// Херова туча всего из этой лекции из новой темы будет на РК, так что учи сиди (спиши похуй у нас Павловский 🙃)

Условие выхода при методе Зейделя

$||B_1|| + ||B_2|| < 1$
$||B|| \le q < 1$
$||X^k - X^*|| \le \frac{||B_2||}{1 - ||B||}||X^k - X^{k-1}||$
$X^k = B_1 X_k + B_2 X^{k-1} + C$
$X^k - X^* = B_1 X^k + B_2 X^{k-1} - B - X^* + B_2 X^k - B_2 X^k$
$X^k - X^* = B\left(X^k - X^*\right) + B_2\left(X^{k-1} - X^k\right)$
$||X^k - X^*|| \le ||B|| * ||X^k - X^*|| + ||B_2|| * ||X^{k-1} - X^k||$
$||X^k - X^*|| \le \frac{||B_2||}{1 - ||B||}||X^k - X^{k-1}|| < \epsilon$
Условие Зейдела: $||X^k - X^{k-1}|| < \frac{(1 - ||B||)\epsilon}{||B_2||}$ <- если вот это, то уёбываем и точность будет удовлетворять заданной

Методы поиска решений линейных уравнений

$f(x) = 0$
$f(x)$ - непрерывна
Опр. x^* - простой корень: $f\left(x^*\right) = 0; f'\left(x^*\right) \ne 0$
x^* - корень кратности k: $f^{(i)}\ (i = 0 \ldots k-1; f^{(k)}\left(x^*\right) \ne 0$
Отрезок локализации корня - отрезок $[a, b]$, содержащий только один корень
Th. $\begin{cases} f(x) \text{ непрерывна на } [a, b] \\ f(a) * f(b) \\ f(x) - \text{ монотонна} \end{cases} \rightarrow$ в отрезке есть хотя бы один корень

Итерационные методы поиска корней уравнения

$f(x) = 0$
$f(x)$ - непрерывна
$[a, b]$ - отрезок локализации
ϵ - точность
$X^k \rightarrow X^* \quad ||X^k - X^*|| < \epsilon$
Итерационный метод **одношаговый**, если для вычисления X^k-го приближения используется только одно предыдущее X^{k-1} приближение, и **n-шаговый**, если для вычисления X^k используется n предыдущих приближений
Говорят, что метод **сходится со скоростью геометрической прогресии, знаменатель которой** $q < 1$, если для всех k справдлива следующая оценка:

$$||X^k - X^*|| \le C_0 * q^k$$

, где $C_0 - const,\ 0 < q < 1$
Для одношагового итерационного метода существует такая окрестность X^*, такая что если приближенной значение X^k принадлежит окрестности, то следующая оценка справедлива:

$$||X^{k-1} - X^*|| \le C * ||X^k - X^*||^p$$

, где $C - const,\ p$ - порядок скорости итерационного метода
$p = 1$ - линейная скорость
$p = 2$ - квадратическая скорость
$p = 3$ - кубическая скорость

Метод бисекции (метод деления отрезка пополам)

$f(x) = 0; \quad [a, b]; \quad \epsilon$
$f(a) * f(b) < 0$
^ условия применимости метода бисекции
$x^0 = \frac{a_0 + b_0}{2}$
Пусть шагов k, тогда после k шагов длина отрезка $\frac{b - a}{2^k}$
Априорная оценка погрешности:
$\left|X^k - X^*\right| \le \frac{b - a}{2^k} < \epsilon$
$2^k > \frac{b - a}{\epsilon} \rightarrow k > log_2 \frac{b - a}{\epsilon}$
Апостериорная оценка:
$\left|X^k - X^*\right| \le b_k - a_k < \epsilon$

$a = a, b = b$
$c = \frac{a + b}{2}$
if $f(a) * f(c) < 0$
$b = c$
else
$a = c$
Метод бисекции всегда сходится (охуеть а я и не думал)
Сходится со скоростью $q = \frac{1}{2}$, линейная скорость

Метод простой итерации (метод Якоби)

$f(x) = 0 \rightarrow x = \phi(x); X^0$
$X^1 = \phi\left(X^0\right)$
$X^2 = \phi\left(X^1\right)$
...
$X^k = \phi\left(X^{k-1}\right)$
Th. Достаточное условие сходимости метода, она же априорная оценка:
Пусть в некоторой окрестности X^* точного корня функция $\phi(x)$ дифференцируема и удовлетворяет неравеству:

$$\left|\phi'(x)\right| \le q < 1$$

, тогда независимо от выбора начального приближения X^0, принадлежащего этой окрестности, последовательность приближений X^k сходится к X^*, и справедлива следующая априорная оценка абсолютной погрешности:

$$\left|X^k - X^*\right| \le q^k * \left|X^0 - X^*\right|$$

, то $X^* = \phi\left(X^*\right)$?
$X^k = \phi\left(X^{k-1}\right) - \phi(x^*) = \phi'\left(\xi^{k-1}\right)\left(X^{k-1} - X^*\right)$
$\left|X^k - X^*\right| \le \left|\phi'\left(\xi^{k-1}\right)\right| * \left|X^{k-1} - X^*\right| \le q\left|X^{k-1} - X^*\right| \le q^2\left|X^{k-2} - X^*\right| \le q^k\left|X^0 - X^*\right|$
$q < 1, k \rightarrow \infty, q^k \rightarrow 0 = > X^k \rightarrow X^*$
Чтобы выйти, будем юзать апостериорную оценку, которую будем считать на каждом шаге
Th. Пусть в некоторой окрестности корня X^* функция $f(x)$ дифференцируема и удовлетворяет неравенсту $|\phi'(x) \le q < 1$, тогда справедлива апосториорная оценка абсолюнтой погрешности

$$\left|X^k - X^*\right| \le \frac{q}{1 - q}|X^k - X^{k-1}$$

Доказательство
$X^k - X^* = \phi\left(X^{k-1}\right) - \phi\left(X^*\right) = \phi'\left(\xi^{k-1}\right)\left(X^{k-1} - X^*\right) = \phi'\left(\xi^{k-1}\right)\left(X^{k-1} - X^* + X^k - X^k\right)$
$\left|X^k - X^*\right| \le \left|\phi'\left(\xi^{k-1}\right)\right| * \left|X^{k-1} - X^k\right| + \left|\phi'\left(\xi^{k-1}\right)\right| * \left|X^k - X^*\right|$
$\left|X^k - X^*\right| \le \frac{q}{1 - q}\left|X^k - X^{k-1}\right| < \epsilon$

Условие выхода
$\left|X^k - X^{k-1}\right| < \frac{\epsilon(1 - q)}{q}$
$q = max\left|\phi'(x)\right|$

Привидение уравнений к виду, удобному для метода Якоби (простых итераций)

$f(x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \phi(x) \quad max\left|\phi'(x)\right| = q < 1$
$x = x - \tau * f(x) \quad \tau \ne 0 = const$
$\phi(x) = x - \tau * f(x)$
$\tau > 0, f'(x) > 0$
$\phi'(x) = 1 - \tau * f'(x)$
$\left|1 - \tau * f'(x)\right| < 1$
$-1 < 1 - \tau * f'(x) < 1$
$-2 < -\tau * f'(x) < 0$
$0 < \tau * f'(x) < 2$
$M = maxf'(x)$
$0 < \tau < \frac{2}{M}$
$\tau = \frac{1}{M}$