$\varDelta A = A - A^*\quad \varDelta A^* = ||\varDelta A||$
$\varDelta B = B - B^*\quad \varDelta B^* = ||\varDelta B||$
$\varDelta X = X - X^*\quad \varDelta X^* = ||\varDelta X||$
$\delta A = \frac{||\varDelta A||}{||A||}$
$\delta B = \frac{||\varDelta B||}{||B||}$
$\delta X = \frac{||\varDelta X||}{||X||}$
$A\overline{X} = B$
$||A\overline{X}|| = ||B||$
$||A\overline{X}|| \le ||A|| * ||\overline{X}||$
Опр Линейное пространство - множество элементов, на котором выполнено 3 условия:

1. Определена операция суммы:
   $\forall x,y \in L \quad \exists z = x + y: z \in L$
2. Определена операция умножения:
   $\forall x \in L, \lambda \in R \quad y = \lambda x: y \in L$
3. Выполнено 8 аксиом:
   1. $x + y = y + x \quad \forall x,y \in L$
   2. $x + (y + z) = (x + y) + 2 \quad \forall x,y,z \in L$
   3. $\exists \theta \in L: \forall x \in L \quad x + \theta = x$
   4. $\forall x \in L \exists (-x) \in L: x + (-x) = \theta$
   5. $\lambda (x + y) = \lambda x + \mu x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
   6. $\lambda \left(\mu x\right) = \left(\lambda \mu\right) x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
   7. $\lambda \left(\mu x\right) = \left(\lambda \mu\right) x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
   8. $1 * x = x \quad \forall x \in L$

      Опр Нормальное минимальное пространство - линейное пространство, в котором $\forall x \in L$ поставлено в соответствие действительное число, называемое нормой $||x||$, причём выполняются условия (аксиома нормы):
4. $\forall x ||x|| \ge 0; \quad ||x|| = 0 \to x = \theta$
5. $||\lambda x|| = |\lambda| * ||x|| \quad \forall x \in L, \forall \lambda \in R$
6. $||x + y|| \le ||x|| + ||y||$

   Опр Расстояние между $x \in L$ и $y \in L$ определяется разностью их норм: $\rho (x; y) = ||x - y||$
   Примеры - см. onanists.ru лекция 2 🙃
   $A\overline{X} = B$
   $(A + \varDelta A)\left(\overline{X} + \varDelta \overline{X}\right) = B + \varDelta B$
   $A\overline{X} + A\varDelta\overline{X} + \varDelta A\overline{X} + \varDelta A \varDelta \overline{X} \uparrow^0 = B + \varDelta B \quad |-A\overline{X}$
   $A\varDelta\overline{X} + \varDelta A\overline{X} = \varDelta B$
   $A\varDelta\overline{X} = \varDelta B - \varDelta A\overline{X}$
   $\varDelta\overline{X} = A^{-1}\left(\varDelta B - \varDelta A\overline{X}\right)$
   $||\varDelta\overline{X}|| = ||A^{-1}(\varDelta B - \varDelta A\overline{X}||$
   $||\varDelta\overline{X}|| \le ||A^{-1}|| * ||\left(\varDelta B - \varDelta A\overline{X}\right)|| \quad ^1$
   $||\varDelta\overline{X}|| \le ||A^{-1}||\left(||\varDelta B|| + ||\varDelta A\overline{X}||\right) \quad /: ||\overline{X}|| \quad ^2$
   $\frac{\varDelta\overline{X}}{||\overline{X}} \le ||A^{-1}|| * \left(\frac{||\varDelta B||}{||\overline{X}||} + \frac{||\varDelta A\overline{X}||}{||\overline{X}||}\right)$
   $\frac{||\varDelta\overline{X}||}{||\overline{X}||} \le ||A^{-1}|| * \left(\frac{||\varDelta B||}{||B||} * \frac{||B||}{||\overline{X}||} + \frac{||\varDelta A||}{||A||} * ||A||\right)$

$^{1,2}||\overline{X} - \overline{Y}|| = ||\overline{X} + \left(-\overline{Y}\right) \le ||\overline{X}|| + || - \overline{Y}|| = ||\overline{X}|| + |-1| * ||\overline{Y} = ||\overline{X}|| + ||\overline{Y}||$
$\delta x \le ||A^{-1}||\left(\delta B * \frac{||A\overline{X}||}{||\overline{X}||} + \delta A * ||A||\right)$
$\delta x \le ||A^{-1}||\left(\delta B * \frac{||A|| * ||\overline{X}||}{||\overline{X}||} + \delta A * ||A||\right)$
$\delta x \le ||A^{-1}|| * ||A|| * \left(\delta B + \delta A\right)$
$\nu (A) = ||A^{-1}|| * ||A||$ - число обусловленности матрицы. Чем меньше, тем лучше
$1 \le \nu (A) \le \infty$
$\uparrow ||A^{-1}|| * ||A|| \to ||A * A^{-1}|| = ||E|| = 1$

Факторизация матрицы

Опр Факторизация (разложение) матрицы - представление матрицы в виде произведения нескольких матриц
1️⃣ LU-разложение
$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$
Ищем коэффициенты! С помощью доп. матрицы:
$L + U - E = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ l_{21} & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & \dots & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$
$A = LU$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_{11} = a_{11} & u_{12} = a_{12} & \dots & u_{1n} = a_{1n} \\ l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{21}} & u_{22} = a_{22} - l_{21} * u_{12} & \dots & u_{2n} = a_{2n} - l_{21} * u_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1} = \frac{a_{n1}}{u_{n1}} & l_{n2} = \left(a_{n2} - l_{n1} * u_{1n}\right) * \frac{1}{u_{22}} & \dots & u_{nn} = a_{nn} - \sum_{j=1}^{n-1} l_{nj} * u_{jn} \end{pmatrix}$
Общие формулы
$u_{ij} = a_{ij} - \sum k = 1^{i-1} l_{ik} * u_{ki} \quad , i \le j$
$l_{ij} = \frac{1}{u_{ij}} * \left(a_{ij} - \sum k = 1^{j-1} l_{ik} * u_{kj}\right)$
Программировать проще и накопленная ошибка меньше чем у метода Гаусса
Th Если все главные миноры квадратной матрицы A отличны от 0, то существуют такие верхние U и нижние L треугольники матрицы, что A представима в виде произведения LU
Th Если элементы диагонали одной из матриц зафикмировать, то такое разложение будет единственным
2️⃣ QR-разложение, Q - ортогональная матрица, R - правый верхний треугольник матиицы
...
Опр Матрица α ортогональна, если:
$Q * Q^T = Q^T * Q = E \to$

1. $Q^{-1} = Q^T$
2. $|Q| = 1 \vee |Q| = -1$
3. Q & P - ортогональны $\to Q * P$ - отртогональна
4. $||Q\overline{X}|| = ||\overline{X}||$

   Опр Линейное пространство - пространство со скалярным произведением, если ∀ упорядоченной паре векторов ставится число, называемое скалярным произведением (x, y) и выполнены условия (аксиомы скалярного произведения):
5. $(x, y) = (y, x)$
6. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$
7. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
8. $(x, x) = 0$

   $\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \overline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \in R^n$
   $\left(\overline{X}, \overline{Y}\right) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$
   $||\overline{X}|| \sqrt{\left(\overline{X}, \overline{X}\right)}$
   $\cos u = \frac{\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)}{||\overline{X}|| * ||\overline{Y}||}$ - угол между многомерными векторами
   $\text{пр}_y \overline{X} = \frac{\left(\overline{X}, \overline{Y}\right)}{||\overline{Y}||}$ - проекция $\overline{X}$ на $\overline{Y}$

Метол Хаусхолдера (метод отражения) (какого холдера блять???)

Возвращаемся к QR-разложению
$Q = \begin{pmatrix} \cos\varTheta & \sin\varTheta \\ \sin\varTheta & -\cos\varTheta \end{pmatrix}$
$\overline{Y} = Q^T * \overline{X}$
$\overline{q} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\varTheta}{2} \\ \sin\frac{\varTheta}{2} \end{pmatrix}$ - направленный вектор

Метод Хаусхолдера для многомерного случая

$$\overline{X_0} \in R^n$$

H_0 - линейное одномерное пространство с базисом $\{\overline{X_0}\}$
$H_\perp$ - ортогональное дополнение - пространство всех векторов $\perp$ ∀ векторов $\in H_0$ (гиперплоскость)
$\overline{X} = X_\perp + \lambda X_0$
P - матрица, при умножении $\overline{X}$ на которую получится отражение
$P\overline{X} = P (X_\perp + \lambda X_0) = X_\perp - \lambda X_0 = X - 2\lambda X_0 = *$

$$\lambda = \text{пр}_{\overline{X}_0} \overline{X} = \frac{\left(\overline{X}, \overline{X}_0\right)}{||X_0||}$$

$x_0 = \omega \quad ||\omega|| = 1 \quad \lambda = (x, \omega)$

$* = X - 2(X, \omega) * \omega = \overline{X} - 2\omega\left(\overline{X}, \omega\right) = \overline{X} - 2\omega\left(\omega, \overline{X}\right) = (\,) = \left|\left(\omega, \overline{X}\right) = \omega^T\overline{X}\right| = \overline{X} - 2\omega\omega^T\overline{X} = \left(E - 2\omega\omega^T\right.$
Опр $P = E - 2\omega\omega^T$ - метод отражения (метод Хаусхолдера) на линейном пространстве
ω - вектор Хаусхолдера