**Nom, Prénom:**

23 pts **Note:** 5.1

# Travail écrit de statistiques, classe T-2a / T-2f, 23.01.2017

**Dans tous les exercices, il est demandé d'écrire les détails des calculs et des phrases contenant les idées de résolution. Une solution non développée sera considérée comme fausse. Simplifiez vos résultats lorsque c'est possible. Veuillez répondre directement sur la feuille de données. La machine peut être utilisée pour les opérations de base.**

8

1. (8 points) Le volume de shampoing injecté (en ml) dans un tube est modélisé par une variable aléatoire $V$ de loi uniforme sur l'intervalle $[374; 380]$.

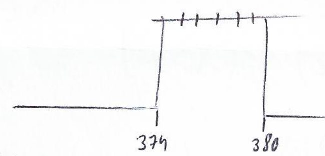
   (a) Déterminer la densité $f(x)$ de $V$ pour $x = 350$, $x = 375$ et $x = 385$.

   (b) Déterminer $P(V < 370)$, $P(V > 376)$ et $P(V < 380)$.

   (c) Déterminer $E(V)$ et $\mathrm{Var}(V)$.

   (d) Déterminer le volume $v$ tel que l'on peut dire: 95% des tubes contiennent au moins $v$ ml de shampoing.

$f(350) = 0$ $\quad f(375) = \frac{1}{6}$ $\quad f(385) = 0$




$P(V<370) = 0\%$ $\quad P(V>376) = \frac{4}{6}$ $\quad P(V<380) = \frac{5}{6}$ (1)

$E(V) = \frac{374+380}{2} = 377$ $\quad \mathrm{Var}(V) = \frac{(380-374)^2}{12} = 3$

d) $374 = 100\%$
$380 = 0\%$
$x = 95\%$
$\hookrightarrow x = \frac{95 \cdot 374}{100} = 355,3$

$100 = 6$
$95 = x = \frac{6 \cdot 95}{100} = 5,7$

95% des champoing contiennent

6

2. (6 points) Le temps entre deux appels reçus dans une centrale téléphonique est modélisé par une variable aléatoire $X$ de loi exponentielle. On a observé que le temps moyen entre deux appels est d'environ 15 minutes.

   (a) Si l'on veut que la moyenne observée soit égale à l'espérance de la variable, comment choisir le paramètre $\lambda$ de la loi exponentielle?

   (b) Que vaut la variance de $X$?

   (c) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait pas d'appel durant 15 minutes ?

   (d) Quelle est la probabilité que ce temps entre deux appels soit plus petit ou égal à 5 minutes?

   (e) Je raccroche le téléphone à 16h00. Sachant qu'il n'y a pas eu d'appels jusqu'à 16h04, quelle est la probabilité que le téléphone reste silencieux en tout cas jusqu'à 16h10?

a) $E(X) = 1/15\,m \Rightarrow \lambda = \frac{1}{15} = 0{,}0\overline{6}$ ✓

b) $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = 225$ ✓

c) $P(X>15) = e^{-\lambda t} = e^{-0.0\overline{6}\cdot 15} = 0{,}367 = 36{,}7\%$ ✓

d) $P(X\leq 5) = 1 - P(X>5) = e^{-0.0\overline{6}\cdot 5} = 28{,}3\%$ ✓

e) $P(X>6) = e^{-0.0\overline{6}\cdot 6} = 67\%$ ✓

4 3. (7 points) Des défauts surgissent sur des plaques en plastique. Pour une seule plaque, le nombre de défaut est modélisé par une variable aléatoire $D$ qui suit une loi de Poisson avec une espérance de 0.02 défaut.

2 (a) Comment choisir le paramètre de la loi de Poisson pour que l'espérance coïncide avec la moyenne observée? Avec cette valeur de $\lambda$, que vaut $\text{Var}(D)$?

1 (b) Si je considère $n$ plaques ($n > 1$) indépendantes et de même nature, quelle sera l'espérance du nombre de défauts au total sur les $n$ plaques?

0 (c) Je considère 50 plaques indépendantes les unes des autres et de même nature; quelle est la loi (distribution) de la variable aléatoire qui modélise le nombre de défauts sur 50 plaques (préciser la valeur de chaque paramètre)?

0 (d) Quelle est la probabilité que ces 50 plaques ne contiennent aucun défaut ?

1 (e) Quel est le nombre moyen de plaques qu'il faut considérer pour pouvoir affirmer qu'en moyenne, on identifie 2 défauts au total?

a) Moyenne = Variance = $\lambda$ = 0.02 ✓

b) $n \cdot 0{,}02$ ✓

c) approximativement ~~une loi~~ normal $N(0;1)$ $E(X_i) = \mu = 0$

variance = 1 écart-type = $\sqrt{1} = 1$

d) ~~$P(0)^{50}$~~ $\frac{50-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{50}}} = \frac{50}{\frac{1}{\sqrt{50}}} =$

$P(0)^{50}$

Je ne vois pas comment on peut trouver ses réponses alors que la loi de Poisson modélise des arrivées dans le temps

e) 100 plaques ✓

5 4. (~~xx~~ 7 points) Le diamètre des trous pour un faisceau de câbles est modélisé par une variable aléatoire $X$ de loi normale avec $\mu = 8$ cm et $\sigma = 0.4$ cm. $N(8;0{,}16)$ V

2 (a) Quelle est la probabilité que pour un faisceau pris au hasard, son diamètre soit supérieur à 8.6 cm?

1 (b) On considère un échantillon de 100 faisceaux $(X_1, \ldots, X_{100})$ et on s'intéresse à la moyenne de $X_1$ à $X_{100}$. Quelle est la distribution de $\overline{X_{100}}$? (préciser la valeur de l'espérance et de la variance)

1 (c) Donner un intervalle centré en 8 cm dans lequel statistiquement 99% des valeurs de la moyenne sur 100 valeurs se trouvent.

1 (d) Est-ce que la loi utilisée pour la moyenne est ici une approximation ou loi exacte?

$P(X > 8{,}6) = P(Z < 1{,}5) = 93{,}31\%$ $\Rightarrow P(Z > 1{,}5) = 1 - 93{,}31\% = 6{,}7\%$ V $\quad \dfrac{8{,}6-8}{0.4} = 1{,}5$

b) loi exacte, espérance $= \mu = 8$ $\quad var(X) = \sigma^2 = 0{,}4$ cm X $\quad \sigma =$ écart-type $= 0{,}16$ X

quelle loi?

des 2 côtés

99% dans la table $= 2{,}33$ 2,58

c) $P(8-5 < X < 8+5) = 99\%$

~~99%~~ Déjà centré en 8, donc intervalle $= [5{,}67 ; 10{,}33]$ X

d) loi exacte