一阶 *RC* 电路的零输入响应

RC 电路的零输入响应是指当输入信号为零时，由电容元件初始储能（即初始值），在电路中产生的响应。

实质:就是分析 *RC* 电路的放电过程。

图 1 所示的 *RC* 电路中，在换路前开关 S 在位置“2”，外加电源对电容已充电完毕，电路已进入稳态，电容电压的初始值 $u_c(0_-)=U$ 。在 t=0 时换路，将开关 S 转到位置“1”，电路脱离电源，输入信号为零。根据换路定律，换路瞬间 $u_C(0_+)=u_c(0_-)=U$，这时电容元件通过电阻 R 开始放电。

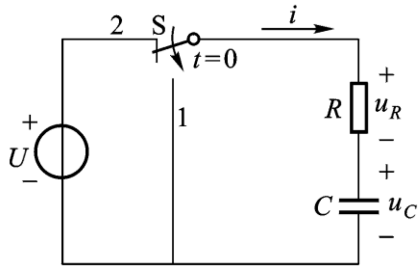

图 1　*RC* 放电电路

(1) 电容电压 u_C 的变化规律

在图 6.1 所示电压、电流的正方向下，根据基尔霍夫电压定律得

$$u_R+u_C=0 \qquad 即 \qquad i_C R+u_C=0$$

由于　$i_C=C\dfrac{du_C}{dt}$　代入上式得

$$RC\frac{du_C}{dt}+u_C=0 \qquad (1)$$

式(1)是线性常系数一阶齐次微分方程，因此称其为一阶 *RC* 电路。

(2) 解方程

微分方程的全解 u_C 由特解 u_C' 和通解 u_C'' 两部分组成，即

$$u_C=u_C'+u_C''。$$

其中 u_C' 为特解，即稳态分量，当电路进入稳态时，*RC* 电路放电完毕，所以 $u_C'=u_C(\infty)=0$；

u_C'' 为微分方程的通解，即暂态分量。

令通解为 $u_C''=Ae^{pt}$，并代入式(1)，得

$$RCpAe^{pt}+Ae^{pt}=0$$

该微分方程的特征方程为

$$RCp+1=0$$

$$p=-\frac{1}{RC}$$

代入通解 $u_C''=Ae^{-\frac{1}{RC}}$ 后，利用初始条件定积分常数 A。

由前面可知 $u_C(0_+)=u_C(0_-)=U$，

将 t = 0+ = 0 代入上式得　　$A=U$

得通解为　　$u_C''=Ae^{-\frac{1}{RC}}=Ue^{-\frac{1}{RC}}$

则微分方程全解 u_C 为　$u_C=u_C'+u_C''=0+Ue^{-\frac{1}{RC}}=Ue^{-\frac{1}{RC}}$

令上式中 $RC=\tau$，则　$u_C=Ue^{-\frac{1}{\tau}}$

放电电流为　　$i_C=C\frac{du_C}{dt}=-\frac{U}{R}e^{-\frac{1}{\tau}}$

式中，负号表示放电电流实际方向与图 1 所示正方向相反。

$$u_R=i_CR=-Ue^{-\frac{1}{\tau}}$$

(3) 时间常数

令　　$\tau=RC$　　单位：s

τ 的单位具有时间的量纲，所以称 τ 为时间常数。

当 t=τ 时

$$u_C=Ue^{-\frac{1}{\tau}}=Ue^{-1}=\frac{U}{2.718}=0.368U$$

这表明经过时间 τ 以后，电容两端电压 u_C 衰减为 初始值的 36.8%。

一般认为当 t = (3～5) τ 时，$u_C=Ue^{-(3\sim5)}\approx0$，电容放电过程基本结束，这时电容元件的稳态值 $u_C(\infty)=0$。

当初始电压 U 一定时，τ 值将影响 u_C 的衰减速度。τ 越大，u_C 衰减越慢，即放电越慢；τ 越小，u_C 衰减越快，即放电越快，如图 2 所示。

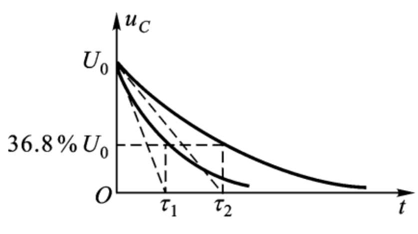

图 2 不同 τ 时 u_C 衰减曲线

(4) u_C、i_C、u_R 的变化曲线如图 3 所示。

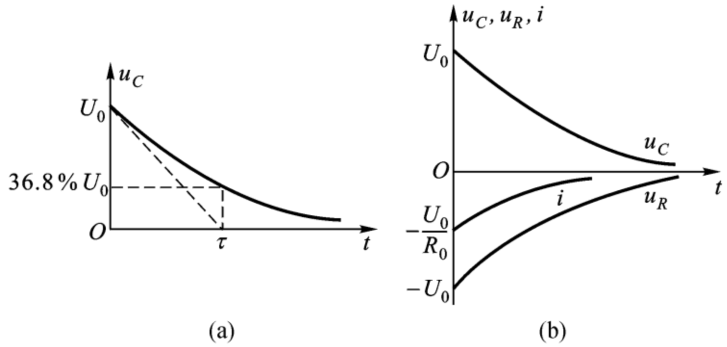

图 3 u_C、i_C、u_R 的变化曲线

(a) u_C 变化曲线 (b) u_C、i_C、u_R 的变化曲线