Pasted image 20250328143724%20darkmode.png
// My bad g, missed the beginning
..., тогда метод Ньютона сходится с квадратичной скоростью, и справедлива следующая априорная оценка:
$\left|X^k - X^*\right| \le q^{2^k - 1} * \left|X^0 - X^*\right|$
$q = \frac{M * \left|X^0 - X^*\right|}{2m}$
Метод Ньютона - квадратическая скорость сходимости
Теоремы 1-2
Pasted image 20250328144043%20darkmode.png
Доказательство теоремы 1
Пусть $X^* < X^k < b$
Тогда докажем, что если выполняется условие выше, то $X^* < X^{k+1} < X^k$
$X^{k+1} = X^k - \frac{f\left(X^k\right)}{f'\left(X^k\right)}$
$X^k - X^{k+1} = \frac{f\left(X^k\right)}{f'\left(X^k\right)} = \frac{f\left(X^k\right) - f\left(X^*\right)}{f'\left(X^k\right)} = \frac{f'\left(\xi^k\right)\left(X^k - X^*\right)}{f'\left(X^k\right)}$
$0 < \frac{f'\left(\xi^k\right)}{f'\left(X^k\right)} < 1$
$\begin{cases} x^k - X^{k+1} > 0 \\ X^k - X^{k+1} < X^k - X^* \end{cases} \to \begin{cases} X^{k+1} < X^k \\ X^{k+1} > X^* \end{cases} \to X^* < X^{k+1} < X^k$ чтд

Критерий окончания метода Ньютона

$\left|X^k - X^{k-1}\right| < \epsilon$

Трудности в использовании метода Ньютона

- Нужно хорошее приближение
- Метод трудоёмкий - на каждой итерации нужны значения функции и производной, что дохера вычислений так то

Модификации метода Ньютона

Упрощённый метод Ньютона

Суть метода - если производная непрерывна в окрестности корня X^*, то её значение вблизи этого корня можно считать почти постоянным
Производную считаем единожды в нулевом приближении
$X^{k+1} = X^k - \frac{f\left(X^k\right)}{f'\left(X^k\right)}$ - традиционный метод Ньютона
$X^{k+1} = X^k - \frac{f\left(X^k\right)}{f'\left(X^0\right)}$ - упрощённый метод
Сходится тогда же, когда и метод Ньютона
Скорость сходимости - линейная, зато метод гораздо менее трудоёмкий
Pasted image 20250328151129%20darkmode.png

Метод секущих

$f'\left(X^k\right) =^{=} = \frac{f\left(X^k\right) - f\left(X^{k-1}\right)}{X^k - X^{k-1}}$
$X^{k+1} = X^k - \frac{f\left(X^k\right)}{f\left(X^k\right) - f\left(X^{k-1}\right)\left(X^k - X^{k-1}\right)}$
Двухшаговый метод, линейная скорость сходимости, трудоёмкость меньше метода Ньютона
Pasted image 20250328151137%20darkmode.png

Метод хорд

Усовершенствованный метод секущих - первая секущая проводится по отрезку локализации корня
Скорость линейная, зато что? Правильно, метод менее трудоёмкий
$f(a)f(b) < 0 \quad [a, b]$
$f(b)f''(x) > 0 \to X^{k+1} = b - \frac{f(b)}{f(b) - f\left(X^k\right)}\left(b - X^k\right)$
Pasted image 20250328152321%20darkmode.png

$f(a)f''(x) < 0 \to X^{k+1} = a - \frac{f(a)}{f\left(X^k\right) - f(a)}\left(X^k - a\right)$
Pasted image 20250328152559%20darkmode.png

Методы аппроксимации функций

Постановка задачи - дана функция в виде таблицы, аналитического представления нет

x_1	x_2	…	x_n
y_1	y_2	…	y_n
Задача - найти $y = f(x)$ - перевести в аналитический вид			
Вторая ситуация - есть ебейше сложная аналитическая функция, которую мы хотим заменить на более простое представление			
Вычисление $y = f(x)$ трудоёмко, поэтому нужно подобрать более простую функцию с наилучшим приближением к $f(x)$			

Непрерывная аппроксимация

$y = f(x)$ непрерывна на отрезке
$y = \phi(x)$ - функция аппроксимации
$\rho\left|(f(x), \phi(x)\right| = max\left|f(x) - \phi(x)\right| \to min$ - равномерное приближение