Nom, Prénom: [redacted]

11,5 pts

Note: 5,4

Travail écrit B

Matériel autorisé: Formulaire, calculatrice, Mathematica, résumé manuscrit de deux pages recto-verso.
Durée: 2 périodes.

Dans tous les exercices, il est demandé d'écrire les détails des calculs. Une solution non développée sera considérée comme fausse.

Question 1: 2 points
Résoudre l'équation différentielle

$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 6y = 0.$$

Détailler les calculs. Cet exercice se résout complètement **sans** Mathematica.

2

Question 2: 3 points
Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \sin(t).$$

Détailler les calculs. Cet exercice se résout complètement **sans** Mathematica.

3

Question 3: 2 points
Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 2\sin(t) = 0, \qquad y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2}(0) = -4.$$

Détailler les calculs. Cet exercice se résout complètement **sans** Mathematica.

2

Question 4: 2 points
Développer la fonction $f(t)$ donnée par

$$f(t) = \cos(t) \quad 0 \le t \le \pi$$

en une série de Fourier **impaire**. Donner la série de Fourier obtenue. Détailler les calculs.

1

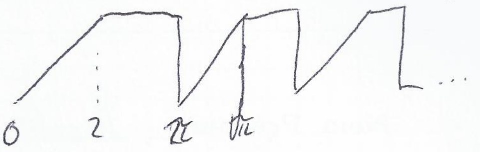
Tourner la page!

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int^{0} -\cos(x)\cdot\sin(nx)\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos(x)\cdot\sin(nx)\,dx \right)$$

Question 5: 2 points

Soit la fonction $f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 2, & 2 \leq t < \pi \end{cases}$$



répétée périodiquement.

1,5

1. Dessiner $f(t)$.
2. Donner les coefficients de Fourier de $f(t)$.
3. Donner la série de Fourier obtenue. Quelle est la valeur de la série de Fourier en $t = 3$?

Question 6: 2 points

Au cours d'un intervalle de temps de 10 s ($t \in [0, 10]$), l'accélération d'un mobile qui se déplace selon l'axe des abscisses est de

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = 0.3t + 2 \qquad \text{m/s}^2.$$

2

La vitesse initiale (en $t = 0$) de ce mobile est de 1 m/s et sa position initiale est $x = 0$.

1. Déterminer l'expression de la vitesse $\left(v = \frac{dx}{dt}\right)$ de ce mobile en fonction du temps.
2. Quelle est la vitesse du mobile après 5 s?
3. Quelle distance le mobile a-t-il franchie dans les 10 s qu'a duré le parcours?
4. Quelle est la vitesse moyenne de ce mobile durant les 5 premières secondes?

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^2 t\,dt + \int_2^\pi 2\,dt \right)$$

1) $2 \cdot y'' + 8y' + 6y = 0$ $\quad \cdot \frac{1}{2}$

$y'' + 4y' + 3y = 0$ homogène

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 3 = 4$

$r1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

$r2 = \frac{-4-2}{2} = -3$

$y(t) = A \cdot e^{-x} + B \cdot e^{-3x}$

2) $y'' + y = \sin(t)$ non-homogène

$\Delta = -4 = 4j$

$r1 = \frac{-0+2j}{2} = j$

$r2 = \frac{-0-2j}{2} = -j$

$y_h(t) = A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t)$

② $f(t) = 1 \cdot e^0 \cdot \sin(t)$ $\quad P(t) = 0 \quad n=0 \quad \alpha = 0$ égal

$Q(t) = 1 \quad n = 0 \quad \beta = 1$ $\rightarrow S(t)$ et $R(t) = a$ et b

$\rightarrow y_p(t) = at \cdot \cos(t) + bt \cdot \sin(t)$

$y_p'(t) = a \cdot \cos(t) - at \cdot \sin(t) + b \cdot \sin(t) + bt \cdot \cos(t)$

$y_p''(t) = -a \cdot \sin(t) - a \cdot \sin(t) - at \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(t) + b \cdot \cos(t) - bt \cdot \sin(t)$

$\rightarrow = -2a\sin(t) - at \cdot \cos(t) + 2b \cdot \cos(t) - bt \cdot \sin(t)$

$y'' + y = \sin(t)$

$+ \sin(t) = \cancel{-at \cdot \cos(t)} \cancel{- bt \cdot \sin(t)} - 2a \cdot \sin(t) + 2b \cdot \cos(t) + \cancel{at \cdot \cos(t)} + \cancel{bt \cdot \sin(t)}$

$+ \sin(t) = -2a \cdot \sin(t) + 2b \cdot \cos(t)$

$t=0$ $\quad 0 = 0 + 2b \cdot 1 \rightarrow \underline{b = 0}$

$\rightarrow \sin(t) = -2a \cdot \sin(t)$

$1 = -2a \rightarrow \underline{a = -0{,}5}$

$\rightarrow y_p(t) = -\frac{t}{2} \cdot \cos(t)$

$y(t) = y_p(t) + y_h(t) = -\frac{t}{2} \cdot \cos(t) + A \cdot \cos(t) + B \cdot \sin(t)$

$(-2 \cdot \cos(t))' =$

3) $y^{(3)}(t) = 2 \cdot \sin(t)$

$y''(t) = -2 \cdot \cos(t) + a$

$y'(t) = -2 \cdot \sin(t) + at + b$

$y(t) = 2 \cdot \cos(t) + \frac{a}{2} t^2 + bt + c$

$- y''(0) = -4 = -2 \cdot \cos(0) + a$

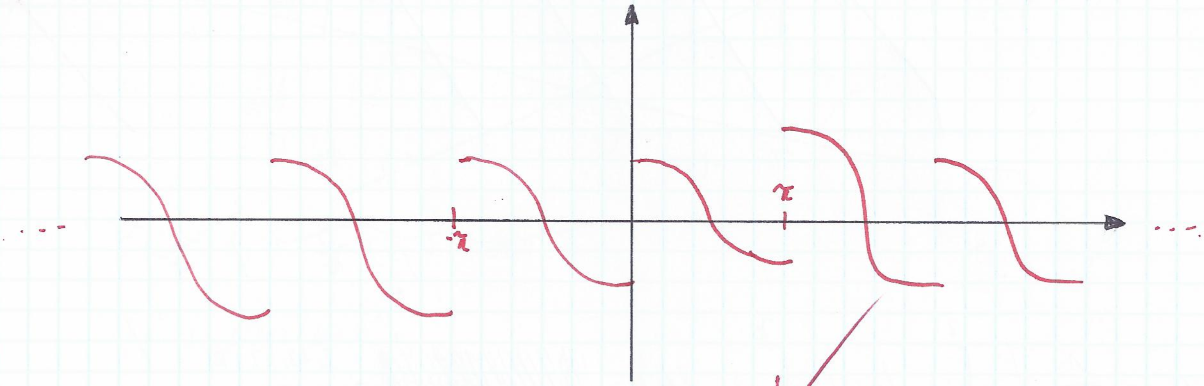
$-4 = -2 \cdot 1 + a \quad \rightarrow \quad a = -2$

$y'(0) = 0 = \underbrace{-2 \cdot \sin(0)}_{0} \underbrace{- 2 \cdot 0}_{0} + b \quad \rightarrow \quad b = 0$

$y(0) = 1 = 2 - \cancel{}\, 0 + 0 + c \quad \rightarrow \quad c = -1$

$\Rightarrow \; y(t) = 2 \cdot \cos(t) - t^2 - 1$

4) $f(t) = \cos(t) \quad 0 \leq t \leq \pi$



Période $= 2\pi$ donc $L = \pi$

impaire donc $a_n = 0$ et $a_0 = 0$

$L = \frac{\pi}{2}$

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L+c}^{L+c} f(t) \cdot \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \cos(t) \sin(2nt)\, dt$$

$$\overset{(M)}{=} \frac{8n \cdot \cos(n \cdot \pi)^2}{\pi - 4 \cdot n^2 \cdot \pi}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n \cdot \cos(n \cdot \pi)^2}{\pi - 4n^2 \cdot \pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi t}{\frac{\pi}{2}}\right)\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8n \cdot \cos(n \cdot \pi)^2}{\pi - 4n^2 \cdot \pi} \cdot \sin(2nt)\right)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^{0} \cos(t) \cdot \sin(nt)\, dt + \int_0^{\pi} \cos(t) \cdot \sin(nt)\, dt \right)$$

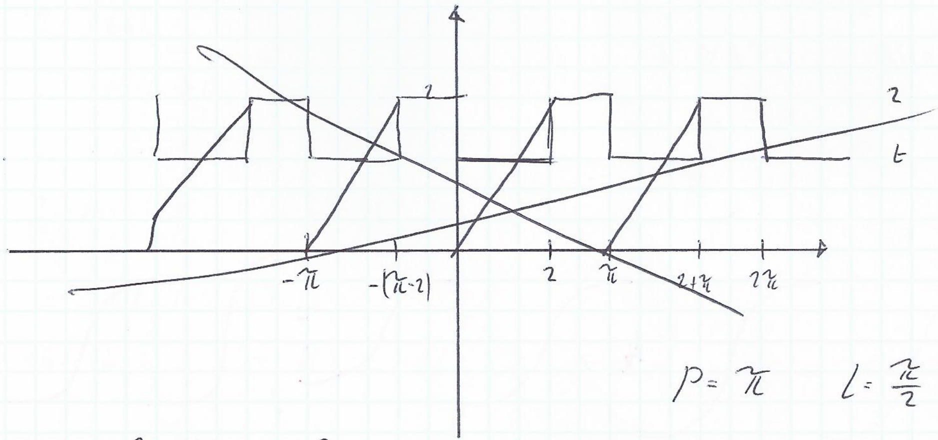
$$\overset{(M)}{=} \frac{2n(1 + \cos(n\pi))}{(-1 + n^2)\pi}$$

$n = 1$?

α

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n(1+\cos(n\pi))}{(-1+n^2)\pi} \cdot \sin(nt) \right)$$

5)



$p = \pi \qquad l = \frac{\pi}{2}$

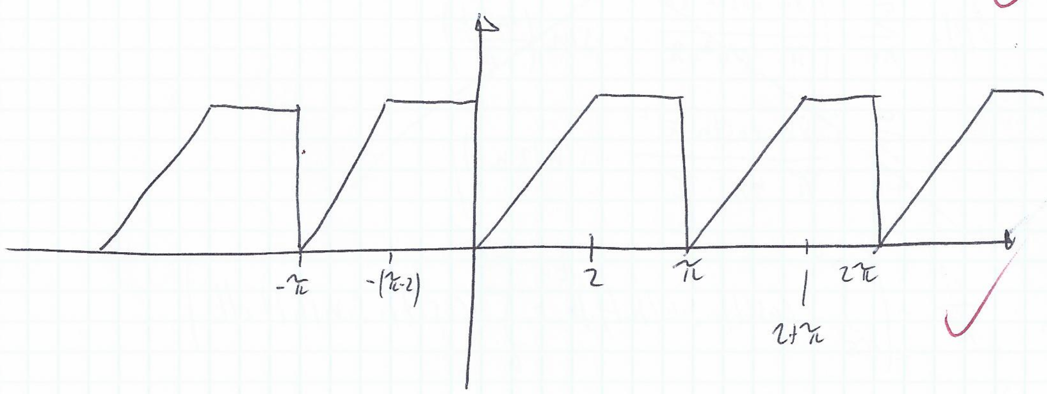
$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^2 t \, dt + \int_2^{\pi} 2 \, dt \right) = \frac{2+2(-2+\pi)}{\pi}$$

f(

$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \left(\int_0^2 t \cdot \cos(2nt) \, dt + \int_2^{\pi} 2 \cdot \cos(2nt) \, dt \right) = - \frac{\sin(2n)^2}{n^2 \pi}$$

$$b_n = \frac{a}{2} \cdot \left(\int_0^2 t \cdot \sin(2nt) \, dt + \int_0^{\pi} 2 \cdot \sin(2nt) \, dt \right) = \frac{-4n + \sin(4n)}{2n^2 \pi}$$

$$f(t) = \frac{2+2(-2+\pi)}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\sin(2n)^2}{n^2 \pi} \cdot \cos(2nt) + \frac{-4n + \sin(4n)}{2n^2 \pi} \cdot \sin(2nt) \right)$$



$$f(3) = \frac{2+2(-2+\pi)}{\pi} + \frac{1}{4\pi}$$

n

6) $a = 0{,}3t + 2$

1) $v = \int a = 0.15\, t^2 + 2t + a$

$p = \int v = 0.05\, t^3 + t^2 + + at + b$

~~$v(5) = 0{,}15 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 + 1$~~

2) $v(0) = 1$ donc $a = 1$

$v = 0{,}15 \cdot t^2 + 2t + 1$

$v(5) = 0.15 \cdot 25 + 10 + 1 = \underline{\underline{14{,}75 \ m/s}}$

3) $p(0) = 0 \Rightarrow b = 0$

$p(t) = 0{,}05 t^3 + t^2 + t$

$p(10) = 0{,}05 \cdot 1000 + 100 + 10 = \underline{\underline{160 \text{ mètre}}}$

4) $p(5) = 0{,}05 \cdot 5^3 + 5^2 + 5 = 36{,}25$ mètres

$$v = \frac{d}{s} = \frac{36{,}25}{5} = 7{,}25 \ m/s$$