

Разбалловки на сем

- PK1 -> 13 б.
- PK2 -> 32 б.
- PK3 -> 35 б.
- 5 лаб по 4 балла

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод простой итерации (метод Якоби)

$AX = F \rightarrow X = BX + C$

$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ - первое приближение

$X^1 = BX^0 + C$ - второе приближение

$X^2 = BX^1 + C$ - третье приближение

...

$X^n = BX^{n-1} + C$ - последнее приближение 😞

$\{X^n\} \rightarrow X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ - точное решение

Последовательность X^n сходится к точному решению X^* , если норма матрицы удовлетворяет условию:
 $||B|| \leq q < 1$

, где q - некая константа

При этом абсолютная погрешность приближённого решения допускают следующую априорную оценку

$||X^n - X^*|| \leq q^n ||X_0 - X^*||$

Доказательство:

$X^* = BX^* + C$

$X^n = BX^{n-1} + C$

$X^n - X^* = BX_{n-1} + C - BX^* - C = B(X^{n-1} - X^*)$

$||X^n - X^*|| = ||B(X^{n-1} - X^*)|| \leq ||B|| * ||X^{n-1} - X^*||$

$||X^n - X^*|| \leq q * ||X^{n-1} - X^*|| \leq q^2 ||X^{n-2} - X^*|| \leq \dots \leq q^n * ||X^0 - X^*||$

$\{X^n\} \rightarrow X^*$ чтд

Заебатая оценка, жаль ей нельзя нормально пользоваться ибо мы не знаем точное значение X , так что можно только определить скорость сходимости

Апостериорная оценка

При тех же вводных, что до этого ($||B|| \leq q < 1$), справедлива апостериорная оценка:

Th $||X^n - X^*|| \leq \frac{q}{1-q} * ||X^n - X^{n-1}||$

$X^n - X^* = B(X^{n-1} - X^*) = B(X^{n-1} - X^* + X^n - X^n) = B(X^{n-1} - X^n) + B(X^n - X^*)$

$||X^n - X^*|| \leq ||B|| * ||X^{n-1} - X^n|| + ||B|| * ||X^n - X^*||$

$||X^n - X^*|| \leq \frac{q}{1-q} * ||X^n - X^{n-1}|| < \epsilon \rightarrow ||X^n - X^{n-1}|| < \frac{\epsilon(1-q)}{q}$

Th Последовательность X^n сходится к X^* , если матрица A - матрица с диагональным преобладанием элементов

$AX = F \rightarrow X = BX + C$

$\forall i \quad |a_{ii}| > \sum (j = 1, i \neq j \rightarrow n) |a_{ij}|$

$A = L + D + R$

$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

$R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

$AX = F$

$(L + D + R)X = F \rightarrow DX = (-L - R)X + F \rightarrow X = D^{-1}(-L - R)X + D^{-1}F$

$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 16 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 10x_1 = 0x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 16 \\ 10x_2 = -x_1 + 0x_2 - 2x_3 - 3 \\ 10x_3 = -2x_1 - 4x_2 + 0x_3 - 18 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0x_1 - 0.2x_2 + 0.3x_3 + 1.6 \\ x_2 = -0.1x_1 + 0x_2 - 0.2x_3 - 0.3 \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.4x_2 + 0x_3 - 1.8 \end{cases}$

$||B||_1 = 0.6 = q$

$||X^n - X^*|| \leq \frac{0.6}{0.4} ||X^n - X^*||$

На практике первое приближение часто берут равным 0

Метод Зейделя

$AX = F \rightarrow X = BX + C$

Метод Зейделя основывается на методе Якоби с той лишь разницей, что при вычислении k -го приближения i -ые компоненты учитывают уже ранее найденные k -ые приближения X_1, X_2, \dots, X_{i-1}

$\begin{cases} X_1^k = b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n + f_1 \\ X_2^k = b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n + f_2 \\ \dots \\ X_n^k = b_{n1}x_1 + b_{nn}x_n + f_n \end{cases}$

$B = B_1 + B_2$

$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & \dots \\ dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} - 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

$X^k = B_1X^k + B_2X^{k-1} + C$

Th Последовательность X^k сходится к точному решению X^* , если выполняется следующее условие:
 $||B_1|| + ||B_2|| < 1$

, при этом абсолютная погрешность X^k допускает априорную оценку погрешности

Доказательство:

$||X^k - X^*|| \leq \left(\frac{||B_2||}{1 - ||B_1||} \right)^k * ||X^0 - X^*||$

$X^k - X^* = (B_1X^k + B_2X^k - B_1X^* - B_2X^*) = B_1(X^k - X^*) + B_2(X^{k-1} - X^*)$

$||X^k - X^*|| \leq ||B_1|| * ||X^k - X^*|| + ||B_2|| * ||X^{k-1} - X^*||$

$||X^k - X^*|| \leq \frac{||B_2||}{1 - ||B_1||} * ||X^{k-1} - X^*|| \leq \left(\frac{||B_2||}{1 - ||B_1||} \right)^2 ||X^{k-2} - X^*|| \leq \left(\frac{||B_2||}{1 - ||B_1||} \right)^k * ||X^0 - X^*||$

$\frac{||B_2||}{1 - ||B_1||} < 1$

$k \rightarrow \infty \quad ||X^k - X^*|| \rightarrow 0$