Грядут лабораторные, грядёт ДЗ, ГОТОВЬ ЕБАЛО
©Береснева возможно

Вектор невязок R
$AX = B \to X$ - точное решение СЛАУ
x^* - приближённое
$R = B - Ax^*$ - вектор невязок
$||R||$ - невязка решения
$\Delta x^* = ||X - x^*||\ \Delta x^* \neq ||R||$
$\nu(A) = ||A|| * ||A^{-1}||$
$\delta X \leq \nu(A)\left(\delta A + \delta B\right)$
$\nu(A)$ - число обусловленности - чем меньше, тем лучше, ~100 и меньше считается норм, ~1000 и выше - матрица будет плохо обусловлена

$$\begin{cases} x + 10y = 11 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$||A|| = 1101 \quad ||A^{-1}|| = 1011$
$\nu(A) = 1101 * 1011\ 10^6$

Теперь с матрицей с ошибкой:
$$\begin{cases} x + 10y = 11.01 \\ 100x + 1001y = 1101 \end{cases}$$
$$X^y = \begin{pmatrix} 11.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$\delta X = \delta(A)\ \delta B$
$\delta B = \dfrac{0.01}{1101}$
$\delta X = 1101 * 1011 * \dfrac{0.01}{1101} = 10.11$ - около 1000%. Дохуя короче
$$R = B - AX^x = \begin{pmatrix} 11 \\ 1101 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 100 & 1001 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 11.01 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.01 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$||R|| = 0.01$ - и это при неправильной матрице, так что вектор невязки не является критерием правильности вычислений

Метод Гаусса с выбором ведущего элемента

Метод Гаусса из линала если вспомнишь - по сути метод Гаусса с выбором ведущего элемента
Выбирая ведущий элемент надо выбирать числа как можно больше, дабы была лучше относительная погрешность
Идея:
На текущем шаге исключается не следующая по номеру неизвестная, а неизвестная с коэффициентом, наибольшим по модулю
Определяется 3 методы выбора ведущего элемента:

- Выбор ведущего элемента по столбцу
- Выбор ведущего элемента по строке
- (Legendary pull) С выбором главного элемента по всей матрице. Самый лучший метод, можно всё, заниматься мы им не будем 🙃
  У метода Хаусхолдера больше арифметических операций нежели у метода Гаусса

Метод Хаусхолдера: решение СЛАУ

$P = E - 2\omega\omega^T$ - матрица Хаусхолдера (да, было уже - повторяем ёпта)
$AX = B$
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
Шаг 1:
$$\overline{X_3} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \quad \overline{e_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$\overline{V_3} = \overline{X_3} + ||\overline{X_3}|| \quad sign\, a_{11}\, \overline{e_3}$
$\omega_3 = \dfrac{\overline{V_3}}{||V||}$
Шаг 2 судя по всему?:
P_3
$AX = B$
$P_3AX = P_3B$
$P_2P_3AX = P_2P_3B$
$R\overline{X} = \overline{B}$ <- обратный ход метода Гаусса

Метод Прогонки (хихи самогон)

Всё допизделись теперь у нас отчислительная математика 😈
$$A = \begin{pmatrix} c_{11} & b_{12} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & c_{12} & b_{13} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & c_{33} & b_{34} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & a_{nn-1} & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

1. $c_1x_1 + b_1x_2 = f_1$
   $x_1 = \alpha_1x_2 + \beta_1$
   $\alpha_1 = -\dfrac{b_1}{c_1} \quad \beta_1 = \dfrac{f_1}{c_1}$
2. $a_2\left(\alpha_1x_1 + \beta_1\right) + c_1x_2 + b_2x_3 = f_2$
   $x_2 = \alpha_2x_3 + \beta_2$
   $\alpha_2 = -\dfrac{b_2}{a_2\alpha_1 + c_2} \quad \beta_2 = \dfrac{f_2 - a_2\beta_1}{a_2\alpha_1 + a_2}$
3. $x_{k-1} = \alpha_{k-1}x_k + \beta_{k-1}$
   $a_k\left(\alpha_{k-1}x_k + b_{k-1}\right) + c_kx_k + b_kx_{k+1} = f_k$
   $x_k = \alpha_kx + k + 1 + \beta_k$
   $\alpha_k = -\dfrac{b_k}{a_k\alpha_{k-1} + c_k} \quad \beta_k = \dfrac{f_k - a_k\beta_k - 1}{a_k\alpha k - 1 + c_k}$
   На шаге n:
   $x_{n-1} = \alpha n - 1x_n + \beta n - 1$
   $a_nx_{n-1} + c_nx_n = f_n$
   $a_n\left(\alpha n - 1x_n + \beta_{n-1}\right) + c_nx_n = f_n$
   $x_n = \dfrac{f_n - a_n\beta_{n-1}}{a_n\alpha n - 1 + c_n}$
   Количество арифметических операций для метода Прогонки $2 + 6(n-2) + 5 = 6n - 5$
   Для обратной прогонки $2(n-1)$
   То есть для всей прогонки туда-обратно $6n - 5 + 2(n-1) = 8n - 7$

Th (условие того что метод прогонки сработает) Пусть коэффициенты системы удовлетворяют следующим условиям диагонального преобладания:

- $\forall\, i \quad |c_i| \geq |a_i| + |b_i|$
- $|c_i| > |a_i|$
  Тогда $\forall\ \alpha_i, \beta_i \quad 1) a_i\alpha_{i-1} + c_i \neq 0 \quad 2)\ |\alpha_i| \leq 1$

Поиск обратной матрицы

"Алгебраические дополнения - это слишком большая ошибка"
©Береснева 2025
$AX = B$ (СЛАУ)
$AX = E$, тогда X - обратная матрица
$$\overline{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overline{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad \overline{e_n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} AX_1 = \overline{e_1} \\ AX_2 = \overline{e_2} \\ \dots \\ AX_3 = \overline{e_3} \end{cases}$$
$A^{-1} = (X_1X_2 \dots X_n)$
Способ 2
$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ a_{31} & \dots & a_{3n} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & \dots & b_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{31} & \dots & b_{3n} \end{pmatrix}$$
^ Кусок матрицы справа, состоящий из b - транспонированная матрица