#### 1.优化问题

* **基本术语**

我们用



描述**优化问题**。我们称为**优化变量**，称函数为**目标函数**或**费用函数**。不等式称为**不等式约束**，称为**等式约束**。如果问题没有约束，称为无约束问题。

对目标和所有约束函数有定义的点的集合



称为优化问题的**定义域**。当点满足不等式和等式约束条件时，是**可行**的。当问题至少有一个可行点时，我们称问题为可行的，否则称为不可行。所有可行点的集合称为**可行集**或**约束集**。

我们允许优化问题的最优值取值为。如果问题不可行，我们有。如果存在可行解满足：当时，，那么并且我们称优化问题无下界。

最优点与局部最优点

如果是可行的并且，我们称为**最优点**，或解决了优化问题。所有的最优解集合称为最优集。

如果问题存在最优解，我们称最优值是**可得**或**可达**的，称问题**可解**。如果最优集是空集，我们称最优值是不可得或不可达的。满足（其中）的可行解称为**ε-次优**。所有ε-次优解的集合称为优化问题的ε-次优集。

如果存在，使得是关于的优化问题



的解，我们称可行解为**局部最优**。这意味着在可行集内的一个点的周围极小化了。

可行性问题

可行性问题可以写为



用来判断约束是否一致。若是，则能找到一个满足它们的点。

* **问题的标准表示**

我们称



为优化问题的标准形式。在标准形式问题中，我们按照惯例设不等式和等式约束的右端为零。

极大化问题

极大化问题可以通过在同样的约束下极小化来求解。当考虑极大化问题时，目标函数有时又称为**效用**或**满意度**而不是费用。

* **等价问题**

我们非正式地使用优化问题等价的概念。如果从一个问题的解，很容易得到另一个问题的解，并且反之亦然，我们称两个问题是**等价**的。

变量变换

通过如（一一映射）的变量变换或变量代换得到的新问题与原问题等价。

目标函数和约束函数的变换

函数变换后若对优化变量的约束效果相同，那么可行集相同，最优解也相同，新问题和原问题等价。

松弛变量

通过观察可以得到一个简单的变换，即等价于存在一个满足。利用这个变换，我们可以得到等价问题



消除等式约束

如果我们可以用一些参数来显式地参数化等式约束



的解，那么我们可以从原问题中消除等式约束。比如，满足上式等价于存在一些使得，那么优化问题



与原问题等价。

消除线性等式约束

如果等式约束均是线性的，即，那么可以写出其通解，形式为，将其带入原问题，可以得到新的等价问题。

引入等式约束

典型例子：对于问题



引入新的变量，从而构造等价问题



优化部分变量

我们总有



换言之，我们总可以通过先优化一部分变量再优化另一部分变量来达到优化一个函数的目的。这个原则可以将问题转换为其等价形式。

上境图问题形式

标准问题的上境图形式为



其优化变量为及。是最优解当且仅当是标准问题的最优解并且。

隐式与显式约束

我们可以通过改变定义域将任何约束隐式地表达在目标函数中，但这种做法不会给问题的分析和求解带来任何好处。有时我们会碰到含有隐式约束的问题，对此我们可以将其显式化。

#### 2.凸优化

* **标准形式的凸优化问题**

**凸优化问题**是形如



的问题，其中为凸函数。对比一般的标准形式优化问题，凸优化问题有三个附加的要求：

1. 目标函数必须是凸的
2. 不等式约束函数必须是凸的
3. 等式约束函数必须是仿射的

凸优化的可行集也是凸的，因此我们是在一个凸集上极小化一个凸的目标函数。

凹最大化问题

如果目标函数是凹的而不等式约束函数是凸的，这个凹最大化问题可以简单地通过极小化凸目标函数得以求解。

凸优化问题的抽象形式

有时优化问题的可行集和目标函数是凸的，但等式约束不是仿射的，或者不等式约束不是凸的。有些作者用**抽象的凸优化问题**这一概念来描述在凸集上极小化凸函数的问题。但我们严格定义凸优化问题必须满足凸优化问题的标准形式，而这种抽象的凸优化问题不是凸优化问题。为求解抽象的在图集上极小化凸函数的问题，我们需要用一组凸的不等式和线性等式约束来表示其集合，这一般是不复杂的。

* **局部最优解与全局最优解**

凸优化的一个基础性质是其任意局部最优解也是全局最优解。

可微函数的最优性准则

设凸优化问题的目标函数是可微的，对于所有的有



令表示其可行集。那么，是最优解，当且仅当且



无约束问题

对于无约束问题，最优解的充要条件简化为



只含等式约束的问题

考虑只含等式约束而没有不等式约束的问题



可行解的最优性条件为，对任意满足的



都成立。因为可行，每个可行解都可以写作的形式，其中（零空间定义：）因此，最优性条件可以表示为



如果一个线性函数在子空间中非负，则它在子空间上必恒等于零。因此对任意，有，换言之



利用（零空间与行空间互为正交补），最优性条件可以表示为，即存在，使得



同时考虑的要求（即要求可行），这是经典的Lagrange乘子最优性条件。

非负象限中的极小化

考虑问题



于是最优性条件为



当时才有下界（且下界为0），此时要使条件满足则需要，可见必有。又因为求和式中的每个分量都大于等于0，所以每个分量都等于0。因此，最优性条件最终可以表示为



最后一个条件称为**互补性**。

* 等价的凸问题

消除等式约束

一个凸问题的等式约束可以通过寻找一个特解和域为的零空间的矩阵来消除这些等式约束，从而得到关于的问题。



但很多情况下，消除等式约束会使得问题更难理解和求解，甚至使得求解它的算法失效，因此最好在问题中保留等式约束。

引入等式约束

我们可以在凸优化问题中引入新的变量和等式约束，前提是等式约束是线性的，所得的优化问题仍然是凸的。

松弛变量

通过引入松弛变量，我们可以替换**线性不等式**得到新的等式约束而保持问题的凸性不变。注意，替换后新的等式约束必须是仿射的才是凸问题，所以须为仿射的。

上境图问题形式

凸优化问题的上境图形式为



任何凸优化问题都可以轻易地转化为具有线性目标函数的问题，因此有时也称线性目标函数对凸优化问题是**普适的**。

极小化部分变量

极小化凸函数的部分变量将保持凸性不变。

* 拟凸优化

略。

#### 3.线性规划问题

当目标函数和约束函数都是仿射时，问题称作**线性规划**（**LP**）。一般的线性规划具有以下形式：



其中目标函数的常数项常常被省略。

线性规划的标准形式和不等式形式

线性规划的两种特殊情况已经被广泛深入地研究，以至于分别被赋予了特殊的名称。在**标准形式线性规划**中仅有的不等式都是分量的非负约束



如果线性规划问题没有等式约束，则称为**不等式形式线性规划**，常写作



将线性规划转换为标准形式

将一般形式的线性规划转化为标准形式需要两步。第一步是为不等式引入松弛变量，得到



第二步是将变量表示为两个非负变量的差，即，从而得到问题



其优化变量是。

#### 4.二次优化问题

当凸优化问题的目标函数是（凸）二次型并且约束函数为仿射时，该问题称为**二次规划**（**QP**）。二次规划可以表述为



其中。

如果不仅目标函数，其不等式约束也是（凸）二次型，如



其中。这一问题称为**二次约束二次规划**（**QCQP**）。

线性规划是二次规划的特例，二次规划是二次约束二次规划的特例。

* 二阶锥规划

一个与二次规划紧密相关的问题是**二阶锥规划**（**SOCP**）



当时，SOCP等同于QCQP。因此QCQP是SOCP的特例。

#### 5.几何规划

* **单项式与正项式**

函数，定义为



其中，。它被称为**单项式函数**或简称为**单项式**。单项式的和，即具有下列形式的函数称为**正项式函数**，或简称为**正项式**



其中。

* **几何规划**

具有下列形式的优化问题



被称为**几何规划**（**GP**），其中为正项式，为单项式。这个问题的定义域为；约束是隐式的。

* **凸形式的几何规划**

几何问题（一般）不是凸优化问题，我们可以用定义变量，通过变量代换转换为凸问题。

#### 6.广义不等式约束

将不等式约束函数拓展为向量并使用广义不等式，可以得到标准形式凸优化问题的一个非常有用的推广



其中，为正常锥，为Ki-凸的。我们称此问题为（标准形式的）**广义不等式意义下的凸优化问题**。

常规凸优化问题问题的很多结论对于广义不等式下的问题也是成立的。下面是一些例子

1. 可行集，任意下水平及和最优集都是凸的。
2. 任意局部最优解都是全局最优的。
3. 4.2节中给出的对于可微函数的最优性条件不加改变地成立。

广义不等式约束下的凸优化问题常常可以简单地按照常规凸优化问题进行求解。

* **锥形式问题**

在广义不等式的凸优化问题中，最简单的是**锥形式问题**（或称为**锥规划**），它有线性目标函数和一个不等式约束函数，该函数是仿射的（因此是K-凸的）



当是非负象限时，锥形式问题退化为线性规划。我们可以将锥形式问题视为线性规划的推广。

按照线性规划，我们称锥形式问题



为标准形式的锥形式问题。类似地，问题



称为不等式形式的锥形式问题。

* **半定规划**

当为，即半正定矩阵（为元素构成的）锥时，相应的锥形式问题称为**半定规划**（**SDP**），并具有如下形式



其中，，。

如果矩阵都是对角阵，那么线性矩阵不等式（LMI）等价于个线性等式约束，SDP退化为线性规划。

标准形式和不等式形式的半定规划

仿照线性规划的分析，**标准形式的SDP**具有对变量的线性等式约束和（矩阵）非负约束



**不等式形式的SDP**不含有等式约束但具有一个LMI



多LMI与线性不等式

对于具有线性目标，等式、不等式约束及多个LMI约束的问题



我们仍然称其为SDP。从单个LMI和线性不等式可以构造具有大的对角块的LMI，从而可以容易地将这样的问题转换为一个SDP

