第3章 单纯形法

李政伟

中国矿业大学 计算机科学与技术学院

3.1 单纯形法原理

1. 基本思想

最优解一定在**极点**达到，而极点对应于基本可行解，求解线性规划问题归结为找最优基本可行解。可以从一个基本可行解出发，求一个使目标函数值有所改善的基本可行解；通过不断改进基本可行解，力图达到最优基本可行解。

单纯形法的原理：实现基本可行基的转化。

考虑问题

$$\min\ f \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{c}\boldsymbol{x}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.}\ \ & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \\ & \boldsymbol{x} \geq 0, \end{aligned}$$

其中$\boldsymbol{A}$是$m \times n$矩阵，秩为m，$\boldsymbol{c}$是n维行向量， $\boldsymbol{b} \geq \boldsymbol{0}$是$m$维列向量。

3.1.1 基本可行解的转化

记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{p}_1,\boldsymbol{p}_2,\dots,\boldsymbol{p}_n)=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})$ 使得其中$\boldsymbol{B}$是基矩阵，$\boldsymbol{N}$是非基矩阵，设

$$\boldsymbol{x}^{(0)}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\geq\boldsymbol{0}$$

是基本可行解，在$\boldsymbol{x}^{(0)}$处的目标函数值

$$f_0=\boldsymbol{c}\boldsymbol{x}^{(0)}=(\boldsymbol{c}_B,\boldsymbol{c}_N)\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

现在分析怎样从基本可行解$\boldsymbol{x}^{(0)}$出发，求一个改进的基本可行解.

设 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}$ 是任一可行解，则由$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$得到

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=(\boldsymbol{B},\boldsymbol{N})\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N=\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N$$

3.1.1 基本可行解的转化

在点$\boldsymbol{x}$处的目标函数值

$$f=\boldsymbol{cx}=(\boldsymbol{c}_B,\boldsymbol{c}_N)\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_B\\ \boldsymbol{x}_N\end{bmatrix}$$

$$=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B+\boldsymbol{c}_N\boldsymbol{x}_N$$

$$=\boldsymbol{c}_B(\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}_N)+\boldsymbol{c}_N\boldsymbol{x}_N$$

$$=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}-\boldsymbol{c}_N)\boldsymbol{x}_N$$

$$=f_0-\sum_{j\in R}(\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_j-c_j)\,x_j$$

$$=f_0-\sum_{j\in R}(z_j-c_j)x_j$$

其中，R是非基变量下标集，

$$z_j=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_j$$

适当选取自由未知量$x_j(j\in R)$，使得

$$\sum_{j\in R}(z_j-c_j)x_j>\mathbf{0}$$

得到使目标函数值减少的新的基本可行解.

1) $\forall j,(z_j-c_j)\le 0$

不可能找到非基变量，使得目标函数值再下降，迭代终止，找到最优解。

2) $\exists j,(z_j-c_j)>0$

对于$(z_j-c_j)\le 0$，x_j只需保持为0.

对于多个$(z_j-c_j)>0$，取

$$z_k-c_k=\max_{j\in R}\{z_j-c_j\}$$

3.1.1 基本可行解的转化

原来方程组$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$的解为

$$\boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{x_N}$$

x_k由0变成正之后

$$\boldsymbol{x_B}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{B}^{-1}p_k x_k$$

$$\overline{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{y}_k=\boldsymbol{B}^{-1}p_k$$

$$=\overline{\boldsymbol{b}}-\boldsymbol{y}_k x_k$$

把$\boldsymbol{x_B}$按列展开

$$\boldsymbol{x_B}=\begin{bmatrix} x_{B_1} \\ x_{B_2} \\ \vdots \\ x_{B_m} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \\ \bar{b}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_m \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ \vdots \\ y_{mk} \end{bmatrix}x_k,$$

$$\boldsymbol{x_N}=(0,\ldots,0,x_k,0,\ldots,0)^T$$

目标函数值为

$$f=f_0-(z_k-c_k)x_k$$

3.1.1 基本可行解的转化

$$f = f_0 - (z_k - c_k)x_k$$

一方面，x_k取值越大函数值下降越多；另一方面，x_k的取值受到可行性的限制，它不能无限增大(当$\boldsymbol{y}_k \le \mathbf{0}$时).

对某个i，当$y_{ik} \le 0$时，x_k取任何正值时，总成立$x_{B_i} \ge 0$,

而当$y_{ik} > 0$时，为保证 $x_{B_i} = \bar{b}_i - y_{ik}x_k \ge 0$,

就必须取值 $x_k \le \dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}}$

因此，为使$\boldsymbol{x}_B \ge \mathbf{0}$，应令

$$x_k = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\middle| y_{ik} > 0\right\} = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}}$$

得到新的可行解 $\boldsymbol{x} = (x_{B_1}, \dots, x_{B_{r-1}}, 0, x_{B_{r+1}}, 0, \dots, x_k, 0, \dots, 0)^T$

3.1.1 基本可行解的转化

这个解一定是基本可行解。这是因为原来的基

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_{B_1}, \dots, \boldsymbol{p}_{B_r}, \dots, \boldsymbol{p}_{B_m})$$

中的m个列是线性无关的，其中不包含$\boldsymbol{p}_k$. 由于$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k$，故

$$p_k = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_k = \sum_{i=1}^{m} y_{ik}\boldsymbol{p}_{B_i}$$

即p_k是向量组$\boldsymbol{p}_{B_1}, \dots, \boldsymbol{p}_{B_r}, \dots \boldsymbol{p}_{B_m}$的线性组合，且系数$y_{rk} \neq 0$.

因此用$\boldsymbol{p}_k$取代$\boldsymbol{p}_{B_r}$后，得到的向量组

$$\boldsymbol{p}_{B_1}, \dots, \boldsymbol{p}_k, \dots \boldsymbol{p}_{B_m}$$

也是线性无关的。因此新的可行解$\boldsymbol{x}$的正分量对应的列线性无关，故$\boldsymbol{x}$为基本可行解。

3.1.1 基本可行解的转化

定理3.1.1 若在极小化问题中，对于某个基本可行解，所有$z_j - c_j \leq 0$，则这个基本可行解是最优解；若在极大化问题中，对于某个基本可行解，所有$z_j - c_j \geq 0$，则这个基本可行解是最优解。其中

$$z_j - c_j = \boldsymbol{c}_B \boldsymbol{B}^{-1} \boldsymbol{p}_j - c_j, j = 1, \ldots n,$$

在线性规划中，通常称$z_j - c_j$为**判别数**或**检验数**。

3.1.2 单纯形方法计算步骤

(1)解$\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{b}$，求得$\boldsymbol{x}_B = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}$，令$\boldsymbol{x}_N = \boldsymbol{0}$，计算目标函数值$f = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B$.

(2)求单纯形乘子$\boldsymbol{w}$，解$\boldsymbol{w}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{c}_B$，得到$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}$。对于所有非基变量，计算判别数$z_j - c_j = \boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_j - c_j$，令

$$z_k - c_k = \max_{j\in R}\{z_j - c_j\}$$

若$z_k - c_k \le 0$，则对于所有非基变量$z_j - c_j \le 0$，对应基变量的判别数总是零，因此停止计算，现行基本可行解是最优解。否则，进行下一步。

(3)解$\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}_k$=$\boldsymbol{p}_k$，得到$\boldsymbol{y}_k = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_k$，若$\boldsymbol{y}_k \le \boldsymbol{0}$，即$\boldsymbol{y}_k$的每个分量均非正数，则停止计算，问题不存在有限最优解。否则，进行步骤(4).

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} \,\middle|\, y_{ik} > 0\right\}$$

(4)确定下标r，x_r使为**离基变量**，x_k为**进基变量**。用$\boldsymbol{p}_k$替换$\boldsymbol{p}_{B_r}$，得到新的基矩阵$\boldsymbol{B}$，返回步骤(1).

对于极大化问题，可给出完全类似的步骤。对于极大化问题，应令

$$z_k - c_k = \min_{j\in R}\{z_j - c_j\}$$

3.1.2 单纯形方法计算步骤

例3.1.1 用单纯形方法解下列问题：

$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ & 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ & x_1 - x_2 \le 3, \\ & x_1, x_2 \ge 0, \end{aligned}$$

解 引入松弛变量x_3, x_4, x_5，把问题化成：

$$\begin{aligned} \min\ & -4x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ & -x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ & 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 12, \\ & x_1 - x_2 + x_5 = 3, \\ & x_j \ge 0, j = 1, \dots, 5 \end{aligned}$$

系数矩阵

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

第1次迭代

$$\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{p}_3, \boldsymbol{p}_4, \boldsymbol{p}_5) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 12 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_N = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$f_1 = \boldsymbol{c_B x_B} = (0,0,0)(4,12,3)^T = 0,$$

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{c_B B}^{-1} = (0,0,0)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,0,0),$$

$$z_1 - c_1 = \boldsymbol{wp}_1 - c_1 = (0,0,0)(-1,2,1)^T + 4 = 4,$$

$$z_2 - c_2 = \boldsymbol{wp}_2 - c_2 = (0,0,0)(2,3,-1)^T + 1 = 1,$$

$$\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\boldsymbol{b}} = \boldsymbol{x_B} = (4,12,3)^T,$$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min\left\{\frac{\bar{b}_2}{y_{21}}, \frac{\bar{b}_3}{y_{31}}\right\} = \min\left\{\frac{12}{2}, \frac{3}{1}\right\} = \frac{3}{1},$$

因此$r = 3$。$\boldsymbol{x_B}$中第3个分量x_5为**离基变量**，x_1为**进基变量**，

$$x_1 = \bar{b}_3 / y_{31} = 3,$$

用$\boldsymbol{p}_1$代替$\boldsymbol{p}_5$，得到新基，进行下一次迭代。

3.1.2 单纯形方法计算步骤

第2次迭代

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_4,\boldsymbol{p}_1)=\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_B=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\\x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\6\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\\bar{b}_2\\\bar{b}_3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x_2\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},$$

$$f_1=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{x}_B=(0,0,-4)(7,6,3)^T=-12,$$

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}=(0,0,-4)\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}=(0,0,-4),$$

$$z_2-c_2=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_2-c_2=(0,0,-4)(2,3,-1)^T+1=5,$$

$$z_5-c_5=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_5-c_5=(0,0,-4)(0,0,1)^T-0=-4,$$

最大判别数为$z_2-c_2=5$，$k=2$，计算$\boldsymbol{y}_2$

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&-2\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\5\\-1\end{bmatrix},$$

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{r2}}=\min\left\{\frac{\bar{b}_3}{y_{32}},\frac{\bar{b}_4}{y_{32}}\right\}=\min\left\{\frac{7}{1},\frac{6}{5}\right\}=\frac{6}{5},$$

因此$r=4$。$\boldsymbol{x}_B$中第2个分量x_4为**离基变量**，x_2为**进基变量**，用$\boldsymbol{p}_1$代替$\boldsymbol{p}_5$，得到新基，进行下一次迭代。

3.1.2 单纯形方法计算步骤

第3次迭代

$$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{p}_3,\boldsymbol{p}_2,\boldsymbol{p}_1)=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}x_3\\ x_2\\ x_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{29}{5}\\ \frac{6}{5}\\ \frac{21}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{b}_1\\ \bar{b}_2\\ \bar{b}_3\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}_N=\begin{bmatrix}x_4\\ x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix},$$

$$f_1=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{B}}=(0,-1,-4)\left(\frac{29}{5},\frac{6}{5},\frac{21}{5}\right)^T=-18,$$

$$\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c}_{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{B}^{-1}=(0,-1,-4)\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{5} & \frac{7}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5}\\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}=(0,-1,-2),$$

$$z_4-c_4=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_4-c_4=(0,-1,-2)(0,1,0)^T-0=-1,$$

$$z_5-c_5=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_5-c_5=(0,-1,-2)(0,0,1)^T-0=-2,$$

由于所有$z_j-c_j<0$，因此得最优解

$$x_1=\frac{21}{5},x_2=\frac{6}{5}$$

目标函数值的最优值为

$$f_{\min}=-18$$

3.1.3 收敛性

以极小化问题为例。令

$$z_k - c_k = \max_{j \in R}\{z_j - c_j\}$$

每次迭代必出现下列三种情形之一:

(1)$z_k - c_k \le 0$. 这时现行基本可行解就是最优解.

(2)$z_k - c_k > 0$且$y_k \le 0$.对于此种情形，由(3.1.8)式可知，k取任何正数，总能得到可行解. 又由(3.1.10)式知，当x_k无限增大时，目标函数值$f \to -\infty$，因此问题属于无界情形.

(3) $z_k - c_k > 0$且$y_k \nleq 0$. 这时可求出新的基本可行解. 若

$$x_k = \frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$$

则经迭代，目标函数值下降.

当极小化线性规划问题存在最优解时，对于非退化情形，在每次迭代中，均有

$$\boldsymbol{x_B} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b} = \bar{\boldsymbol{b}} > \boldsymbol{0}$$

自然 $x_k = \dfrac{\bar{b}_r}{y_{rk}} > 0$

定理3.1.2 对于非退化问题，单纯形方法经有限次迭代或达到最优基本可行解，或得出无界的结论.

The end