

Множество элементов называется линейным (векторным) пространством, если на этом множестве выполнено 3 условия:

- Введена операция суммы
 $\forall x,y, \in L \quad Z = x + y, z \in L$
- Операция умножения элемента на число
 $\forall x \in L, \forall \lambda \in R \quad y = \lambda x, y \in L$
- Выполнено 8 аксиом
 - $x + y = y + x \quad \forall x,y \in L$
 - $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x,y,z \in L$
 - $\exists \theta \in L: \forall x \in L \quad x + \theta = x$
 - $\forall x \in L \exists (-x) \in L: x + (-x) = \theta$
 - $\lambda (x + y) = \lambda x + \lambda y \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
 - $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
 - $\lambda (\mu x) = (\lambda \mu) x \quad \forall x \in L \quad \forall \lambda, \mu \in R$
 - $1 * x = x \quad \forall x \in L$

$x - y = x + (-y)$ - определение разницы

Нормированное линейное пространство - линейное пространство L, в котором каждому элементу x из L поставлено в соответствие действительное число, называемое **нормой** $\|x\|$, причём выполняется 3 условия (аксиомы нормы):

- $\forall x \quad \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \rightarrow x = \theta$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| * \|x\| \quad \forall \lambda \in R, \forall x \in L$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Расстояние между элементами x и y линейного нормированного пространства - норма разности этих элементов

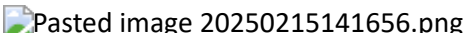
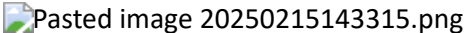
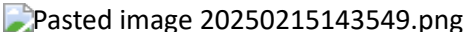
$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

Нормированное пространство n-мерных векторов

- Кубическая норма
 $\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|\bar{x}_n|\} = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|\}$
- Октаэдрическая норма
 $\|\bar{x}\|_1 = \sum_1^i |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$
- Сферическая (Евклидова) норма
 $\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_i |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2}$
 $\bar{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \bar{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{X} - \bar{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$
$$\rho(\bar{x}, \bar{y}) = \|x - y\| = \begin{cases} \|x - y\|_\infty = 4 \\ \|x - y\|_1 = 7 \\ \|x - y\|_2 = \sqrt{9 + 16} = 5 \end{cases}$$

Нормы для векторов + нормы для матриц

$\bar{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_i \end{pmatrix} \quad \|\bar{x}\| = 1$

- $\|\bar{x}\|_\infty = 1$:
 $|x_1| = 1 \rightarrow |x_2| \leq 1$
 $|x_2| = 1 \rightarrow |x_1| \leq 1$

- $\|\bar{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| = 1$
 $x_1 + x_2 = 1 \rightarrow x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$
 $x_1 - x_2 = 1 \rightarrow x_1 \geq 0, x_2 < 0$
 $-x_1 + x_2 = 1 \rightarrow x_1 < 0, x_2 \geq 0$
 $-x_1 - x_2 = 1 \rightarrow x_1 < 0, x_2 < 0$

- $\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2} = 1$
 $x_1^2 + x_2^2 = 1$


$\|\bar{x}\|_\infty \leq \|\bar{x}\|_2 \leq \|\bar{x}\|_1 \leq n * \|\bar{x}\|_\infty$

\bar{X} - точное значение вектора

\bar{x}^* - приближённое значение вектора

$\Delta \bar{x}^* = \|\bar{X} - \bar{x}^*\|$

$\delta x = \frac{\Delta x}{\|\bar{X}\|} \quad \delta x^* = \frac{\Delta x^*}{\|\bar{x}^*\|}$

$A_{m * n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

$\|A\| = \sup \frac{\|A * \bar{x}\|}{\|\bar{x}\|}, \quad \bar{x} \neq \theta$

- $\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$ (Сумма по строкам)
- $\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$ (Сумма по столбцам)
- $\|A\|_2 = \sqrt{\sum_i \sum_j |a_{ij}|^2}$

Доказательство бесконечной нормы для матриц + определение погрешностей для матриц

Число обусловленности матрицы A - количественная оценка согласованности матрицы^{[1](#)}

$A_{m * n} * \bar{X} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} i = 1 \dots m \\ j = 1 \dots n \end{pmatrix}$

$\|A\bar{X}\|_\infty = \max_i \left| \sum_j a_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| * |x_j| \leq \max_i \sum_j |a_{ij}| \max_j |x_j| = \max_j |x_j| * \max_i \sum_j |a_{ij}| = \|x\|_\infty \max_i \sum_j |a_{ij}|$
чтд

A- точная матрица

A^* - приближённая матрица

$\Delta A^* = \|A - A^*\|$

$\delta A = \frac{\Delta A^*}{\|A\|} \quad \delta A^* = \frac{\Delta A^*}{\|A^*\|}$

1. Согласованность матрицы - зависимость относительной погрешности результатов от относительной погрешности входных данных↩