nikdy pokud nebude omezený počet iterací => zacyklení

13. Řešení nelineárních rovnic

2. 2. 2025

– pro srovnání rychlosti těchto alg. nemá smysl použít O klasickým způsobem

PŘESNOST (ε)

– cílem je najít bod x, pro který platí $f(x)=0$. Protože přesné řešení není vždy dosažitelné, spokojíme se s hodnotou x, kde $|f(x)| < \varepsilon$

– u plochých funkcí může být takový bod daleko od skutečného kořene. Proto lze přesnost vyhodnocovat i v ose x, např. u interpolačních metod podmínkou $|b - a| < \varepsilon$, kde se interval postupně zužuje ke kořeni

– volba hodnoty ε, číselná stabilita a zaokrouhlovací chyby
↳ plovoucí čárka

typedef double (*Ifun)(double);
↳ 1 parametr
ukazatel na funkci

Stabilita (výpočtu)

↳ stabilní výpočet

=> malá změna vstupních hodnot = malá změna výsledku

– opakem je např. HASHOVÁNÍ

– pokud malá změna v počáteční hodnotě nebo zaokrouhlovací chyba nevede ke výraznějším odchylkám v konečném výsledku, metoda je numericky stabilní

HORNEROVO SCHÉMA

opakované násobení a sčítání n

– vyčíslování polynomů $O(n)$

polynom (množina) stupeň polynomu koeficient polynomu

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$P(x) = (\dots(((a_n x) + a_{n-1})x) + \dots + a_1) + a_0$$

polynom 5. stupně

$$P(x) = 3x^5 + x^4 - 2x^3 + 7x^2 - 4x + 7$$

$$P(x) = ((((3x+1)x-2)x+7)x-4)x+7 = 123$$

výsledek v $x = 2$

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

Implementace pomocí
– procházení členů ...
↳ od nejvyšší mocniny (index 0)

– pokud bude hodnota n řád polynomu, pak pole bude o 1 delší

NAN (not a number) – math.h
0.0/0.0

KONVERGENCE

= vlastnost posloupnosti (řady)

– prvky řady se musí blížit cílové hodnotě

– stabilnost, vývoj, kterým vede ke výsledku

KVOCIENT KONVERGENCE => číslo na intervalu (0;1)

– slouží pro srovnání rychlosti, s jakou iterační metoda zpřesňuje výslednou hodnotu

řád konvergence

INTERPOLAČNÍ => LINEÁRNÍ (1)

EXTRAPOLAČNÍ => KVADRATICKÝ (2)

$$q = \frac{|e_i|}{|e_{i-1}|^r};\ \text{kde } e_i = x_i - \bar{x}$$

– x_i a x_{i-1} jsou 2 po sobě jdoucí přibližné výsledky

– e_i je chyba výsledku v kroku i, jejíž výpočet závisí na způsobu dané metody

– $\bar{x}$ je přesná výsledná hodnota

– r je řád konvergence posloupnosti

– q je podíl přiblížení k přesné hodnotě v aktuálním a předchozím kroku

separace kořene
|
zadaný interval
| <a;b>
INTER.

BISEKCE: zaručená konvergence pokud splněny podmínky: 1) funkce spojitá 2) separovaný kořen
$f(a)\cdot f(b) < 0$

– na <a;b> více kořenů => najde 1 z nich

jen v intervalu

REGULA FALSI: vždy konverguje pokud splněny podmínky

– obvykle rychlejší než bisekce

když je mimo zadaný interval
|
EXTRA.

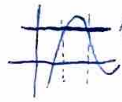
mimo interval

METODA SEČEN: – nevyžaduje interval, v němž se nachází kořen, ale dva počáteční body blízko předpokládaného kořene

– nezaručená konvergence

NEWTONOVA METODA – nezaručená konvergence

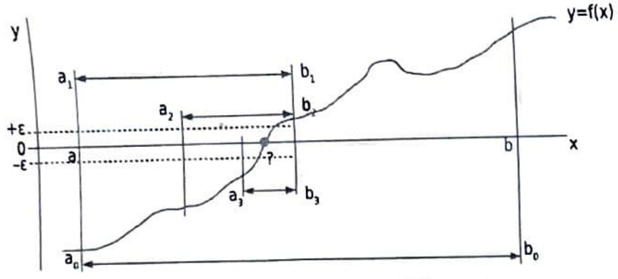
– blízko lokálního m. diverguje u $f'(x)=0$


příklad

– v praxi se používá kombinace metod

jen pro inženýry

Metoda půlení intervalu (bisekce)



$\varepsilon = 0{,}1$ $\qquad P(x) = -2x^3 + 3x^2 + 2x - 1$

1. Iterace $[-2;2]$ $\quad a=-2;\ b=2;\ c=\frac{a+b}{2}=0$

$f(a) = ((-2x+3)x+2)x-1 =$
$((-2*(-2)+3)*(-2)+2)*(-2)-1 = 23$

$f(b) = ((-2*(2)+3)*(2)+2)*(2)-1 = -1$

$f(c) = (-2*0+3)*0+2)*0-1 = -1$

TEST: $f(a)\cdot f(c) < 0$ $\qquad |f(c)| \geq \varepsilon$
$23 \quad -1$ doleva $\qquad 1 \geq 0{,}1$

2. Iterace $[-2;0]$ $\quad a=-2;\ b=0;\ c=\frac{a+b}{2}=-1$

$f(a)=23 \quad f(b)=-1 \quad f(c) = (-2*(-1)+3)*(-1)+2)*(-1)-1 = 2$

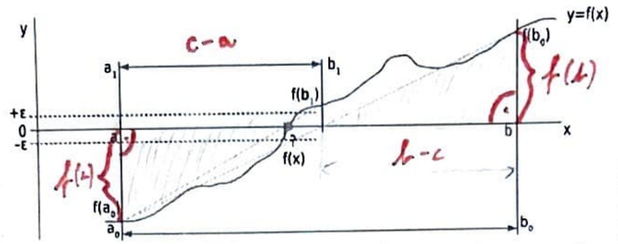
TEST: $f(c)\cdot f(b) < 0$ $\qquad |f(c)| \geq \varepsilon$
$2 \quad -1$ doprava $\qquad 2 \geq 0{,}1$

3. Iterace $[-1;0]$ $\quad a=-1;\ b=0;\ c=\frac{a+b}{2}=-0{,}5$

$f(a)=2 \quad f(b)=-1 \quad f(c) = (-2*(-0{,}5)+3)*(-0{,}5)+2)*(-0{,}5)-1 = -1$

TEST: $f(a)\cdot f(c) < 0$ $\qquad |f(c)| \geq \varepsilon$
$2 \cdot (-1)$ doleva $\qquad 1 \geq 0{,}1$

Metoda tětiv – regula falsi



Δ jsou si PODOBNÉ

trojúhelníky

$\frac{-f(a)}{f(b)} = \frac{c-a}{b-c}$ křížové pravidlo

$-f(a)(b-c) = f(b)(c-a)$

$cf(a) - bf(a) = cf(b) - af(b)$

$cf(a) - cf(b) = bf(a) - af(b)$

$$c = \frac{b\cdot f(a) - a\cdot f(b)}{f(a) - f(b)}$$

$P(x) = -2x^3+3x^2+2x-1 \qquad \varepsilon = 0{,}01$

1. Iterace $[-2;2]$ $\quad a=-2;\ b=2;$

$c = \frac{2\cdot 23 - (-2)\cdot(-1)}{23-(-1)} = \frac{44}{24} =$

$c \doteq 1{,}83$

$f(a) = 23$
$f(b) = -1$

$|f(c)| \geq \varepsilon$
$0{,}45 \geq 0{,}1$

TEST: $f(c)\cdot f(b) < 0$ $\quad f(c) = 0{,}48$ — měl jsem vyměnit si body
$0{,}45 \quad -1$
doprava

2. Iterace $[1{,}83;2]$ $\quad a=1{,}83;\ b=2$

$f(b)=-1 \quad f(a) = ((-2*(1{,}83)+3)*1{,}83+2)*1{,}83-1 \doteq 0{,}45$
$-0{,}66 \qquad 0{,}7922$

$c = \frac{2\cdot 0{,}45 - 1{,}83\cdot(-1)}{0{,}45-(-1)} = 1{,}88$ $\qquad$ TEST: $f(c)\cdot f(b) < 0$ $\quad |f(c)| \geq \varepsilon$
$1{,}88 \quad -1 \qquad 0{,}074 \geq 0{,}01$

3. Iterace $[1{,}88;2]$ $\quad a=1{,}88;\ b=2$

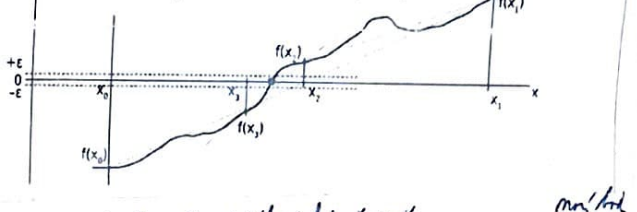
$f(b)=-1 \quad f(a) = ((-2*(1{,}88)+3)*1{,}88+2)*1{,}88-1 = 0{,}074$
$-0{,}76$

$c = \frac{2\cdot 0{,}074 - 1{,}88\cdot(-1)}{0{,}074-(-1)} = 1{,}889$ $\qquad$ TEST: $f(c)\cdot f(b) < 0$
$0{,}00185 \quad -1$

$f(c) = ((-2\times 1{,}889+3)*1{,}889+2)*1{,}889-1 = 0{,}00185$ $\qquad \boxed{|f(c)| \leq \varepsilon \quad 0{,}00185 \quad 0{,}01}$
$-0{,}778 \qquad 0{,}53$

Metoda sečen

přiblížení z posledních 2 bodů (starý zahodím) ⇒ dostanu nový



PRINCIP: – zvolím dva přibližné body x_0 a x_1 $\qquad$ nový bod
– body $f(x_1)$ a $f(x_0)$ proložím přímku ⇒ průsečík s osou ⇒ x_2
– pokud x_2 není dostatečně přesný ⇒ proložím novou přímku $f(x_1)$ a $f(x_2)$

cyklují dokud nedostanu dostatečně přesný

Δ jsou si PODOBNÉ

Rekurentní vztah pro výpočet dalších bodů

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})(x_{i-1}-x_{i-2})}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})}$$

stejný jako u regula falsi

$P(x) = -2x^3+3x^2+2x-1 \qquad \varepsilon = 0{,}01$

1. Iterace $[-2;2]$ $\quad x_0=-2;\ x_1=2$

$f(x_0) = 23$
$f(x_1) = -1$ $\qquad x_2 = 2 - \frac{-1\cdot(2-(-2))}{-1-23} \doteq 1{,}83$

$f(x_2) = ((-2*(1{,}83)+3)*1{,}83+2)*1{,}83+1 \doteq 2{,}45$
$-0{,}66 \qquad -0{,}7922$

TEST: $|f(x_2)| \geq \varepsilon$
$2{,}45 \geq 0{,}01$

2. Iterace $[1{,}83;2]$ $\quad x_1=2;\ x_2=2{,}45$

$f(x_1) = -1$
$f(x_2) \doteq 2{,}45$ $\qquad x_3 = 1{,}83 - \frac{2{,}45\cdot(1{,}83-2)}{2{,}45-(-1)} = 1{,}95$

$f(x_3) = ((-2*(1{,}95)+3)*(1{,}95)+2)*(1{,}95)+1 =$
$= 1{,}48 \qquad -0{,}9 \qquad 0{,}245$

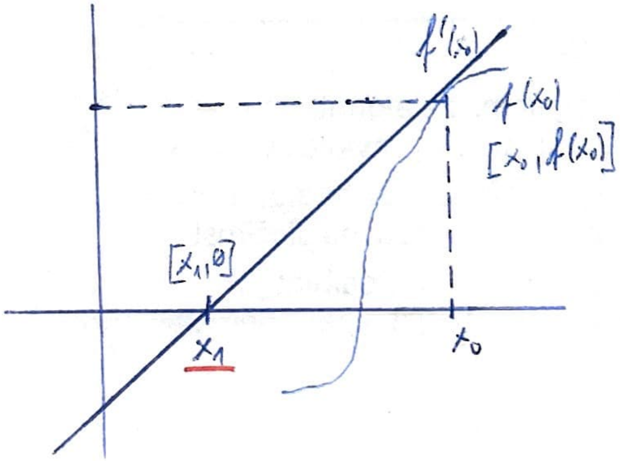
TEST: $|f(x_3)| \geq \varepsilon$
$1{,}48 \geq 0{,}01$

pokračujeme

$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

$f(x) = 3x^3 + x^2 - x^1 + 5x^0$

$f'(x) = 9x^2 + 2x - 1$



$t_0(x) = ax + b$
$\quad = f'(x_0) + b$

1. $a = f'(x_0)$
2. $t_0(x) = ax + b \overset{①}{=} f'(x_0)x + b$
3. dosadím $[x_0, f(x_0)]$

$$f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$$

$$\Rightarrow b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

4. dosadím $[x_1; 0]$

$$0 \overset{③}{=} f'(x_0)x_1 + f(x_0) - f'(x_0)x_0$$

5. vyjádřím x_1

$$f'(x_0)x_1 = f'(x_0)x_0 - f(x_0)$$

$$x_1 = \frac{f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)}{f'(x_0)}$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

rovnice tečny:

$$f'(x_n)(x_m - x_n) + f(x_n) = 0$$

```
float newton(f, df, x0, ε)
{
    x = x0
    while(|f(x)| >= ε) {
        x = x - f(x)/df(x)
    }
    return x;
}
```