信号与系统实验报告

名 称：快速傅里叶变换算法探究及应用

学 院：计软智学院

专 业：人工智能专业

学 号：58122310

姓 名：唐梓烨

日期：2024 年 05 月 11 日

一、实验目的

1. 加深对快速傅里叶变换的理解。
2. 熟悉并掌握按时间抽取 FFT 算法的程序编制。
3. 了解应用 FFT 进行信号分析中可能出现的问题，如混淆、泄露等，以便在实际应用中正确应用 FFT。

二、实验任务

1. 完成实验内容全部题目，分析解决调试代码过程中出现的问题。
2. 认真完成本次实验小结，思考快速傅里叶变换的原理和算法及其应用。

三、主要设备、软件平台

1. 硬件：计算机
2. 软件：Matlab

四、实验内容

1. 参照“按时间抽取法 FFT-基 2”算法结构，编写相应的 FFT 程序 *myFFT*()。

实验思路：

参照“按时间抽取法 FFT-基 2”算法结构，对于序列长度为 2 的 n 次幂的信号 x(n)，要实现 FFT，可以先将信号分为奇、偶两个序列

$$\mathrm{x}_1(\mathrm{r}) = \mathrm{x}(2\mathrm{r})$$
$$\mathrm{x}_2(\mathrm{r}) = \mathrm{x}(2\mathrm{r}+1)$$

它们对应的 FFT 的结果是$X_1(k)$和$X_2(k)$

那么 x(n)对应的 FFT 的结果可以表示为

前半部分：

$$X(k) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\mathrm{N}-1} x(n)W_N^{kn} = \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_N^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_N^{(2r+1)k}$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r)W_{\frac{N}{2}}^{2rk} + \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2r+1)W_{\frac{N}{2}}^{(2r+1)k}\,W_N^k$$

$$= \sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_1\ (r)W_{\frac{N}{2}}^{rk} + W_N^k\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1} x_2(r)W_{\frac{N}{2}}^{rk}$$

$$= X_1(k) + W_N^k X_2(k)\ \ \left(0 \le k \le \frac{N}{2}-1\right)$$

后半部分：

$$X\left(k+\frac{N}{2}\right)=\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x_1(r)W_{\frac{N}{2}}^{r\left(k+\frac{N}{2}\right)}+W_N^{\left(k+\frac{N}{2}\right)}\sum_{r=0}^{\frac{N}{2}-1}x_2(r)W_{\frac{N}{2}}^{r\left(k+\frac{N}{2}\right)}$$

$$=X_1(k)-W_N^kX_2(k)\quad\left(0\le k\le\frac{N}{2}-1\right)$$

因此经过逐级分解，分而治之的思想，将长序列依次分为奇序列和偶序列，计算它们的傅里叶变换，再通过旋转因子相组合得出原来序列的傅里叶变换。

myFFT.m 代码：

```
function X = myFFT(x)
N = length(x);
if N == 2
X = [x(1)+x(2), x(1)-x(2)]; % 长度为 2 的序列的傅里叶变换
return;
end
X_even = myFFT(x(1:2:end)); % 处理偶数索引的元素
X_odd = myFFT(x(2:2:end)); % 处理奇数索引的元素
W = exp(-2i * pi * (0:N/2-1) / N); % 计算旋转因子
% 结合结果
X = [X_even + W .* X_odd, X_even - W .* X_odd];
end
```

2. 用所编写的 myFFT()分析信号

$$x(n)=\sin(2\pi f\,nT)[u(n)-u(n-N)],\quad -\infty<n<\infty$$

① 信号频率 $f=50Hz$，采样点数 $N=32$，采样间隔 $T=0.005s$
② 信号频率 $f=50Hz$，采样点数 $N=64$，采样间隔 $T=0.005s$
③ 信号频率 $f=100Hz$，采样点数 $N=32$，采样间隔 $T=0.0025s$
④ 信号频率 $f=1000Hz$，采样点数 $N=32$，采样间隔 $T=0.0012s$
⑤ 将信号④后补全 32 个 0，完成 64 点 FFT

要求：

记录各种情况下的 X(k)值，绘制频谱图并对结果分析讨论，说明参数的变化对信号频谱产生的影响；频谱只需绘制幅度频谱，归一化处理；

程序需提供人机交互模式(控制台/图形窗口均可)；提供是否补零输入选项；提供参数输入功能；

打印 myFFT()源程序，标注相关代码注释。

实验思路：

另外构建一个脚本，构造带 f，T，N 参数的函数，由用户再控制台输入 f，T，N 的值进行 FFT 变换

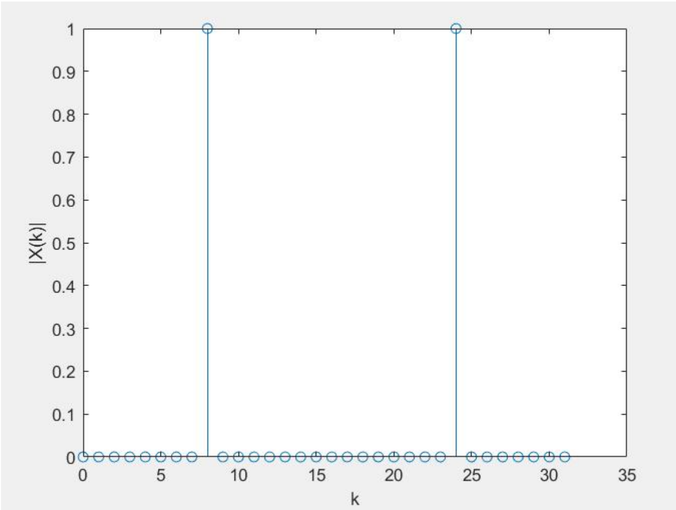
实验代码（Lab2.m）：

```
f = input('输入信号的频率');
N = input('输入采样点数');
T = input('输入采样间隔');
zero = input('输入补零个数（不补零则输入0）');
x1 = x(f, N, T);
if (zero > 0)
x1 = [x1, zeros(1, zero)];
N = N + zero;
end
X = myFFT(x1);
disp(X);
X = abs(X);
X = X/max(X);
freq=(0:N-1);

% 绘制频谱
figure;
stem(freq, X) % 使用 stem 来显示离散点

xlabel('k')
ylabel('|X(k)|')

function u = u(n)
if (n >= 0)
u = 1;
else
u = 0;
end
end

function x = x(f, N, T)
n = (0:N-1);
x = sin(2*pi*f*n*T)*(u(n) - u(n - N));
end
```

实验结果：

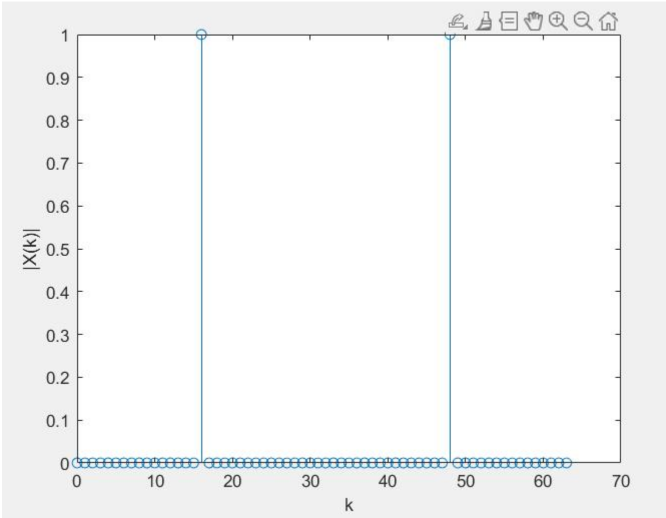
①　信号频率 $f = 50Hz$，采样点数 $N = 32$，采样间隔 $T = 0.005s$

```
>> lab2
输入信号的频率50
输入采样点数32
输入采样间隔0.005
输入补零个数（不补零则输入0）0
  列 1 至 7

  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i

  列 8 至 14

   0.0000 - 0.0000i   0.0000 -16.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i

  列 15 至 21

   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i

  列 22 至 28

   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 +16.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i

  列 29 至 32

  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i
```



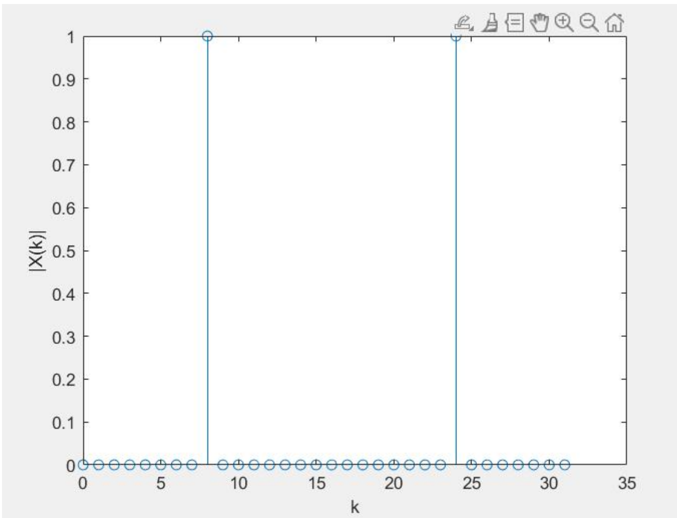
②　信号频率 $f = 50Hz$，采样点数 $N = 64$，采样间隔 $T = 0.005s$

```
>> lab2
输入信号的频率50
输入采样点数64
输入采样间隔0.005
输入补零个数（不补零则输入0）0
  列 1 至 7

  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i

  列 8 至 14

  -0.0000 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i

  列 15 至 21

  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 -32.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i
```



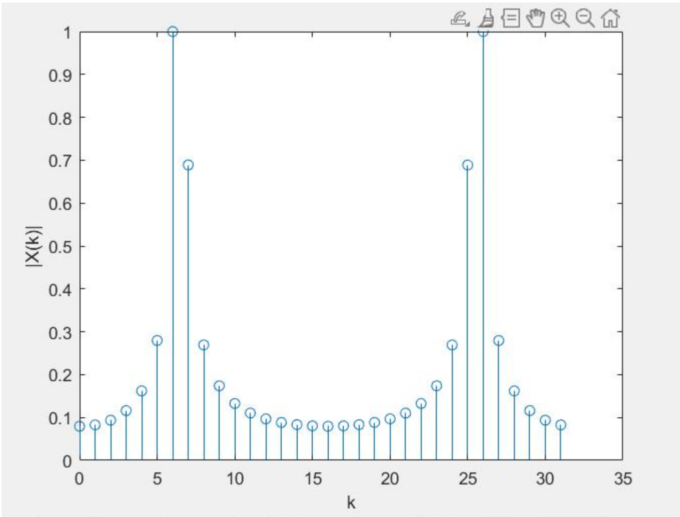
③ 信号频率 $f = 100Hz$，采样点数 $N = 32$，采样间隔 $T = 0.0025s$

```
>> lab2
输入信号的频率100
输入采样点数32
输入采样间隔0.0025
输入补零个数（不补零则输入0）0
  列 1 至 7

  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i

  列 8 至 14

   0.0000 - 0.0000i   0.0000 -16.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i

  列 15 至 21

   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i

  列 22 至 28

   0.0000 - 0.0000i  -0.0000 - 0.0000i   0.0000 - 0.0000i   0.0000 +16.0000i   0.0000 + 0.0000i  -0.0000 + 0.0000i   0.0000 + 0.0000i
```



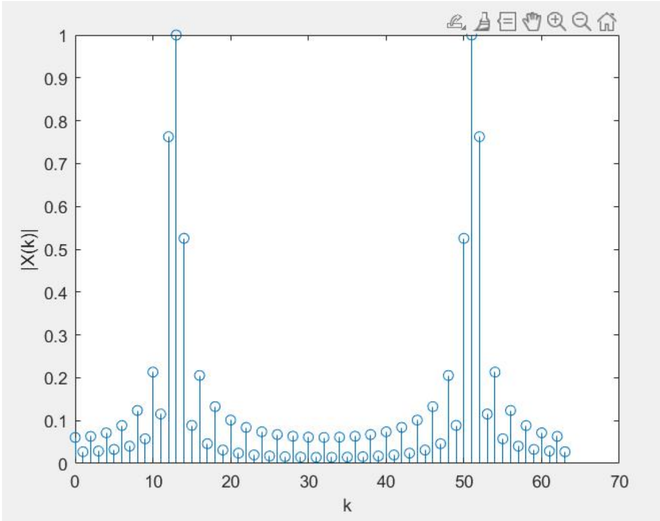
④ 信号频率 $f = 1000Hz$，采样点数 $N = 32$，采样间隔 $T = 0.0012s$

```
>> lab2
输入信号的频率1000
输入采样点数32
输入采样间隔0.0012
输入补零个数（不补零则输入0）0
  列 1 至 7

   0.9511 + 0.0000i   0.9867 - 0.0854i   1.1052 - 0.1829i   1.3526 - 0.3125i   1.8670 - 0.5220i   3.1952 - 0.9911i  11.3836 - 3.6858i

  列 8 至 14

  -7.8447 + 2.5301i  -3.0777 + 0.9511i  -2.0004 + 0.5718i  -1.5376 + 0.3925i  -1.2889 + 0.2826i  -1.1405 + 0.2045i  -1.0482 + 0.1432i

  列 15 至 21

  -0.9916 + 0.0912i  -0.9608 + 0.0445i  -0.9511 + 0.0000i  -0.9608 - 0.0445i  -0.9916 - 0.0912i  -1.0482 - 0.1432i  -1.1405 - 0.2045i

  列 22 至 28

  -1.2889 - 0.2826i  -1.5376 - 0.3925i  -2.0004 - 0.5718i  -3.0777 - 0.9511i  -7.8447 - 2.5301i  11.3836 + 3.6858i   3.1952 + 0.9911i
```



⑤ 将信号④后补全 32 个 0，完成 64 点 FFT

```
>> lab2
输入信号的频率1000
输入采样点数32
输入采样间隔0.0012
输入补零个数（不补零则输入0）32
  列 1 至 7

   0.9511 + 0.0000i   0.4262 + 0.0420i   0.9867 - 0.0854i   0.4341 + 0.1317i   1.1052 - 0.1829i   0.4524 + 0.2418i   1.3526 - 0.3125i

  列 8 至 14

   0.4896 + 0.4018i   1.8670 - 0.5220i   0.5730 + 0.6982i   3.1952 - 0.9911i   0.8532 + 1.5962i  11.3836 - 3.6858i  -4.5543 -15.0135i

  列 15 至 21

  -7.8447 + 2.5301i  -0.1365 - 1.3862i  -3.0777 + 0.9511i   0.0708 - 0.7186i  -2.0004 + 0.5718i   0.1424 - 0.4693i  -1.5376 + 0.3925i
```



分析参数的变化对信号频谱产生的影响：

f, N, T 整体的变化可能会影响频谱是否产生混叠。其本质原因是采样频率应不低于最高频率的两倍。如果连续信号不是带限信号或者采样频率低于采样定理的要求，再将连续信号离散化时会发生信号频谱的混叠现象，此时再对采样所得的信号进行 DFT 运算，就等效于在频域对混叠之后的频谱进行采样，其结果不能反映原来信号的频谱。

如①②信号中大角频率为 $2\pi f = 100\,\pi$，采样频率为$\frac{2\pi}{T} = 400\pi$，满足奈奎斯特采样定理。③信号中最大角频率为 $2\pi f = 200\pi$，采样间隔为$\frac{2\pi}{T} = 400\pi$，满足奈奎斯特采样定理。④⑤信号最大角频率为 $2\pi f = 2000\pi$，采样间隔为$\frac{2\pi}{T} = \frac{5000\pi}{3}$，采样频率不满足奈奎斯特采样定理，出现混叠现象。这导致了④⑤信号的频谱与①②③信号不同的本质原因。

而在满足奈奎斯特采样定理的前提下，只改变采样频率对 DFT 的频谱形状没有影响。

改变补零个数对频谱的影响：

对比④⑤的频谱可以得知，补零可以提高频率分辨率从而使得频谱图中相邻的频率成分更加分离，更容易区分。在图中体现为频谱中采样的点变多，采样也更不会采到幅度为 0 的点。补零实际上在频谱上进行了插值，使得频谱看起来更平滑。这种插值是在频域中的线性插值，它不会增加信号中的任何新信息，但可以使得频谱曲线更加细腻，便于观察和分析。补零可以在一定程度上改善由于非周期信号产生的频谱泄露现象。频谱泄露是由于在 FFT 计算中，信号被假设为周期性的，如果信号的周期不完整，则会在其频谱中引入额外的频率成分。通过补零，虽然不能消除频谱泄露，但可以使得这种效应在更细的频率刻度上分布，有时使得主要频率成分更加突出。

改变采样长度 N 对频谱影响：

对比①②的频谱可以得知，增加采样序列长度 N 会直接提高 FFT 的频率分辨率，即能够更精细地区分两个接近的频率成分。频率分辨率由$\frac{N}{F_s}$确定，其中 F_s 是采样频率。因此，增加 N 会减小这个分辨率值，使得频谱上相邻的频率点更密集，从而更容易识别和分析信号中接近的频率成分。更长的数据序列提供了更多的信息，使 FFT 能够更精确地计算各频率成分的幅度和相位。

保持 f 和 T 的比例不变时，改变 f 对频谱的影响：

对比①③的频谱可以得知，在这种情况下要进行 FFT 的信号序列其实是在时间轴上进行了缩放，因为 N 没有改变，这使得信号的频率成分在频谱中的绝对位置将保持不变，两个信号的基本形态在频谱中的表现将相似，但由于采样频率的改变，频谱图也会在频率轴上进行缩放。

五、实验小结

通过实现 myFFT() 和绘制 FFT 频谱图，我深入理解 FFT 的工作原理，特别是时间抽取法的细节。在这个实验中，控制输入信号的参数和补零个数，可以直观地看到这些因素如何影响频谱的。再通过对这些频谱图的分析，加深了我对 DFT 中的频谱混叠现象，频谱泄露问题和频谱分辨率等概念的理解。此外，该实验也展示了 FFT 在信号处理中如何快速有效地转换时间域信号到频域，以及这种转换的实际应用价值，FFT 算法是将所学的信号时域——频域转换运用到计算机上的前提和桥梁。