

## Assignment 2 Answer

1. (25%)

(a) (b) (c)

按照題目指示的做法 2 分、使用 3 significant bit 2 分、算出答案 3 分

$$(a) \begin{bmatrix} 2.51 & 1.48 & 4.53 & 0.05 \\ 1.48 & 0.93 & -1.30 & 1.03 \\ 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.51 & 1.48 & 4.53 & 0.05 \\ 0 & 0.06 & -3.97 & 1.00 \\ 0 & 1.46 & -6.32 & -0.58 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2.51 & 1.48 & 4.53 & 0.05 \\ 0 & 0.06 & -3.97 & 1.00 \\ 0 & 0 & 90.28 & -24.91 \end{bmatrix}$$

$$x=1.4554, y=-1.59, z=-0.2759$$

$$(b) \begin{bmatrix} 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \\ 1.48 & 0.93 & -1.30 & 1.03 \\ 2.51 & 1.48 & 4.53 & 0.05 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \\ 0 & -0.75 & -0.48 & 1.32 \\ 0 & -1.37 & 5.92 & 0.55 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \\ 0 & -1.37 & 5.92 & 0.55 \\ 0 & -0.75 & -0.48 & 1.32 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \\ 0 & -1.37 & 5.92 & 0.55 \\ 0 & 0 & -3.72 & 1.02 \end{bmatrix}$$

$$x=1.4502 \quad y=-1.5863, z=-0.2742$$

$$(c) \begin{bmatrix} 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \\ 1.48 & 0.93 & -1.30 & 1.03 \\ 2.51 & 1.48 & 4.53 & 0.05 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \\ 0 & -0.74 & -0.48 & 1.32 \\ 0 & -1.36 & 5.91 & 0.54 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \\ 0 & -1.36 & 5.91 & 0.54 \\ 0 & -0.74 & -0.48 & 1.32 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 2.68 & 3.04 & -1.48 & -0.53 \\ 0 & -1.36 & 5.91 & 0.54 \\ 0 & 0 & -3.69 & 1.02 \end{bmatrix}$$

$$x=1.4626 \quad y=-1.5983, z=-0.2764$$

3 significant bits 指的是三位有效數字，不是小數點後三位

(d) 將前三題的答案帶回左式  $Ax$ ，分別得到

- (a): (0.05, 1.0340, -0.5247)
- (b): (0.0502, 1.0275, -0.530)
- (c): (0.0534, 1.0375, -0.530)

和右式  $b$  相差較少的依序是 b、c、a

三個代入和最後的性能比較各 1 分

2. (25%) : a,b 各 9 分 , c 7 分

(a)

```
(Reduction)
For i = 2 To n
  A[i,2] = A[i,2] - A[i,1]*A[i,1]/A[i-1,2]
  A[i,3] = A[i,3] - A[i,1]*A[i-1,3]/A[i-1,2]
End For i
(Back-Substitution)
A[n,3] = A[n,3]/A[n,2]
For i = (n-1) Down To 1
  A[i,3] = (A[i,3] - A[i+1,1]*A[i+1,3])/A[i,2]
End For i
```

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 & 100 \\ -1 & 4 & 200 \\ -1 & 4 & 200 \\ -1 & 4 & 200 \\ -1 & 4 & 200 \\ -1 & 4 & 100 \end{bmatrix}$$

(b) 承(a) , 答案為 [46.34, 85.37, 95.12, 95.12, 85.37, 46.34]

(c) 標準答案為  $8(n-1)+1 = 8n-7$  , 根據程式碼內容略有差異

此處要求的是做了幾次算術運算(arithmetic operations)

3. (25%) : 各 12 分

Exact solution: (-8.9893, -9.4845, 10.0510)

程式有多種寫法 , 基本上有分別使用 Jacobi 和 Gauss-Seidel 即可。

注意迴圈終止條件為誤差小於一定的值(eg,  $10^{-4}$ ) , 不可直接設定迴圈次數。

4. (10%)

無標準答案 , 只要有嘗試多個 overrelaxation factor , 並找出最好者使收斂加速都給對

5. (15%) 各 3 分

$$(a) \text{Cond} \left( \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix} \right) = 10^{10} \times 10^{10} = 10^{20}$$

ill-conditioned

$$(b) \text{Cond} \left( \begin{bmatrix} 10^{10} & 0 \\ 0 & 10^{10} \end{bmatrix} \right) = 10^{10} \times \frac{1}{10^{10}} = 1$$

well-conditioned

$$(c) \text{Cond} \left( \begin{bmatrix} 10^{-10} & 0 \\ 0 & 10^{-10} \end{bmatrix} \right) = \frac{1}{10^{10}} \times 10^{10} = 1$$

well-conditioned

$$(d) \text{Singular matrix} \rightarrow \text{Cond} \left( \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \right) = \infty$$

ill-conditioned

6. (15%)

可以用普通的做法，就像解普通矩陣一樣先做 LU Factorization，再用 forward/ backward substitution 解出 x。

也可以用第 2 題的做法再擴充。

有做出合理的 code+5，可以跑對+10，共 15 分。