1.（凸函数的）基本性质和例子

* **定义**

如果是凸集，且对于任意和任意，有



那么函数是**凸函数**。

函数是凸的，当且仅当其在与其定义域相交的任何直线上都是凸的。即函数是凸的，当且仅当对于任意和任意向量，函数是凸的（其定义域为）

* **拓展值延伸**

如果是凸函数，我们定义它的拓展值延伸如下



这种延伸可以简化符号描述，此时我们就不需要明确描述定义域了。

* **一阶条件**

假设可微，则是凸函数的充要条件为是凸集，且对于任意的



由得出的仿射函数即为函数在点附近的一阶泰勒近似。上式表明，对于凸函数，其一阶近似实质上是原函数的一个**全局下估计**。反之，如果某个函数的一阶泰勒近似总是其全局下估计，那么这个函数是凸的。

一阶条件说明了凸函数的**局部信息**（某点的函数值及导数）能够反映一些**全局信息**（如全局下估计）。

* **二阶条件**

现在假设函数二阶可微，则是凸函数的充要条件是，其海森矩阵是半正定的，即对于所有的，有



* 例子

1. 指数函数。对于任意，函数在上是凸的。
2. 幂函数。或时，在上是凸函数；时，在上是凹函数。
3. 绝对值幂函数。时，在上是凸函数。
4. 对数函数。函数在上是凹函数。
5. 负熵。函数在其定义域上是凸函数。

下面给出几个上的例子。

1. 范数。上的任意范数均为凸函数。
2. 最大值函数。在上是凸的。
3. 二次-线性分式函数。，其定义域为是凸函数。
4. 指数和的对数。在上是凸的。
5. 几何平均。在上是凸函数。
6. 对数-行列式。在上是凹函数。

* **下水平集**

函数的**α-下水平集**为



由凸集的定义很容易证明：对于任意，凸函数的下水平集仍然是凸集。但反之不一定正确。

同理，凹函数的上水平集仍然是凸集。

* **上境图**

函数的图像定义为



它是空间的一个子集。函数的**上境图**定义为



它也是空间的一个子集。一个函数是凸函数，当且仅当其上境图是凸集。

类似地，一个函数是凹函数，当且仅当其**亚图**



是凸集。

* **Jensen不等式及其拓展**

基本不等式



有时也被称作Jensen不等式。考虑凸集时，此不等式可以拓展至无穷项和、积分以及期望。例如，如果在上且，则相应积分存在时，下式成立



拓展到更一般的情况，如果是随机变量，事件发生的概率为1，函数是凸函数，当相应的期望存在时，我们有



不等式

许多不等式都可以由凸性和Jensen不等式导出。比如凸函数应用Jensen不等式并取，可得



两边取指数即可得算数-几何平均不等式：。

2.保凸运算

* **非负加权求和**

显而易见，如果是凸函数且，则也为凸函数。如果和是凸函数，则也是凸函数。

这个性质可以拓展至无限项的求和以及积分的情形。例如，如果固定任意，函数关于是凸函数，且对任意有，则函数



关于是凸函数。

* **复合仿射映射**

假设函数，，以及，定义为



其中。若是凸函数，则是凸函数。

* **逐点最大和逐点上确界**

如果和是凸函数，则他们二者的逐点最大函数



定义域为，仍然是凸函数。同理，如果函数是凸函数，那么他们的逐点最大函数



仍然是凸函数。

逐点最大的性质可以拓展至无限个凸函数的逐点上确界。如果对于任意，函数关于都是凸函数，则



关于也是凸的。

从上镜图的角度理解，一系列函数的逐点上确界函数对应着这些函数上境图的交集，凸集的交集仍然是凸集，因此逐点上确界函数是凸函数。

表示成一组仿射函数的逐点上确界

如果一个函数能被表示为一组仿射函数的逐点上确界，那么它是凸函数。反过来说，几乎所有的凸函数都可以表示成一组仿射函数的逐点上确界。

* **复合**

给定函数以及，定义复合函数为



标量复合

考虑的情况。复合规则为：

1. 如果是凸函数且非减，是凸函数，则是凸函数
2. 如果是凸函数且非增，是凹函数，则是凸函数
3. 如果是凹函数且非减，是凹函数，则是凹函数
4. 如果是凹函数且非增，是凸函数，则是凹函数

其中表示函数的拓展值延伸。

矢量复合

考虑的情况，此时。复合规则为：

* 1. 如果是凸函数且在每一维分量上非减，是凸函数，则是凸函数
  2. 如果是凸函数且在每一维分量上非增，是凹函数，则是凸函数
  3. 如果是凹函数且在每一维分量上非减，是凹函数，则是凹函数
  4. 如果是凹函数且在每一维分量上非增，是凸函数，则是凹函数
* **最小化**

如果函数关于是凸函数，集合是非空凸集，定义函数



若存在某个使得，则函数关于是凸函数。

* **透视函数**

给定函数，则的透视函数定义为



其定义域为。

透视运算是保凸运算：如果是凸函数，则其透视函数也是凸函数。

3.共轭函数

* **定义**

设函数，定义其**共轭函数**为



使得差值在有上界的所有构成共轭函数的定义域。可见共轭函数是一系列仿射函数的逐点上确界，因此是凸函数。

* 基本性质

Fenchel不等式

从共轭函数的定义可以得到，对任意和，如下不等式成立



共轭的共轭

凸函数的共轭函数的共轭函数是原函数。

可微函数

可微函数的共轭函数亦称为函数的Legendre变换。设是凸函数且可微，其定义域为，使取最大的满足。因此如果，有



所以，给定任意，可以求解梯度方程，从而得到处的共轭函数。

伸缩变换和复合仿射变换

设非奇异，，则函数的共轭函数为



独立函数的和

如果函数和都是凸函数，那么

