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

第i个粒子迄今为止搜索到的最优位置称为个体极值，记为

$$P_{best} = (p_{i1}, p_{i2}, \dots, p_{iD}) \quad i = 1, 2, \dots, N$$

整个粒子群迄今为止搜索到的最优位置为全局极值，记为

$$g_{best} = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gD})$$

在找到这两个最优值时，粒子根据如下的公式来更新自己的速度和位置：

$$v_{i1} = wv_{i1} + c_1r_1(p_{i1} - x_{i1}) + c_2r_2(p_{g1} - x_{i1})$$

$$x_{id} = x_{id} + v_{id}$$

其中： $c_1$ 和 $c_2$ 为学习因子，也称加速常数， $w$ 为惯性因子， $r_1$ 和 $r_2$ 为[0, 1]范围内的均匀随机数。

上式右边由三部分组成，第一部分为“惯性”或“动量”部分，反映了粒子的运动“习惯”，代表粒子有维持自己先前速度的趋势；第二部分为“认知”部分，反映了粒子对自身历史经验的记忆或回忆，代表粒子有向自身历史最佳位置逼近的趋势；第三部分为“社会”部分，反映了粒子间协同合作与知识共享的群体历史经验，代表粒子有向群体或邻域历史最佳位置逼近的趋势， $i = 1, 2, \dots, D$ ,  $v_{iD}$ 是粒子的速度， $v_{iD} \in [-v_{max}, v_{max}]$   $v_{max}$ 是常数，用来限制粒子的速度。 $r_1$ 和 $r_2$ 是介于[0,1]之间的随机数。<sup>[4]</sup>

Step1 初始化粒子群，包括群体规模N，每个粒子的位置 $x_i$ 和速度 $v_i$ ；

Step2 计算每个粒子的适应度值 $F_{it}[i]$ ；

Step3 对每个粒子，用它的适应度值  $F_{it}[i]$  和个体极值  $P_{best}(i)$  比较，如果  $F_{it}[i] > P_{best}(i)$ ，则用 $F_{it}[i]$ 替换掉 $P_{best}(i)$ ；

Step4 对每个粒子，用它的适应度值和全 $F_{it}[i]$ 局极值 $g_{best}$ 比较，如果 $F_{it}[i] > g_{best}$ 则用 $F_{it}[i]$ 替 $g_{best}$ ；

Step5 根据公式更新粒子的速度 $v_i$ 和位置 $x_i$ ；

Step6 如果满足结束条件(误差足够好或到达最大循环次数)退出，否则返回 Step2。

用 MATLAB 工具求解得结果如下：

出手角是37°；初始攻角为-0.17°；标枪的投掷距离为 90.3545 m。

## 5.4 问题四的求解

### 5.4.1 空气动力学理论

前文论述中，在只研究标枪出手后在没有空气阻力的情况下，从力学的角度来看，其飞行轨迹是一条抛物线。但是，如果考虑空气阻力对标枪的作用，标枪的运动就变得

相当复杂。标枪出手以后的运动是一个自然运动的过程，不受人为因素的影响。标枪的运动完全是在空气动力的作用下进行的，受空气动力学规律<sup>[5]</sup>的控制。

空气动力学是力学的一个分支，是在流体力学的基础上，随着航空工业和喷气推进技术的发展而成长起来的一个学科。通常所说的空气动力学研究内容是飞机，导弹等飞行器在各种飞行条件下流场中气体的速度、压力和密度等参量的变化规律，飞行器所受的举力和阻力等空气动力及其变化规律，气体介质或气体与飞行器之间所发生的物理化学变化以及传热传质规律等。从这个意义上讲，空气动力学可有两种分类法<sup>[6]</sup>：

①根据流体运动的速度范围或飞行器的飞行速度，空气动力学可分为低速空气动力学和高速空气动力学。通常大致以 400 千米/小时这一速度 作为划分的界线。在低速空气动力学中，气体介质可视为不可压缩的，对应的流动称为不可压缩流动。对于标枪在空气中飞行的研究就属于低速空气动力学。大于这个速度的流动，须考虑气体的压缩性影响和气体热力学特性的变化。这种对应于高速空气动力学的流动称为可压缩流动。

②根据流动中是否必须考虑气体介质的粘性，空气动力学又可分为理想空气动力学(或理想气体动力学)和粘性空气动力学。

除了上述分类以外，空气动力学中还有一些边缘性的分支学科。例如稀薄气体动力学、高温气体动力学等。

#### 5.4.2 动力学模型<sup>[7]</sup>

风向分别为顺风 and 逆风，风速分别为  $3m/s$ ， $6m/s$  和  $9m/s$ ，运动员投掷出手速度为  $31.70m/s$ 。在上述三个条件下建立标枪飞行的数学模型。

标枪在运动过程中不会轻易发生形变，因此将其视为刚体。投掷过程将结合动量定理、动量矩定理、动能定理以及由此推导出来的一系列定理，建立描述标枪的运动特征与其作用量之间的关系，并从物体的机械运动进行了深入的研究。在本文中，将采用该方法建立标枪的动力学模型<sup>[8]</sup>。

(1) 动量定理：

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^{(e)} = \sum \vec{F}_t^{(e)}$$

质点系的动量定理，即质点系得动量对时间的导数等于作用在质点系上的所有外力的矢量和，在标枪出手的瞬间，可视标枪为一个质点，因此动量定理可以变为：

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \vec{R}^{(e)} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum_t \vec{F}_t^{(e)}$$

与动量定理相同，出手瞬间视标枪为质点，质点对任一固定点的动量矩对时间的导数，等于作用在质点系上的所有外力对同一点之矩的矢量和。

$$\frac{dL_O}{dt} = \vec{M}_O^{(e)} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum m_O (\vec{F}_t^{(e)})$$

根据以上的动量矩定理，矩心或矩轴是固定点或固定点或固定轴。但是，若取质点系得质点为矩心，则其对应的质点的动量矩定理如下所示：

$$\frac{dL_{Ct}}{dt} = \vec{M}_C^{(e)} = \lim_{t \rightarrow 0} \sum m_C (\vec{F}_t^{(e)})$$

设平面运动刚体<sup>[9]</sup>对轴心轴的转动惯量为  $J_c$ ，瞬时的减速度为  $\ddot{\omega}$ ，则刚体对于质心的动量矩可表示为：

$$L_{Ct} = J_c \omega$$

而  $\frac{dL_{Ct}}{dt} = J_c \ddot{\omega} = J_c \ddot{\varphi}$ ，则可得：

$$m \vec{a}_C = \vec{R}^{(e)} = \sum \vec{F}_i^{(e)}$$

$$J_c \ddot{\omega} = \vec{M}_C^{(e)} = \sum m_c (\vec{r}_i^{(e)} \times \vec{F}_i^{(e)})$$

或

$$m \ddot{x}_C = \sum F_{ix}$$

$$m \ddot{y}_C = \sum F_{iy}$$

$$J_c \ddot{\omega} = \sum m_c (\vec{r}_i^{(e)} \times \vec{F}_i^{(e)})$$

上式称为刚体平面运动微分方程。可见，刚体作平面运动时，随同质心的平动决定于外力系得主矢，而绕质心的转动决定于外力系对质心的主矩。这样，就建立了外力系得主矢与主矩同刚体的瞬间关系。

(2) 在标枪出手以后，标枪将不能视为质点，结合动量方程、能量方程、连续方程建立动网格守恒方程。

①连续性方程

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S \rho (\vec{V} - \vec{U}) \cdot \vec{n} dS = 0$$

②动量方程

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho d\Omega + \oint_S \left[ \rho (\vec{V} - \vec{U}) \cdot \vec{n} \right] \left[ \vec{\sigma} + \vec{p} I - \vec{\tau} \right] \cdot \vec{n} dS = \int_{\Omega} \rho \vec{b} d\Omega$$

$\Omega$  和  $S$  分别是移动控制体积中的体积和边界面， $\Omega = \Omega(t)$ ，而且符合几何守恒定律： $\frac{d\Omega}{dt} = \oint_S \vec{U} \cdot \vec{n} dS$ 。时间导数  $\left( \frac{d}{dt} \right)$  表示的是时间顺着运动控制的体积的微分。所有空间梯度都是在静止参考系下计算的。

③根据上述的连续性方程和动量方程建<sup>[10]</sup>立动网格守恒方程：

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_{\partial V} \rho \phi (\vec{u} - \vec{u}_g) \cdot \vec{A} = \int_{\partial V} \Gamma \nabla \phi \cdot \vec{A} + \int_V S_\phi dV$$

其中  $\rho$  为空气密度， $\vec{u}$  为速度向量， $\vec{u}_g$  移动网格的网格速度， $\Gamma$  为扩散系数， $S_\phi$  为源项， $\partial V$  代表控制  $V$  的边界。

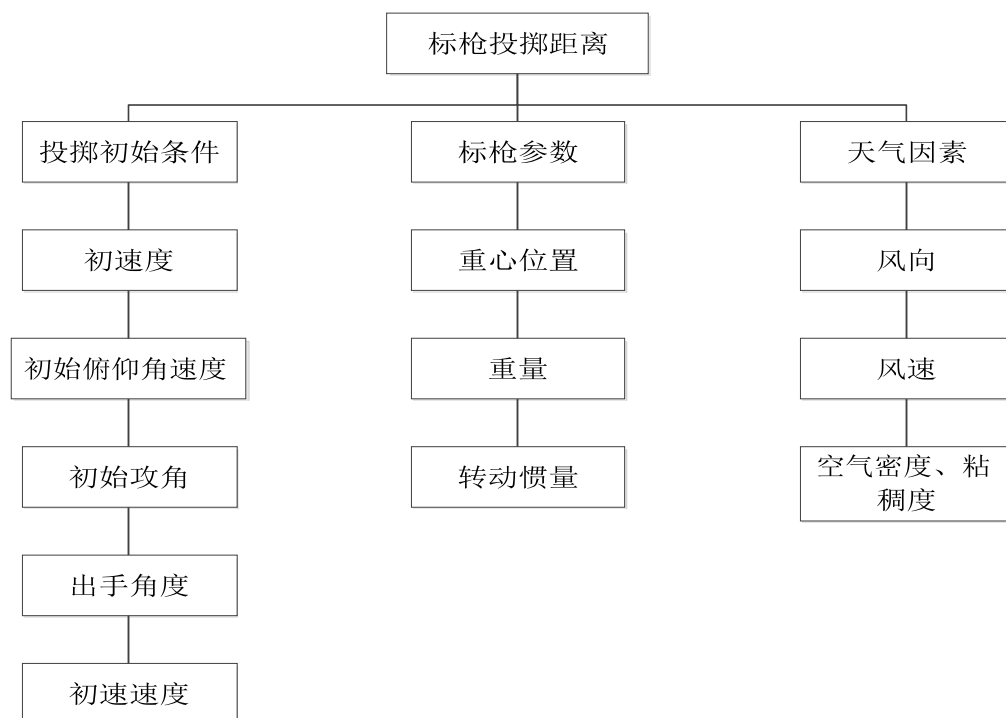
### 5.4.3 结果分析

如下表所示：

	顺风			逆风		
	3m/s	6m/s	9m/s	3m/s	6m/s	9m/s
最佳出手角（度）	39	41	40	40	39	40
最佳初始攻角（度）	-0.15	-0.17	-2.0	-0.25	-0.27	-3.0
最佳初始俯仰角速度（度/秒）	40	40	40	40	40	40
最大投掷距离（米）	90.57	104.21	118.02	79.08	91.06	105.36

### 5.5 问题五的求解

标枪技术参数同问题 3，本文建立模糊综合评判模型，分析运动员出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等要素对标枪投掷距离影响的相对重要性。



#### 5.5.1 模糊综合评判模型<sup>[11]</sup>

模糊综合评判包括 6 个主要组成要素：评判指标集、评价集、模糊评价矩阵、评判因素权重集、模糊算子和评判结果向量。

本题主要分析运动员出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等要素对标枪投掷距离影响的相对重要性。首先建立评价指标集和评价集，对被评价对象划分评价指标并建立评语集；其次根据隶属度函数法或专家评分法等方法确定隶属度矩阵模糊评价矩阵；然后计算各评价指标权重值，得到权重集；最后选择相应算法进行合成。

##### ①建立指标体系

主要评价指标	评价内容
--------	------

出手速度	使得投掷距离最远的最佳出手速度
出手角	使得投掷距离最远的最佳出手角
初始攻角	使得投掷距离最远的最佳初始攻角
初始俯仰角速度	使得投掷距离最远的最佳初始俯仰角速度
风向及风速	使得投掷距离最远的最佳风向及风速

②决策的优劣，在优选识别过程中并不存在绝对分明的界限，具有中介过渡性，属于模糊概念。

借鉴多目标模糊优选模型，设有可选择的 $n$ 个投掷方案，设评价指标有 $m$ 个，如出手速度、出手角、初始攻角、初始俯仰角速度、风向及风速等，组成一个目标特征矩阵：

$$X = \begin{Bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{m1} & & \cdots & x_{mn} \end{Bmatrix} = (x_{ij})$$

$x_{ij}$ ——技术方案 $j$ 目标 $i$ 的特征值， $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$

③投掷方案的优劣程度依据 $m$ 个目标特征值，按从优级到劣级的 $c$ 个级别进行识别。可以规定优级(1级)对优的相对隶属度(简称相对优属度)为1，劣级( $c$ 级)的相对优属度为0，1级至0级的相对优属度呈线性递减。则对于任一目标，从1级到 $c$ 级各个级别的相对优属度标准值向量为：

$$S = [1 \quad \frac{c-2}{c-1} \quad \frac{c-3}{c-1} \cdots 0] = (s_h), h = 1, 2, \dots, c$$

④投掷方案的考核目标通常分为特征值越大越优、越小越优与中间型3类。越大越优、越小越优与中间型的目标相对优属度公式分别可采用：

$$r_{ij} = \frac{x_{ij} - \min x_{ij}}{\max x_{ij} - \min x_{ij}}, \forall_j$$

$$r_{ij} = \frac{\max x_{ij} - x_{ij}}{\max x_{ij} - \min x_{ij}}, \forall_j$$

$$r_{ij} = 1 - \frac{|x_{ij} - \bar{x}_i|}{\max |x_{ij} - \bar{x}_i|}, \forall_j$$

⑤将方案 $j$ 的 $m$ 个目标相对优属度分别与级别矩阵 $S$ 以进行比较后，得到投掷方案 $j$ 级别上限值 $b_j$ 与下限值 $a_j$ ：

$$\begin{cases} a_j = \min a_{ij}; \\ b_j = \max a_{ij}. \end{cases}$$

⑥设 $m$ 个目标的权重用 $\omega_i$ 表示，则投掷方案集目标权向量为：

$$W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m), \sum_{i=1}^m \omega_i = 1.$$

⑦考虑了目标权重后，为了更完善的描述方案 $j$ 与级别 $h$ 之间的差异，可用加权广义

欧氏距离表示:

$$D_{hj} = \mu_{hj} d_{hj} = \mu_{hj} \left\{ \sum_{i=1}^m [\omega_{ij}(r_{ij} - s_h)] \right\}^{\frac{1}{2}}$$

⑧根据目标函数构造拉格朗日函数, 解得

$$\mu_j = \frac{1}{\sum_{k=a_j}^{b_j} \frac{\sum_{i=1}^m [\omega_i(r_{ij} - s_h)]^2}{\sum_{i=1}^m [\omega_i(r_{ij} - s_h)]^2}}$$

⑨应用 $\mu_j$ 可解得飞行方案集归属各个级别的最优化相对隶属矩阵:

$$U^* = \begin{bmatrix} \mu_{11}^* & \mu_{12}^* & \cdots & \mu_{1n}^* \\ \mu_{21}^* & \mu_{22}^* & \cdots & \mu_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_{m1}^* & \mu_{m2}^* & \cdots & \mu_{mn}^* \end{bmatrix} = (\mu_j^*),$$

$j=1,2,\dots,n; h=1,2,\dots,c.$

⑩根据级别特征值H的向量式:

$$H = (1, 2, \dots, c)(\mu_j^*) = (H_1, H_2, \dots, H_n)$$

对投掷方案集进行优选, 其中最小级别特征值 $H_{min}$ , 对应的投掷方案为最远投掷距离方案。优选计算时, 要求级别 $c \geq 2$ ,  $c$ 越大优选的精度越高, 但计算量越大。本文取 $c = 4$ , 相当于在优级(1级)与差级(4级)之间插入良(2级)、中(3级)。即用优、良、中、差对多目标进行优选决策。

### 5.5.2 结果及数据分析

本文在求解问题时, 考虑了空气阻力的影响。

(1) 出手速度对标枪投掷距离的影响

在决定标枪飞行远度的诸因素中, 出手速度是最重要的因素, 也是运动员创造优异成绩的必要条件。在本文中, 研究出手速度对标枪投掷距离的影响, 计算出标枪在不同出手速度下的投掷距离。

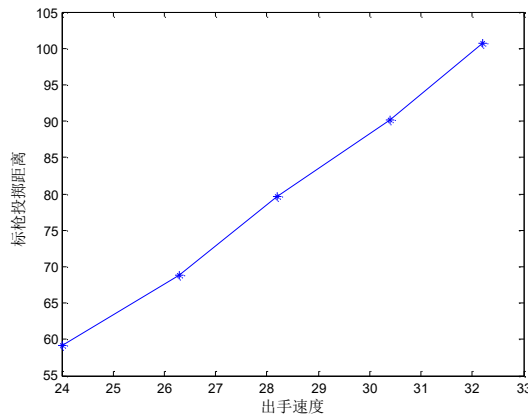


图 8 出手速度对标枪投掷距离的影响图

上图表示标枪在出手角度为  $42^\circ$ ，初始攻角 $A_0$ 为零，初始俯仰角速度 $W_0$ 也为零时，标枪在出手速度为  $24\text{ m/s}$  -  $34\text{ m/s}$  的范围内标枪的飞行远度。

由图显示结果表明，标枪在出手速度为  $24\text{ m/s}$  -  $34\text{ m/s}$  的范围内，随着出手速度的不断增加，标枪的投掷距离也不断增加，而且增加的幅度有加大的趋势。在本文研究的范围内，它们基本上呈线性关系。由此可知，出手速度对标枪的飞行远度的影响是十分显著的。

### (2) 出手角对标枪投掷距离的影响

标枪的出手角度是标枪出手瞬间其质心的速度方向与水平面的夹角，而标枪的最佳出手角度是指在其它初始条件一定的情况下，能够使标枪的投掷距离最大的出手角度。

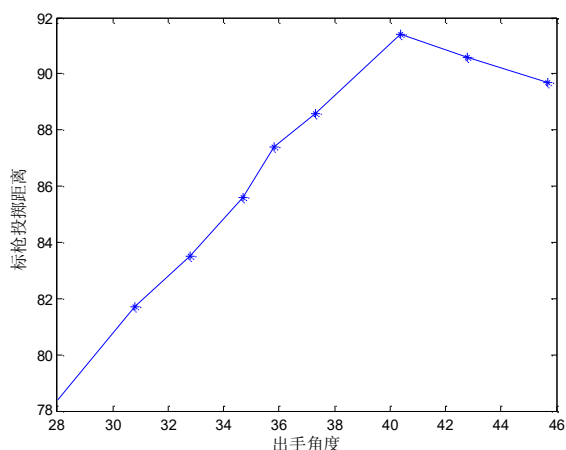


图 9 出手角对标枪投掷距离的影响图

上图是标枪在初速度 $V_0$ 为  $30\text{ m/s}$ ，初始攻角 $A_0$ 为零，初始俯仰角速度 $W_0$ 也为零，出手角度在  $28^\circ$  -  $45^\circ$  范围内标枪的投掷距离。

由图显示结果表明，标枪在出手角度为  $28^\circ$  -  $42^\circ$  范围内，随着出手角的增加，标枪的投掷距离基本上是线性增加的，但是达到  $42^\circ$  后其投掷距离略有减小。一般认为在不考虑空气阻力的情况下，当出手角度为  $45^\circ$  时，标枪的投掷距离最大。但是，在空气阻力的影响下，要使标枪飞投掷距离达到最大，出手角度并不是  $45^\circ$ 。当出手角度超过  $42^\circ$  以后，标枪的投掷距离开始下降。由此得出，该标枪的最佳出手角度为  $42^\circ$ 。

### (3) 初始攻角对标枪投掷距离的影响

标枪出手时的初始攻角不同，则其在飞行中的攻角也会变化，并导致作用于标枪的空气动力特性发生变化，从而影响标枪的投掷距离。本文研究标枪在初速度为  $30\text{ m/s}$ 、出手角度为  $42^\circ$  的条件下，初始攻角与初始俯仰角速度的不同组合对投掷距离的影响。

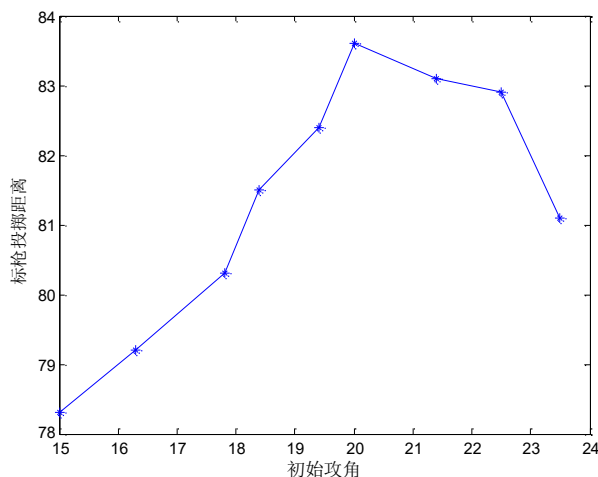


图 10 初始攻角对标枪投掷距离的影响图

由图显示结果表明,在其它初始条件一定的情况下,初始攻角的变化对标枪投掷距离的影响并不十分显著。并且,在初始攻角与初始俯仰角速度的不同组合中,其中最佳组合为 $B_0 = 42^\circ$ 、 $A_0 = -8^\circ$ 、 $W_0 = -0.09 \text{ rad/s}$ 时,标枪的投掷距离最大,达到 91.79 m。当初始条件偏离这一组合时,投掷距离有所减小。

#### (4) 初始俯仰角速度对标枪投掷距离的影响

当运动员投掷标枪时,由于用力方向未能通过标枪纵轴,标枪在出于时会出现一个初始俯仰角速度,使标枪出手时出现向上抬头( $W_0 > 0 \text{ rad/s}$ )或向下低头( $W_0 < 0 \text{ rad/s}$ )的现象,从而对其飞行远度产生影响。本文考虑了 $-20^\circ/\text{s} - 20^\circ/\text{s}$ 间隔为 $5^\circ/\text{s}$ 的俯仰角速度对飞行远度的影响,研究标枪的投掷距离随着初始俯仰角速度的变化情况。如下图所示:

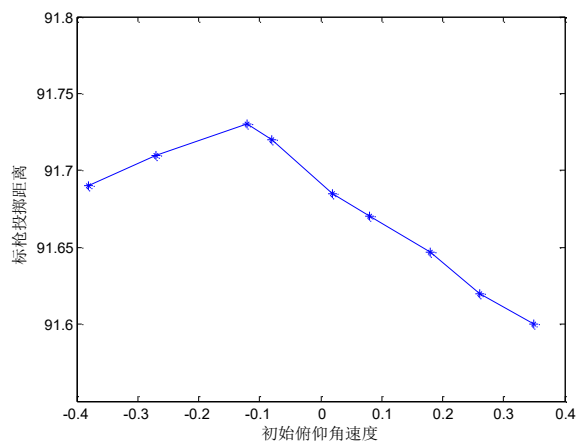


图 11 初始俯仰角速度对标枪投掷距离的影响图

由图显示结果表明,初始俯仰角速度对标枪的飞行远度并不显著,但当初始俯仰角速度 $W_0 < 0 \text{ rad/s}$ 时,标枪飞行的远度比 $W_0 > 0 \text{ rad/s}$ 远一些。标枪初速度为  $30 \text{ m/s}$ , 在初始俯仰角速度为 $-0.17 \text{ rad/s}$ 的情况下飞行远度最大。因此,认为最佳初始俯仰角速度大约在 $-0.17 \text{ rad/s} - 0 \text{ rad/s}$ 范围内。

#### (5) 风向及风速的影响对标枪投掷距离的影响

根据风的等级情况,对 I 级(相当风速为 $\pm 1 \text{ m/s}$ )、II 级(相当风速为 $\pm 2 \text{ m/s}$ )、III 级



(相当风速为 $\pm 4$  m/s)、IV级(相当风速为 $\pm 6$  m/s)进行风向及风速的影响分析。其中, 风速为负值代表逆风, 正值代表顺风。其它初始条件一定, 即初速度 $V_0$ 为30m/s, 初始攻角 $A_0$ 为零, 初始俯仰角速度 $W_0$ 为零, 出手角度为 $42^\circ$ 。

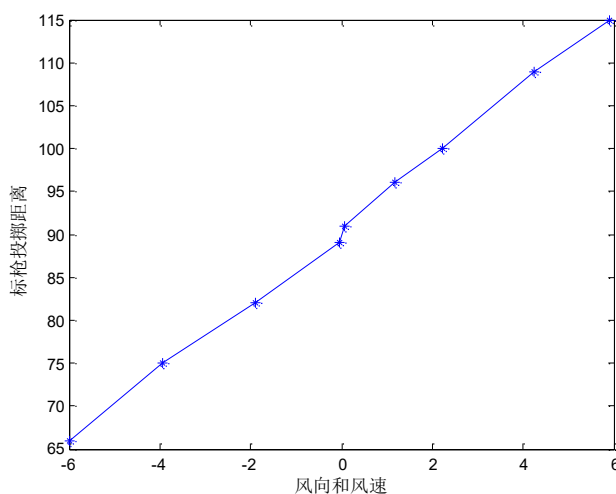


图 12 风向及风速的影响对标枪投掷距离的影响图

由图显示结果表明, 风向对标枪的投掷距离的影响比较显著。对于逆风来说, 在其它初始条件一定的情况下, 随着逆风风速的增大, 标枪的飞行远度呈现出减小的趋势; 对于顺风来说, 在其它初始条件一定的情况下, 随着顺风风速的增大, 标枪的飞行远度呈现出增大的趋势。风速在 $-6$  m/s— $6$  m/s, 标枪投掷距离与风速成正比关系。

## 六 模型的评价及推广

### 6.1 优点

(1) 本文运用了曲线拟合模型, 首先画出所给数据散点图, 然后运用图表直观表达拟合曲线, 避免了只有函数方程, 增强了本文的可读性和理解性。

(2) 本文研究了标枪的气动力性能, 对运动员投掷时初始攻角的选择具有指导意义, 而且为模拟标枪的飞行提供了前提保证。

(3) 模糊综合评判模型可以避免凭经验进行目标选择所固有的主观性, 使并购决策更加科学合理。很好地解决一般模糊综合评价模型的一些缺点, 如因素多导致各因素权重小而造成的严重失真现象或多峰值现象等。适合评价多主体对多层次多类指标评价信息的整合。

(4) 粒子群算法搜索速度快、效率高, 算法简单, 适合于实值型处理。

### 6.2 缺点

(1) 本文虽建立不同拟合曲线类型, 但也仅限于有限的曲线类型, 无法保证此曲线即是吻合度最高的曲线。

(2) 本文只对标枪的部分初始条件, 包括: 初速度、出手角度、初始俯仰角速度, 进行了研究分析, 而对偏航与自转对标枪飞行远度的影响并没有加以考虑。结果可能会有误差。

### 6.3 推广

(1) 从实践意义上来说, 本文所建立的模型、得到的结果可以对掷标枪教练和运动员进行掷标枪指导和训练具有一定的指导作用, 对于运动员创造好成绩具有重要意义。

(2) 本文只是将标枪作为刚体来加以考虑, 在将来的工作中, 也可以将标枪作为弹性体来模拟其飞行情况。

## 七 参考文献

- [1]. 王新和, 程世洲. 曲线拟合的最小二乘法[J], 新疆职业大学学报, 2004, 12 (2): 84—86
- [2]. 谢宇. 回归分析[M]. 北京: 社会科学文献出版社, 2010
- [3]. 杨朝霞, 方建文, 李佳蓉, 等. 粒子群优化算法在多参数拟合中的作用[J]. 浙江师范大学学报, 2008, 31 (2): 173—177
- [4]. YAMAMOTO, Yoshitaka. MATSUOKA, Rutsu. ISHIDA, Yoshihisa. and SEKI, Kazuichi., Analysis of javelin throwing by high-speed photography, Proceedings of SPIE—The International Society for Optical Engineering, 1998, 799-807
- [5]. Mont Hubbard, Neville J. de Mestre and John Scott, Dependence of release variables in the shot put[J]. Journal of Biomechanics, 2001, 34(4): 449-456.
- [6]. Ferenc Mizera, Gabor Horvath. Influence of environmental factors on shot put and hammer throw range[J]. Journal of Biomechanics, 2002, 35: 785–796
- [7]. 王肇明. 标枪动力学的优化计算[J]. 力学与实践, 1983, 4: 40-42
- [8]. 王其宁, 申毛毛, 陈耀庆等. 标枪气动力分析与初始条件的优化组合[J]. 四川体育科学, 1997: 3-4, 37-41
- [9]. 蔡国华, 标枪几何参数和气动力特性测量技术报告 [R], 北京空气动力研究所 1986. 6
- [10]. 周曙, 优秀男子标枪运动员最后出手特征分析, 2005, 24(4), 485. 486
- [11]. 张健, 郑亚平, 对掷标枪最后用力技术中躯干动作特征的三维力学分析, 1997, 33(11—12), 82—84

