30. 10. 2024

11. Eliminační metody pro řešení soustav n lineárních rovnic o n neznámých

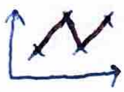
↳ Analytický algoritmický postup
↳ Přesnost o absolutní přesnosti (dáno přesností reprezentace čísel)

Numerická metoda

= algoritmus poskytující cestu k řešení numerické úlohy

- numerická matematika (+; -; *; /)
  - ↳ řeší problémy pro konkrétní číselné hodnoty
  - ↳ obrovské množství výpočtů ⇒ přičemž využíváme počítače

příklady:



- **Výpočty**
  - interpolace – spojení
  - aproximace – přímka co nejblíže všem naměřeným bodům
  - derivace, určitého integrálu

- **Řešení soustav rovnic**
  - lineární
  - nelineární
  - obyčejných diferenciálních
  - parciálních diferenciálních

Problém: PŘESNOST

- typ double uchovává jen cca 15 desetinných míst (další nebudou známé)
  double x = 1e16, y = x + 1;
  x == y, protože jsme překročili limit double a číslo je tak velké, že přičtení +1 nemá vliv (přetečení typu)
- v počítači nelze obecně uložit všechna reálná čísla (Pi; E; 0.1)
- 0.1 je ve dvojkové soustavě periodické číslo !
  nekonečný cyklus: for (double x = 0.0; x != 10.0; x += 0.1) {}   <= lepší!
  ↳ hodnota bude přeskočena
- kritická hodnota v oblasti zaokrouhlovací chyby
- * a / rozšiřují celkovou chybu výpočtu
- Závěr: Numerické metody musí řešit (minimalizovat) i problémy s přesností výpočtů

Vyjádření soustavy lineárních rovnic pomocí matice

- indexování proměnných $x_{1 \dots n}$ (místo abecedy, aby metody fungovaly)

$$2x_1 + 5x_2 - x_3 = 9$$
$$-4x_1 + x_2 + 7x_3 = 7$$
$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2$$

- Zápis v maticovém tvaru obecně

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \ddots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

↗ řádek a sloupec

nebo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

nezávislé hodnoty ↑ ABSOLUTNÍ ČLENY

- rozšířená matice soustavy
  ↳ rozměry N×N+1 (pro absolutní členy)

$$n\left\{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 \\ 2 & 2 & 2 & | & 2 \\ 3 & 3 & 3 & | & 3 \end{pmatrix}\right. \quad n+1$$

GEM

- horní trojúhelníková matice
- jednotková matice (na diagonále 1, zbytek 0; absolutní členy mohou být čísla)

na diag. musí být nuly 0 ≠

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 0 & 8 & | & 3 \end{pmatrix}$$

= 0 (pod diagonálou jsou nuly)

Algoritmus

1) **Přímý chod**
   - převod rozšířené matice soustavy do horní trojúhelníkové matice
   - pomocí tzv. elementárních řádkových úprav
2) **Test řešitelnosti**
   - pokud má soustava 0 nebo ∞ řešení
3) **Zpětný chod**
   - Řeší rovnice od poslední k první
   - Postupně dosazuje již známé řešení x_i

a	b	počet řešení
0	0	∞
0	≠0	∅
≠0	R	1

- **PIVOTOVÁNÍ** = optimalizace, pomáhá omezit zaokrouhlovací chyby výpočtu
  - řádkové úpravy se musí dělat vždy jen tak
  - $c = a_{kn}/a_{nn}$ (diagonální prvek musí být v jmenovateli, jinak hrozí dělení nulou)
    ↳ koeficient < 1, takže je menší pravděpodobnost, že dojde k přetečení typu

GJEM

UNIVERZÁLNÍ PRO GJEM/GEM

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix}$$

- vytvoří jednotkovou matici už při přímém chodu
- nad diagonálou se PIVOTOVÁNÍ nedělá, protože bychom měnili prvky na diagonále
- 0 i nad diagonálními prvky: HORNÍ – SPODNÍ řádek, jinak hrozí ZMĚNA na diagonále

! GEM řádkové úpravy: `m->prvek[radek][s] = k * m->prvek[n][s] - m->prvek[radek][s];`

GJEM řádkové úpravy: `m->prvek[radek][s] = m->prvek[radek][s] - k * m->prvek[n][s];`

↳ jen pro GEM a GJEM by to obráceně znamenalo!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 1 \\ 0 & 2 & 3 & | & 2 \\ 0 & 3 & 4 & | & 3 \end{pmatrix}$$

GJEM

15. 10. 2024

~~$koef = \frac{-2}{8} = -\frac{1}{4}$ 1. řád * koef - 2. ř.~~ [illegible]

①
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 9 & 23 \\ 8 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$
pivotování 1. sloupce

②
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 9 & 23 \\ -1 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$
řádkové úpravy (nulování) 1. sloupce

③
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1{,}25 & -8{,}5 & -23 \\ 0 & -6{,}88 & 1{,}25 & -10 \end{array}\right) \sim$$
pivotování 2. sloupce

$m[1][1] = m[1][1] - koef * m[0][1] = 1{,}25$

④
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6{,}88 & 1{,}25 & -10 \\ 0 & 1{,}25 & -8{,}5 & -23 \end{array}\right) \sim$$
řádkové úpravy 2. sloupce

⑤
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & -2{,}2 & 1.45 \\ 0 & -6{,}88 & 1{,}25 & -10 \\ 0 & 0 & -8.27 & 24.82 \end{array}\right)$$

PROVEDENÍ GJEM

řádek 0 ($i=0$)

$koef = \frac{-1}{-6{,}88} = \frac{m[0][1]}{m[1][1]}$ $m[0][1] = 0.0;$

aktualizujeme hodnoty ve sloupcích $s=2,3$

$m[0][2] = m[0][2] - koef * m[1][2]$
$= -2 - (0.145 * 1{,}25) \doteq 2{,}2$

$m[0][3] = m[0][3] - koef * m[1][3]$
$= 0 - (0.145 * 10) = 1.45$

$koef = \frac{1{,}25}{-6{,}88} = \frac{m[2][1]}{m[1][1]}$
aktualizujeme hodnoty ve sloupcích $s = 2,3$

$m[2][2] = m[2][2] - koef * m[1][2]$
$= -8{,}5 - (0.18 * 1{,}25) \doteq -8{,}27$

$m[3][3] = m[3][3] - koef * m[1][3]$
$= -23 - (-0.18 * -10) = -24.82$

⑥
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & -6{,}88 & 0 & -13.746 \\ 0 & 0 & -8.27 & -24.82 \end{array}\right) \sim$$

⑦
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

provedeme zpětný chod (for dělení posledních sloupce diagonálním prvkem)

$n = 2$ $i = 0$

diagonální prvek $m[2][2] = -8.27$

$koef = \frac{m[0][2]}{m[2][2]} = \frac{-2{,}2}{-8{,}27}$

$m[0][3] = m[0][3] - koef * m[2][3]$
$= 1{,}45 - (0{,}26 * -24{,}82) \doteq 8$

$i = 1$

$koef = \frac{m[1][2]}{m[2][2]} = \frac{1{,}25}{-6{,}88}$

$m[1][3] = m[1][3] - koef * m[2][3]$
$= -10 - (-0{,}151 * -24{,}82) \doteq 13{,}746$

8.10.2024

Zpětný chod – GEM

$$
\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{array}
\begin{array}{cccc|c} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 8 & -1 & -2 & 0 \\ & 0 & -6{,}88 & 1{,}25 & -10 \\ & 0 & 0 & 8{,}27 & 24{,}82 \end{array}
$$

```
for ( int radek = radku - 1; radek >= 0 ; radek --) {
    float suma = 0.0;
    for (int sloupec = radek + 1 ; sloupec < sloupcu - 1; sloupec ++) {
        suma += m[radek][sloupec] * m[sloupec][radku];
    }
    m[radek][sloupcu-1] = (m[radek][sloupcu-1] - suma) / m[radek][radek];
}
```

2)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6{,}88 & 1{,}25 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

radek = 1

sloupec = 2

suma = 0.0 + 1,25 * 3 ; = 3.75

$|m_3 = (-10 - 3.75) / -6{,}88 = 2$

3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ & 1 & 0 & 2 \\ & & 1 & 3 \end{array}\right)$$

radek = 0

sloupec = 1

suma = 0.0 + (-1) · 2 ; = -2

sloupec = 2 suma = -2 + (-2) · 3 ; = -8

$|m_3 = (0 - (-8) / 8) = 1$

GEM

29.9.2024

$$\text{koef} = \frac{\text{nižší řád}}{\text{1 řádek prvek}}$$

vždy nižší číslo na jmenovateli (pivotování)

① $m+1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -1 & 9 & 23 \\ 8 & -1 & -2 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right) \sim$$

Hledání největšího prvku v 1. sloupci

PIVOTOVÁNÍ

②

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & -9 & 23 \\ -1 & 7 & -1 & 10 \end{array}\right)$$

1. řádek * (-2/8) - 2. řádek

1. řádek * (-1/8) - 3. řádek

dostání max prvku na diagonálu

1. řádek * (-2/8) - 2. řádek

$8 * (-\frac{1}{4}) - (-2) = 0$

③

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1,25 & -8,5 & -23 \\ 0 & -6,88 & 1,25 & -10 \end{array}\right) \sim$$

prohození 2. sloupce i celého řádku

④

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6,88 & 1,25 & -10 \\ 0 & 1,25 & -8,5 & -23 \end{array}\right)$$

2. řádek * (1,25/(-6,88)) - 3. řádek

⑤

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6,88 & 1,25 & -10 \\ 0 & 0 & 8,27 & 24,82 \end{array}\right)$$

JE MATICE ve tvaru HORNÍ TROJÚHELNÍKOVÉ MATICE? ANO

KOLIK MÁ ŘEŠENÍ? 1 (prvky na diagonále není 0 a na místě absolutního členu je R)

⑥

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6,88 & 1,25 & -10 \\ 0 & 0 & 8,27 & 24,82 \end{array}\right)$$

ZPĚTNÝ CHOD

```
for (int radek = m->radku - 1; radek >= 0 ; --radek) {
    float suma = 0.0;
    for (int sloupec = radek + 1 ; sloupec < m -> sloupcu - 1 ; ++sloupec) {
        suma = suma + m -> prvek [radek] [sloupec] * m -> prvek [sloupec] [m -> radku];
    }
    m -> prvek [radek] [m -> sloupcu - 1] = (m -> prvek [radek] [m -> radku] - suma) / m -> prvek [radek] [radek];
}
```

radek = 2   sloupec = 4 = 3

3 < 3 (přeškrtnuto)

⑦

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6,88 & 1,25 & -10 \\ 0 & 0 & 8,27 & 24,82 \end{array}\right)$$

není s jakýmkoliv prvkem přičítat do SUMY

⇓

rovnou vyhodnocení

suma 0.0 + 0.0 + prvek [2] [3] * neznámá

24,82

$m = (24,82 - 0) / 8,27 = 3$

sloupec = 2   m -> sloupec = 3

⑧

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -6,88 & 1,25 & -10 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

suma = 0,0;

1) suma = 0.0 + 1,25 * 3; = 3.75

$m_3 = (-10 - 3,75) / -6,88 = 2$

radek = 0   sloupec = 1

POZOR NA POŘADÍ SUMY!

⑨

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 8 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

suma = 0,0;

1) suma = 0,0 + (-1) · 2; -2

2) suma = -2 + (-2) · 3; -8

$m = (0 - (-8)) / 8 = 1$

2

3

⑩

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$