#### 1.仿射集合和凸集

* **直线**

设是空间中两点，那么具有下列形式的点



组成一条穿越和的**直线**。

* **仿射集合**

如果通过集合**中任意两个不同点的直线仍然在集合*C*中，则称集合*C*是**仿射**的。也即对于及有。

推广到多个点情况，如果，则称具有形式的点为的**仿射组合**。我们可以归纳出结论：一个仿射集合包含其中任意点的仿射组合。

* **仿射包**和**仿射维数**

一个集合*C*的所有仿射组合组成其**仿射包**，记为。我们定义集合的**仿射维数**为其仿射包的维数。

* **相对内部**

定义集合*C*的**相对内部**为的内部，记为。即：



* **凸集**

若集合*C*中任意两点间的线段仍然在*C*中，则*C*成为**凸集**。即对于任意和满足的都有：



从定义可知，如果集合是仿射的，那么一定是凸的。反之则不一定。

如果，则称具有形式的点为的**凸组合**。与仿射集合类似，一个集合是凸集等价于集合包含其中所有点的凸组合。

* **凸包**

我们称集合*C*中所有点的凸组合的集合为其**凸包**，记为。凸包总是凸的，并且它是包含*C*的最小的凸集。

凸组合的概念可以拓展到无穷级数、积分以及大多数形式的概率分布。比如，对于凸集*C*，对任意都有且时，有。更一般的情况为：对于凸集*C* ，*x*为随机变量，并且的概率为1，那么。

* **锥**

若对任意和都有，我们称集合*C*是**锥**或者**非负齐次**。若集合*C*是锥且凸，则称*C*为凸锥。

类似仿射组合和凸组合的定义，可以定义**锥组合**（或**非负线性组合**）。**锥包**即集合的所有锥组合的集合。

#### 2.重要的例子

* 空集、任意一个点（即单点集）、全空间都是的仿射子集。
* 任意直线是仿射的。如果直线通过零点，则是子空间、凸锥。
* 一条线段是凸的，但不是仿射的（除非退化成一个点）。
* 一条射线是凸的，但不是仿射的。如果射线的基点是0，则它是凸锥。
* 任意子空间是仿射的、凸锥。
* **超平面**是仿射的。一个超平面划分出的两个半空间是凸的，但不是仿射的。
* Euclid球和椭球是凸的。**椭球**的定义为，其中*P*是对称正定矩阵。
* **范数球**是凸的。**范数锥**是凸锥。

例：**二阶锥**是有Euclid范数定义的范数锥，即



二阶锥也被称为**二次锥**、**Lorentz锥**或**冰淇淋锥**。

* **多面体**是凸集。**多面体**被定义为有限个线性等式和不等式的解集：



因此多面体是有限个半空间和超平面的交集。仿射集合、射线、线段和半空间都是多面体。多面体定义式可以用紧凑表达式：



其中

，

* 对称半正定矩阵的集合是半正定凸锥。

#### 3.保凸运算

* **交集**

交集运算是保凸的，且可以拓展到无穷个集合的交。

* **仿射函数**

若函数是一个线性函数和一个常数的和，则该函数是**仿射**的。即仿射函数具有的形式，其中，。假设是凸的，则仿射函数的像是凸的。类似的有在仿射函数下的原象是凸的。

* **透视函数**

我们定义，为**透视函数**，其定义域为。透视函数对向量规范化，使得最后一维分量为1并舍弃之。透视函数是保凸的，一个凸集在透视函数下的原象也是凸的。

* **线性分式函数**

**线性分式函数**由**透视函数**和**仿射函数**复合而成。设是仿射的，即



其中，，，并且。则由给出的函数



称为**线性分式**（或**投射**）**函数**。线性分式函数也是保凸的。

#### 4.广义不等式

* **正常锥**和**偏序关系**

如果锥是凸的、闭的、实的（具有非空内部）、尖的（不包含直线），则称为**正常锥**。正常锥可以用来定义广义不等式，即上的**偏序关系**。用正常锥可以定义上的偏序关系如下



注意，一个集合中的所有元素两两之间不一定都能用偏序关系比较。如果所有元素两两之间都能用比较，则称这个集合在是**全序**的。

类似地，定义相应的严格偏序关系为



* **最小元**与**极小元**

如果对于每个，均有，则称*x*是*S*的**最小元**。如果最小元存在，那么就唯一。注意，最小元的定义暗示了当最小元存在时*S*中的每个元素都可以用序关系相互比较。

如果，可以推得，则称*x*是*S*上的**极小元**。一个集合可以有多个极小元。注意，*x*在可以比较的所有元素中最小。

时导出的序关系实际上就是上的，此时所有任意两点都是可比的，极小和最小的概念是一致的。

#### 5.分离与支撑超平面

* **超平面分离定理**

假设*C*和*D*是两个不相交的凸集，那么存在和使得对于所有有，对于所有有。超平面称为集合*C*和*D*的**分离超平面**。

* **支撑超平面**

设而是其边界上的一点，如果并且对任意满足，那么称超平面为集合在点处的**支撑超平面**。

**支撑超平面定理**：对于任意非空的凸集和任意边界上一点，在处存在的支撑超平面。

#### 6.对偶锥与广义不等式

* **对偶锥**

令为一个锥，集合称为*K*的对偶锥。也是一个锥，并且它总是凸的，即使*K*不是凸锥。

对偶锥满足的性质：

1. 是闭凸锥
2. 可导出
3. 如果有非空内部，那么是尖的（不包含直线）。
4. 如果的闭包是尖的，那么有非空内部。
5. 是的凸包和闭包。如果是凸且闭的，那么。

* **广义不等式的对偶**

假设凸锥是正常锥，可以导出一个偏序关系。其对偶锥也是正常锥，也能导出一个偏序关系。我们称为为的对偶。

广义不等式及其对偶的重要性质：

1. 当且仅当对于任意有。
2. 当且仅当对于任意和有。

* **对偶不等式定义的最小元和极小元**

最小元的对偶性质：是上关于的最小元的充要条件是，对于所有，是在上极小化的唯一最优解。

极小元的对偶性质：如果并且在极小化，那么是极小的。但其逆命题在一般情况不成立，只有是凸集时逆命题成立。