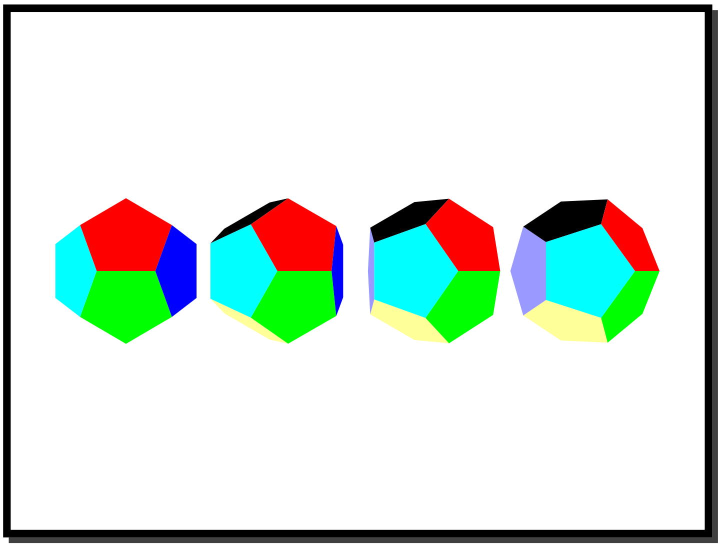
Université Grenoble Alpes

UE MAT201

Algèbre linéaire



Portail Mathématiques-Informatique

5 mars 2020

TABLE DES MATIÈRES

AVERTISSEMENT AU LECTEUR

Ce polycopié est destiné aux étudiants de l'Unité d'Enseignement MAT201. Cette unité d'enseignement est obligatoire pour les étudiants de deuxième semestre du portail Mathématiques et Informatique de l'Université Grenoble Alpes.

Ce polycopié est un outil pédagogique qui vient *s'ajouter* au cours. Le point de vue du cours et celui du polycopié peuvent différer offrant deux façons d'aborder une même notion mathématique.

Les chapitres de ce polycopié se décomposent de la façon suivante :

1. Le cours contient les notions à assimiler. Il convient d'en apprendre les définitions et les énoncés des résultats principaux. Les démonstrations données doivent être *comprises*. Elles servent de modèle pour les exercices de raisonnement. C'est en comprenant les démonstrations, qu'on apprend à en rédiger.
2. La fiche de révision *n*'est *pas* la liste minimale des notions à connaître. Après avoir travaillé votre cours, lisez la fiche de révision : vous devez être capable de réciter chaque définition ou résultat de cette fiche sans la moindre hésitation (y compris l'énoncé des hypothèses éventuelles), sinon cela veut dire que vous devez relire attentivement le cours.

PROGRAMME

Prérequis pour cette UE : UE MAT101 du premier semestre.

Programme résumé :

- Systèmes d'équations linéaires, résolution par la méthode du pivot de Gauss.
- Espace vectoriel réel, sous-espace vectoriel, sous-espace engendré, combinaisons linéaires, Familles de vecteurs libres et liées, bases, dimension.
- Application linéaires, noyau, image, théorème du rang.
- Matrices, somme, produit. Matrice d'une application linéaire, matrice de la composée. Inverse d'une matrice. Calcul en dimension deux et trois. Expression matricielle des équations linéaires.
- Exemples en dimension 3 : rotations, symétries. Utilisation des matrices 4×4 pour représenter les transformations affines de l'espace. Exemples.
- Introduction à la notion de corps, d'espace vectoriel sur un corps. Exemples : espaces vectoriels complexes, sur le corps des rationnels sur le corps à deux éléments.

Compétences visées :

Ce cours est destiné aux étudiants qui s'orientent vers les mathématiques ou l'informatique. Il couvre les concepts de base de l'algèbre linéaire. Les compétences visées sont la capacité à résoudre des systèmes d'équations linéaires, la maîtrise des notions de dimension et d'application linéaire, les bases du calcul matriciel.

Systèmes linéaires

Emmanuel Peyre

Cours

1.1. Introduction. — Au premier semestre, dans l'étude des intersections de droites et de plans affines, vous avez considéré des systèmes d'équations de la forme

$$\begin{cases} 2X+Y-Z=2 \\ X+3Y+7Z=11. \end{cases}$$

Plus généralement, on peut considérer des systèmes de m équations à n inconnues. De nombreuses questions se réduisent, après modélisation, à des systèmes d'équations de ce type. Le but de ce chapitre est de donner une méthode générale de résolution de ces équations.

La méthode en question, qui s'appelle le *pivot de Gauss*, consiste à faire des opérations élémentaires sur le système d'équation, chaque étape donnant un système équivalent au système initial, afin de le réduire à un système de forme presque triangulaire, qu'on peut résoudre aisément.

Après quelques définitions, nous allons expliquer cette méthode sur des exemples avant de la décrire en général.

1.2. Systèmes d'équations linéaires. — Nous allons d'abord préciser la nature des équations considérées :

Définition 1.1

Soit $n \in \mathbf{N}$ un entier. On appelle *équation linéaire à n inconnues* à coefficients réels une équation de la forme

$$a_1X_1 + \cdots + a_nX_n = b$$

où $a_1, \ldots, a_n, b$ sont des nombres réels, appelés *coefficients* de l'équation et $X_1, \ldots, X_n$ désignent les inconnues.

Remarque 1.2. — Dans cette équation nous notons $X_1, \dots, X_m$ les inconnues, afin de pouvoir en avoir un nombre arbitraire. Dans le cas où $n = 3$, on pourrait les noter X, Y et Z. Dans l'équation précédente, les nombres $a_1, \dots, a_n, b$ sont des constantes, dont la valeur ne change pas pendant l'étude du système d'équations.

Définition 1.3

Un *système de m équations linéaires à n inconnues* est donc un système de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{1,1}X_1 + \dots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + \dots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m,1}X_1 + \dots + a_{m,n}X_n = b_m \end{cases}$$

où $m, n \in \mathbf{N}$ et $a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{m,n}, b_1, \dots, b_m$ sont $m(n+1)$ nombres réels.

Une *solution* du système (1) est un n-uplet de nombres réels $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, m\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j = b_i.$$

Deux systèmes d'équations sont dits *équivalents* s'ils ont exactement le même ensemble de solutions.

L'objectif est donc de déterminer *l'ensemble* des solutions du système d'équation. Notons qu'en général cet ensemble peut être vide ou infini, mais nous allons démontrer que si cet ensemble est fini et non vide, alors la solution est unique. Le pivot de Gauss permet de déterminer cet ensemble de solutions.

1.3. Transformations élémentaires d'un système. — Dans ce paragraphe, nous fixons des entiers $m, n \in \mathbf{N}$ et $m(n+1)$ nombres réels $a_{1,1}, \dots, a_{1,n}, a_{2,1}, \dots, a_{m,n}, b_1, \dots, b_m$. Pour $i \in \{1, \dots, m\}$, nous notons L_i la i-ème équation du système (1) c'est-à-dire l'équation

$$a_{i,1}X_1 + \dots + a_{i,n}X_n = b_i.$$

Les deux transformations élémentaires que nous allons décrire donne un système d'équations linéaires équivalent au précédent.

1.3.1. *Échange de deux lignes.* — Soient $i, j \in \{1, \dots, m\}$ avec $i \neq j$. On note $L_i \longleftrightarrow L_j$ la transformation du système (1) qui consiste à *échanger* la i-ème ligne avec la j-ème. Autrement dit on obtient le système

$$(2)\qquad \begin{cases} a'_{1,1}X_1 + \cdots + a'_{1,n}X_n = b'_1 \\ a'_{2,1}X_1 + \cdots + a'_{2,n}X_n = b'_2 \\ \cdots \\ a'_{m,1}X_1 + \cdots + a'_{m,n}X_n = b'_m \end{cases}$$

avec, pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$ et tout $l \in \{1, \ldots, n\}$,

$$a'_{k,l} = \begin{cases} a_{j,l} & \text{si } k = i, \\ a_{i,l} & \text{si } k = j, \\ a_{k,l} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$b_k = \begin{cases} b_j & \text{si } k = i, \\ b_i & \text{si } k = j, \\ b_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le système obtenu est *équivalent* au système initial.

Exemple 1.4. — Si on applique la transformation $L_1 \leftrightarrow L_2$ au système

$$\begin{cases} X + Y + Z = 3 \\ 3X - 2Y = 1 \\ 2X + 4Y - 3Z = 3, \end{cases}$$

on obtient le système

$$\begin{cases} 3X - 2Y = 1 \\ X + Y + Z = 3 \\ 2X + 4Y - 3Z = 3, \end{cases}$$

1.3.2. *Ajout d'un multiple d'une ligne à une autre ligne.* — Soient $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ tels que $i \neq j$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ la transformation qui consiste à remplacer la i-ème équation du système par l'équation obtenue en ajoutant λ fois la j-ème équation à la i-ème. Autrement dit, on obtient le système

$$(3)\qquad \begin{cases} a'_{1,1}X_1 + \cdots + a'_{1,n}X_n = b'_1 \\ a'_{2,1}X_1 + \cdots + a'_{2,n}X_n = b'_2 \\ \cdots \\ a'_{m,1}X_1 + \cdots + a'_{m,n}X_n = b'_m \end{cases}$$

avec, pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$ et tout $l \in \{1, \dots, n\}$,

$$a'_{k,l} = \begin{cases} a_{i,l} + \lambda a_{j,l} & \text{si } k = i, \\ a_{k,l} & \text{sinon,} \end{cases}$$

et

$$b_k = \begin{cases} b_i + \lambda b_j & \text{si } k = i, \\ b_k & \text{sinon.} \end{cases}$$

Là encore, le système obtenu est *équivalent* au système initial. En effet, comme la ligne L_j n'a pas été modifiée, si on effectuait la transformation $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_j$ sur le nouveau système, on retomberait sur le système initial, ce qui prouve que toute solution du nouveau système est également solution de l'ancien.

Exemple 1.5. — Si on applique la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - 3L1$ au système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccl} X & + & Y & + & Z & = & 3 \\ 3X & - & 2Y & & & = & 1 \\ 2X & + & 4Y & - & 3Z & = & 3, \end{array} \right.$$

on obtient le système

$$\left\{ \begin{array}{ccccccl} X & + & Y & + & Z & = & 3 \\ & - & 5Y & - & 3Z & = & -8 \\ 2X & + & 4Y & - & 3Z & = & 3. \end{array} \right.$$

Notons que cette transformation a fait disparaître l'inconnue X de la deuxième équation.

La méthode du pivot de Gauss n'utilise que les deux transformations élémentaires précédentes, mais il est parfois pratique d'en utiliser une troisième

1.3.3. *Multiplication par une constante non nulle.* — Soit $i \in \{1, \dots, m\}$ et soit λ un nombre réel *non nul*. La transformation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ consiste à remplacer la i-ème équation par λ fois la i-ème équation. Comme la constante λ est non nulle, le système obtenu avec cette transformation est également équivalent au système initial.

1.4. La méthode du pivot de Gauss sur des exemples. — L'idée de la méthode du pivot de gauss est d'utiliser de manière itérée les deux premières transformations afin d'éliminer une variable de toutes les équations sauf une.

1.4.1. *Exemple avec une unique solution.* — Voyons cela en action sur l'exemple ci-dessus : on part du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} X & + & Y & + & Z & = 3 \\ 3X & - & 2Y & & & = 1 \\ 2X & + & 4Y & - & 3Z & = 3, \end{array}\right. \tag{4}$$

Comme montré auparavant, en effectuant la transformation $L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1$, on obtient le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} X & + & Y & + & Z & = 3 \\ & - & 5Y & - & 3Z & = -8 \\ 2X & + & 4Y & - & 3Z & = 3. \end{array}\right.$$

De manière à éliminer l'inconnue X de la dernière équation, on effectue alors la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$ qui donne le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} X & + & Y & + & Z & = 3 \\ & - & 5Y & - & 3Z & = -8 \\ & + & 2Y & - & 5Z & = -3. \end{array}\right.$$

On élimine alors la variable Y de la troisième équation en effectuant la transformation $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{2}{5}L_2$, ce qui donne le système[1] :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} X & + & Y & + & Z & = 3 \\ & - & 5Y & - & 3Z & = -8 \\ & & & - & \frac{31}{5}Z & = -\frac{31}{5}, \end{array}\right.$$

qui reste équivalent aux précédents. Mais le système obtenu donne l'unique valeur possible pour Z, c'est-à-dire 1. On obtient donc le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rcrcrl} X & + & Y & + & Z & = 3 \\ & - & 5Y & - & 3Z & = -8 \\ & & & & Z & = 1, \end{array}\right.$$

1. On notera que la méthode du pivot de Gauss amène fréquemment à calculer avec des fractions, même si le système de départ a des coefficients entiers et que l'unique solution est à coordonnées entières.

En remplaçant Z par sa valeur dans les deux premières équations, on obtient que le système initial équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} X & + & Y & & & =2 \\ & - & 5Y & & & =-5 \\ & & & & Z & =1, \end{array}\right.$$

Ce qui donne l'unique valeur possible pour Y et, en définitive, on obtient que les deux systèmes

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} X & + & Y & + & Z & =3 \\ 3X & - & 2Y & & & =1 \\ 2X & + & 4Y & - & 3Z & =3, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rrrl} X & & & =1 \\ & Y & & =1 \\ & & Z & =1, \end{array}\right.$$

sont équivalents. Ceci prouve que l'unique solution du système (4) est le triplet $(1, 1, 1)$.

1.4.2. *Exemple avec une infinité de solutions.* — Appliquons maintenant la méthode à l'exemple suivant :

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} X & + & Y & + & Z & =3 \\ 2X & - & 3Y & + & 7Z & =1 \\ X & - & 9Y & + & 11Z & =-7, \end{array}\right. \tag{5}$$

Nous allons donc faire les transformations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ pour éliminer l'inconnue X des deux dernières équations. On obtient alors le système équivalent

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} X & + & Y & + & Z & =3 \\ & - & 5Y & + & 5Z & =-5 \\ & - & 10Y & + & 10Z & =-10, \end{array}\right.$$

Pour éliminer l'inconnue Y de la dernière équation on effectue la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ qui nous donne le système

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} X & + & Y & + & Z & =3 \\ & - & 5Y & + & 5Z & =-5 \\ & & & & 0 & =0 \end{array}\right.$$

Comme l'équation $0 = 0$ est toujours vraie, on peut la retirer du système et on obtient que les systèmes

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} X & + & Y & + & Z & =3 \\ 2X & - & 3Y & + & 5Z & =6 \\ X & + & 6Y & - & 2Z & =3, \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{rrrrrl} X & + & Y & + & Z & =3 \\ & - & 5Y & + & 5Z & =-5 \end{array}\right.$$

sont équivalents. Le dernier système est un système de deux équation avec trois inconnues, la dernière équation permet d'exprimer Y en termes de Z, et en remplaçant Y par l'expression obtenue, on obtient que le système d'équations (5) est équivalent au système

$$\begin{cases} X & & = 2 - 2Z \\ & Y & = 1 + Z \end{cases}$$

Par conséquent étant donné un nombre réel λ il va exister une unique solution du système avec $Z = \lambda$, à savoir $(2-2\lambda, 1+\lambda, \lambda)$. L'ensemble des solutions du système d'équations (5) est donc l'ensemble

$$\{(2-2\lambda, 1+\lambda, \lambda), \lambda \in \mathbf{R}\}$$

Autrement dit l'application $\lambda \mapsto (2-2\lambda, 1+\lambda, \lambda)$ est une *bijection* de l'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$ sur l'ensemble des solutions du système (5).

1.4.3. *Exemple sans solution.* — Nous allons maintenant considérer le système

$$\begin{cases} X + Y + Z = 3 \\ 2X - 3Y + 7Z = 1 \\ X - 9Y + 11Z = -5, \end{cases} \tag{6}$$

Comme dans l'exemple précédent, on effectue les transformations $L_2 \leftarrow L_2 - 2L1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ pour éliminer l'inconnue X des deux dernières équations. On obtient alors le système

$$\begin{cases} X + Y + Z = 3 \\ - 5Y + 5Z = -5 \\ - 10Y + 10Z = -8. \end{cases}$$

Pour éliminer l'inconnue Y de la dernière équation on effectue la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ qui nous donne le système

$$\begin{cases} X + Y + Z = 3 \\ - 5Y + 5Z = -5 \\ 0 = 2. \end{cases}$$

Comme l'équation $0 = 2$ n'a pas de solution, le système (6) n'a aucune solution dans $\mathbf{R}^3$.

1.4.4. *Un exemple pathologique.* — L'objectif de ce chapitre est de décrire une méthode qui s'applique à tous les cas possibles. Dans les exemples précédents, nous n'avons pas eu à faire d'échanges de lignes car la variable que nous souhaitions éliminer apparaissait avec un coefficient non nul dans la première des équations considérées. Considérons le système de trois équations en les trois inconnues X, Y, Z et T donné par

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} & & Z & + & T & = & 2 \\ Y & + & 3Z & + & T & = & 5 \\ Y & + & 2Z & - & T & = & 2 \\ 2Y & - & Z & + & T = & & 2. \end{array}\right.$$

Dans ce système, la variable X a déjà été entièrement été éliminée ; la première variable à éliminer est donc la variable Y qui n'apparaît pas sur la première ligne. Pour démarrer la réduction du pivot de Gauss dans ce cas, la première étape consiste donc à échanger les deux premières lignes. Après la transformation $L_1 \longleftrightarrow L_2$, on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} Y & + & 3Z & + & T & = & 5 \\ & & Z & + & T & = & 2 \\ Y & + & 2Z & - & T & = & 2 \\ 2Y & - & Z & + & T & = & 2. \end{array}\right.$$

On peut alors utiliser la première ligne pour éliminer la variable Y de la troisième ligne en faisant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ et de la quatrième ligne par $L_4 \leftarrow L4 - 2L1$, ce qui donne le système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} Y & + & 3Z & + & T & = & 5 \\ & & Z & + & T & = & 2 \\ & - & Z & - & 2T & = & -3 \\ & - & 7Z & - & T & = & -8. \end{array}\right.$$

En effectuant les transformations $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 + 7L_2$ on obtient le système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} Y & + & 3Z & + & T & = & 5 \\ & & Z & + & T & = & 2 \\ & & & - & T & = & -1 \\ & & & & 6T & = & 6. \end{array}\right.$$

Qu'on transforme en système échelonné à l'aide de la transformation $L_4 \leftarrow L_4 + 6L_3$

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} Y & + & 3Z & + & T & = & 5 \\ & & Z & + & T & = & 2 \\ & & & & -T & = & -1 \\ & & & & 0 & = & 0 \end{array}\right.$$

L'équation 0 = 0 étant toujours vérifiée, on peut la retirer du système. Ensuite, on remplace T par sa valeur 1 dans les deux premières équations ce qui donne le système

$$\begin{cases} \quad Y + 3Z = 1 \\ \quad\quad Z = 1 \end{cases}$$

On a donc un système avec une variable libre, à savoir la variable X, et deux variables principales Y et Z et l'ensemble des solutions est l'ensemble

$$\{(\lambda, 1, 1), \lambda \in \mathbf{R}\}.$$

Remarque 1.6. — Bien entendu, nous aurions pu remplacer Z par sa valeur dès le début, mais le but de cet exemple est d'illustrer comment la méthode générale qui suit fonctionne dans le cas où des coefficients sont nuls.

1.5. Description de la méthode en général. — On va maintenant décrire la méthode pour un système général de la forme (1). Rappelons que L_i désigne la i-ème équation du système. L'objectif est de trouver un système d'équations linéaires *équivalent* au système initial qui soit sous une forme particulière, dite *échelonnée*, dont la résolution est particulièrement simple.
Premier cas : Si tous les coefficients $a_{i,j}$ sont nuls alors le système est déjà sous forme échelonnée et le processus s'arrête.
Second cas : Au moins un des coefficients est non nul.

a) On note alors j_1 le plus petit entier de $\{1,\dots,n\}$ tel qu'il existe un entier $i \in \{1,\dots,m\}$ avec $a_{i,j_1} \neq 0$. On note alors i_1 le plus petit entier de $\{1,\dots,m\}$ tel que $a_{i_1,j_1} \neq 0$.
b) Quitte à effectuer la transformation $L_1 \longleftrightarrow L_{i_1}$, on se ramène au cas où $i_1 = 1$. Autrement dit, on suppose dans la suite que $a_{1,j_1} \neq 0$.
c) On effectue, pour $i \in \{2, m\}$, les transformations $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,j_1}}{a_{1,j_1}} L_1$ qui ont pour effet d'éliminer l'inconnue X_{j_1} de toutes les équations sauf la première.

On considère alors le système formé des équations L_2 à L_m du système obtenu par les opérations précédentes. Il est de la forme

$$\begin{cases} a'_{2,1}X_1 + \dots + a'_{2,n}X_n = b_2 \\ \dots \\ a'_{m,1}X_1 + \dots + a'_{m,n}X_n = b_m \end{cases}$$

avec $a'_{i,j} = 0$ si $j \in \{1,\dots,j_1\}$. On peut alors itérer la procédure avec ce système d'équations. On utilise alors le lemme suivant :

Lemme 1.7. — *Soit $i \in \{1,\ldots,m\}$. Si le système d'équations linéaires formé des équations $L_i,\ldots,L_m$, est équivalent au système donné par les équations $L'_i,\ldots,L'_m$ alors le système $L_1,\ldots,L_m$ est équivalent au système $L_1,\ldots,L_{i-1},L'_i,\ldots,L'_m$.*

Démonstration. — Notons S l'ensemble des solutions du système $L_1,\ldots,L_m$, S_1 celui des solutions du système $L_1,\ldots,L_{i-1}$, S_2 celui du système $L_i,\ldots,L_m$, et S'_2 celui du système $L'_i,\ldots,L'_m$. Alors, par hypothèse $S_2 = S'_2$. Donc $S = S_1 \cap S_2 = S_1 \cap S'_2$ qui est précisément l'ensemble des solutions du système $L_1,\ldots,L_{i-1},L'_i,\ldots,L'_m$. □

L'itération de la procédure fournit, de manière algorithmique, un système de m équations à n inconnues qui va vérifier les conditions de la définition suivante :

Définition 1.8

Un système de m équations linéaires à n inconnues est dit *échelonné* s'il existe des entiers $j_1,\ldots,j_p$ avec $1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_p \leqslant n$ de sorte que

(i) Si $i \in \{1,\ldots,p\}$ et si j est un entier tel que $1 \leqslant j < j_i$, alors $a_{i,j} = 0$;

(ii) Si $i \in \{1,\ldots,p\}$, alors $a_{i,j_i} \neq 0$;

(iii) Si i est un entier avec $p < i \leqslant m$ et $j \in \{1,\ldots,n\}$ alors $a_{i,j} = 0$

Autrement dit, un système échelonné peut s'écrire

(7)
$$\left\{\begin{array}{r}
a_{1,j_1}X_{j_1} + \cdots + a_{1,j_2-1}X_{j_2-1} + a_{1,j_2}X_{j_2} + \cdots + a_{1,j_3-1}X_{j_3-1} + \cdots + a_{1,j_p}X_{j_p} + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\
a_{2,j_2}X_{j_2} + \cdots + a_{2,j_3-1}X_{j_3-1} + \cdots + a_{2,j_p}X_{j_p} + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{p,j_p}X_{j_p} + \cdots + a_{p,n}X_n = b_p \\
0 = b_{p+1} \\
\cdots\cdots \\
0 = b_m
\end{array}\right.$$

avec $a_{i,j_i} \neq 0$ pour $i \in \{1,\ldots,p\}$.

On notera que la méthode du pivot dans la phase de mise sous forme échelonnée ne change pas le nombre d'équations du système.

Définition 1.9

Avec les notations de la définition précédente, on appelle *inconnues principales* les inconnues $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_p}$, et on dit que p est le *rang* du système d'équations linéaires. Les inconnues X_j pour $j \in \{1, \ldots, n\} - \{j_1, \ldots, j_p\}$ sont appelées les *inconnues libres*

Il reste maintenant à expliquer comment résoudre un tel système. Il convient pour cela de distinguer différents cas.

Premier cas. Supposons qu'il existe un entier i avec $p < i \leqslant m$ tel que $b_i \neq 0$. Alors la i-ème équation, qui s'écrit $0 = b_i$ n'a pas de solution et le système n'a pas de solution non plus.

Deuxième cas. On suppose que $b_i = 0$ pour tout entier $i \in \{p+1, \ldots, m\}$ et que $p = n$, ce qui signifie que toutes les inconnues sont principales. On a alors la relation $j_i = i$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$ et, en retirant les équations de la forme $0 = 0$, le système d'équations est équivalent à un système de forme *triangulaire* :

$$\left\{\begin{array}{rl} a_{1,1}X_1 + a_{1,2}X_2 + \cdots + a_{1,n}X_n = & b_1 \\ a_{2,2}X_2 + \cdots + a_{2,n}X_n = & b_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \\ a_{n,n}X_n = & b_n \end{array}\right. \tag{8}$$

avec $a_{i,i} \neq 0$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Proposition 1.10

Dans le cas où le rang du système est égal à la fois au nombre de variables et au nombre d'équations, le système d'équations linéaires possède une unique solution.

Démonstration. — Il suffit de considérer un système de la forme (8). On procède par récurrence sur le rang n. Si $n = 0$ le résultat est vrai. Supposons-le vérifié pour $n-1$. Dans ce cas, la dernière équation de (8) donne $X_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$. En remplaçant X_n par $\frac{b_n}{a_{n,n}}$ dans les autres équations on obtient un système triangulaire de $n-1$ équations en $n-1$ inconnues auquel on peut appliquer l'hypothèse de récurrence, il a donc une unique solution $(x_1, \ldots, x_{n-1})$, et l'unique solution du système (8) est donc $(x_1, \ldots, x_{n-1}, \frac{b_n}{a_{n,n}})$ □

Remarque 1.11. — La preuve donne la méthode pour trouver l'unique solution : on obtient d'abord $X_n = \frac{b_n}{a_{n,n}}$, on remplace dans les autres équations, l'avant-dernière donne alors l'unique valeur possible pour X_{n-1}. De proche en proche on peut donc déterminer l'unique solution du système.

Troisième cas. On suppose que $b_i = 0$ pour tout entier $i \in \{p+1,\dots,m\}$. Quitte à retirer les équations $0 = 0$, on se ramène au cas où $p = m$.

Proposition 1.12

Si le rang est égal au nombre d'équations, et si $k_1,\dots,k_{n-p}$ désignent les indices des inconnues *libres*, alors l'application de l'ensemble des solutions vers $\mathbf{R}^{n-p}$ donnée par

$$(x_1,\dots,x_n) \mapsto (x_{k_1},\dots,x_{k_{n-p}})$$

est une bijection.

En particulier, si $n > p$, l'ensemble des solutions est infini. La preuve qui suit permet de décrire explicitement l'ensemble des solutions en utilisant $n-p$ paramètres réels.

Démonstration. — Notons $j_1,\dots,j_p$ les indices des inconnues *principales* On a donc

$$\{1,\dots,n\} = \{j_1,\dots,j_p\} \cup \{k_1,\dots,k_{n-p}\}.$$

Soit $(x_{k_1},\dots,x_{k_{n-p}})$ un élément de $\mathbf{R}^{n-p}$. Il nous faut donc démontrer qu'il existe un unique p-uplet $(x_{j_1},x_{j_2},\dots,x_{j_p}) \in \mathbf{R}^p$ tel que $(x_1,\dots,x_n)$ soit une solution du système. Mais si on remplace X_{k_i} par x_{k_i} dans le système (7), on obtient un système triangulaire :

$$(9) \qquad \begin{cases} a_{1,j_1}X_{j_1} + a_{1,j_2}X_{j_2} + \cdots + a_{1,j_p}X_{j_p} = b_1 - \sum_{i=1}^{n-p} a_{1,k_i}x_{k_i} \\ \qquad a_{2,j_2}X_{j_2} + \cdots + a_{2,n}X_{j_p} = b_2 - \sum_{i=1}^{n-p} a_{2,k_i}x_{k_i} \\ \\ \qquad\qquad a_{n,j_p}X_{j_p} = b_p - \sum_{i=1}^{n-p} a_{p,k_i}x_{k_i} \end{cases}$$

Par la proposition 1.10, ce système admet une unique solution $(x_{j_1},\dots,x_{j_p})$. □

1.6. Cas d'un système sans second membre. — On dit que le système d'équations linéaires (1) est *sans second membre* si on a la relation $b_i = 0$ pour $i \in \{1,\dots,m\}$. Dans ce cas le système a forcément une solution évidente à savoir la solution nulle $(0,\dots,0)$. Deux cas sont donc possibles : soit la solution nulle est la seule solution, ce qui se produit lorsqu'il n'y a pas d'inconnue libre, soit il existe une solution non nulle et le nombre de solutions est infini. Comme le nombre d'inconnues principales est forcément inférieur ou égal au nombre d'équations, on en déduit le résultat suivant :

Proposition 1.13

Un système d'équations linéaires sans second membre dont le nombre de variables est strictement plus grand que le nombre d'équations admet une solution non nulle.

Fiche de révision

1.1. Méthode du pivot de Gauss

Le méthode du pivot consiste à utiliser les échanges de lignes et des opérations de la forme $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $i \neq j$ pour transformer un système d'équations linéaires arbitraire en un système échelonné qui lui est équivalent. Un système est dit *échelonné* s'il est de la forme

$$\begin{cases} a_{1,j_1}X_{j_1} + \cdots + a_{1,j_2-1}X_{j_2-1} + a_{1,j_2}X_{j_2} + \cdots + a_{1,j_3-1}X_{j_3-1} + \cdots + a_{1,j_p}X_{j_p} + \cdots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ \qquad a_{2,j_2}X_{j_2} + \cdots + a_{2,j_3-1}X_{j_3-1} + \cdots + a_{2,j_p}X_{j_p} + \cdots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad a_{p,j_p}X_{j_p} + \cdots + a_{p,n}X_n = b_p \\ \qquad 0 = b_{p+1} \\ \qquad \cdots\cdots \\ \qquad 0 = b_m \end{cases}$$

avec $a_{i,j_i} \neq 0$ pour $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Définition R.1.1

Avec les notations précédentes, on appelle *inconnues principales* les inconnues $X_{j_1}, X_{j_2}, \ldots, X_{j_p}$, et on dit que p est le *rang* du système d'équations linéaires. Les inconnues X_j pour $j \in \{1, \ldots, n\} - \{j_1, \ldots, j_p\}$ sont appellées les *inconnues libres*

Entraînement

1.1. Exercices

Exercice 1.1. Résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

$$\begin{cases} X+Y+Z=3 \\ Y+Z=2 \\ Z=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X+Y+Z=3 \\ Y+Z=2 \\ X+Y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2X+3Y=4 \\ X-2Z=5 \end{cases}$$

Exercice 1.2. Pour chacun des systèmes suivants, tracer la droite de $\mathbf{R}^2$ correspondant à chaque équation $ax+by=c$ du système et trouver graphiquement l'ensemble des solutions. Vérifier le résultat en utilisant le pivot de Gauss.

$$\begin{cases} X+Y=1 \\ X-Y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} X-Y=2 \\ Y-X=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} X-3Y=-3 \\ X-Y=1 \\ X+Y=5 \end{cases}$$

Exercice 1.3. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} 3X+Y=2 \\ X+2Y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2X+3Y=1 \\ 5X+7Y=3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3X+Y=2 \\ 6X+2Y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2X+4Y=10 \\ 3X+6Y=15 \end{cases}$$

Exercice 1.4. Résoudre par la méthode du pivot de Gauss les systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} X+Y+Z=1 \\ X+2Y+2Z=0 \\ Y+4Z=-4 \end{cases} \qquad \begin{cases} X+Y+Z=2 \\ X+Y+2Z=0 \\ X+2Y-Z=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2X+Y-3Z=5 \\ 3X-2Y+2Z=5 \\ 5X-3Y-Z=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} X+Y+Z+T=2 \\ X+Y+2Z+2T=0 \\ X+2Y-Z-T=1 \\ Z-T=0 \end{cases}$$

Exercice 1.5.

1. Déterminer suivant les valeurs du paramètre a les solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} X+aY=2 \\ aX+Y=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} X-2Y=2 \\ X-aY=a \end{cases} \qquad \begin{cases} X+Y=3 \\ aX+Y=a. \end{cases}$$

2. Déterminer suivant les valeurs des paramètres réels a et b les solutions des systèmes linéaires suivants :
$$\begin{cases} X - aY = 2 \\ aX + Y = b \end{cases} \qquad \begin{cases} aX + 8Y = b \\ X - bY = a \end{cases} \qquad \begin{cases} aX + bY = 1 \\ bX + aY = 1 \end{cases}$$
3. Interprétez les résultats des questions précédentes en termes d'intersections de droites dans le plan.

Exercice 1.6. On considère pour un nombre réel θ et tous $u, v \in \mathbf{R}$ le système linéaire

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} \cos(\theta)X - \sin(\theta)Y = u \\ \sin(\theta)X + \cos(\theta)Y = v \end{cases}$$

1. Vérifier que, pour tous $u, v \in \mathbf{R}$, ce système possède une unique solution que l'on déterminera.
2. Démontrer que $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ est solution du système (S) si et seulement si on a l'égalité de nombres complexes
$$e^{i\theta}(x + iy) = u + iv.$$
Justifier d'une autre manière la réponse de la question 1.
3. Interpréter les résultats précédents à l'aide d'une application du plan dans lui-même.

Exercice 1.7. Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m les solutions des systèmes linéaires suivants :

$$\begin{cases} mX - Y + Z = 0 \\ -X + Y + Z = 0 \\ X + Y + mZ = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} mX + Y + Z = 0 \\ X + Y + Z = 0 \\ X + Y + mZ = 0 \end{cases}$$

Exercice 1.8. Un peu de physique

On considère le réseau hydraulique de la figure 1. Les cuves sont à pressions respectives 3 et 2 bars et la sortie est à pression atmosphérique. La loi hydraulique permettant de calculer le débit s'énonce $Q = \alpha\Delta P$, où Q est le débit du tuyau, ΔP la différence des pressions en entrée et sortie et α est un coefficient de résistance hydraulique dépendant de la géométrie et de la matière du tuyau. Les données du constructeur sont

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0.1\, m^3.s^{-1}.bar^{-1},$$

$$\alpha_3 = 0.3\, m^3.s^{-1}.bar^{-1}.$$

Quel est le débit de sortie Q_3 du réseau ?

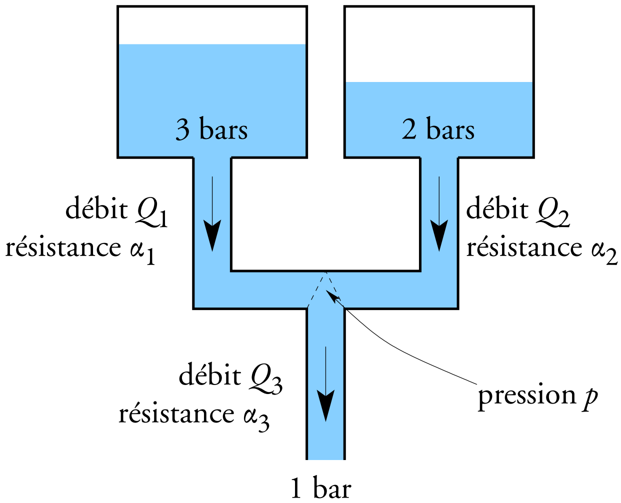


FIGURE 1. Un réseau hydraulique

Exercice 1.9. Choix du pivot et erreurs informatiques

Dans un ordinateur, la norme IEEE 754 simple précision (32 bits) permet de coder des nombres entre environ 10^{-45} et 10^{38} avec une précision de 8 à 9 chiffres significatifs en base 10. Cela veut dire que si on considère le nombre $\varepsilon = 10^{-10}$, alors $1 + \varepsilon$ sera tronqué à 1 par l'ordinateur. De même, le calcul $1 + 1/\varepsilon$ donnera $1/\varepsilon = 10^{10}$ comme résultat.

On considère le système linéaire

$$(S) \qquad \begin{cases} \varepsilon X + Y = 1 \\ X + 2Y = 3 \end{cases}$$

On va regarder sur cet exemple comment le choix du pivot peut radicalement changer la pertinence d'un calcul fait par un ordinateur.

1. Résoudre (S) à la main de façon exacte.
2. On considère maintenant que le calcul est fait par un ordinateur avec les erreurs de troncature du type « $1+\varepsilon = 1$ ». Utiliser εX comme pivot et éliminer X dans la deuxième ligne. Finir la résolution et comparer le résultat avec la solution exacte.
3. Même question si on utilise maintenant le terme X de la deuxième ligne comme pivot pour éliminer X dans la première ligne.

Exercice 1.10. L'algorithme Pagerank

Le réseau internet est composé de milliers de milliards de pages reliées entre elles. On peut le modéliser par un graphe orienté où deux pages sont reliées par une flèche si l'une renvoie sur l'autre. La figure 2 donne un exemple de graphe avec seulement 4 pages et 5 liens hypertexte. La question est de savoir quelle est la page la plus pertinente dans ce réseau. Pour cela, on va attribuer une note $\mathrm{PR}(i) \geqslant 0$ à la page i et la plus pertinente sera celle avec la meilleure note[2]. Ces notes doivent vérifier la relation

$$\mathrm{PR}(A) = (1-d) + d(\mathrm{PR}(T_1)/C(T_1) + \ldots + \mathrm{PR}(T_n)/C(T_n))$$

si on note $T_1, \ldots, T_n$ les pages pointant vers la page de A et $C(B)$ le nombre de liens sur la page B.

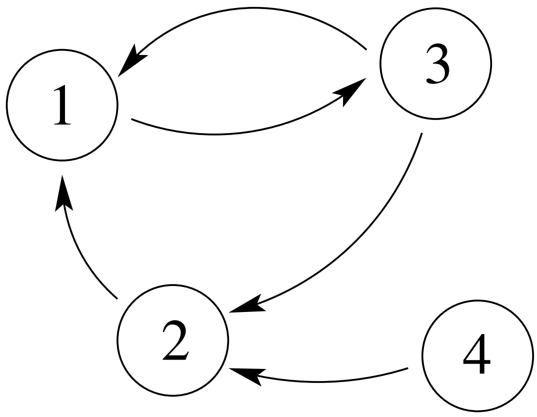


FIGURE 2. Internet et ses quatre pages

1. Écrire le système correspondant aux notes *Pagerank* du mini-réseau web de la figure 2 sans remplacer d par sa valeur (on pourra utiliser X, Y, Z et T à la place de $\mathrm{PR}(1), \ldots, \mathrm{PR}(4)$).
2. Résoudre le système pour $d = 1/2$ et dire quelle page est la plus pertinente selon cette notation.

2. L'article *The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine* de Sergey Brin et Lawrence Page publié en 1998 commence par *In this paper, we present Google....* Plus loin, les auteurs proposent de définir les notes $\mathrm{PR}(i)$ des pages selon la formule de l'algorithme *Pagerank*.

We assume page A has pages $T1 \ldots Tn$ which point to it (i.e., are citations). The parameter d is a damping factor which can be set between 0 and 1. We usually set d to 0.85. There are more details about d in the next section. Also $C(A)$ is defined as the number of links going out of page A. The PageRank of a page A is given as follows :

$$\mathrm{PR}(A) = (1-d) + d(\mathrm{PR}(T1)/C(T1) + \ldots + \mathrm{PR}(Tn)/C(Tn))$$

Sergey Brin et Lawrence Page disent aussi que PR est une probabilité et $\mathrm{PR}(i)$ doit donc être compris entre 0 et 1. Pour cela, il faudrait en fait remplacer $(1-d)$ par $(1-d)/N$ où N est le nombre total de pages, mais nous laissons ici la coquille de l'article originel qui ne fait que multiplier toutes les notes par N.

3. Le nombre de pages indexées par Google est estimé en 2019 à environ 130 mille milliards de pages. Combien le système linéaire correspondant a-t-il de coefficients ? Sachant qu'un disque dur standard actuel contient de l'ordre de 1 téraoctet (soit 2^{40} octets) de données, combien de disques durs faudrait-il pour stocker tous les coefficients de ce système linéaire, si on part de l'hypothèse que chaque coefficient occupe un octet ? Quel commentaire cela suggère-t-il sur la méthode décrite dans cet exercice ?

Espaces vectoriels

Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Cours

La structure d'espace vectoriel a déjà été introduite au premier semestre. Nous allons maintenant étudier cette notion de manière plus approfondie en introduisant notamment la notion de sous-espace vectoriel.

2.1. Structure de groupe abélien. — La structure de groupe est une structure fondamentale en mathématiques, nous l'utiliserons ici pour définir les espaces vectoriels.

Définition 2.1

Un *groupe* est un ensemble G muni d'une application appelée *loi de composition*

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ \big(a, b\big) & \longmapsto & a * b \end{array}$$

qui vérifie les conditions suivantes :

(G1) (Associativité)

$$\forall a, b, c \in G, \quad (a * b) * c = a * (b * c);$$

(G2) (Élément neutre) Il existe un élément e de G tel que

$$\forall a \in G, \quad a * e = e * a = a;$$

Un tel élément est unique et s'appelle *l'élément neutre* de G.

(G3) (Symétrique) Pour tout élément $a \in G$, il existe $b \in G$ tel que

$$a * b = b * a = e.$$

Pour un a donné, il existe un unique $b \in G$ qui vérifie cette condition. On l'appelle le *symétrique* (ou *inverse*) de a.
On dit que le groupe est *commutatif* ou *abélien* s'il vérifie en outre la condition suivante :
(GA1) (Commutativité)

$$\forall a, b \in G, \quad a * b = b * a;$$

Démonstration. — Démontrons l'unicité de l'élément neutre. Si e et e' vérifient les conditions de la définition, on a les égalités :

$$e = e * e' = e'.$$

Soit $a \in G$, démontrons l'unicité du symétrique de a. Si b et $b' \in G$ conviennent, alors

$$b = b * e = b * (a * b') = (b * a) * b' = e * b' = b'.$$

On a utilisé successivement (**G2**), l'hypothèse sur b', (**G1**), l'hypothèse sur b et (**G2**). □

Exemples 2.2. — i) Les ensembles des entiers relatifs $\mathbf{Z}$, des nombres rationnels $\mathbf{Q}$, des réels $\mathbf{R}$ et des nombres complexes $\mathbf{C}$ sont des groupes abéliens pour l'addition $+$.

ii) L'ensemble des nombres réels non nuls $\mathbf{R}^*$, et celui des nombres complexes non nuls $\mathbf{C}^*$ sont des groupes abéliens pour la multiplication $\times$.

iii) Soit X un ensemble. L'ensemble $\mathfrak{S}_X$ des bijections de X sur X forme un groupe pour la composition $(f, g) \mapsto f \circ g$. Ce groupe n'est pas abélien si le cardinal de X est supérieur ou égal à 3.

Notations 2.3

Un groupe abélien A est parfois noté additivement, dans ce cas la loi est notée $+$, l'élément neutre est noté 0, le symétrique de x est noté $-x$ et appelé *l'opposé* de x. On note également $x - y$ la différence de deux éléments, définie comme $x + (-y)$.

2.2. Structure d'espace vectoriel réel. — Nous allons maintenant rappeler la structure d'espace vectoriel, déjà vue au premier semestre, mais en utilisant la notion de groupe abélien.

Définition 2.4

Un *espace vectoriel réel* (ou **R**-espace vectoriel ou espace vectoriel sur **R**) est un groupe abélien E dont la loi de composition est appelée *addition* :

$$\begin{array}{rcl} E \times E & \longrightarrow & E \\ \left(\vec{u}, \vec{v}\right) & \longmapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array}$$

muni d'une application appelée *multiplication par un scalaire*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{R} \times E & \longrightarrow & E \\ \left(\lambda, \vec{v}\right) & \longmapsto & \lambda\vec{v} \end{array}$$

qui vérifient les quatre conditions suivantes :

(EV1) (Associativité de la multiplication scalaire)

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in E, \quad \lambda(\mu\vec{u}) = (\lambda\mu)\vec{u};$$

(EV2) (Distributivité à droite de la multiplication scalaire)

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v};$$

(EV3) (Distributivité à gauche de la multiplication scalaire)

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in E, \quad (\lambda + \mu)\vec{u} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{u};$$

(EV4) (Multiplication par l'unité)

$$\forall \vec{u} \in E, \quad 1\vec{u} = \vec{u}.$$

Remarques 2.5. — i) Les règles de calculs enseignées dans le secondaire pour les vecteurs sont valides dans les espaces vectoriels. Ainsi, par exemple, la formule $0\vec{u} = \overrightarrow{0}$ pour un élément $\vec{u}$ de E découle des précédentes. En effet, en utilisant uniquement les conditions de la définition, on a la suite d'égalités :

$$0\vec{u} = 0\vec{u} + \overrightarrow{0} = 0\vec{u} + (\vec{u} + (-\vec{u})) = (0\vec{u} + 1\vec{u}) + (-\vec{u}) = (0+1)\vec{u} + (-\vec{u}) = 1\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}.$$

On laisse en exercice la démonstration du fait que pour tout $\vec{u} \in E$, on a l'égalité $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$.

ii) Par la suite, on note également 0 le vecteur nul $\overrightarrow{0}$. On prendra donc garde que 0 peut aussi bien désigner le nombre réel nul que le vecteur nul.

Terminologie 2.6

Un *vecteur* est un élément d'un espace vectoriel.

Exemples 2.7. — i) L'ensemble $\mathbf{R}^n$, muni de l'addition

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

pour $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbf{R}$ et de la multiplication scalaire

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

pour $\lambda, x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$, est un espace vectoriel réel. Dans cet espace, le vecteur nul est $\overrightarrow{0} = (0, \ldots, 0)$ et l'opposé du vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ est le vecteur $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

ii) Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $E_1, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels. Alors le produit $E_1 \times \cdots \times E_n$ muni de l'addition

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

où $x_i, y_i \in E_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ et de la multiplication scalaire

$$\lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

où $\lambda \in \mathbf{R}$ et $x_i \in E_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$ est un espace vectoriel appelé *la somme directe externe* des espaces vectoriels $E_1, \ldots, E_n$. On le note $E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_n$.

iii) Soit X un ensemble et E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On munit l'ensemble E^X des applications de X dans E d'une structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel de la façon suivante. Soient $f, g \in E^X$, la somme des applications est l'application $f + g$ de X dans E donnée par

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x).$$

Pour éviter les confusions on écrira $(f + g)(x)$ pour la valeur de $f + g$ en x. Soit $f \in E^X$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$ l'application λf est l'application de X dans E donnée par

$$\lambda f : x \mapsto \lambda f(x)$$

En particulier si $E = \mathbf{R}$, on obtient une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble des applications de X dans $\mathbf{R}$.

Notations 2.8

Compte tenu de l'associativité de l'addition, on peut définir le symbole de somme Σ comme on l'a fait pour des familles de nombres. Étant donné des entiers $a \leqslant b$ et une famille de

$b-a+1$ vecteurs $\left(\vec{u}_a, \dots, \vec{u}_b\right)$, on définit

$$\sum_{k=a}^{b} \vec{u}_k = \vec{u}_a + \vec{u}_{a+1} + \dots \vec{u}_b.$$

Par convention, si $b < a$, la somme $\sum_{k=a}^{b} \vec{u}_k$ est le vecteur nul.

Comme l'addition est commutative, on peut généraliser ce symbole somme de la manière suivante : si I est un ensemble *fini* et $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E (c'est-à-dire une application de I dans E où $\vec{u}_i$ désigne l'image de $i \in I$), notons n le cardinal de I et soit ψ une bijection de $\{1, \dots, n\}$ sur I. La somme

$$\sum_{k=1}^{n} \vec{u}_{\psi(k)}$$

ne dépend pas de la bijection choisie ψ et est notée

$$\sum_{i\in I} \vec{u}_i.$$

Exemples 2.9. — Si l'ensemble I est vide, par définition on a $\sum_{i\in I} \vec{u}_i = 0$. Si l'ensemble I est un singleton, autrement dit $I = \{a\}$ on a $\sum_{i\in I} \vec{u}_i = \vec{u}_a$. Si $I = \{1, 2\}$, on peut écrire

$$\sum_{i\in I} \vec{u}_i = \vec{u}_1 + \vec{u}_2.$$

Un certain nombre de règles de calcul se généralisent au symbole $\sum$ qui vient d'être défini. Nous les décrivons dans la remarque suivante :

Remarques 2.10. — i) (Découpage) On suppose que l'ensemble fini I est la réunion de deux parties I_1 et I_2 qui sont *disjointes*, c'est-à-dire que l'intersection $I_1 \cap I_2$ est vide. Alors pour toute famille de vecteurs $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ d'un espace vectoriel E, on a la relation

$$\sum_{i\in I} \vec{u}_i = \left(\sum_{i\in I_1} \vec{u}_i\right) + \left(\sum_{i\in I_2} \vec{u}_i\right). \tag{10}$$

Pour démontrer cela, notons m le cardinal de I_1 et n le cardinal de I alors I_2 est de cardinal $n-m$. Choisissons alors une bijection φ_1 de $\{1, \dots, m\}$ sur I_1 et une bijection φ_2 de $\{m+1, \dots, n\}$ sur l'ensemble I_2. Alors l'application φ de $\{1, \dots, n\}$ dans I donnée par

$$\varphi(k) = \begin{cases} \varphi_1(k) \text{ si } 1 \leqslant k \leqslant m, \\ \varphi_2(k) \text{ si } m < k \leqslant n. \end{cases}$$

est une bijection et on a les relations

$$\sum_{i\in I}\vec{u}_i = \sum_{k=1}^{n}\vec{u}_{\varphi(i)} = \left(\sum_{k=1}^{m}\vec{u}_{\varphi(k)}\right) + \left(\sum_{k=m+1}^{n}\vec{u}_{\varphi(k)}\right) = \left(\sum_{i\in I_1}\vec{u}_i\right) + \left(\sum_{i\in I_2}\vec{u}_i\right).$$

Cette formule se généralise par récurrence sur l'entier m aux cas où l'ensemble I est la réunion de m parties $I_1, \ldots, I_m$ deux à deux disjointes. Dans ce cas, on obtient la formule

$$\sum_{i\in I}\vec{u}_i = \sum_{k=1}^{m}\sum_{i\in I_k}\vec{u}_i.$$

ii) (Compatibilité avec l'addition) Si on se donne des familles $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ et $(\vec{v}_i)_{i\in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E indicées par le *même* ensemble fini I, alors

$$\left(\sum_{i\in I}\vec{u}_i\right) + \left(\sum_{i\in I}\vec{v}_i\right) = \sum_{i\in I}(\vec{u}_i + \vec{v}_i).$$

iii) (Compatibilité avec la multiplication par un scalaire) Soit $(\vec{u}_i)_{i\in I}$ une famille finie de vecteurs d'un espace vectoriel E, ce qui signifie que l'ensemble I est fini, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$\lambda\left(\sum_{i\in I}\vec{u}_i\right) = \sum_{i\in I}\lambda\vec{u}_i.$$

iv) (Changement de variables) Soient I et J des ensembles finis, et soit $\varphi : I \to J$ une *bijection*. En particulier, les ensemble I et J ont même cardinal. Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E. Alors on a la formule

$$\sum_{i\in I}\vec{u}_{\varphi(i)} = \sum_{j\in J}\vec{u}_j.$$

Dans une telle situation, on dit qu'« on fait le changement de variables $j = \varphi(i)$ ».

Quand on manipule le symbole $\sum$ il faut vérifier pour chaque égalité que le nombre de termes de la somme ne change pas. Ainsi la formule (10) est fausse si $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$ car les sommes à droite de l'égalité contiennent plus de termes que la somme à gauche.

2.3. Sous-espace vectoriel. — Les sous-espaces vectoriels sont des parties d'un espace vectoriel qui peuvent être elle-même vues comme un espace vectoriel.

Définition 2.11

Soit E un espace vectoriel réel. Un sous-espace vectoriel de E est une partie F de E qui vérifie les trois conditions suivantes :

(i) La partie F n'est pas vide;

(ii) Elle est *stable* pour l'addition :

$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in F, \quad \vec{u} + \vec{v} \in F;$$

(iii) Elle est stable pour le multiplication par un scalaire :

$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in F, \quad \lambda \vec{u} \in F.$$

Ces conditions permettent de munir F de l'addition et le multiplication déduites par restriction de celles de E :

$$\begin{array}{ccc} F \times F & \longrightarrow & F \\ (\vec{u}, \vec{v}) & \longmapsto & \vec{u} + \vec{v} \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{R} \times F & \longrightarrow & F \\ (\lambda, \vec{v}) & \longmapsto & \lambda \vec{v}, \end{array}$$

L'ensemble F muni de ces application est un espace vectoriel.

Démonstration. — Soit F un sous-espace vectoriel de E. La seule difficulté pour démontrer que F muni des lois induites est bien un espace vectoriel est de démontrer que c'est un groupe pour l'addition, c'est-à-dire qu'il contient le vecteur nul et l'opposé de ses éléments. Mais, par la condition (i), la partie F est non vide. Soit $\vec{u} \in F$. Alors $0 = 0\vec{u} \in F$ par la condition (iii). De même pour tout $\vec{u} \in F$, l'opposé $-\vec{u} = (-1)\vec{u} \in F$. □

Remarque 2.12. — Il résulte de ce qui précède qu'un sous espace vectoriel contient *toujours* le vecteur nul. Dans la pratique, on vérifie la condition (i) en vérifiant que $0 \in F$.

Par contre, il est essentiel de vérifier que F n'est pas vide, car la partie vide vérifie les conditions (ii) et (iii), mais ne peut pas être munie d'une structure d'espace vectoriel.

Exemples 2.13. — i) Les parties 0 et E d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E sont des sous-espaces vectoriels de E.

ii) Soit I un ensemble et soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille de sous-espaces vectoriels de E. L'intersection de cette famille de parties est définie comme

$$\bigcap_{i \in I} E_i = \{\vec{u} \in E \mid \forall i \in I, \vec{u} \in E_i\}.$$

Démontrons que c'est un sous-espace vectoriel de E.

Pour tout $i \in I$, $0 \in E_i$ donc $0 \in \bigcap_{i \in I} E_i$;

Soient $\vec{u}, \vec{v} \in \bigcap_{i\in I} E_i$. Alors pour tout $i \in I$, on a que $\vec{u} \in E_i$ et $\vec{v} \in E_i$, et donc $\vec{u} + \vec{v} \in E_i$, puisque E_i est un sous-espace vectoriel de E. Donc $\vec{u} + \vec{v} \in \bigcap_{i\in I} E_i$. Enfin soit $\lambda \in \mathbf{R}$ et $\vec{u} \in \bigcap_{i\in I} E_i$. Pour tout $i \in I$, le vecteur $\vec{u}$ appartient à E_i et donc $\lambda\vec{u} \in E_i$, puisque E_i est un sous-espace vectoriel. Donc $\lambda\vec{u} \in \bigcap_{i\in I} E_i$.

Notons que, si I est l'ensemble vide, cette intersection est, par définition, l'espace vectoriel E lui-même.

iii) Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel et soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E.

En général, $F_1 \cup F_2$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Plus précisément, supposons que F_1 n'est pas contenu dans F_2 et que F_2 n'est pas contenu dans F_1. On peut alors choisir un vecteur $\vec{u}_1 \in F_1 - F_2$ et un vecteur $\vec{u}_2 \in F_2 - F_1$ si $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in F_1$, alors $\vec{u}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - \vec{u}_1 \in F_1$ ce qui contredit l'hypothèse faite sur $\vec{u}_2$. De même, on démontre que $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ ne peut pas appartenir à F_2. Par conséquent $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ n'appartient pas à $F_1 \cup F_2$ ce qui prouve que cet ensemble n'est pas un sous-espace vectoriel de E. Par contre si $F_1 \subset F_2$ (resp. $F_2 \subset F_1$) alors la réunion $F_1 \cup F_2$ est égale à F_2 (resp. F_1) et cette réunion est, dans ce cas très particulier, un sous-espace de E.

On a donc démontré que, pour des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2, l'ensemble $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel de E si *et seulement si* l'un des deux sous-espaces vectoriels est contenu dans l'autre.

iv) Considérons à nouveau des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E Démontrons que l'ensemble

$$F_1 + F_2 = \{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in F_2 \times F_2\}$$

est un sous-espace vectoriel de E. Tout d'abord $0 = 0 + 0$ appartient à $F_1 + F_2$.

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des éléments de $F_1 + F_2$. On peut donc trouver $\vec{u}_1, \vec{v}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2, \vec{v}_2 \in F_2$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. On peut alors écrire les égalités :

$$\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$$

Comme $\vec{u}_1 + \vec{v}_1$ appartient à F_1 et $\vec{u}_2 + \vec{v}_2$ appartient à F_2, cela prouve que $\vec{u} + \vec{v}$ appartient à $F_1 + F_2$ ce qui prouve l'assertion (ii) de la définition.

Soit maintenant $\vec{u} \in F_1 + F_2$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. On peut écrire $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in F_1$ et $\vec{u}_2 \in F_2$. L'égalité $\lambda\vec{u} = \lambda\vec{u}_1 + \lambda\vec{u}_2$ prouve que $\lambda\vec{u} \in F_1 + F_2$ ce qui conclut la preuve du fait que $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel de E.

Notons que tout sous-espace vectoriel de E qui contient F_1 et F_2 contient forcément $F_1 + F_2$. Donc $F_1 + F_2$ peut être caractérisé comme le plus petit sous espace vectoriel de E, au sens de l'inclusion, qui contient la réunion $F_1 \cup F_2$. $F_1 + F_2$ s'appelle la somme des sous-espaces vectoriels F_1 et F_2.

2.4. Combinaison linéaire, familles libres, liées et génératrices. — Dans ce paragraphe, la lettre E désigne un espace vectoriel réel. On définit une combinaison linéaire de vecteurs comme suit.

Définition 2.14

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ tout vecteur $\vec{w}$ qui peut s'écrire :

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n ,$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont des nombres réels.

Exemple 2.15. — Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, les combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont les vecteurs de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, où λ et μ sont deux réels quelconques.

Notation 2.16

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. On note $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.

Proposition 2.17

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. L'ensemble $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Tout sous espace vectoriel de E qui contient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ contient $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$. Le sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est appelé le sous-espace vectoriel de E *engendré par* $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$.

Démonstration. — Tout d'abord $0 = \sum_{i=1}^{n} 0\vec{u}_i$ ce qui prouve que $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ contient le vecteur nul.

Soient maintenant $\vec{v}$ et $\vec{w}$ des éléments de $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$. Par définition de cet ensemble, il existe des n-uplets de nombres réels $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ et $(\mu_1,\dots,\mu_n)$ tels que

$$\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{u}_i \qquad \text{et} \qquad \vec{w}=\sum_{i=1}^{n}\mu_i\vec{u}_i.$$

Cela fournit l'égalité

$$\vec{v}+\vec{w}=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i\vec{u}_i+\mu_i\vec{u}_i)=\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i+\mu_i)\vec{u}_i.$$

Donc $\vec{v}+\vec{w}$ est également une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$.

Soit $\mu\in\mathbf{R}$ et soit $\vec{v}\in\mathrm{Vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n)$. Comme précédemment, on écrit $\vec{v}=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{u}_i$ avec $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbf{R}^n$. On obtient

$$\mu\vec{v}=\mu\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{u}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\mu\lambda_i\vec{u}_i$$

où la première égalité résulte de la remarque 2.10 iii). Cela démontre que $\mu\vec{v}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$. □

Exemples 2.18. — Si $n=0$, alors il résulte de nos conventions sur les sommes que le sous-espace vectoriel engendré est $\{0\}$.

Si $n=1$ et si $\vec{u}_1$ est un vecteur *non nul*, le sous-espace vectoriel engendré est formé de tous les multiples de $\vec{u}_1$. Ce sous-espace vectoriel est alors une droite (figure 3). Par contre, si $\vec{u}_1=0$,

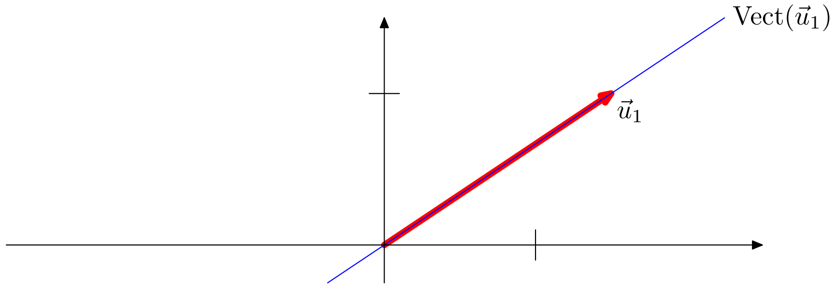


FIGURE 3. Sous-espace vectoriel engendré par un vecteur non nul

alors tout multiple de $\vec{u}_1$ est également non nul et le sous-espace vectoriel engendré est $\{0\}$.

Pour deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, il va falloir également distinguer plusieurs cas : sur la figure 4 est représenté un exemple où l'espace vectoriel engendré par deux vecteurs de l'espace forme un plan. Mais supposons que le vecteur $\vec{u}_2$ soit proportionnel au vecteur $\vec{u}_1$, c'est-à-dire que

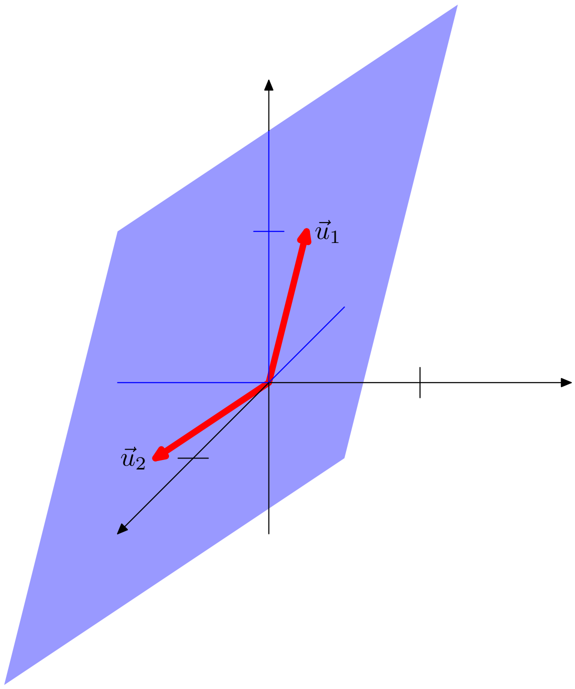


FIGURE 4. Sous-espace vectoriel engendré par deux vecteurs

$\vec{u}_2 = \rho\vec{u}_1$ pour un nombre réel ρ avec $\vec{u}_1 \neq 0$. Alors une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ s'écrit

$$\vec{w} = \lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 = (\lambda_1 + \lambda_2\rho)\vec{u}_1;$$

autrement dit $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1)$ est une droite. Enfin, si les deux vecteurs sont nuls, le sous-espace vectoriel engendré est à nouveau réduit à $\{0\}$.

Les exemples précédents montrent l'intérêt d'introduire un critère qui permet de préciser la nature du sous-espace vectoriel engendré. C'est l'objet des définitions qui suivent; celles-ci permettront de définir une notion de rang pour les familles de vecteurs.

Définition 2.19

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E.

On dit que le n-uplet $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est :

a) Une *famille libre* si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \implies (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0);$$

b) Une *famille liée* si elle n'est pas libre ;

c) Une *famille génératrice de E* si tout vecteur de l'espace E est combinaison linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$.

d) Une *base de E* si c'est une famille libre et génératrice.

Remarque 2.20. — Dans ce cours, nous ne définissons la notion de famille libre ou génératrice que pour des familles finies ; pour éviter toute confusion, il nous arrivera de parler de famille génératrice finie. Ainsi on dira qu'un espace vectoriel E *admet une famille génératrice finie* s'il existe un entier $n \in \mathbf{N}$ et un n-uplet $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ de vecteurs de E qui est une famille génératrice de E.

Exemples 2.21. — Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. La famille $(\vec{u})$ est libre si et seulement si le vecteur $\vec{u}$ n'est pas nul.

Si un des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ est nul, alors la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est liée.

Définition 2.22

Des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de E sont dit *colinéaires* s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$ ou $\vec{u} = \lambda\vec{v}$.

Remarque 2.23. — De manière équivalente, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si $\vec{u} = 0$ ou s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbf{R}$ tel que $\vec{v} = \lambda\vec{u}$.

Proposition 2.24

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E. La famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée si seulement si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Démonstration. — Supposons la famille liée. Il existe alors un couple de nombres réels $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ tel que $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v} = 0$. Si $\mu = 0$, alors $\lambda \neq 0$ et donc $\vec{u} = 0$. Par conséquent les vecteurs sont colinéaires. Sinon $\vec{v} = -\frac{\lambda}{\mu}\vec{u}$ et les vecteurs sont également colinéaires.

Réciproquement, supposons que les vecteurs sont colinéaires. Si $\vec{v} = \lambda\vec{u}$, alors $\lambda\vec{u} + (-1)\vec{v} = 0$; Donc la famille $(\vec{u}, \vec{v})$ est liée. On raisonne de même si $\vec{u} = \lambda\vec{v}$. □

Terminologie 2.25

Trois vecteurs liés sont dits *coplanaires*.

Plus généralement, pour n vecteurs on peut démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.26

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. La famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est liée si et seulement s'il existe un entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\vec{u}_i$ soit combinaison linéaire des autres vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n$.

Démonstration. — Supposons tout d'abord qu'il existe un entier $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\vec{u}_i$ soit combinaison linéaire des autres vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1}, \ldots, \vec{u}_n$. alors il existe $n-1$ nombres réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n$ tels que

$$\vec{u}_i = \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} - \{i\}} \lambda_k \vec{u}_k.$$

Posons alors $\lambda_i = -1$, on obtient la relation

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k = 0$$

et comme $\lambda_i \neq 0$, ces nombres réels ne sont pas tous nuls, ce qui prouve que la famille est liée.

Réciproquement supposons que la famille de vecteurs est liée. Il existe donc une famille de n nombre réels $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ non tous nuls tels que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k = 0$$

Soit $i \in \{1,\dots,n\}$ tel que $\lambda_i \neq 0$ et posons $\mu_k = -\frac{\lambda_k}{\lambda_i}$ pour $k \in \{1,\dots,n\} - \{i\}$. Alors

$$\vec{u}_i = \sum_{k \in \{1,\dots,n\}-\{i\}} \mu_k \vec{u}_k,$$

ce qui démontre que $\vec{u}_i$ est combinaison linéaire des autres vecteurs. $\square$

Lemme 2.27. — *Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$ une famille de vecteurs. Si $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$ alors*

(11) $$\operatorname{Vect}(\vec{v},\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n) = \operatorname{Vect}(\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n).$$

Démonstration. — Pour tout $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{R}^n$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0\vec{v} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i,$$

ce qui prouve que dans (11) le sous-espace à droite de l'égalité est inclus dans celui de gauche.

Démontrons l'inclusion inverse. Soit $\vec{w}$ une combinaison linéaire de $\vec{v},\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$ On peut donc écrire

$$\vec{w} = \lambda\vec{v} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$$

pour un $(\lambda,\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$. Mais comme $\vec{v}$ est combinaison linéaire des vecteurs $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$, il existe $(\mu_1,\dots,\mu_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{u}_i$. Par conséquent,

$$\vec{w} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i \vec{u}_i\right) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda\mu_i + \lambda_i)\vec{u}_i$$

ce qui prouve que $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}_1,\dots,\vec{u}_n$. $\square$

Terminologie 2.28

Soit X un ensemble. Soient $m,n \in \mathbf{N}$ et soient $(x_1,\dots,x_m) \in X^m$ et $(y_1,\dots,y_n) \in X^n$. On dit que $(x_1,\dots,x_m)$ est *extrait* de $(y_1,\dots,y_n)$ s'il existe une application *strictement croissante* $\varphi : \{1,\dots,m\} \to \{1,\dots,n\}$ tel que $x_i = y_{\varphi(i)}$ pour $i \in \{1,\dots,m\}$.

Notons qu'en particulier, dans ce cas, $m \leqslant n$. Autrement dit, si $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}$ satisfait $i_1 < i_2 < \cdots < i_m$, alors $(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_m})$ est extraite de $(x_1,\dots,x_n)$. Comme la composée de deux applications strictement croissantes est strictement croissante, une famille extraite d'une famille extraite de $(y_1, \dots, y_n)$ est encore une famille extraite de $(y_1, \dots, y_n)$.

Proposition 2.29

De toute famille génératrice finie on peut extraire une base.

Démonstration. — Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille génératrice de l'espace vectoriel E. Il faut démontrer qu'il existe une famille extraite de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ qui est une base de E.

Nous allons raisonner par récurrence sur l'entier n. Si $n = 0$, alors comme la famille vide () est toujours libre, cette famille est libre et génératrice, donc c'est une base de E. Notons que dans ce cas $E = \{0\}$.

Supposons maintenant le résultat vrai pour une famille de $n-1$ vecteurs. Si la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre, alors c'est une base de E et le résultat est démontré. Sinon cette famille est liée. Par la proposition 2.26, cela implique qu'il existe un entier $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\vec{u}_i$ soit combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$. Par le lemme 2.27, cela implique l'égalité

$$\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n).$$

Mais par hypothèse, $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est génératrice, donc cet espace vectoriel est E, ce qui prouve que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$ est également génératrice. En appliquant l'hypothèse de récurrence à cette famille génératrice de $n-1$ vecteurs on obtient une famille extraite de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_{i-1}, \vec{u}_{i+1}, \dots, \vec{u}_n)$ qui est une base. Mais cette famille est également un famille extraite de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$. $\square$

Proposition 2.30

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soit $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. On considère l'application $\varphi : \mathbf{R}^n \to E$ définie par

$$\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{u}_k$$

alors

a) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre si et seulement si φ est injective ;

b) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est génératrice si et seulement si φ est surjective ;

c) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base si et seulement si φ est bijective.

Démonstration. — Démontrons l'assertion a). Dire que la famille est liée signifie qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq (0, \dots, 0)$ tels que $\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 = \varphi(0, \dots, 0)$. Donc si la famille est liée, l'application n'est pas injective.

Inversement, supposons que φ n'est pas injective, alors il existe deux éléments distincts $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $(\mu_1, \dots, \mu_n)$ de $\mathbf{R}_n$ tels que $\varphi(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \varphi(\mu_1, \dots, \mu_n)$. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \sum_{k=1}^{n} \mu_i \vec{u}_i$$

ce que l'on peut réécrire

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i)\vec{u}_i = 0.$$

Mais comme les deux n-uplets sont distincts, le n-uplet $(\lambda_1 - \mu_1, \dots, \lambda_n - \mu_n)$ est non nul, ce qui prouve que la famille est liée.

L'assertion b) résulte du fait que l'image de φ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$.

L'assertion c) résulte des deux premières équivalences et de la définition d'une base. □

Définition 2.31

Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E, les *coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \in E$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots \vec{e}_n)$* est l'unique n-uplet $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{u}.$$

2.5. Dimension d'un espace vectoriel. — Dans ce cours, nous ne définirons la dimension que quand celle-ci est finie.

Définition 2.32

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.

L'objectif principal de ce ce paragraphe est de démontrer le théorème suivant, admis au premier semestre.

Théorème 2.33

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors E admet une base formée d'un nombre fini de vecteurs et si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ sont des bases de l'espace vectoriel E alors $m = n$.

L'existence d'une base résulte de la proposition 2.29. Pour démontrer l'égalité $n = m$, nous allons utiliser le lemme suivant :

Lemme 2.34. — *Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ une famille génératrice de E et soit $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une famille de vecteurs avec $n > m$. Alors la famille $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ est liée.*

Démonstration. — Comme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ est une famille génératrice de E pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, le vecteur $\vec{f}_j$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m$. On peut donc trouver des nombres réels $a_{1,j}, \dots, a_{m,j}$ tels que

$$\vec{f}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \vec{e}_i.$$

Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^m$. La relation

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \vec{f}_j = 0. \tag{12}$$

se réécrit

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \vec{e}_i \right) = 0.$$

En échangeant les sommes finies on obtient que cela équivaut à la relation

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_j a_{i,j} \right) \vec{e}_i = 0.$$

Par conséquent, toute solution $(x_1, \dots, x_n)$ du système d'equations linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1} X_1 + \dots + a_{1,n} X_n = 0 \\ a_{2,1} X_1 + \dots + a_{2,n} X_n = 0 \\ \dots \\ a_{m,1} X_1 + \dots + a_{m,n} X_n = 0 \end{cases} \tag{13}$$

vérifie la formule (12). Mais comme $n > m$, il résulte de la proposition 1.13 que le système (13) admet une solution non nulle. Cela prouve que la famille $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ est liée. □

Preuve du théorème 2.33. — Par contraposée, il résulte du lemme que si la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ est génératrice et la famille $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ est libre, alors on a l'inégalité $n \leqslant m$.

Soient $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ des bases de E. La première famille est génératrice et le seconde libre donc $n \leqslant m$ mais la seconde est aussi génératrice et la première libre ce qui donne l'inégalité dans l'autre sens. On obtient l'égalité $m = n$. □

Définition 2.35

Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de l'espace vectoriel E, alors n s'appelle la *dimension de E*. On la note $\dim(E)$.

Une *droite vectorielle* est un espace vectoriel de dimension un, un *plan vectoriel* est un espace vectoriel de dimension deux.

Le *rang d'une famille de vecteurs* $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est la dimension de l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$.

Remarque 2.36. — Comme la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille génératrice de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$, ce dernier est bien un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème 2.37

On suppose que l'espace vectoriel est de dimension n. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n) \in E^n$ une famille de n vecteurs. Les assertions suivantes sont équivalentes

(i) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre;

(ii) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est génératrice;

(iii) La famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base.

On prendra garde au fait que l'équivalence ne vaut que lorsque le nombre de vecteurs de la famille est *égal* à la dimension de l'espace.

Démonstration. — Par définition d'une base, l'assertion (iii) implique les deux premières.

Démontrons l'implication (i)⇒(iii). Soit $\vec{v}$ un vecteur de E. Comme E est de dimension n, il possède une famille génératrice avec n vecteurs. Par le lemme 2.34, la famille $(\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est liée. Donc il existe une famille $(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n+1}$ non nulle telle que

$$\mu\vec{v} + \sum_{k=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0$$

Si $\mu = 0$ alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = 0$ avec $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \neq 0$, ce qui contredit le fait que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est libre donc $\mu \neq 0$ et on en déduit l'égalité

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\lambda_i}{\mu} \vec{u}_i.$$

Comme cela s'applique à tout vecteur $\vec{v}$ de E, cela prouve que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est génératrice. C'est donc bien une base de E.

Démontrons l'implication (ii)⇒(iii). Comme la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est génératrice, par la propriété 2.29 on peut en extraire une famille $(\vec{u}_{i_1}, \dots, \vec{u}_{i_m})$ qui est une base de E avec $1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_m \leqslant n$. Mais par le théorème 2.33, on a l'égalité $m = n$ ce qui implique les égalités $i_k = k$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$ et prouve que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E. □

Proposition 2.38

Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base d'un espace vectoriel E et soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ une famille libre de E. alors on peut extraire de $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une famille $(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_{n-m}})$ de sorte que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{e}_{i_1}, \dots \vec{e}_{i_{n-m}})$ forme une base de E.

Démonstration. — Par le lemme 2.34, on a l'inégalité $m \leqslant n$ et donc $n - m \geqslant 0$. Nous allons raisonner par récurrence sur $n - m$.

Initialisation Si $n - m = 0$, alors il résulte du théorème 2.37 que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une base de E, ce qui prouve le théorème dans ce cas.

Hérédité Supposons $n - m > 1$ et le résultat connu pour $(n - m) - 1$. Comme $n - m > 1$, par le théorème 2.33, la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ n'est pas génératrice. Par le lemme 2.27, si pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le vecteur $\vec{e}_i$ est une combinaison linéaire de $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ alors

$$E = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m) = \mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m),$$

ce qui contredit le fait que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ n'est pas une famille génératrice. Par conséquent, il existe $i_1 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $\vec{e}_{i_1}$ n'est pas combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$. En outre, on peut choisir

i_1 comme le plus petit entier pour lequel cette condition est vérifiée. Soient $(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_m)$ tels que

$$\mu \vec{e}_{i_1} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \vec{u}_i = 0.$$

Si on avait $\mu \neq 0$, alors $\vec{e}_{i_1}$ pourrait s'écrire comme combinaison linéaire de $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$, ce qui contredit le choix de i_1. Donc $\mu = 0$. Comme la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ est libre, on obtient que $(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ est également nul. Cela prouve que la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{e}_{i_1})$ est libre et en appliquant l'hypothèse de récurrence à cette famille, on obtient qu'il existe une famille de $n-m-1$ vecteurs $(\vec{e}_{i_2}, \dots, \vec{e}_{i_{n-m}})$ extraite de $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ telle que $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m, \vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_{n-m}})$ soit une base de E. Comme cette famille est libre, les entiers $i_1, \dots, i_{n-m}$ sont deux à deux distincts, ce qui démontre le résultat pour $n-m$. $\square$

Corollaire 2.39

Dans un espace vectoriel de dimension finie, on peut toujours compléter une famille libre de E en une base de E.

Pour terminer donnons la dimension de la somme directe externe d'espaces vectoriels

Proposition 2.40

Soient E_1, E_2 des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie. Alors $E_1 \oplus E_2$ est de dimension finie et

$$\dim(E_1 \oplus E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2).$$

Démonstration. — Pour $i \in \{1,2\}$ posons $n_i = \dim(E_i)$ et choisissons une base $(\vec{e}_{i,1}, \dots, \vec{e}_{i,n_i})$ de E_i. On note également ι_1 (resp. ι_2) l'application de E_1 (resp. E_2) dans $E_1 \oplus E_2$ qui envoie un vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $(\vec{u}, 0)$ (resp. $(0, \vec{u})$). Nous allons vérifier que la famille de $n_1 + n_2$ vecteurs

$$(\iota_1(\vec{e}_{1,1}), \dots, \iota_1(\vec{e}_{1,n_1}), \iota_2(\vec{e}_{2,1}), \dots, \iota_2(\vec{e}_{2,n_2}))$$

est une base de la somme directe.

Soit $\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ un vecteur de $E_1 \oplus E_2$. Pour $i \in \{1,2\}$, on peut écrire $\vec{u}_i = \sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j} \vec{e}_{i,j}$, avec $(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n_i}) \in \mathbf{R}^{n_i}$. Par définition de la structure d'espace vectoriel sur la somme directe, on a les égalités,

$$\vec{u} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \iota_1(\vec{u}_1) + \iota_2(\vec{u}_2) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j}\iota_i(\vec{e}_{i,j}),$$

ce qui prouve que la famille considérée est génératrice.

Soit $(\lambda_{1,1}, \dots, \lambda_{1,n_1}, \lambda_{2,1}, \dots, \lambda_{2,n_2}) \in \mathbf{R}^{n_1+n_2}$ une famille de nombres réels tels que

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j}\iota_i(\vec{e}_{i,j}) = 0$$

alors

$$\left(\sum_{j=1}^{n_1} \lambda_{1,j}\vec{e}_{1,j}, \sum_{j=1}^{n_2} \lambda_{2,j}\vec{e}_{2,j}\right) = 0.$$

Donc $\sum_{j=1}^{n_i} \lambda_{i,j}\vec{e}_{i,j} = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$. Ceci entraîne que $(\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n_i}) = 0$ pour $i \in \{1, 2\}$ et donc tous les coefficients sont nuls. La famille est donc également libre. □

Remarque 2.41. — On peut généraliser la formule précédente à la somme directe externe de m $\mathbf{R}$-espaces vectoriels

$$\dim(E_1 \oplus E_2 \oplus \cdots \oplus E_m) = \sum_{i=1}^{m} \dim(E_i).$$

2.6. Dimension et sous-espace vectoriel. — Nous allons maintenant nous intéresser à la dimension d'un sous-espace vectoriel

Théorème 2.42

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est un sous espace vectoriel de dimension finie m avec $m \leqslant n$. En outre, $m = n$ si et seulement si $F = E$.

Démonstration. — Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une famille libre de F. Par le lemme 2.34, on a $k \leqslant n$. Autrement dit, le nombre de vecteurs dans une famille libre de F admet un maximum que nous notons m. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ une famille libre de F, démontrons que cette famille est une base de F. Pour cela il suffit de vérifier qu'elle est génératrice. Soit $\vec{v} \in F$. Comme m est maximal, la famille $(\vec{v}, \vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ est liée. Donc il existe une famille $(\mu, \lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbf{R}^{m+1}$ non nulle telle que

$$\mu\vec{v} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_i \vec{u}_i = 0.$$

Comme la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ est libre, le nombre réel μ est non nul, et on en déduit que $\vec{v}$ est combinaison linéaire $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$. Donc la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ est génératrice et c'est une base de F.

Si $F = E$, alors $\dim(F) = \dim(E)$. Réciproquement, supposons $n = \dim(F) = \dim(E)$. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une base de F. C'est une famille libre de F et donc de E avec $\dim(E)$ vecteurs. Par le théorème 2.37 c'est une famille génératrice de E. Mais F contient toutes les combinaisons linéaires des vecteurs de cette base, donc $E \subset F$. □

2.7. Un exemple : les applications polynomiales. — Rappelons la définition de cet ensemble d'applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ vue au premier semestre.

Définition 2.43

Une application P de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est dite *polynomiale* s'il existe un entier d et $d+1$ nombres réels $a_0, \dots, a_d$ de sorte que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0. \tag{14}$$

Proposition 2.44

Les applications polynomiales forment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$, qui est stable par produit et dérivation.

Pour tout $d \in \mathbf{N}$, notons X^d l'application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto x^d$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(1, \dots, X^n)$ est libre. En particulier, si P vérifie la condition (14), les coefficients $a_0, \dots, a_d$ sont uniquement déterminés par l'application P.

***Remarque 2.45.* —** Par convention, on a l'égalité $x^0 = 1$ pour tout nombre réel x.

Démonstration. — Par définition, l'application constante nulle est polynomiale et si P est une application polynomiale, alors, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$, l'application λP est également polynomiale.

Soient P et Q des applications polynomiales. Il existe alors des entiers p et q, ainsi que des nombres réels $a_0, \dots, a_p$ et $b_0, \dots, b_q$ tels que

$$P(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k x^k \qquad \text{et} \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{q} b_k x^k \tag{15}$$

pour $x \in \mathbf{R}$. Posons $n = \max(p, q)$ et posons $a_k = 0$ si $p+1 \leqslant k \leqslant p+q$ et $b_k = 0$ si $q+1 \leqslant k \leqslant p+q$. Alors on a la relation

$$(P+Q)(x) = \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k$$

si $x \in \mathbf{R}$, ce qui prouve que $P+Q$ est polynomiale. Par ailleurs les relations

$$(PQ)(x) = \left(\sum_{k=0}^{p} a_k x^k\right) \times \left(\sum_{k=0}^{q} b_k x^k\right) = \sum_{n=0}^{p+q} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n \tag{16}$$

démontrent que le produit d'applications polynomiales est encore polynomiale et que les coefficients du produit sont données par $c_k = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Enfin, nous avons vu au premier semestre que, si P vérifie la condition (14) alors elle est dérivable et sa dérivée vérifie

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P'(x) = \sum_{k=0}^{d-1} (k+1) a_{k+1} x^k$$

ce qui prouve que P' est également polynomiale. À partir de l'expression donnée par la dérivée, on peut démontrer par récurrence sur n que la valeur de la dérivée k-ème en 0 est donnée par

$$P^{(k)}(0) = k! a_k.$$

Par conséquent, comme $k! \neq 0$, si la fonction est la fonction constante nulle, alors les coefficients a_k sont nuls, ce qui prouve la liberté de la famille $(1, X, \dots, X^n)$. □

Notation 2.46

On note $\mathbf{R}[X]$ l'espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Pour tout $d \in \mathbf{N}$, on note également $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ (ou $\mathbf{R}[X]_d$) l'espace $\mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^d)$.

Remarques 2.47. — i) Si $p \leqslant q$, on a l'inclusion $\mathbf{R}[X]_{\leqslant p} \subset \mathbf{R}[X]_{\leqslant q}$.

ii) Par la proposition précédente, $(1, X, \dots, X^d)$ est une base de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ qui est donc un espace vectoriel de dimension $d+1$.

iii) Notons qu'une application $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ appartient à $\mathrm{Vect}(1, X, \dots, X^d)$ si et seulement s'il existe $(a_0, \dots, a_d) \in \mathbf{R}^{d+1}$ tel que $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$. Mais cette égalité signifie exactement que l'application P vérifie la relation (14)

iv) Par définition des applications polynomiales, il résulte donc de la remarque précédente que

$$\mathbf{R}[X] = \bigcup_{d \in \mathbf{N}} \mathbf{R}[X]_{\leqslant d}.$$

Autrement dit, pour tout $P \in \mathbf{R}[X]$, il existe $d \in \mathbf{N}$ tel que $P \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$.

Définition 2.48

Soit $P \in \mathbf{R}[X]$. Le degré de P est défini par

$$\deg(P) = \begin{cases} \min\{d \in \mathbf{N} \mid P \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant d}\} \text{ si } P \neq 0, \\ -\infty \text{ si } P = 0. \end{cases}$$

Remarques 2.49. — i) Soit $d \geqslant 1$. Soit P un élément de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$. Notons $(a_0, \dots, a_d)$ ses coordonnées dans la base $(1, X, \dots, X^d)$. Alors l'application P appartient à $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d-1}$ si et seulement si $a_d = 0$. Il en résulte que $\deg(P) = d$ si et seulement s'il existe un $d+1$-uplet de nombres réels $(a_0, \dots, a_d)$ *avec* $a_d \neq 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x) = a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0.$$

ii) On étend l'addition de $\mathbf{N}$ à l'ensemble $\mathbf{N} \cup \{-\infty\}$ en posant $-\infty + \alpha = -\infty$ pour $\alpha \in \mathbf{N} \cup \{-\infty\}$.

Proposition 2.50

Soient P et Q des éléments de $\mathbf{R}[X]$, alors

a) $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$, avec égalité si $\deg(P) \neq \deg(Q)$;

b) $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

Démonstration. — Les deux assertions sont vraies si $P = 0$ ou $Q = 0$. On suppose maintenant que les applications P et Q sont non nulles on pose $p = \deg(P)$, $q = \deg(Q)$ et $n = \max(p, q)$ Comme $\mathbf{R}[X]_{\leqslant p} \subset \mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$ et $\mathbf{R}[X]_{\leqslant q} \subset \mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$ et que $\mathbf{R}[X]_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}[X]$, on optient que $P + Q \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant n}$ ce qui prouve la première inégalité.

Si $\deg(P) \neq \deg(Q)$, quitte à échanger P et Q, on peut supposer que $\deg(P) < \deg(Q)$. Mais alors $P \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant n-1}$. cela implique que $P + Q \notin \mathbf{R}[X]_{\leqslant n-1}$, car sinon on aurait $\deg(Q) \leqslant n-1$ ce qui contredirait la définition de n. Donc $\deg(P + Q) = n$ dans ce cas.

La formule (16) montre que $PQ \in \mathbf{R}[X]_{\leqslant p+q}$. En outre, en reprenant les notations de la preuve de la proposition , les coefficients de degré $p + q$ du produit est donné par

$$c_{p+q} = a_p b_q.$$

Il est donc non nul. $\square$

Fiche de révision

2.1. Espaces vectoriels

Définition R.2.1

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E. On appelle *combinaison linéaire* des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ tout vecteur $\vec{w}$ qui peut s'écrire :

$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \lambda_1 \vec{u}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{u}_n ,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels.

Définition R.2.2

Soit $n \in \mathbf{N}$ et soient $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ des vecteurs de E.

On dit que le n-uplet $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ est :

a) Une *famille libre* si elle vérifie la condition suivante :

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n, \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i = \vec{0} \implies (\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0);$$

b) Une *famille liée* si elle n'est pas libre ;

c) Une *famille génératrice de E* si tout vecteur de l'espace E est combinaison linéaires des vecteurs $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$.

d) Une *base de E* si c'est une famille libre et génératrice.

Définition R.2.3

Si $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de E, les *coordonnées d'un vecteur $\vec{u} \in E$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots \vec{e}_n)$* est l'unique n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$ tel que

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{u}.$$

Théorème R.2.4

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est un sous espace vectoriel de dimension finie m avec $m \leqslant n$. En outre, $m = n$ si et seulement si $F = E$.

Entraînement

2.1. Exercice corrigé

Exercice 2.1. On note

$$F = \{ (x.y.z.t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + 2z + t = 0 \}.$$

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.
2. Expliquer pourquoi $\dim(F) \leqslant 3$.
3. Donner une description paramétrique de F.
4. Donner une base de F et déterminer sa dimension

Dans cette résolution de l'exercice, ce qui est écrit en bleu correspond à des commentaires sur la résolution, mais ne fait pas partie de ce qu'il faut écrire pour résoudre correctement l'exercice.

1. Il convient de vérifier les trois conditions qui caractérisent un sous espace vectoriel

   (i) Comme $0 + 0 + 2 \times 0 + 0 = 0$, le quadruplet $(0, 0, 0, 0)$ appartient à F.

   (ii) Vérifions que F est stable par addition. Soient $(x, y, z, t) \in F$ et $(x', y', z', t') \in F$. Par définition de F, on a

   $$x + y + 2z + t = 0 \quad \text{et} \quad x' + y' + 2z' + t' = 0$$

   Par conséquent

   $$(x + x') + (y + y') + 2(z + z') + t + t' = (x + y + 2z + t) + (x' + y' + 2z' + t') = 0,$$

   ce qui prouve que

   $$(x, y, z, t) + (x', y', z', t') = (x + x', y + y', z + z', t + t') \in F.$$

   (iii) Vérifions que F est stable par multiplication par un scalaire. Soit $(x, y, z, t) \in F$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors $x + y + 2z + t = 0$ et donc

   $$\lambda x + \lambda y + 2\lambda z + \lambda t = \lambda(x + y + 2z + t) = 0.$$

   Donc $\lambda(x, y, z, t) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) \in F$

   On finit avec la conclusion. Donc F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$.

2. Comme F est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^4$ qui est de dimension 4, on a que $\dim(F) \leqslant 4$. Mais si $\dim(F) = 4$, alors $F = \mathbf{R}^4$. Or le quadruplet $(1, 0, 0, 0)$ n'appartient pas à F, puisque $1 + 0 + 2 \times 0 + 0 = 1 \neq 0$. Donc $\dim(F) \neq 4$ et $\dim(F) \leqslant 3$.

3. Donner une description paramétrique de F revient à résoudre le système linéaire des équations qui définissent F pour exprimer les variables principales en termes des variables libres.

   L'équation
$$X + Y + 2Z + T = 0$$
   équivaut à l'équation
$$X = -Y - 2Z - T$$
   Donc
$$F = \{ (-a - 2b - c, a, b, c), (a, b, c) \in \mathbf{R}^3 \}.$$

4. La question précédente donne en fait une bijection de $\mathbf{R}^3$ sur F ; l'idée pour trouver une base de F est de regarder les vecteurs de F qui correspondent aux vecteurs de la base usuelle de $\mathbf{R}^3$. Autrement dit on regarde les trois vecteurs de F obtenus lorsque le triplet (a, b, c) vaut $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$

   Par la question précédente, les vecteurs $\vec{f_1} = (-1, 1, 0, 0)$, $\vec{f_2} = (-2, 0, 1, 0)$ et $\vec{f_3} = (-1, 0, 0, 1)$ sont des vecteurs de F. Démontrons que la famille $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est libre. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que $x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3} = 0$. Alors
$$x(-1, 1, 0, 0) + y(-2, 0, 1, 0) + z(-1, 0, 0, 1) = 0$$
   c'est-à-dire
$$(-x - 2y - z, x, y, z) = (0, 0, 0, 0).$$
   Par conséquent $x = y = z = 0$, ce qui prouve que la famille $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est libre.

   Comme $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est une famille libre de vecteurs de F, on obtient que $\dim(F) \geqslant 3$. Or par la question 2, $\dim(F) \leqslant 3$, on obtient donc $\dim(F) = 3$ et $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ est une base de F.

2.2. Exercices

Exercice 2.2. 1. Démontrer que $\mathbf{Z}$, muni de l'addition est un groupe abélien.

2. Démontrer que l'ensemble des entiers naturels $\mathbf{N}$ muni de l'addition possède un élément neutre, mais n'est pas un groupe.
3. Soit X un ensemble.
   (a) Démontrer que l'ensemble $\mathfrak{S}_X$ des bijections de X sur X, est un groupe pour la composition des applications.
   (b) On suppose que X contient au moins trois éléments distincts. Démontrer que le groupe $\mathfrak{S}_X$ n'est pas abélien.

Exercice 2.3. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbf{R}^2$? (justifier la réponse)

1. $A = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x \leqslant y\}$
2. $B = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid xy = 0\}$
3. $C = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}$
4. $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 1\}$
5. $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\}$
6. $F = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0\}$

Exercice 2.4. Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ des suites de nombres réels, lesquels sont des sous-espaces vectoriels, lesquels ne le sont pas et pourquoi ?

1. L'ensemble B des suites bornées.
2. L'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang.
3. L'ensemble des suites constantes à partir d'un certain rang.
4. L'ensemble des suites décroissantes à partir d'un certain rang.
5. L'ensemble des suites convergeant vers 0.
6. L'ensemble des suites monotones.
7. L'ensemble des suites dont la valeur est $\leqslant 1$ à partir d'un certain rang.
8. L'ensemble des suites 3-périodiques.
9. L'ensemble des suites périodiques de période 3.
10. L'ensemble des suites périodiques.

Exercice 2.5. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^3$, déterminer les quelles sont génératrices et lesquelles sont libres (justifier les réponses données).

1. $((1,1,0),(0,1,1))$,
2. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$,
3. $((0,1,-1),(1,0,-1),(1,-1,0))$,
4. $((1,2,3),(4,5,6),(7,8,9))$,
5. $((0,0,1),(0,1,1),(1,1,1),(1,2,1))$.

Exercice 2.6. Parmi les familles suivantes de vecteurs de $\mathbf{R}^4$, déterminer les quelles sont génératrices et lesquelles sont libres (justifier les réponses données).

1. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-2,7,-10,-1))$,

2. $((0,1,-2,1),(1,-1,0,3),(-1,4,-6,0))$,
3. $((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$,
4. $((0,1,-1,0),(1,0,-1,0),(1,-1,0,0),(0,0,0,1))$,
5. $((1,1,1,2),(1,1,2,1),(1,2,1,1),(2,1,1,1))$.

Exercice 2.7. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les paramètres réels a et b pour que chacune des familles suivantes soient des bases de $\mathbf{R}^3$.

1. $((1,1,1),(0,a,1),(0,0,b))$,
2. $((1,0,1),(a,b,1),(b,a,1))$,
3. $((1,a,b),(a,1,a),(b,b,1))$,
4. $((a,a,b),(a,b,a),(b,a,a))$,
5. $((0,a,b),(a,0,b),(a,b,0))$.

Exercice 2.8. Les familles suivantes de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont-elles libres ?

1. $(f_1 : x \mapsto \cos(x), f_2 : x \mapsto \sin(x), f_3 : x \mapsto 1)$,
2. $(f_1 : x \mapsto \cos^2(x), f_2 : x \mapsto \cos(2x), f_3 : x \mapsto 1)$,
3. $(f_1 : x \mapsto |x-1|, f_2 : x \mapsto |x|, f_3 : x \mapsto |x+1|)$,

Exercice 2.9. Pour tout entier $i \in \mathbf{N}$, on note e_i la suite de nombre réels $(\delta_{i,n})_{n\in\mathbf{N}}$ où

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille libre de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
2. L'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$ est-il de dimension finie ?
3. On définit $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ comme l'ensemble des suites de nombres réels $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telles que l'ensemble $\{n \in \mathbf{N} \mid u_n \neq 0\}$ est fini.
   (a) Démontrer que $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^{\mathbf{N}}$.
   (b) Ce sous-espace vectoriel est-il de dimension finie ?

Exercice 2.10. Montrer par récurrence que les familles suivantes de n vecteurs de $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ sont libres (On pourra utiliser la dérivation).

1. $(f_k : x \mapsto \sin(kx))_{1\leqslant k\leqslant n}$,
2. $(f_k : x \mapsto e^{\lambda_k x}))_{1\leqslant k\leqslant n}$ où $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres réels deux à deux distincts.

Applications linéaires

Emmanuel Peyre

Cours

3.1. Définition. — Les applications linéaires sont les applications entre espaces vectoriels qui sont compatibles avec la structure des espaces vectoriels.

Définition 3.1

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Une *application linéaire* de E dans F est une application $\varphi : E \to F$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) L'application φ est compatible avec l'addition :
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v});$$
(ii) L'application φ est compatible avec la multiplication par un scalaire :
$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in E, \quad \varphi(\lambda\vec{u}) = \lambda\varphi(\vec{u}).$$

***Remarques 3.2.* —** i) On peut vérifier simultanément les conditions (i) et (ii) en vérifiant la condition :
$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \varphi(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \lambda\varphi(\vec{v}).$$
En effet en prenant $\lambda = 1$ dans cette condition, on obtient la condition (i) et en prenant $\vec{u} = 0$ on obtient la condition (ii).

ii) Notons que $\varphi(0) = \varphi(0+0) = \varphi(0) + \varphi(0)$. Donc $\varphi(0) = \varphi(0) - \varphi(0) = 0$. La définition donne également les égalités $\varphi(-\vec{u}) = \varphi((-1)\vec{u}) = (-1)\varphi(\vec{u}) = -\varphi(\vec{u})$.

Par récurrence sur l'entier n, on déduit également des conditions (i) et (ii), que si $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n$ sont des vecteurs de E et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ des nombres réels

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(\vec{u}_i).$$

Exemple 3.3. — Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E. Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \to E$ l'application définie par

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{u}_k.$$

Cette application, qui intervient notamment dans la proposition 2.30, est une application linéaire. En effet, soient $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ et $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \varphi((x_1, \ldots, x_n) + \lambda(y_1, \ldots, y_n)) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k + \lambda y_k) \vec{u}_k \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \vec{u}_k\right) + \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \vec{u}_k\right) = \varphi(x_1, \ldots, x_n) + \lambda \varphi(y_1, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

Terminologie 3.4

Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel. Un *endomorphisme de E* est une application linéaire de E dans E.

3.2. Opérations sur les applications linéaires

Proposition 3.5

Soient E, F et G des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels; soient $\varphi : E \to F$ et $\psi : F \to G$ des applications linéaires. Alors la composée $\psi \circ \varphi : E \to G$ est également une application linéaire.

Démonstration. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

$$\psi \circ \varphi(\vec{u} + \lambda \vec{v}) = \psi(\varphi(\vec{u} + \lambda \vec{v})) = \psi(\varphi(\vec{u}) + \lambda \varphi(\vec{v})) = \psi(\varphi(\vec{u})) + \lambda \psi(\varphi(\vec{v})) = \psi \circ \varphi(\vec{u}) + \lambda \psi \circ \varphi(\vec{v}),$$

ce qui prouve la linéarité de l'application $\psi \circ \varphi$. □

Proposition 3.6

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Si φ est une application *bijective* alors l'application réciproque φ^{-1} est également linéaire.

Démonstration. — Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ des vecteurs de F et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. On a les égalités

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(\vec{u}+\lambda\vec{v}) &= \varphi^{-1}\Big(\varphi(\varphi^{-1}(\vec{u}))+\lambda\varphi(\varphi^{-1}(\vec{v}))\Big)\\ &= \varphi^{-1}\Big(\varphi\big(\varphi^{-1}(\vec{u})+\lambda\varphi^{-1}(\vec{v})\big)\Big) = \varphi^{-1}(\vec{u})+\lambda\varphi^{-1}(\vec{v}). \quad \square\end{aligned}$$

Définition 3.7

Un *isomorphisme d'espaces vectoriels* est une application linéaire qui est bijective.

Des espaces vectoriels réels E et F sont dits *isomorphes* s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels de E sur F.

Remarques 3.8. — i) On notera que la composée de deux isomorphismes d'espaces vectoriels est également un isomorphisme, et, par la proposition précédente, que l'application réciproque d'un isomorphisme d'espaces vectoriels est également un isomorphisme.

ii) Un isomorphisme d'espaces vectoriels préserve les propriétés des familles de vecteurs. En effet soit $\psi : E \to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels et soient $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m$ des vecteurs de E. Si la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ est libre (resp. génératrice, resp. une base), alors il en est de même de la famille $(\psi(\vec{u}_1), \dots, \psi(\vec{u}_m))$ En effet considérons l'application $\varphi : \mathbf{R}^m \to E$ associée à la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ comme dans l'exemple 3.3. Alors la composée $\psi \circ \varphi$ est l'application linéaire associée à la famille $(\psi(\vec{u}_1), \dots, \psi(\vec{u}_m))$. Il résulte de la proposition 2.30 que si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m)$ est libre (resp. génératrice, une base) alors φ est injective (resp. surjective, bijective) ; donc $\psi \circ \varphi$ est injective (resp. surjective, bijective) et donc $(\psi(\vec{u}_1), \dots, \psi(\vec{u}_m))$ est libre (resp. génératrice, une base).

iii) En particulier, si E est de dimension finie et F un espace vectoriel isomorphe à E, alors F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$. Nous en verrons une réciproque dans le théorème 3.20.

Proposition 3.9

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'espace F^E des applications de E dans F.

Démonstration. — L'application constante de valeur nulle est linéaire. Soient φ_1 et φ_2 des applications linéaires de E dans F et soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ et $\lambda \in \mathbf{R}$ alors

$$(\varphi_1 + \varphi_2)(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = \varphi_1(\vec{u} + \lambda\vec{v}) + \varphi_2(\vec{u} + \lambda\vec{v})$$
$$= \varphi_1(\vec{u}) + \lambda\varphi_1(\vec{v}) + \varphi_2(\vec{u}) + \lambda\varphi_2(\vec{v}) = \varphi_1(\vec{u}) + \varphi_2(\vec{u}) + \lambda(\varphi_1(\vec{v}) + \varphi_2(\vec{v})) = (\varphi_1 + \varphi_2)(\vec{u}) + \lambda(\varphi_1 + \varphi_2)(\vec{v})$$

On vérifie de manière similaire que si $\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors $\lambda\varphi \in \mathscr{L}(E,F)$. □

3.3. Applications linéaires et sous-espaces, noyau et image. — Les application linéaires étant compatibles avec les lois d'un espace vectoriel, elles préservent les sous-espaces vectoriels :

Proposition 3.10

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Alors

a) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors son image par φ, c'est-à-dire $\varphi(E')$ est un sous-espace vectoriel de F ;

b) Si F' est un sous-espace vectoriel de F, alors son image réciproque par φ, à savoir $\varphi^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. — Démontrons l'assertion a). Rappelons que

$$\varphi(E') = \{\, \vec{v} \in F \mid \exists \vec{u} \in E',\ \vec{v} = \varphi(\vec{u}) \,\}. \tag{17}$$

Tout d'abord $0 = \varphi(0)$, ce qui prouve que $0 \in \varphi(E')$.

Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des éléments de $\varphi(E')$. Par la définition (17), il existe des éléments $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ de E' tels que $\vec{v}_1 = \varphi(\vec{u}_1)$ et $\vec{v}_2 = \varphi(\vec{u}_2)$. Donc $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \varphi(\vec{u}_1) + \varphi(\vec{u}_2) = \varphi(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$. Comme E' est un sous-espace vectoriel de E, la somme $\vec{u}_1 + \vec{u}_2$ appartient également à E'. Par conséquent, $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \varphi(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \in \varphi(E')$.

Soit maintenant $\vec{v}$ un élément de $\varphi(E')$ et soit λ un nombre réel. Alors il existe $\vec{u} \in E'$ tel que $\vec{v} = \varphi(\vec{u})$ et on a les égalités $\lambda\vec{v} = \lambda\varphi(\vec{u}) = \varphi(\lambda\vec{u})$ où la seconde résulte du fait que φ est une application linéaire. Mais comme E' est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda\vec{u} \in E'$ et on a démontré que $\lambda\vec{v} \in \varphi(E')$. Cela conclut la preuve du fait que $\varphi(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.

Démontrons maintenant l'assertion b). Rappelons que

$$\varphi^{-1}(F') = \{\, \vec{u} \in E \mid \varphi(\vec{u}) \in F' \,\}. \tag{18}$$

Comme $\varphi(0) = 0 \in F'$, on a bien que $0 \in \varphi^{-1}(F')$.

Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ des éléments de $\varphi^{-1}(F')$. Par définition (18), $\varphi(\vec{u}_1) \in F'$ et $\varphi(\vec{u}_2) \in F'$. Donc $\varphi(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \varphi(\vec{u}_1) + \varphi(\vec{u}_2) \in F'$, ce qui prouve que $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 \in \varphi^{-1}(F')$.

Soit maintenant $\vec{u}_1$ un élément de $\varphi^{-1}(F')$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Alors $\varphi(\lambda\vec{u}_1) = \lambda\varphi(\vec{u}_1) \in F'$, ce qui implique que $\lambda\vec{u}_1 \in \varphi^{-1}(F')$. Donc $\varphi^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E. □

Deux cas particuliers, les cas où $F' = \{0\}$ (resp. $E' = E$) jouent un rôle particulièrement importants, et sont nommés dans la définition suivante.

Définition 3.11

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application *linéaire*. Alors

a) $\varphi^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé le *noyau de* φ et noté $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

b) $\varphi(E)$ est un sous-espace vectoriel de F, c'est *l'image de* φ. On le note $\mathrm{Im}(\varphi)$.

Le noyau et l'image caractérise l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.

Proposition 3.12

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application *linéaire*. Alors

a) L'application φ est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$.

b) L'application φ est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(\varphi) = F$.

Démonstration. — Démontrons l'assertion a). Supposons d'abord que $\ker(\varphi) \neq \{0\}$; il existe donc un vecteur $\vec{u} \in E - \{0\}$ tel que $\varphi(\vec{u}) = 0 = \varphi(0)$. Donc φ n'est pas injective.

Inversement supposons que $\ker(\varphi) = \{0\}$. Soient $\vec{u}, \vec{v} \in E$ des vecteurs tels que $\varphi(\vec{u}) = \varphi(\vec{v})$. Alors $\varphi(\vec{u} - \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) - \varphi(\vec{v}) = 0$. Donc $\vec{u} - \vec{v} \in \ker(\varphi) = \{0\}$ ce qui entraîne que $\vec{u} = \vec{v}$ et donc φ est injective.

L'assertion b) est un cas particulier d'un résultat qui vaut pour toute application entre ensembles et résulte de la définition de la surjectivité. □

3.4. Rang d'une application linéaire

Définition 3.13

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application *linéaire*. On dit que l'application φ est de rang fini si l'espace vectoriel $\varphi(E)$ est de dimension finie. On appelle alors *rang de* φ la dimension de $\varphi(E)$ et on le note $\mathrm{rg}(\varphi)$.

Remarque 3.14. — Supposons que F est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Une application linéaire $\varphi : E \to F$ de rang fini est surjective si et seulement si $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(F)$. En effet, elle est surjective si et seulement si $\varphi(E) = F$ et on applique le théorème 2.42.

On peut maintenant énoncer le résultat principal de ce chapitre :

Théorème du rang 3.15

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On suppose que l'espace E est de dimension finie. Alors l'application φ est de rang fini et

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi).$$

Démonstration. — D'après le théorème 2.42, l'espace vectoriel $\mathrm{Ker}(\varphi)$ est de dimension finie $m \leqslant n = \dim(E)$. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$. La famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ est libre. Par le corollaire 2.39 on peut donc la compléter en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E. Nous allons démontrer que la famille $(\varphi(\vec{e}_{m+1}), \dots, \varphi(\vec{e}_n))$ est une base de l'image de φ.

Démontrons que cette famille de vecteurs engendre l'espace vectoriel $\mathrm{Im}(\varphi)$. Soit $\vec{v} \in \mathrm{Im}(\varphi)$. Par définition de $\mathrm{Im}(\varphi)$, il existe $\vec{u} \in E$ tel que $\vec{v} = \varphi(\vec{u})$. En notant $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ on a l'égalité $\vec{u} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{e}_i$ qui implique les relations :

$$\vec{v} = \varphi(\vec{u}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \varphi(\vec{e}_i) = \sum_{i=m+1}^{n} x_i \varphi(\vec{e}_i)$$

ou la deuxième égalité découle du fait que $\vec{e}_i \in \mathrm{Ker}(\varphi)$ pour $1 \leqslant i \leqslant m$. Donc $\vec{v}$ est bien une combinaison linéaire de $\varphi(\vec{e}_{m+1}), \dots, \varphi(\vec{e}_n)$.

Démontrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_{m+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^{n-m}$ tel que

$$\sum_{i=m+1}^{n} \lambda_i \varphi(\vec{e}_i) = 0.$$

Il en résulte que

$$\varphi\left(\sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i\right)=0$$

et donc $\sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, de même que son opposé $-\sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i$. Comme $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_m)$ est une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$, on peut trouver $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbf{R}^m$ tel que

$$-\sum_{i=m+1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\vec{e}_i.$$

Ceci nous fournit la relation

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\vec{e}_i=0.$$

Comme $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est libre, on obtient que $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ est nul et donc $\lambda_{m+1}=\dots=\lambda_n=0$. □

Nous allons appliquer ce théorème à la dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels :

Corollaire 3.16

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de dimension finie de E. Alors la somme F_1+F_2 et l'intersection $F_1\cap F_2$ sont de dimension finie et on a l'égalité

$$\dim(F_1+F_2)+\dim(F_1\cap F_2)=\dim(F_1)+\dim(F_2).$$

Démonstration. — On considère l'application $\varphi : F_1\oplus F_2 \to E$ définie par $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)\mapsto \vec{u}_1+\vec{u}_2$ Par définition de la somme de sous-espaces (exemple 2.13 iv)), l'image de φ est la somme F_1+F_2. Déterminons son noyau. Un couple $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)$ appartient au noyau de φ si et seulement si $\vec{u}_1+\vec{u}_2=0$ ce qui équivaut à l'égalité $\vec{u}_2=-\vec{u}_1$. On en déduit donc que $\vec{u}_1\in F_1\cap F_2$ et $(\vec{u}_1,\vec{u}_2)=(\vec{u}_1,-\vec{u}_1)$. Inversement tout élément de la forme $(\vec{u},-\vec{u})$ avec $\vec{u}\in F_1\cap F_2$ appartient au noyau. Par conséquent le noyau de φ est l'image de l'application linéaire $\psi : F_1\cap F_2\to F_1\oplus F_2$ donnée par $\psi(\vec{u})=(\vec{u},-\vec{u})$. L'application ψ est injective. Donc, en appliquant la formule du rang à ψ, on obtient les égalités $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=\dim(\mathrm{Im}(\psi))=\dim(F_1\cap F_2)$. Par la formule du rang appliquée à φ et la proposition 2.40,

$$\dim(F_1+F_2)=\dim(F_1\oplus F_2)-\dim(\mathrm{Ker}(\varphi))=\dim(F_1)+\dim(F_2)-\dim(F_1\cap F_2).$$ □

Corollaire 3.17

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Dans ce cas les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) L'application φ est un isomorphisme ;

(ii) L'application φ est injective ;

(iii) L'application φ est surjective.

L'équivalence ne vaut que si E et F sont de même dimension.

3.5. Application linéaires et bases

Proposition 3.18

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit F un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Alors pour tout n-uplet $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ de vecteurs de F, il existe une unique application linéaire $\varphi : E \to F$ telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \varphi(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$$

Démonstration. — **Existence.** Soit $\varphi : \mathbf{R}^n \to E$ l'application linéaire associée à la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ et soit $\psi : \mathbf{R}^n \to F$ l'application linéaire associée à la famille $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$. Comme $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E, l'application φ est bijective et l'application composée $\psi \circ (\varphi^{-1}) : E \to F$ est linéaire et vérifie $\psi \circ (\varphi^{-1})(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$.

Unicité. Si φ_1 et φ_2 conviennent, alors pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, le vecteur $\vec{e}_i$ appartient au noyau de l'application linéaire $\varphi_1 - \varphi_2$. Donc ce noyau, qui est un sous-espace vectoriel de E, contient toutes les combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$. Comme cette famille est génératrice, on obtient $\mathrm{Ker}(\varphi_1 - \varphi_2) = E$ ce qui implique que $\varphi_1 = \varphi_2$. $\square$

Remarque 3.19. — On peut décrire explicitement l'application φ obtenue : l'image d'un vecteur $\vec{u} \in E$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est le vecteur $\sum_{i=1}^{n} x_i \vec{f}_i$.

Corollaire 3.20

Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel de dimension finie et soit F un espace vectoriel. Alors E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(F) = \dim(E)$.

Démonstration. — La condition est nécessaire par la remarque 3.8 iii). Réciproquement si $\dim(F) = \dim(E)$, on se donne des bases $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ (resp. $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$) de E (resp. F). Soit φ l'application linéaire telle que $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$. Les vecteurs $\vec{f}_i$ appartiennent à l'image de φ qui est un sous-espace vectoriel de F. Donc φ est surjective. Par la formule du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) = \dim(E) - \dim(F) = 0$ ce qui prouve que φ est injective. □

3.6. Formes linéaires, Hyperplans

Définition 3.21

Soit E un espace vectoriel réel. Une *forme linéaire* sur E est une application linéaire de E dans $\mathbf{R}$. On appelle *dual* de E et on note E^* l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, \mathbf{R})$ des formes linéaires sur E.

Un *hyperplan vectoriel* de E est le noyau d'une forme linéaire *non nulle* de E.

Il nous arrivera de dire hyperplan pour hyperplan vectoriel.

Remarque 3.22. — Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soient $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. Alors l'application qui à un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ associe $a_1x_1 + \dots + a_nx_n$ est une forme linéaire.

Inversement soit $\varphi : E \to \mathbf{R}$ une forme linéaire. Posons $a_i = \varphi(\vec{e}_i) \in \mathbf{R}$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ on a les relations

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi\left(\sum_{k=1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = \sum_{k=1}^{n} x_i \varphi(\vec{e}_i) = \sum_{k=1}^{n} a_i x_i.$$

En particulier, si $i \in \{1, \dots, n\}$, on note $\vec{e}_i^{\,*}$ la forme linéaire qui à un vecteur associe sa i-ème coordonnée dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.

Proposition 3.23

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Un sous-espace vectoriel F de E est un hyperplan de E si et seulement si $\dim(F) = \dim(E) - 1$.

Démonstration. — Notons tout d'abord qu'une forme linéaire non nulle a pour image un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}$ qui contient un élément non nul, elle est donc surjective. Par le théorème du rang, la dimension d'un hyperplan de E est donc $\dim(E) - 1$.

Réciproquement soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $\dim(E)-1$. On note $n = \dim(E)$ et on choisit une base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{n-1})$ de F que l'on complète en une base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ de E. Rappelons que $\vec{e}_n^*$ désigne la forme linéaire qui à un vecteur de E de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans la base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ associe sa dernière coordonnée x_n. Alors cette application $\vec{e}_n^*$ vaut 0 pour les vecteurs $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{n-1}$ et vaut 1 sur le vecteur $\vec{e}_n$. Donc $\vec{e}_n^*$ est une forme linéaire non nulle qui s'annule sur le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_{n-1})$. Par le théorème du rang $\dim(\ker(\varphi)) = \dim(E)-1$. Comme $F \subset \ker(\varphi)$ et que ces deux espaces ont même dimension, on obtient que $F = \ker(\varphi)$. $\square$

***Remarque 3.24.* —** Deux formes linéaires définissent le même hyperplan si et seulement l'une est un multiple de l'autre.

On peut généraliser la proposition précédente de la façon suivante.

Proposition 3.25

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie n. Soit F une partie de E et soit $c \in \{0,\ldots,n\}$. La partie F est un sous-espace vectoriel de dimension $n-c$ si et seulement s'il existe une application linéaire *surjective* $\varphi : E \to \mathbf{R}^c$ telle que $F = \ker(\varphi)$.

Démonstration. — Posons $r = n-c$

Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de dimension $n-c$. Soit $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r)$ une base de F, qu'on complète en une base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ de E. Soit alors $\varphi : E \to \mathbf{R}^c$ l'application qui à un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x_1,\ldots,x_n)$ dans la base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ associe le c-uplet $(x_{r+1},\ldots,x_n)$.

Vérifions que cette application est linéaire. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E, et soit $\lambda \in \mathbf{R}$. Notons $(x_1,\ldots,x_n)$ (resp. $(y_1,\ldots,y_n)$) les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ Alors $\vec{u}+\lambda\vec{v}$ a pour coordonnées $(x_1+\lambda y_1,\ldots,x_n+\lambda y_n)$ dans cette base donc

$$\varphi(\vec{u}+\lambda\vec{v}) = (x_{r+1}+\lambda y_{r+1},\ldots,x_n+\lambda y_n) = (x_{r+1},\ldots,x_n)+\lambda(y_{r+1},\ldots,y_n) = \varphi(\vec{u})+\lambda\varphi(\vec{v}).$$

Démontrons maintenant l'inclusion $F \subset \ker(\varphi)$. Soit $\vec{u} \in F$. Comme $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_r)$ est une base de F, il existe $(\lambda_1,\ldots,\lambda_r) \in \mathbf{R}^r$ tel que $\vec{u} = \sum_{i=1}^r \lambda_i \vec{e}_i$. Donc les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$ sont $(x_1,\ldots,x_r,0,\ldots,0)$ ce qui prouve que $\varphi(\vec{u}) = (0,\ldots,0)$.

Inversement, soit $\vec{u} \in \ker(\varphi)$. Soit $(x_1,\ldots,x_n)$ les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n)$. Par définition de φ et du noyau, on obtient l'égalité

$$(x_{r+1},\ldots,x_n) = (0,\ldots,0)$$

Autrement dit, $x_i = 0$ pour $i \in \{r+1,\ldots,n\}$. Donc $\vec{u} = \sum_{i=1}^r x_i\vec{e}_i$. Mais comme $\vec{e}_i \in F$ pour $i \in \{1,\ldots,r\}$, il en résulte que $\vec{u} \in F$.

Démontrons maintenant la réciproque. Supposons que $F = \ker(\varphi)$ pour une application linéaire surjective $\varphi : E \longrightarrow \mathbf{R}^c$. Par la proposition 3.10, l'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E. En outre, comme φ est surjective, $\mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathbf{R}^c)$. En appliquant le théorème du rang, on obtient que

$$\dim(F) = \dim(\ker(\varphi)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(\varphi) = n - c.$$

$\square$

Terminologie 3.26

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace vectoriel de E tel qu'il existe une application linéaire *surjective* de E dans $\mathbf{R}^c$ telle que $F = \ker(\varphi)$. Alors on dit que F est un sous-espace vectoriel de *codimension* c de E.

Remarques 3.27. — i) Un hyperplan vectoriel est donc un sous-espace de codimension 1.

ii) Par la proposition, un sous-espace F d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie E est un sous-espace de codimension $\dim(E) - \dim(F)$.

Exemple 3.28. — Il peut être utile de comprendre que se donner une application surjective $\varphi : E \to \mathbf{R}^c$ dont F est le noyau revient à se donner un système de c équations implicites pour F. Vérifions cela sur un exemple.

Considérons le sous-espace vectoriel D engendré par le vecteur $(1, 2, 1)$ dans $\mathbf{R}^3$. Nous allons suivre la méthode décrite dans la preuve pour trouver une application linéaire φ surjective dont D est le noyau et en déduire un système d'équations implicites pour D.

Comme le vecteur $\vec{f_1} = (1, 2, 1)$ est non nul, la famille $(\vec{f_1})$ est libre et forme une base de la droite vectorielle D. Rappelons qu'on peut compléter une famille libre en une base de l'espace simplement en rajoutant des vecteurs d'une base donnée de l'espace. Ici nous allons donc compléter la famille libre (f_1) en rajoutant des vecteurs de la base usuelle de $\mathbf{R}^3$. Posons $f_2 = (1, 0, 0)$ et $f_3 = (0, 1, 0)$ et vérifions que la famille (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de $\mathbf{R}^3$, ce qui impliquera que c'est une base de $\mathbf{R}^3$. Pour cela, soit $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ et démontrons qu'il s'écrit comme combinaison linéaire des vecteurs $\vec{f_1}, \vec{f_2} et \vec{f_3}$. On veut donc trouver un triplet $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ tel que

$$x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3} = (a, b, c) \tag{19}$$

mais

$$x\vec{f_1} + y\vec{f_2} + z\vec{f_3} = x(1, 2, 1) + y(1, 0, 0) + z(0, 1, 0) = (x + y, 2x + z, x).$$

Donc le triplet (x,y,z) vérifie (19) si et seulement s'il est solution du système

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} X & + & Y & & & = & a \\ 2X & & & + & Z & = & b \\ X & & & & & = & c \end{array}\right.$$

qui a une unique solution $(c, a-c, b-2c)$. Cela prouve donc que (f_1,f_2,f_3) est bien une base de $\mathbf{R}^3$ et que les coordonnées du triplet (a,b,c) dans la base $(\vec{f}_1,\vec{f}_2,\vec{f}_3)$ sont $(c, a-c, b-2c)$. Il résulte de la preuve que D est le noyau de l'application linéaire de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^2$ donnée par $(a,b,c) \mapsto (a-c, b-2c)$.

Autrement dit D est donnée par le système d'équations implicites

$$\left\{\begin{array}{ccc} X-Z & = & 0 \\ Y-2Z & = & 0 \end{array}\right.$$

À titre de vérification de nos calculs, on constate que le triplet $(1,2,1)$ vérifie bien ces deux équations.

Proposition 3.29

Si $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ est une base de E, alors $(\vec{e}_1{}^*,\dots,\vec{e}_n{}^*)$ est une base de $\mathscr{L}(E,\mathbf{R})$ appelée *base duale* de $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$.

Démonstration. — Cela résulte du fait que pour tout $(a_1,\dots,a_n) \in \mathbf{R}^n$ on a la relation $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \vec{e}_i{}^*$ si et seulement si $a_i = \varphi(\vec{e}_i)$ pour $i \in \{1,\dots,n\}$. $\square$

Fiche de révision

Définition R.3.1

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Une *application linéaire* de E dans F est une application $\varphi : E \to F$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) L'application φ est compatible avec l'addition :
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \varphi(\vec{u} + \vec{v}) = \varphi(\vec{u}) + \varphi(\vec{v});$$

(ii) L'application φ est compatible avec la multiplication par un scalaire :
$$\forall \lambda \in \mathbf{R}, \forall \vec{u} \in E, \quad \varphi(\lambda \vec{u}) = \lambda \varphi(\vec{u}).$$

Définition R.3.2

Le noyau d'une application linéaire $\varphi : E \to F$ est défini par
$$\ker(\varphi) = \{ x \in E \mid \varphi(x) = 0 \}.$$

Proposition R.3.3

Une application linéaire est injective si et seulement si $\ker(\varphi) = \{0\}$.

Définition R.3.4

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application *linéaire*. On dit que l'application φ est de rang fini si l'espace vectoriel $\varphi(E)$ est de dimension finie. On appelle alors *rang de* φ la dimension de $\varphi(E)$ et on la note $\mathrm{rg}(\varphi)$.

Théorème du rang R.3.5

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. On suppose que l'espace E est de dimension finie. Alors l'application φ est de rang fini et

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi).$$

Entraînement

3.1. Exercices

Exercice 3.1. Parmi les applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ définies par les relations qui suivent, déterminer lesquelles sont linéaires.

$$f_1(x,y) = (x+y, x-y) \quad f_2(x,y) = (|x|+|y|, 2) \quad f_3(x,y) = (x, -y)$$
$$f_4(x,y) = (xy, y) \quad f_5(x,y) = (x-y+1, x) \quad f_6(x,y) = \left(\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{1+y^2}\right)$$

pour tous $x, y \in \mathbf{R}$.

Exercice 3.2. Pour chacune des applications ci-dessous, démontrer qu'elle est linéaire, et déterminer son noyau, son image ainsi qu'une base de chacun de ces sous-espaces.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, 3x-y) \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^2 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (2x+3y, -4x-6y) \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y+z) \end{array} \qquad f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbf{R}^3 & \longrightarrow & \mathbf{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y+z, 2x+y-z) \end{array}$$

Exercice 3.3. Soit f une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$.

1. Rappeler la définition de « f est injective » (resp. surjective, bijective).
2. (Question de cours) Démontrer que f est injective si et seulement si $\ker(f) = \{0\}$.
3. On suppose dans cette question que $n = m$. Démontrer que f est injective si et seulement si elle est surjective.
4. Démontrer que si f est injective alors $n \leqslant m$.
5. Démontrer que si f est surjective alors $n \geqslant m$.
6. Les réciproques des deux implications précédentes sont elles vraies ?

Exercice 3.4. Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels. Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E. Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs F. On note φ l'unique application de E dans F telle que $\varphi(\vec{e}_i) = \vec{u}_i$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$.

1. (Question de cours) Déterminer l'image par φ d'un vecteur de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$.
2. Démontrer que φ est injective si et seulement si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille libre.
3. Démontrer que φ est surjective si et seulement si $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n)$ est une famille génératrice de F.

Exercice 3.5. Soit $\varphi : E \to F$ une application linéaire. Soit $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ une famille de vecteurs de E. La famille $(\varphi(\vec{u}_1), \ldots, \varphi(\vec{u}_n))$ est appelée *l'image* de la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$ par l'application φ.

1. Démontrer que l'image d'une famille libre par une application linéaire injective est libre.
2. Démontrer que l'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective est génératrice.
3. Démontrer qu'une application linéaire est un isomorphisme si et seulement si elle envoie une base sur une base.

Exercice 3.6. Soient E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension n et f un endomorphisme de E. On définit par récurrence $f^{\circ k}$ de la façon suivante : $f^{\circ 0} = \mathrm{Id}_E$ et, si $n \geqslant 1$, $f^{\circ n} = f \circ f^{\circ(n-1)}$. En particulier $f^{\circ 1} = f$. On dit que f est *nilpotente* s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $f^{\circ k}$ est l'application constante nulle. L'ordre de nilpotence de f est alors le plus petit entier $m \geqslant 1$ tel que $f^{\circ m} = 0$.

1. On suppose que $f \circ f$ est l'application constante nulle. Démontrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(f)$.
2. Démontrer la réciproque.
3. On suppose que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$. Démontrer que la dimension n est un entier pair.
4. On suppose maintenant que $n \geqslant 1$ et que f est nilpotente d'ordre m. Démontrer qu'il existe un vecteur $v \in E$ tel que $f^{\circ(m-1)}(v) \neq 0$. Pour un tel vecteur v démontrer que $(v, f(v), \ldots, f^{\circ(m-1)}(v))$ est libre.
5. En déduire que si f est nilpotente, alors $f^{\circ n} = 0$.

Exercice 3.7. Rappelons que $\mathbf{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

1. Démontrer que la dérivation $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$.
2. Déterminer son image.
3. Déterminer son noyau.
4. L'application D est-elle surjective, injective, bijective ?
5. En utilisant un raisonnement par l'absurde, déduire de la question précédente que l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 3.8. Dans chacun des exemples suivants, justifier rapidement pourquoi la partie considérée est un sous-espace vectoriel de $\mathbf{R}^2$ ou de $\mathbf{R}^3$, en donner la dimension et trouver une base du sous-espace vectoriel.

1. $E = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x + y = 0 \,\}$.
2. $F = \{\, (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y \,\}$.

3. $G = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.
4. $H = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x = y = z\}$.

Exercice 3.9. Polynômes d'interpolation de Lagrange. Soit $d \in \mathbf{N}$. On rappelle que $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ désigne l'ensemble des applications $P : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ telles qu'il existe des nombres réels $(a_0, \ldots, a_d)$ tels que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

On note $\boldsymbol{t} = (t_0, \ldots, t_d)$ une famille de $d+1$ nombres réels deux à deux distincts. On note $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$ l'application de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ dans $\mathbf{R}^{d+1}$ qui envoie une application P sur le $(d+1)$-uplet $(P(t_0), P(t_1), \ldots, P(t_d))$.

1. Démontrer que $(1, \ldots, X^d)$ est une base de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$, quelle est la dimension de cet espace ?
2. Démontrer que $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$ est linéaire.
3. On considère l'application polynomiale P_i donnée par

$$t \longmapsto \prod_{\substack{0 \leqslant k \leqslant d \\ k \neq i}} \frac{t - t_k}{t_i - t_k}$$

   (a) Déterminer $\text{év}_{\boldsymbol{t}}(P_i)$.
   (b) Que peut-on en déduire sur l'application $\text{év}_{\boldsymbol{t}}$?
   (c) Que peut-on dire de la famille $(P_0, \ldots, P_d)$?

Exercice 3.10. Dans l'exercice 2.9, on a défini l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ formé des suites de nombres réels $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tel que $\{n \in \mathbf{N} \mid a_n \neq 0\}$ est fini. Soit $P = (a_i)_{i \in \mathbf{N}}$ un élément de $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$. On note $p \in \mathbf{N}$ un entier tel que $a_k = 0$ si $k > p$. On considère l'application f_P de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ donnée par $x \mapsto \sum_{i=0}^{p} a_i x^i$. Démontrer que l'application $P \mapsto f_P$ définit un isomorphisme d'espace vectoriel de $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ sur l'espace vectoriel des applications polynomiales de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.

Exercice 3.11.
1. Démontrer que l'ensemble F des suites 3-périodiques forme un sous-espace vectoriel de l'espace des suites de nombres réels.
2. Soit $\varphi : F \to \mathbf{R}^3$ qui envoie la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sur (u_0, u_1, u_2). Démontrer que φ est linéaire.
3. Démontrer qu'elle est bijective.
4. En déduire une base de F et donner sa dimension.

Problème 3.1.* On note $\mathscr{C}^2(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont deux fois dérivables et dont la dérivée seconde f'' est continue. On note a, b des nombres réels.

1. Démontrer que $\mathscr{C}^2(\mathbf{R},\mathbf{R})$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathbf{R}^{\mathbf{R}}$ des applications de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$.
2. Démontrer que l'application $f \mapsto f'' + af' + bf$ est linéaire.
   On note E le noyau de cette application linéaire.
3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. À quelle condition $t \mapsto e^{\alpha t}$ appartient-elle à l'espace E ?
4. On considère l'application φ de E dans $\mathbf{R}^2$ qui à une application f associe le couple $(f(0), f'(0))$. Démontrer que φ une application linéaire.
5. On suppose que l'équation $X^2 + aX + b = 0$ a deux solutions réelles distinctes. Démontrer que φ est surjective.
6. Soit f un élément du noyau de φ.
   (a) Que vaut $f''(0)$?
   (b) Démontrer qu'il existe une constante $\eta < 1$ telle que pour tout $x \in \left]-\eta, \eta\right[$, on ait $|f'(x)| \leqslant |x|$ et $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}|x|^2$. (On pourra éventuellement utiliser qu'une application dérivable dont la dérivée est positive sur un intervalle est croissante sur cet intervalle en l'appliquant à la différence entre des applications bien choisies).
   (c) Notons $C = |a| + |b|$. Déduire de la question précédente que $|f''(x)| \leqslant C|x|$ pour $x \in \left]-\eta, \eta\right[$.
   (d) Démontrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $x \in \left]-\eta, \eta\right[$, $|f(x)| \leqslant C^n|x|^{n+2}$
   (e) Démontrer qu'il existe un intervalle contenant 0 tel que la restriction de f à I soit la fonction constante nulle
7. Soit $f \in E$ et $a \in \mathbf{R}$ soit $T_a(f)$ l'application $t \mapsto f(t-a)$.
   (a) Démontrer que $T_a(f) \in E$.
   (b) Démontrer que T_a est linéaire. Quel est son noyau ? Quelle est la composée $T_{-a} \circ T_a$? Quelle est son image ?
   (c) Exprimer simplement $\varphi(T_a(f))$.
8. soit $f \in \mathrm{Ker}(\varphi)$. On considère
$$A = \{\, t \in \mathbf{R}_+ \mid \forall x \in [0, t[, f(x) = f'(x) = 0 \,\}$$
   (a) Démontrer que $A = \mathbf{R}_+$ (On pourra raisonner par l'absurde et considérer la borne supérieure de A).
   (b) Démontrer que f est l'application constante nulle.
9. Démontrer que φ est injective.

10. Que peut-on en déduire sur la dimension de l'espace E ?
11. On suppose maintenant que l'équation $X^2 + aX + b$ n'a pas de solutions réelles. Soit $\alpha + i\theta$ une des deux solutions complexes.
    (a) Donner l'autre solution complexe.
    (b) Vérifier que l'application $t \mapsto e^{\alpha t}\cos(\theta t)$ appartient à l'espace E.
    (c) Donner dans ce cas une base de l'espace vectoriel E.
12. Étudier le cas où l'équation $X^2 + aX + b$ n'a qu'une solution.

Calcul matriciel

Emmanuel Peyre et Bernard Ycart

Cours

4.1. Matrices

Définition 4.1

Etant donnés deux entiers naturels m et n, une *matrice à m lignes et n colonnes à coefficients réels* est un famille de $m \times n$ réels $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ où le premier indice i, appelé l'indice de *ligne* va de 1 à m, et le second indice j, appelé indice de *colonne* va de 1 à n. Une telle matrice est notée à l'aide d'un tableau rectangulaire

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Le nombre réel $a_{i,j}$ est appelé le *coefficient d'indice i,j* de la matrice A. L'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes et à coefficients réels est noté $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$.

Exemple 4.2. — La matrice 2×2 dont les coefficients sont $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = 2$, $a_{2,1} = 3$ et $a_{2,2} = 4$ s'écrit

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4.2. Opérations sur les matrices

4.2.1. *Structure d'espace vectoriel.* — Munissons tout d'abord l'ensemble des matrices d'une structure d'espace vectoriel.

Définition 4.3

L'ensemble $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ est muni d'une structure d'espace vectoriel réel de la manière suivante :

- *Addition :* Si $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont deux matrices de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, leur somme $A+B$ est la matrice $(a_{i,j} + b_{i,j})$.
- *Multiplication par un scalaire :* Si $A = (a_{i,j})$ est une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, et λ est un réel, le produit λA est la matrice $(\lambda a_{i,j})$.

Exemple 4.4. — Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$-2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -6 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Les matrices dont les coefficients sont nuls sauf un qui vaut 1 vont donner une base de l'espace vectoriel des matrices, nous leur donnons une notation :

Notation 4.5

Soient i et j des entiers tels que $1 \leqslant i \leqslant m$ et $1 \leqslant j \leqslant n$. On note $E_{i,j}$ la matrice $(m_{j,k})_{\substack{1\leqslant j\leqslant m \\ 1\leqslant k\leqslant n}}$ où $m_{i,j} = 1$ et $m_{j,k} = 0$ si $(j,k) \neq (i,j)$.

Proposition 4.6

La famille des mn matrices $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{1,n}, E_{2,1}, \dots, E_{m,n})$ forme une base de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ appelée *base canonique*.

Démonstration. — Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice et soit $(\lambda_{1,1}, \dots \lambda_{m,n})$ une famille de mn nombre réels. L'égalité

$$A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\lambda_{i,j}E_{i,j}$$

équivaut aux relations

$$\lambda_{i,j} = a_{i,j}$$

pour $i \in \{1, \dots, m\}$ et $j \in \{1, \dots, n\}$. □

Remarque 4.7. — On notera que dans cette base canonique, la coordonnée d'une matrice A relative au vecteur $E_{i,j}$ est précisément le coefficient $a_{i,j}$ d'indice i, j de la matrice.

4.2.2. *Produit matriciel.* — Nous allons maintenant définir une opération très importante pour les matrices, le *produit matriciel.*

Définition 4.8

Soient m, n, p trois entiers strictement positifs. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et soit $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. On appelle produit matriciel de A par B la matrice $C \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbf{R})$ dont le terme général $c_{i,k}$ est défini, pour tout $i = 1, \dots, m$ et pour tout $k \in 1, \dots, p$ par :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}b_{j,k}.$$

Nous insistons sur le fait que le produit AB de deux matrices n'est défini que si le nombre de colonnes de A et le nombre de lignes de B sont les mêmes.

Moyen mémnotechnique 4.9. — Au brouillon, pour effectuer ce produit, nous conseillons de placer B au-dessus du produit et A à sa gauche.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,k} & \cdots & b_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ & \cdots & b_{j,k} & \cdots & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,k} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{1,1} & & \vdots & & c_{1,p} \\ & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & c_{i,k} & & \\ & & & & \\ c_{m,1} & & & & c_{m,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

Posons par exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice A a 3 lignes et 2 colonnes, la matrice B a 2 lignes et 4 colonnes. Le produit AB a donc un sens : c'est une matrice à 3 lignes et 4 colonnes.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi pour obtenir le coefficient -2 du produit le calcul est $-2 = 2 \times (-1) + 3 \times 0$. Cela donne l'égalité

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ -3 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & -1 & -1 \\ -9 & -4 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

On prend donc la première *ligne* de la première matrice et on effectue le produit scalaire avec chacune des *colonnes* de la seconde matrice pour obtenir la première ligne de la matrice produit, et ainsi de suite.

Le produit matriciel a presque toutes les propriétés auxquelles vous êtes habitués d'un produit, sauf qu'il n'est pas commutatif.

Proposition 4.10

Le produit matriciel possède les propriétés suivantes.

a) *Associativité* : Soient m, n, p, q des entiers naturels. Soient $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$ et $C \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbf{R})$. Alors
$$A(BC) = (AB)C.$$

b) *Linéarité à droite* : Soient m, n, p des entiers. Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et soient B et C des matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Si λ et μ sont des nombres réels, alors
$$A(\lambda B + \mu C) = \lambda AB + \mu AC\,.$$

c) *Linéarité à gauche* : Soient m, n, p des entiers, soient A et B des matrices de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et soit $C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. Si λ et μ sont des nombres réels, alors
$$(\lambda A + \mu B)C = \lambda AC + \mu BC\,.$$

Ces propriétés se démontrent à partir de la définition 4.8.

4.2.3. *La transposition.* — Une dernière opération sur les matrices est la transposition, qui intervient notamment dans l'écriture des produits scalaires en termes de coordonnées.

Définition 4.11

Etant donnée une matrice $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, sa transposée est la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{R})$ dont le coefficient d'ordre (j, i) est $a_{i,j}$.

Pour écrire la transposée d'une matrice, il suffit de transformer ses lignes en colonnes. Par exemple :
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$
Observons que la transposée de la transposée est la matrice initiale.
$${}^t({}^tA) = A\,.$$

La transposée d'un produit est le produit des transposées, mais il faut inverser l'ordre des facteurs.

Proposition 4.12

Soient m, n, p trois entiers strictement positifs. Soient $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. La transposée du produit de A par B est le produit de la transposée de B par la transposée de A.

$$^t(AB) = {}^tB\,{}^tA\,.$$

Exemple 4.13. — Par exemple, en reprenant les matrices A et B définies ci-dessus :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -2 \\ -1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -3 & -9 & 3 \\ -1 & -4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 4.14. — Observons que le produit d'une matrice par sa transposée est toujours défini.

$$A\,{}^tA = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 13 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad {}^tA\,A = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Le résultat est une matrice *carrée* (autant de lignes que de colonnes).

Définition 4.15

Soit n un entier strictement positif et A une matrice carrée à n lignes et n colonnes. On dit que A est *symétrique* si pour tous $i, j = 1, \dots, n$, ses coefficients d'ordre $a_{i,j}$ et $a_{j,i}$ sont égaux, ce qui est équivalent à dire que A est égale à sa transposée.

Le produit d'une matrice par sa transposée est toujours une matrice symétrique. En effet :

$$^t(A\,{}^tA) = {}^t({}^tA)\,{}^tA = A\,{}^tA\,.$$

4.2.4. *Matrices carrées.* — Les produits de matrices carrées de même taille sont bien définis : si A et B sont deux matrices à n lignes et n colonnes, les produits AB et BA sont tous deux définis et ils ont les mêmes dimensions que A et B. En général ils ne sont pas égaux. Par exemple,

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Notation 4.16

Nous noterons simplement $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbf{R})$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes, à coefficients réels.

Parmi elles la *matrice identité*, notée I_n joue un rôle particulier.

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En effet, elle est l'élément neutre du produit matriciel : pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbf{R})$,

$$AI_n = I_m A = A.$$

On le vérifie facilement à partir de la définition 4.8.

Définition 4.17

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. On dit que A est *inversible* s'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$AB = BA = I_n.$$

Si la matrice A est inversible, il existe une unique matrice B qui vérifie ces conditions; on l'appelle *l'inverse de* A et on la note A^{-1}.

Démonstration. — Démontrons que l'inverse, s'il existe, est nécessairement unique. En effet, soient B_1 et B_2 deux matrices telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$. En utilisant l'associativité, le produit $B_1 A B_2$ vaut $B_1(AB_2) = B_1 I_n = B_1$, mais aussi $(B_1 A)B_2 = I_n B_2 = B_2$. Donc $B_1 = B_2$. □

Exemple 4.18. —

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous verrons plus loin une méthode qui permet de savoir si une matrice est inversible, et de calculer son inverse quand elle l'est.

Il suffit de trouver une matrice B telle que $AB = I_n$ pour être sûr que A est inversible et que son inverse est B.

Théorème 4.19

Soit A une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Supposons qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$ ou bien $BA = I_n$. Alors A est inversible et $B = A^{-1}$.

Démonstration. — Supposons qu'il existe une matrice B telle que $AB = I_n$. Considérons l'application, de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ dans lui-même, qui à une matrice X associe le produit XA. D'après le point c) de la proposition 4.10, c'est une application linéaire, donc un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Montrons qu'elle est injective, c'est-à-dire que son noyau ne contient que la matrice nulle. Si $XA = 0$, alors $(XA)B = 0$, mais $(XA)B = X(AB) = XI_n = X$ par hypothèse : donc $X = 0$. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension qui est injective est aussi surjective. Donc il existe une matrice X telle que $XA = I_n$. Il reste à vérifier que cette matrice est B. Si $XA = AB = I_n$, alors $X(AB) = X$ et $(XA)B = B$. D'où le résultat.

On procède de façon symétrique si $BA = I_n$, en considérant l'application qui à X associe AX. □

Si A et B sont des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$, leur produit est inversible.

Proposition 4.20

Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$. Le produit AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$.

Démonstration. — Nous utilisons le théorème 4.19, ainsi que l'associativité du produit :

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n\,.$$

□

4.3. Coordonnées et matrices colonnes. — Soit E un espace vectoriel de dimension m, qu'on munit d'une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$. Dans la suite, pour alléger les notations, on notera parfois $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ cette base.

Notation 4.21

À tout vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x_1, \dots, x_{,})$, on peut associer la matrice de $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbf{R})$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

qu'on appelle aussi le *vecteur colonne* des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$.

Remarque 4.22. — L'application de E dans $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ qui à un vecteur associe le vecteur colonne de ses coordonnées est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On se souviendra que pour les matrices on écrit systématiquement les coordonnées en *colonnes* pour représenter des vecteurs.

Définition 4.23

Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une famille de k vecteurs. Alors la matrice de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ dans la base $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ est la matrice à m lignes et k colonnes

$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,k} \end{pmatrix}$$

dont la j-ème colonne est le vecteur colonne des coordonnées du vecteur $\vec{u}_j$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m)$. Autrement dit, on a les relations

$$\forall j \in \{1, \ldots, k\}, \quad \vec{u}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \vec{e}_i.$$

4.4. Matrices et applications linéaires. — L'introduction des matrices et du produit matriciel est en partie motivée par l'expression des applications linéaires dans des bases.

Définition 4.24

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement des bases $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ et $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_q)$. Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors la *matrice de* φ dans les bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$ est la matrice $q \times p$ *à* q *lignes et* p *colonnes* donnée par

$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f}}(\varphi(\vec{e}_1), \ldots, \varphi(\vec{e}_p)).$$

Remarques 4.25. — i) D'après la proposition 3.18 une application linéaire φ est déterminée par les images des vecteurs $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p$. Écrivons ces images dans la base $\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_q$: pour tout $j = 1, \ldots, p$,

$$f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} \vec{f}_i$$

Les coordonnées $a_{i,j}$ de ces vecteurs dans la base $(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_q)$, rangés en p colonnes, forment la matrice de l'application φ, relative aux bases considérées.

$$\begin{array}{ccccc|cc}
 & & \text{départ} & & & & \\
f(\vec{e}_1) & \cdots & f(\vec{e}_j) & \cdots & f(\vec{e}_p) & & \\
\hline
a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} & \vec{f}_1 & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} & \vec{f}_i & \text{arrivée} \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \\
a_{q,1} & \cdots & a_{q,j} & \cdots & a_{q,p} & \vec{f}_q &
\end{array}$$

ii) Les opérations sur les applications linéaires se traduisent en des opérations analogues sur les matrices. Soient φ, ψ deux applications linéaires de E dans F et λ, μ deux réels. Si les matrices de φ et ψ (relatives aux mêmes bases au départ et à l'arrivée) sont A et B, alors la matrice de $\lambda\varphi + \mu\psi$ est $\lambda A + \mu B$.

iii) Compte tenu de la proposition 3.18, l'application qui a une application linéaire de E dans F associe sa matrice est bijective. Il résulte donc de la remarque précédente que l'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F est isomorphe à l'espace vectoriel $\mathscr{M}_{q,p}(\mathbf{R})$ des matrices à q lignes et p colonnes. En particulier

$$\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(E)\dim(F).$$

iv) Si on se donne une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, on peut considérer l'application φ_A de $\mathbf{R}^p$ dans $\mathbf{R}^q$ donnée par

$$\varphi_A(x_1,\ldots,x_p) = \left(\sum_{j=1}^{p} a_{1,j}x_j, \sum_{j=1}^{p} a_{2,j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{p} a_{q,j}x_j\right),$$

qu'on dit *définie par la matrice A*. Cette application est linéaire. Si $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$ est la base usuelle de $\mathbf{R}^p$ et $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_q)$ celle de $\mathbf{R}^q$, alors on a la relation

$$\varphi_A(\vec{e}_i) = (a_{1,i},\ldots,a_{q,i}) = \sum_{j=1}^{q} a_{j,i}\vec{f}_j$$

pour $i \in \{1,\ldots,p\}$. Cela prouve que $A = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi_A)$.

Proposition 4.26

Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement de bases $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_p)$ et $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1,\ldots,\vec{f}_q)$. Soit φ une application linéaire de E dans F. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi)$ sa matrice. Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Notons X le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\boldsymbol{e}$. Alors le vecteur colonne Y des coordonnées de $\varphi(\vec{u})$ dans la base $\boldsymbol{f}$ est donné par le produit matriciel

$$Y = AX.$$

Démonstration. — Notons $(x_1, \dots, x_p)$ les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$. On a donc la relation

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{p} x_i \vec{e}_i.$$

Notons $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ les coefficients de la matrice A. Par définition de cette matrice on a les relations

$$\varphi(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} \vec{f}_i$$

pour $j \in \{1, \dots, p\}$. On peut donc écrire les égalités

$$\varphi(\vec{u}) = \varphi\left(\sum_{j=1}^{p} x_j \vec{e}_j\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j \varphi(\vec{e}_j) = \sum_{j=1}^{p} x_j \sum_{i=1}^{q} a_{i,j} \vec{f}_i = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j\right) \vec{f}_i.$$

Mais on reconnaît dans $\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} x_j$ le coefficient de la i-ème ligne de la matrice produit AX. □

La composée de deux applications linéaires est encore une application linéaire. La matrice du produit est le produit des matrices :

Proposition 4.27

Soient E, F, G des espaces vectoriels, φ une application linéaire de E dans F et ψ une application linéaire de F dans G.

$$E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$$

Soient $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E, $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$ une base de F et $\boldsymbol{g} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_r)$ une base de G. Alors la matrice de $\psi \circ \varphi$ relative aux bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{g}$ est le produit des matrices de ψ et φ :

$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{g}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}}(\psi)\, \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi).$$

Remarque 4.28. — Remarquez que l'ordre dans lequel s'effectue le produit est l'ordre dans lequel s'écrit la composition.

$$\text{matrice de } g \circ f = (\text{matrice de } g)\,(\text{matrice de } f)\,.$$

Démonstration. — Notons $A = (a_{j,k})_{\substack{1 \leqslant j \leqslant q \\ 1 \leqslant k \leqslant p}}$ la matrice de φ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant r \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$ celle de ψ. Soit $k \in \{1, \dots, p\}$. Il nous faut déterminer les coordonnées du vecteur $\psi(\varphi(\vec{e}_k))$. mais le vecteur colonne des coordonnées de $\varphi(e_k)$ dans la base $\boldsymbol{f}$ est la k-ème colonne C_k de la matrice A. Compte tenu de la proposition précédente, le vecteur colonne des coordonnées de $\psi(\varphi(\vec{e}_k))$ est donc BC_k. Donc la coefficient sur la ligne i et la colonne k de la matrice de la composée est $\sum_{j=1}^{q} b_{i,j}a_{j,k}$ qui est bien le coefficient correspondant de la matrice produit BA. $\square$

Notation 4.29

Pour les endomorphismes, nous conviendrons, sauf mention explicite du contraire, de choisir une même base $\boldsymbol{e}$ au départ et à l'arrivée. Pour un endomorphisme φ, on notera $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{e}}(\varphi)$.

Proposition 4.30

Soient E et F des espaces vectoriels, munis respectivement de bases $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$, et φ une application linéaire de E dans F. L'application φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels si et seulement si $p = q$ et la matrice $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi)$ est inversible. Si c'est le cas, la matrice de l'application réciproque φ^{-1} est l'inverse de la matrice de φ.

Démonstration. — Observons d'abord que la matrice de l'application identique est la matrice identité, quelle que soit la base. Si l'application φ est bijective, alors $q = p$ et l'application réciproque φ^{-1} est l'unique application dont les composées avec φ sont les applications identiques :

$$\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_E \quad \text{et} \quad \varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_F.$$

Si A est la matrice de φ et B la matrice de φ^{-1}, la proposition 4.27 entraîne que $AB = BA = I_p$.

Réciproquement si A est inversible, alors notons ψ l'application linéaire de matrice A^{-1} dans les bases $\boldsymbol{f}$ et $\boldsymbol{e}$. Les composées de cette application avec φ ont pour matrice I_p : ce sont les applications identiques. Donc φ est bijective et l'application ψ est la réciproque de φ. $\square$

4.5. Matrice de changement de base. — Le calcul matriciel va également nous permettre de calculer des coordonnées dans les changements de base.

Définition 4.31

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soient $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ des bases de E. La *matrice de passage*, notée $P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}}$, est la matrice $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$, dont la i-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur $\vec{f}_i$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Remarques 4.32. — i) En utilisant les définitions, on peut noter qu'on a l'égalité

$$P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}} = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}}(\mathrm{Id}_E).$$

ii) Si $\boldsymbol{g} = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_n)$ est une troisième base de E, notons $(b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ les coefficients de la matrice de passage $P_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{g}}$ et $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$ ceux de $P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}}$. On a alors la relation

$$P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{g}} = P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}} P_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{g}}$$

En effet

$$\vec{g}_k = \sum_{j=1}^{n} b_{j,k} \vec{f}_j = \sum_{j=1}^{n} b_{j,k} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \vec{e}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \right) \vec{e}_i.$$

Proposition 4.33 (Formule de changement de base)

Soit E un espace vectoriel. Soient $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ des bases de E. Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Notons $X_{\boldsymbol{e}}$ (resp. $X_{\boldsymbol{f}}$) le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\boldsymbol{e}$ (resp. $\boldsymbol{f}$). Alors

$$X_{\boldsymbol{f}} = (P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}})^{-1} X_{\boldsymbol{e}}.$$

On prendra garde que c'est *l'inverse* de la matrice de passage qui donne la formule de changement de coordonnées.

Démonstration. — Notons d'abord que, d'après la proposition 4.30, $P_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{e}} = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{e}}(\mathrm{Id}_E)^{-1} = (P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}})^{-1}$. Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. D'après la proposition 4.26, le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u} = \mathrm{Id}_E(\vec{u})$ dans la base $\boldsymbol{f}$ est le vecteur $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\mathrm{Id}_E) X_{\boldsymbol{e}} = (P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}})^{-1} X_{\boldsymbol{e}}$, ce qui donne la formule attendue. □

Exemple 4.34. — Munissons $E = \mathbf{R}^3$, des deux bases suivantes.

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \quad \text{et} \quad (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)) \,.$$

Voici la matrice de passage P et son inverse.

$$P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad (P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si un vecteur $\vec{v}$ a pour coordonnées x, y, z dans la base canonique $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, alors ses coordonnées dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ s'obtiennent en effectuant le produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y \\ y-z \\ z \end{pmatrix}$$

Constatez que :

$$(x-y)(1,0,0) + (y-z)(1,1,0) + z(1,1,1) = (x,y,z),$$

ce qui confirme le résultat obtenu.

Passons maintenant à la formule de changement de base pour les matrices des applications linéaires :

Théorème 4.35 (Formule de changement de base)

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie, soient $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m)$ et $\boldsymbol{e}' = (\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_m)$ (resp. $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ et $\boldsymbol{f}' = (\vec{f}'_1, \ldots, \vec{f}'_n)$ des base de F). Soit φ une application linéaire de E vers F, on a alors la relation

$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}',\boldsymbol{f}'}(\varphi) = (P_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{f}'})^{-1}\, \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi) P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e}'} .$$

Démonstration. — On a la relation $\varphi = \mathrm{Id}_F \circ \varphi \circ \mathrm{Id}_E$. On peut alors appliquer la proposition 4.27 qui donne la relation

$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}',\boldsymbol{f}'}(\varphi) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{f}'}(\mathrm{Id}_F)\, \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi)\, \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}',\boldsymbol{e}}(\mathrm{Id}_E),$$

qui est exactement l'égalité annoncée. □

Corollaire 4.36

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soient $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m)$ et $\boldsymbol{e}' = (\vec{e}'_1, \ldots, \vec{e}'_m)$ des bases de E Soit φ une endomorphisme de E, on a alors la relation

$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}'}(\varphi) = (P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e}'})^{-1}\,\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(\varphi) P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{e}'}.$$

Exemple 4.37. — Reprenons l'exemple en dimension 3 des deux bases

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) \quad \text{et} \quad (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3) = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)).$$

Considérons l'application de $\mathbf{R}^3$ dans $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$\varphi : \quad (x,y,z) \longmapsto (x-z, 2x-3y+z, y-2z).$$

Sa matrice dans la base usuelle $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

La matrice de φ dans la base $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ est :

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

L'image par φ du vecteur $\vec{f}_2 = (1,1,0)$ est le vecteur $(1,-1,1) = 2\vec{f}_1 - 2\vec{f}_2 + \vec{f}_3$. Les coordonnées $2, -2, 1$ figurent dans la seconde colonne de $P^{-1}AP$.

Définition 4.38

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ sont dites *semblables* si et seulement s'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ telle que

$$B = P^{-1}AP.$$

Remarque 4.39. — Le corollaire 4.36 affirme que des matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Définition 4.40

Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ sont dites *équivalentes* si et seulement s'il existe des matrices inversibles $P \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ et $Q \in \mathscr{M}_m(\mathbf{R})$ telles que :

$$B = Q^{-1} A P\,.$$

Remarque 4.41. — Le théorème 4.35 affirme que des matrices sont équivalentes si et seulement si elles peuvent représenter la même application linéaire, à un changement de base près dans les espaces de départ et d'arrivée.

4.6. Rang d'une matrice. — Nous avons déjà défini la notion de rang pour une famille de vecteurs et pour une application linéaire :

a) Le rang d'une famille de vecteurs est la dimension du sous espace vectoriel qu'elle engendre,

b) Le rang d'une application linéaire est la dimension de son image.

Définition 4.42

Soit $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ une matrice. On appelle *rang de la matrice A* la dimension du sous-espace vectoriel (de $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbf{R})$) engendré par ses colonnes.

Remarque 4.43. — Soient E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels, et φ une application linéaire de E dans F. Si $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E, l'image de φ est le sous-espace vectoriel de F engendré par $(\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n))$. Donc le rang de φ est aussi le rang de la famille $(\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n))$ et ce, quelle que soit la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Ce rang ne dépend pas non plus de la base dans laquelle on écrit la famille $(\varphi(\vec{e}_1), \dots, \varphi(\vec{e}_n))$ à l'arrivée : c'est le rang des vecteurs colonnes de la matrice de f, quelles que soient les bases par rapport auxquelles on écrit cette matrice.

Observons que la connaissance du rang fournit un critère d'inversibilité.

Proposition 4.44

Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ est inversible si et seulement si son rang est égal à n.

Démonstration. — D'après la proposition 4.30, une matrice est inversible, si et seulement si elle représente une application linéaire bijective de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même. Or une application linéaire est bijective si et seulement si l'image qu'elle donne d'une base est une base, c'est-à-dire si son rang est n. □

Le rang d'une matrice est celui des applications linéaires qu'elle représente, qui ne dépend pas des bases. Si deux matrices représentent la même application dans des bases différentes, elles auront nécessairement même rang. Rappelons (définition 4.40 et théorème 4.35) que deux matrices sont *équivalentes* si elles représentent la même application linéaire dans deux bases différentes, ou encore si on déduit l'une de l'autre en multipliant à gauche ou à droite par une matrice inversible. Deux matrices équivalentes ont même rang. Nous allons démontrer la réciproque.

Théorème 4.45

Deux matrices de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Démonstration. — Nous devons démontrer que deux matrices ayant le même rang sont équivalentes. Soit A une matrice à m lignes, n colonnes, et de rang r. Notons $C_1, \dots, C_n$ les n colonnes de A, qui sont des vecteurs de $\mathscr{M}_{m,1}(\mathbf{R})$. Le rang de A est la dimension de l'espace engendré par $(C_1, \dots, C_n)$, qui est inférieure ou égale à n et à m. Nous allons montrer que la matrice A est équivalente à la matrice J_r obtenue en complétant la matrice identité I_r par des zéros, à droite et en dessous.

$$
J_r = \begin{array}{c|c}
\begin{array}{cccccccc} 1 & & \cdots & & r & & \cdots & n \end{array} & \\
\hline
\left(\begin{array}{cccccccc}
1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \ddots & 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0
\end{array}\right) &
\begin{array}{c} 1 \\ \\ \vdots \\ \\ r \\ r+1 \\ \vdots \\ m \end{array}
\end{array}
$$

Considérons l'application φ, de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ dont la matrice relative aux bases usuelles est A. Nous voulons trouver une base de l'espace de départ et une base de l'espace d'arrivée, telles que la matrice de φ relative à ces bases soit J_r.

Comme la dimension de l'image de φ est r, la dimension du noyau est $n-r$, d'après le théorème du rang. Soir $(\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $\ker(\varphi)$ que l'on complète en une base $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r, \vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_n)$ de $\mathbf{R}^n$. La preuve du théorème 3.15 prouve que si on pose $\vec{f}_i = \varphi(\vec{e}_i)$

pour $i \in \{1,\dots,r\}$, alors $(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_r)$ est une base de l'image de φ, que l'on complète en une base $(\vec{f}_1,\dots,\vec{f}_m)$ de $\mathbf{R}^m$. On obtient alors $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi) = J_r$.

Puisque A et J_r sont équivalentes, il existe deux matrices inversibles P et Q telles que $J_r = Q^{-1}AP$, et donc $A = QJ_rP^{-1}$. Soit B une autre matrice de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbf{R})$, également de rang r. Il existe deux autres matrices inversibles R et S telles que $J_r = S^{-1}BR$. En multipliant à gauche par Q et à droite par P^{-1}, on obtient :

$$A = (QS^{-1})B(RP^{-1})\,.$$

Donc deux matrices de même taille et de même rang sont équivalentes. □

On déduit de la démonstration qui précède que A et ${}^tA$ ont le même rang.

Proposition 4.46

Une matrice et sa transposée ont même rang.

Démonstration. — Nous avons démontré qu'une matrice A de rang r est équivalente à la matrice J_r obtenue en complétant I_r par des zéros. Or ${}^tJ_r$ est du même type que J_r : elle contient la matrice identité I_r, complétée par des zéros. Elle est aussi de rang r. Par la proposition 4.12, si $A = QJ_rP^{-1}$, la transposée de A s'écrit :

$${}^tA = {}^t(P^{-1})\,{}^tJ_r\,{}^tQ\,.$$

Par la proposition 4.12, la transposée d'une matrice inversible est inversible. Nous avons donc montré que ${}^tA$ est équivalente à ${}^tJ_r$, qui est de rang r. □

4.7. Opérations élémentaires sur les matrices. — Déterminer le rang d'une matrice consiste à déterminer le rang de ses vecteurs colonnes, ou encore de ses vecteurs lignes, puisque ce sont les colonnes de la transposée.

De même que pour les système linéaires, on peut définir des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes d'une matrice. Ainsi si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice on note C_i sa ième colonne, qu'on peut voir comme un élément de $\mathcal{M}_{m,1}(\mathbf{R})$ et L_i sa i-ligne, vue comme un élément de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbf{R})$. On peut alors effectuer des échanges de colonnes $C_i \longleftrightarrow C_j$ ou de lignes $L_i \longleftrightarrow L_j$ ainsi qu'ajouter le multiple d'une ligne (resp. d'une colonne) à une *autre* ligne (resp. colonne) $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ (resp. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$) avec $\lambda \neq 0$ et $i \neq j$. Enfin nous pouvons multiplier une ligne ou une colonne par un nombre réel *non nul*.

Aucune de ces opérations élémentaires ne change le rang d'une matrice. Donc la méthode du pivot de Gauss vue pour les systèmes linéaires permet également de réduire une matrice et de déterminer son rang. nous allons maintenant faire cela sur un exemple.

Exemple 4.47. — Considérons la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Le coefficient d'ordre $(1, 1)$ est non nul, il n'y a donc pas de permutations à effectuer. Le premier pivot est $p_1 = 1$. Voici les transformations qui annulent la première colonne au-dessous du pivot.

$$\begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Le second pivot est -1. Les transformations qui annulent le bas de la seconde colonne sont les suivantes.

$$\begin{array}{l} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir un troisième pivot non nul, il faut échanger les deux dernières colonnes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le troisième pivot est -2. Il ne reste qu'une ligne à transformer.

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le rang de la matrice est donc 3. En n'oubliant pas que les colonnes 3 et 4 ont été échangées, on obtient aussi que les vecteurs colonnes numéros 1, 2 et 4 de la matrice A forment une famille libre, donc une base de l'espace engendré.

4.8. Systémes linéaires et calcul matriciel. — Considérons un système d'équations linéaires général :

$$(\mathrm{H}) \qquad \begin{cases} a_{1,1}X_1 + & \cdots & +a_{1,j}X_j + & \cdots & +a_{1,n}X_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}X_1 + & \cdots & +a_{i,j}X_j + & \cdots & +a_{i,n}X_n & = & b_i \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}X_1 + & \cdots & +a_{m,j}X_j + & \cdots & +a_{m,n}X_n & = & b_m \end{cases}$$

On peut lui associer la matrice de ses coefficients $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant m \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ ainsi que le vecteur colonne B des second membres dont le coefficient de la i-ème ligne est b_i.

Alors le n-uplet $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ est solution du système (H) si et seulement si le vecteur colonne X qui lui correspond vérifie

$$AX = B.$$

Notons $\varphi_A : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ l'application linéaire associée à A, c'est-à-dire celle dont la matrice dans les bases usuelles est A (*cf.* remarque 4.25 iv)) et soit $\vec{b} = (b_1, \dots, b_m)$ alors le système est également équivalent à l'équation

$$\varphi_A(\vec{x}) = \vec{b}.$$

Proposition 4.48

Le *rang* de ce système est égal à la fois au rang de φ_A et au rang de A.

Démonstration. — Notons r le rang du système. Les opérations élémentaires sur les lignes du systèmes se traduisent, pour la matrice associée, en les mêmes opérations sur les lignes de la matrice. Comme les opérations élémentaires préservent le rang d'une matrice, il suffit de prouver le résultat dans le cas d'un système échelonné. Mais dans ce cas, la matrice a exactement r lignes non nulles et quitte à faire des échanges de colonnes, on se ramène au cas d'une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,r} & \dots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,r} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{r,r} & \dots & a_{r,n} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a_{i,i} \neq 0$ pour $i \in \{1,\dots,r\}$. En faisant les operations $C_i \leftarrow \frac{1}{a_{i,i}} C_i$, on peut en outre supposer que $a_{i,i} = 1$ pour $i \in \{1,\dots,r\}$. Des opérations élémentaires sur les colonnes permettent alors de se ramener à la matrice J_r qui est de rang r.

L'égalité avec le rang de φ a déjà été vue. $\square$

4.9. Calcul de l'inverse. — Pour les matrices 2×2, on peut donner une formule pour le calcul de l'inverse d'une matrice

Proposition 4.49

Soit $A = \left(\begin{smallmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{smallmatrix}\right)$. La matrice A est inversible si et seulement sont *déterminant*

$$\det(A) = \alpha\delta - \gamma\beta$$

est non nul auquel cas l'inverse de A est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix}$$

Démonstration. — L'équivalence résulte du critère vu en MAT101 pour la colinéarité de deux vecteurs en dimension 2. D'autre part si $\det(A)$ est inversible on a

$$\frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = I_2$$

ce qui prouve la formule pour l'inverse. $\square$

Pour $n \geqslant 3$, il n'y a pas de formule générale aussi simple. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée. Soit $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ un vecteur quelconque. Chercher un n-uplet $x = (x_1,\dots,x_n)$ tel que le vecteur colonne correspondant X vérifie $AX = B$, c'est résoudre un système linéaire de n équations à n inconnues. Si la matrice A est inversible, alors la solution s'écrit $X = A^{-1}B$. La méthode du pivot de Gauss parmet de résoudre le système $AX = B$ pour un second membre quelconque, donc de calculer $X = A^{-1}B$. Les coefficients de A^{-1} se lisent sur le système résolu.

Exemple 4.50. — Soit par exemple à inverser la matrice A suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ecrivons le système

$$A \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} X & & -Z & = & a \\ X & -Y & & = & b \\ X & -Y & +Z & = & c \end{array} \right.$$

Voici les différentes étapes de la résolution par la méthode du pivot de Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{rrrcl} X & & -Z & = & a \\ X & -Y & & = & b \\ X & -Y & +Z & = & c \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & & -Z & = & a \\ & -Y & +Z & = & b-a \\ & -Y & +2Z & = & c-a \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & & -Z & = & a \\ & -Y & +Z & = & b-a \\ & & Z & = & c-b \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & & -Z & = & a \\ & Y & -Z & = & a-b \\ & & Z & = & c-b \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrrcr} X & & & = & a-b+c \\ & Y & & = & a-2b+c \\ & & Z & = & -b+c \end{array} \right. \iff \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

avec

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Fiche de révision

4.1. Produit

Définition R.4.1

Soient m, n, p trois entiers strictement positifs. Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$ et soit $B = (b_{j,k})$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbf{R})$. On appelle produit matriciel de A par B la matrice $C \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbf{R})$ dont le terme général $c_{i,k}$ est défini, pour tout $i = 1, \dots, m$ et pour tout $k \in 1, \dots, p$ par :

$$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} .$$

4.2. Matrices et applications linéaires

Définition R.4.2

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement des bases $\boldsymbol{e} = (e_1, \dots, e_p)$ et $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_q)$. Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors la *matrice de* φ dans les bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{f}$ est la matrice $q \times p$ *à* q *lignes et* p *colonnes* dont la i-ème colonne est donnée par les coordonnées de $\varphi(\vec{e}_i)$ dans la base $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$.

Proposition R.4.3

Soit E et F des $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis respectivement des bases $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ et $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_q)$. Soit φ une application linéaire de E dans F. Soit $A = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi)$ sa matrice. Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Notons X le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\boldsymbol{e}$. Alors le vecteur colonne Y des coordonnées de $\varphi(\vec{u})$ dans la base $\boldsymbol{f}$ est donné par le produit matriciel

$$Y = AX.$$

Proposition R.4.4

Soient E, F, G des espaces vectoriels, φ une application linéaire de E dans F et ψ une application linéaire de F dans G.

$$E \xrightarrow{\varphi} F \xrightarrow{\psi} G$$

Soient $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$ une base de E, $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_q)$ une base de F et $\boldsymbol{g} = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_r)$ une base de G. Alors la matrice de $\psi \circ \varphi$ relative aux bases $\boldsymbol{e}$ et $\boldsymbol{g}$ est le produit des matrices de ψ et φ :

$$\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{g}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}}(\psi)\,\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e},\boldsymbol{f}}(\varphi).$$

4.3. Changement de base

Définition R.4.5

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soient $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ des bases de E. La *matrice de passage* notée $P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}}$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\boldsymbol{e}}(\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$, dont la i-ème colonne est formée des coordonnées du vecteur $\vec{f}_i$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Proposition R.4.6 (Formule de changement de base)

Soit E un espace vectoriel. Soient $\boldsymbol{e} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\boldsymbol{f} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ des bases de E. Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Notons $X_{\boldsymbol{e}}$ (resp. $X_{\boldsymbol{f}}$) le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\boldsymbol{e}$ (resp. $\boldsymbol{f}$). Alors

$$X_{\boldsymbol{f}} = (P_{\boldsymbol{e}}^{\boldsymbol{f}})^{-1} X_{\boldsymbol{e}}.$$

Entraînement

4.1. Vrai ou faux

Vrai-Faux 4.1. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour toutes matrices A et B et pourquoi ?

1. ☐ Si le produit AB est défini, alors le produit BA est défini.
2. ☐ Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit AB est défini.
3. ☒ Si le produit AB est défini, alors le produit ${}^tB\,{}^tA$ est défini.
4. ☒ Si la somme $A+B$ est définie, alors le produit $A\,{}^tB$ est défini.
5. ☐ Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+B$ est définie.
6. ☒ Si les produits AB et BA sont définis, alors la somme $A+{}^tB$ est définie.
7. ☒ Si les produits AB et ${}^tBA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tA$ est définie.
8. ☐ Si les produits AB et ${}^tBA$ sont définis, alors la somme $A+{}^tB$ est définie.
9. ☐ Si le produit AB est défini, alors la somme $A\,{}^tA+B\,{}^tB$ est définie.
10. ☒ Si le produit AB est défini, alors la somme ${}^tAA+B\,{}^tB$ est définie.

Vrai-Faux 4.2. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour toute matrice A et pourquoi ?

1. ☐ Si A est inversible, alors $A\,{}^tA={}^tAA$.
2. ☒ Si A est inversible, alors $A\,{}^tA$ est inversible.
3. ☐ Si A est inversible, alors $A+{}^tA$ est inversible.
4. ☒ Si A est inversible, alors A est équivalente à la matrice identité.
5. ☐ Si A est inversible, alors A est semblable à la matrice identité.

Vrai-Faux 4.3. Soit A une matrice carrée. On dit que A est *diagonale* si tous ses coefficients d'ordre (i,j) avec $i \neq j$, sont nuls. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies pour toute matrice carrée A et pourquoi ?

1. ☐ Si A est diagonale, alors A est inversible.
2. ☒ Si A est diagonale, alors A est symétrique.
3. ☒ Si A est diagonale et si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls, alors A est inversible.
4. ☐ Si A est diagonale, alors A est semblable à la matrice identité.
5. ☐ Si A est diagonale, alors A est équivalente à la matrice identité.

Vrai-Faux 4.4. Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies et pourquoi ?

1. ☐ Si une matrice est de rang r, alors elle est équivalente à la matrice I_r
2. ☒ Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes est de rang r.
3. ☒ Une matrice est de rang r si et seulement si la famille de ses vecteurs lignes est de rang r.
4. ☐ Si une matrice A est de rang r, alors toute matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r.
5. ☒ Si une matrice formée de r colonnes parmi les colonnes de A est de rang r, alors A est de rang $\geqslant r$.
6. ☒ La matrice nulle est la seule matrice de rang 0.
7. ☐ Si deux lignes de A ne sont pas proportionnelles, alors le rang de A est au plus 2.
8. ☐ Si deux lignes de A sont proportionnelles, alors le rang de A est strictement inférieur à son nombre de colonnes.
9. ☒ Si une matrice carrée de $\mathscr{M}_r$, extraite de A est inversible, alors A est de rang $\geqslant r$.
10. ☒ Si A est de rang r, alors aucune matrice carrée de $\mathscr{M}_{r+1}$ extraite de A n'est inversible.
11. ☐ Si toute matrice carrée de $\mathscr{M}_r$, extraite de A est de rang r, alors A est de rang r.

4.2. Exercices

Exercice 4.1. Pour chacune des application linéaires suivantes de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$, écrire sa matrice dans les bases usuelles des espaces de départ et d'arrivée.

$$f(x,y,z) = x + 2y + 3z \qquad f(x) = (x, -x, 2x)$$
$$f(x,y) = (x+y, x-y) \qquad f(x,y,z) = (x+2y+3z, x+y+z, x-y-z)$$
$$f(x,y,z) = (x-2y, 3y) \qquad f(x,y,z,t) = (x+y-2z+t, x+y+t)$$

Exercice 4.2. Rappelons que $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ désigne l'espace vectoriel des applications polynomiales de degré au plus d. Soit D l'application de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant 3}$ dans lui-même définie par $f(P) = P'$.

1. Vérifier que D est linéaire.
2. Écrire la matrice de D dans la base $(1, X, X^2, X^3)$ de $\mathbf{R}[X]_{\leqslant 3}$.
3. Calculer M^4. Que pensez-vous de votre résultat ?
4. Trouver un analogue de la question précédente et le prouver si l'on change $\mathbf{R}[X]_{\leqslant 3}$ en $\mathbf{R}[X]_{\leqslant d}$ pour un entier d quelconque ?

Exercice 4.3. On considère les matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 0\\1\\0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1\\0\\1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2\\-1\\0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2\\3\\1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3\\-1\\2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -4\\ 3 & 1 & -3\\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -2 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Trouver m et n tels que chacune des matrices représente une application linéaire de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^m$ dans les bases usuelles. Écrire ces applications en termes des coordonnées.
2. Ecrire la transposée de chacune de ces matrices.
3. Etant données deux matrices A, B appartenant à l'ensemble ci-dessus, calculer ceux des produits AB, ${}^tAB$, A^tB, ${}^tA^tB$ qui sont définis.

Exercice 4.4. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Démontrer que $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_1) = \varphi(\vec{e}_2) = 0$. Démontrer que $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_3) = \varphi(\vec{e}_3)$.
2. En déduire A^2. Vérifier en effectuant le produit matriciel.
3. Démontrer que $A^3 = A^2$ sans effectuer le produit matriciel, puis vérifier en l'effectuant.
4. Donner une base de $\ker(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$

Exercice 4.5. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$, puis $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$.
2. En déduire que $A^2 = A^{-1}$. Vérifier en calculant le produit matriciel.

Exercice 4.6. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$, puis $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$.
2. En déduire A^2 et A^3.
3. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de k. Vérifier votre expression pour $k = 3$ en effectuant le produit matriciel.
4. Reprendre la question précédente pour $(I_3 - A)^k$, puis pour $(3I_3 - 2A)^k$.

Exercice 4.7. On considère la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note φ l'endomorphisme de $\mathbf{R}^3$ qui a pour matrice A dans la base canonique de $\mathbf{R}^3$, notée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$.

1. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer $\varphi \circ \varphi(\vec{e}_i)$, en déduire que $\varphi \circ \varphi = 3\varphi$.
2. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, démontrer par récurrence que $\varphi^{\circ k} = 3^{k-1}\varphi$.
3. En déduire l'expression de A^k en fonction de k.
4. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, donner une expression de $(I_3 + A)^k$ en fonction de k. Vérifier votre expression pour $k = 3$ en effectuant le produit matriciel.
5. Reprendre la question précédente pour $(I_3 - A)^k$, puis pour $(3I_3 - 2A)^k$.

Exercice 4.8. On rappelle qu'une matrice carrée est symétrique si elle est égale à sa transposée. On note $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices carrées symétriques. On dit qu'une matrice carrée est *antisymétrique* si elle est l'opposée de sa transposée : ${}^tA = -A$. On note $\mathscr{A}_n$ l'ensemble des matrices carrées antisymétriques.

1. Démontrer que les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.
2. Démontrer que $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n$.
3. Soit A une matrice carrée quelconque. Démontrer que $A + {}^tA$ est symétrique et $A - {}^tA$ est antisymétrique.
4. Soit A une matrice carrée. Démontrer qu'elle s'écrit d'une et d'une seule façon comme somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.
5. Démontrer que le produit de deux matrices symétriques A et B est symétrique si et seulement si $AB = BA$ (on dit que A et B « commutent »).
6. Démontrer que le produit de deux matrices antisymétriques A et B est antisymétrique si et seulement si $AB = -BA$.
7. Soit A une matrice inversible. Démontrer que ${}^tA$ est inversible et que son inverse est ${}^t(A^{-1})$.
8. Soit A une matrice symétrique et inversible. Démontrer que son inverse est symétrique.
9. Soit A une matrice antisymétrique et inversible. Démontrer que son inverse est antisymétrique.
10. Démontrer qu'aucune matrice de $\mathscr{A}_3$ n'est inversible.

Exercice 4.9. On appelle *trace* d'une matrice carrée la somme de ses éléments diagonaux. On note $\mathrm{tr}(A)$ la trace de $A \in \mathscr{M}_n$.

1. Soient A, B deux matrices de $\mathscr{M}_n$. Démontrer que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
2. En déduire que deux matrices carrées semblables ont la même trace.
3. Soit A une matrice carrée non nulle. Démontrer que les traces de $A{}^tA$ et ${}^tAA$ sont strictement positives.

Exercice 4.10. Déterminer le rang des matrices suivantes.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 7 \\ -2 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.11. Vérifier que les matrices suivantes sont inversibles et calculer leurs inverses.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.12. Pour chacune des matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer selon les valeurs de λ le rang de la matrice $A-\lambda I_2$.
2. On note λ_1 et λ_2 les deux réels tels que le rang de $A-\lambda_i I_2$ est 1. Pour $i = 1, 2$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire
$$(A-\lambda_i I_2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
On note $\vec{v}_i$ un vecteur non nul solution de ce système.
3. Démontrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ est une base de $\mathbf{R}^2$.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^2$ à la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$. Calculer P^{-1}. Démontrer que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$
5. Démontrer que la matrice $(A-\lambda_1 I_2)(A-\lambda_2 I_2)$ est nulle. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A et I_2.
6. En utilisant l'expression de la question précédente, vérifier que
$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 \end{pmatrix}.$$
7. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, donner une expression de A^k en fonction de k.

Exercice 4.13. Pour chacune des matrices A suivantes :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer selon les valeurs de λ le rang de la matrice $A-\lambda I_3$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les trois réels tels que le rang de $A-\lambda_i I_3$ est 2. Pour $i = 1, 2, 3$, déterminer l'ensemble des solutions du système linéaire
$$(A-\lambda_i I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$
On note $\vec{v}_i$ un vecteur non nul solution de ce système.

3. Démontrer que $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de $\mathbf{R}^3$.
4. Soit P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbf{R}^3$ à la base $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Calculer P^{-1}. Démontrer que
$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}.$$
5. Démontrer que la matrice $(A-\lambda_1 I_3)(A-\lambda_2 I_3)(A-\lambda_3 I_3)$ est nulle. En déduire une expression de A^{-1} en fonction de A^2, A et I_3.
6. En utilisant l'expression de la question précédente, vérifier que
$$P^{-1}A^{-1}P = \begin{pmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\lambda_3 \end{pmatrix}.$$
7. Pour $k \in \mathbf{N}^*$, donner une expression de A^k en fonction de k.

Compléments

4.1. Diagonalisation. — Voici deux systèmes linéaires d'équations.

$$(a)\left\{\begin{array}{rrrcr} & Y & +Z & = & 1\\ -\frac{1}{2}X & +\frac{3}{2}Y & -\frac{1}{2}Z & = & 0\\ \frac{3}{2}X & -\frac{3}{2}Y & +\frac{1}{2}Z & = & -1\end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rrrcr} X & & & = & 0\\ & -Y & & = & -1\\ & & 2Z & = & 0\end{array}\right.$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations de récurrence.

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrrr} u_{k+1} & = & & v_k & +w_k\\ v_{k+1} & = & -\frac{1}{2}u_k & +\frac{3}{2}v_k & -\frac{1}{2}w_k\\ w_{k+1} & = & \frac{3}{2}u_k & -\frac{3}{2}v_k & +\frac{1}{2}w_k\end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rcrrr} u_{k+1} & = & u_k & & \\ v_{k+1} & = & & -v_k & \\ w_{k+1} & = & & & 2w_k\end{array}\right.$$

Voici deux systèmes linéaires d'équations différentielles.

$$(a)\left\{\begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & & y(t) & +z(t)\\ y'(t) & = & -\frac{1}{2}x(t) & +\frac{3}{2}y(t) & -\frac{1}{2}z(t)\\ z'(t) & = & \frac{3}{2}x(t) & -\frac{3}{2}y(t) & +\frac{1}{2}z(t)\end{array}\right. \qquad (d)\left\{\begin{array}{rcrrr} x'(t) & = & x(t) & & \\ y'(t) & = & & -y(t) & \\ z'(t) & = & & & 2z(t)\end{array}\right.$$

Les trois problèmes, de natures très différentes, ont en commun leur écriture matricielle, avec les deux matrices suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

Tous les problèmes linéaires sont plus faciles à résoudre quand la matrice est diagonale !

Il se trouve que les deux matrices A et D sont *semblables*, c'est-à-dire qu'elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes, ou encore, il existe une *matrice de passage* P

telle que $P^{-1}AP = D$.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{P^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{D}$$

Définition 4.7

Une matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n$ est *diagonalisable* si elle est semblable à une matrice diagonale, c'est-à-dire s'il existe une matrice de passage P telle que

$$P^{-1}AP = D\,.$$

Les techniques permettant de savoir si une matrice donnée est diagonalisable et de calculer la matrice de passage P si elle l'est, dépassent le cadre de ce cours. On commence par calculer les coefficients diagonaux de D, qui sont les valeurs de λ telles que $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible : on les appelle les *valeurs propres*, et leur ensemble est le *spectre* de la matrice. Pour chaque valeur propre λ, on détermine ensuite le *sous-espace propre* associé à λ : c'est l'ensemble des vecteurs $\vec{v}$ tels que $(A - \lambda I_n)\vec{v} = 0$. La matrice est diagonalisable lorsqu'on peut trouver une base de $\mathbf{R}^n$ constituée de vecteurs appartenant aux sous-espaces propres. La matrice de passage P est la matrice exprimant ces vecteurs dans la base canonique. Quelques exemples élémentaires sont donnés dans les exercices 4.12 et 4.13.

Quand une matrice A est diagonalisable, il est facile de résoudre le système linéaire $AX = B$: il est équivalent au système $DY = C$, avec $Y = P^{-1}X$ et $C = P^{-1}B$. Or dans un système dont la matrice est diagonale, toutes les équations n'ont qu'une inconnue et se résolvent séparément.

Prenons maintenant l'exemple d'un système d'équations de récurrence linéaire, du type $U_{k+1} = A\,U_k$, où U_k désigne un vecteur dont on souhaite connaître l'expression en fonction de k. Du point de vue théorique, il n'y a pas de problème :

$$U_k = A^k\,U_0\,.$$

Mais cela n'avance à rien si on ne sait pas calculer formellement l'expression de A^k en fonction de k. C'est possible si A est diagonalisable. En effet, si $A = PDP^{-1}$:

$$A^k = PDP^{-1}\,PDP^{-1}\ldots PDP^{-1} = PD^kP^{-1}\,.$$

Ecrire D^k est immédiat. On en déduit l'expression générale de A^k, donc de U_k. Dans l'exemple ci-dessus, on trouve :

$$A^k = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^k}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{(-1)^k}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{(-1)^k}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{2^k}{2}+\frac{1}{2} & \frac{2^k}{2}+\frac{1}{2} & -\frac{2^k}{2}+\frac{1}{2} \\ -\frac{(-1)^k}{2}+\frac{2^k}{2} & \frac{(-1)^k}{2}-\frac{2^k}{2} & \frac{(-1)^k}{2}+\frac{2^k}{2} \end{pmatrix}$$

Passons maintenant aux systèmes d'équations différentielles, du type

$$Y'(t) = A\,Y(t)\,, \tag{20}$$

où Y est une fonction (inconnue) de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}^n$, et $A \in \mathscr{M}_n$ est une matrice carrée de réels. Si $A = PDP^{-1}$, alors

$$P^{-1}Y'(t) = D(P^{-1}Y(t)$$

Donc $X(t) = P^{-1}Y(t)$ est solution du système $X'(t) = DX(t)$. En posant $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, ce système s'écrit

$$\forall i = 1, \dots, n\,, \quad x_i'(t) = \lambda_i\, x_i(t)\,.$$

Sa solution est facile à calculer :

$$\forall i = 1, \dots, n\,, \quad x_i(t) = e^{\lambda_i t}\, x_i(0)\,.$$

Le vecteur des conditions initiales pour le système diagonalisé est $X(0) = P^{-1}Y(0)$. Connaissant $X(t)$, on en déduit $Y(t) = PX(t)$.

Soit par exemple à résoudre

$$\left\{\begin{array}{rclrrr} x'(t) & = & & y(t) & +z(t) \\ y'(t) & = & -\frac{1}{2}x(t) & +\frac{3}{2}y(t) & -\frac{1}{2}z(t) \\ z'(t) & = & \frac{3}{2}x(t) & -\frac{3}{2}y(t) & +\frac{1}{2}z(t) \end{array}\right. ,$$

avec les conditions initiales $x(0) = 0$, $y(0) = 1$, $z(0) = 2$. Le système s'écrit sous la forme $Y'(t) = A\,Y(t)$, avec

$$Y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

En utilisant la diagonalisation de A, on obtient

$$\begin{cases} x(t) &= \dfrac{3}{2}e^{t} - \dfrac{3}{2}e^{-t} \\ y(t) &= \dfrac{3}{2}e^{t} - \dfrac{1}{2}e^{2t} \\ z(t) &= \dfrac{3}{2}e^{-t} + \dfrac{1}{2}e^{2t} \end{cases}$$

Présentée ainsi la diagonalisation semble un outil magique. En réalité, les algorithmes qui calculent numériquement les valeurs propres et les vecteurs propres sont relativement lents et il est impraticable de diagonaliser une matrice si sa dimension dépasse quelques dizaines.

4.2. Décomposition LU. — La méthode du pivot de Gauss, décrite dans le chapitre 1, n'est pas exactement programmée comme elle a été présentée. Il y a plusieurs raisons à cela, dont la principale est le problème de la précision numérique.

Voici un système de deux équations à deux inconnues, dépendant du paramètre $\varepsilon \neq 0$.

$$\begin{cases} \varepsilon X + Y &= 1 \\ X + Y &= 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \varepsilon X + Y &= 1 \\ (1 - \frac{1}{\varepsilon})Y &= 2 - \frac{1}{\varepsilon} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X &= \frac{1}{\varepsilon}(1 - (2 - \frac{1}{\varepsilon})/(1 - \frac{1}{\varepsilon})) \\ Y &= (2 - \frac{1}{\varepsilon})/(1 - \frac{1}{\varepsilon}) \end{cases}$$

Voici le même système, après avoir échangé les deux équations.

$$\begin{cases} X + Y &= 2 \\ \varepsilon X + Y &= 1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X + Y &= 2 \\ (1 - \varepsilon)Y &= 1 - 2\varepsilon \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} X &= 2 - (1 - 2\varepsilon)/(1 - \varepsilon) \\ Y &= (1 - 2\varepsilon)/(1 - \varepsilon) \end{cases}$$

Les deux solutions sont évidemment les mêmes. Pourtant, si ε est très petit en valeur absolue, les deux calculs ne sont pas du tout équivalents numériquement : diviser par un petit nombre, ou multiplier par un grand nombre, augmente les erreurs d'approximation.

Telles que nous les avons présentées, les permutations de lignes et de colonnes servent à assurer que les pivots restent non nul. La plupart des systèmes que l'on rencontre en pratique ont une solution unique : ce sont des systèmes de n équations à n inconnues, de rang n. En général, on peut leur appliquer la méthode du pivot de Gauss sans rencontrer de pivot nul. Mais on utilise quand même les permutations de lignes et de colonnes, pour faire en sorte qu'à chaque étape, le pivot soit le plus grand possible en valeur absolue.

Permuter les *lignes* d'une matrice, revient à la multiplier *à gauche* par une matrice de permutation. Une *matrice de permutation* est la matrice de passage de la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ à la base $(\vec{e}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{e}_{\sigma(n)})$, où σ est une bijection de $\{1, \ldots, n\}$ dans lui-même. Ses coefficients d'ordre $(\sigma(i), i)$ valent 1, les autres 0. Une matrice de permutation est une matrice carrée caractérisée par le fait que dans chaque ligne et dans chaque colonne il y a exactement un coefficient non nul qui vaut 1. Permuter les *colonnes* d'une matrice, revient à la multiplier *à droite* par une autre matrice de permutation. En permutant les lignes et les colonnes, on remplace la matrice A par la matrice P_1AP_2 où P_1 et P_2 sont deux matrices de permutation.

Dans sa version la plus courante, l'algorithme ne considère que des permutations de lignes : il remplace donc la matrice A par PA, où P est une matrice de permutation. Une fois choisi l'ordre dans lequel on traite les lignes, la i-ième étape de la méthode consiste à ajouter aux lignes d'indice $i+1, i+2, \dots, n$ la i-ième ligne multipliée par un certain coefficient. Cela revient à multiplier à gauche par une matrice du type suivant.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{i+1,i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_{m,i} & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit de ces matrices, pour i allant de 1 à m est la matrice ci-dessous.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ \lambda_{2,1} & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \lambda_{i+1,i} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & 1 & 0 \\ \lambda_{m,1} & \cdots & \lambda_{m,i} & \cdots & \lambda_{m,m-1} & 1 \end{pmatrix}$$

Son inverse est encore une matrice du même type : trianglaire inférieure avec des 1 sur la diagonale. On la note L (pour "lower triangular"). Le produit $L^{-1}PA$ est une matrice triangulaire supérieure, que l'on note U pour "upper triangular" : U est la *forme échelonnée* de A.

$$L^{-1}PA = U \iff PA = LU\,.$$

La décomposition LU de la matrice A est la donnée des trois matrices P, L, U telles que $PA = LU$.

Si on doit résoudre le système $AX = B$, on le transformera en deux systèmes triangulaires, un de matrice L, l'autre de matrice U.

$$AX = B \iff PAX = PB \iff LUX = PB \iff \begin{cases} LY = PB \\ UX = Y \end{cases}$$

Il arrive fréquemment que l'on ait à résoudre successivement de nombreux systèmes linaires ayant tous la même matrice A, mais des seconds membres différents. Calculer au préalable la décomposition LU de A réduit de beaucoup le temps de calcul. Pour certaines matrices qui reviennent souvent dans les calculs, la décomposition LU figure dans les bibliothèques de codes, et elle est chargée en mémoire avant le début du calcul.

Applications à la géométrie

Emmanuel Peyre

Cours

5.1. Exemples d'applications linéaires

5.1.1. *Supplémentaires.* — Pour définir les projections et les symétries, nous allons utiliser la notion de supplémentaire.

Proposition et définition 5.1

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est la *somme directe de* F_1 *et* F_2 si et seulement s'il vérifie une des trois conditions équivalentes suivantes :

(i) L'application linéaire $\varphi : F_1 \oplus F_2 \to E$ donnée par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \mapsto \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est bijective ;

(ii) Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, il existe un *unique* couple de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

(iii) On a les égalités $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Par abus de langage, on écrit alors $E = F_1 \oplus F_2$.

Démonstration. — L'équivalence entre les deux premières conditions résulte de la définition d'une bijection et de celle de la somme directe externe (exemple 2.7 ii)).

Supposons que la condition (ii) est vérifiée. L'existence prouve que $E = F_1 + F_2$. Soit $\vec{u} \in F_1 \cap F_2$. La relation $\vec{u} + (-\vec{u}) = 0 + 0$ et l'unicité prouve que $\vec{u} = 0$, ce qui démontre (iii).

Supposons maintenant (iii). Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Comme $E = F_1 + F_2$, il existe un couple $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in F_1 \times F_2$ tel que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$. Il nous reste à démontrer l'unicité. Supposons que le couple $(\vec{u}'_1, \vec{u}'_2)$ convienne également. Alors $\vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u}'_1 + \vec{u}'_2$ ce qui implique la relation

$$\vec{u}_1 - \vec{u}'_1 = \vec{u}'_2 - \vec{u}_2$$

Mais ces différences de vecteurs appartiennent alors à $F_1 \cap F_2$ qui est réduit à $\{0\}$ par hypothèse. Donc $\vec{u}_1 = \vec{u}'_1$ et $\vec{u}_2 = \vec{u}'_2$. □

Proposition 5.2

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace vectoriel E est la somme directe de F_1 et de F_2 ;

(ii) On a les relations $E = F_1 + F_2$ et $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$;

(iii) On a les relations $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $\dim(E) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

Démonstration. — Cela résulte de la proposition précédente et du corollaire 3.16. □

Définition 5.3

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace de E. Un *supplémentaire de F dans E* est un sous-espace vectoriel F' tel que E soit la somme directe de F et de F'.

On ne confondra pas supplémentaire et complémentaire. Le complémentaire, au sens ensembliste, d'un sous-espace vectoriel ne contient pas 0, ce n'est donc jamais un sous-espace vectoriel et donc n'est jamais un supplémentaire.

Proposition 5.4

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Alors il admet un supplémentaire F'.

En général, il n'y a pas d'unicité du supplémentaire. Par exemple dans un espace vectoriel de dimension 2, si on prend pour D une droite vectorielle, toute droite vectorielle D' distincte de D est un supplémentaire de D : en effet $D \cap D' = \{0\}$ et la somme des dimensions des droites vaut 2.

Démonstration. — Soit $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ une base de F. C'est une famille libre de E. On la complète en une base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de E. Notons F' le sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs $\vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n$. Démontrons que c'est un supplémentaire de F.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de E de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Alors

$$\vec{u} = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{e}_i\right) + \left(\sum_{i=m+1}^{n} x_i \vec{e}_i\right)$$

ce qui prouve que $\vec{u} \in F + F'$.

Soit $\vec{u} \in F \cap F'$. Comme $\vec{u} \in F$, on peut considérer ses coordonnées $(x_1, \dots, x_m)$ dans la base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$. Comme le vecteur $\vec{u}$ appartient également à F', par définition de celui-ci, il existe des nombres réels $x_{m+1}, \dots, x_n$ tels que $\vec{u} = \sum_{i=m+1}^{n} x_i \vec{e}_i$. Donc

$$\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{e}_i\right) - \left(\sum_{i=m+1}^{n} x_i \vec{e}_i\right) = 0.$$

Comme la famille $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est libre, on en déduit que $x_i = 0$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$ et donc le vecteur $\vec{u}$ est nul. □

5.1.2. *Projection et symétries.* — La notion d'espaces supplémentaires nous permet de définir deux types d'applications linéaires.

Proposition et définition 5.5

Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel. Une *projection* de E est une application linéaire $p : E \to E$ qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) L'application p vérifie la relation $p \circ p = p$.

(ii) Soient $P = \mathrm{Im}(p)$ et $Q = \mathrm{Ker}(p)$. L'espace vectoriel E est la somme directe des sous-espaces P et Q et l'application p est caractérisée par les relations

$$p(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}$$

pour tout $\vec{u} \in P$ et tout $\vec{v} \in Q$.

Si p vérifie la condition (ii), on dit que p est *la projection* sur P parallèlement à Q.

Démonstration. — Démontrons d'abord l'implication (i) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que $p \circ p = p$. Posons $P = \mathrm{Im}(p)$ et $Q = \ker(p)$. Soit $\vec{u} \in E$. Notons $\vec{u}_1 = p(\vec{u})$ et $\vec{u}_2 = \vec{u} - \vec{u}_1 = \vec{u} - p(\vec{u})$. Alors $p(\vec{u}_2) = p(\vec{u}) - p \circ p(\vec{u}) = 0$ ce qui donne $\vec{u}_1 \in P$ et $\vec{u}_2 \in Q$. Le théorème du rang fournit l'égalité

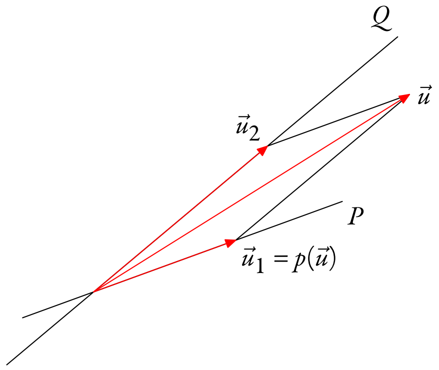


FIGURE 5. Projection sur un sous-espace

$\dim(P) + \dim(Q) = \dim(E)$. Donc par la proposition 5.2, l'espace E est la somme directe de P et Q. En outre, si $\vec{u} \in P$ et $\vec{v} \in Q$, alors il existe $\vec{w} \in E$ tel que $\vec{u} = p(\vec{w})$ et

$$p(\vec{u} + \vec{v}) = p(\vec{u}) + p(\vec{v}) = p(p(\vec{w})) = p(\vec{w}) = \vec{u}.$$

Ce qui complète la preuve de l'assertion (ii).

Réciproquement, supposons la condition (ii) vérifiée, Soit $\vec{u} \in E$. Comme E est la somme directe de P et Q, on peut écrire $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in P$ et $\vec{u}_2 \in Q$. Alors

$$p(p(\vec{u})) = p(p(\vec{u}_1 + \vec{u}_2)) = p(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 = p(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = p(\vec{u}),$$

ce qui prouve (i). □

Remarque 5.6. — Notons que pour une projection p, l'image de p, c'est-à-dire Q avec les notations de la définition est l'ensemble des vecteurs $\vec{u} \in E$ tels que $p(\vec{u}) = \vec{u}$. Donc $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$.

Proposition et définition 5.7

Soit E un $\mathbf{R}$ espace vectoriel. Une *symétrie* de E est une application linéaire $s : E \to E$ qui vérifie les conditions équivalentes suivantes :

(i) L'application s vérifie la relation $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

(ii) Soit $P = \{\vec{u} \in E \mid s(\vec{u}) = \vec{u}\}$ et $Q = \{\vec{u} \in E \mid s(\vec{u}) = -\vec{u}\}$. L'espace vectoriel E est la somme directe des sous-espace P et Q.

Si s vérifie la condition (ii), on dit que s est *la symétrie par rapport au sous-espace P parallèlement au sous-espace Q*

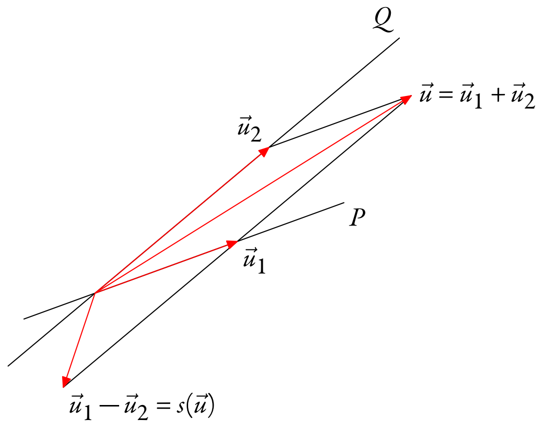


FIGURE 6. Symétrie par rapport à un sous-espace

Démonstration. — Supposons la condition (i). Notons $P = \ker(\mathrm{Id}_E - s)$ et $Q = \ker(\mathrm{Id}_E + s)$. Soit $\vec{u} \in E$. Posons

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{2}\big(\vec{u} + s(\vec{u})\big) \quad \text{et} \quad \vec{u}_2 = \frac{1}{2}\big(\vec{u} - s(\vec{u})\big).$$

Alors $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ et $s(\vec{u}_1) = \frac{1}{2}(s(\vec{u}) + s \circ s(\vec{u})) = \frac{1}{2}(s(\vec{u}) + \vec{u}) = \vec{u}_1$ ce qui prouve que $\vec{u}_1 \in P$ et $s(\vec{u}_2) = \frac{1}{2}(s(\vec{u}) - s \circ s(\vec{u})) = \frac{1}{2}(s(\vec{u}) - \vec{u}) = -\vec{u}_2$, ce qui démontre que $\vec{u}_2 \in Q$. Donc $E = P + Q$. Soit $\vec{u} \in P \cap Q$. On a $\vec{u} = s(\vec{u}) = -\vec{u}$. Donc $\vec{u} = 0$, ce qui prouve que la somme est directe.

Réciproquement supposons que E est la somme directe des sous-espaces P et Q. Soit $\vec{u} \in E$. On écrit $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in P$ et $\vec{u}_2 \in Q$. On a alors les relations

$$s(\vec{u}) = s(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = s(\vec{u}_1) + s(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2.$$

Donc

$$s \circ s(\vec{u}) = s(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = s(\vec{u}_1) - s(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 = \vec{u},$$

ce qui prouve la relation $s \circ s = \mathrm{Id}_E$. □

5.1.3. *Le cas euclidien.* — On se place ici dans un **R**-espace vectoriel euclidien E. On rappelle que cela signifie que E est muni d'un produit scalaire.

Définition 5.8

Soit X une partie de E. L'orthogonal de X est l'ensemble
$$X^\perp = \{\vec{v} \in E \mid \forall \vec{u} \in X,\ \vec{u}\cdot\vec{v} = 0\}.$$

Il vérifie les propriétés suivantes :

Proposition 5.9

Pour toute partie X de E, l'ensemble $X^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. — Comme $0\cdot\vec{u} = 0$ pour tout $\vec{u} \in E$, le vecteur nul appartient à $X^\perp$. Soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des vecteurs de $X^\perp$. Soit $\vec{u} \in X$. Par définition, on a les égalités :
$$\vec{u}\cdot(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = \vec{u}\cdot\vec{v}_1 + \vec{u}\cdot\vec{v}_2 = 0 + 0 = 0$$
ce qui prouve que $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in X^\perp$. Enfin si $\vec{v} \in X^\perp$ et $\lambda \in \mathbf{R}$, alors pour tout $\vec{u} \in X$, on a $\vec{u}\cdot(\lambda\vec{v}) = \lambda\vec{u}\cdot\vec{v}$ ce qui prouve que $\lambda\vec{v} \in X^\perp$. □

Proposition 5.10

Supposons E de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

a) L'ensemble $F^\perp$ est un supplémentaire de F, on peut écrire $E = F \oplus F^\perp$;

b) On a l'égalité $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration. — On suppose maintenant que E est de dimension finie et que F est un sous-espace vectoriel de E. Considérons l'application s de E dans le dual F^* de F qui, à un vecteur $\vec{u}$ associe la forme linéaire $\vec{v} \mapsto \vec{u}\cdot\vec{v}$. Cette application est linéaire et sa restriction à F est injective puisque le produit scalaire est défini positif. Comme $\dim(F^*) = \dim(F)$, l'application linéaire s est surjective. Par le théorème du rang $\dim(F^\perp) = \dim(\ker(s)) = \dim(E) - \dim(F)$. Or $F \cap F^\perp = \{0\}$, donc $F^\perp$ est un supplémentaire de F. Par définition, on a l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ Mais $\dim((F^\perp)^\perp) = \dim(E) - \dim(F^\perp) = \dim(F)$. Donc $F = (F^\perp)^\perp$. □

Définition 5.11

La *projection orthogonale sur F* est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$. La *symétrie orthogonale par rapport à F* est la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^{\perp}$.

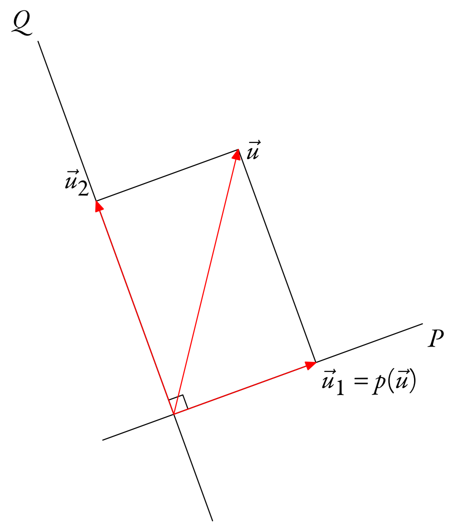


FIGURE 7. Projection orthogonale

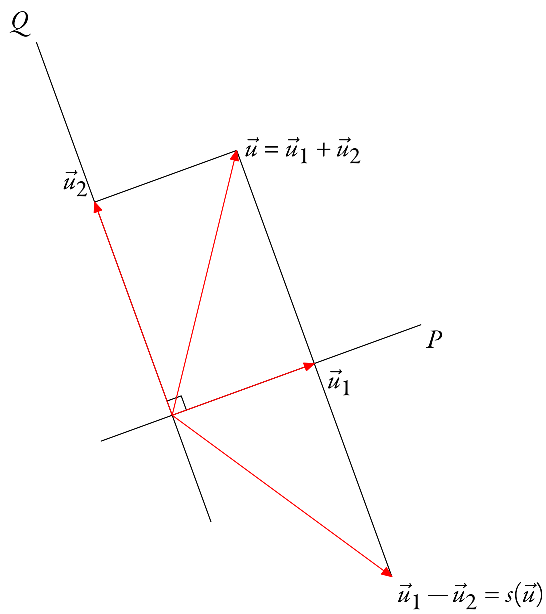


FIGURE 8. Symétrie orthogonale

5.1.4. *Rotations.* — Dans ce paragraphe, on désigne par E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel euclidien orienté.

Lorsque E est de dimension 2, la rotation d'angle θ de E est une l'application linéaire ρ_θ dont la matrice est donnée par

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

dans une base orthonormée directe de E. On laisse au lecteur le soin de vérifier en exercice que, dans ce cas, la matrice de φ ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie.

D'un point de vue plus géométrique, l'image d'un vecteur non nul $\vec{u}$ est l'unique vecteur $\vec{v}$ tel que $||\vec{v}|| = ||\vec{u}||$ et la mesure de l'angle *orienté* de vecteurs $\widehat{\vec{u}, \vec{v}}$ est θ, comme cela est montré dans la figure 9

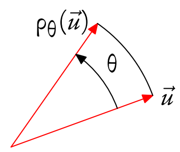


FIGURE 9. Rotation vectorielle

En particulier, on peut appliquer cela à l'ensemble des nombres complexes **C**, que l'on considère comme un **R**-espace vectoriel, muni de sa base $(1, i)$, et de la structure euclidienne définie par le module. Dans ce cas, la rotation d'angle θ correspond à la multiplication par $e^{i\theta}$.

Remarques 5.12. — i) On notera que la composée de deux rotations ρ_θ et $\rho_{\theta'}$ est la rotation $\rho_{\theta+\theta'}$, d'angle $\theta+\theta'$. La rotation d'angle 0 est l'application identité.

ii) L'ensemble des rotations d'un plan vectoriel euclidien forme un groupe, pour la composition des applications.

En dimension 3, une *rotation* est un endomorphisme φ pour lequel il existe une base orthonormée directe $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de E dans laquelle la matrice de φ est

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On notera que dans ce cas $\ker(\varphi - \mathrm{Id}_E)$ est la droite vectorielle Δ engendrée par le troisième vecteur de base. Pour déterminer une rotation dans un espace vectoriel de dimension trois, il faut donc se donner non seulement l'angle mais également un vecteur de norme 1, qui est le troisième vecteur d'une base dans laquelle la matrice a la forme ci-dessus. On dit que φ est *la rotation d'angle θ et d'axe la droite Δ orientée par le vecteur $\vec{k}$.*

5.1.5. *Isométries vectorielles.* — Les symétries orthogonales et les rotations sont des cas particuliers d'isométrie vectorielles : celles-ci sont définies comme les applications linéaires qui préservent les longueurs.

Proposition et définition 5.13

Soit E un espace vectoriel euclidien. Une *isométrie vectorielle de E* est un endomorphisme φ de E qui vérifie une des conditions équivalentes suivantes :

(i) L'application φ préserve la norme :
$$\forall \vec{u} \in E, \quad ||\varphi(\vec{u})|| = ||\vec{u}||;$$

(ii) L'application φ préserve le produit scalaire :
$$\forall \vec{u}, \vec{v} \in E, \quad \varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Démonstration. — Démontrons tout d'abord que l'assertion (i) implique l'assertion (ii). On suppose donc que φ préserve la norme. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs de E. Alors
$$\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{v}) = \frac{||\varphi(\vec{u}+\vec{v})||^2 - ||\varphi(\vec{u})||^2 - ||\varphi(\vec{v})||^2}{2} = \frac{||\vec{u}+\vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2}{2} = \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

Démontrons la réciproque. Supposons que φ préserve le produit scalaire. Alors pour tout $\vec{u} \in E$, on a les égalités
$$||\varphi(\vec{u})|| = \sqrt{\varphi(\vec{u}) \cdot \varphi(\vec{u})} = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = ||\vec{u}||.$$
□

Vérifions maintenant que les exemples précédents sont des isométries.

Exemples 5.14. — i) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à un sous-espace F. Soit $\vec{u} \in E$. Par la proposition 5.10, on peut écrire $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in F$ et $\vec{u}_2 \in F^{\perp}$. Par définition de l'orthogonal $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$. Donc
$$\begin{aligned} ||s(\vec{u})||^2 = s(\vec{u}) \cdot (\vec{u}) = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) &= \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 - 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 \\ &= \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + 2\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 + \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2. \end{aligned}$$
Comme la norme est positive, il en résulte que $||s(\vec{u})|| = ||u||$.

ii) Considérons maintenant le cas des rotations. Commençons par le cas de la rotation r_θ d'angle θ dans le plan euclidien : Dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j})$, un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées (x, y) a pour image le vecteur de coordonnées $(\cos(\theta)x - \sin(\theta)y, \sin(\theta)x + \cos(\theta)y)$ dont la norme vérifie
$$\begin{aligned} ||r_\theta(\vec{u})||^2 &= (\cos(\theta)x - \sin(\theta)y)^2 + (\sin(\theta)x + \cos(\theta)y)^2 \\ &= (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)x^2 + (\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2)y^2 = x^2 + y^2 = ||\vec{u}||^2. \end{aligned}$$
Ceci prouve que r_θ est une isométrie.

En général, soit r une rotation dans un espace euclidien E. Par construction, il existe alors un plan vectoriel P dans E qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) Le plan P est *stable* par r : $r(P) \subset P$, et l'application de P dans P donnée par $\vec{u} \mapsto r(\vec{u})$ est une rotation du plan P ;

(ii) L'orthogonal de P est *fixé* par r :

$$\forall \vec{u} \in P^{\perp}, \quad r(\vec{u}) = \vec{u}.$$

Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque de E, on peut l'écrire $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in P$ et $\vec{u}_2 \in P^{\perp}$. Alors

$$||r(\vec{u})||^2 = r(\vec{u}) \cdot r(\vec{u}) = (r(\vec{u}_1) + r(\vec{u}_2)) \cdot (r(\vec{u}_1) + r(\vec{u}_2)) = (r(\vec{u}_1) + \vec{u}_2) \cdot (r(\vec{u}_1) + \vec{u}_2)$$

Mais comme $r(P) \subset P$, on a que $r(\vec{u}_1) \cdot \vec{u}_2 = 0$ Donc on obtient les égalités :

$$||r(\vec{u})||^2 = r(\vec{u}_1) \cdot r(\vec{u}_1) + \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2 = (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) \cdot (\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = \vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$$

ce qui prouve que la rotation r est bien une isométrie.

5.2. Compléments sur les espaces affines. — Vous manipulez les espaces affines depuis vos études secondaires et leur étude est reprise en MAT101, nous allons maintenant en donner une définition rigoureuse.

Définition 5.15

Un *espace affine réel* est un ensemble $\mathscr{E}$ muni d'un $\mathbf{R}$-espace vectoriel que l'on note $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ et d'une loi externe

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{E} \times \overrightarrow{\mathscr{E}} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ (A, \vec{u}) & \longmapsto & A + \overrightarrow{u} \end{array}$$

de sorte que :

(EA1) L'ensemble $\mathscr{E}$ n'est pas vide ;

(EA2) (Associativité)

$$\forall A \in \mathscr{E}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}, \quad (A + \vec{u}) + \vec{v} = A + (\vec{u} + \vec{v});$$

(EA3) Pour tout couple $(A, B) \in \mathscr{E}^2$ il existe un unique vecteur $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ tel que $B = A + \vec{u}$. Cet unique vecteur est noté $\overrightarrow{AB}$.

***Remarque 5.16.* —** Soient A, B et C des points d'un espace affine réel $\mathscr{E}$. Les relations

$$A + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = (A + \overrightarrow{AB}) + \overrightarrow{BC} = B + \overrightarrow{BC} = C$$

impliquent *la relation de Chasles* :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.$$

Exemple 5.17. — Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On peut alors munir $\mathscr{E} = E$ d'une structure d'espace affine réel d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathscr{E}} = E$ en utilisant l'addition des vecteurs comme loi :

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{E} \times \overrightarrow{\mathscr{E}} & \longrightarrow & \mathscr{E} \\ (A, \vec{u}) & \longmapsto & A + \overrightarrow{u} \end{array}$$

Dans ce cas, pour tous $A, B \in \mathscr{E}$, l'unique vecteur $\vec{u}$ tel que $A + \vec{u} = B$ est la différence $B - A$; on peut donc écrire dans ce cas $\overrightarrow{AB} = B - A$.

Définition 5.18

Un espace affine réel est dit *de dimension finie* si son espace vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ est de dimension finie.

Si $\mathscr{E}$ est un espace affine réel de dimension finie, sa *dimension* est celle de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Une *droite* (resp. un *plan*) *affine* est un espace affine de dimension 1 (resp. 2).

Définition 5.19

Si $\mathscr{E}$ est un espace affine réel de dimension finie, un *repère affine* de $\mathscr{E}$ est la donnée d'un $n+1$-uplet $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ où O est un point de $\mathscr{E}$ et $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est une base de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$.

Étant donné un repère affine $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ les *coordonnées* d'un point $M \in \mathscr{E}$ dans ce repère affine sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$.

Remarque 5.20. — Les coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ d'un point M sont donc caractérisées par la relation

$$M = O + \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i.$$

5.3. Sous-espace affine. — Un sous-espace affine est une partie d'un espace affine qui peut elle-même être munie d'une structure d'espace affine.

Définition 5.21

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine réel, d'espace vectoriel associé $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Alors un *sous-espace affine* de $\mathscr{E}$ est une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ telle qu'il existe $A \in \mathscr{E}$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ de sorte que

$$\mathscr{F} = \{A + \vec{u}, \quad \vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}\}.$$

Alors l'application $\mathscr{F} \times \overrightarrow{\mathscr{F}}$ donnée par $(M, \vec{u}) \mapsto M + \vec{u}$ muni $\mathscr{F}$ d'une structure d'espace affine. Le sous-espace $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ vérifie

$$\overrightarrow{\mathscr{F}} = \{\overrightarrow{AB}, \quad A, B \in \mathscr{F}\}$$

et s'appelle la *direction* de $\mathscr{F}$.

Démonstration. — Vérifions tout d'abord que si $M \in \mathscr{F}$ et si $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$, alors $M + \vec{u} \in \mathscr{F}$. Par définition, comme $M \in \mathscr{F}$, il existe $\vec{v} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$ tel que $M = A + \vec{v}$. Donc $M + \vec{u} = A + (\vec{v} + \vec{u})$. Mais comme $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$, la somme $\vec{u} + \vec{v}$ appartient à $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ ce qui prouve que $M + \vec{u} \in \mathscr{F}$.

D'autre part $A = A + 0 \in \mathscr{F}$ ce qui prouve que $\mathscr{F}$ n'est pas vide. L'associativité pour $\mathscr{F}$ résulte de celle de $\mathscr{E}$. Enfin soient M et N des points de $\mathscr{F}$. Par la relation de Chasles $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$ ce qui prouve que $\mathscr{F}$ vérifie la condition **(EA3)**. □

***Exemples 5.22.* —** i) Soit $\mathscr{E}$ un espace affine réel. Alors $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, le singleton $\{M\}$ est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$, dont la direction est les sous-espace vectoriel $\{0\}$.

ii) Si F est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ et A un point de $\mathscr{E}$ alors, par définition, l'ensemble

$$A + F = \{A + \vec{u}, \vec{u} \in F\}$$

est un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F. On l'appelle *le sous-espace affine de direction P passant par A* Notons que pour tout sous espace affine $\mathscr{F}$ de $\mathscr{E}$ et tout point M de $\mathscr{F}$, on peut écrire $\mathscr{F} = M + \overrightarrow{\mathscr{F}}$.

Proposition 5.23

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine réel. Soit I un ensemble et soit $(\mathscr{F}_i)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces affines de $\mathscr{E}$. Alors leur intersection, définie comme :

$$\bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i = \{M \in \mathscr{E} \mid \forall i \in I,\ M \in \mathscr{F}_i\}$$

est *soit vide* soit un sous-espace affine de direction $\bigcap_{i\in I} \overrightarrow{\mathscr{F}}_i$.

On prendra garde au fait qu'en général, l'intersection de sous-espaces affines peut-être vide. L'exemple le plus simple est l'intersection de deux singletons $\{A\}$ et $\{B\}$ avec $A \neq B$. On peut également penser à l'intersection de deux droites parallèles, ou de trois droites sans point d'intersection commun.

Démonstration. — Supposons que cette intersection est non vide. Soit A un point de cette intersection. On pose $\mathscr{F} = \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{\mathscr{F}}_i$ et $\overrightarrow{\mathscr{F}} = \bigcap_{i\in I} \overrightarrow{\mathscr{F}}_i$. Nous allons démontrer l'égalité

$$\mathscr{F} = \{A + \vec{u},\ \vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}\}.$$

Démontrons d'abord l'inclusion $\subset$. Soit M un point de $\mathscr{F}$. Par définition de l'intersection $A \in \mathscr{F}_i$ et $M \in \mathscr{F}_i$ pour tout $i \in I$. Donc le vecteur $\overrightarrow{AM}$ appartient à $\overrightarrow{\mathscr{F}}_i$, pour tout $i \in I$. Il en résulte que $\overrightarrow{AM} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$ et donc $M = A + \vec{u}$ avec $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$.

Démontrons maintenant l'inclusion inverse. Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$. Alors $\vec{u}$ appartient à $\overrightarrow{\mathscr{F}_i}$ pour tout $i \in I$. Or $A \in \bigcap_{i\in I} \mathscr{F}_i$. Par conséquent $A + \vec{u}$ appartient à $\mathscr{F}_i$ pour tout $i \in I$, ce qui prouve que $A + \vec{u} \in \mathscr{F}$. □

5.4. Applications affines

Les applications qui sont compatibles avec la structure des espaces affines jouent un rôle central en géométrie.

Définition 5.24

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des espaces affines. Une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ est application $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ vérifiant une des conditions équivalentes suivantes :

(i) Il existe une application linéaire $\overrightarrow{\varphi} : \overrightarrow{\mathscr{E}} \to \overrightarrow{\mathscr{F}}$ telle que

$$\forall A, B \in \mathscr{E}, \quad \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right);$$

(ii) Il existe un point O de $\mathscr{E}$ tel que l'application $\overrightarrow{\varphi}$ de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ dans $\overrightarrow{\mathscr{F}}$ définie par

$$\vec{u} \mapsto \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(O+\vec{u})}$$

est linéaire

Si la condition (ii) est vérifiée, l'application $\overrightarrow{\varphi}$ ne dépend pas du point O et satisfait la condition (i). On l'appelle *l'application linéaire associée à* φ.

Démonstration. — Supposons la condition (i) vérifiée. Soit O un point quelconque de $\mathscr{E}$. Nous allons vérifier la condition (ii) pour ce point. Pour cela, soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ et calculons

$$\overrightarrow{\varphi(O)\varphi(O+\vec{u})} = \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{O(O+\vec{u})}\right) = \overrightarrow{\varphi}(\vec{u})$$

Ce qui prouve que l'application définie pour le point O dans l'assertion (ii) est l'application linéaire $\overrightarrow{\varphi}$ de la condition (i).

Réciproquement, supposons la condition (ii) vérifiée pour un point O. Soient A et B des points de $\mathscr{E}$. On a les relations

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} &= \overrightarrow{\varphi(A)\varphi(O)} + \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(B)} = \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(B)} - \overrightarrow{\varphi(O)\varphi(A)} = \\ &\overrightarrow{\varphi(O)\varphi\left(O+\overrightarrow{OB}\right)} - \overrightarrow{\varphi(O)\varphi\left(O+\overrightarrow{OA}\right)} = \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{OB}\right) - \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)\end{aligned}$$

ce qui prouve que l'application linéaire $\vec{\varphi}$ vérifie la condition (i). □

Exemples 5.25. — i) Soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$. L'application $t_{\vec{u}} : A \mapsto A + \vec{u}$ est une application affine, appelée *translation de vecteur* $\vec{u}$. L'application linéaire associée est l'application $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$. En effet,

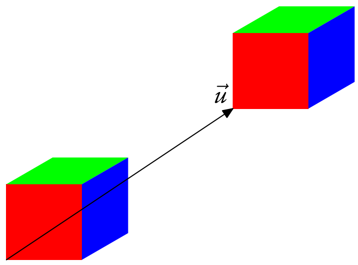


FIGURE 10. Translation

soit $A, B \in \mathscr{E}$ Alors

$$t_{\vec{u}}(B) = B + \vec{u} = A + \overrightarrow{AB} + \vec{u} = A + \vec{u} + \overrightarrow{AB} = t_{\vec{u}}(A) + \overrightarrow{AB}.$$

Donc $\overrightarrow{t_{\vec{u}}(A)t_{\vec{u}}(B)} = \overrightarrow{AB}$.

Inversement toute application affine $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ dont l'application linéaire associée est l'application identité est une translation. Pour démontrer cela, soit A un point de $\mathscr{E}$. Notons $\vec{u} = \overrightarrow{A\varphi(A)}$. Soit $B \in \mathscr{E}$. On a la relation $\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)} = \overrightarrow{AB}$ Donc

$$\varphi(B) = \varphi(A) + \overrightarrow{AB} = A + \vec{u} + \overrightarrow{AB} = A + \overrightarrow{AB} + \vec{u} = B + \vec{u}.$$

Proposition 5.26

La composée d'applications affines ψ et φ est une application affine et vérifie la relation :

$$\overrightarrow{\psi \circ \varphi} = \vec{\psi} \circ \vec{\varphi}.$$

Démonstration. — Soient $A, B \in \mathscr{E}$, le résulte découle des égalités :

$$\overrightarrow{\psi\circ\varphi(A)\psi\circ\varphi(B)} = \overrightarrow{\psi(\varphi(A))\psi(\varphi(B))} = \vec{\psi}\left(\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\right) = \vec{\psi}\left(\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right) = \vec{\psi}\circ\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right). \qquad \square$$

Remarque 5.27. — Exprimons cela en termes de coordonnées. Supposons donc que $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ sont des espaces affines de dimension finie et munissons $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$) d'un repère $(O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ (resp. $\left(O_{\mathscr{F}}, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n\right)$). Toutes les coordonnées seront considérées dans ces repères. Soit φ une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$. Par définition on a la relation

$$\varphi(M) = \varphi(O_{\mathscr{E}}) + \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{O_{\mathscr{E}}M}\right) \tag{21}$$

pour tout $M \in \mathscr{E}$. Notons $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ la matrice de l'application $\overrightarrow{\varphi}$ dans les bases $(\overrightarrow{e}_1, \dots, \overrightarrow{e}_m)$ et $(\overrightarrow{f}_1, \dots, \overrightarrow{f}_n)$. Notons $(b_1, \dots, b_n)$ les coordonnées de $\varphi(O_{\mathscr{E}})$. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et soit $(x_1, \dots, x_m)$ ses coordonnées. Par définition des coordonnées, on a la relation

$$\overrightarrow{O_{\mathscr{E}}M} = \sum_{i=1}^{m} x_i \vec{e}_i.$$

En combinant cela avec la relation (21) On obtient

$$\varphi(M) = \varphi(O_{\mathscr{E}}) + \sum_{i=1}^{m} x_i \overrightarrow{\varphi}(\vec{e}_i).$$

En reprenant les coordonnées de $\varphi(O_{\mathscr{E}})$ et celles de $\overrightarrow{\varphi}(\vec{e}_i)$ qui sont données par les colonnes de la matrice de $\overrightarrow{\varphi}$, on obtient

$$\begin{aligned}\varphi(M) &= O_{\mathscr{F}} + \left(\sum_{j=1}^{n} b_j \vec{f}_j\right) + \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \vec{f}_j\right) \\ &= O_{\mathscr{F}} + \sum_{j=1}^{n}\left(b_j + \sum_{i=1}^{m} a_{j,i} x_i\right)\overrightarrow{f}_j\end{aligned}$$

Donc les coordonnées $(y_1, \ldots, y_n)$ de $\varphi(M)$ sont données par

$$y_i = a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \cdots + a_{i,m}x_m + b_i$$

pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. On remarquera qu'on peut exprimer ces relations sous formes matricielles de la façon suivante :

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,m} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n,m} & b_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ce point de vue matriciel est exploré avec plus de détails dans le problème 5.1 et dans les compléments qui suivent ce chapitre. Ce type de calcul matriciel est très utilisé en synthèse d'image et implémenté dans les cartes graphiques des ordinateurs actuels.

Définition 5.28

Une forme affine est une application affine d'un espace affine réel $\mathscr{E}$ dans $\mathbf{R}$.

Remarque 5.29. — Si on munit l'espace $\mathscr{E}$ d'un repère $(O, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, alors pour tout $(a_1, \ldots, a_n, b) \in \mathbf{R}^{n+1}$, on peut considérer l'application $f : \mathscr{E} \to \mathbf{R}$ qui applique un point de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ sur le nombre

$$a_1x_1 + \ldots a_nx_n + b.$$

Cette application est une forme affine. Inversement, il résulte de la remarque 5.27 que toute forme affine est obtenue de cette façon.

5.5. Applications affines et sous-espaces affines

Proposition 5.30

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des espaces affines et soit $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. Soit $P \in \mathscr{F}$ alors $\varphi^{-1}(\{P\})$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\ker(\vec{\varphi})$.

Démonstration. — On a que $\varphi^{-1}(\{P\}) \neq \emptyset$ si et seulement si le point P appartient à l'image de φ. On se place donc dans ce cas. Soit $A \in \mathscr{E}$ tel que $\varphi(A) = P$ et prouvons l'égalité (*cf.* l'exempleexem :sousespaff)

$$\varphi^{-1}(\{P\}) = A + \ker(\vec{\varphi}).$$

Soit $M \in \varphi^{-1}(\{P\})$ alors $\varphi(M) = P = \varphi(A)$. Donc $\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{PP} = 0$ et $\overrightarrow{AM} \in \ker(\vec{\varphi})$.

Inversement si $\vec{u} \in \ker(\vec{\varphi})$, alors $\varphi(A+\vec{u}) = \varphi(A)+\vec{\varphi}(\vec{u}) = P+\overrightarrow{0} = P$. donc $A+\vec{u} \in \varphi^{-1}(P)$. □

Remarque 5.31. — Soit $\mathscr{E}$ un espace affine muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Compte tenu de la remarque 5.27, on déduit de la proposition précédente que l'ensemble $\mathscr{F}$ des points de $\mathscr{E}$ dont les coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ sont les solutions d'un système d'équations linéaires

$$\begin{cases} a_{1,1}X_1 + \dots + a_{1,n}X_n = b_1 \\ a_{2,1}X_1 + \dots + a_{2,n}X_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m,1}X_1 + \dots + a_{m,n}X_n = b_m \end{cases}$$

est soit vide, soit un sous-espace affine de direction l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ dont les coordonnées sont les solutions du système sans second membre

$$\begin{cases} a_{1,1}X_1 + \dots + a_{1,n}X_n = 0 \\ a_{2,1}X_1 + \dots + a_{2,n}X_n = 0 \\ \dots \\ a_{m,1}X_1 + \dots + a_{m,n}X_n = 0 \end{cases}$$

La dimension de $\mathscr{F}$ est alors $n - c$ où c est le rang du système d'équations linéaires.

Définition 5.32

Un *hyperplan affine* d'un espace affine réel $\mathscr{E}$ est un sous-espace affine de la forme $\varphi^{-1}(\{0\})$ où $\varphi : \mathscr{E} \to \mathbf{R}$ est une forme affine *non constante*.

Remarque 5.33. — Dans un espace affine de dimension n, les hyperplans affines sont les sous-espaces affines de dimension $n-1$.

5.6. Exemples d'applications affines, isométries. — Nous allons maintenant considérer quelques exemples d'applications affines dans le cas euclidien. Rappelons que dans un espace affine euclidien, l'espace entre des points A et B est donnée par les formules

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}}.$$

5.6.1. *Projection orthogonale*

Proposition et définition 5.34

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$. Pour tout point M de $\mathscr{E}$, il existe un unique point H de $\mathscr{F}$ tel que $\overrightarrow{MH} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}^{\perp}$. Ce point est appelé *le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$*.

L'application qui à un point M de $\mathscr{E}$ associe son projeté orthogonal sur $\mathscr{F}$ est affine et s'appelle la *projection orthogonale sur $\mathscr{F}$*.

Démonstration. — Notons A un point de $\mathscr{F}$.

Analyse. Supposons qu'un point $H \in \mathscr{F}$ vérifie la condition $\overrightarrow{HM} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}^{\perp}$. Comme $\overrightarrow{AH} \in \mathscr{F}$ et que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, on obtient que $\overrightarrow{AH}$ est le projeté orthogonal du vecteur $\overrightarrow{AM}$ sur $\overrightarrow{\mathscr{F}}$. Or $H = A + \overrightarrow{AH}$ donc cela prouve l'unicité de H.

Synthèse. Soit $M \in \mathscr{E}$. Notons $\vec{u}$ le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AM}$ sur $\mathscr{F}$ et posons $H = A + \vec{u}$. Par construction, $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{AM} - \vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{F}}^{\perp}$, ce qui prouve l'existence de H.

Il reste à démontrer que la projection orthogonale p est une application affine. Mais il résulte de ce qui précède que pour tout point $M \in \mathscr{E}$, le vecteur $\overrightarrow{p(A)p(M)} = \overrightarrow{Ap(M)}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AM}$ sur $\overrightarrow{\mathscr{F}}$. Donc p est affine et l'application vectorielle associée est la projection orthogonale sur $\overrightarrow{\mathscr{F}}$. □

Proposition 5.35

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine d'un espace affine euclidien $\mathscr{E}$ et soit $M \in \mathscr{E}$. Notons H le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$. Alors pour tout point N de $\mathscr{F}$, on a l'inégalité

$$MH \leqslant MN.$$

Démonstration. — Écrivons $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NH} + \overrightarrow{HM}$. Alors $\overrightarrow{NH}$ est orthogonal à $\overrightarrow{HM}$, donc

$$NM^2 = NH^2 + 2\overrightarrow{NH} \cdot \overrightarrow{HM} + HM^2 = NH^2 + HM^2 \geqslant HM^2.$$

□

5.6.2. *Isométrie*

Définition 5.36

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Une *isométrie* de $\mathscr{E}$ est une application affine φ de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui *conserve les distances* ce qui signifie qu'elle vérifie la condition

$$\forall A, B \in \mathscr{E}, \quad \varphi(A)\varphi(B) = AB.$$

Proposition 5.37

Soit $\mathscr{E}$ un espace affine euclidien. Soit φ une application afine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$. Alors φ est une ismométrie si et seulement si l'application linéaire associée $\vec{\varphi}$ est une isométrie vectorielle.

Démonstration. — Si φ est une isométrie, soit $\vec{u} \in \overrightarrow{\mathscr{E}}$ et soit $A \in \mathscr{E}$. Posons $B = A + \vec{u}$. On a alors

$$||\vec{\varphi}(\vec{u})|| = \left\|\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\right\| = \varphi(A)\varphi(B) = AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = ||\vec{u}||.$$

Donc $\vec{\varphi}$ est une isométrie vectorielle.

Réciproquement, supposons que $\vec{\varphi}$ est une isométrie vectorielle. Soient $A, B \in \mathscr{E}$.

$$\varphi(A)\varphi(B) = \left\|\overrightarrow{\varphi(A)\varphi(B)}\right\| = \left\|\vec{\varphi}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = AB.$$

Donc l'application φ est une isométrie. □

5.6.3. *Translations.* — Les translations sont des examples particuliers d'isométries. En effet si τ est une translation, alors $\vec{\tau}$ est l'application identité. Donc

$$\tau(A)\tau(B) = \left\|\overrightarrow{\tau(A)\tau(B)}\right\| = \left\|\vec{\tau}\left(\overrightarrow{AB}\right)\right\| = ||\overrightarrow{AB}|| = AB.$$

5.6.4. *Symétries orthogonales*

Définition 5.38

Soit $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$. La *symétrie orhogonale* par rapport à $\mathscr{F}$ est l'application affine $s_{\mathscr{F}} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) L'application $s_{\mathscr{F}}$ fixe les points de $\mathscr{F}$:

$$\forall P \in \mathscr{F}, \quad s_{\mathscr{F}}(P) = P;$$

(ii) L'application vectorielle associée est la symétrie orthogonale par rapport à la direction de $\mathscr{F}$.

Remarques 5.39. — i) Il résulte de la proposition 5.37 et de l'exemple 5.14 i) qu'une symétrie orthogonale est une isométrie.

ii) La composée $s_{\mathscr{F}} \circ s_{\mathscr{F}}$ a pour application vectorielle l'application $\vec{s}_{\mathscr{F}} \circ \vec{s}_{\mathscr{F}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathscr{E}}}$. C'est donc une translation qui laisse fixe les points de $\mathscr{F}$. Par conséquent on obtient que

$$s_{\mathscr{F}} \circ s_{\mathscr{F}} = \mathrm{Id}_{\mathscr{E}}.$$

iii) Soit O un point de $\mathscr{F}$ et M un point de $\mathscr{E}$. Notons $M' = s_{\mathscr{F}}(M)$. Écrivons $\overrightarrow{OM} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ avec $\vec{u}_1 \in \overrightarrow{\mathscr{F}}$ et $\vec{u}_2 \in \overrightarrow{\mathscr{F}}^{\perp}$. Alors $\overrightarrow{OM'} = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$ Donc $\overrightarrow{MM'} = 2\vec{u}_2$. Cela prouve que le milieu I du segment $[MM']$ qui est caractérisé par la condition vectorielle $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IM'} = 0$ est donné par $I = O + \vec{u}_1$. C'est donc un point de $\mathscr{F}$. Comme $\overrightarrow{IM} = -\vec{u}_1 \in \overrightarrow{\mathscr{F}}^{\perp}$, le point I est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$.

On obtient ainsi une caractérisation géométrique de l'image de M par la symétrie orthogonale par rapport à $\mathscr{F}$: c'est l'unique point M' de $\mathscr{E}$ tel que le milieu de $[M, M']$ soit le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$.

5.6.5. *Rotations.* — On se place ici dans un espace affine euclidien orienté. En dimension 2 ou 3 une rotation affine est une application affine r pour laquelle il existe un point A tel que $r(A) = A$ et dont l'application vectorielle associée est une rotation. La figure 11 représente l'image d'un dodécaèdre (un polyèdre régulier à douze faces) par des applications affines qui sont obtenues en composant une rotation et une translation.

Il résulte de la proposition 5.37 et de l'exemple 5.14 ii) qu'une rotation est une isométrie.

Décrivons d'une manière plus géométrique une telle rotation. Il existe un plan vectoriel $P \subset \overrightarrow{\mathscr{E}}$ tel que $\vec{r}(P) \subset P$, l'application de P dans P donnée par $\vec{u} \mapsto \vec{r}(\vec{u})$ est une rotation d'angle θ

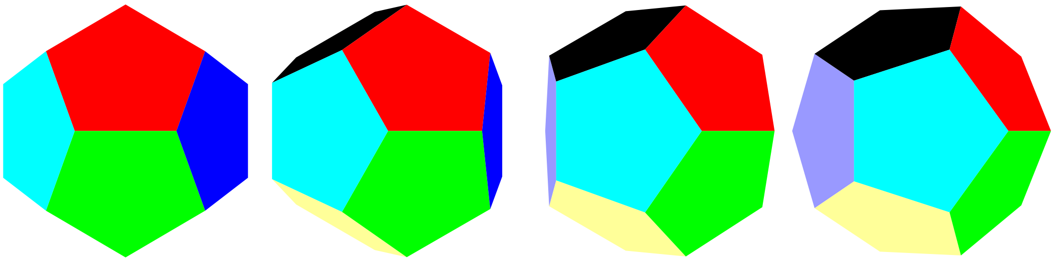


Figure 11. Rotations dans l'espace

et $P^{\perp}$ est fixé par $\vec{r}$:

$$\forall \vec{u} \in P^{\perp}, \quad \vec{r}(\vec{u}) = \vec{u}.$$

Alors posons $\mathscr{F} = A + P^{\perp} = \{A + \vec{u}, \vec{u} \in P^{\perp}\}$. Alors pour tout point $B \in \mathscr{F}$, il existe $\vec{u} \in P^{\perp}$ tel que $B = A + \vec{u}$. Donc $r(B) = r(A) + \vec{r}(\vec{u}) = A + \vec{u} = B$. Soit maintenant M un point quelconque de $\mathscr{E}$. Considérons le plan $\mathscr{P} = M + P = \{M + \vec{u}, \vec{u} \in P\}$. L'intersection de $\mathscr{P}$ avec $\mathscr{F}$ est donnée par $\mathscr{P} \cap \mathscr{F} = \{H\}$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{F}$. Comme $\overrightarrow{HM} \in P$ et $r(H) = H$, on obtient que le vecteur $\overrightarrow{Hr(M)}$ est l'image du vecteur $\overrightarrow{HM}$ par la rotation d'angle θ. Cette rotation est représentée sur la figure 12.

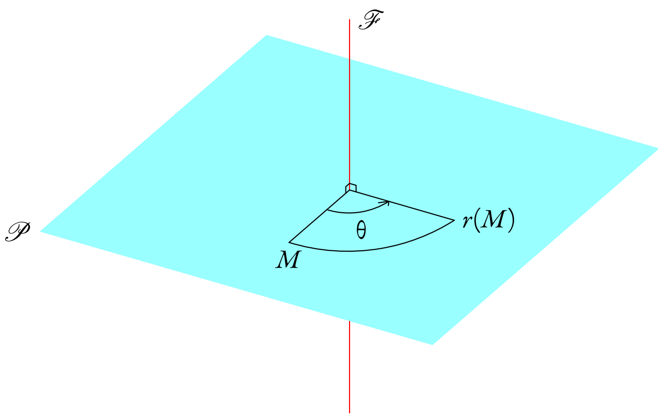


Figure 12. Rotation affine

Fiche de révision

Proposition et définition R.5.1

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. On dit que E est la *somme directe de* F_1 *et* F_2 si et seulement s'il vérifie une des trois conditions équivalentes suivantes :

(i) L'application linéaire $\varphi : F_1 \oplus F_2 \to E$ donnée par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \mapsto \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ est bijective;

(ii) Pour tout vecteur $\vec{u}$ de E, il existe un *unique* couple de vecteurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in F_1 \times F_2$ tels que $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$.

(iii) On a les égalités $E = F_1 + F_2$ et $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Par abus de langage, on écrit alors $E = F_1 \oplus F_2$.

Proposition R.5.2

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient F_1 et F_2 des sous-espaces vectoriels de E. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) L'espace vectoriel E est la somme directe de F_1 et de F_2;

(ii) On a les relations $E = F_1 + F_2$ et $\dim(F) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$;

(iii) On a les relations $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ et $\dim(F) = \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

Définition R.5.3

Soit E un $\mathbf{R}$-espace vectoriel et soit F un sous-espace de E. Un *supplémentaire de F dans E* est un sous-espace vectoriel F' tel que E soit la somme directe de F et de F'.

Entraînement

5.1. Exercices

Exercice 5.1. Certaines des transformations qui servent dans les logiciels de graphisme ou de gestion d'images sont des endomorphimes linéaires du plan $\mathbf{R}^2$. Par exemple, la rotation d'un quart de tour à droite est donnée par l'application linéaire $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (y,-x) \in \mathbf{R}^2$. Pour chaque application linéaire ci-dessous, donner la transformation géométrique correspondante.

$$(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (-x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (x/2,y/2) \in \mathbf{R}^2$$
$$(x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (2x,y) \in \mathbf{R}^2 \qquad (x,y) \in \mathbf{R}^2 \longmapsto (x+y,y) \in \mathbf{R}^2.$$

Exercice 5.2. Soit E un espace vectoriel euclidien. Soit φ une *isométrie vectorielle de E* c'est à dire un endomorphisme de E tel que

$$\forall \vec{u} \in E, \quad ||\varphi(\vec{u})|| = ||\vec{u}||.$$

1. Démontrer que la formule
$$C \cdot C' = {}^tC\,C'$$
définit un produit scalaire sur l'espace $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$ des vecteurs colonnes.
2. Soit M la matrice de $\overrightarrow{\varphi}$ dans un repére orthonormé de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$. Soient C_i la i-ème colonne de la matrice M.
   (a) Démontrer que
$$C_i \cdot C_j = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases} \tag{22}$$
   (b) Que peut-on dire de la famille $(C_1, \ldots, C_n)$ vue comme famille de vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbf{R})$?
   (c) Démontrer la formule
$${}^tM\,M = I_n$$
   Une telle matrice est dite *orthogonale*.
   (d) Que peut-on dire de la matrice $M\,{}^tM$?
   (e) Construire sur l'espace $\mathscr{M}_{1,n}(\mathbf{R})$ un produit scalaire de sorte que les lignes de M vérifie une condition analogue à celle de (22).

Problème 5.1. Représentation matricielle des applications affines.

Soient $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des espaces affines de dimensions m et n respectivement. On se donne un repère affine $\widetilde{\boldsymbol{e}} = (O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m)$ de $\mathscr{E}$ et un repère affine $\widetilde{\boldsymbol{f}} = (O_{\mathscr{F}}, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ de $\mathscr{F}$. Pour tout entier $d \in \mathbf{N}$, on note $\mathscr{H}_d$ l'hyperplan affine de $\mathbf{R}^{d+1}$ définit par l'équation $X_{n+1} = 1$. On note $\Phi_{\widetilde{e}}$ l'application de $\mathscr{H}_m$ dans $\mathscr{E}$ définie par

$$\Phi_{\widetilde{e}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 1) = O_{\mathscr{E}} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \vec{e}_k.$$

On définit de manière similaire l'application $\Phi_{\widetilde{f}}$. Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_{n+1,m+1}(\mathbf{R})$, on note Υ_A l'application linéaire de $\mathbf{R}^{m+1}$ dans $\mathbf{R}^{n+1}$ définie par A, c'est-à-dire celle dont la matrice dans les bases usuelles est A.

1. Démontrer que $\Phi_{\widetilde{e}}$ est une application affine bijective.
2. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant j \leqslant m+1}} \in \mathscr{M}_{n+1,m+1}$. Démontrer que l'inclusion

$$\Upsilon_A(\mathscr{H}_m) \subset \mathscr{H}_n$$

vaut si et seulement la dernière ligne de A est donnée par :

$$a_{m+1,k} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = n+1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Une telle matrice sera dite affine. *Si cette condition est vérifiée, on note ψ_A l'application de $\mathscr{H}_m$ dans $\mathscr{H}_n$ donnée par $M \mapsto \Upsilon_A(M)$.*

3. Soit A une matrice affine. Démontrer que ψ_A est une application affine.
4. Soit A une matrice affine. Démontrer qu'il existe une unique application $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ telle que $\varphi(\Phi_{\widetilde{e}}(M)) = \Phi_{\widetilde{f}}(\psi_A(M))$ pour tout $M \in \mathscr{H}_m$. Démontrer que φ est une application affine.
5. Inversement, on se donne une application affine $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$.
   (a) Démontrer qu'il existe une unique application $\psi : \mathscr{H}_m \to \mathscr{H}_n$ telle que $\varphi(\Phi_{\widetilde{e}}(M)) = \Phi_{\widetilde{f}}(\psi(M))$ pour tout $M \in \mathscr{H}_m$ et que cette application est affine.
   (b) Démontrer qu'il existe une unique application linéaire $\Upsilon : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ telle que $\Upsilon(M) = \psi(M)$ pour tout $M \in \mathscr{H}_m$.
   (c) Vérifier que la matrice de Υ est affine.

Avec les notations de la dernière question, A est appelée la matrice de l'application φ dans les repères $\widetilde{e}$ et $\widetilde{f}$. *On note*

$$A = \mathrm{Mat}_{\widetilde{e},\widetilde{f}}(\varphi).$$

6. Vérifier que la matrice ainsi définie coïncide avec celle définie dans les compléments du chapitre 5.

Compléments

5.1. Représentation matricielle d'une application affine. — Dans ce paragraphe, nous allons développer la représentation matricielle d'une application affine qui est un des outils les plus utilisés en synthèse d'image. Les langages de programmation des cartes graphiques actuelles comportent toutes un type de donnée correspondant aux matrices 4x4 qui servent à la représentation matricielle des applications affines dans l'espace. Le lecteur interessé pourra commencer par faire le problème 5.1 qui motive la construction qui suit.

Définition 5.4

Soit $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine. On munit $\mathscr{E}$ d'un repère affine $\widetilde{\boldsymbol{e}} = (O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_m)$ et $\mathscr{F}$ d'un repère $\widetilde{\boldsymbol{f}} = (O_{\mathscr{F}}, \vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$. La *matrice de l'application affine* φ dans les repères $\widetilde{\boldsymbol{e}}$ et $\widetilde{\boldsymbol{f}}$ est la matrice

$$\mathrm{Mat}_{\widetilde{\boldsymbol{e}},\widetilde{\boldsymbol{f}}}(\varphi) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant j \leqslant m+1}} \in \mathscr{M}_{n+1,m+1}(\mathbf{R})$$

caractérisée par les relations

$$\overrightarrow{\varphi}(\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{j,i} \vec{f}_j \quad \text{pour} \quad i \in \{1, \ldots, m\}; \tag{23}$$

$$\varphi(O_{\mathscr{E}}) = O_{\mathscr{F}} + \sum_{i=1}^{n} a_{i,m+1} \vec{f}_j; \tag{24}$$

$$a_{n+1,i} = \begin{cases} 0 \text{ si } i < m+1, \\ 1 \text{ si } i = m+1. \end{cases} \tag{25}$$

***Remarques 5.5.* —** i) La dernière ligne de la matrice d'une application affine est toujours la même. Tous ses coefficients sont nuls sauf le dernier égal à 1.

ii) Si $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n+1 \\ 1 \leqslant m+1}}$ est la matrice de l'application affine φ, alors la matrice extraite $(a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant m}}$ obtenue en retirant la dernière colonne et la dernière ligne est la matrice de l'application linéaire $\overrightarrow{\varphi}$.

Cette définition de la matrice d'une application affine est justifiée par la proposition suivante :

Proposition 5.6

Avec les notations de la définition précédente, notons A la matrice de l'application affine φ. À un point $M \in \mathscr{E}$, de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans le repère affine $\tilde{\boldsymbol{e}}$, on associe le vecteur colonne

$$\widetilde{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors le vecteur colonne $\widetilde{Y}$ associé de même au point $\varphi(M) \in \mathscr{F}$ est donné par

$$\widetilde{Y} = A\widetilde{X}.$$

Démonstration. — On pose $x_{n+1} = 1$. On a les relations

$$\begin{aligned}\varphi(M) &= \varphi(O_{\mathscr{E}}) + \overrightarrow{\varphi}\left(\overrightarrow{OM}\right) = \varphi(O_{\mathscr{E}}) + \overrightarrow{\varphi}\left(\sum_{i=1}^{m} x_i \vec{e}_i\right) \\ &= O_{\mathscr{F}} + \sum_{i=1}^{n} a_{m+1,i}\vec{f}_i + \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} a_{j,i}\vec{f}_j = O_{\mathscr{F}} + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n+1} a_{j,i}x_i\right)\vec{f}_j\end{aligned}$$

En outre, par construction, le coefficient de la dernière ligne du produit $A\tilde{X}$ est bien 1. □

Remarque 5.7. — On reprend les notations du problème 5.1, qui développe le contenu de cette remarque. Soit $\mathscr{E}$ un espace affine muni d'un repère $\tilde{\boldsymbol{e}} = (O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$. Alors l'application $\Phi_{\tilde{\boldsymbol{e}}}$ qui à un m-uplet $(x_1, \dots, x_m, 1)$ associe le point M de coordonnées $(x_1, \dots, x_m)$ définit une bijection de l'hyperplan *affine* $\mathscr{H}_m$ donné par l'équation $X_{m+1} = 1$ dans $\mathbf{R}^{m+1}$ sur l'espace affine $\mathscr{E}$. La direction de $\mathscr{H}_m$ est l'hyperplan H_m vectoriel donné par l'équation $X_{m+1} = 0$ dans $\mathbf{R}^{m+1}$. L'application $\Phi_{\tilde{\boldsymbol{e}}}$ est alors un isomorphisme d'espaces affines, c'est-à-dire une application affine bijective.

Soit maintenant $\mathscr{F}$ un espace affine muni d'un repère $\tilde{\boldsymbol{f}} = (O_{\mathscr{F}}, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$. On définit de même un isomorphisme $\Phi_{\tilde{\boldsymbol{f}}}$ d'espaces affines l'hyperplan affine $\mathscr{H}_n$ de $\mathbf{R}^{n+1}$ d'équation $X_{n+1} = 0$ sur $\mathscr{F}$. Soit $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ une application affine et notons $\Psi : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ l'application linéaire définie par la matrice de φ. Par construction, $\Psi(\mathscr{H}_m) \subset \mathscr{H}_n$. Notons $\psi : \mathscr{H}_m \to \mathscr{H}_n$

l'application donnée par $A \mapsto \Psi(A)$, alors le diagramme d'applications affines

$$\begin{tikzcd} \mathscr{H}_m \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\Phi_{\tilde{e}}"'] & \mathscr{H}_n \arrow[d, "\Phi_{\tilde{f}}"] \\ \mathscr{E} \arrow[r, "\varphi"] & \mathscr{F} \end{tikzcd}$$

commute. Autrement dit, $\Phi_{\tilde{f}} \circ \psi = \varphi \circ \Phi_{\tilde{e}}$. L'application $\Psi : \mathbf{R}^{m+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$ est l'unique application linéaire qui vérifie cette condition.

De même que pour les applications linéaires, la matrice de la composée d'applications affines est obtenue en faisant le produit des matrices.

Proposition 5.8

Soient $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ des espaces affines, φ une application affine de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{F}$ et ψ une application affine de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{G}$. Soient $\tilde{\boldsymbol{e}} = (O_{\mathscr{E}}, \vec{e}_1, \dots, \vec{u}_m)$ (resp. $\tilde{\boldsymbol{f}} = (O_{\mathscr{F}}, \vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$, $\tilde{\boldsymbol{g}} = (O_{\mathscr{G}}, \vec{g}_1, \dots, \vec{g}_p)$) un repère de $\mathscr{E}$ (resp. $\mathscr{F}$, $\mathscr{G}$). Alors

$$\mathrm{Mat}_{\tilde{\boldsymbol{e}},\tilde{\boldsymbol{g}}}(\psi \circ \varphi) = \mathrm{Mat}_{\tilde{\boldsymbol{f}},\tilde{\boldsymbol{g}}}(\psi)\,\mathrm{Mat}_{\tilde{\boldsymbol{e}},\tilde{\boldsymbol{f}}}(\varphi).$$

Démonstration. — Cela découle de la remarque 5.7, et de la formule pour la composée d'applications linéaires. □

5.2. Exemples

5.2.1. *Translation.* — On se place dans un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n muni d'un repère $(O, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$. Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathscr{E}}$ de coordonnées $(x_1, dots, x_n)$. La matrice de la translation $t_{\vec{u}}$ est donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & x_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2.2. *Rotation.* — En dimension 2, une rotation ρ_θ d'angle θ et de centre l'origine O du repère a pour matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une rotation $\rho_{A,\theta}$ centrée en un point A de coordonnées (x_A, y_A) peut être décomposée en une composée $\rho_{A,\theta} = t_{\overrightarrow{OA}} \circ \rho_\theta \circ t_{-\overrightarrow{OA}}$. Par la proposition 5.8, sa matrice est donc donnée par

$$\begin{aligned} M = &\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_A \\ 0 & 1 & y_A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -x_A \\ 0 & 1 & -y_A \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & x_A(1-\cos(\theta)) + y_A \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & -x_A \sin(\theta) + y_A(1-\cos(\theta)) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'égalité $M\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ 1 \end{pmatrix}$ confirme que le point A est un point fixe de l'application affine de matrice M.

Pour un espace affine de dimension 3, une rotation d'angle θ dont l'axe est la droite passant par l'origine et orientée par le troisième vecteur de la base aura pour matrice

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.3. Projection centrale. — Une autre fonction qui joue un rôle important en synthèse d'image est la projection centrale. Cette fonction permet de projeter sur un écran l'image d'un espace de dimension trois. Cette fonction est utilisée depuis longtemps par les artistes et conduit

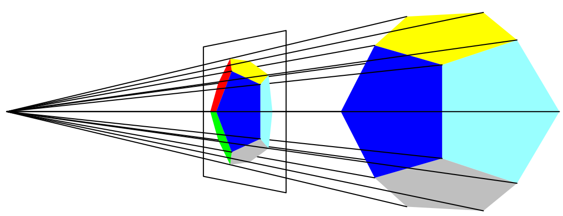


FIGURE 13. Projection centrale

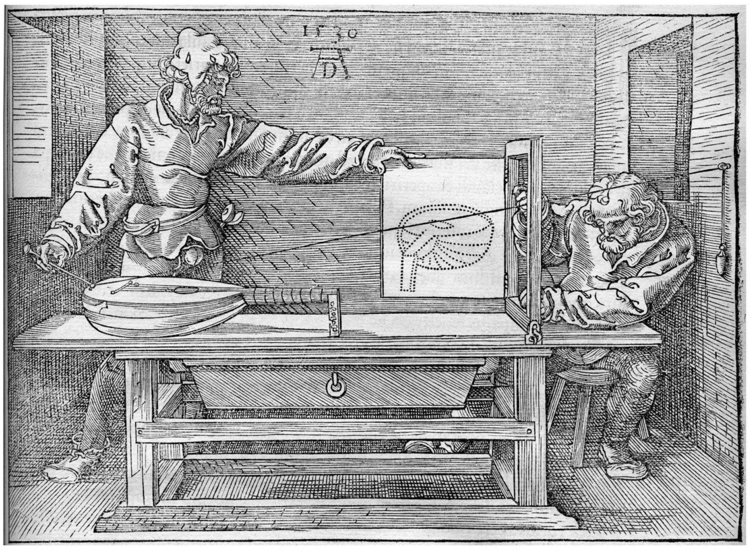


FIGURE 14. Le dessinateur de Luth (A. Dürer)

aux effets de perspectives.

Étant donné un point O qui correspond à l'œil de l'observateur et un plan $\mathscr{P}$, qui correspond au plan du tableau ou à celui de l'écran d'ordinateur, la fonction de projection p va envoyer un point M de l'espace sur le point d'intersection entre la droite (OM) et le plan $\mathscr{P}$. Encore faut-il que cette intersection ne soit pas vide. L'intersection est vide si et seulement si la droite (OM) est parallèle au plan $\mathscr{P}$, ce qui se produit uniquement lorsque M appartient au plan affine $\mathscr{P}'$ parallèle à $\mathscr{P}$ et passant par O. Le domaine de définition de p est donc le complémentaire de $\mathscr{P}'$.

Décrivons cette application à l'aide de coordonnées. Pour cela choisissons un repère adapté à la situation : L'origine du repère sera le point O et, sans perte de généralité on peut supposer que, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, le plan $\mathscr{P}$ sur lequel on projette a pour équation $Y = 1$. On note $O' = O+\vec{\jmath}$, et on munit le plan $\mathscr{P}$ du repère $(O',\vec{\imath},\vec{k})$. Soit M un point de $\mathscr{E}$ de coordonnées (x,y,z) ; notons M' son image par la projection centrale et (x',y') les coordonnées de M' dans le repère $(O',\vec{\imath},\vec{k})$. Les coordonnées de M' dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ sont donc $(x',1,y')$ et le fait que les points O, M et M' sont alignés se traduit par le fait que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont colinéaires, ce qui nous donne les égalités :

$$x = yx' \qquad z = yy'.$$

Autrement dit, si $y \neq 0$, c'est-à-dire lorsque la projection centrale est définie en M, on a
$$x' = x/y \qquad y' = z/y.$$

Notons que la coordonnée y dans cette description a également une signification : elle correspond à la « profondeur » du point par rapport à l'observateur. Elle va donc être utilisée par les algorithmes de faces cachées : étant donné deux points M_1 et M_2 ayant la même image par la projection, si la coordonnée y de M_2 est supérieure à celle de M_1, alors M_1 « cache » M_2.

Pour des repères arbitraires, la projection centrale peut-être calculée à l'aide du calcul matriciel de la façon suivante : on se donne une matrice $P \in \mathscr{M}_{3,4}(\mathbf{R})$ Si le point M a pour coordonnées (x, y, z) alors on calcule
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ w' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$
Le projeté de M est défini si $w' \neq 0$ ses coordonnées sont alors $(x'/w', y'/w')$ et la profondeur du point M est donnée par w'. L'avantage de cette présentation matricielle est qu'on peut alors modéliser le déplacement d'objets dans l'espace simplement en multipliant la matrice P à droite par une matrice $Q \in \mathscr{M}_{4,4}(\mathbf{R})$.

Généralisation

Emmanuel Peyre

Cours

6.1. Motivation. — L'introduction de structures en mathématiques permet d'appliquer des résultats à des objets ensemblistement très différents, à condition qu'ils vérifient des règles de calculs similaires. Ainsi la structure de $\mathbf{R}$-espace vectoriel s'applique aussi bien à $\mathbf{R}^n$ qu'à l'ensemble des applications $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ qui sont continues, dérivables et telles que $f' = f$.

Dans les parties de cours des chapitres 1 à 4, nous n'avons utilisé à aucun moment d'inégalités entre nombres réels. Les constructions faites n'utilisent que la somme, la multiplication et le fait que tout nombre réel non nul x admet un inverse $1/x$. De ce point de vue, l'ensemble des nombres complexes ou l'ensemble des nombres rationnels sont également munis d'une addition et d'une multiplication qui vérifient des conditions similaires. La structure de corps va permettre de généraliser l'ensemble de nos constructions et de les appliquer à des espaces vectoriels sur $\mathbf{Q}$ ou sur $\mathbf{C}$.

6.2. Structure d'anneau, de corps. — Commençons par la structure d'anneau

Définition 6.1

Un *anneau* est un groupe abélien A dont la loi est notée additivement muni d'une loi de composition appelée *produit*

$$\begin{array}{ccc} A \times A & \longrightarrow & A \\ \big(a, b\big) & \longmapsto & ab \end{array}$$

qui vérifie les conditions suivantes :

(A1) (Associativité du produit)

$$\forall a, b, c \in A, \quad (ab)c = a(bc);$$

(A2) (Élément unité) Il existe un élément 1_A de A tel que
$$\forall a \in A, \quad 1_A a = a 1_A = a;$$
(A3) (Distributivité du produit par rapport à l'addition)
$$\forall a, b, c \in A, \quad a(b+c) = ab + ac,$$
et
$$\forall a, b, c \in A, \quad (a+b)c = ac + bc;$$
On dit que l'anneau est *commutatif* s'il vérifie en outre la condition suivante :
(AC1) (Commutativité)
$$\forall a, b \in A, \quad ab = ba.$$

Exemples 6.2. — i) L'ensemble des entiers relatifs $\mathbf{Z}$ muni de la somme et du produit usuels est un anneau.

ii) Si $n \in \mathbf{N}$, l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ des matrices carrées forme un anneau pour le produit matriciel. Cet anneau n'est pas commutatif si $n \geqslant 2$.

Définition 6.3

Un *corps* est un anneau K qui vérifie en outre la condition suivante
(K1) (Existence d'un inverse)
$$\forall x \in K - \{0\}, \exists y \in K, \quad xy = yx = 1_K.$$

Exemple 6.4. — L'ensemble des nombres réels $\mathbf{R}$, des nombres rationnels $\mathbf{Q}$ ou des nombres complexes $\mathbf{C}$ muni de la somme et du produit usuels sont des corps. On parle par exemple du corps des complexes.

Convention 6.5

Sauf mention explicite du contraire, tous les corps considérés dans ce cours sont supposés commutatifs.

Remarque 6.6. — La commutativité du corps permet de conserver la description du calcul matriciel donnée dans le chapitre 4.

6.3. Espace vectoriel sur un corps. — La définition d'un espace vectoriel sur un corps arbitraire K est obtenue en remplaçant dans la définition des espaces vectoriels réels le corps $\mathbf{R}$ par le corps K. Les scalaires sont donc maintenant des éléments du corps.

Dans le reste de ce paragraphe, on fixe un corps K.

Définition 6.7

Un *espace vectoriel sur le corps K* (ou K-espace vectoriel) est un groupe abélien E dont la loi de composition est appelée *addition* :

$$\begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & E \\ (\vec{u},\vec{v}) & \longmapsto & \vec{u}+\vec{v} \end{array}$$

muni d'une application appelée *multiplication par un scalaire*

$$\begin{array}{ccc} K\times E & \longrightarrow & E \\ (\lambda,\vec{v}) & \longmapsto & \lambda\vec{v} \end{array}$$

qui vérifient les quatre conditions suivantes :

(EV1) (Associativité de la multiplication scalaire)

$$\forall\lambda,\mu\in K, \forall\vec{u}\in E,\quad \lambda(\mu\vec{u})=(\lambda\mu)\vec{u};$$

(EV2) (Distributivité à droite de la multiplication scalaire)

$$\forall\lambda\in K, \forall\vec{u},\vec{v}\in E,\quad \lambda(\vec{u}+\vec{v})=\lambda\vec{u}+\lambda\vec{v};$$

(EV3) (Distributivité à gauche de la multiplication scalaire)

$$\forall\lambda,\mu\in K, \forall\vec{u}\in E,\quad (\lambda+\mu)\vec{u}=\lambda\vec{u}+\mu\vec{u};$$

(EV4) (Multiplication par l'unité)

$$\forall\vec{u}\in E,\quad 1\vec{u}=\vec{u}.$$

L'ensemble des notions et des propriétés vus dans les chapitres 2, 3 et 4, à l'exception près du §2.7 se généralisent sans peine à ce cadre, à condition de remplacer systématiquement le corps $\mathbf{R}$ par le corps K. En particulier, les coordonnées sont des éléments de K et les matrices sont à coefficients dans K.

6.4. Exemples. — Quelques cas particuliers sont très utilisés en mathématique et en informatique.

6.4.1. *Le corps* $\mathbf{F}_2$. — Le but de ce paragraphe est de construire le corps à deux éléments.

Définition 6.8

On note $\mathbf{F}_2$ l'ensemble $\{0, 1\}$ muni des lois suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

Proposition 6.9

$\mathbf{F}_2$ est un corps.

Remarques 6.10. — i) Remarquons que les coordonnées dans une base d'un vecteur d'un $\mathbf{F}_2$ espace vectoriel est une suite de 0 et de 1 ce qui en fait un outil particulièrement apprécié en informatique.

ii) Si on associe à 0 le Faux et à 1 le Vrai, on notera que la table d'addition de $\mathbf{F}_2$ correspond à la table de vérité du « ou *exclusif* », et la table de multiplication à celle du « et ».

iii) Notons qu'un espace vectoriel sur $\mathbf{F}_2$ vérifie des règles de calculs très particulières. Soit E un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel, alors

$$\forall \vec{u} \in E, \quad \vec{u} + \vec{u} = 0.$$

En effet, pour tout $\vec{u} \in E$, on a les égalités $\vec{u}+\vec{u} = (1+1)\vec{u} = 0\vec{u} = 0$. D'autre part la multiplication scalaire est la plus simple qui soit :

$$\lambda\vec{u} = \begin{cases} 0 \text{ si } \lambda = 0, \\ \vec{u} \text{ si } \lambda = 1. \end{cases}$$

pour $\lambda \in \mathbf{F}_2$ et $\vec{u} \in E$. Ce qui est remarquable, c'est qu'on a couvert tous les cas possible en considérant les cas $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$.

iv) Les exercices 6.1 et 6.3 donnent des exemples de corps ayant respectivement 3 et 4 éléments.

Fiche de révision

Définition R.6.1

Un *anneau* est un groupe abélien A dont la loi est notée additivement muni d'une loi de composition appelée *produit*

$$\begin{array}{ccc} A\times A & \longrightarrow & A \\ \big(a,b\big) & \longmapsto & ab \end{array}$$

qui vérifie les conditions suivantes :

(A1) (Associativité du produit)

$$\forall a,b,c\in A,\quad (ab)c=a(bc);$$

(A2) (Élément unité) Il existe un élément 1_A de A tel que

$$\forall a\in A,\quad 1_Aa=a1_A=a;$$

(A3) (Distributivité du produit par rapport à l'addition)

$$\forall a,b,c\in A,\quad a(b+c)=ab+ac,$$

et

$$\forall a,b,c\in A,\quad (a+b)c=ac+bc;$$

On dit que l'anneau est *commutatif* s'il vérifie en outre la condition suivante :

(AC1) (Commutativité)

$$\forall a,b\in A,\quad ab=ba.$$

Un *corps* est un anneau K qui vérifie en outre la condition suivante

(K1) (Existence d'un inverse)

$$\forall x\in K-\{0\},\exists y\in K,\quad xy=yx=1_K.$$

Proposition et définition R.6.2

L'ensemble $\{0, 1\}$ muni des lois suivantes :

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\times$	0	1
0	0	0
1	0	1

est un corps noté $\mathbf{F}_2$.

Entraînement

6.1. Exercices

Exercice 6.1. Soit E un $\mathbf{F}_2$ espace vectoriel de dimension m. Démontrer que E est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.

Exercice 6.2.

1. Munir l'ensemble $\{0, 1, -1\}$ d'une addition et d'une multiplication de sorte que cela définisse une structure de corps sur cet ensemble à trois éléments. On note $\mathbf{F}_3$ ce corps.
2. Soit E un $\mathbf{F}_3$-espace vectoriel de dimension n. Démontrer que E est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.

Exercice 6.3. On note $\mathbf{F}_4$ le $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel $\mathbf{F}_2^2$. Pour tous $a, b \in \mathbf{F}_2$, on note $a + bj$ le couple (a, b) et on munit $\mathbf{F}_4$ du produit donné par

$$(a+bj)(a'+b'j) = (aa'+bb') + (ab'+ba'+bb')j.$$

1. Démontrer que ce produit est associatif.
2. Calculer j^2 et j^3.
3. Calculer pour $a, b \in \mathbf{F}_2$ le produit
$$(a+bj)(a+b+bj).$$
4. Démontrer que $\mathbf{F}_4$ est un corps.
5. Écrire la table d'addition et de multiplication pour le corps $\mathbf{F}_4$.
6. Soir E un $\mathbf{F}_4$-espace vectoriel de dimension n, Démontrer que E est un ensemble fini dont on déterminera le cardinal.

Annales

On prendra garde au fait que le programme a légèrement changé à la rentrée 2019 si bien que certains des exercices donnés dans les annales des examens de 2019 ne sont plus totalement adaptés au nouveau programme.

Énoncé première session 2019

Question de cours. 1. Énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss (aussi appelé théorème fondamental de l'algèbre).

2. Soient E et F deux $\mathbf{R}$-espaces vectoriels de même dimension $n \in \mathbf{N}^*$. Indiquer comment construire un isomorphisme de E dans F.
3. Démontrer à l'aide d'un exemple que la multiplication de matrices dans $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ n'est pas commutative.
4. Énoncer le théorème du rang.

Exercice 1. (Groupes) Pour $a \in \mathbf{R}^*$ et $b \in \mathbf{R}$ on définit

$$f_{a,b} : \begin{cases} \mathbf{R} & \to & \mathbf{R}, \\ x & \mapsto & ax + b. \end{cases}$$

Soit $G = \{f_{a,b} | a \in \mathbf{R}^*, b \in \mathbf{R}\}$. Montrer que G muni de la composition d'applications est un groupe.

Exercice 2. (Dimension des espaces vectoriels) Dans $\mathbf{R}^3$ on considère les vecteurs

$$u = (1, t, -1), \ v = (t, 1, 1), \ w = (1, 1, 1).$$

On considère ensuite les espaces

$$F = \mathrm{Vect}(u, v), \ G = \mathrm{Vect}(w).$$

1. Calculer la dimension de F en fonction de t.
2. Calculer la dimension de $F \cap G$ en fonction de t.

Indication : il faudra distinguer les cas $t = -1$, $t = 1$ et $t^2 \neq 1$.

Exercice 3. (Applications linéaires et matrices associées) Soit b la base canonique de $\mathbf{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

et f_A l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base b est A (f_A est alors l'endomorphisme canoniquement associé à A). On pose également

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, U_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, b' = (U_1, U_2, U_3).$$

1. Démontrer que b' est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Calculer $f_A(U_i)$, $i = 1, 2, 3$.
3. En déduire $A' = \mathrm{Mat}_{b'}(f_A)$.
4. En déduire $\mathrm{rang}(f_A)$ et $\dim(\ker(f_A))$.
5. Calculer la matrice de passage de la base b à la base b', $P = \mathrm{Mat}_{b',b}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3})$ (la base de départ est b' et la base d'arrivée est b).
6. Calculer P^{-1}.
7. Vérifier le résultat de 3. en calculant $P^{-1}AP$.
8. Trouver la solution générale de

$$AX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Indication : En utilisant la base b' on pourra répondre à la question essentiellement sans calcul supplémentaire.

Exercice 4. (Projecteurs) Soit E un espace vectoriel et p un projecteur sur E. On pose $q := Id_E - p$.

1. Démontrer que q est un projecteur.
2. Exprimer $\mathrm{Ker}(q)$ et $\mathrm{Im}(q)$ en fonction de $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ et démontrer cette corrélation.
3. Soit maintenant $E = \mathbf{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3; z = 0\}$, $G = \mathrm{Vect}(e_3)$, $e_3 = (0, 0, 1)$ et p la projection sur F parallèlement à G. Etant donné (x, y, z) dans $\mathbf{R}^3$, donner les formules explicites pour $p((x, y, z))$ et $q((x, y, z))$. Quelle est l'interprétation géométrique de q ?

Corrigé première session 2019

Question de cours.

1. Tout polynôme non constant de $\mathbf{C}[X]$ possède au moins une racine.
2. Soit $\dim E = \dim F = n$, $b_E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ une base de E et $b_F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_n)$ une base de F. Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image des vecteurs de base. Soit $\ell \in L(E, F)$ l'application linéaire telle que $\ell(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$. Comme ℓ transforme la base b_E en la base b_F, on a $\mathrm{Mat}_{b_E, b_F}(\ell) = I_n$ et ℓ est un isomorphisme.
3. On pose
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$
On trouve
$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = BA.$$
4. Soit E un $\mathbf{K}$— espace vectoriel de dimension finie et F un $\mathbf{K}$— espace vectoriel quelconque. Soit f une application linéaire de E dans F.
   (a) $\mathrm{Im}(f)$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker(f)$ dans E.
   (b) $\dim(\ker(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$.

Exercice 1. (Groupes) Soient $a, a' \in \mathbf{R}^*$ et $b, b' \in \mathbf{R}$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f_{a,b}(f_{a',b'}(x)) = a(a'x + b') + b = aa'x + ab' + b.$$
Comme $aa' \in \mathbf{R}^*$ et $ab' + b \in \mathbf{R}$, on a donc

$$f_{a,b} \circ f_{a',b'} = f_{aa',ab'+b} \in G. \tag{26}$$

On en déduit que

1. La loi $\circ$ est interne dans G.
2. La loi $\circ$ est associative puisque la loi de composition d'applications l'est.
3. $\mathrm{Id}_{\mathbf{R}} = f_{1,0}$ est élément neutre.
4. Si $f_{a,b} \in G$, on voit grâce à (26) que $f_{1/a,-b/a}$ est l'inverse de $f_{a,b}$.

Exercice 2. (Dimension des espaces vectoriels)

1. Comme $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ engendre F et $\vec{u}$ est non nul, on a $1 \leqslant \dim(F) \leqslant 2$. De plus, $\dim(F) = 1$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\alpha\vec{u} = \vec{v}$. Or

$$\alpha\vec{u} = \vec{v} \iff (\alpha = t \text{ et } \alpha t = 1 \text{ et } -\alpha = 1). \tag{27}$$

Si $t = -1$, alors $\alpha = -1$ est solution de (27) et $\dim F = 1$. Sinon le système n'a pas de solution. En effet dans ce cas, la troisième équation de (27) donne $\alpha = -1$, alors que la première donne $\alpha = t \neq -1$. Dans ce cas on a alors $\dim F = 2$.

2. Il y a deux cas de figure :
   (a) $\vec{w} \in F$. Dans ce cas $\dim(F \cap G) = \dim G = 1$.
   (b) $\vec{w} \notin F$. Dans ce cas $\dim(F \cap G) = \dim\{0_{\mathbf{R}^3}\} = 0$.

   On a

$$\begin{aligned} \vec{w} \in F \quad &\Leftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbf{R} \quad \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{w} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbf{R} \begin{cases} \alpha + t\beta = 1 \\ t\alpha + \beta = 1 \\ -\alpha + \beta = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbf{R} \begin{cases} \alpha + t\beta = 1 \\ (1 - t^2)\beta = 1 - t \\ (1 + t)\beta = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

   On distingue trois cas :
   (a) $t = -1$. Dans ce cas le système n'a pas de solution et on a $\dim(F \cap G) = 0$.
   (b) $t = 1$. Alors $\alpha = 0$ et $\beta = 1$ est une solution et $\dim(F \cap G) = 1$.
   (c) $t^2 \neq 1$. Alors la deuxième ligne donne $\beta = \frac{1}{1+t}$, alors que la troisième ligne donne $\beta = \frac{2}{1+t}$. Le système n'a alors pas de solution et $\dim(F \cap G) = 0$.

Exercice 3. (Applications linéaires et matrices associées)

1. Comme $\dim \mathbf{R}^3 = 3$, il suffit de montrer que U_1, U_2, U_3 sont linéairement indépendants. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$.

$$\alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3 = 0_{\mathbf{R}^3} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   En considérant dans l'ordre les lignes 2, 3, 1, on voit que ce système ne possède que la solution nulle, ce qui conclut.

2. On trouve $f_A(U_1) = U_1$, $f_A(U_2) = -U_2$, $f_A(U_3) = 0_{\mathbf{R}^3}$.

3. On a donc

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. La matrice échelonnée A' représente A dans la base b' donc $\mathrm{rang}(f_A) = 2$. D'après le théorème du rang, $\dim(\ker(f_A)) = 1$.

5. Les colonnes de P sont les vecteurs colonnes de U_1, U_2, U_3 dans la base b. Comme b est la base canonique, ce sont U_1, U_2, U_3.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. L'algorithme de Gauss montre que

$$\begin{aligned}
P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad &\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 - y_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + y_1 \\ x_3 = y_2 - y_1 \\ -x_2 = -x_3 + y_3 - y_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = -x_2 + y_1 \\ x_2 = x_3 + y_1 - y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = y_1 - y_2 + y_3 \\ x_2 = y_2 - y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

On trouve donc

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. On a

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. Notons $X' = P^{-1}X$ et x'_1, x'_2, x'_3 les composantes de X'. Alors

$$\begin{aligned} AX &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (P^{-1}AP)(P^{-1}X) = P^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A'X' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x'_1 = 1 \\ x'_2 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les vecteurs X de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 + x'_3 \\ 1 + x'_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x'_3 \in \mathbf{R}.$$

L'ensemble des solutions est alors $S = (2, 2, 1) + \mathrm{Vect}(0, 1, 1)$.

Exercice 4. (Projecteurs)

1. Il suffit de montrer que $q^2 = q$. On a
$$q^2 = (\mathrm{Id}_E - p) \circ (\mathrm{Id}_E - p) = \mathrm{Id}_E - 2p + p^2 = \mathrm{Id}_E - p = q.$$
2. (a) Montrons que $\ker(q) = \mathrm{Im}(p)$. Si $x \in \ker(q)$, alors $q(x) = 0_{\mathbf{R}^3}$ donc $x = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$. Réciproquement, si $y \in \mathrm{Im}(p)$, il existe $x \in \mathbf{R}^3$ tel que $y = p(x)$, ce qui entraîne $q(y) = p(x) - p^2(x) = p(x) - p(x) = 0_{\mathbf{R}^3}$, d'où $y \in \ker(q)$.
   (b) On a $\mathrm{Im}(q) = \ker(p)$. Sachant que q est une projection, on peut inverser les rôles de p et de q ($p = \mathrm{Id}_E - q$) et utiliser (a).
3. Soit $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$. Comme $(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$ avec $(x, y, 0) \in F$ et $(0, 0, z) \in G$, on a $p((x, y, z)) = (x, y, 0)$ et $q((x, y, z)) = (x, y, z) - (x, y, 0) = (0, 0, z)$. Ainsi, q est la projection sur G parallèlement à F.

Énoncé deuxième session 2019

Question de cours. 1. Soient V et W deux sous-espaces de $\mathbf{R}^n$.

(a) Donner la définition de $V + W$.

(b) Donner une formule du cours reliant les dimensions de l'espace $V + W$ d'une part et les dimensions des espaces $V, W, V \cap W$ d'autre part.

2. Soient G et H deux groupes et soit $f : G \to H$ un homomorphisme de groupes.

(a) Donner la définition de $\ker(f)$ et démontrer que c'est un sous-groupe de G.

(b) Donner la définition de $\mathrm{Im}(f)$ et démontrer que c'est un sous-groupe de H.

3. Quelle est la dimension de l'espace de matrices $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$? Donner une démonstration.

Exercice 1. (Groupes et homomorphismes). Soit T l'ensemble des matrices carrées de taille 2×2 qui sont triangulaires supérieures et dont les termes sur la diagonale sont tous égaux à 1, c.à.d.

$$T = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; a \in \mathbf{R} \right\}.$$

1. Démontrer que T muni de la multiplication de matrices est un groupe.
2. Trouver un isomorphisme de groupes de $(\mathbf{R}, +)$ dans $(T, \cdot)$.

Exercice 2. (Dimension des espaces vectoriels). Dans $\mathbf{R}^3$ on considère les vecteurs suivants

$$u = (1, 1, 1); \quad v = (1, -t, 1); \quad w = (t, t, 1).$$

On considère les espaces

$$F = \mathrm{Vect}(u), \quad G = \mathrm{Vect}(v, w)$$

1. Calculer la dimension de G en fonction de t.
2. Calculer la dimension de $F + G$ en fonction de t.
   Indication : distinguer les cas $t^2 = 1$ et $t^2 \neq 1$.

Exercice 3. (Applications linéaires et matrices associées) Soit b la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Soit S la matrice

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

et f_S l'endomorphisme dont la matrice relativement à la base b est S (f_S est alors l'endomorphisme canoniquement associé à S). On pose également

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notons $b' = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$.

1. Montrer que b' est une base de $\mathbf{R}^3$.
2. Calculer $f_S(\vec{v}_i)$ pour $i = 1, 2, 3$.
3. En déduire $S' = \mathrm{Mat}_{b'}(f_S)$.
4. En déduire le rang et la dimension du noyau de f_S.
5. Donner la matrice de passage de la base b à la base b', $P = \mathrm{Mat}_{b',b}(\mathrm{Id}_{\mathbf{R}^3})$ (la base de départ est b' et la base d'arrivée est b).
6. Calculer P^{-1}.
7. Vérifier le résultat du point 3. en calculant $P^{-1}SP$.
8. Trouver la solution générale de

$$SX = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Indication : En utilisant la base b' on pourra répondre à la question essentiellement sans calculs supplémentaires.

Exercice 4. (Matrices nilpotentes) On appelle matrice nilpotente toute matrice carrée N telle que $N^n = 0$ pour un entier positif n suffisamment grand.

1. Montrer que pour tout entier positif k, la matrice N^k est encore nilpotente.
2. Montrer que toute matrice de la forme

$$N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ a, b, c \in \mathbf{R}$$

   est nilpotente.
3. Montrer que si N est nilpotente avec $N^n = 0$, alors $A := I - N$ est inversible d'inverse

$$A^{-1} = I + N + \ldots + N^{n-1}.$$

GLOSSAIRE

L_i : i-ème équation d'un système 12
$E \oplus F$: Somme directe d'espaces 34
$F_1 + F_2$: Somme de sous-espaces 38
$\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n)$: Sous-espace engendré 39
$\dim(E)$: Dimension 48
$\mathscr{L}(E,F)$: Espace des applications linéaires . . . 66
$\ker(\varphi)$: Noyau de φ 67
$\mathrm{Im}(\varphi)$: Image de φ 67
E^* : Dual de E 71
$\mathscr{M}_{m,n}(\mathbf{R})$: Matrices 83
$\mathscr{M}_n(\mathbf{R})$: Matrices carrées 89
A^{-1} : Inverse d'une matrice 89
$\mathrm{Mat}_{e,f}(\varphi)$: Matrice de φ 92
P_e^f : Matrice de passage 96
$\overrightarrow{AB}$: Vecteur défini par deux points 130
$\overrightarrow{\mathscr{F}}$: Direction d'un espace affine 132
$\overrightarrow{\varphi}$: Application linéaire associée 134
$\mathbf{F}_2$: Corps de cardinal 2 154
$\mathbf{F}_3$: Corps de cardinal 3 157
$\mathbf{F}_4$: Corps de cardinal 4 157

INDEX