Разбалловки на сем

- РК1 -> 13 б.
- РК2 -> 32 б.
- РК3 -> 35 б.
- 5 лаб по 4 балла

Итерационные методы решения СЛАУ

Метод простой итерации (метод Якоби)

$AX = F \to X = BX + C$
$X^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \dots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ - первое приближение
$X^1 = BX^0 + C$ - второе приближение
$X^2 = BX^1 + C$ - третье приближение
...
$X^n = BX^{n-1} + C$ - последнее приближение 🙃
$\{X^n\} \to X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$ - точное решение
Последовательность X^n сходится к точному решению X^*, если норма матрицы удовлетворяет условию:
$$||B|| \le q < 1$$
, где q - некая константа
При этом абсолютная погрешность приближённого решения допускают следующую априорную оценку
$$||X^n - X^*|| \le q^n ||X_0 - X^*||$$

Доказательство:
$X^* = BX^* + C$
$X^n = BX^{n-1} + C$
$X^n - X^* = BX_{n-1} + C - BX^* - C = B\left(X^{n-1} - X^*\right)$
$||X^n = X^*|| = ||B\left(X^{n-1} - X^*\right)|| \le ||B|| * ||X^{n-1} - X^*||$
$||X^n - X^*|| \le q * ||X^{n-1} - X^*|| \le q^2 ||X^{n-2} - X^*|| \le \dots \le q^n * ||X^0 - X^*||$
$\{X^n\} \to X^*$ чтд

Заебатая оценка, жаль ей нельзя нормально пользоваться ибо мы не знаем точное значение X, так что можно только определить скорость сходимости

Апостериорная оценка

При тех же вводных, что до этого ($||B|| \le q < 1$), справедлива апостериорная оценка:
Th $||X^n - X^*|| \le \frac{q}{1-q} * ||X^n - X^{n-1}||$
$X^n - X^* = B\left(X^{n-1} - X^*\right) = B\left(X^{n-1} - X^* + X^n - X^n\right) = B\left(X^{n-1} - X^n\right) + B\left(X^n - X^*\right)$
$||X^n - X^*|| \le ||B|| * ||X^{n-1} - X^n|| + ||B|| * ||X^n - X^*||$
$||X^n - X^*|| \le \frac{q}{1-q} * ||X^n - X^{n-1}|| < \epsilon \to ||X^n - X^{n-1}|| < \frac{\epsilon(1-q)}{q}$

Th Последовательность X^n сходится к X^*, если матрица A - матрица с диагональным преобладанием элементов
$AX = F \to X = BX + C$
$\forall i \quad |a_{ii}| > \sum (j = 1, i \ne j \to n) |a_{ij}|$
$A = L + D + R$
$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}$
$D = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & a_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$
$R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$
$AX = F$
$(L + D + R)X = F \to DX = (-L - R)X + F \to X = D^{-1}(-L - R)X + D^{-1}F$
$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 16 \\ x_1 + 10x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 \end{cases} \to \begin{cases} 10x_1 = 0x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 16 \\ 10x_2 = -x_1 + 0x_2 - 2x_3 - 3 \\ 10x_3 = -2x_1 - 4x_2 + 0x_3 - 18 \end{cases} \to \begin{cases} x_1 = 0x_1 - 0.2x_2 + 0.3x_3 + 1.6 \\ x_2 = -0.1x_1 + 0x_2 - 0.2x_3 - 0.3 \\ x_3 = -0.2x_1 - 0.4x_2 + 0x_3 - 1.8 \end{cases}$
$||B||_1 = 0.6 = q$
$||X^n - X^*|| \le \frac{0.6}{0.4} ||X^n - X^*||$
На практике первое приближение часто берут равным 0

Метод Зейделя

$AX = F \to X = BX + C$
Метод Зейделя основывается на методе Якоби с той лишь разницей, что при вычислении k-го приближения i-ые компоненты учитывают уже ранее найденные k-ые приближения $X_1, X_2, \dots, X_{i-1}$
$\begin{cases} X_1^k = b_{11}x_1 + b12x_2 + \dots + b_{1n}x_n + f_1 \\ X_2^k = b_{21}x_1 + b22x_2 + \dots + b_{2n}x_n + f_2 \\ \dots \\ X_n^k = b_{n1}x_1 + bn2x_2 + \dots + b_{nn}x_n + f_n \end{cases}$
$B = B_1 + B_2$
$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ b_{21} & 0 & \dots & \dots \\ dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & bnn-1 & 0 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} b11 & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$

$X^k = B_1X^k + B_2X^{k-1} + C$
Th Последовательность X^k сходится к точному решению X^*, если выполняется следующее условие:
$$||B_1 + ||B_2|| < 1$$
, при этом абсолютная погрешность X^k допускает априорную оценку погрешности
Доказательство:
$||X^k - X^*|| \le \left(\frac{||B_2}{1 - ||B_1||}\right)^k * ||X^0 - X^*||$
$X^k - X^* = \left(B_1X^k + B_2X^k - B_1X^* - B_2X^*\right) = B_1\left(X^k - X^*\right) + B_2\left(X^{k-1} - X^*\right)$
$||X^k - X^*|| \le ||B_1|| * ||X^k - X^*|| + ||B_2|| * \left|X_{k-1} - X^*\right|$
$||X^k - X^*|| \le \frac{||B_2||}{1 - ||B_1||} * ||X^{k-1} - X^*|| \le \left(\frac{||B_2||}{1 - ||B_1||}\right)^2 ||X_{k-2} - X^*|| \le \left(\frac{||B_2||}{1 - ||B_1||}\right)^k * ||X^0 - X^*||$
$\frac{||B_2||}{1 - ||B_1||} < 1$
$k \to \infty \quad ||X^k - X^*|| \to 0$