

Множество элементов называется линейным (векторным) пространством, если на этом множестве выполнено 3 условия:

- Введена операция суммы
 $\forall x,y, \in L \quad Z = x + y, z \in L$
- Операция умножения элеменента на число
 $\forall x \in L, \forall \lambda \in R \quad y = \lambda x, y \in L$
- Выполнено 8 аксиом
 - $x + y = y + x \quad \forall x,y \in L$
 - $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x,y,z \in L$
 - $\exists \theta \in L: \forall x \in L \quad x + \theta = x$
 - $\forall x \in L \exists (-x) \in L: x + (-x) = \theta$
 - $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
 - $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
 - $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
 - $1 * x = x \quad \forall x \in L$

$x - y = x + (-y)$ - определение разницы

Нормированное линейное пространство - линейное пространство L, в котором каждому элементу x из L поставлено в соответствие действительное число, называемое **нормой** $||x||$, причём выполняется 3 условия (аксиомы нормы):

- $\forall x \quad ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \rightarrow x = \theta$
- $||\lambda x|| = |\lambda| * ||x|| \quad \forall \lambda \in R, \forall x \in L$
- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

Расстояние между элементами x и y линейного нормированного пространства - норма разности этих элементов

$$\rho(x,y) = ||x - y||$$

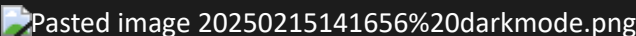
Нормированное пространство n-мерных векторов

- Кубическая норма
 $||\overline{x}||_{\infty} = \max\{|\overline{x}_n|\} = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_n|\}$
- Октаэдрическая норма
 $||\overline{x}||_1 = \sum_1^i |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
- Сферическая (Евклидова) норма
 $||\overline{x}||_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$
$$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \overline{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{X} - \overline{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$
$$\rho(\overline{x}, \overline{y}) = ||x - y|| = \begin{cases} ||x - y||_{\infty} = 4 \\ ||x - y||_1 = 7 \\ ||x - y||_2 = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases}$$

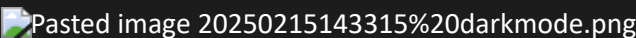
Нормы для векторов + нормы для матриц

$$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \quad ||\overline{x}|| = 1$$

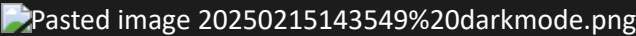
- $||\overline{x}||_{\infty} = 1$:
 $|x_1| = 1 \rightarrow |x_2| \leq 1$
 $|x_2| = 1 \rightarrow |x_1| \leq 1$



- $||\overline{x}||_1 = |x_1| + |x_2| = 1$
 $x_1 + x_2 = 1 \rightarrow \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$
 $x_1 - x_2 = 1 \rightarrow \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 < 0$
 $-x_1 + x_2 = 1 \rightarrow \quad x_1 < 0, \quad x_2 \geq 0$
 $-x_1 - x_2 = 1 \rightarrow \quad x_1 < 0, \quad x_2 < 0$



- $||\overline{x}||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = 1$
 $x_1^2 + x_2^2 = 1$



$||\overline{x}||_{\infty} \leq ||\overline{x}||_2 \leq ||\overline{x}||_1 \leq n * ||\overline{x}||_{\infty}$

\overline{X} - точное значение вектора

\overline{x}^* - приближённое значение вектора

$\Delta \overline{x}^* = ||\overline{X} - \overline{x}^*||$

$\delta x = \frac{\Delta x}{||\overline{X}||} \quad \delta \overline{x}^* = \frac{\Delta \overline{x}^*}{||\overline{x}^*||}$

$$A_{m * n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$||A|| = \sup \frac{||A * \overline{x}||}{||\overline{x}||}, \quad \overline{x} \neq \theta$

- $||A||_{\infty} = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ (Сумма по строкам)
- $||A||_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ (Сумма по столбцам)
- $||A||_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$

Доказательство бесконечной нормы для матриц + определение погрешностей для матриц

Число обусловленности матрицы A - количественная оценка согласованности матрицы^{[1](#)}

$$A_{m * n} * \overline{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{pmatrix}$$

$||A \overline{X}||_{\infty} = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| * |x_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x_j| = \max_j |x_j| * \max_i \sum_j |a_{ij}| = ||x||_{\infty} \max_i \sum_j |a_{ij}|$

чтд

A- точная матрица

A^* - приближённая матрица

$\Delta A^* = ||A - A^*||$

$\delta A = \frac{\Delta A^*}{||A||} \quad \delta A^* = \frac{\Delta A^*}{||A^*||}$

1. Согласованность матрицы - зависимость относительной погрешности результатов от относительной погрешности входных данных↩