Ch1 线性方程组

1.（1）√（2）×（3）×（4）√（5）×（6）√
2.（1）×（2）√（3）√（4）√

3.（1）通解为$\begin{cases} x_1 = 6k+6 \\ x_2 = -5k-1 \\ x_3 = -3k-5 \\ x_4 = k \end{cases}, k \in R$ （2）唯一解，$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{17}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \\ x_3 = 0 \end{cases}$ （3）无解

4.（1）无解 （2）$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{3}k \\ x_2 = -3k \\ x_3 = \dfrac{4}{3} \\ x_4 = k \end{cases}, k \in R$

Ch2 矩阵

练习 1 矩阵的运算

1.（1）$\begin{pmatrix} 12 & 26 \\ -27 & 2 \\ 23 & 4 \end{pmatrix}$（2）20（3）$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \\ 4 & 7 & 9 \end{pmatrix}$ （4）$\begin{pmatrix} 7 & 28 & 67 \\ 0 & 40 & 104 \\ 0 & 0 & 72 \end{pmatrix}$ （5）$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $6^{n-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

练习 2 可逆矩阵

1. （1）$\begin{pmatrix} \dfrac{3}{4} & -\dfrac{1}{4} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix}$（2）$A^{-1} = \begin{pmatrix} & & & \frac{1}{n} \\ & & \frac{1}{n-1} & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$（3）$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$

2. $P_1=\begin{pmatrix}1 & & \\ -1 & 1 & \\ & & 1\end{pmatrix}$, $P_2=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ -1 & & 1\end{pmatrix}$, $P_3=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

3. $P_2AP_1=E$, $A=P_2^{-1}P_1^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$

4. $(A+4E)^{-1}=-\dfrac{1}{5}(A-2E)$

5. $A+B=A(A^{-1}+B^{-1})B\Rightarrow(A+B)^{-1}=B^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}A^{-1}$

或 $A+B=B(A^{-1}+B^{-1})A\Rightarrow(A+B)^{-1}=A^{-1}(A^{-1}+B^{-1})^{-1}B^{-1}$

6. (1) $B=A+E$ (2) $\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

7. (1) $X=(A-B)^{-2}$ (2) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 5\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

练习 3 分块矩阵

1. $\begin{pmatrix}\frac{3}{25} & \frac{4}{25} & 0 & 0\\ \frac{4}{25} & -\frac{3}{25} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

2. 证略

Ch3 行列式及其应用

练习 1 行列式的定义

1. −49

2. （1）0；2 （2）10

练习 2 行列式的性质

1. 155

2. 2

3. （1）48（2）2

4. （1） x^4 （2） $\prod\limits_{i=1}^{n} a_i(1+\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i})$ （3） $(a+b+c)(b-a)(c-a)(c-b)$

练习 3 行列式的应用

1. （1）

$AA^*=A^*A=|A|E \Rightarrow (A^*)^{-1}=\frac{1}{|A|}A$,

$A^{-1}(A^{-1})^*=(A^{-1})^*A^{-1}=|A^{-1}|E \Rightarrow (A^{-1})^*=|A^{-1}|A=\frac{1}{|A|}A$,

（2） $\frac{1}{10}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&2&0\\3&4&5\end{pmatrix}$

2.（1） $\frac{1}{2^k}$ （2） $-\frac{16}{27}$

3. $B=4(A+E)^{-1}=4\begin{pmatrix}-1&1&2\\2&-1&-2\\1&-1&-1\end{pmatrix}$

4. $\lambda=1$或$\lambda=3$

Ch4 向量空间

练习 1：.

1、D 2、B 3、 $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix},k_1,k_2\in R$

4、 $\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\3&2&1&-3&5\\0&1&2&6&1\\5&4&3&-1&k\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&1&2\\0&-1&-2&-6&-1\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&k-9\end{pmatrix}$

$k=9$

5、法一： $\left(\alpha_1,\alpha_2\middle|\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{cc|ccc}1&1&0&2&2\\0&1&-1&1&3\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow Ax=B$ 有解

$$\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\,\middle|\,\alpha_1,\alpha_2\right)\xrightarrow{r}\left(\begin{array}{ccc|cc}-1&1&3&0&1\\0&2&2&1&1\\0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow Bx=A\text{有解}$$

法二：将向量分别做转置然后按行排成矩阵，行变换得到的矩阵的行组都等价，我们将其化为行最简进行判断 $\begin{pmatrix}\beta_1^T\\\beta_2^T\\\beta_2^T\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\alpha_1^T\\\alpha_2^T\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$

练习 2

1、B 2、D 3、D 4、C 5、a=2b

6、证明：向量组线性无关$\Leftrightarrow Bx=0$只有零解$\Leftrightarrow ACx=0(B=AC)$只有零解

因为向量组 A 线性无关，则 $Ay=0$ 只有零解. 即若 $ACx=0$，必有 $Cx=0$

所以 $ACx=0$ 只有零解$\Leftrightarrow Cx=0$只有零解$\Leftrightarrow C$为可逆矩阵(注意此处C为方阵)

7、（1）利用定义证明 β_1,β_2,β_3 线性无关

设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_1+\alpha_3)=0$$

$$(x_1+x_3)\alpha_1+(x_1+x_2)\alpha_2+(x_2+x_3)\alpha_3=0$$

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，所以 $\begin{cases}x_1+x_3=0\\x_1+x_2=0\\x_2+x_3=0\end{cases}$，该方程组只有零解，所以 β_1,β_2,β_3 线性无关。

（2）设 $D=(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$，满足 $D=AC$，其中 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3),C=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$，因为

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 无关，且$|C|=0$，即 C 不可逆，所以 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3$ 线性相关.

练习 3

1、B 2、C 3、A 4、6

5、解：$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5\right)=\begin{pmatrix}1&0&3&1&2\\-1&3&0&-1&1\\2&1&7&2&5\\4&2&14&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&3&0&-1/2\\0&1&1&0&1\\0&0&0&1&5/2\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

极大无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

$\alpha_3=3\alpha_1+\alpha_2,\alpha_5=-\frac{1}{2}\alpha_1+\alpha_2+\frac{5}{2}\alpha_4$

6、法一：证：设有一组数k_1,k_2,k_3,k_4使得$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3+k_4(\alpha_5-\alpha_4)=0(1)$

因为秩(I)=秩(II)=3，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$无关，而$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$相关，所以存在数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$使得$\alpha_4=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\lambda_3\alpha_3$,代入(1)式可得：

$(k_1-\lambda_1k_4)\alpha_1+(k_2-\lambda_2k_4)\alpha_2+(k_3-\lambda_3k_4)\alpha_3+k_4\alpha_5=0$

由秩(III)=4，可得$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5$线性无关，所以

$\begin{cases}k_1-\lambda_1k_4=0\\k_2-\lambda_2k_4=0\\k_3-\lambda_3k_4=0\\k_4=0\end{cases}\Rightarrow k_1=k_2=k_3=k_4=0$，所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4$线性无关，秩为 4.

法二：提示：$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5-\alpha_4)\xrightarrow{c}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_5)$列变换不改变秩。

7、证：利用反证法

假设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则有不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$

则我们证明$k_m=0$,否则有$\alpha_m=-\frac{k_1}{k_m}\alpha_1-\frac{k_2}{k_m}\alpha_2-\cdots-\frac{k_{m-1}}{k_m}\alpha_{m-1}$，与题条件矛盾.

所以有$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_{m-1}\alpha_{m-1}=0$，同理可证$k_{m-1}=0,k_{m-2}=0,\cdots,k_2=0$，所以$k_1\alpha_1=0$，又因为$\alpha_1\neq0$，所以$k_1=0$,这与假设矛盾，所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$无关，秩为 m.

练习 4

1、 1　　2、-2　　3、2　　4、D　　5、C

6、解：$A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}-1&-3&2&0\\0&-11&6&1\\0&0&-36/11&49/11\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow r(\mathrm{A})=3,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$为极大无关组

7、解：$|A|=\begin{vmatrix}2&-1&3\\1&-3&4\\-1&2&\lambda\end{vmatrix}=-5\lambda-15$，所以$\lambda=-3,r(\mathrm{A})=2,\lambda\neq-3,r(\mathrm{A})=3$.

8、证：$r(A)=n,A$可逆，则A^*也可逆，所以$r(A^*)=n$.

若$r(A)<n-1, A$的所有$n-1$阶子式都为零，所以$A^*=0$，$r(A^*)=0$

若$r(A)=n-1, |A|=0, AA^*=0$，由$r(A^*)+r(A)\le n \Rightarrow r(A^*)\le 1$

又由$r(A)=n-1, A^*\ne 0$，$r(A^*)\ge 1$

所以$r(A^*)$=1

9、证明：因为$A(E-A-B)=A-A^2-AB=-AB$,由$E-A-B$可逆，$r(A)=r(AB)$

同理$r(B)=r(AB)$

练习 5

1、$\forall \alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_r,0,\cdots,0)^T, \beta=(b_1,b_2,\cdots,b_r,0,\cdots,0)^T, k_1,k_2\in R$

$k_1\alpha+k_2\beta=(k_1a_1+k_2b_1,\cdots,k_1a_r+k_2b_r,0,\cdots,0)^T\in U$

2、$\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-1&-3&1\\0&0&5&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，$\alpha_1,\alpha_3$为基，维数为 2

练习 6

1、A　2、A　3、C　4、B　5、B　6、 B

7、2,3,3　8、$k(1,-2,1,0)^T+(1,1,1,1)^T$

9、解：$4-r(A)=2\Rightarrow r(A)=2$

任意三阶子式为零，$\begin{vmatrix}1&2&1\\0&1&c\\1&c&0\end{vmatrix}=-c^2+2c-1=0\Rightarrow c=1$

$A\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_3\\x_2=-x_3-x_4\end{cases}$

令$\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得基础解析为$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\0\\1\end{pmatrix}$

10、解：对增广矩阵做初等行变换：

$$\overline{A}=\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\2&1&-1&-1&1\\4&2&-2&1&2\end{pmatrix}\xrightarrow[r_3-2r_1]{r_2-r_1}\begin{pmatrix}2&1&-1&1&1\\0&0&0&-2&0\\0&0&0&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1/2&-1/2&0&1/2\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

因为$r(\overline{A})=r(A)=2$，所以有无穷多解，同解方程组为

$$\begin{cases}x_1+\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3=\frac{1}{2}\\x_4=0\end{cases},\text{移项可得}\begin{cases}x_1=-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3+\frac{1}{2}\\x_4=0\end{cases}$$

特解$\eta=(1/2,0,0,0)^T$，

对应齐次线性方程组的基础解系

$\xi_1=(-1/2,1,0,0)^T,\xi_2=(1/2,0,1,0)^T$

所以通解为： $x=\eta+k_1\xi_1+k_2\xi_2,(k_1,k_2\in R)$

11、解：$|A|=\lambda^2(\lambda+3)$

当$|A|\neq 0,\lambda\neq -3,0$时，表达式唯一

当$\lambda=0$时，$(A,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\1&1&1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

同解方程组为$x_1=-x_2-x_3$ 令$\begin{pmatrix}x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\xi_1=(-1,1,0)^T,\xi_2=(-1,0,1)^T$

所以$\beta=k_1\xi_1+k_2\xi_2(k_1,k_2\in R)$

当$\lambda=-3$时，$(A,\beta)\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1&-2&1&-3\\0&-3&3&-6\\0&0&0&6\end{pmatrix}$

无解，即不能表示.

Ch5 特征值与特征向量

练习 1

1、解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0\quad\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=10$

$$\lambda_1=1, E-A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}，\xi_1=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}2\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

特征向量$x=k_1\xi_1+k_2\xi_2(k_1,k_2$不同时为零$)$

$$\lambda_2=10,10E-A=\begin{pmatrix}8 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 4\\ 2 & 4 & 5\end{pmatrix}\xrightarrow{r}\begin{pmatrix}1 & 0 & 1/2\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-1/2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

特征向量$x=k\xi_3(k$不为零$)$

2、-3，0，-1

3、3+2/a

4、$\lambda_0 E$

5、可逆

6、B

7、C

8、解：设(1)$\varphi(A)=A^2+3A+E,\lambda$为 A 的特征值，则$\varphi(A)$的特征值为

$\varphi(\lambda)=\lambda^2+3\lambda+1$，计算可得分别为$-1,5,11$，所以$\left|A^2+3A+E\right|=-55$

(2)由$AA^*=|A|E=-2E\Rightarrow A^*=-2A^{-1}$

所以$g(A)=A^*-A^{-1}-A=-3A^{-1}-A$

其特征值为$g(\lambda)=-3\lambda^{-1}-\lambda$，计算可得分别为 4，-4，-7/2

所以行列式为 56.

9、由$\left|\sqrt{2}E+A\right|=0$，则 A 有特征值$-\sqrt{2}$，$A^T$也有特征值$-\sqrt{2}$. A^{-1}有特征值$-1/\sqrt{2}$.

$AA^T=2E, |A|^2=16,$由$|A|<0,|A|=-4$. $A^{-1}=\dfrac{A^T}{2}$,

$AA^*=|A|E=-4E\Rightarrow A^*=-4A^{-1}$，所以$A^*$有特征值$(-4)(-1/\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

或$A^*=-4A^{-1}=-2A^T$，所以A^*有特征值$\lambda=2\sqrt{2}$。

10、解：

设$\beta=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$，$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$，$A=\begin{pmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{pmatrix}$，$tr(\mathrm{A})=b_1a_1+b_2a_2+b_3a_3=\beta^T\alpha=2$

因为$A\beta=\beta\alpha^T\beta=2\beta$，所以有特征值 2，又$r(A)=1$，所以 0 也是 A 的特征值.

所以 A 的所有特征值为 2,0,0.

（注：$A^2=\beta\alpha^T\beta\alpha^T=\beta(\alpha^T\beta)\alpha^T=2A$

设λ为 A 的特征值，则满足$\lambda^2=2\lambda$，所以 A 的特征值可能为 0 或 2.）

练习 2 方阵的对角化

1、B　2、B　3、D　4、-17,-12　5、D

6、解：利用相似的必要条件来判定不相似，利用相似的传递性判断矩阵的相似

因为相似矩阵有相同的秩，而$r(A)=2, r(B)=r(C)=1$，所以 A 与 B 不相似，A 与 C 不相似.

矩阵 B 与 C 的特征值均为 1，0,0

对于 B，因为$r(B)=1$，所以 0 特征值对应的无关特征向量有 2 个，所以 B 与对角矩阵

$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$相似

对于 C，同理与$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$也相似，所以由相似的传递性，可得 B 与 C 相似.

7、解：(1)求解 B 满足 AP=PB

$$AP=A(\alpha,A\alpha,A^2\alpha_3)=(A\alpha,A^2\alpha,A^3\alpha)=(\alpha,A\alpha,A^2\alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}=PB$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

(2)$|A+E|=|PBP^{-1}+E|=|B+E|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4$

8、解：因为 A 有 3 个不同的特征值，所以 A 可对角化，即存在可逆阵P满足

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&3\end{pmatrix}=B$$ ，其中 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ ， $P^{-1}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1/2&-1/2&1\\1/2&1/2&0\end{pmatrix}$

$$A=PBP^{-1}\Rightarrow A^n=PB^nP^{-1}\quad=\begin{pmatrix}1&0&0\\\dfrac{1-2^n}{2}&\dfrac{3-2^n}{2}&2^n-1\\\dfrac{3^n-1}{2}&\dfrac{3^n-1}{2}&1\end{pmatrix}$$

9、解：求 A 的特征值：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-3&-2&2\\k&\lambda+1&-k\\-4&-2&\lambda+3\end{vmatrix}\overset{c_1+c_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\\lambda-1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}$

$$=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\1&-2&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}1&-2&2\\0&\lambda+1&-k\\0&0&\lambda+1\end{vmatrix}=(\lambda-1)(\lambda+1)^2=0$$

λ_1=1，$\lambda_2=-1(2\text{重})$

要可对角化，则 $r(-E-A)=1$

$$-E-A=\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\-4&-2&2\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}-4&-2&2\\k&0&-k\\0&0&0\end{pmatrix}$$ 所以 k=0.

10、证：由题条件可得：$|A-aE|=0$或$|A-bE|=0$

即 A 的特征值为 a 或者 b

若 a 是 A 的特征值，而 b 不是 A 的特征值，则 $|A-bE|\neq 0$，即 $A-bE$ 为可逆矩阵，从而

$A-aE$=$0\Rightarrow A=aE$，所以 A 可对角化.

同理可得当若 b 是 A 的特征值，而 a 不是 A 的特征值时，$A=bE$，所以 A 可对角化.

若 A 的特征值为 a 和 b,

由 $(A-aE)(A-bE)=0$ 可得：$r(A-aE)+r(A-bE)\le n$

另一方面 $r(A-aE)+r(bE-A)\ge r(A-aE+bE-A)=r((b-a)E)=n$

所以 $r(A-aE)+r(A-bE)$=n，即 $n-r(A-aE)+n-r(A-bE)$=n，即有 n 个无关的特征向量，所以可对角化.

Ch6 实对称矩阵与实二次型

练习 1 欧氏空间

1. $\alpha_2=(1,0,-1)^T,\alpha_3=\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)^T$

2. $\gamma_1=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,-1)^T,\gamma_2=\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1)^T,\gamma_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)^T$

3. (1) 是正交阵 (2) 是正交阵

4. 证略

5. 证：$A=(a_{ij})_{n\times n}$ 为正交矩阵，$AA^T=E$，可知 $A^T=A^{-1}$，对 $AA^T=E$ 两边取行列式，注意到 $|A|=|A^T|$，易得 $|A|=\pm1$，又 $AA^*=|A|E=\pm E$，$\therefore A^*=\pm A^{-1}=\pm A^T$，$A_{ij}=\pm a_{ij}$

练习 2 实对称矩阵的对角化

1. (1) $P=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$ （2）$Q=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{pmatrix}$

2. $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$

3. 证：设 $r(A)=r$，因为 A 是实对称矩阵，必可对角化，故存在可逆阵 P，使 $P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)$，其中 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r$ 为 A 的非零特征值，则 $A=Pdiag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_r,0,\cdots,0)P^{-1}$，$A^2=Pdiag(\lambda_1{}^2,\lambda_2{}^2,\cdots,\lambda_r{}^2,0,\cdots,0)P^{-1}$，从而 $r(A)=r=r(A^2)$.

4. 证：设 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 为 A 的 n 个正交的特征向量，易知 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$ 线性无关，故 A 与对角阵 Λ 相似．令 $\gamma_i=\frac{\xi_i}{\|\xi_i\|},i=1,2,\cdots,n,\quad Q=(\gamma_1,\gamma_2,\cdots,\gamma_n)$，则 Q 为正交阵，且 $A=Q\Lambda Q^{-1}=Q\Lambda Q^T$，则 $A^T=(Q\Lambda Q^T)^T=Q\Lambda^TQ^T=Q\Lambda Q^T=A$，即 A 为对称阵

练习 3 二次型及其标准形

1. D

2. $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$

3. （1） $a = 1,\quad b = 2$

（2）正交变换矩阵$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$，标准形为 $f = 2y_1^2 + 2y_2^2 - 3y_3^2$

练习 4　正定二次型与正定矩阵

1. A

2. $-\frac{4}{5} < t < 0$

3. （1） $\forall x \neq 0,$ 有 $f_1(x) = x^T Ax > 0,$， $f_2(x) = x^T Bx > 0,$ 标准形为所以

$f_3(x) = x^T(A+B)x > 0,$ $A+B$ 正定.

（2）“$\Rightarrow$”因为AB为正定阵，故AB为对称阵，从而$(AB)^T = AB$，又$(AB)^T = B^T A^T = BA$，故 $AB = BA$

. “$\Leftarrow$” 由 $AB = BA$ 知 $(AB)^T = B^T A^T = BA = AB$ ，即 AB 为对称阵.

又 A 为正定阵，所以存在可逆阵 P，使 $A = PP^T$，从而 $AB = PP^T B,$ 进一步

$P^{-1}ABP = P^T BP,$ 即 AB与$P^T BP$相似.

由于 B 为正定阵，故有 $P^T BP$ 为对称阵且对任意的 $x \neq 0$ ，必有 $Px \neq 0$ ，

$x^T P^T BPx = (Px)^T B(Px) > 0$ ，也就是 $P^T BP$ 为正定阵，因此 $P^T BP$ 的特征值全大于 0，从而 AB 的特征值也全大于 0，所以 AB 是正定的.

4. （1）0，-2，-2 （2） $k > 2$

5. 证（1） A 对称，则 A 可正交对角化， $A = Q\Lambda Q^T$

由 A 对称正交，得 $A^2 = E \Rightarrow Q\Lambda^2 Q^T = E \Rightarrow \Lambda^2 = E$

又 A 正定，Λ 的对角元全正，全是1，即 $\Lambda = E$， 从而 $A = E$

（2）设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ 为 A 的非零特征值，则故存在正交矩阵 P，使 $P^T AP = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$，则 $A = Pdiag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)P^T$，记 $P = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，则上式为 $A = \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T + \lambda_2 \xi_2 \xi_2^T + \cdots + \lambda_r \xi_r \xi_r^T$，显然矩阵 $\lambda_i \xi_i \xi_i^T \left(i = 1, 2, \cdots, r\right)$ 都是对称矩阵且秩为 1.

综合练习题 I

一、填空题

1. 40; 2. 2; 3. 4; 4. $(-1,1,4)^T$; 5. $k(1,1,\cdots,1)^T$.

二、选择题

1. D; 2. C; 3. B; 4. C; 5. A.

三、x^2y^2

四、(1) 略； (2) $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

五、(1) $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$;

(2) $a = -1, x = k \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $k \neq 0$.

六、(1) $\xi = -2; a = -4; b = 1$;

(2) 不可对角化

七、(1) $a = 3; b = 1$;

(2) $P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$

综合练习题二

一、填空题

1. $-\frac{1}{2}$; 2. $(1,-1,1,-1)^T + k(1,-2,1,0)^T, k \in R$; 3. 1; 4. E; 5. -1.

二、选择题

1. C;　2. C;　3. B;　4. A;　5. D.

三、$B^* = \frac{1}{16}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

四、$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}, Ax = 0$.(答案不唯一)

五、$t = -1$; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 为一个极大无关组; $\alpha_4 = 2\alpha_1 + \alpha_2$.

六、(1) 略;

(2) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

七、(1) $Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3} \end{bmatrix}$;

(2) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$