Numerical Methods, 2017 Spring

Assignment 1 Answer

如有疑問請 email 聯繫助教

1. (25%) 每個答案和解釋各 4 分，只要有寫就送 1 分

(a) Bisection method

```
tol = 10^-5
while |b-a| > tol,
   m = (b+a)/2;
   if f(a)*f(m) < 0,
      b = m;
   else
      a = m;
   end;
end;
```

Ans: 1.249045 or 1.249046

(b) Secant method $x_2 = x_1 - \mathrm{f}(x_1)\frac{(x0-x1)}{f(x0)-f(x1)}$

```
tol = 10^-5
while |b-a| > tol,
   m = b – f(b) * (a-b) / (f(a)-f(b));
   if f(a)*f(m) < 0,
      b = m;
   else
      a = m;
   end;
end;
```

Ans: 1.249045

(c) Newton's method $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

```
tol = 10^-5
g(a) = f'(a);
while |b-a| > tol,
    a = b;
    b = a – f(a) / g(a);
end;
```

Ans: 1.249045

2. (20%)

(a) Converge **(7%)** (b) 2 **(7%)** (c)不能確定/不是 **(6%)**

$\mathrm{P(x)} = (x-2)^3(x-4)^2, x_0 = 3$

$\mathrm{P'(x)} = 3(x-2)^2(x-4)^2 + 2(x-2)^3(x-4)$

$\mathrm{P'}(x_0) = P(x_0)/(x_0 - x_1)$

$x_1 = x_0 - P(x_0)/P'(x_0)$

$x_1 = 3 - 1 = 2$

用 $x_0 = 3.0$ 代入此式，一次就可以得到最後的解，且 $P'(x_1) = 0$，故無法分辨是一次收斂或是二次收斂。但 x_0 代入其他的值（例如：$x_0 = 2.99$），就可以求出 $P'(x_n)$ 並得證此為一次收斂。

也可以解數學式得到: $\lim_{x\to 2} \frac{\left|2-\left(x-\frac{P(x)}{P'(x)}\right)\right|}{|2-x|} = \frac{2}{3} > 0$ ，確定為一次收斂。

每個答案的解釋各 3 分

3. (35%)

(a) 求出$|g_i'(2)|$並藉此推斷出是收斂或發散 **(20%)**

$g_1'(x)=2x$, $|g_1'(2)| = 4 > 1$, diverge

$g_2'(x)=0.5(x+2)^{-0.5}$, $|g_2'(2)| = 2^{-0.5} < 1$, converge

$g_3'(x)=-2x^{-2}$, $|g_3'(2)| = -0.5 < 1$, converge

$g_4'(x)=2x/(2x-1) - 2(x^2+2)(2x-1)^{-2}$, $|g_4'(2)| = 0 < 1$, converge

寫出每個$|g_i'(2)|$：3 分，寫出 diverge/converge：2 分

(b) 用 code 驗證(a)的結果並算出 convergence rate **(15%)**

g_1：x

g_2：linear converge

g_3：linear converge

g_4：quadratic converge

驗證 g_1：3 分

g_2 g_3 g_4：驗證 2 分、convergence rate 2 分

(在$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = C$中，convergence rate 指的是 r，不是 C)

convergence rate 的驗證方式：利用 code 求$\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^r} = C, e_n = x_n - R$，

R = 2，r 分別代 1 和 2 去做。

4. (25%) 一個 iteration 4 分，答案 5 分

$$f(x) = \begin{matrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 - 1 \end{matrix}$$

$$J(x) = \begin{matrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{matrix}$$

次數	X[0]	X[1]
0	0	1
1	0.5	0.5
2	0.75	0.75
3	0.7083333	0.7083333
4	0.7071078	0.7071078
5	0.7071067	0.7071067

A: 5 次 (4 次也可以)