



Signaux & Systèmes Électroniques

Théorème de l'échantillonnage & filtrage

Auteurs :

M. Samuel RIEDO

M. Pascal ROULIN

Professeur :

M. Daniel OBERSON

1 Introduction

L'échantillonnage est un procédé permettant de convertir un signal analogique en un signal numérique en enregistrant périodiquement l'amplitude du signal analogique. Une caractéristique de l'échantillonnage est *Combien faut-il d'échantillons au minimum afin de représenter de façon correcte un signal ?* ou *A quelle fréquence faut-il prendre des échantillons afin d'en avoir suffisamment ?* La notion de fréquence d'échantillonnage est importante puisqu'un signal mal échantillonné pourrait ne pas correspondre au signal d'origine.

Le filtrage permet d'éliminer certaines plages de fréquences non désirées dans le traitement de signal. Par exemple, il est possible d'atténuer le bruit ambiant lors d'un appel téléphonique. Il existe divers filtres, ayant leur propriété distincte. Ces derniers peuvent également être combinés en série afin d'obtenir un filtre plus spécifique.

2 Théorème de l'échantillonnage

En traitement de signal, l'échantillonnage est un procédé permettant de convertir un signal analogique en un signal numérique en enregistrant périodiquement la tension U d'un signal en un temps t .

La fréquence d'échantillonnage détermine le nombre de valeurs, appelées échantillons, enregistrées en l'espace d'une seconde. Plus la fréquence d'échantillonnage est grande, plus le signal échantillonné est fidèle au signal d'origine.

L'intervalle de temps T entre chaque échantillon est donné par :

$$T = \frac{1}{F_{\text{Echantillonnage}}}$$

Lors de la mesure d'un signal à l'aide d'un oscilloscope, ce dernier converti le signal d'entrée en l'échantillonnant. Il est alors important de connaître la fréquence d'échantillonnage de l'appareil et celle du signal à échantillonner pour ne pas faire d'erreur de mesure.

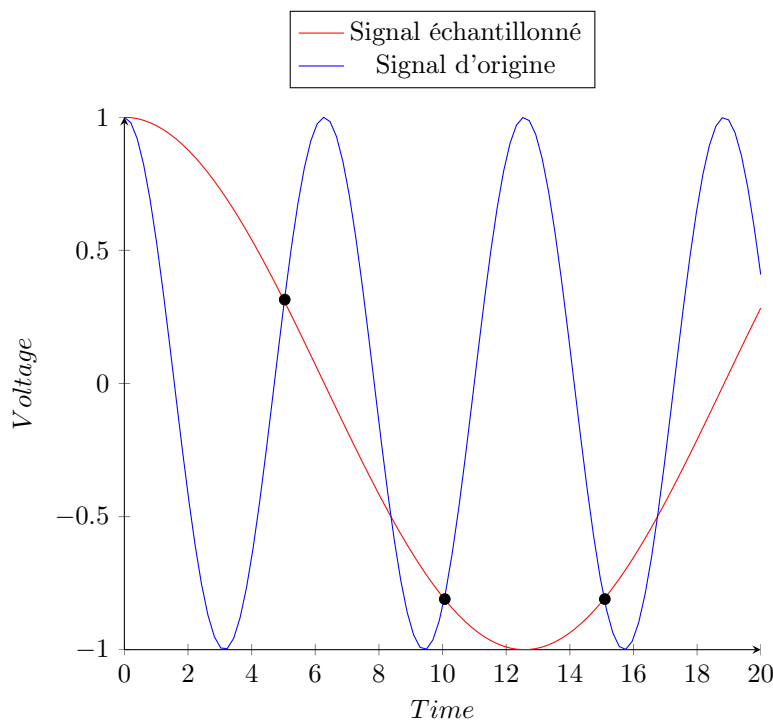


FIGURE 2 – Sous-échantillonnage

Le résultat serait le même pour un signal de 9980Hz avec la même fréquence d'échantillonnage.

$$9980Hz = 2 \cdot 5000Hz - 20Hz$$

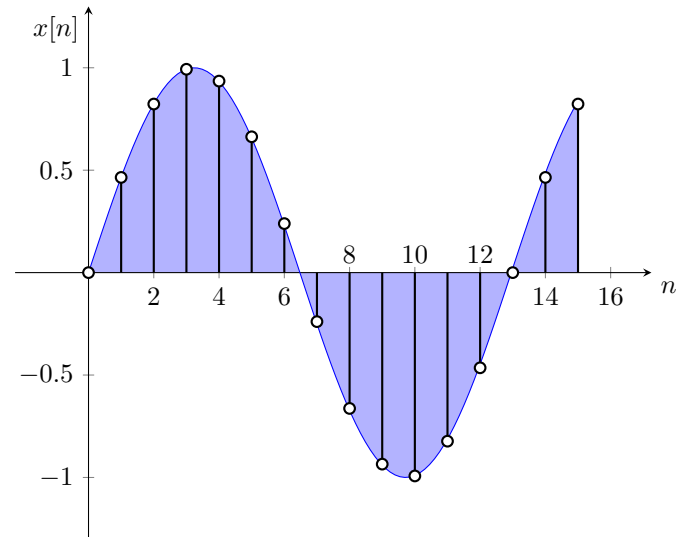


FIGURE 1 – Échantillonnage

Soit un signal d'entrée S de fréquence f_S , qu'elle devrait être la fréquence d'échantillonnage minimale d'un oscilloscope pour échantillonner ce signal correctement ?

Prenons le cas d'un signal sinusoïdal de fréquence $f = 2\pi\text{Hz}$ et une fréquence d'échantillonnage de 0.2Hz. Le premier échantillon se fera après 5 secondes, le second 5 secondes plus tard et ainsi de suite. Le graphique ci-contre (figure 2) représente le signal tel qu'il serait affiché dans ces conditions. Il est alors évident qu'une fréquence d'échantillonnage inférieure à la fréquence du signal d'origine est trop lente pour le représenter correctement.

La fréquence du signal échantillonné vaudra :

$$F_{\text{Signal}} = k \cdot F_{\text{Ech}} \pm x \quad k \in \mathbb{N}$$

Cela signifie que pour un signal de 5020Hz et une fréquence d'échantillonnage de 5000Hz, le signal échantillonné aura une fréquence de 20Hz.

$$5020Hz = 1 \cdot 5000Hz + 20Hz$$

Dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est égale à celle du signal à échantillonner (figure 3), le signal échantillonné sera continu.

Chaque fois que l'oscilloscope va mesurer la tension du signal, ce dernier aura exactement fait un cycle. Cette caractéristique est également vérifiable mathématiquement en calculant la période du signal à échantillonner ainsi que le temps entre chaque échantillon :

$$T = \frac{1}{f_{\text{signal}}}$$

$$\Delta = \frac{1}{f_{\text{échantillonnage}}}$$

Il est dès lors évident que si $f_{\text{signal}} = f_{\text{échantillonnage}}$, la valeur de T et celle de Δ seront identiques.

Dans le cas où la fréquence d'échantillonnage est inférieure à celle du signal à échantillonner, deux cas sont encore possibles :

- $F_{\text{signal}} \geq F_{\text{échantillonnage}}$
- $F_{\text{signal}} < F_{\text{échantillonnage}}$

Dans le premier cas, le signal sera parfaitement reproduit à l'écran (figure 4). En revanche, si la fréquence d'échantillonnage est plus lente que celle du signal à échantillonner, même de très peu, la fréquence du signal échantillonné sera faussée (figure 5).

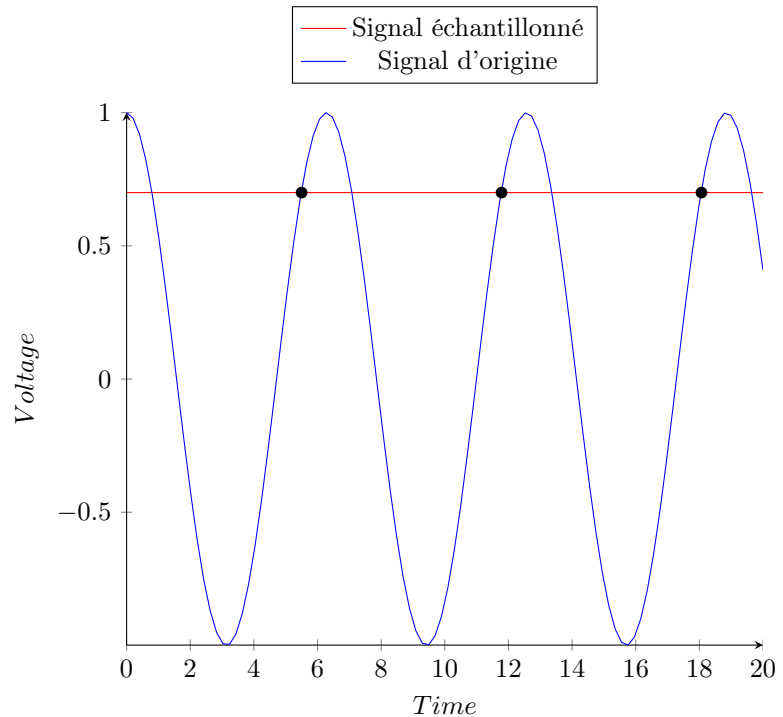


FIGURE 3 – Fréquence d'échantillonnage égale à la fréquence du signal

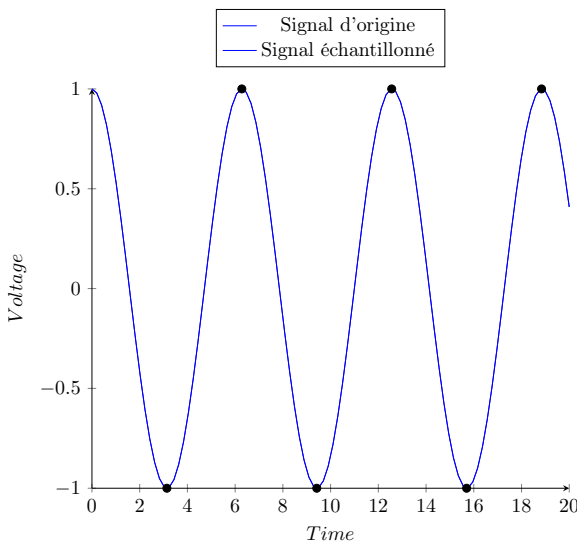


FIGURE 4 – $F_{\text{signal}} \geq 2 \cdot F_{\text{échantillonnage}}$

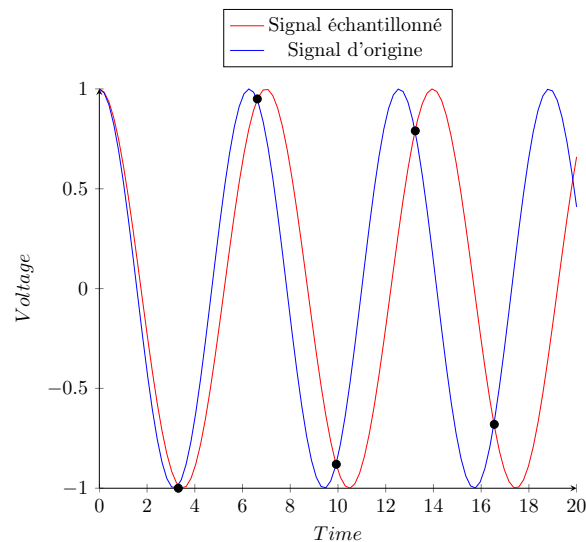


FIGURE 5 – $F_{\text{signal}} < 2 \cdot F_{\text{échantillonnage}}$

La fréquence d'échantillonnage doit donc être au minimum deux fois plus élevée que celle du signal à échantillonner. Cette fréquence est appelée *fréquence de Nyquist*, du nom de l'ingénieur l'ayant découvert.

3 Filtrage

Un filtre est un système servant à séparer les éléments. Dans le domaine du traitement de signal, les filtres sont utilisés pour éliminer certaines fréquences en les atténuant. Il existe quatre principaux filtres :

- **Filtre passe-bas** : Atténue les hautes et moyennes fréquences.
- **Filtre passe-haut** : Atténue les basses et moyennes fréquences.
- **Filtre passe-bande** : Atténue toutes les fréquences en dehors d'une certaine plage de fréquence.
- **Filtre réjecteur de bande** : Atténue toutes les fréquences dans une plage de fréquence.

Un filtre passe-bas peut être réalisé uniquement avec une résistance et un condensateur. Le signal d'entrée, appliqué aux bornes a et b, sera filtré aux bornes c et d.

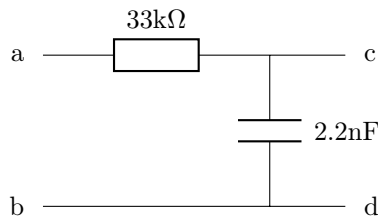


FIGURE 6 – Filtre RC

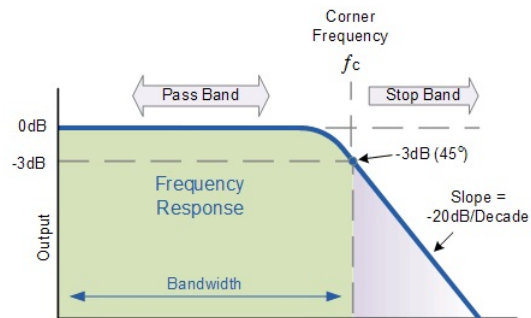


FIGURE 7 – Rapport entre U_{in} et U_{out}

Sur le diagramme de la figure 7, le signal d'entrée commence à être atténué légèrement avant la fréquence de coupure F_C (il est néanmoins possible de considérer que la plage de fréquence entre 0Hz et F_C n'est pas atténuée dans un filtre passe-bas). Cette fréquence dépend de la valeur de la résistance et du condensateur. Un signal de fréquence F_C sera atténué de 3dB, c'est-à-dire que son amplitude sera divisée par $\sqrt{2}$. Si le filtre était composé de plusieurs condensateurs ou inductances ne pouvant pas être simplifiés entre eux, le signal serait atténué de $n \cdot 3\text{dB}$ à F_C , n étant le nombre de condensateurs et d'inductances.

Selon le nombre de ses composants, nous pouvons classer les filtres par ordre. Un filtre avec un seul condensateur ou une seule inductance est un filtre du premier ordre, tel le filtre RC traité ici. Un filtre du premier ordre a une atténuation de 20dB par décade après F_C . Cela signifie que si la fréquence est multipliée par 10, le signal est atténué d'un facteur de 10 (20dB).

Dans notre cas, il était spécifié que le produit RC devait valoir environ $70 \times 10^{-6}\text{S}$. Nous avons donc choisi une résistance de $33\text{k}\Omega$ et un condensateur de 2.2nF . La fréquence de coupure de ce montage vaut :

$$\begin{aligned}
 F_C &= \frac{1}{2\pi RC} \\
 &= \frac{1}{2\pi \cdot 33\text{k}\Omega \cdot 2.2\text{nF}} \\
 &= 2191\text{Hz}
 \end{aligned}$$

En pratique, pour obtenir une atténuation de 3dB ($\sqrt{2}$), il a été nécessaire que le signal ait une fréquence de 2.3kHz au lieu des 2.2kHz. Cette différence est explicable par la précision des composants utilisés. La mesure ci-dessous (figure 8) démontre le rapport $\sqrt{2}$ entre le signal d'origine (canal 4) et le signal filtré (canal 3).

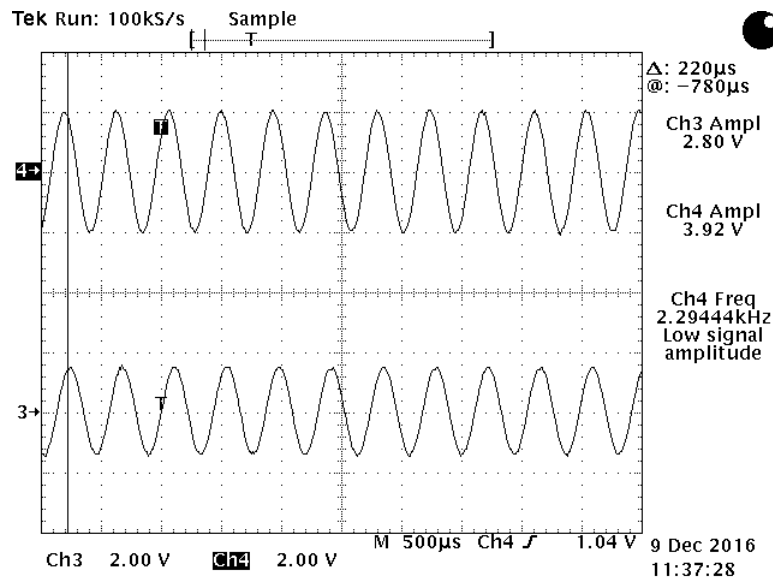


FIGURE 8 – Signal à 2.3kHz filtré

L'opération a été répétée une seconde fois dans l'objectif d'obtenir une atténuation d'un facteur de 10 (20dB) sur le signal d'origine. Le constat est que la fréquence à utiliser est environ 10 fois plus élevée que celle pour une atténuation de 3dB. Ce résultat s'explique par la propriété des filtres du premier ordre d'avoir une atténuation de 20db par décade après F_C .

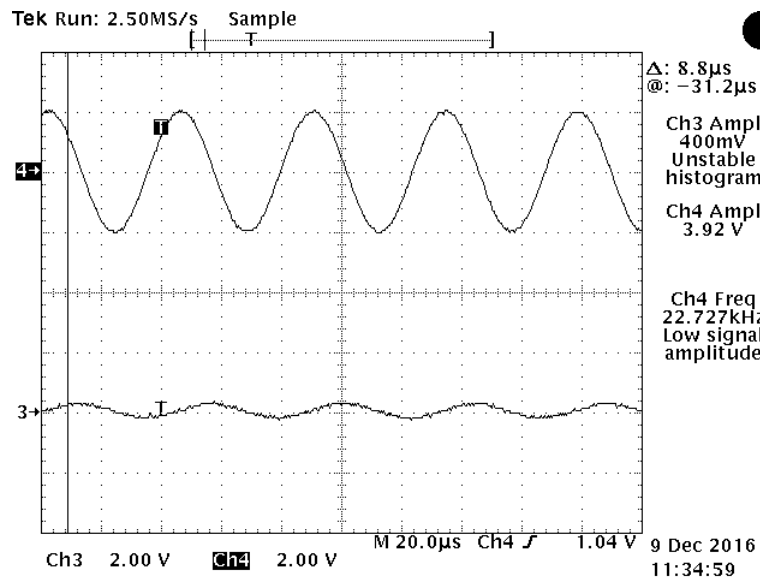


FIGURE 9 – Signal à 2.3kHz filtré

4 Double filtrage

Lorsque plusieurs filtres sont appliqués en série à un signal, chaque filtre est appliqué sur la sortie de celui le précédant. Dans le cas d'un double filtrage, c'est-à-dire un système à deux filtres, le second filtre le signal de sortie du premier.

Si les deux filtres appliqués sont identiques, l'atténuation entre le signal d'entrée et le signal de sortie sera doublée comparée à l'utilisation d'un seul filtre.

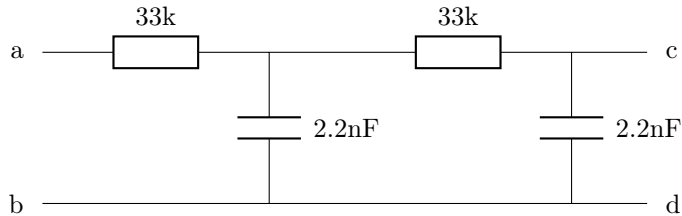


FIGURE 10 – Double filtre RC

Soit le filtre ci-contre (figure 10), il s'agit de deux filtres en série identiques à celui vu précédemment au chapitre sur le filtrage (figure 6). La fréquence de coupure F_C de chacun de ces filtres est donc restée inchangée (2191Hz). L'atténuation totale de ce montage à la fréquence de coupure est donc doublée comparée à celle d'un seul filtre (-6dB), de même pour l'atténuation par décade après F_C qui passe de -20dB à -40dB par décade.

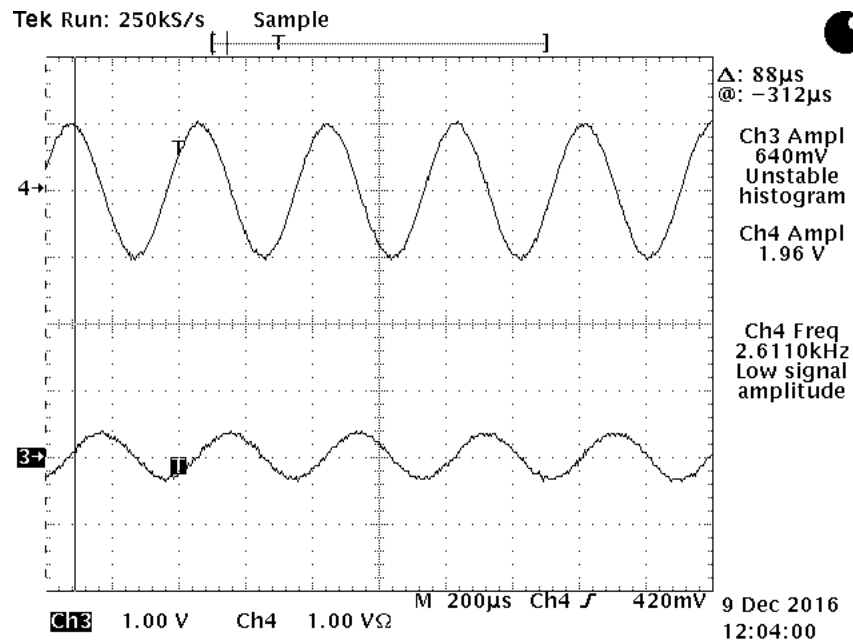


FIGURE 11 – Signal à 2.3 kHz filtré

Ci-dessus, le signal avant son passage dans le filtre (canal 4) puis après avoir été filtré (canal 3). Ce dernier est atténué au total de 6dB à 2,6kHz au lieu de 2,2kHz. Cette différence est due à la précision des composants utilisés dans nos filtres. Ces derniers n'étant pas totalement identiques, le premier influence le deuxième de manière inconstante, car leur fréquence de coupure respective n'est pas identique.

5 Conclusion

Un signal analogique doit être converti en un signal numérique au moyen du théorème de l'échantillonnage pour être traité par des appareils numériques. La fréquence d'échantillonnage est déterminante pour que le signal échantillonné soit une représentation correcte du signal d'origine. Cette dernière doit être au minimum deux fois plus élevée que la fréquence du signal à convertir.

Il est de plus possible en traitement de signal d'éliminer certaines fréquences en les atténuant au moyen de filtres. Un filtre passe-bas, constitué d'une résistance et d'un condensateur, filtre les hautes et moyennes fréquences. La fréquence de coupure F_C d'un filtre est la fréquence à laquelle le signal sera atténué de 3dB. À partir de cette fréquence, l'atténuation du filtre est de 20dB par décade, c'est-à-dire qu'une fréquence 10 fois plus élevée serait 10 fois plus atténuée. L'ordre d'un filtre est égal au nombre de condensateurs et d'inductances ne pouvant pas être réduit. Ce dernier détermine l'atténuation par décade ainsi que celle à F_C .

Les filtres peuvent être mis en série les un après les autres. Dans ce cas, l'atténuation totale correspond à la somme des atténuations de chaque filtre. Si deux filtres identiques sont mis en série, l'atténuation totale est le double de celle d'un seul des deux filtres. Néanmoins, dans ce cas, comme les filtres ne sont jamais parfaitement similaires, il est possible que les résultats pratiques divergent légèrement de ceux des calculs.

6 Références

Sampling: [Wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Sampling)

Dipôle: [guy.chaumeton](https://guy.chaumeton.fr/)

Filtre passe-bas: [Wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/Pass_filter)

Circuit RC: [Wikipedia.org](https://en.wikipedia.org/wiki/RC_circuit)

Fribourg, le 16 décembre 2016

Samuel Riedo

Pascal Roulin