Vina rofita (23-028)

Kelompok 10 : Taufiq Tamlaaa (23-027)
Vina rofita (23-028)
Rahel syalom (23-032)
Lulut wulandari (23-079)

INTERPOLASI LINEAR

1. Interpolasi linear adalah metode yang paling sederhana yang digunakan untuk memperkirakan nilai suatu fungsi diantara 2 nilai yang diketahui. Interpolasi linear merupakan metode yang cocok untuk pencocokan kurva menggunakan polinomial linier. Pada dasarnya, metode interpolasi ~~linter~~ digunakan untuk menemukan nilai baru untuk fungsi apapun menggunakan himpunan nilai tersebut.
Rumus interpolasi linier digunakan untuk peramalan data, prediksi data, aplikasi matematika dan ilmiah dll.

2. Rumus interpolasi linier $(y) = y_1 + (x - x_1)\dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$

dimana :

- x_1 dan y_1 adalah koordinat pertama
- x_2 dan y_2 adalah koordinat kedua
- x adalah titik yg digunakan untuk melakukan interpolasi
- y adalah nilai hasil interpolasi

3. Selesaikan masalah interpolasi kubik dengan data!

Jawab:

Soal. Sebuah sensor mengukur suhu udara (y) setiap jam (x) data yg dikumpulkan adalah sebagai berikut:

Pada jam 0, suhu adalah $y = 5^\circ C$

Pada jam 1, suhu adalah $y = 10^\circ C$

Pada jam 2, suhu adalah $y = 15^\circ C$

Pada jam 3, suhu adalay $y = 23^\circ C$

Perkirakan suhu pada jam 1.5 menggunakan interpolasi kubik.

Step 1. Menentukan bentuk umum interpolasi kubik (metode Newton's Divided difference)

$$f(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + f[x_0, x_1, x_2, x_3](x, x_0)(x - x_1)(x - x)$$

dimana $f[x_i]$ adalah nilai fungsi pada x_i dan $f[x_i, x_j]$ $f[x_i, x_j, x_k]$ dst adalah perbedaan yg terbagi.

Step 2: Membuat tabel selisih terbagi

diket:

$x_0 = 0$, $f(x_0) = 5$

$x_1 = 1$, $f(x_1) = 10$

$x_2 = 2$, $f(x_2) = 15$

$x_3 = 3$, $f(x_3) = 23$

→ Perbedaan terbagi orde 0:

$f(x_0) = 5$

$f(x_1) = 10$

$f(x_2) = 15$

$f(x_3) = 23$

Urutan 1 perbedaan terbagi:

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{10 - 5}{1 - 0} = \frac{5}{1} = 5$$

$$f[x_1, x_2] = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{15 - 10}{2 - 1} = \frac{5}{1} = 5$$

$$f[x_2, x_3] = \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2} = \frac{23 - 15}{3 - 2} = \frac{8}{1} = 8$$

Perbedaan Terbagi orde 2 :

$$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2]}{x_2 - x_0} = \frac{5 - 5}{2 - 0} = \frac{0}{2} = 0$$

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_2, x_3] - f[x_1, x_2]}{x_3 - x_1} = \frac{8 - 5}{3 - 1} = \frac{3}{2} = 1.5$$

Perbedaan Terbagi urutan 3 :

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0} = \frac{1.5 - 0}{3 - 0}$$

$$= \frac{1.5}{3} = 0.5$$

koefisien interpolasi kubik adalah nilai-nilai paling atas dari setiap kolom selisih terbagi :

$f[x_0] = 5$

$f[x_0, x_1] = 10$

$f[x_0, x_1, x_2] = 0$

$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 0.5$

Step 3 : Menyusun interpolasi polinomial kubik

$$P(x) = 5 + 5(x - 0) + 0(x - 0)(x - 1) + 0.5(x - 0)(x - 2)$$

$$P(x) = 5 + 5x + 0.5x(x - 1)(x - 2)$$

$$P(x) = 5 + 5x + 0.5x(x^2 - 3x + 2)$$

No.

Date

$P(x) = 5 + 5x + 0.5x^3 - 1.5x^2 + x$
$P(x) = 0.5x^3 - 1.5x^2 + 6x + 5$

Step 9 : Menentukan nilai pada $x = 1.5$
Suhu pada jam 1.5 di substitusikan $x = 1.5$ kedalam polinomial $P(x)$:
$P(1.5) = 0.5(1.5)^3 - 1.5(1.5)^2 + 6.(1.5) + 5$
$P(1.5) = 0.5(3.375) - 1.5(2.25) + 9 + 5$
$P(1.5) = 1.6875 \cdot 3.375 + 9 + 5$
$P(1.5) = 12.3125$

Jadi, suhu pada jam 1.5 diperkirakan adalah 12.3125 °C

Tugas 3 (Komputasi Numerik)

Rahel syalom (23-032)

DATE. PAGE.

-> M Taufiq 23-027 -> Rahel syalom E 23-032

-> Vina Rofita 23-028 -> Luluk wulandari 23-079

Algoritma Interpolasi Newton (divided differences)

↳ menggunakan metode ini karena cocok mudah diperluas ke derajat lebih tinggi dan mudah pembentukan koefisien.

Perumusan / Penjabaran Formula

↳ Jika kita punya 4 titik $(x_0, y_0), \dots, (x_3, y_3)$, Polinom Interpolasi derajat ≤ 3 boleh ditulis juga sebagai Lagrange

$$P_3(x) = \sum_{i=0}^{3} y_i l_i(x), \quad l_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq 0}} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Newton (divided differences)

Newton Form :

$$P_3(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + a_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

dengan koefisien a_k adalah divided differences :

$$a_0 = F|x_0| = y_0,$$

$$a_1 = F|x_0, x_1| = \frac{F|x_1| - F|x_0|}{x_1 - x_0},$$

DATE. PAGE.

$$a_2 = F|x_0, x_1, x_2| = \frac{F|x_1, x_2| - F|x_0 x_1|}{x_2 - x_0}$$

$$a_3 = F|x_0, x_1, x_2, x_3| = \frac{F|x_1, x_2, x_3| - F|x_0, x_1, x_2|}{x_3 - x_0}$$

Sisa (Remainder) untuk derajat 3 :

$$R_3(x) = \frac{F^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$$

untuk beberapa ξ di interval berisi titik-titik. Jika tau batasan M pada $|F^{(4)}|$, maka

$$|R_{(3)}(x)| \le \frac{M}{24}|(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)|$$

Cubic Interpolation.

Fungsi yang dipilih : $F(x) = \sin x$

titik sampel (4 titik) :

$$(x_0, y_0) = (0.0, \sin = 0) = (0.0, 0.0)$$

$$(x_1, y_1) = (0.5, \sin 0.5) \approx (0.5, 0.479425538604)$$

$$(x_2, y_2) = (1.0, \sin 1.0) \approx (1.0, 0.841470984808)$$

$$(x_3, y_3) = (1.5, \sin 1.5) \approx (1.5, 0.997494986604)$$

DATE. 12/9/25 PAGE.

Luluk Wulandari / 230411100079

Anggota: M. Taufiq 23-027 Rahel Syalom 23-032

Vina Rofita 23-028 Luluk Wulandari 23-079

Interpolasi Polinomial

Intepolasi polinom adalah metode untuk memperkirakan nilai fungsi di antara titik-titik data yang diketahui dengan menggunakan polinom yang melewati semua titik tersebut.

⇒ Penjelasan

Misalkan kita memiliki data titik $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$, di mana $y_i = f(x_i)$. Interpolasi polinom mencari polinom $P_n(x)$ derajat n yang memengaruhi:

$$P_n(x_i) = y_i \quad \text{untuk } i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Polinom ini dapat ditulis dalam umum:

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n,$$

dengan koefisien $a_0, a_1, \ldots, a_n$ yang ditentukan agar polinom melewati semua titik data.

⇒ Rumus Interpolasi Polinom (Metode Lagrange)

Salah satu rumus yang populer yakni :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \cdot L_i(x)$$

dengan

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j},$$

dimana $L_i(x)$ adalah polinom basis Lagrange yang bernilai 1 pada x_i dan 0 pada titik data lain.

Contoh Soal Interpolasi Kubik Polinom

1). Diberikan data titik $(1,2), (2,3), (4,1)$

Tentukan polinom interpolasi derajat yang melewati ketiga titik tersebut.

Penyelesaian:

- Tentukan polinom basis Lagrange $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} = \frac{(x-2)(x-4)}{(-1)(-3)} = \frac{(x-2)(x-4}{3}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)(2-4)} = \frac{(x-1)(x-4)}{1.(-2)} = \frac{(x+1)(x-4)}{-2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{3.2} = \frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

- Bentuk polinom interpolasi

$$P_2(x) = y_0L_0(x) + y_1L_1(x) + y_2L_2(x)$$

$$P_2(x) = 2\cdot\frac{(x-2)(x-4)}{3} - 3\cdot\frac{(x-1)(x-4)}{-2} + 1\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{6}$$

- Sederhanakan polinom (hitung masing-masing suku)

$$2\cdot\frac{(x-2)(x-4)}{3} = \frac{2}{3}(x^2-6x-8) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + \frac{16}{3}$$

$$-3\cdot\frac{(x-1)(x-4)}{2} = -\frac{3}{2}(x^2-5x+4) = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{16}{2}x - 6$$

$$1\cdot\frac{(x-1)(x-2)}{6} = \frac{1}{6}(x^2-3x+2) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$$

- Jumlahkan semua suku

$$P_2(x) = \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6}\right)x^2 + \left(-4 + \frac{15}{2} - \frac{1}{2}\right)x + \left(\frac{16}{3} - 6 - \frac{1}{3}\right)$$

- Hitung koefisien

- koefisien x^2

$$\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} - \frac{9}{6} + \frac{1}{6} = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$$

DATE. PAGE.

Koefisien x

$$-4+\frac{15}{2}-\frac{1}{2}=-4+7{,}5-0{,}5=3$$

Konstanta x

$$\frac{16}{3}-6+\frac{1}{3}=\frac{17}{3}-6=\frac{17}{3}-\frac{18}{3}=-\frac{1}{3}$$

Nilai akhir = $P_2(x) = -\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{2}x-\frac{1}{3}$

2). Diberikan data titik (0,1), (1,3) (2,2), (3,5)
Gunakan interpolasi polinom untuk memperkirakan nilai fungsi pada x = 1,5

Penyelesaian :

- Tentukan polinom basis Lagrange L_0, L_1, L_2, L_3

$$L_0(x)=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(0-1)(0-2)(0-3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(-1)(-2)(-3)}=\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{(1-0)(1-2)(1-3)}=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{1\cdot(-1)(-2)}=\frac{(x-0)(x-2)(x-3)}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{(2-0)(2-1)(2-3)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{2\cdot1\cdot(-1)}=\frac{(x-0)(x-1)(x-3)}{-2}$$

DATE. PAGE.

$$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(3-0)(3-1)(3-2)} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{3.2.1} = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{6}$$

- Bentuk polinom Interpolasi

$$P_3(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + y_2 L_2(x) + y_3 L_3(x)$$

$$P_3(x) = 1 . L_0(x) + 3 . L_1(x) + 2 . L_2(x) + 5 . L_3(x)$$

- Hitung $P_3(1,5)$, masing masing $L_i(1,5)$

$$L_0(1,5) = \frac{(1,5-1)(1,5-2)(1,5-3)}{-6} = \frac{(0,5)(-0,5)(-1,5)}{-6} = -0,0625$$

$$L_1(1,5) = \frac{1,5(1,5-2)(1,5-3)}{2} = \frac{(1,5)(-0,5)(-1,5)}{2} = 0,5625$$

$$L_2(1,5) = \frac{1,5(1,5-1)(1,5-3)}{2} = \frac{1,5(0,5)(-1,5)}{2} = 0,5625$$

$$L_3(1,5) = \frac{1,5(1,5-1)(1,5-2)}{6} = \frac{1,5(0,5)(-0,5)}{6} = 0,0625$$

- Hitung $P_3(1,5)$

$P_3(1,5) = 1.(-0,0625) + 3.0,5625 +$ [redacted]

$2.0,5625 + 5.(-0,0625)$

$= 0,0625 + 1,6875 + 1,125 + 0,3125 = 2,4375$

Perkiraan nilai fungsi $x = 1,5$ adalah $\underline{\underline{2,4375}}$

nama : m taufiq tamlawl mizan
nim : 2304111000 27
kelas : B
matkul : komputasi numerik

nama : rahel syalom nim 23-032
: vina rovita nim 23-008
: luluk wulandari nim 23-079
: m taufiq tamlaul m nim 23-027

1) interpolasi linier

2) jabarkan interpolasi linier
punya 2 titik data (x_0, y_0) dan (x_1, y_1)

- persamaan garis lurus
  $y = mx + c$
  m = gradien
  c = konstanta

- hitung gradien
  gradien antara 2 titik
  $m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$

- subtitusi ke persamaan garis
  $y_0 = mx_0 + c \Rightarrow c = y_0 - mx_0$
  sehingga : $y = mx + y_0 - mx_0$

- Sederhanakan
  Faktor m : $y = y_0 + m(x - x_0)$
  Subtitusi m : $y = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$

Formula
- bagian pertama y_0 → nilai awal
- pecahan $\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$ → kemiringan gradien
- $(x - x_0)$ → seberapa jauh x dari x_0

diketahui titik : (2,4) dan (6,8)
cari y di x = 4

$y = 4 + \frac{8-4}{6-2}(4-2)$

$= 4 + \frac{4}{4}(2) = 4 + 2 = 6$

hasil interpolasi linear di x = 4 adalah y = 6

3) selesaikan masalah interpolasi qubic dengan detail
soal : diberikan 4 titik (0,1), (1,4), (2,15), (3,40)
tentukan polinomial interpolasi qubic P(x) yang lewat keempat titik tersebut

- tabel divided differences (newton)
  - nilai fungsi dasar : $F(x_0) = 1$, $F(x_1) = 4$, $F(x_2) = 15$, $F(x_3) = 40$
  - selisih terbagi orde 1 :

$F(x_0, x_1) = \frac{4-1}{1-0} = 3$

$F(x_1, x_2) = \frac{15-4}{2-1} = \cancel{15}\ 11$

$F(x_2, x_3) = \frac{40-15}{3-2} = 25$

  - selisih terbagi orde 2

$F(x_0, x_1, x_2) = \frac{11-3}{2-0} = \frac{8}{2} = 4$

$F(x_1, x_2, x_3) = \frac{25-11}{3-1} = \frac{14}{2} = 7$

  - selisih terbagi orde 3

$F(x_0, x_1, x_2, x_3) = \frac{7-4}{3-0} = 1$

jadi koefisien newton (di urut dari o ke atas adalah)
$F(x_0) = 1$, $F(x_0, x_1) = 3$, $F(x_0, x_1, x_2) = 4$, $F(x_0, x_1, x_2, x_3) = 1$

- bentuk newton dari polinomial interpolasi
  - polinomial newton derajat ≤ 3:

$$p(x) = F(x_0) + F[x_0, x_1](x - x_0) + F[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_2)$$

masukkan nilai:

$$p(x) = 1 + 3(x-0) + 4(x-0)(x-1) + 1 \cdot (x-0)(x-1)(x-2)$$

sederhanakan: $p(x) = 1 + 3x + 4x(x-1) + x(x-1)(x-2)$

- Perkembangan ke bentuk polinomial standart
  - hitung setiap suku:

$4x(x-1) = 4x^2 - 4x$

$x(x-1)(x-2)$:

$x(x-1) = x^2 - x \rightarrow (x^2-x)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$

jadi

$$\begin{aligned} p(x) &= 1 + 3x + (4x^2 - 4x) + (x^3 - 3x^2 + 2x) \\ &= x^3 + (4x^2 - 3x^2) + (3x - 4x + 2x) + 1 \\ &= x^3 + x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Polinom interpolasi kubiknya: $p(x) = x^3 + x^2 + x + 1$

- cek keempat titik
  - $p(0) = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$
  - $p(1) = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$
  - $p(2) = 8 + 4 + 2 + 1 = 15$
  - $p(3) = 27 + 9 + 3 + 1 = 40$

- contoh penggunaan (nilai di antara titik)

$p(1,5)$

$p(1,5) = (1,5)^3 + (1,5)^2 + 1,5 + 1 = 3,375 + 2,25 + 1,5 + 1 = 8,125$

nilai interpolasi pada $x = 1,5$

SIDU