Множество элементов называется линейным (векторным) пространством, если на этом множестве выполнено 3 условия:

- Введена операция суммы
  $\forall x,y, \in L \quad Z = x+y, z \in L$
- Операция умножения элеменента на число
  $\forall x \in L, \forall \lambda \in R \quad y = \lambda x, y \in L$
- Выполнено 8 аксиом
    1. $x+y = y+x \quad \forall x,y \in L$
    2. $x + (y+z) = (x+y) + 2 \quad \forall x,y,z \in L$
    3. $\exists \theta \in L: \forall x \in L \quad x + \theta = x$
    4. $\forall x \in L \exists (-x) \in L: x + (-x) = \theta$
    5. $\lambda (x+y) = \lambda x + \mu x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
    6. $\lambda \left(\mu x \right) = \left(\lambda \mu \right) x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
    7. $\lambda \left(\mu x \right) = \left(\lambda \mu \right) x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
    8. $1 * x = x \quad \forall x \in L$

$x - y = x + (-y)$ - определение разницы
Нормированное линейное пространство - линейное пространство L, в котором каждому элементу x из L поставлено в соответствие действительное число, называемое **нормой** $||x||$, причём выполняется 3 условия (аксиомы нормы):

1. $\forall x \quad ||x|| \geq 0, ||x|| = 0 \rightarrow x = \theta$
2. $||\lambda x|| = |\lambda| * ||x|| \quad \forall \lambda \in R, \forall x \in L$
3. $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$
   Расстояние между элементами x и y линейного нормированного пространства - норма разности этих элементов
   $\rho(x,y) = ||x-y||$

Нормированное пространство n-мерных векторов

- Кубическая норма
  $||\overline{x}||_\infty = max\{|\overline{x_n}|\} = max\{|x_1|, |x_2|, ... |x_n|\}$
- Октаэдрическая норма
  $||\overline{x}||_1 = \sum_1^i |x_i| = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$
- Сферическая (Евклидова) норма
  $||\overline{x}||_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + ... + |x_n|^2}$
  $\overline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \overline{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{X} - \overline{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
  $\rho(\overline{x}, \overline{y}) = ||x-y|| = \begin{cases} ||x-y||_\infty = 4 \\ ||x-y||_1 = 7 \\ ||x-y||_2 = \sqrt{9+16} = 5 \end{cases}$

Нормы для векторов + нормы для матриц

$\overline{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \quad ||\overline{x}|| = 1$

1. $||\overline{x}||_\infty = 1$:
   $|x_1| = 1 \rightarrow |x_2| \leq 1$
   $|x_2| = 1 \rightarrow |x_1| \leq 1$

   Pasted image 20250215141656%20darkmode.png

2. $||\overline{x}||_1 = |x_1| + |x_2| = 1$
   $\begin{matrix} x_1 + x_2 = 1 \rightarrow & x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \rightarrow & x_1 \geq 0, & x_2 < 0 \\ -x_1 + x_2 = 1 \rightarrow & x_1 < 0, & x_2 \geq 0 \\ -x_1 - x_2 = 1 \rightarrow & x_1 < 0, & x_2 < 0 \end{matrix}$

   Pasted image 20250215143315%20darkmode.png

3. $||\overline{x}||_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = 1$
   $x_1^2 + x_2^2 = 1$

   Pasted image 20250215143549%20darkmode.png

$||\overline{x}||_\infty \leq ||\overline{x}||_2 \leq ||\overline{x}||_1 \leq n * ||\overline{x}||_\infty$
$\overline{X}$ - точное значение вектора
$\overline{x}^*$ - приближённое значение вектора
$\Delta x^* = ||\overline{X} - \overline{x}^*||$
$\delta x = \dfrac{\Delta x}{||\overline{X}||} \quad \delta x^* = \dfrac{\Delta x^*}{||x^*||}$

$A_{m*n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$||A|| = sup \dfrac{||A * \overline{x}||}{||\overline{x}||}, \quad \overline{x} \neq \theta$

1. $||A||_\infty = \max\limits_i \sum_j |a_{ij}|$ (Сумма по строкам)
2. $||A||_1 = \max\limits_j \sum_i |a_{ij}|$ (Сумма по столбцам)
3. $||A||_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}^2|}$

Доказательство бесконечной нормы для матриц + определение погрешностей для матриц

Число обусловленности матрицы A - количественная оценка согласованности матрицы[1]

$A_{m*n} * \overline{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i = 1...m \\ j = 1...n \end{pmatrix}$
$||A\overline{X}||_\infty = \max\limits_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max\limits_i \sum_j |a_{ij}| * |x_j| \leq \max\limits_i \sum_j |a_{ij}| \max\limits_j |x_j| = \max\limits_j |x_j| * \max\limits_i \sum_j |a_{ij}| = ||x||_\infty \max\limits_i \sum_j |a$
чтд

A- точная матрица
A^* - приближённая матрица
$\Delta A^* = ||A - A^*||$
$\delta A = \dfrac{\Delta A^*}{||A||} \quad \delta A^* = \dfrac{\Delta A^*}{||A^*||}$

---

1. Согласованность матрицы - зависимость относительной погрешности результатов от относительной погрешности входных данных↩