$P = E - 2\omega\omega^T \quad P$ - ортогональная
$P * P^T = \left(E - 2\omega\omega^T\right)\left(E - 2\omega\omega^T\right)^T = \left(E - 2\omega\omega^T\right)\left(E^T - 2\left(\omega\omega^T\right)^T\right) =$
$= \left(E - 2\omega\omega^T\right)\left(E - 2\omega\omega^T\right) = E - 2\omega\omega^T + 4\omega\omega^T\omega\omega^T = E$ чтд
Задача: подобрать ω в операторе Хаусхолдера, чтобы в результате преобразования полученный вектор имел направление заданного единичного вектора e
$PX = \pm\alpha e$
Pasted image 20250302211025.png
// ^ remake in photsohop or sumn
$||X|| = ||PX|| = || \pm \alpha e|| = \alpha||e|| = \alpha$
$PX = \left(E - 2\omega\omega^T\right)X = x - 2\omega\omega^T X = \pm\alpha e$
$X \pm \alpha e = 2\omega\omega^T X \qquad V = X \pm \alpha e$
$2\omega\,(\omega, X) = X \pm \alpha e \to \omega = \dfrac{V}{||V||}$
$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \overline{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$
$V = X + sign\,(x_i)\,||X||e$
$\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$||X|| = \sqrt{1+4+4} = 3$
$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad ||V|| = 2\sqrt{6}$
$\omega = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$P = E - w\omega\omega^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \dfrac{2}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
QR-разложение
$A = QR \qquad A = \begin{pmatrix} X & x & x & x \\ X & x & x & x \\ X & x & x & x \\ X & x & x & x \end{pmatrix}$ // Большой X это тип обведено

1. $X_1 = \begin{pmatrix} x \\ x \\ x \\ x \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to H_1$
   $H_1 A = \begin{pmatrix} x & x & x & x \\ 0 & X & x & x \\ 0 & X & x & x \\ 0 & X & x & x \end{pmatrix}$
2. $X_2 = \begin{pmatrix} x & x \\ x & \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \tilde{H}_2 \to H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0\,\tilde{H}_2 & & & \\ 0 & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ <- Уголок
   $H_2 H_1 A = \begin{pmatrix} X & x & x & x \\ 0 & X & x & x \\ 0 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & x & x \end{pmatrix}$
3. Повтор #2
4. $H_3 H_2 H_1 A = R \to A = \left(H_3 H_2 H_1\right)^T R \qquad / \left(H_3 H_2 H_1\right)^T = Q$

Численные методы решения задач линейной алгебры (?)

X - входные данные, Y - выходные данные
Корректная задача по Адамару:

- Решение задачи существует при любых входных данных
- Решение ОДНО
- Решение устойчиво по отношению к малым возмущениям входных данных
  Если хотя бы одно из условий не выполнено - задача некорректна
- Решение Y абсолютно устойчиво, если:
  $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta\,(\epsilon) > 0: \quad \forall X \quad \Delta X^* < \delta\,(\epsilon) \to \Delta Y^* < \epsilon$$
- Относительно устойчиво, если:
  $$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta\,(\epsilon) > 0: \quad \forall X \quad \delta X^* < \delta\,(\epsilon) \to \delta Y^* < \epsilon$$

Методы решения СЛАУ

- Прямые методы
  Решение системы находится за конечное число операций
  Критерий оптимальности - количество арифметических действий
- Итерационные методы
  Приближённое к ответу решение находится как предел последовательных приближений
  $||X^{(k)} - X|| < \epsilon$
  $k\,(\epsilon)$ - критерий количества итераций до точности

Метод Гаусса

$AX = B \to UX = B$
Прямой ход:

1. $a_{11} \neq 0$
   $a_{ij} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, \quad y_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$
   $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}c_{1j} \quad b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}y_i \quad j = 2 ... n$
   Повторяем для всех a_{ij}
2. Обратный ход
   $x_{n-1} = y_{n-1} - c_{n-1\,n}x_n$
   $x_k = y_k - \sum_{p=k+1}^{n} c_{kp}x_p$
   Подсчёт числа произведений и делений
   У прямого хода $\dfrac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$
   У обратного хода $\dfrac{n\,(n-1)}{2}$
   $\sum = \dfrac{n^3 + 3n^2 - n}{3}$