La dernière chose qu'on a faite avant l'interruption c'est de définir l'inverse d'une matrice carrée. Je vous avais montré un (petit) exemple, on va voir maintenant comment calculer l'inverse d'une matrice (si elle est inversible).

Exemple d'inversion matricielle

1 (Ex 4.50 du poly).

On considère la matrice 3×3 donnée par $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$;

et on cherche donc à trouver une matrice B telle que $BA = AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Voici la méthode. Soient deux vecteurs <u>quelconques</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Supposons qu'on ait $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Si A est inversible, on peut multiplier cette relation à gauche par A^{-1}. On aurait alors : pour tous vecteurs $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$$A^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

c'est à dire

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{car } A^{-1}A = I_3}}{I_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On voit donc qu'il s'agit exprimer $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Or ça, on sait le faire avec un système :

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad\quad -z = a \\ x - y \quad\quad = b \\ x - y + z = c \end{cases} \quad (*)$$

multiplicat° matrice-vecteur : exo de calcul pour vous!

On peut alors résoudre ce système $(*)$ par votre méthode préférée (le pivot), et on obtient (les calculs sont un exo pour vous)

$$\begin{cases} x = a - b + c \\ y = a - 2b + c \\ z = -b + c \end{cases}$$

Le système $(*)$ a donc une unique solution (pour toutes valeurs de a, b, c)

Observons la partie droite du système :

$$\begin{pmatrix} a - b + c \\ a - 2b + c \\ -b + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

On "lit à l'envers" un produit matrice × vecteur. Il FAUT que vous appreniez à faire ça.

On a donc montré que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

Conclusion : $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Vérification : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ Faites-le !

(2) Je vous ai dit lors du dernier amphi "réel" que certaines matrices ne sont pas inversibles. Comment s'en rend-on compte dans le calcul précédent ? Le système (*) n'a dans ce cas pas de solution. Voici un exemple.

Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, et effectuons le même raisonnement.

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z = a \\ \quad y + z = b \\ x + 4y + 3z = c \end{cases} \quad (*)$$

Résolvons le système (*)

① $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ y + z = b \\ 2y + 2z = c - a \end{cases}$$

② $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$

$$\begin{cases} x + 2y + z = a \\ y + z = b \\ 0 = c - a - 2b \end{cases}$$

On constate donc que le système (*) admet une solution si et seulement si $-a - 2b + c = 0$.

Or, si A était inversible, on pourrait écrire

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$ ce qui montre que (*) aurait toujours une unique solution.

③ Voici finalement une manière de présenter le calcul de l'inverse. Vous pouvez l'utiliser, ou pas.

Revenons à l'exemple 1.

On écrit une matrice :

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \underbrace{1 \quad -1 \quad 1}_{A} & & & \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{I_3} & & \end{array}\right]$$

Puis on effectue les opérations que l'on ferait pour résoudre le système $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ comme ci dessus, des deux côtés ! C'est à dire :

① $$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

② $$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1 \end{array} \end{array}$$

③ $$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ \\ L_3 - L_2 \end{array} \end{array}$$

④ $$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] & \begin{array}{l} L_1 + L_3 \\ L_2 - L_3 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

et finalement :

⑤ $$\begin{array}{cl} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ \underbrace{0 \quad 0 \quad 1}_{I_3} & & & \underbrace{0 \quad -1 \quad 1}_{A^{-1}} & & \end{array}\right] & \begin{array}{l} \\ -L_2 \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Comme vous voyez le but est de faire des opérations pour transformer la partie gauche en I_3.

Attention à bien faire les opérations sur toute la ligne (6 colonnes ici !)

Maintenant qu'on sait en principe calculer l'inverse d'une matrice, voici une proposition pratique et importante. 69

Proposition : Si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ sont inversibles, alors AB est inversible, et

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

preuve : C'est une vérification directe : $(AB).(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1}$
$= AA^{-1} = I_n$

Vérifiez de même que $(B^{-1}A^{-1}).(AB) = I_n$.

Remarquez qu'on utilise l'associativité du produit matriciel là.

4) Matrices et vecteurs.

Dans ce paragraphe, on considère un $\mathbb{R}$-ev E de dimension m, équipé d'une base $(\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m}) = e$.

Soit alors $\vec{u}$ un vecteur de E, dont les coordonnées dans la base e sont $u_1, \dots, u_m$; c'est à dire que

$$\vec{u} = u_1\vec{e_1} + \dots + u_m\vec{e_m}.$$

On associe à $\vec{u}$ la matrice à m lignes et 1 colonne

$$U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix},$$

on l'appelle le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $e = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_m})$

Attention : ce vecteur dépend de la base qu'on a choisi au départ

Exemple Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$.

. On a déjà la base canonique $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ avec $\vec{e_1} = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$

. Considérons alors les deux bases* $\mathcal{B}_1 = (\underbrace{(1,2)}_{\vec{v_1}}, \underbrace{(3,4)}_{\vec{v_2}})$ et $\mathcal{B}_2 = (\underbrace{(-1,1)}_{\vec{w_1}}, \underbrace{(1,1)}_{\vec{w_2}})$

. Soit le vecteur $\vec{u} = (4,6)$. Clairement $\vec{u} = 4\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$.

Donc le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans e est $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

. Par ailleurs

* $\vec{u} = 1\vec{v_1} + 1\vec{v_2}$, donc le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}_1$
$(= \vec{v_1} + \vec{v_2})$
est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

* $\vec{u} = 1\vec{w_1} + 5\vec{w_2}$, donc le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans $\mathcal{B}_2$

est $\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}$.

La question qui va nous occuper est : comment les coordonnées d'un vecteur changent quand on change de base ?

Remarque : Souvent, on écrit juste $\vec{u} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ça veut dire " le vecteur dont les coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ sont 4 et 6", autrement dit $4\vec{e_1} + 6\vec{e_2}$ où $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

* exercice : vérifiez que ce sont des bases de $\mathbb{R}^2$!

Nous allons maintenant associer à une famille de k vecteurs écrits dans une base B une matrice à k colonnes et m lignes. En principe, c'est facile : on colle les k vecteurs colonnes des coordonnées dans la base B les uns aux autres. Voici une définition précise (c'est celle là qu'il faut apprendre) 71

Définition : Soit $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ une famille de k vecteurs. La matrice de la famille $(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$ dans la base $e = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m)$ est la matrice à m lignes et k colonnes définie par :

$$\mathrm{mat}_{\underbrace{e}_{\text{la base dans laquelle ont travaille}}} \overbrace{(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)}^{\text{la famille de vecteurs}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \boxed{a_{1j}} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mk} \end{bmatrix},$$

$\to \vec{u}_j$ dans la base e

dont la j-ème colonne est le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}_j$ dans la base e : $\vec{u}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \vec{e}_i$

Exemple : Reprenons $\mathcal{B}_1 = ((1,2),(3,4))$ et $\mathcal{B}_2 = ((-1,1),(1,1))$, et considérons les deux vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Autrement dit : $\vec{u}_1 = 4\vec{e}_1 + 6\vec{e}_2$ et $\vec{u}_2 = 1\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2$.

$\vec{v}_1, \vec{v}_2$; $\vec{w}_1, \vec{w}_2$

Alors
- $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$ et $\vec{u}_2 = 1.\vec{v}_1 + 0.\vec{v}_2$ Donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_1}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
- $\vec{u}_1 = 1\vec{w}_1 + 5\vec{w}_2$ et $\vec{u}_2 = \frac{1}{2}\vec{w}_1 + \frac{3}{2}\vec{w}_2$ Donc $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}_2}(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 5 & 3/2 \end{bmatrix}$