

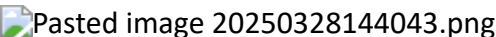
// My bad g, missed the beginning

..., тогда метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью, и справедлива следующая априорная оценка:

$$\left|X^k - X^*\right| \leq q^{2^k - 1} * \left|X^0 - X^*\right|$$
$$q = \frac{M^* \left|X^0 - X^*\right|}{2m}$$

Метод Ньютона - квадратическая скорость сходимости

Теоремы 1-2



Доказательство теоремы 1

Пусть $X^* < X^k < b$

Тогда докажем, что если выполняется условие выше, то $X^* < X^{k+1} < X^k$

$$X^{k+1} = X^k - \frac{f(X^k)}{f'(X^k)}$$

$$X^k - X^{k+1} = \frac{f(X^k)}{f'(X^k)} = \frac{f(X^k) - f(X^*)}{f'(X^k)} = \frac{f'(\xi^k)(X^k - X^*)}{f'(X^k)}$$

$$0 < \frac{f'(\xi^k)}{f'(X^k)} < 1$$

$$\begin{cases} X^k - X^{k+1} > 0 \\ X^k - X^{k+1} < X^k - X^* \end{cases} \rightarrow \begin{cases} X^{k+1} < X^k \\ X^{k+1} > X^* \end{cases} \rightarrow X^* < X^{k+1} < X^k \text{ чтд}$$

Критерий окончания метода Ньютона

$$\left|X^k - X^{k-1}\right| < \epsilon$$

Трудности в использовании метода Ньютона

- Нужно хорошее приближение
- Метод трудоёмкий - на каждой итерации нужны значения функции и производной, что дохера вычислений так то

Модификации метода Ньютона

Упрощённый метод Ньютона

Суть метода - если производная непрерывна в окрестности корня X^* , то её значение вблизи этого корня можно считать почти постоянным

Производную считаем единожды в нулевом приближении

$$X^{k+1} = X^k - \frac{f(X^k)}{f'(X^k)}$$

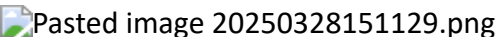
- традиционный метод Ньютона

$$X^{k+1} = X^k - \frac{f(X^k)}{f'(X^0)}$$

- упрощённый метод

Сходится тогда же, когда и метод Ньютона

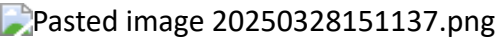
Скорость сходимости - линейная, зато метод гораздо менее трудоёмкий



Метод секущих

$$f'(X^k) = \frac{f(X^k) - f(X^{k-1})}{X^k - X^{k-1}}$$
$$X^{k+1} = X^k - \frac{f(X^k)}{f(X^k) - f(X^{k-1})} (X^k - X^{k-1})$$

Двухшаговый метод, линейная скорость сходимости, трудоёмкость меньше метода Ньютона



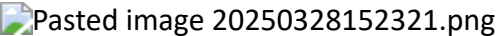
Метод хорд

Усовершенствованный метод секущих - первая секущая проводится по отрезку локализации корня

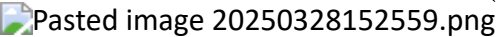
Скорость линейная, зато что? Правильно, метод менее трудоёмкий

$$f(a)f(b) < 0 \quad [a, b]$$

$$f(b)f''(x) > 0 \rightarrow X^{k+1} = b - \frac{f(b)}{f(b) - f(X^k)} (b - X^k)$$



$$f(a)f''(x) < 0 \rightarrow X^{k+1} = a - \frac{f(a)}{f(X^k) - f(a)} (X^k - a)$$



Методы аппроксимации функций

Постановка задачи - дана функция в виде таблицы, аналитического представления нет

x_1	x_2	\dots	x_n
y_1	y_2	\dots	y_n
Задача - найти $y = f(x)$ - перевести в аналитический вид			
Вторая ситуация - есть ебейше сложная аналитическая функция, которую мы хотим заменить на более простое представление			
Вычисление $y = f(x)$ трудоёмко, поэтому нужно подобрать более простую функцию с наилучшим приближением к $f(x)$			

Непрерывная аппроксимация

$y = f(x)$ непрерывна на отрезке

$y = \phi(x)$ - функция аппроксимации

$$\rho(f(x), \phi(x)) = \max|f(x) - \phi(x)| \rightarrow \min$$

- равномерное приближение