第7卷　　中国教育发展研究杂志　　Vol.7
2010年4月第4期　　The Research Journal Of China Educational Development　　No.4 2010

# 浅谈多元函数求极限的一般解法和特殊解法

李文浩　张　跃

西南交通大学峨眉校区　四川峨眉山　614202

【摘要】多元函数的多自变量性，决定了多元函数求极限的复杂性和多元性，本文通过对常用方法的介绍，引出几种多元函数的特殊解法，加深对多元函数极限的求解思考与理解。

【关键词】函数连续性　夹逼准则　极坐标法　特殊罗比塔法则　球面坐标法

1．**求多元函数极限一般方法**。在一般方法中主要介绍常规运用的解法：利用多元初等函数的连续性法、夹逼准则法、重要极限的性质法以及有理化法、变量代换法。

1．1　利用多元初等函数的连续性法。多元初等函数的和、差、积、商及其复合所得的函数仍是连续函数，在其定义域内拥有函数值等于极限值的特性，只需把所求点P($X_0$,$Y_0$)带入函数即可。

例题1、求$\lim\limits_{\substack{x\to1\\y\to0}}\left(\dfrac{\ln(x^2+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{4x-y^2}\right)$

解：当$4x-y^2\ge0$函数才有意义，由于(1,0)在定义域内的点，f(x,y)在(1,0)处连续：

$$\lim_{\substack{x\to1\\y\to0}}\left(\frac{\ln(x^2+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}+\sqrt{4x-y^2}\right)=f(1,0)$$

$$=\frac{\ln(1^2+e^0)}{\sqrt{1+0}}+2=\ln2+2$$

1．2　利用夹逼准则法。在 x,y 的变化过程中，若$\varphi(x,y)\le f(x,y)\le\psi(x,y)$且$\varphi(x,y)\to A,\psi(x,y)\to A$（其中A为常数），则$f(x,y)\to A$，这样用两边夹逼原理求极限往往适用于可以变换绝对值不等式的函数极限中。

例题2、求$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$。

解：因 2|xy|≤x²+y²，故$0\le\left|\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}\right|\le\dfrac{|x|}{2}$，而$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x|=0$，

从而由夹逼定理，得出$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=0$，所以，$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|=0$。

1．3　重要极限的性质法。在求多元函数极限时，可以观察到一元函数中一些特殊的极限特征，经过构造，可以将其转化为利用重要极限的性质求多元函数极限。

均值可证

例题3、求$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\dfrac{xy}{x+y}$

解：当 x>0, y>0 时，$0<\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}<1$，$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\sqrt{xy}=0$，

$$\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\frac{xy}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\frac{\sqrt{xy}}{x+y}\sqrt{xy}=0$$

（注：无穷小量乘有界变量极限为0）

1．4　有理化法。对于含有根式的分式函数，一般采用先将分子或者分母有理化的方法。

例题4、$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\dfrac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}$

解：这里中间步骤省略了例题5的结论：$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\dfrac{xy}{x+y}=0$

$$\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\frac{\sqrt{xy+1}-1}{x+y}=\lim_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\left(\frac{xy}{x+y}\cdot\frac{1}{\sqrt{xy+1}}\right)=0$$

1．5　变量代换法。有些二元函数极限或多元函数的极限可以转化为一元函数的极限，例如$f(x,y)=g[\varphi(x,y)]$，可把$\varphi(x,y)=t$，则$f(x,y)=g(t)$，用一元函数极限来讨论g(t)。

例5、求$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\dfrac{\sin xy}{\tan(x+y)}$

析：这里的正弦与正切函数以及极限形态提示我们进行等价无穷小的转化。

解：因$\dfrac{\sin xy}{\tan(x+y)}=\dfrac{\sin xy}{xy}\cdot\dfrac{x+y}{\tan(x+y)}\cdot\dfrac{xy}{(x+y)}$，（构造了两个重要类似一元函数的极限）

又$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\dfrac{\sin xy}{xy}\overset{令xy=t}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\sin t}{t}=1$

同理$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\dfrac{x+y}{\tan(x+y)}\overset{令x+y=t}{=}\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{t}{\tan t}=1$

多出的项：$\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\dfrac{xy}{x+y}=\lim\limits_{\substack{x\to0^+\\y\to0^+}}\dfrac{\sqrt{xy}}{x+y}\sqrt{xy}=0$，所以，原式＝0。

2．**求多元函数的特殊方法**。用特殊方法求多元函数极限中，本文主要介绍极坐标法、罗比塔法则、球面坐标法。

2．1　极坐标法。利用极坐标代换，一般方法是设$x=x_0+\rho\cos\theta,y=y_0+\rho\sin\theta$，如果对于任给的$\varepsilon>0$，都满足：存在$\delta(\varepsilon)$当$0<\rho<\delta(\varepsilon)$时，对θ的任意取值，若恒有：$(x_0+\rho\cos\theta,y_0+\rho\sin\theta)-A|<\varepsilon$，则一定有$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\y\to y_0}}f(x,y)=\lim\limits_{\rho\to0^+}f(x_0+\rho\cos\theta,y_0+\rho\sin\theta)=A$。

例题6、求极限：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

解：采用极坐标法，令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta$，其中 $\rho=\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}$

从而 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\lim\limits_{\rho\to 0}|\rho\cos\theta\sin\theta|\le\rho$

而显然 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\ge 0$，又 $\lim\rho=0$，所以，由夹挤定理得到：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left|\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=0$，$\therefore\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$

2．2 球坐标法。

直角坐标与球面坐标关系是：$\begin{cases}x=r\cos\theta\sin\varphi\\ y=r\sin\theta\sin\varphi\\ z=r\cos\varphi\end{cases}$

设 f(x,y)在点($x_0$,$y_0$)的某去心邻域内有定义，则 limx→$x_0$，y→$y_0$，f(x,y)=A 的充要条件是：恒有 lim r→0，$\underset{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}{f}$ (rcosθ+$x_0$,rsinθ+$y_0$)=A，为与θ取值无关的一确定常数。

例题7、求 $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}\dfrac{(x-3)^2\cdot(y-2)^2}{(x-3)^2+(y-2)^2}$

解：这里很明显应采用球坐标法，$x_0$=3,$y_0$=2，根据推论二可得：

$$\lim_{r\to 0}f(r\cos\theta+3,r\sin\theta+2)$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta+3-3)^2\cdot(r\sin\theta+2-2)^2}{(r\cos\theta+3-3)^2+(r\sin\theta+2-2)^2}$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to 0}(r\cos\theta\sin\theta)^2=0$$

则 $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}\dfrac{(x-3)^2\cdot(y-2)^2}{(x-3)^2+(y-2)^2}=0$

注：由于多元函数的自变量多，对于判断其极限存在与否及其求法，比起一元函数的极限就显得比较困难。因此，我们可运用球面坐标把多元函数极限转化为一元函数极限来求，特别含有 $(x-x_0)^2/(y-y_0)^2$ 形式应首先联想球坐标法。

2．3 特殊罗比塔法则。罗比塔（L' Hospital）法则是计算一元函数待定型极限的一种有效方法。以 $\dfrac{0}{0}$ 型为例，直接对上下直接求导，即可求得极限，但是在多元函数中往往会是错误的，然而我们能否增加适当的条件，构造出能使罗比塔法则能够成立的相关要求，在应用罗比塔法则解题。

例题8、二元函数 f(x,y)=x-y+xy，g(x,y)=2x-2y，求 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$。

析：很明显，如果按照一元函数求极限方法，此题为 $\dfrac{0}{0}$ 型，直接用罗比塔法则，可以求出：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{df(x,y)}{dg(x,y)}=\dfrac{1}{2}$，但是实际上 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}$ 不存在，此例也说明一元函数中的罗比塔法则在多元函数中的局限性。

正解1：当 x→0, y→0 时，f(x, y)、g(x, y)都→0

而 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=1+y$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=y-1$，$\dfrac{\partial g}{\partial x}=2$，$\dfrac{\partial y}{\partial x}=-2$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{\left[\dfrac{\partial f}{\partial g}(x-0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(y-0)\right]}{\left[\dfrac{\partial g}{\partial x}(x-0)+\dfrac{\partial g}{\partial y}(y-0)\right]}=\frac{0}{0}$$

结果不确定，原函数极限不存在。

解法2：通过沿坐标轴不同方向趋近0，会得到极限和未知数k的关系，随k的变化极限也不相同，也可说明极限不存在。

注：一般多元函数的罗比塔法则是利用多元函数未定型极限的罗比塔法则，具体应满足：设函数 f(x,y)、g(x,y)在点($x_0$,$y_0$)的某个去心领域上有定义且有连续的偏导数，并且：

①(x,y)→($x_0$, $y_0$)时，f(x, y)、g(x, y)都趋于零（或趋近于无穷大）

② $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)\ne 0$

③ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{\left[\dfrac{\partial f}{\partial g}(x-x_0)+\dfrac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)\right]}{\left[\dfrac{\partial g}{\partial x}(x-x_0)+\dfrac{\partial g}{\partial y}(y-y_0)\right]}=k$（k 为有限或无穷大）$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\dfrac{f(x,y)}{g(x,y)}=k$

说明：1）当 $x_0$,$y_0$ 均为无穷大时，（3）式改为 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}\left[x\dfrac{\partial f}{\partial x}+y\dfrac{\partial f}{\partial y}\right]/\left[x\dfrac{\partial g}{\partial x}+y\dfrac{\partial g}{\partial y}\right]=k$ 法则仍然成立。

2）在条件①中，$(x,y)\to(x_0,y_0)$（或趋近于无穷大），g(x,y)→∞，法则仍然成立。

更正：2010年3月第3期第84页《数控机床第一课》一文作者王毓蓉地址安徽省冶金技术学校应改为安徽省冶金技工学校。特此更正！