Haute école d'ingénierie et d'architecture Fribourg. Math. spéc. I. Examen du 25 novembre 2016

Nom, Prénom: [redacted]

9pts

Note: 4,6

Travail écrit B

Matériel autorisé: Formulaire, calculatrice, résumé manuscrit d'une page recto-verso.
Durée: 2 périodes.

Dans tous les exercices, il est demandé d'écrire les détails des calculs. Une solution non développée sera considérée comme fausse.

Question 1 : Soit — 2 points

$2 = \sqrt{4}$

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}.$$

$1 = \sqrt{1}$
$2 = \sqrt{4}$
$3 = \sqrt{9}$

1. Tracer quelques courbes de niveau de f (au moins 3).
2. si $x = x(u,v) = v\cos(u)$ et $y = y(u,v) = v\sin(u)$, trouver $\dfrac{\partial f}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial v}$. Simplifier au maximum les expressions obtenues!

1

Question 2 : — 2 points
Si
$$z = 5x^3 + \sin(y)y^2$$
et (x,y) change de $(1,2)$ en $(0.95, 2.1)$, comparer les valeurs de Δz et dz.

1,5

Question 3 : — 3 points
Trouver le(s) maximum(s) et minimum(s) de la fonction f
$$f(x,y) = y^2 - 2x^2,$$
dans le domaine délimité par
$$g(x,y) = 3x^2 + y^2 \leq 6.$$

3

Question 4 : — 2 points
Trouver et classer les points critiques de la fonction
$$f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 3y^3 + 1.$$

1,5

Tourner la page !

Question 5 : 2 points

1

Résoudre l'équation différentielle

$$xy' + y + y^2x^4 = 0.$$

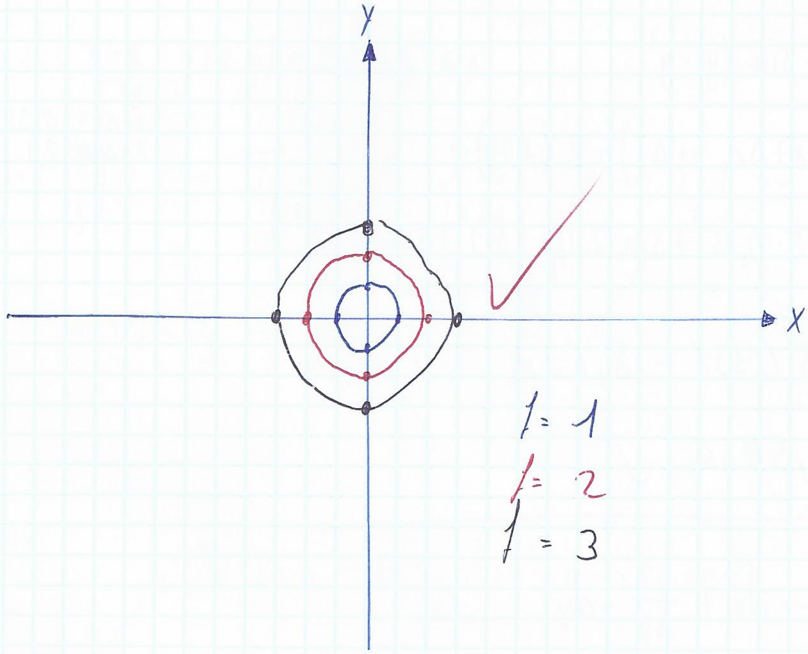
Question 6 : 2 points

Une citerne contient 20 kg de sel dissout dans 5000 L d'eau. De la saumure, qui contient 0.03 kg de sel par litre d'eau, y est déversée à raison de 25 L par minute. La solution est continuellement remuée et sort de la citerne au même débit. Combien y a-t-il de sel après une demi-heure?
Si vous ne trouvez pas l'équation différentielle, utiliser

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{3}{2} - \frac{1}{100}Q.$$

1

Question 1



b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ $\quad x(u,v) = v \cdot \cos(u)$ $\quad y(u,v) = v \cdot \sin(u)$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = v \cdot (-\sin(u))$$

$$\frac{\partial y}{\partial u} = v \cdot \cos(u)$$

$$= x\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot v \cdot (-\sin(u)) + y\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot v \cdot \cos(u)$$

$$= v \cdot \cos(u) \cdot \left(v^2 \cdot \cos^2(u) + v^2 \cdot \sin^2(u)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot v \cdot -\sin(u) + v \cdot \sin(u) \cdot \left(v^2 \cdot \cos^2(u) + v^2 \cdot \sin^2(u)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot v^2 \cdot \cos^2(u)$$

$$= \ldots$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = ?$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \cos(u) + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \sin(u) = \frac{\quad}{\sqrt{\quad}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial v} = ?$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(x \cdot \cos(u) + y \cdot \sin(u)\right) = \frac{1}{\sqrt{(v \cdot \cos(u))^2 + (v \cdot \sin(u))^2}}\left(v \cdot \cos^2(u) + v \cdot \sin^2(u)\right)$$

Question 2

$z = 5x^3 + \sin(y) \cdot y^2$

$x = 1$
$y = 2$
$x + \Delta x = 0,95$
$x + \Delta y = 2,1$

$\Delta z = z(x+\Delta x, y+\Delta y) - z(x,y)$

$= 5 \cdot 0,95^3 + \sin(2,1) \cdot 2,1^2 - (5 \cdot 1^3 + \sin(2) \cdot 2^2)$

$= 8,0936 - 8,637$

$= -0,5435$ ✓

Il j'ai fais en radian les sinus

$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$

$dx = -0,05$
$dy = 0,1$

$= 15x^2 \, dx + (\cos(y) \cdot y^2 + \sin(y) \cdot 2y)\, dy$ ✓

$= 15 \cdot 1^2 \cdot (-0,05) + 0,1 \cdot (\cos(2) \cdot 2^2 + \sin(2) \cdot 4) \cdot$ ⟵ calcul cos/sin ? ✗

$= -0,75 \quad + 0,1 \cdot (-1,66 \quad + 3,63)$

$= 3,6371$ (✓)

Je pensais que les deux chiffres seraient identiques, il y a donc très certainement une erreur de calcul.

Question 3

$f(x,y) = y^2 - 2x^2 \qquad g(x,y) = 3x^2 + y^2 \leq 6$

$\vec{\nabla f} = \begin{pmatrix} 0-4x \\ 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x \\ 2y \end{pmatrix} \to \vec{\nabla f} = \vec{0} \to \begin{cases} -4x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \to$ x et y = 0 donc point en $(0;0)$

$\vec{\nabla g} = \begin{pmatrix} 6x \\ 2y \end{pmatrix} \to \vec{\nabla f} = \vec{\nabla g} \to \begin{cases} -4x = 6x \cdot \lambda & (1) \\ 2y = 2y \cdot \lambda & (2) \\ 3x^2 + y^2 = 6 & (3) \end{cases}$

(1) $-4x = 6x \cdot \lambda$

$0 = 6x \cdot \lambda + 4x$

~~$0 = 4x(1{,}5\lambda$~~

$0 = 3x \cdot \lambda + 2x$

$0 = x(3\lambda + 2)$

(A) $x = 0 \to 3 \cdot 0^2 + y^2 = 6 \to y = \pm\sqrt{6}$ Point en $(0; \sqrt{6})$ et $(0; -\sqrt{6})$

(B) $3\lambda = -2 \to \lambda = -\frac{2}{3} \to 2y = 2y \cdot \frac{-2}{3} \to y = 0$ point

$\to 3x^2 + 0^2 = 6$

$x = \pm\sqrt{2}$

Points en $(\sqrt{2}; 0)$ et en $(-\sqrt{2}; 0)$

$f(0;0) = 0^2 - 2 \cdot 0^2 = 0$

$f(0;\sqrt{6}) = 6 - 2 \cdot 0^2 = 6$
$f(0;-\sqrt{6}) = +6$ } max

$f(\sqrt{2};0) = 0 - 2 \cdot (\sqrt{2})^2 = -4$
$f(-\sqrt{2};0) = 0 - 2 \cdot (-\sqrt{2})^2 = -4$ } min

Maximum global en $(0;\sqrt{6})$ et $(0;-\sqrt{6})$
Minimum global en $(\sqrt{2};0)$ et $(-\sqrt{2};0)$

Question 4

$$f(x,y) = 2x^3 - 3xy + 3y^3 + 1$$

$$\vec{\nabla f} = \begin{pmatrix} 6x^2 - 3y \\ -3x + 9y^2 \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla f} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 6x^2 - 3y = 0 \\ -3x + 9y^2 = 0 \end{cases}$$

$\to 3y = 6x^2 \to y = 2x^2$

$\to$ ~~$x = \sqrt{\frac{3y}{6}}$~~ ~~$-3\sqrt{\frac{3y}{6}} + 6y^2 = 0$~~

$$-3x + 6(2x^2)^2 = 0$$

$$-3x + 24x^4 = 0$$

$$-x + 8x^4 = 0$$

$$x(-1 + 8x^3) = 0$$

$x = 0$ (A)

$8x^3 = 1$

$x^3 = 1$

$x = 1$ (B)

(A) Si $x = 1$, $y = 2 \cdot 1^2 = 2$ P en $(1;2)$

(B) Si $x = 0$, $y = 2 \cdot 0^2 = 0$ P en $(0;0)$

$$f_{xx} = (6x^2 - 3y)' = 12x$$

$$f_{yy} = (-3x + 9y^2)' = 18y$$

$$f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(6x^2 - 3y) = -3$$

$$f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}(-3x + 9y^2) = -3$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_{(1;2)} = \begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -3 & 36 \end{vmatrix} = 12 \cdot 36 - (-3 \cdot -3) = 432 - 9 = 423$$ maximum relatif

$$\Delta_{(0;0)} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 9 = -9$$ point de selle

Question 5

$$xy' + y + y^2 \cdot x^4 = 0$$

$$xy' + y = -y^2 \cdot x^4$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -y^2 \cdot x^3$$

Bernoulli

$$b(x) = y^{1-n} = y^{-1}$$

$$\frac{db}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y \cdot (-1) \cdot y^{-1} = x^3 \cdot (-1)$$ linéaire

$$\int P(x) = \int -\frac{1}{x} = -\frac{y}{x}$$

$$-\int \frac{1}{x}\,dx = -\ln(x)$$

$$F(x) = e^{-\frac{y}{x}}$$

$$\int \left(e^{-\frac{y}{x}} \cdot -x^3\right) = -x^3 \int e^{-\frac{y}{x}} = -x^3 \cdot \frac{1}{2} e^{-\frac{y}{x}}$$

$$b(x) = \frac{-x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{y}{x}}}{e^{-\frac{y}{x}}}$$

$$y = \sqrt[-1]{b} = \frac{e^{-\frac{y}{x}}}{-x^3 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{y}{x}}}$$

Question 6

$$\frac{ds}{dt} = 0{,}004 \cdot 5000 + t \cdot 25 \cdot 0{,}03$$

20 kg pour 5000 l
= 0,004 / l

$$\int \frac{ds}{0{,}004 \cdot 5000} = \int 0{,}75t \, dt$$

$$\frac{1}{20} S = \frac{0{,}75}{2} t^2 + C$$

$$S = 7{,}5 t^2 + C$$

$$S(0) = 20$$

$$20 = 7{,}5 \cdot 0^2 + C \quad \rightarrow C = 20$$

$$S(30) = 7{,}5 \cdot 30^2 + 20$$

$$= 6750 + 20 = 6770 \text{ kg}$$

Un peu beaucoup de sel non?