問 1

(1) $f(x) \equiv |x(x-1)-23|$ とする.

$$
\begin{aligned}
f(1) &= |1\cdot 2-23| = |-23| = 23\\
f(2) &= |2\cdot 1-23| = |-21| = 21\\
f(3) &= |3\cdot 2-23| = |-17| = 17\\
f(4) &= |4\cdot 3-23| = |-11| = 11\\
f(5) &= |5\cdot 4-23| = |-3| = 3\\
f(6) &= |6\cdot 5-23| = |7| = 7
\end{aligned}
$$

であり, $x \geq 6$ において, 明らかに $x, x-1 > 0$ であるから, $x(x-1) \geq 6\cdot 5 = 30 > 23$ となるので, $f(x) = x(x-1)-23$ となることに注意すると, $x \geq 6$ において,

$$
\begin{aligned}
x \equiv 0 &\Longrightarrow 0\cdot(-1)+1 \equiv 1 \pmod 3\\
x \equiv 1 &\Longrightarrow 1\cdot(0)+1 \equiv 1 \pmod 3\\
x \equiv 2 &\Longrightarrow 2\cdot(1)+1 \equiv 0 \pmod 3
\end{aligned}
$$

となるため, $x \geq 6$ について, $f(x) \not\equiv 2 \pmod 3$
したがって, 求める値は, $x = 1, 3, 4$

(2) $f(7) = |7\cdot 6-23| = 23$ でああるから $f(7)$ は素数. $f(8) = 33 = 3\cdot 11$ は合成数. 上記議論から, $x \geq 6$ に関して, $x \equiv 2 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ に関して $f(x)$ は 3 の倍数であり, $f(x)3$ であるから, $x_1 \geq 6$ のとき, x_1, x_1+1, x_1+2 のどれかを割ったあまりは 2 となるので連続する素数の長さは高々 2 となる. また, $x_1 \leq 5$ のとき, 連続する整数で素数値をとるものを考えると $x_1 = 3, x_2 = 4, \ldots x_5 = 7$ で最長 $k = 5$ をとる.
したがって, 求める答えは $k = 5$ で $x_1 = 3, \ldots x_5 = 7$ となる

問 2

(1) 3 点が同一線上にない点 A, B, C すなわち $\triangle ABC$ について
A, B, C が時計周りに並んでいるとすると

$$\begin{aligned}
\triangle ABC \text{ が正三角形} &\iff \text{符号付角度 } \angle CBA = \angle ACB = \frac{\pi}{3} \wedge |AB| = |BC| = |CA| \\
&\iff \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} = \cos\frac{\pi}{3} + i\,\sin\frac{\pi}{3} \\
&\quad \left(\begin{array}{l}
\angle CBA = \angle ACB \text{ のとき } \triangle ABC \text{ は二等辺三角形になるから} \\
\angle CBA = \angle ACB \text{ かつ } BA : BC = CB : CA \\
\iff \angle CBA = \angle ACB \text{ かつ } BA : BC = CB : CA \text{ かつ } AB = AC \\
\iff \angle CBA = \angle ACB \text{ かつ } AB = AC \text{ かつ } BC^2 = AB^2 \\
\iff \angle CBA = \angle ACB \text{ かつ } AB = BC = CA \\
\iff \triangle ABC \text{ は正三角形}
\end{array} \right) \\
&\iff \frac{\beta-\alpha}{\beta-\gamma} = \frac{\gamma-\beta}{\gamma-\alpha} \\
&\iff (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha) = (\gamma-\beta)(\beta-\gamma) \\
&\iff \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha
\end{aligned}$$

反時計回りの場合も同様にして, 条件を得られる.

(2) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき, 重心を原点に平行移動させて考える.
このとき, $\alpha+\beta+\gamma=0$ であるから, $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\beta)=0$
であるが, (1) から $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha = 0$ が得られる. 円周上 の点 $P(p)$ は $|p| = R$ を満たす点であるから

$$\begin{aligned}
AP^2+BP^2+CP^2 &= |\alpha-p|^2+|\beta-p|^2+|\gamma-p|^2 \\
&= (|\alpha|^2+|\beta|^2+|\gamma|^2) + 3|p|^2 - (\alpha+\beta+\gamma)\,p - \overline{(\alpha+\beta+\gamma)}\,\overline{p} \\
&= (R^2+R^2+R^2) + 3R^2 - 0\cdot\overline{p} - \overline{0}\cdot p \\
&= 6R^2
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
AP^4 &= |\alpha-p|^4 = (|AP|^2)^2 = \{(\alpha-p)\,\overline{(\alpha-p)}\}^2 \\
&= (|\alpha|^2+|p|^2-\alpha\overline{p}-\overline{\alpha}p)^2 = (2R^2-\alpha\overline{p}-\overline{\alpha}p)^2 \\
&= 4R^4 - 2(\alpha\overline{p}-\overline{\alpha}p)R^2 + (\alpha\overline{p}+\overline{\alpha}p)^2 \\
&= 4R^4 - 2(\alpha\overline{p}-\overline{\alpha}p)R^2 + (\alpha^2\overline{p}^2+\overline{\alpha}^2p^2+2|\alpha|^2|p|^2) \\
&= 6R^4 - 2(\alpha\overline{p}-\overline{\alpha}p)R^2 + (\alpha^2\overline{p}^2+\overline{\alpha}^2p^2)
\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}AP^4+BP^4+CP^4 &= 18R^4-2\{(\alpha+\beta+\gamma)\overline{p}-\overline{(\alpha+\beta+\gamma)}p)\} \\ &\qquad +\{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)\overline{p}^2+\overline{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}p^2\} \\ &= 18R^4\end{aligned}$$

問 3

(1) メネラウスの定理から

$$\frac{AT}{TC}\cdot\frac{TP}{PO}\cdot\frac{OQ}{QA}=\frac{AT}{TC}\cdot\frac{6}{2}\cdot\frac{a}{3-a}=1$$

よって, $AT:TC=3-a:3a$ である.
それゆえ, T の x 座標を x_1 とすると, $\frac{(3-a)+3a}{3a}x_1=3$ であるから

$$x_1=\frac{9a}{3+2a}$$

点 T は xz 平面上の直線 $AC:4x+3z=12$ 上の点ゆえ,

$$T=\frac{1}{3+2a}\begin{pmatrix}9a\\0\\12-4a\end{pmatrix}$$

同様にして,

$$S=\frac{1}{3+2b}\begin{pmatrix}0\\9b\\12-4b\end{pmatrix}$$

(2) 4 点 Q,R,S,T は 平面 H 上の点であるから, 同一平面上に存在する.
したがって, 直線 RS,QT の交点が存在する ; これが P であることに注意. このとき, 方べきの定理および, その逆の関係から, 4 点が同一円周上に存在するための必要十分条件は以下のように記述できる.

$$|PQ|\cdot|PT|=|PR|\cdot|PS|$$

したがって,

$$\begin{aligned}
|PQ|\cdot|PT|=|PR|\cdot|PS| &\iff |PQ|^2\cdot|PT|^2=|PR|^2\cdot|PS|^2\\
&\iff \left|\begin{pmatrix}a\\0\\2\end{pmatrix}\right|^2\cdot\left|\frac{1}{3+2a}\begin{pmatrix}9a\\0\\18\end{pmatrix}\right|^2=\left|\begin{pmatrix}b\\0\\2\end{pmatrix}\right|^2\cdot\left|\frac{1}{3+2b}\begin{pmatrix}9b\\0\\18\end{pmatrix}\right|^2\\
&\iff (3+2b)^2\cdot(a^2+4)^2=(3+2a)^2\cdot(b^2+4)^2\\
&\iff (3+2b)\cdot(a^2+4)=(3+2a)\cdot(b^2+4) \qquad (\because a,b>0)\\
&\iff 2a^2b+3a^2+8b+12=2ab^2+3b^2+8a+12\\
&\iff 2ab(a-b)+3(a^2-b^2)+8(b-a)=0\\
&\iff a=b\vee 2ab-3(a+b)+8=0\\
&\iff a=b\vee \left(a-\frac{3}{2}\right)\cdot\left(b-\frac{3}{2}\right)=\frac{23}{4}
\end{aligned}$$

図は以上の条件を満たす部分を $0<a,b<3$ 上で図示すれば良い.

問 4

(1) 表記の都合上, 点 P の座標を $(t, \sin t)$ とする.
直線 l の傾きは -1 であるため, P から l に下ろした垂線の傾きは 1 となる. すると, 直線 PQ の方程式は $y = (x-t) + \sin t$ と表される.
$y = 0$ として, Q の x 座標は $x = t - \sin t$ である.
すなわち, $Q : (t - \sin t, 0)$ であることを用いて
垂線の足を H とするとき, 点と直線の距離の関係式から

$$PH^2 = \frac{|1 \cdot t + 1 \cdot \sin t|^2}{1^2 + 1^2} = \frac{(t + \sin t)^2}{2}$$

$$QH^2 = \frac{|1 \cdot (t - \sin t) + 1 \cdot 0|^2}{1^2 + 1^2} = \frac{(t - \sin t)^2}{2}$$

したがって, 線分 PQ を l の周りに 1 回転させて得られる図形 $S(t)$ とし, その面積を絶対値で表すことにすると

$$|S(t)| = \pi \left(PH^2 - QH^2 \right) = 2\pi t \sin t$$

(2) 任意の $(n-1)\pi \leq t \leq n\pi$ に関して,

$$\frac{d}{dx} \sin t = \cos t \leq 1$$

であるから, 傾きが 1 の線分 PQ は D_n に含まれている.
逆に, D_n の各点について, その点を通るような傾き 1 の直線と y が正の部分との交点を考えれば その点を通るような点 $P(t)$ が存在する.
したがって, 回転体 V_n というのは t の値, すなわち P を微小変化させたときに $S(t)$ が作る微小体積を積算したものと等しい.
また, H の座標は 直線 PQ, l の交点であるということを考えると, $(\frac{t-\sin t}{2}, -\frac{t-\sin t}{2})$ であるので, t の値を dt だけ微小変化させると, h の座標は $(\frac{1-\cos t}{2}, -\frac{1-\cos t}{2})$ だけ変化する. すなわち, 回転軸方向の変化量を dl とすると

$$\begin{aligned} dl &= \sqrt{\left(\frac{1-\cos t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-\cos t}{2}\right)^2}\, dt \\ &= \frac{(1-\cos t)^2}{\sqrt{2}}\, dt = \frac{|1-\cos t|}{\sqrt{2}}\, dt \\ &= \frac{1-\cos t}{\sqrt{2}}\, dt \end{aligned}$$

したがって, 回転体 V_n の体積を 絶対値で表すと

$$
\begin{aligned}
|V_n| &= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |S(t)|\, dl \\
&= \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} |S(t)| \frac{1-\cos t}{\sqrt{2}}\, dt \\
&= \sqrt{2}\pi \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\sin t(1-\cos t)\, dt
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\sin t\, dt &= [-t\cos t]_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \cos t\, dt \\
&= n\pi + (n-1)\pi) + [\sin t]_{(n-1)\pi}^{n\pi} \\
&= (2n-1)\pi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\sin t\cos t\, dt &= \frac{1}{2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi} t\sin(2t)\, dt \\
&= \frac{1}{2}\left(\left[-\frac{1}{2}t\cos(2t)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} + \frac{1}{2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\cos(2t)\, dt\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(n\pi-(n-1)\pi\right) + \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi} \\
&= -\frac{1}{4}\pi
\end{aligned}
$$

であるので

$$
\begin{aligned}
|V_n| &= \sqrt{2}\pi\left((2n-1)\pi + \frac{1}{4}\pi\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(8n-3\right)\pi^2
\end{aligned}
$$

問 5

(1)

$$\begin{aligned}
a_{k+2} &= \int_0^1 x^{k+1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \left[-\frac{2}{\pi}x^{k+1}\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_{x=0}^{x=1} + \frac{2}{\pi}\int_0^1 (k+1)x^k\cdot\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}(k+1)\int_0^1 x^k\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}(k+1)\left\{\left[\frac{2}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right]_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 kx^{k-1}\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right\} \\
&= \left(\frac{2}{\pi}\right)^2(k+1)\left(1-ka_k\right)
\end{aligned}$$

(2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ に関して, $\sin x$ は上に凸な関数であるから
$(0,0)$ および $(\frac{\pi}{2},1)$ を通る直線を考えると

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x$$

したがって,

$$x \leq \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \leq 1$$

であるから

$$\int_0^1 x^{k-1}\cdot x\,dx \leq a_k \leq \int_0^1 x^{k-1}\,dx$$

$$\left[\frac{1}{k+1}x^{k+1}\right]_0^1 \leq a_k \leq \left[\frac{1}{k}x^k\right]_0^1$$

$$\frac{1}{k+1} \leq a_k \leq \frac{1}{k}$$

$$\frac{k}{k+1} \leq ka_k \leq 1$$

となり, はさみうちの原理から

$$\lim_{k\to\infty} ka_k = 1 \quad (=A)$$

(3) ここで

$$\begin{aligned}
k^m a_k - k^n &= k^{m-1}(ka_k-1) + k^{m-1} - k^n \\
&= k^{m-1}\cdot\left\{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{k+1}\,a_{k+2}\right\} + k^{m-1} - k^n \\
&= k^{m-1}\left(1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}\cdot(k+2)a_{k+2}\right) - k^n \\
&= k^{m-1}\left(1-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{(k+1)(k+2)}\cdot(k+2)a_{k+2} - \frac{1}{k^{(m-1)-n}}\right)
\end{aligned}$$

であるから, $m-1>n\ (\geq 1)$ であるとすると

$$\lim_{k\to\infty} k^m a_k - k^n = \infty$$

となり発散してしまう. したがって, $m-1 \leq n$ が必要. $m>n$ と合わせて $m=n+1\ (\geq 2)$ を得る. このとき,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}(k^m a_k - k^n) &= \lim_{k\to\infty}\left\{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot k^{m-1}\cdot\frac{1}{k+1}a_{k+2}\right\}\\ &= \lim_{k\to\infty}\left\{-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \cdot \frac{k^{m-1}}{(k+1)(k+2)}(k+2)a_{k+2}\right\}\end{aligned}$$

もし, $m-1>2$ であると, $\lim_{k\to\infty}(k+2)\,a_{k+2}=1$ であることから発散してしまう. また, $m-1=1$ であるとすると, 0 に収束してしまう.
そして, $m-1=2 \Longleftrightarrow m=3$ のとき

$$\lim_{k\to\infty}\left(k^3 a_k - k^2\right) = -\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$$

で, 0 でない値に収束する.
よって, 求める答えは $m=3, n=2$ のときで $B=-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ である.

(4) 十分大きな k に対して

$$\begin{aligned}k^p a_k - k^q A - k^r B &= k^p a_k - k^q + k^r\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\\ &\geq k^p\frac{1}{k+1} - k^q + k^r\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\\ &\geq k^p\cdot\frac{1}{2k} - k^q + k^r\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\\ &\geq \frac{k^{p-1}}{2} - k^q + k^r\end{aligned}$$

であるから, もし, $p-1>q$ であるとすると,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k^{p-1}}{2} - k^q + k^r = \infty$$

となり, 発散してしまう. よって $p-1\leq q$.
また, $p>q$ から $p=q+1$ が得られる.
また, 前述の議論から

$$\begin{aligned}k^{q+1}a_k - k^q + k^r\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 &= k^q(ka_k-1) + k^r\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\\ &= k^r\left(k^{q-r}(ka_k-1) + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\\ &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(1 - k^{q-r-2}\cdot\frac{k^2}{(k+1)(k+2)}\cdot(k+2)a_{k+2}\right)k^r\end{aligned}$$

であるから, $q-r-2\neq 0$ であるとすると, $r>0$ から発散してしまう.
したがって, $q=r+2$ を得る.
漸化式をもう一段階進めると

$$a_{k+4}=\left(\frac{2}{\pi}\right)^2(k+3)(1-(k+2)a_{k+2})$$

から

$$(k+2)a_{k+2}=1-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(k+3)(k+4)}\cdot(k+4)a_{k+4}$$

を得るので上の式に代入すると

$$\begin{aligned}
k^{r+3}a_k-k^{r+2}+k^r\left(\frac{\pi}{2}\right)^2&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(1-\frac{k^2}{(k+1)(k+2)(k+2)a_{k+2}}\right)k^r\\
&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\frac{3k+2}{(k+1)(k+2)\cdot(k+2)a_{k+2}\cdot k^r}\\
&=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(\frac{3k+2}{(k+1)(k+2)}\right.\\
&\qquad\left.-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{3k+2}{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}\cdot(k+4)a_{k+4}\right)k^r
\end{aligned}$$

すると, $r>1$ であるとすると, この値は発散してしまう.
したがって, これが 0 でない値に収束するような r は $r=1$ $(p=4,q=3)$ で, その極限値は

$$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\cdot 3=\frac{3}{4}\pi^2$$