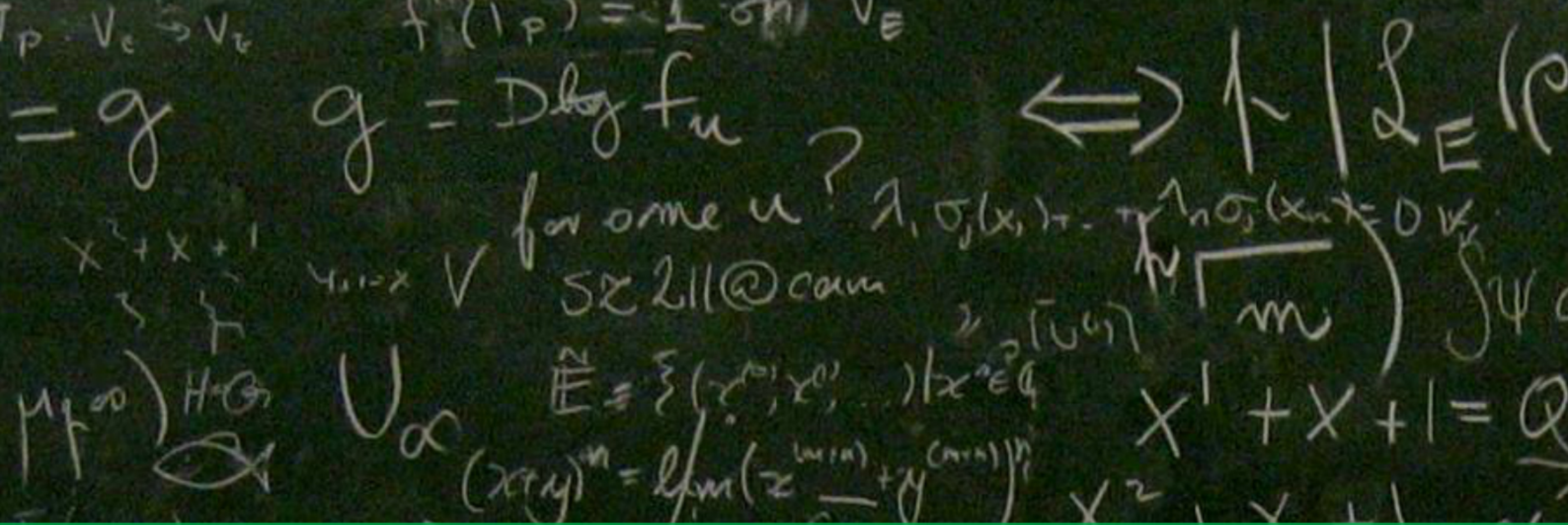


Mathématiques Spécifiques

Semestre 1

Samuel Riedo

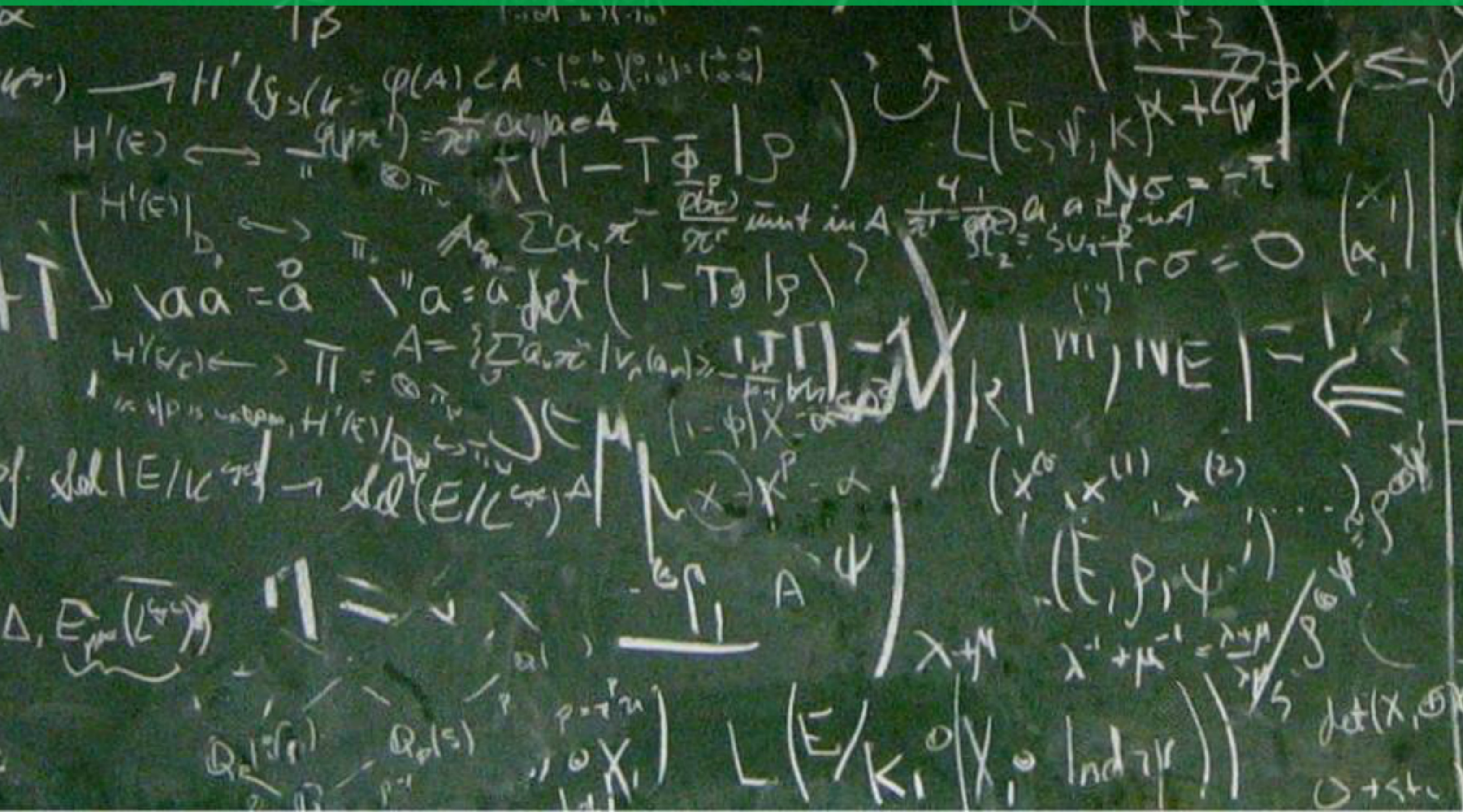
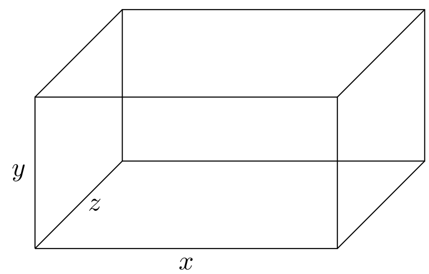


Table des matières

Première partie
Fonctions de plusieurs variables

1 Introduction

Exemle : Soit une boite rectangulaire d'un volume de 48cm^3. La fabrication des faces avant et arrière coute 1CHF/cm^2, celle du dessus et du dessous 2CHF/cm^2 et celle des côtés 3CHF/cm^2.



Le coût vaut :

$$\begin{aligned} C &= 2xz \cdot 1 + 2xy \cdot 2 + 2yz \cdot 3 \\ &= 2xz + 4xy + 6yz \end{aligned}$$

Il est également précisé que le volume vaut 48, et qu'il est donné par la formule $V = x \cdot y \cdot z$.

$$Z = \frac{48}{xy}$$

Z est maintenant introduit dans la fonction C :

$$\begin{aligned} 2xz + 4xy + 6yz &= 2x \cdot \frac{48}{xy} + 4xy + 6y \cdot \frac{48}{xy} \\ &= \frac{96}{y} + 4xy + \frac{288}{x} \end{aligned}$$

Nous obtenons alors :

$$C(x,\, y) = \frac{288}{x} + 4xy + \frac{96}{y}$$

Cette formule est à minimiser.

$$\begin{aligned} &\mathcal{D}_C = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y > 0\} \\ &Im_C =]0;\, +\infty[\end{aligned}$$

1.1 Domaine de définition et domaine image

Exemple : $f(x,\, y) = \frac{\sqrt{25-y^2}}{x-3}$

$$D_f = \{(x,\, y) \in \mathbb{R} \,|\, -5 \leq y \leq 5,\, x \neq 3\}$$

Soit $-5 \leq y \leq 5$ et $x \neq 3$

$$Im_f = \mathbb{R}$$

Exemple : $g(x,\, y,\, z) = |\ln(z) \cdot \sin(xy)|$

$$D_f = \{x,\, y,\, z \in \mathbb{R}^3 \,|\, z > 0\} \qquad Im_g = \mathbb{R}^+$$

Exemple : $f(x,\, y) = \frac{\sqrt{25-x^2-y^2}}{x^2-9}$

$$D_f = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \pm 3,\, x^2 + y^2 \leq 25\} \qquad Im_f = \mathbb{R}$$

1.2 Représentations graphiques des fonctions de plusieurs variables

Seuls les fonctions à deux variables seront traités dans ce sous-chapitre.

Exemple : $z = f(x, y) = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$

$$D_f = \mathbb{R} \qquad\qquad Im_f = \mathbb{R}^+$$

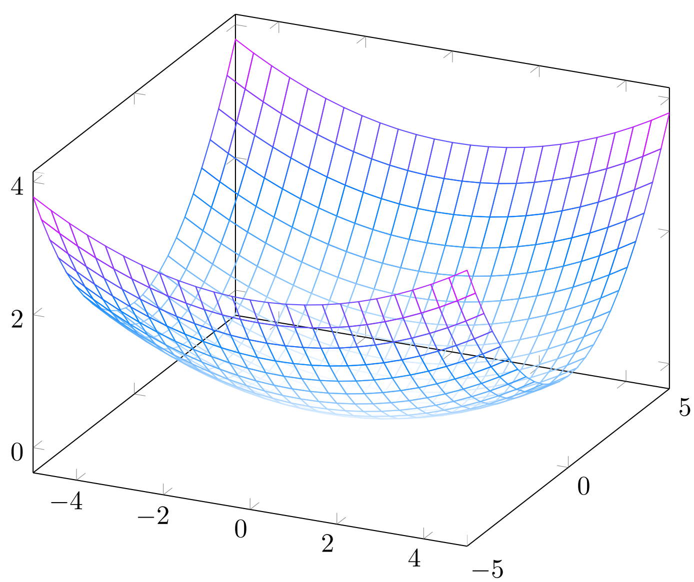
Afin de déterminer les courbes de niveau, on pose $z = k \geq 0$.

$$k = \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25}$$

Coupe par rapport au plan xz -> $y = k$

$$\begin{aligned} z &= \frac{x^2}{9} + \frac{k^2}{25} \\ &= \frac{x^2}{9} + k_1 \qquad\qquad \frac{k^2}{25} = k_1 \\ &= \frac{y^2}{25} + k_2 \end{aligned}$$

Paraboloïde elliptique



2 Limites des fonctions de plusieurs variables

Remarque : Ce chapitre ne sera pas au travail écrit.

Rappel :

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Pour des fonctions de plusieurs variables, la notion de limite est nécessaire pour définir les dérivées partielles. Néanmoins, il est relativement difficile de le faire pour des fonctions à variables multiples.

Exemple :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{x\to 0} 1\right)
\end{aligned}$$

Essayons maintenant de d'abord faire la limite de y, puis de x.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) \\
&= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{-y^2}{y^2}\right) \\
&= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} -1\right)
\end{aligned}$$

1 n'étant pas égal à -1, la limite n'existe pas.

Exemple 2 :

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} &= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}\right) \\
&= \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} 0\right) \\
&= 0 \\
\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} &= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{xy^2}{x^2 + y^4}\right) \\
&= \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Les deux valent 0, il reste néanmoins un paramètre à tester.

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,\,y)\to(0,\,0)} \frac{xy^2}{x^2 + y^4} &= \lim_{y\to 0} \frac{ay^2 \cdot y^2}{(ay^2) + y^4} && x = ay^2,\ a \neq 0 \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{ay^4}{a^2y^4 + y^4} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{a}{a^2 + 1} \\
&= \frac{a}{a^2 + 1} \neq 0 && \text{La limite n'existe pas.}
\end{aligned}$$

3 Dérivées partielles

3.1 Accroissement partiel et total

Soit $\omega = f(x_1, x_2, ..., x_n)$, l'accroissement partiel de ω par rapport à x_i est donné par :

$$\Delta_{x_i}\omega = f(x_1, x_2, ..., x_i + \Delta_{x_i}, x_{i+1}, ..., x_n)$$

Le taux de variation de ω par rapport à x est donné par :

$$\frac{\Delta_{x_i}\omega}{\Delta_{xi}}$$

Exemple : Soit un cylindre de rayon $r = 4$cm et de hauteur $h = 21$cm. On souhaite fabriquer d'autre cylindres identiques, mais les machines ne sont pas précises. Les imperfections, caractérisés par un Δ, vallent 0,1cm pour Δr et également 0,1cm pour Δh. Une différence sur le rayon aura-t-elle un grande influence sur le volume que'une différence sur la hauteur ?
L'accroissement partiel relativement à r est :

$$\begin{aligned}
\Delta_r h &= V(r + \Delta_r, h) - V(r, h) \\
&= \pi(r + \Delta_r)^2 \cdot h - \pi r^2 h \\
&= \pi(r^2 + 2r\Delta_r + (\Delta_r)^2)h - \pi r^2 h \\
&= \pi r^2 h + 2\pi r h\Delta_r + \pi h \cdot (\Delta_r)^2 - \pi r^2 h \\
&= 2\pi r h\Delta_r + \pi h(\Delta_r)^2
\end{aligned}$$

L'accroissement partiel relativement à h est :

$$\begin{aligned}
\Delta_h V &= V(r, h + \Delta_h) - V(r, h) \\
&= \pi r^2(h + \Delta_h) - \pi r^2 h \\
&= \pi r^2 h + \pi r^2\Delta_h - \pi r^2 h \\
&= \pi r^2\Delta_h
\end{aligned}$$

L'accroissement total vaut :

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V(r + \Delta_r, h + \Delta_h) - V(r, h) && \neq \Delta_h + \Delta_r \\
&= \pi(r + \Delta_r)^2(h + \Delta_h) - \pi r^2 h \\
&= \pi(r^2 + 2r\Delta_r + (\Delta_r)^2)(h + \Delta_h) - \pi r^2 h \\
&= \pi r^2 h + 2\pi r h\Delta_r + \pi h(\Delta_r)^2 + \pi r^2\Delta_h + 2\pi r\Delta_r\Delta_h + \pi(\Delta_r)^2\Delta_h - \pi r^2 h \\
&= 2\pi r h\Delta_r + \pi h(\Delta_r)^2 + \pi r^2\Delta_h + 2\pi r\Delta_h\Delta_h + \pi(\Delta_r)^2\Delta_h \\
&= \Delta_r V + \Delta_h V + 2\pi r\Delta_r\Delta_h + \pi(\Delta_r)^2\Delta_h
\end{aligned}$$

Avec les valeurs numériques :

$$\begin{aligned}
\Delta_r V &= 2\pi r h\Delta_r + \pi h(\Delta_r)^2 \\
&= 53.44 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_h V &= \pi r^2\Delta_h \\
&= \pi \cdot 4^2 \cdot 0.1 \\
&= 5.03 \text{ cm}^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta V &= \Delta_r V + \Delta_h V \\ &= 2\pi r \Delta_r \Delta_h + \pi(\Delta_r)^2 \Delta_h \\ &= 63.74 \text{ cm}^3\end{aligned}$$

Si $\Delta_h \neq \Delta_r$, on ne peut pas comparer $\Delta_r V$ et $\Delta_h V$. On s'en sort en calculant des accroissements partiels relatifs aussi appelés **taux de variations moyen**.

$$\frac{\Delta_r V}{\Delta r} \qquad\qquad \frac{\Delta_h V}{\Delta h}$$

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_r V}{\Delta r} &= \frac{53.44}{0.1} \\ &= 534,4 \text{ cm}^2 \\ \frac{\Delta_h V}{\Delta h} &= \frac{5.03}{0.1} \\ &= 50.3 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

Une variation sur le rayon a une plus grande influence qu'une variation sur la hauteur.

3.2 Dérivées partilles d'ordre 1

Rappel : Pour une fonction d'une variable $y = f(x)$, le taux de variation moyen était :

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{Droite rouge}$$

Taux de variation instantané :

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad \text{Droite bleu}\\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} \\ &= f'(x)\end{aligned}$$

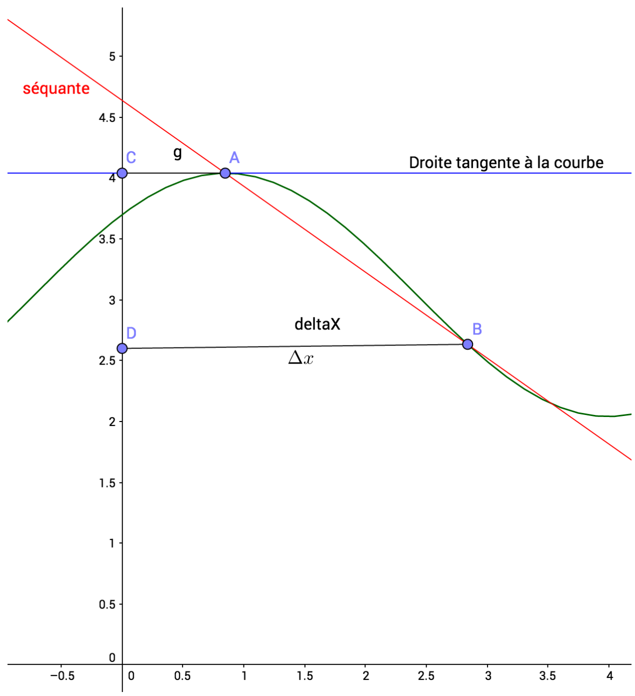


FIGURE 1 – Dérivées partielles d'ordre 1

Exemple : Pour l'exemple du cyclindre ci-dessus, le taux de variations instantanés par rapport à r et par rapport h :

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{D}V}{r} \lim_{\Delta r \to 0} \frac{\Delta_v V}{\Delta r} &= \lim_{\Delta r \to +\infty} \frac{2\pi r h \Delta r + \pi h (\delta r)^2}{\Delta r} \\ &= \lim_{\Delta r \to +\infty} (2\pi r h + \pi h \Delta r) \qquad \Delta r \to 0 \\ &= 2\pi r h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial h} \lim_{\Delta h \to +\infty} \frac{\Delta_h V}{\Delta h} &= \lim_{\Delta h \to +\infty} \frac{\pi r^2 \Delta h}{\Delta h} \\ &= \lim_{\Delta h \to +\infty} (\pi r^2) \\ &= \pi r^2\end{aligned}$$

$$V = \pi r^2 h$$
$$\text{Dérivé par rapport à } r : \ 2\pi r h$$
$$\text{Dérivé par rapport à } r : \ \pi r^2$$

Il n'y a pas besoin de calculer les limites. Les règles de calculs vues l'an passé fonctionnent. Les variables non concernées par la dérivation sont à considérer comme des constantes.

Notation :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x = \frac{dz}{dx} \text{ avec } z = f(x, y) = f'_x$$
$$\frac{df}{dx} = \text{Dérivé par rapport à une variable}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \text{Dérivé par rapport à plusieurs variables}$$

Evolution au point (a, b) :

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_{(a,\, b)} = \frac{\partial z}{\partial x}|_{(a,\, b)}$$

Exemple :

$$f(x, y) = \frac{x^2}{y} + ln(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2y^{-2} + \frac{1}{y}$$

$$f(x, y, z) = \sin(x^2 \cdot y^2 \cdot z^3)$$
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos(x^2 \cdot y^2 \cdot z^3) \cdot (2xy^2z^3)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(x^2y^2z^3) \cdot (x^22yz^3)$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = \cos(x^2y^2z^3) \cdot (x^2y^23z^2)$$

3.3 Sinus hyperbolique, cosinus hyperbolique et tangente hyperbolitque

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\sinh(x)' = \cosh(x) \qquad \cosh(x)' = \sinh(x)$$

3.4 Interprétation géométrique des dérivées partielles

3.4.1 Rappel :

$y = f(x)$ avec f une fonction d'une variable

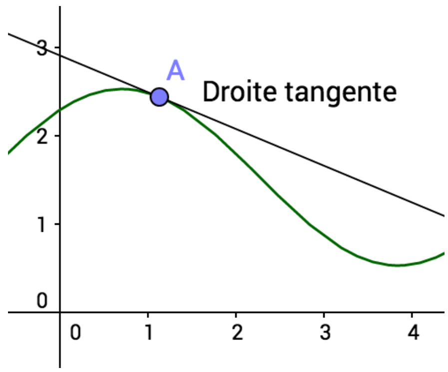


Figure 2 – Dérivée

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{Pente de la tangente}$$

Nous pouvons faire de même avec une fraction de deux variables $z = f(x, y)$:

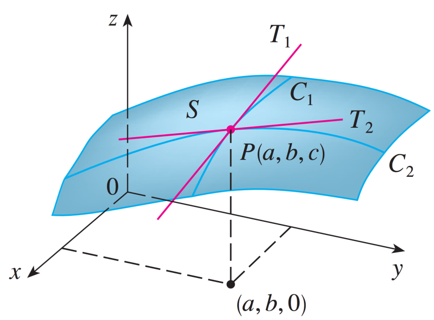


Figure 3 – Interprétation géographique de la dérivée partielle

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \qquad y \text{ constant}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y+h) - f(x, y)}{h} \qquad x \text{ constant}$$

T_1 étant la tangente de $\frac{\partial z}{\partial x}$ et T_2 celle de $\frac{\partial z}{\partial y}$.

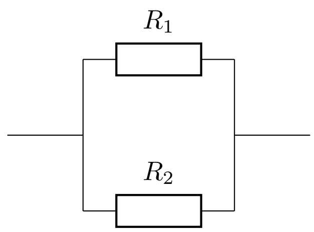
Exemple 13 p.11 script Surface $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
Nous cherchons la pente de la tangente à la courbe que laisse le plan $x = 2$(constant) sur cette surface au

point (2, 3, 2).

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}\right)\\ &= \frac{2y}{9}\\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(2,\,3,\,2)} &= \frac{2\cdot 3}{9}\\ &= \frac{2}{3}\end{aligned}$$

3.5 Interprétation analytique

Exemple 14 p.12 :



$$\begin{aligned}R(R_1,\,R_2) &= R\\ &= \frac{R_1\cdot R_2}{R_1+R_2}\\ &= 18\Omega\end{aligned}$$

Si une petite variation arrive ΔR_1, quelle est son influence sur la résistance R.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_{R_1}R}{\Delta R_1} &\approx \frac{\partial R}{\partial R_1}\\ &= \frac{\partial}{\partial R_1}\left(\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\right)\\ &= \frac{R_2(R_1+R_2)-R_1R_2}{(R_1+R_2)^2}\\ &= \frac{(R_2)^2}{(R_1+R_2)^2}\\ \frac{\Delta_{R_2}R}{\Delta R_2} &\approx \frac{\partial R}{\partial R_2}\\ &= \frac{(R_1)^2}{(R_1+R_2)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial R}{\partial R_1}\right|_{(30,\,45,\,18)} &= \left(\frac{18}{30}\right)^2\\ &= 0.38\Omega\\ \left.\frac{\partial R}{\partial R_2}\right|_{(30,\,45,\,18)} &= \left(\frac{18}{45}\right)^2\\ &= 0.16\Omega\end{aligned}$$

Une varaition dans la résistance R_1 a une plus grande influence sur R qu'une variation dans la résistance R_2.
Vérifiions maintenant que $\frac{\Delta_{R_1} R}{\Delta R_1} \approx \frac{\partial R}{\partial R_1}$ pour $R = 18, R_1 = 30, R_2 = 45$ et $\Delta R_1 = 1$. La valeur de ΔR_1 est choisis arbitrairement.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta_{R_1} R}{\Delta R_1} &= \frac{R(R_1 + \Delta R_1,\, R_2)}{\Delta R_1} \\ &= \frac{R(31,\, 45)}{1} \\ &= 0.355\end{aligned}$$

3.6 Dérivées partielles d'ordre supérieur

Soit $z = f(x,\, y)$, si les dérivées partielles de f existent, nous dérivons deux fois f par rapport à x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$$

De même, nous pouvons dériver deux fois f par rapport à y.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$$

Ou encore de faire des dérivées mixtes.

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{\xrightarrow[xy]{}} \qquad \text{On dérive } f \text{ par rapport à } x \text{ puis } y.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{\xrightarrow[yx]{}} \qquad \text{On dérive } f \text{ par rapport à } y \text{ puis } x.$$

Pour les fonctions non discontinues (ainsi que leur dérivées), f_{xy} est égal à f_{yx}.

Exemples :

$$f(x,\, y) = x^2 - 3xy + \sin(y)$$

$$\begin{aligned} f_x &= 2x - 3y \\ f_y &= -3x + \cos(y) \\ f_{xx} &= 2 \\ f_{yy} &= -\sin y \\ f_{xy} &= -3 \\ f_{yx} &= -3 \end{aligned}$$

Exemple :

$$f(x,\, y) = ln(x^2 + y^2)$$

$$f_x = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2x$$
$$f_y = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2y$$
$$f_{xx} = \frac{2(x^2+y^2)-4x^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_{yy} = \frac{2(x^2+y^2)-4y^2}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_{xy} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$f_{yx} = \frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}$$

3.7 Différentielle totale :

Différentielle : $y = f(x)$. En général, $dy \approx \Delta y$.

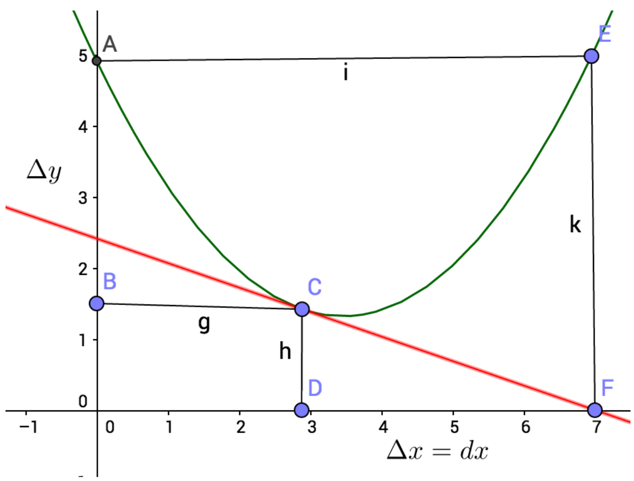


FIGURE 4 – Différentielle totale

$$\Delta y = f(x+dx) - f(x) \qquad \text{Variation en } y \text{ (variable en } y)$$
$$dx = \text{Différentielle de } x \text{ (variable indépendante)}$$
$$dy = \text{Différentielle de } y \text{ (variable dépendante)}$$
$$dy = f'(x) \cdot dx$$
$$= \frac{dy}{dx} f'(x)$$

Pour une fonction de deux variables $z = f(x, y)$:

$$dx = \text{Différence de } x \text{ (variable indépendante)}$$
$$dy = \text{Différence de } y \text{ (variable indépendante)}$$
$$dz = \text{Différentielle totale}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy$$
$$\Delta z \approx \Delta_x z + \Delta_y z \text{ (variation totale)}$$

Exemple :

$$w = f(x,\, y,\, z) = x^4 + y^3 - z^2 + e^{xy}$$

Calculer la différentielle totale dw.

$$\begin{aligned} dw &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \\ &= (4x^3 + ye^{xy})dx + (2y^2 + xe^{xy})dy - 27dz \end{aligned}$$

Exemple : Volume du cylindre

$$\begin{array}{ccc} V = \pi r^2 h & r = 4 & \Delta r = 0.1 = dr \\ h = 21 & \Delta h = 0.1 = dh & \Delta V \approx 63.75\,\mathrm{cm}^3 \end{array}$$

On va calculer dV différentielle totale.

$$\begin{aligned} dV &= \frac{\partial V}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial V}{\partial h} \cdot dh \\ &= 2\pi r h \cdot dr + \pi r^2 \cdot dh \\ &= 2\pi \cdot 4 \cdot 21 \cdot 0.1 + \pi \cdot 4^2 \cdot 0.1 \\ &\approx 57.8\,\mathrm{cm}^3 \end{aligned}$$

3.8 Dérivation en chaîne

$$\begin{array}{ccc} z = f(x,\, y) = x^2 + y^2 & x(t) = \sqrt{t} & y(t) = t^2 + 3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial u} = ? & \dfrac{\partial f}{\partial v} = ? & \end{array}$$

Une solution sera de remplacer x et y par leur formule respective :

$$f(x,\, y) = (\sqrt{t})^2 + \left(t^2 + 3\right)^2$$

Une solution plus générale est :

$$\frac{dz}{\color{blue}{dt}} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{\color{blue}{dt}} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{\color{blue}{dt}}$$

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \\ &= 2x \cdot \frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}} + 2y \cdot 2t \\ &= xt^{-\frac{1}{2}} + 4yt \\ &= \sqrt{t} \cdot t^{-\frac{1}{2}} + 4(t^2 + 3) \cdot t \end{aligned}$$

Avec deux variables :

$$f(x,\,y) = 3x^3 - 2y^2 \qquad x(u,\,v) = 3u + v^2 \qquad y(u,\,v) = \frac{u}{v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = ? \qquad \frac{\partial f}{\partial v} = ?$$

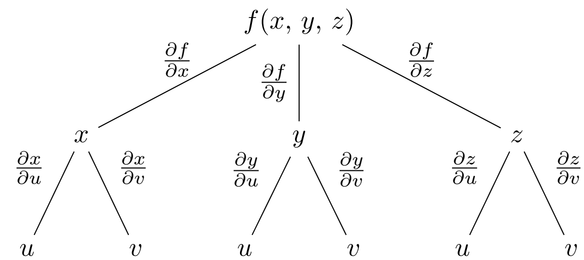
Avec trois variables :

$$w = f(x,\,y,\,z)$$

$$x = x(u,\,v) \qquad y = y(u,\,v) \qquad z = z(u,\,v)$$

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u}$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}$$



3.9 Dérivée directionnelle

Soit la fonction $z = f(x,\,y)$, que vaut la dérivée dans la direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$?

Il faut rendre $\vec{v}$ unitaire :

$$\vec{u} = \frac{1}{||\vec{v}||} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

La dérivée directionnelle vaut :

$$f_{\vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin(\alpha)$$

Exemple : $z = f(x,\,y) = x^2 + y^3$. On souhaite calculer la dérivée (directionnelle) de f dans la direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ au point $(5,\,2)$. Premièrement, il faut rendre $\vec{v}$ unitaire.

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f_{\vec{u}} &= \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(\phi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin(\phi) \\ &= 2x\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) + 3y^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \\ f_{\vec{u}}(5,\,2) &= \frac{-10}{\sqrt{10}} + \frac{36}{\sqrt{10}} \\ &= \frac{26}{\sqrt{10}} \end{aligned}$$

Exemple : $w = f(x,\, y,\, z) = \sin(xyz)$, que vaut la dérivée directionnelle de f dans la direction $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ au point $(3,\, 2,\, \pi)$.

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{1}{||\vec{v}||} \cdot \vec{v} \\ &= \frac{1}{\sqrt{21}} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \cos(\beta) \\ \cos(\gamma) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Remarque : $\cos(x)$, $\cos(\beta)$ et $\cos(\gamma)$ sont les cosinus directions.

$$\cos(x)^2 + \cos(\beta)^2 + \cos(\gamma)^2 = 1$$

$$\begin{aligned} f_{\vec{u}} &= \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(\beta) + \frac{\partial f}{\partial z}\cos(\gamma) & f_x &= \cos(xyz) \cdot yz \\ &= \cos(xyz) \cdot yz \cdot \frac{4}{\sqrt{21}} - \cos(xyz) \cdot xz \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} - \cos(xyz) \cdot xy \cdot \frac{1}{\sqrt{21}} & f_y &= \cos(xyz) \cdot xz \\ & & f_z &= \cos(xyz) \cdot xy \end{aligned}$$

3.9.1 Gradient

Dérivée directionnelle vue sous forme vectorielle.

$$f_{\vec{u}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos(\phi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin(\phi) = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}}_{\text{gradient}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$$

Notation :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix} &= \vec{\nabla} f = \vec{\text{gradf}} \\ \vec{\nabla} f(a,\, b) &= \vec{\nabla} f|_{a,\, b} & & \text{C'est un vecteur} \end{aligned}$$

Exemple : $f(x,\, y) = x^3 + 3y^2$, que vaut $\vec{\nabla} f$?

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} f &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dx} x^3 + 2y^2 \\ \frac{d}{dx} x^3 + 2y^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3x^2 \\ 6y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4 Rappel algèbre linéaire

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}|| \cdot \cos(\alpha) \qquad \alpha = \text{ angle entre les vecteurs}$$

Pour la dérivée directionnelle :

$$\begin{aligned} f_{\vec{u}} &= \vec{\nabla} f \cdot \vec{u} \\ &= ||\vec{\nabla} f|| \cdot ||\vec{u}|| \cdot \cos(\alpha) \\ &= ||\vec{\nabla} f|| \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Lorsque $\alpha = 0°$, la dérivée directionnelle est la plus grande possible. C'est la direction du gradient. Si $\alpha = 90°$, la dérivéée est nulle et la direction est perpendiculaire au gradient. Pour 180°, la dérivée est la plus petite, c'est le sens opposé du gradient.

5 Extremum d'une fonction de deux variables indépendantes

Soit $z = f(x.y)$ et un point (a, b) :

Maximum absolu : $f(a, b) \geq f(x, y)$ Pour tous les points $\in \mathcal{D}_f$
Maximum absolu : $f(a, b) \geq f(x, y)$ Pour tous les points proches de (a, b)

Minimum absolu : $f(a, b) \leq f(x, y)$ Pour tous les points $\in \mathcal{D}_f$
Minimum absolu : $f(a, b) \leq f(x, y)$ Pour tous les points proches de (a, b)

Ces points sont des extrema de $f(x, y)$.

5.1 Propritétés :

— Si (a, b) est un extremum, alors $\vec{\nabla}_f(a, b) = \vec{0}$ ou $\vec{\nabla}_f(a, b) = \varnothing$. Le gradient n'existe donc pas dans ces cas.
— Un point (a, b) pour lequel $\vec{\nabla}_f(a, b) = \vec{0}$ est un point critique.

Tous les points critiques sont des extremums, mais le contraire n'est pas forcément vrai.

5.2 Méthode pour trouver les extremums

1. Trouver tous les points $(a, b) \in \mathcal{D}_f$ avec $\vec{\nabla}_f(a, b) = \vec{0}$
2. Classer les points critiques en utilisant les dérivés partielles du deuxième ordre (f_{xx}, f_{yy}, f_{zz})
   (a) Calculer f_{xx}, f_{yy}, f_{zz}
   (b) Evaluer les dérivés aux points critiques $(f_{xx}(a, b), ...)$
   (c) Calculer le déterminant :
   $$\Delta(a, b) = \begin{vmatrix} f_{xx}(a, b) & f_{xy}(a, b) \\ f_{yx}(a, b) & f_{yy}(a, b) \end{vmatrix}$$
   $$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb$$
   (d) Classer les points critiques :
      i. Si $\Delta(a, b) > 0$ et $f_{xx}(a, b) < 0$, alors (a, b) est un maximum relatif
      ii. Si $\Delta(a, b) > 0$ et $f_{xx}(a, b) > 0$, alors (a, b) est un minimum relatif
      iii. Si $\Delta(a, b) < 0$, alors (a, b) est un point de selle (col)
      iv. Si $\Delta(a, b) = 0$, alors (a, b) est un trou noir
      Il est aussi possible de faire par rapport à $f_{yy}(a, b)$, mais il ne faut pas faire les deux.

Exemple : Quels sont les extremums de $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$?

1.
$$\vec{\nabla}_f = \vec{0}$$
$$f_x = 4x^3 - 4y \qquad f_y = 4y^3 - 4x$$
$$\rightarrow \vec{\nabla}_f = \vec{0} = \begin{pmatrix} 4x^3 - 4y \\ 4y^3 - 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{cases} 4x^3 - 4y = 0 \\ 4y^3 - 4x = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = x^3 \\ (x^3)^3 - x = 0 \end{cases}$$
$$\rightarrow x^9 - x = 0$$
$$x(x^8 - 1) = 0$$

Solutions : $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$, $x = -1$, $y = -1$

2. Classer
   (a)

$$f_{xx} = 12x^2 \qquad f_{yy} = 12y^2 \qquad f_{xy} = -4 = f_{yx}$$

   (b)

$$\begin{aligned} f_{xx}(0,\,0) &= 0 & f_{yy}(0,\,0) &= 0 & f_{xy}(0,\,0) &= -4 \\ f_{xx}(1,\,1) &= 12 & f_{yy}(1,\,1) &= 12 & f_{xy}(1,\,1) &= -4 \\ f_{xx}(-1,\,-1) &= 12 & f_{yy}(-1,\,-1) &= 12 & f_{xy}(-1,\,-1) &= -4 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} \Delta(0,\,0) &= \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} \\ &= -16 && \text{Plus petit que 0, dont c'est un point de selle} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta(1,\,1) &= \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} \\ &= 144 - 16 > 0 \ \&\ f_{xx} > 0 && \text{C'est un minimum relatif} \end{aligned}$$

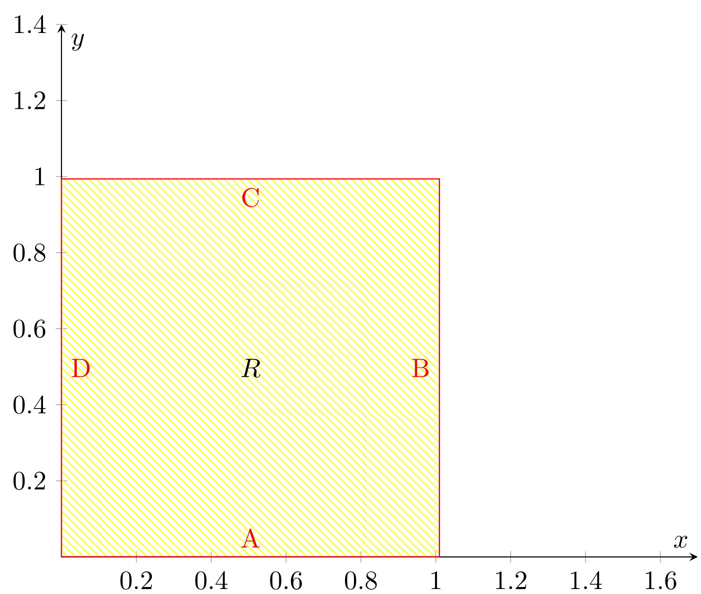
$$\begin{aligned} \Delta(-1,\,-1) &= \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} \\ &= 144 - 16 > 0 \ \&\ f_{xx} > 0 && \text{C'est un minimum relatif} \end{aligned}$$

5.3 Maximums & Minimums relatifs à Maximums & Minimums globaux

Pour trouver les extrema absolus et globaux, il est nécessaire de travailler sur une région délimitée.
Pour une fonction $z = f(x,\,y)$, nous procédons de la même manière que pour une fonctin à une variable.

1. Points critiques $\vec{\nabla}_f = \vec{0}$.
2. f à évaluer en chacun des points sur le bord de R et aux points critiques.
3. Comparer les valeurs (max, min et absolu).

Exemple 29 p. 23 Soit $f(x,\,y) = xy - x^2$

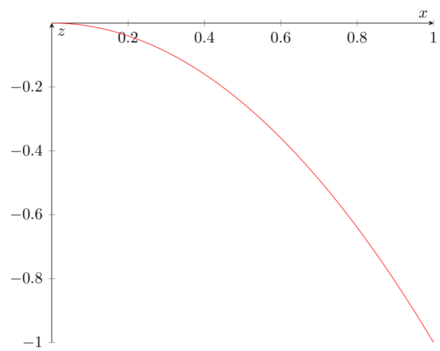


1. Points critiques

$$\vec{\nabla}_f = \begin{pmatrix} y - 2x \\ x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{cases} y = 2x \\ x = 0 \end{cases} \quad \text{Point critique en } (0,\, 0)$$

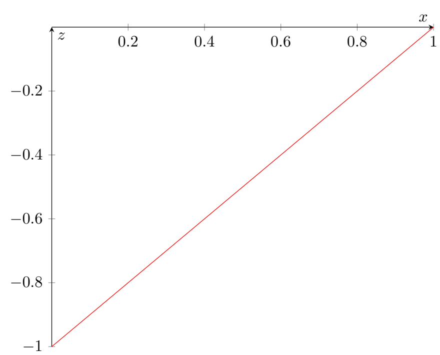
2. f sur le bord de R

   (a) $y = 0,\ f(x,\, 0) = -x^2$



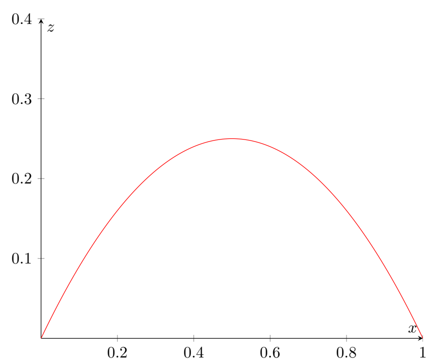
   Max en $(0,\, 0) \to f(0,\, 0) = 0$
   Min en $(1,\, 0) \to f(1,\, 0) = -1$

   (b) $x = 1 : f(1,\, y) = y - 1$



   Max en $(1,\, 1) \to f(1,\, 1) = 0$
   Min en $(1,\, 0) \to f(1,\, 0) = -1$

   (c) $y = 1 : f(x,\, 1) = x - x^2 = x(1 - x)$



Max en (0.5, 1) $\rightarrow f(0.5,\,1) = 0.25$
Min en (0, 1) et (1, 1) $\rightarrow f(0,\,1) = f(1,\,1) = 0$

(d) $x = 0$, $z = f(0,\,y) = 0$, max et min en $(0,\,y) \rightarrow f(0,\,y) = 0$.

3. Comparer les valeurs : maximum absolu en (0.5, 1), minimum absolu en (1, 0).

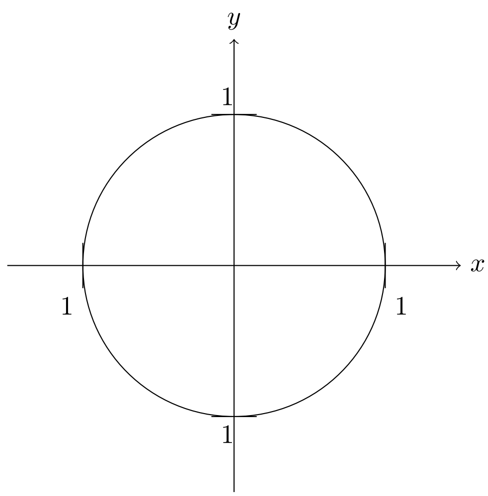
Pour une région quelconque (par exemple une courbe de niveau, utiliser la technique des multiplicateurs de Lagrange si le bord est donné par

$$g(x,\,y) = k$$

1. Points critiques $\vec{\nabla}_f = \vec{0}$
2. Résoudre

$$\begin{cases} \vec{\nabla}_f = \lambda \vec{\nabla}_g \\ g(x,\,y) = k \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

Exemple 30 p.24 : $f(x,\,y) = -x^2 + y^2$, $R : \underbrace{x^2 + y^2}_{g(x\,y)} \leq 1$



1. Points critiques :

$$\vec{\nabla}_g = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \vec{\nabla}_f & = \lambda \cdot \vec{\nabla}_g \\ \vec{\nabla}_f & = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} -2x & = \lambda \cdot 2x & (1) \\ 2y & = \lambda \cdot 2y & (2) \\ x^2 + y^2 & = 1 & (3) \end{cases}$$

De (1), on a

$$2x \cdot (\lambda + 1) = 0$$
$$x = 0\,(a) \qquad \lambda = -1\,(b)$$

(a) Si $x > 0$, (3) nous dit :

$$y^2 = 1 \rightarrow y \pm 1$$

Les points trouvées sont (0, 1) et (0, -1).

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_f &= \begin{pmatrix}-2x\\ 2y\end{pmatrix}\\ &= \lambda \cdot \vec{\nabla}_g\\ &= \lambda \cdot \begin{pmatrix}2x\\ 2y\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(b) Si $\lambda = -1$, de (2) on trouve :

$$2y = -2y \to y = 0$$

De (3) on trouve que $x = 1$ ou $x = -1$. Les points trouvés sont (1, 0) et (-1, 0).

$$f(0, \pm 1) = 1 \qquad\qquad f(\pm 1, 0) = -1$$

Deuxième partie
Équation différentielles ordinaires

1 Introduction

Soit une population au temps t $P(t)$ et $P(0)$ la population initiale. Comme évolue le nombre de personnes dans le temps ? Le taux de variation de la population est $\frac{dP}{dt}$. Nous pouvons donc emmettre l'hypotèse :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} & = k \cdot P \\ P(0) & = P_0 \end{cases} \qquad k > 0,\ \text{constant}$$

2 Typologie des équations différentielles

Le but de la typologie des équations différentielles consiste à classer les ED. Selon cette classification, il y aura différentes résolutions possibles. Une équation différentielle est une équation dans laquelle l'inconnue et ses dérivées peuvent apparaître.

Exemples :

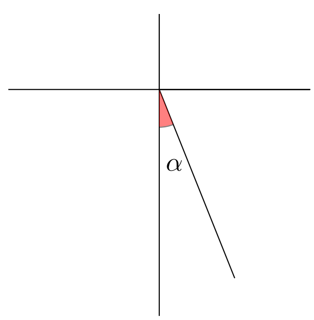
$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P \qquad \rightarrow P(t) = ?$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + a \cdot \frac{ds}{dt} + b \cdot s(t) = f(t) \qquad \rightarrow s = ?$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = k,\ k \text{ constant} \qquad \rightarrow y = ?$$

L'ordre d'une équation différentielle est la plus haute dérivée qui intervient dans l'équation différentielle.

Exemple :



$$\frac{d^2x}{dt^2} = k \cdot \sin(\alpha)$$

C'est une équation différentielle *non linéaire* d'ordre 2. L'inconnue apparait de manière non linéaire ($\sin(\alpha)$) dans l'équation. Ces dernières sont très difficiles à résoudre, voir impossible à la main. Une solution d'une équation différentielle est une fonction qui satisfait l'équation.

$$\frac{dP}{dt} = k \cdot P \qquad \rightarrow P(t) = e^{k \cdot t} + C$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} + a \cdot \frac{ds}{dt} + b \cdot s(t) = f(t) \qquad \rightarrow s = ?$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = k,\ k \text{ constant} \qquad \rightarrow y = ?$$

Il est nécessaire d'ajouter $+C$, $C \in \mathbb{R}$ pour trouver l'ensemble des solutions et non une seule solution. La valeur de C est donné par la condition initiale $P(0) = P_0$, aussi appelé *solution particulière.*

3 Equation différentielle d'ordre 1

Il existe des équations différentielle qui n'ont pas de solution :

$$\underbrace{(y')^4}_{\geq 0} + \underbrace{4y^2}_{\geq 0} = -3 \qquad \text{Ordre 1}$$

Il existe des équation différentielle avec une seule solution : $y = 0$

$$\underbrace{(y')^4}_{\geq 0} + \underbrace{4y^2}_{\geq 0} = 0 \qquad y = 0$$

Sans être dans les cas précédents, une équation différentielle d'ordre n possède une solution générale qui contient n constantes arbitraires.

1.

$$y' = y^2 \qquad y(x) = \frac{-1}{x+A},\ A \in \mathbb{R}$$

2.

$$y'' = \frac{1}{x^2} \qquad y(x) = Ax + B + ln(x),\ A,\ B \in \mathbb{R}$$

La *solution particulière* d'une équation différentielle est déterminée à l'aide de une ou plusieurs conditions initiales. Par conséquence, une équation différentielle d'ordre n à n conditions initiales dans sa solution particulière.

3.1 Équation différentielle à variables séparables

3.1.1 Forme

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

3.1.2 Résolution

Premièrement, séparer les variables.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= f(x) \cdot g(y) && \cdot dx \cdot \frac{1}{g(y)} \\
= \frac{dy}{g(y)} & && = f(x)\,dx \\
= \int \frac{dy}{g(y)} & && = \int f(x)\,dx \\
= G(y) & && = F(x) + C
\end{aligned}$$

Ensuite, isoler y si cela est possible.

3.1.3 Exemples

1.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= e^{x+y} \\
\frac{dy}{dx} &= e^{x} \cdot e^{y} \\
\frac{dy}{e^{y}} &= e^{x}\, dx \\
e^{-y}\, dy &= e^{x}\, dx \\
\int e^{-y},\, dy &= \int e^{x}\, dx \\
-e^{-y} &= -e^{x} - C \\
ln(e^{-y}) &= ln(-e^{x} - C) \\
-y &= ln(-e^{x} - C) \\
y &= -ln(-e^{x} - C)
\end{aligned}$$

La solution générale vaut $y = -ln(-e^{x} - C)$.

2. $P(0) = 20000$, $P(2) = 21000$ et $t = 0$ en l'an 2000. Que vaut $P(20)$ selon le modèle de Malthus $\frac{dP}{dt} = k \cdot P$, $k \in \mathbb{R}$? Il y a deux conditions, une pour k et l'autre pour C, mais il faut d'abord résoudre l'équation.

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{P} &= k \cdot dt \\
\int \frac{dP}{P} &= \int k \cdot dt \\
ln|P| &= k \cdot t + C && P > 0 \text{ car c'est une population} \\
e^{ln(P)} &= e^{kt+C} \\
P &= A \cdot e^{kt} && A = e^{C}
\end{aligned}$$

Nous savons que $P(0) = 20000$:

$$\begin{aligned}
P(0) &= A \cdot e^{k \cdot 0} \\
A &= 20000
\end{aligned}$$

Il ne reste qu'à déterminer k :

$$\begin{aligned}
P(2) &= 21000 \\
21000 &= 20000 \cdot e^{2k} \\
k &= \frac{ln(21/20)}{2}
\end{aligned}$$

Du coup, $P(20)$ vaut :

$$\begin{aligned}
P(20) &= 20000 \cdot e^{2 \cdot k} \\
&= 32579
\end{aligned}$$

3.2 Équation différentielle linéaire d'ordre 1

3.2.1 Forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

3.2.2 Résolution

1. Calculer le facteur intégrant, sans ajouter $+C$

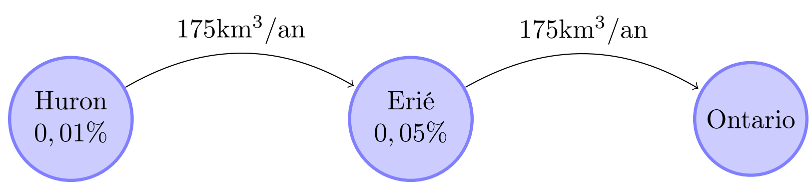
$$F(x) = e^{\int \cdot P(x)\, dx}$$

2. Solution :

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{\int F(x) \cdot Q(x)\, dx}{F(x)} \\ &= \frac{G(x) + C}{F(x)} \end{aligned}$$

3.2.3 Exemple

Exemple 44 page 32 Le lac Huron se déverse dans le lac Erié, qui lui-même se déverse dans le lac Ontario.



Soit $v(t)$ le volume de polluants dans le lac Erié au temps t.

$$v(0) = \underbrace{\frac{0,05}{100}}_{\text{Concentration}} \cdot \underbrace{458}_{\text{Volume}} = 0,2290\text{km}^3$$

Trouver $v(t)$ tel que :

$$\begin{aligned} v(t) &= 0,02 \cdot \frac{1}{100} \cdot 458 \\ &= 0,0916\text{km}^3 \end{aligned}$$

La concentration de polluants au temps t vaut :

$$\frac{v(t)}{458} = 0,02\%$$

Prenons un intervalle de temps dt, le volume de polluants entrant dans le lac Erié vaut :

$$\underbrace{\frac{0,01}{100} \cdot 175}_{\text{Polluants sur un an}} \quad \cdot dt$$

Pour le même intervalle dt, le volume de polluants sortant du lac Erié vaut :

$$\frac{v(t)}{458} \cdot 175 \cdot dt$$

La variation du volume de polluants dv vaut donc ce qui rentre moins ce qui sort :

$$\begin{aligned} dv &= \frac{0,01}{100} \cdot 175 \cdot dt - v(t) \cdot \frac{175}{458} \cdot dt && /dt \\ &= \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0,0175 - 0,3821 \\ v(0) = 0,229 \end{cases} \end{aligned}$$

Solution :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} + P(t) \cdot y = Q(t)\frac{dv}{dt} + 0,3821 \cdot v && = 0,0175 \\ P(t) = 0,3821 && Q(t) = 0,0175 \end{aligned}$$

1. Calcule du facteur intégrant :

$$\begin{aligned} \int P(t)\,dt &= \int 0,3821\,dt \\ &= 0,3821 \cdot t && \text{Sans } +C \\ F(t) &= e^{\int p(t)\,dt} \\ &= e^{0,3821 \cdot t} \end{aligned}$$

2. Solution :

$$\begin{aligned} \int F(t) \cdot Q(t) &= \int e^{0,3821 \cdot t} \cdot 0,0175\,dt \\ &= \frac{0,0175}{0,3821} \cdot e^{0,3821 \cdot t} + C && \text{Avec } +C \\ v(t) &= \frac{0,0458 \cdot e^{0,3821 \cdot t}}{e^{0,3821 \cdot t}} \\ &= 0,0458 + C \cdot e^{-0,3821 \cdot t} \end{aligned}$$

La solution générale est trouvée, il faut maintenant trouver la solution particulière :

$$\begin{aligned} 0,229 &= v(0) \\ &= 0,0458 + C \\ C &= 0.1832 \\ v(t) &= 0,0458 + 0.1832 \cdot e^{-0,3821 \cdot t} \end{aligned}$$

Quand est-ce que le volumme de polluant vaudra 0,0916 ?

$$\begin{aligned} 0,0916 &= 0,0458 + 0.1832 \cdot e^{-0,3821 \cdot t} \\ \ln\left(\frac{0,0916 - 0,0458}{0,1832}\right) \cdot \frac{-1}{0,3821} &= t \\ t &= 3,63 \end{aligned}$$

Il faut 3,63 ans pour que la concentration de polluant soit d'environ 0,02%.

Exemple :

$$\frac{dy}{dx} + 3y = e^x$$

La forme souhaitée est :

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

$$P(x) = 3 \qquad\qquad Q(x) = e^x$$

Facteur intégrant :

$$\begin{aligned} \int P(x)\,dx &= \int 3\,dx \\ &= 3x && \text{Sans le } +C \\ F(x) &= e^{\int P(x)\,dx} \\ &= e^{3x} \end{aligned}$$

Calculer l'intégral du facteur intégrant :

$$\begin{aligned} \int F(x) \cdot Q(x)\,dx &= \int e^{ex} \cdot e^x\,dx \\ &= \int e^{4x}\,dx \\ &= \frac{1}{4}e^{4x} + C && \text{Avec } +C \\ y(x) &= \frac{F(x) \cdot Q(x)\,dx}{F(x)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}e^{4x} + C}{e^{3x}} \\ &= \frac{1}{4}e^x + C \cdot e^{-3x} \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} \cdot x + 4y &= 3x \\ \frac{dy}{dx} + \frac{4y}{x} &= 3 \end{aligned}$$

$$P(x) = \frac{4}{x} \qquad\qquad Q(x) = 3$$

Facteur intégrant :

$$\begin{aligned} \int P(x)\,dx &= \int \frac{4}{x}\,dx \\ &= 4 \cdot \ln(x) && \text{Normalement } 4\ln(|x|) \text{ mais pas besoin ici} \\ F(x) &= e^{4\ln(x)} \\ &= \left(e^{\ln(x)}\right)^4 \\ &= x^4 \end{aligned}$$

Calculer l'intégral du facteur intégrant :

$$\begin{aligned}
\int F(x) \cdot Q(x)\, dx &= \int x^4 \cdot 3\, dx \\
&= 3 \int x^4\, dx \\
&= \frac{3}{5} x^5 + C \\
y(x) &= \frac{\frac{3}{5} \cdot x^5 + C}{x^4} \\
&= \frac{3}{5} \cdot x + \frac{C}{x^4}
\end{aligned}$$

3.3 Equation différentielles de type Bernoulli (non linéaire)

3.3.1 Forme

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n \qquad n \neq 0\, (\text{linéaire}), n \neq 1\, (\text{var. sép.})$$

3.3.2 Résolution

Faire un changement de variable.

$$\boxed{b(x) = y^{1-n}}$$

$$\frac{db}{dx} = \frac{d}{dx}(y^{1-n}) = (1-n) \cdot y^{-n} \cdot \underbrace{\frac{dy}{dx}}_{\text{Dérivée interne}}$$

Isoler dy/dx

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{db}{dx} \cdot y^n$$

L'équation différentielle devient :

$$\begin{aligned}
\underbrace{\frac{y^n}{1-n} \cdot \frac{db}{dx}}_{\frac{dy}{dx}} + P(x) \cdot y &= Q(x) \cdot y^n \\
\frac{1}{1-n} \cdot \frac{db}{dx} + P(x) \cdot y^{1-n} &= Q(x) \\
\frac{1}{1-n} \cdot \frac{db}{dx} + P(x) \cdot b &= Q(x) \\
\boxed{\frac{db}{dx} + P(x) \cdot (1-n) \cdot b = Q(x) \cdot (1-n)} \\
b(x) = ... \qquad & \rightarrow y = \sqrt[1-n]{b}
\end{aligned}$$

C'est maintenant une équation linéaire d'ordre 1.

3.3.3 Exemple

$$\frac{dy}{dt} = 3y - 5y^2$$

Premièrement, changement de forme :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} - 3y &= -5y^2 \\ P(t) &= -3 & Q(t) &= -5 \\ n &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(t) &= y^{1-n} \\ &= y^{-1} \\ &= \frac{1}{y}\frac{db}{dx} + P(x) \cdot (1-n) \cdot b & &= Q(x) \cdot (1-n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{db}{dx} - 3 \cdot (-1) \cdot b &= -5 \cdot (1-2) \\ \underbrace{\frac{db}{dt} + 3b = 5}_{\text{Ed lin. d'ordre 1}} \end{aligned}$$

Facteur intégrant :

$$\begin{aligned} \overline{P}(t) &= 3 & \overline{Q}(t) &= 5 \\ \int \overline{P}(t)\,dt &= \int 3\,dt \\ &= 3t \\ F(t) &= e^{\int \overline{P}(t)\,dt} \\ &= e^{3t} \end{aligned}$$

Calculer l'intégrale du facteur intégrant :

$$\begin{aligned} \int F(t) \cdot \overline{Q}(t)\,dt &= \int e^{3t} \cdot 5\,dt \\ &= \frac{5}{3} \cdot e^{3t} + C \end{aligned}$$

Solution :

$$\begin{aligned} b(t) &= \frac{\int F(t) \cdot \overline{Q}(t)\,dt}{F(t)} \\ &= \frac{\frac{5}{3} \cdot e^{3t} + C}{e^{3t}} \\ &= \frac{5}{3} + C \cdot e^{-3t} \end{aligned}$$

Trouver $y = \frac{1}{b}$ car $b = \frac{1}{y}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} &= y \\ &= \frac{1}{\frac{5}{3} + C \cdot e^{-3t}} \end{aligned}$$

4 Equation différentielle d'ordre égal ou supérieur à deux

4.1 Equation différentielle ne comportant qu'une seule dérivée

4.1.1 Forme

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x)$$

4.1.2 Résolution

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = x^2$$

Il suffit d'intégrer deux fois.

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 y}{dx^2} &= x^2 \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3}x^3 + C_1 \\
y &= \frac{1}{12}x^4 + C_1 x + C_2
\end{aligned}$$

De manière générale, il suffit d'intégrer n fois

4.1.3 Exemple :

$$\begin{aligned}
\frac{d^3 y}{dx^3} &= \sin(3x) \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{1}{3}\cos(3x) + C_1 \\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{9}\sin(3x) + C_1 \cdot x + C_2 \\
y &= \frac{1}{27}\cos(3x) + \frac{1}{2}C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x
\end{aligned}$$

4.2 Equation différentille à coefficiant constant

4.2.1 Cas Homogène

Forme

$$y'' + by' + c \cdot y = \underbrace{0}_{\text{Homogène car } = 0} \qquad b,\, c \in \mathbb{R}$$

$$r^2 + br + c = 0 \qquad \text{Equation caractéristique}$$

Résoudre l'équation différentielle en utilisant le $\Delta = b^2 - 4ac$.

$$\begin{aligned}
&\Delta > 0 : \\
&\quad r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} \\
&\quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} \\
&\quad y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot e^{r_2 x} \\
&\Delta = 0 : \\
&\quad r_1 = r_2 = \frac{-b}{2} \\
&\quad y(x) = C_1 \cdot e^{r_1 x} + C_2 \cdot x \cdot e^{r_1 x} \\
&\Delta < 0 : \\
&\quad r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \alpha + j \cdot \beta \\
&\quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2} = \alpha - j \cdot \beta \\
&\quad y(x) = e^{\alpha x}(C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x))
\end{aligned}$$

Exemple :

$$y'' - y' - 2y = 0$$

Equation caractéristique :

$$\begin{aligned}
r^2 - r - 2 &= 0 \\
(r-2)(r+1) &= 0
\end{aligned}$$

Pas besoin de passer par Δ puisque c'est factorisé ($\Delta > 0$).

$$\begin{aligned}
r_1 &= 2 \\
r_2 &= -1
\end{aligned}$$

Solution :

$$y(x) = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-x}$$

Exemple :

$$2y'' - 16y' + 32y = 0$$

Chercher $y'' + ... = 0$:

$$y'' - 8y' + 16y = 0$$

Equation caractéristique :

$$\begin{aligned} r^2 - 8r + 16 &= 0 \\ (r-4)^2 &= 0 & \Delta = 0 \\ r &= 4 \end{aligned}$$

Solution :

$$y(x) = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot x \cdot e^{4x}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y &= 0 \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Equation caractéristique :

$$\begin{aligned} r^2 - 2r + 5 &= 0 & b = -2,\, c = 5 \\ \Delta &= 4 - 4 \cdot 5 \\ &= -16 \\ &= (4j)^2 \\ r_1 &= \frac{2+4j}{2} \\ &= 1 + 2j \\ r_2 &= \frac{2-4j}{2} \\ &= 1 - 2j \\ \alpha &= 1 & \beta = 2 \end{aligned}$$

Solution :

$$y(x) = e^{1x}(C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x))$$

Déterminer C_1 et C_2 :

$$\begin{aligned} y(0) = 1 &= 1 \cdot (C_1 + 0) \\ C_1 &= 1 \\ y'(x) &= e^x(C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)) + e^x(-2C_1 \cdot \sin(2x) + 2C_2 \cdot \cos(2x)) \\ y'(0) = 0 &= C_1 + 2C_2 \\ 2C_2 &= -1 \\ C_2 &= \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

4.2.2 Cas non homogène

Forme

$$y'' + by' + cy = f(x)$$

1. Résoudre l'équation homogène $y'' + by' + cy = 0$. Nous obtenons une solution $y_h(x) = ...C_1... + C_2...$
2. Rechercher une solution particulière à l'équation différentielle non-homogène. La solution particulière dépend de $f(x)$:
   (a) Si $f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x}$ avec $P(x)$ un polynôme $(a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ...)$ de degré $= n$, $\alpha \in \mathbb{R}$:
      i. Si $\alpha \neq r_1$ et $\alpha \neq r_2$, alors :
      $$y_p(x) = Q(x) \cdot e^{\alpha x} \qquad \text{avec } Q(x) \text{ polynôme de degré } n$$
      ii. Si $\alpha = r_1$ et $\alpha \neq r_2$ ou $\alpha = r_2$ et $\alpha \neq r_1$, alors :
      $$y_p(x) = Q(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x \qquad \text{avec } Q(x) \text{ polynôme de degré } n$$
      iii. Si $\alpha = r_1 = r_2$ $(\Delta = 0)$, alors :
      $$y_p(x) = Q(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^2 \qquad \text{avec } Q(x) \text{ polynôme de degré } n$$
   (b) Si $f(x) = P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + Q(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x)$ avec $P(x)$ et $Q(x)$ un polynôme $(a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + ...)$ de degré $= n$, $\alpha \in \mathbb{R}$:
      i. Si $\alpha + \beta j$ n'est pas un zéro de l'équation caractéristique, alors :
      $$y_p(x) = R(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + S(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \qquad \text{avec } R(x) \text{ et } S(x) \text{ des polynômes de degré } \max(n, m)$$
      ii. Si $\alpha + \beta j$ est un zéro de l'équation caractéristique :
      $$y_p(x) = x \cdot R(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + x \cdot S(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \qquad \text{avec } R(x) \text{ et } S(x) \text{ des polynômes de degré } \max(n, m)$$

Exemple (a) ii. :

$$y'' - y' - 2y = e^{-x}$$

1. Premièrement, résoudre l'équation homogène :
$$\begin{aligned} y'' - y' - 2y &= 0 \\ r^2 - r - 2 &= 0 \\ (r-2)(r+1) &= 0 \\ y(x) &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} \end{aligned}$$
2. $f(x) = e^{-x}$ donc $\alpha = -1$, $P(x) = 1$ et le degré n vaut 0.
$$\begin{aligned} y_p(x) &= Q(x) \cdot e^{-x} \cdot x \qquad Q(x) \text{ :polynôme de degré } 0 \ = a \\ y_p(x) &= a \cdot e^{-x} \cdot x \end{aligned}$$
Déterminer a en insérant $y_p(x)$ dans l'équation non homogène.
$$y_p'(x) = ae^{-x} - axe^{-x} \qquad \begin{aligned} y_p''(x) &= -ae^{-x} - ae^{-x} + axe^{-x} \\ &= -2ae^{-x} + axe^{-x} \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} e^{-x} &= y'' - y' - 2y \\ &= -2ae^{-x} + axe^{-x} - (ae^{-x} - axe^{-x}) - 2axe^{-x} \\ &= -3ae^{-x} \qquad \rightarrow a = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

3. Réponse finale :

$$\begin{aligned} y(x) &= y_h(x) + y_p(x) \\ &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{3} x e^{-x} \end{aligned}$$

Exemple (b) i

$$y'' - 2y' + 5y = \sin(x)$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y &= 0 \\ r^2 - 2r + 5 &= 0 \\ \Delta &= 4 - 20 \\ &= -16 && \text{Plus petit que 0} \\ &= (4j)^2 \\ r_1 &= \frac{2+4j}{2} \\ &= 1 + 2j \\ r_2 &= \frac{2-4j}{2} \\ &= 1 - 2j \\ y_h(x) &= e^x((C_1 \cos(2x)) + C_2 \sin(2x)) \end{aligned}$$

2. Equation non homogène

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) \\ &= P(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + Q(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) && \begin{gathered} \alpha = 0,\ \beta = 1 \\ \underbrace{P(x) = 0}_{\text{degré } 0},\ \underbrace{Q(x) = 1}_{\text{degré } 0} \end{gathered} \\ y_p(x) &= R(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \cos(\beta x) + S(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) && \begin{gathered} R(x) = a,\ S(x) = b \\ \alpha = 0,\ \beta = 1 \end{gathered} \\ y_p(x) &= a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

y_p'' satisfait à l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + 5y_p &= \sin(x) \\ y_p' &= -a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) \\ y_p'' &= -a \cdot \cos(x) - b \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

Remplacer :

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + 5y_p &= \sin(x) \\ &= -a \cdot \cos(x) - b \cdot \sin(x) - 2(-a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)) + 5(a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)) \\ \sin(x) &= -a \cdot \cos(x) - b \cdot \sin(x) - 2(-a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x)) + 5(a \cdot \cos(x) + b \cdot \sin(x)) \\ \sin(x) &= \cos(x)(-a - 2b + 5a) + \sin(x)(-b + 2a + 5b) \\ & \begin{cases} 4a - 2b = 0 \\ 4b + 2a = 1 \end{cases} \\ \rightarrow a &= \frac{1}{10} \\ \rightarrow b &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

3. Réponse finale :

$$\begin{aligned} y &= y_n + y_p \\ &= e^x(C_1 \cdot \cos(2x) + C_2 \cdot \sin(2x)) + \frac{1}{10} \cdot \cos(x) + \frac{1}{5} \cdot \sin(x) \end{aligned}$$

Lorsqu'une équation homogène d'ordre 2 est résolu, par exemple $y'' + by' + cy = 0$ avec $\Delta < 0$, on a alors :

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{\alpha x}\left(C_1 \cdot \cos(\beta x) + C_2 \cdot \sin(\beta x)\right) \\ &= A \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x + \phi) \\ A &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} & \phi &= \arctan\left(fracC_1C_2\right) \\ \text{signe}(\sin(\phi)) &= \text{signe}(C_2) \end{aligned}$$

Exemple :

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + 5y &= 0 \\ y(0) &= 1 & y'(0) &= 2 \end{aligned}$$

Trouver la solution $y(x)$ en utilisant la la forme $y(x) = Ae^{\alpha x}\sin(\beta x + \phi)$.

$$\begin{aligned} r^2 - 2r + 5 &= 0 \\ \Delta &= 4 - 20 = -16 \\ r &= \frac{2 \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4j}{2} \\ &= 1 \pm 2j \\ \alpha &= 1 & \beta &= 2 \text{ (on ne prend pas } \beta \text{ négatif)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(x) &= A \cdot e^{\alpha x} \cdot \sin(\beta x) \\ &= A \cdot e^{x} \cdot \sin(2x) \\ y'(x) &= Ae^x \cdot \sin(2x + \phi) + Ae^x \cdot \cos(2x + \phi) \cdot 2 \\ y'(0) &= A \cdot \sin(\phi) + 2A \cdot \cos(\phi) \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A\sin(\phi) = 1 \\ A\sin(\phi) + 2A\cos(\phi) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow A &= \frac{1}{\sin(\phi)} \\ 2 &= A\sin(\phi) + 2A\cos(\phi) \\ &= 1 + 2 \cdot \frac{\cos(\phi)}{\sin(\phi)} \\ \cot(\phi) &= \frac{1}{2} \\ \rightarrow \phi &= 1.107 \\ \rightarrow A &= \frac{\sqrt{5}}{2} \\ y(x) &= \frac{\sqrt{5}}{2}e^x \cdot \sin(2x + 1.107) \end{aligned}$$

Troisième partie
Séries et transformées de Fourrier

Développement d'une fonction en série de Taylor en $x = x_0$:

$$f(x) = f(x_o) + f'(x_o)(x - x_o) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ...$$

Le principe est de connaitre ce que vaut une fonction et toutes ses dérivées en un points. A partir de ses informations, il est possible de reconstuire la fonction.
Fourrier a plus tard proposé d'approcher des fonctions périodiques par des sommes de sinus et cosinus. Le développement de Taylor avec quelques termes donne une approximation locale (au alentour du point x_o) bonne, mais qui se déteriore si on s'éloigne de x_o. Le développement de Fourrier est, au contraire, sera bon globalement (pour une fonction périodique).
Une fonction $f(t)$, c'est-à-dire dépendant de t, est périodique si :

$$f(t) = f(t + T),\ \forall t \in \mathcal{D}_f \qquad \text{Période : } T$$

La période fondamentale est la plus petite valeur de T (>0) pour laquelle $f(t) = f(t + T)$ est vrai.

Exemple : Quelle est la période fondamentale ?

$f(t)$	Période fondamentale
$\sin(t)$	2π
$\cos(t)$	2π
$\tan(t)$	π
$\sin(2t)$	π
$\sin(nt)$	$\frac{2\pi}{n}$
$\cos(nt)$	$\frac{2\pi}{n}$

Pour une fonction carré de période 2, la période fondamentale vaut 2.

1 Parité

1. $f(t) = f(-t)$: Fonction paire $\forall t \in \mathcal{D}_f$. Symétrie axiale d'axe y.
2. $f(-t) = -f(t)$: Fonction impaire $\forall t \in \mathcal{D}_f$. Symétrie centrale ou rotation de 180°autour de l'origine.

Exemple 54 :

$$\begin{aligned}
f(t) &= t^2 && \text{Paire}\\
f(t) &= t^{2n},\ n \in N && \text{Paire}\\
f(t) &= t && \text{Impaire}\\
f(t) &= t^{2n+1},\ n \in N && \text{Impaire}\\
f(-t) &= (-t)^2 + (-t) && \\
&= t^2 - t && \text{Ni paire ni impaire}\\
f(t) &= 0 && \text{Paire \& impaire}\\
f(t) &= \sin(nt) && \text{Impaire}\\
f(t) &= \cos(nt) && \text{Paire}
\end{aligned}$$

$f_1(t)$ paire et $f_2(t)$ paire, $g_1(t)$ impaire et $g_2(t)$ impaire.

$f_1(t) \cdot f_2(t)$	Paire
$f_1(t) \cdot g_1(t)$	Impaire
$g_1(t) \cdot g_2(t)$	Paire

2 Propriété des fonction sinus et cosinus

1. $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = 0$$

2. $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = 0$$

La période vaut :

$$\frac{2\pi L}{n\pi} = \frac{2L}{n}$$

3. $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \cdot \left(\cos\frac{n\pi t}{L}\right) dt = 0$$

4. $$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \cdot \left(\sin\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \begin{cases} 0,\ n \neq m \\ L,\ m = n \end{cases}$$

5. $$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \cdot \left(\cos\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \begin{cases} 0,\ n \neq m \\ L,\ m = n \end{cases}$$

3 Développement des série de Fourrier

Si $f(t)$ est développable en série de Fourrier, alors $f(t)$ est périodique de période $2 \cdot L$ et le développement de $f(t)$ est le suivant :

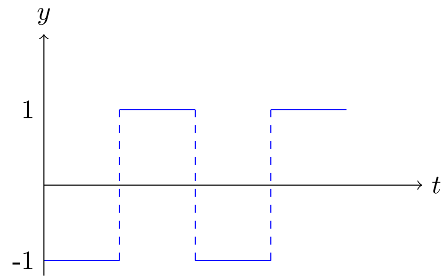
$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right)$$

a_0 étant la valeur moyenne de f sur une période. Les valeurs a_n et b_n pour une fonction $f(t)$ définit sur$[-L; L]$ se calcule de la façon suivante :

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt$$
$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$
$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt$$

a_n étant les contributions paires du signal, et b_n les impaires.

Exemple : Fonction d'onde carrée de période 2



$$f(t) = \begin{cases} 1, \ 0 < t \leq 1 \\ -1, \ -1 < t \leq 0 \end{cases}$$

La période vaut 2, L vaut donc 1.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)\, dt \end{aligned}$$

f est une fonction définie par partie, il faut donc décomposer l'intégrale.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} f(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{0} -1\, dt + \frac{1}{2} \int_{0}^{1} 1\, dt \\ &= \frac{1}{2}(-t)\Big|_{(-1,0)} + \frac{1}{2}(-t)\Big|_{(0,1)} \\ &= \frac{1}{2}(0 - (-(-1))) + \frac{1}{2}(1 - 0) \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc $a_0 = 0$, il était aussi possible de directement déduire ce résultat car la fonction est impaire puisque la règle $f(t) = t$ s'y applique.

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} f(t)\cdot\sin(n\pi t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{0}\sin(n\pi t) + \int_{0}^{1}\sin(n\pi t) \\
&= \left(\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right)\Big|_{(-1,0)} + \left(\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right)\Big|_{(0,1)} \\
&= \left(\frac{\cos(n\pi\cdot 0)}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi\cdot(-1))}{n\pi}\right) + \left(\frac{\cos(n\pi\cdot 1)}{n\pi} - \frac{\cos(n\pi\cdot 0}{n\pi}\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{L}\int_{l}^{L} f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1} f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt \\
&= -\int_{-1}^{0}\sin(n\pi t)\,dt + \int_{0}^{1}\sin(n\pi t)\,dt \\
&= +\left(\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right)\Big|_{(-1,0)} + \left(-\frac{\cos(n\pi t)}{n\pi}\right)\Big|_{(0,1)} \\
&= \frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi\cdot 0) - \cos(n\pi\cdot -1)) - \frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi\cdot 1) - \cos(n\pi\cdot 0)) \\
&= \frac{1}{n\pi}(2 - 2(-1)^n) \\
&= \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)
\end{aligned}$$

Réponse finale :

$$\begin{aligned}
f(t) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)\cdot\sin(n\pi t)
\end{aligned}$$

3.1 Calcul des coefficients de Fourrier

Au lieu de calculer les coefficients de la façon suivantes :

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt$$

Il est possible de le faire comme ceci :

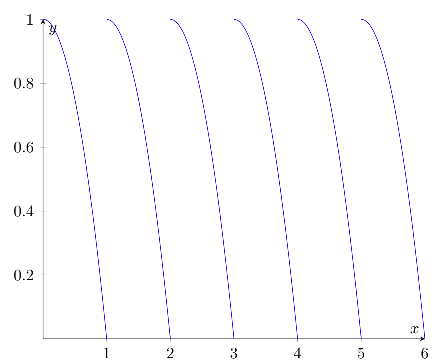
$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L+C}^{L+C} f(t)\,dt$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L+C}^{L+C} f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L+C}^{L+C} f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt$$

Modifier l'intervalle peut simplifier l'intégration en évitant une intégration par partie.

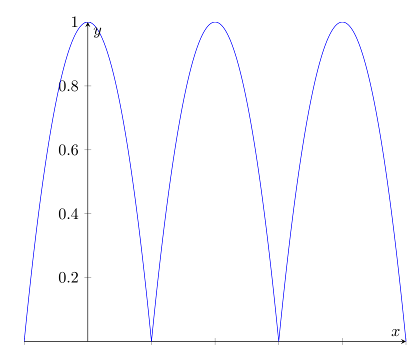
4 Prolongements quelconques, paires & impaires de fonctions

Permet d'appliquer Fourrier sur des fonctions quelconques.

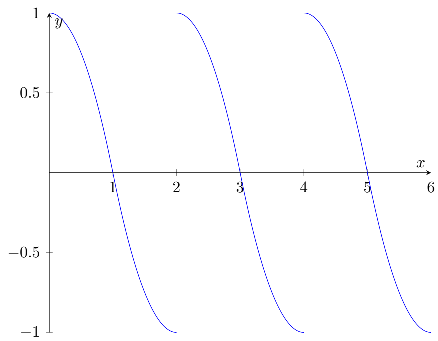
Exemple : $f(t) = -t^2 + 1$ définie sur $[0, 1]$



La période de cette fonction vaut 1 ($2L = 1$).
Prolongement paire :



La période vaut deux ($2L = 2$), cette fonction n'a pas de saut. $a_n = \frac{1}{n^2}$ et $b_n = 0$
Prolongement impaire :



$a_n = 0$ et $b_n = \frac{1}{n}$

5 Série de Fourier complexe

En utilisant les formules d'Euler :

$$\cos(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2j}$$
$$\sin(\alpha) = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}$$

Il est possible de transformer une série de Fourier réelle :

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(\frac{n\pi t}{L} + b_n \cdot \sin(\frac{n\pi n}{L}))$$

en une série de Fourier complexe :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \cdot e^{\frac{jn\pi t}{L}}$$

Le coefficiant C_n peut être obtenu de deux façons :

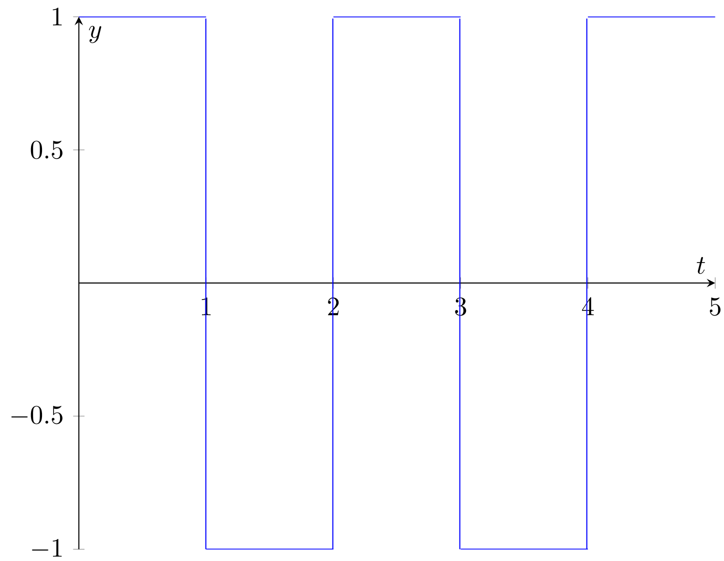
1. Si a_n, b_n et a_0 sont déjà connu :

$$C_n = \frac{a_n - jb_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3$$
$$C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2} \qquad n = 1, 2, 3$$
$$C_0 = a_0$$

2. Par le calcul des C_n :

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(t) \cdot e^{\frac{-jn\pi t}{L}} \, dt \qquad n \in \mathbb{Z}$$

Exemple : Fonction d'onde carrée.



La période de cette fonction vaut 2, L est donc égal à 1.

$$\begin{aligned}
C_n &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot e^{\frac{-jn\pi t}{L}}\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_{-1}^{0} e^{-jn\pi t} + \frac{1}{2}\int_{0}^{1} e^{-jn\pi t} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-jn\pi}\cdot\left(e^{-jn\pi t}\right)\Big|_{0,1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{-jn\pi}\cdot\left(e^{-jn\pi t}\right)\Big|_{0,1} \\
&= -\frac{1}{2}\cdot\frac{j}{n\pi}\cdot\left(1-e^{jn\pi}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{j}{n\pi}\cdot\left(e^{-jn\pi}-1\right) \\
&= \frac{j}{n\pi}\left(-1+\frac{e^{jn\pi}+e^{-jn\pi}}{2}\right) \\
&= \frac{j}{n\pi}\cdot(\cos(n\pi)-1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_0 &= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot e^{\frac{-j\cdot 0\cdot\pi\cdot t}{L}}\,dt \\
&= \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt \\
&= 0 && \text{Fonction impaire}
\end{aligned}$$

La série de Fourier complexe vaut :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{j}{n\pi}(\cos(n\pi)-1)}_{C_n}\cdot e^{jn\pi t} \qquad n \neq 0$$

6 Transformée de Fourier

Il s'agit d'une série de Fourier complexe poussée à l'extrême. L'intégrale de Fourier sera traité en premier (série de Fourier réelle poussée à l'extrême).

6.1 Intégrale de Fourier

Supposons avoir un signal $f(t)$ périodique de période 2L dont il est possible de calculer la série de Fourier réelle.

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt$$
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt$$
$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\,dt$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cdot\cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right)$$

$\frac{n\pi}{L}$: fréquences
Ensemble des fréquences : $\{0,\ \frac{\pi}{L},\ \frac{2\pi}{L},\ \frac{3\pi}{L},\ \frac{4\pi}{L},\ ...\}$. Nous allons faire tendre L vers l'infini. De ce fait, la période devient infinie (fonction infini périodique) . Il faut alors analyser le spectre des fréquences lorsque $L \to \infty$.

$$L = \pi \qquad \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ ...\}$$
$$L = 10\pi \qquad \{0,\ \frac{1}{10},\ \frac{2}{10},\ \frac{3}{10},\ \frac{4}{10},\ ...\}$$
$$L = 100\pi \qquad \{\underbrace{0}_{a_0},\ \underbrace{\frac{1}{100}}_{a1,\,b1},\ \underbrace{\frac{2}{100}}_{a2,\,b2},\ \underbrace{\frac{3}{100}}_{a3,\,b3},\ \underbrace{\frac{4}{100}}_{a4,\,b4},\ ...\}$$
$$L = \infty \qquad [0,\ \underbrace{+\infty}_{a(\omega),\,b(\omega)}\ [\omega \in [0,\ +\infty[$$

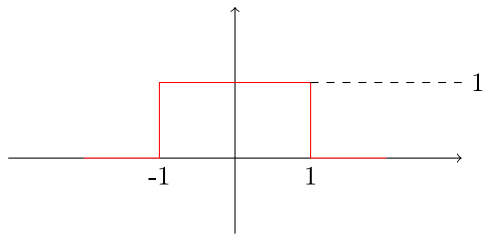
Quand $L \to \infty$, $a_n \to a(\omega)$ et $b_n \to b(\omega)$, $\omega \in [0,\ \infty[$

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\cos(\omega t)\,dt \qquad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cdot\sin(\omega t)\,dt$$

De ce fait, la représentation en intégrale de Fourier vaut :

$$f(t) = \int_{0}^{\infty}(a(\omega)\cdot\cos(\omega t) + b(\omega)\cdot\sin(\omega t))\,dt$$

Exemple : Transformée de Fourier

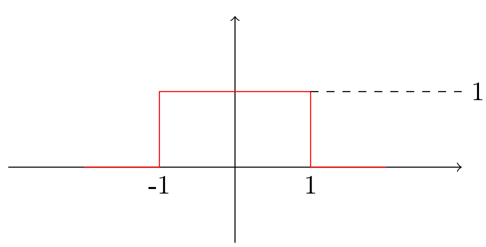


$$f(t) = \begin{cases} 1, \ -1 \leq t \leq 1 \\ 2, \text{ sinon} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} a(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot \cos(\omega t) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} 1 \cdot \cos(\omega t) \, dt \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \Big|_{(-1,\,1)} \\ &= \frac{2 \sin(\omega)}{\pi \omega} \\ b(\omega) &= 0 \text{ (fonction paire)} \end{aligned}$$

$$f(t) = \int_{0}^{\infty} \frac{2 \sin(\omega)}{\pi \omega} \cdot \cos(\omega t) \, d\omega$$

Exemple : Saut unité = fonction de Heaviside

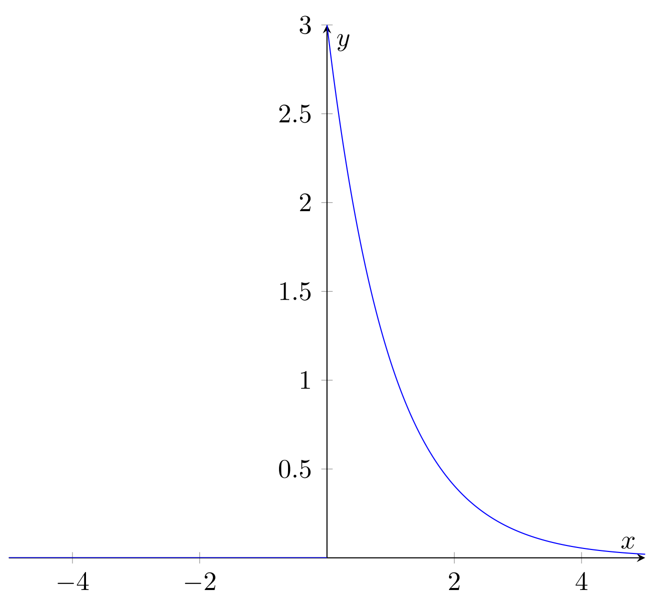


$$u(t) = H(t) = \begin{cases} 1, \ t \geq 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \begin{cases} 1, \ -1 \leq t \leq 1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \\ &= u(t+1) - u(t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \int_{-1}^{1} 1 \cdot e^{-j\omega t}\, dt \\
&= \frac{-1}{j\omega} \left[e^{-j\omega t}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{-1}{j\omega} \left[e^{-j\omega} - e^{j\omega}\right]_{-1}^{1} \\
&= \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{j\omega} \\
&= \underbrace{\frac{2\sin(\omega)}{\omega}}_{\text{Transformée de Fourier}} \\
\sin(\omega) &= \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j} \\
\cos(\omega) &= \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2j}
\end{aligned}$$

Exemple : $f(t) = 3 \cdot u(t) \cdot e^{-5t}$



$$\hat{f}(\omega) = \frac{3}{5 + j\omega}$$

6.2 Propriétés des transformées de Fourier

1. **Linéarité :** Si $\mathcal{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega)$ et $\mathcal{F}[g(t)] = \hat{g}(\omega)$, alors :

$$\mathcal{F}[a \cdot f(t) + b \cdot g(t)] = acdot\hat{f}(\omega) + b \cdot \hat{g}(\omega),\ a,\ b \in \mathbb{R}\mathcal{F}^{-1}[a \cdot \hat{f}(t) + b \cdot \hat{g}(t)] = acdot f(\omega) + b \cdot g(\omega),\ a,\ b \in \mathbb{R}$$

2. **Dérivée :** Si $\mathcal{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega)$, alors :

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n \cdot \hat{f}(\omega)$$

3. **Translation en t et en ω :** Si $\mathcal{F}[f(t)] = \hat{f}(\omega)$ alors :

$$\mathcal{F}[f(t-a)] = e^{-ja\omega} \cdot \hat{f}(\omega),\ a \in \mathbb{R}$$

$$\mathcal{F}^{-1}[\hat{f}(\omega - b)] = e^{ja\omega} \cdot f(t),\ b \in \mathbb{R}$$

De plus :

$$\mathcal{F}[e^{jbt} f(t)] = \hat{f}(\omega - b)$$

Exemples :

1. $\mathcal{F}[H(t)e^{-t} + H(t)e^{-3t}]$

$$\begin{aligned}\hat{f}(t) &= \frac{1}{1+j\omega} + \frac{1}{3+j\omega} \\ &= \frac{4+2j\omega}{(1+j\omega)(3+j\omega)}\end{aligned}$$

2.

$$f(t) = \begin{cases} 3,\ -2 \leq t \leq 2 \\ 0,\ \text{sinon} \end{cases}$$

(a) $\mathcal{F}[f(t)]$

$$\hat{f}(t) = 3 \cdot \frac{2\sin(2\omega)}{\omega}$$

(b) $\mathcal{F}[e^{-jt} f(t)]$

$$\hat{f}(\omega + 1) = \frac{6\sin(2\omega + 2)}{\omega + 1}$$

3. Soit $\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2+j(\omega-2)}$, que vaut $f(t)$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\left[\underbrace{\frac{1}{2+j\omega}}_{\hat{g}(\omega)}\right] &= h(t) \cdot e^{-2t} \\ &= g(t) \\ \hat{f}(\omega) &= \hat{g}(\omega - 2) \\ f(t) &= e^{2jt} \cdot g(t) \\ &= h(t) \cdot e^{-2t} \cdot e^{2jt} \\ &= u(t) \cdot e^{2t(j-1)}\end{aligned}$$

4. $\mathcal{F}[f(t)]$ avec :

$$f(t) = \begin{cases} e^{-3t},\ t \geq 0 \\ e^{3t},\ t < 0 \end{cases}$$

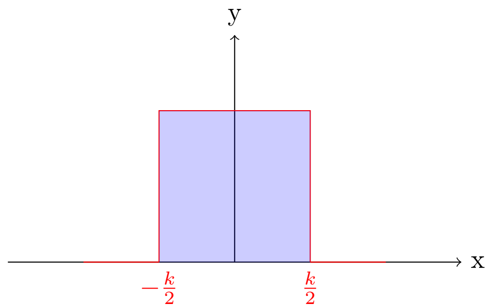
5.

$$g(t) = \begin{cases} 1,\ 1 \leq t \leq 3 \\ 0,\ \text{sinon} \end{cases}$$

7 Impulsion de Dirac

On définit la fonction rectangle :

$$R(t) = \begin{cases} \frac{1}{h},\ -\frac{h}{2} \leq t \leq \frac{h}{2} \\ 0,\ \text{sinon} \end{cases}$$



L'air sous la courbe (en bleu) vaut toujours 1.

$$\delta(t) = \lim_{h \to 0} R(t)$$

Propriétés :

1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$$

2.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t) = f(0)$$

3.

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\delta(t)\right] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{-j\omega t}\, dt \\ &= e^{-j\omega \cdot 0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. On sait que $\mathcal{F}[\delta(t)] = 1$, translation :

$$\mathcal{F}\left[\delta(t-a)\right] = e^{-j\omega a}$$

5. A partir de l'impulsion de Dirac et du principe de durabilité, il est possible de montrer que :

$$\mathcal{F}\left[\cos(at)\right] = \pi(\delta(\omega - a) + \delta(\omega + a))$$

6.

$$\mathcal{F}\left[\sin(at)\right] = \frac{\pi}{j}(\delta(\omega - a) - \delta(\omega + a))$$

Train d'impulsions :

$$F(t) = \lambda(t) + 3\lambda(t-1) - 2\lambda(t+1)$$