Algèbre bilinéaire

Table des matières

Chapitre I

Formes bilinéaires symétriques, formes quadratiques

Dans tout ce qui suit, K désignera un corps, et E un K-espace vectoriel.

I.1. Formes bilinéaires

Définition I.1.1. Une application $\begin{array}{rl} b\colon E\times E & \longrightarrow K \\ (x,y) & \longmapsto b(x,y) \end{array}$ est appelée *forme bilinéaire sur* E si elle est linéaire en chaque argument, c'est-à-dire si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(1) pour tout $x\in E$, l'application
$$\begin{array}{rl} b(x,\_\,)\colon E & \longrightarrow K \\ y & \longmapsto b(x,y) \end{array}$$
est linéaire ;

(2) pour tout $y\in E$, l'application
$$\begin{array}{rl} b(\_\,,y)\colon E & \longrightarrow K \\ x & \longmapsto b(x,y) \end{array}$$
est linéaire.

Une application $b : E\times E \longrightarrow K$ (pas nécessairement bilinéaire) est dite *symétrique* si l'on a
$$b(y,x) = b(x,y) \quad \text{pour tous } x,y\in E.$$

Une *forme bilinéaire symétrique sur* E est une forme bilinéaire sur E qui est symétrique.

L'ensemble des formes bilinéaires et des formes bilinéaires symétriques sur E sont respectivement notés $\mathscr{B}(E)$ et $\mathscr{BS}(E)$. Ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F}(E\times E, K)$.

Exemples I.1.2.

(1) L'application
$$\begin{array}{rl} b\colon \quad \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \longmapsto x_1y_1 + 2x_2y_2 \end{array}$$
est bilinéaire symétrique ;

(2) l'application

$$\begin{array}{rccl} b\colon & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) & \longmapsto & x_1y_2 - 3x_2y_1 \end{array}$$

est bilinéaire, mais pas symétrique ;

(3) l'application

$$\begin{array}{rcl} b\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & x^2y \end{array}$$

n'est ni bilinéaire, ni symétrique. Remarquons néanmoins qu'elle est linéaire en y ;

(4) l'application

$$\begin{array}{rccl} b\colon & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}) & \longmapsto & x_1^2y_2 + y_1^2x_2 \end{array}$$

est symétrique, mais pas bilinéaire ;

(5) l'application

$$\begin{array}{rcl} b\colon \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \times \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

est bilinéaire symétrique ;

(6) le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est bilinéaire symétrique ;

(7) plus généralement, l'application

$$\begin{array}{rccl} b\colon & K^n \times K^n & \longrightarrow & K \\ & (\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}) & \longmapsto & x_1y_1 + \cdots + x_ny_n \end{array}$$

est bilinéaire symétrique.

Remarques I.1.3.

(1) Si $b : E \times E \longrightarrow K$ est une application symétrique linéaire en x, alors c'est une forme bilinéaire symétrique (**exercice**).

(2) Si $b : E \times E \longrightarrow K$ est bilinéaire, la définition entraîne les égalités

$$b(0, y) = b(x, 0) = 0 \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

On introduit maintenant la notion de matrice représentative d'une forme bilinéaire, qui joue le même rôle que la matrice représentative d'une application linéaire. La motivation est la même que pour les endomorphismes : réduire les calculs à des questions matricielles.

Supposons que E soit de dimension finie $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $x \in E$, on note $[x]_{\mathbf{e}}$ le vecteur des coordonnées de x dans la base $\mathbf{e}$. Autrement dit, si $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, on a $[x]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$.

Soit maintenant $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire sur E. Si $x, y \in E$, écrivons $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j$. On a alors

$$\begin{aligned} b(x,y) &= b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j b(e_i, e_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{j=1}^{n} b(e_i, e_j) y_j) \\ &= [x]_{\mathbf{e}}^t (b(e_i, e_j))_{i,j} [y]_{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'application b est complètement déterminée par la connaissance de la matrice $(b(e_i, e_j))_{i,j} \in \mathrm{M}_n(K)$. Le lemme suivant montre que c'est la seule matrice vérifiant cette propriété.

Lemme I.1.4. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $b : E \times E \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire, il existe une unique matrice $M \in \mathrm{M}_n(K)$ telle que*

$$b(x,y) = [x]_{\mathbf{e}}^t M [y]_{\mathbf{e}} \quad \textit{pour tous } x, y \in E.$$

Elle est donnée par

$$M = (b(e_i, e_j))_{i,j}.$$

Démonstration. Le fait que la matrice $(b(e_i, e_j))_{i,j}$ vérifie la condition requise a déjà été constaté. Supposons maintenant que $M, N \in \mathrm{M}_n(K)$ sont deux matrices vérifiant la propriété de l'énoncé. Notons $M = (a_{ij})_{i,j}$ et $N = (b_{ij})_{i,j}$.

On a

$$b(x,y) = [x]_{\mathbf{e}}^t M [y]_{\mathbf{e}} = [x]_{\mathbf{e}}^t N [y]_{\mathbf{e}} \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Remarquons que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[e_k]_{\mathbf{e}}$ est le k-ième vecteur de la base canonique. En appliquant ces égalités à $x = e_i$ et $y = e_j$, pour $i, j \in [\![1, n]\!]$, on obtient $a_{ij} = b_{ij}$. Par conséquent, $M = N$. □

Ceci motive la définition suivante.

Définition I.1.5. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $b : E \times E \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire, la *matrice représentative de b dans la base* $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est la matrice

$$\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}) = (b(e_i, e_j))_{i,j} \in \mathrm{M}_n(K).$$

C'est l'unique matrice $M \in \mathrm{M}_n(K)$ vérifiant

$$b(x, y) = [x]_{\mathbf{e}}^t M [y]_{\mathbf{e}} \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Le lemme suivant donne un exemple fondamental.

Lemme I.1.6 (Exemple fondamental). *Soit $M = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(K)$, soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit*

$$\begin{aligned} b_M \colon E \times E &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto [x]_{\mathbf{e}}^t M [y]_{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$b_M(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j$$

pour tous $x_i, y_j \in K$,

Alors, b_M est bilinéaire. De plus, on a $\mathrm{Mat}(b_M; \mathbf{e}) = M$.

Démonstration. Le plus simple pour démontrer la bilinéarité est sans doute de se rappeler que l'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow K^n \\ x &\longmapsto [x]_{\mathbf{e}} \end{aligned}$$

est K-linéaire (c'est même un isomorphisme d'espaces vectoriels). Pour tous $x, x', y, y' \in E$ et tous $\lambda, \mu \in K$, on a

$$\begin{aligned} b_M(x + \lambda x', y) &= ([x + \lambda x']_{\mathbf{e}})^t M [y]_{\mathbf{e}} \\ &= ([x]_{\mathbf{e}} + \lambda [x']_{\mathbf{e}})^t M [y]_{\mathbf{e}} \\ &= ([x]_{\mathbf{e}}^t + \lambda [x']_{\mathbf{e}}^t) M [y]_{\mathbf{e}} \\ &= b_M(x, y) + \lambda b_M(x', y), \end{aligned}$$

ainsi que

$$\begin{aligned} b_M(x, y + \mu y') &= [x]_{\mathbf{e}}^t M [y + \mu y']_{\mathbf{e}} \\ &= [x]_{\mathbf{e}}^t M([y]_{\mathbf{e}} + \mu [y']_{\mathbf{e}}) \\ &= b_M(x, y) + \mu b_M(x, y'). \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $[e_k]_{\mathbf{e}}$ est le k-ième vecteur de la base canonique de K^n, i.e. le vecteur dont toutes les coordonnées sont nulles, exceptée la k-ième qui vaut 1. L'égalité $\mathrm{Mat}(b_M; \mathbf{e}) = M$ découle de la définition de la matrice représentative. $\square$

Ce lemme est très utile pour démontrer qu'une application est une forme bilinéaire et identifier sa matrice représentative, surtout dans le cas de $E = K^n$ muni de sa base canonique, puisque dans ce cas, vecteurs et vecteurs des coordonnées dans la base canonique se confondent.

Exemples I.1.7.

(1) Soit

$$\begin{array}{rcl} b\colon \quad \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) & \longmapsto & x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_1 - 4x_2y_2. \end{array}$$

L'exemple I.1.6 montre immédiatement que b est bilinéaire, et que sa matrice représentative dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

(2) Soit

$$\begin{array}{rcl} b\colon \mathbb{C}_2[X] \times \mathbb{C}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ (P, Q) & \longmapsto & P(0)Q(1). \end{array}$$

On peut vérifier à la main que b est bilinéaire. Néanmoins, si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$ et $Q = a'_0 + a'_1X + a'_2X^2$, on a

$$b(P, Q) = a_0(a'_0 + a'_1 + a'_2),$$

et on voit que b est bilinéaire, et que sa matrice représentative dans la base $(1, X, X^2)$ est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Attention aux indices dans cet exemple !

Corollaire I.1.8. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On a un isomorphisme entre $\mathscr{B}(E)$ et $\mathrm{M}_n(K)$. Cette bijection est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} b & \longmapsto & \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}) \\ b_M & \longleftarrow & M. \end{array}$$

Démonstration. Si $b : E \times E \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire, la définition de la matrice représentative donne $b_{\mathrm{Mat}(b;\mathbf{e})} = b$. Si maintenant, $M \in \mathrm{M}_n(K)$, on sait d'après le lemme I.1.6 que $\mathrm{Mat}(b_M; \mathbf{e}) = M$.

Ainsi, les applications de l'énoncé sont inverses l'une de l'autre. Il est clair qu'elles sont K-linéaires, et on a donc un isomorphisme de K-espaces vectoriels. □

On étudie maintenant l'effet d'un changement de base.

PROPOSITION I.1.9 (Formule de changement de base). *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soient $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ deux bases de E. Enfin, soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire.*

Si $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ est la matrice dont les colonnes sont $[e'_1]_{\mathbf{e}}, \ldots, [e'_n]_{\mathbf{e}}$, alors on a

$$\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}') = P^t \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}) P.$$

Démonstration. Par définition, pour tout $x \in E$, on a $P[x]_{\mathbf{e}'} = [x]_{\mathbf{e}}$. Pour tous $x, y \in E$, on a donc

$$\begin{aligned} b(x,y) &= [x]_{\mathbf{e}}^t \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})[y]_{\mathbf{e}} \\ &= (P[x]_{\mathbf{e}'})^t \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})(P[y]_{\mathbf{e}'}) \\ &= [x]_{\mathbf{e}'}^t (P^t \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}) P)[y]_{\mathbf{e}'}, \end{aligned}$$

la première égalité provenant de la définition d'une matrice représentative. La dernière égalité et la définition d'une matrice représentative fournit la conclusion. □

Une conséquence intéressante est que deux matrices représentatives d'une même forme bilinéaire dans des bases différentes ont même rang (puisque multiplier une matrice par une matrice inversible à gauche ou à droite conserve le rang).

On peut donc donner la définition suivante.

DÉFINITION I.1.10. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Le *rang* d'une forme bilinéaire $b : E \times E \longrightarrow K$ est le rang d'une matrice représentative de b dans une base arbitraire. Il est noté $\mathrm{rg}(b)$.

On finit par une caractérisation des formes bilinéaires symétriques en termes de matrices représentatives.

LEMME I.1.11. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

(1) *la forme bilinéaire b est symétrique ;*

(2) *pour toute base $\mathbf{e}$ de E, la matrice $\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})$ est symétrique ;*

(3) *il existe une base $\mathbf{e}$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})$ soit symétrique.*

Démonstration. L'implication « (1) $\Longrightarrow$ (2) » découle des définitions et « (2) $\Longrightarrow$ (3) » est évidente. Supposons qu'il existe une base $\mathbf{e}$ de E telle que la matrice $M = \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})$ soit symétrique.

D'après la définition d'une matrice représentative, on a

$$b(x,y) = [x]_{\mathbf{e}}^t M [y]_{\mathbf{e}} \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Comme $[x]_{\mathbf{e}}^t M[y]_{\mathbf{e}}$ est un réel, on a $([x]_{\mathbf{e}}^t M[y]_{\mathbf{e}})^t = [y]_{\mathbf{e}}^t M[x]_{\mathbf{e}}$, et par conséquent

$$b(x,y) = ([x]_{\mathbf{e}}^t M[y]_{\mathbf{e}})^t = [y]_{\mathbf{e}}^t M^t[x]_{\mathbf{e}} = [y]_{\mathbf{e}}^t M[x]_{\mathbf{e}} = b(y,x)$$

pour tous $x, y \in E$, d'où le résultat. $\square$

Ce lemme, couplé au corollaire I.1.8, donne immédiatement le résultat suivant.

Corollaire I.1.12. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On a un isomorphisme entre $\mathscr{BS}(E)$ et le sous-espace $\mathscr{S}_n(K)$ des matrices symétriques de taille n. Cette bijection est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} b & \longmapsto & \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}) \\ b_M & \longleftarrow\!\shortmid & M. \end{array}$$

Remarque I.1.13. Ce résultat dit entre autres que toutes les formes bilinéaires symétriques sur un K-espace vectoriel E de dimension finie sont de la forme b_M, où M est une matrice symétrique (une fois fixée une base de E).

À partir de maintenant, on étudie les formes bilinéaires symétriques. On commence par faire quelques rappels sur les formes linéaires.

I.2. Application linéaire associée

Définition I.2.1. Soit E un K-espace vectoriel. Une *forme linéaire sur E* est un élément de $\mathscr{L}(E, K)$, i.e. une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow K$. On note E^* le K-espace vectoriel des formes linéaires sur E.

Un suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on définit une forme linéaire e_i^* par

$$e_i^* : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k e_k & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Autrement dit, e_i^* est l'unique forme linéaire telle que $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$.

Lemme I.2.2. *Soit E un K-espace de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, la famille $\mathbf{e}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ est une base de E^*.*

De plus, pour tout $\varphi \in E^*$, on a $\varphi = \displaystyle\sum_{i=1}^n \varphi(e_i) e_i^*$.

Démonstration. Puisque E est de dimension n, $E^* = \mathscr{L}(E, K)$ est de dimension n. Il suffit donc de démontrer que la famille $\mathbf{e}^*$ est génératrice, puisqu'elle possède n éléments. Soit $\varphi \in E^*$. Soit $x \in E$. Par définition de e_i^*, $e_i^*(x)$ est la coordonnée de x en e_i. On a donc $x = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i$. Mais alors, on a

$$\varphi(x) = \varphi(\sum_{i=1}^{n} e_i^*(x) e_i) = \sum_{i=1}^{n} e_i^*(x)\varphi(e_i) = (\sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*)(x)$$

pour tout $x \in E$. Ainsi, $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i) e_i^*$. Par conséquent, $\mathbf{e}^*$ est une base de E^*. □

Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. La linéarité en y implique que, pour tout $x \in E$, l'application $b(x, \_\,) : E \longrightarrow K$ est une forme linéaire. La linéarité en x montre alors que l'application

$$\begin{aligned} b^* \colon E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto b(x, \_\,) \end{aligned}$$

est linéaire.

Définition I.2.3. Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. L'application

$$\begin{aligned} b^* \colon E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto b(x, \_\,) \end{aligned}$$

est appelée *application linéaire associée à b.*

Le *noyau* de $b : E \times E \longrightarrow K$, noté $\mathrm{Ker}(b)$, est par définition le noyau de b^*. Autrement dit,

$$\mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Ker}(b^*) = \{x \in E \mid b(x, y) = 0 \ \text{ pour tout } y \in E\}.$$

On dit que b est *non dégénérée* si son noyau est nul, c'est-à-dire si , pour tout $x \in E$, on a

$$b(x, y) = 0 \ \text{ pour tout } y \in E \Longrightarrow x = 0.$$

Ceci revient à dire que b^* est injective.

On dit que b est *dégénérée* si elle n'est pas non dégénérée.

Remarque I.2.4. Si E est de dimension finie, alors $b : E \times E \longrightarrow K$ est non dégénérée si, et seulement si, $b^* : E \longrightarrow E^*$ est un isomorphisme.

En effet, comme E est de dimension finie, E^* aussi et on a $\dim_K(E) = \dim_K(E^*)$. Ainsi, b^* est injective si, et seulement si, elle est bijective.

Exemples I.2.5.

(1) La forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rccl} b\colon & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & x_1y_2 + x_2y_1 \end{array}$$

est non dégénérée. En effet, soit $x = (x_1, x_2)$ tel que $b(x, y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^2$.

Alors, on a $b(x,(1,0)) = 0 = x_2$ et $b(x,(0,1)) = 0 = x_1$, d'où $x = (0,0)$.

(2) La forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rccl} b\colon & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((x_1,x_2),(y_1,y_2)) & \longmapsto & x_1y_1 \end{array}$$

est dégénérée. En effet, on a $b((0,1), y) = 0$ pour tout $y \in \mathbb{R}^2$.

Proposition I.2.6. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. Alors, pour toute base $\mathbf{e}$ de E, on a*

$$\mathrm{Mat}(b^*; \mathbf{e}, \mathbf{e}^*) = \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}).$$

En particulier :

(1) *la forme bilinéaire b est non dégénérée si, et seulement si, sa matrice représentative dans une base arbitraire est inversible ;*

(2) *pour toute base $\mathbf{e}$ de E, on a $x \in \mathrm{Ker}(b)$ si, et seulement si, $[x]_{\mathbf{e}} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}))$;*

(3) *on a $\mathrm{rg}(b) = \mathrm{rg}(b^*)$ et $\dim(E) = \dim_K(\mathrm{Ker}(b)) + \mathrm{rg}(b)$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. D'après le lemme I.2.2, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$b(e_j, \_\,) = \sum_{i=1}^{n} b(e_j, e_i)e_i^* = \sum_{i=1}^{n} b(e_i, e_j)e_i^*,$$

la dernière égalité découlant du fait que b est symétrique. Par définition d'une matrice représentative, on a donc

$$\mathrm{Mat}(b^*; \mathbf{e}, \mathbf{e}^*) = (b(e_i, e_j))_{i,j} = \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}).$$

Montrons les points $(1) - (3)$. Soit $\mathbf{e}$ une base de E. Par définition, b est non dégénérée si, et seulement si, b^* est injective. D'après la remarque I.2.4, cela équivaut au fait que b^* est un isomorphisme. Cela revient à dire que $\mathrm{Mat}(b^*; \mathbf{e}, \mathbf{e}^*)$ est inversible, ou encore que $\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})$ est inversible. Ceci démontre (1).

D'autre part, on a

$$x \in \mathrm{Ker}(b) = \mathrm{Ker}(b^*) \iff \mathrm{Mat}(b^*; \mathbf{e}, \mathbf{e}^*)[x]_{\mathbf{e}} = 0 \iff \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})[x]_{\mathbf{e}} = 0,$$

d'où (2). Enfin, le rang de b est le rang de $\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})$. C'est donc aussi le rang de $\mathrm{Mat}(b^*; \mathbf{e}, \mathbf{e}^*)$, c'est-à-dire le rang de b^*. On applique alors le théorème du rang à b^* pour en déduire l'égalité désirée. Ceci achève la démonstration. □

Exemple I.2.7. Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme bilinéaire symétrique définie par

$$b(x, y) = x_1y_1+x_2y_2+6x_3y_3+2x_1y_2+2x_2y_1+3x_1y_3+3x_3y_1+3x_2y_3+3x_3y_2,$$

pour tous $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Sa matrice représentative dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Des calculs élémentaires montrent que $\mathrm{Ker}(M) = K \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Ainsi, b est dégénérée.

I.3. Formes quadratiques

Si $b : E \times E \longrightarrow K$ est une forme bilinéaire symétrique, on peut lui associer une application en une seule variable, à savoir

$$\begin{aligned} q_b \colon E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto b(x, x). \end{aligned}$$

Le lemme suivant étudie quelques propriétés de cette application. Pour des raisons qui deviendront claires un peu plus loin, on se limitera ici au cas des corps K dans lesquels $2 \neq 0$. Cela revient à dire que 2 est inversible dans K, i.e. que l'on peut diviser par 2. C'est le cas de la plupart des corps avec lesquels on travaille habituellement ($\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$).

Définition I.3.1. On dit qu'un corps K est *de caractéristique différente de 2 si $2 \neq 0$, i.e. si 2 est inversible dans K.*

Lemme I.3.2. *Soit K un corps de caractéristique différente de 2.*

Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique, et soit

$$\begin{aligned} q_b \colon E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto b(x, x). \end{aligned}$$

Alors :

(1) *pour tout $x \in E$, et tout $\lambda \in K$, on a $q_b(\lambda x) = \lambda^2 q_b(x)$;*

(2) *pour tous* $x, y \in E$, *on a* $b(x,y) = \dfrac{1}{2}(q_b(x+y) - q_b(x) - q_b(y))$ *(Identité de polarisation).*

Démonstration. Gardons les notations de l'énoncé.

Pour tout $x \in E$, et tout $\lambda \in K$, on a

$$q_b(\lambda x) = b(\lambda x, \lambda x) = \lambda^2 b(x,x) = \lambda^2 q_b(x).$$

D'autre part, pour tous $x, y \in E$, on a

$$q_b(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x,x)+b(x,y)+b(y,x)+b(x,y) = q_b(x)+q_b(y)+2b(x,y),$$

puisque b est symétrique. On obtient alors l'égalité voulue en réarrangeant les termes. □

Définition I.3.3. Soit K un corps de caractéristique différente de 2.

Une *forme quadratique* sur un K-espace vectoriel E est une application $q : E \longrightarrow K$ vérifiant les deux conditions suivantes :

(1) pour tout $x \in E$, et tout $\lambda \in K$, on a $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$;

(2) l'application

$$\begin{aligned} b_q \colon E \times E &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \end{aligned}$$

est bilinéaire symétrique.

La forme bilinéaire symétrique b_q est appelée *la forme polaire de* q .

L'ensemble $\mathscr{Q}(E)$ des formes quadratiques sur E est un sous-espace vectoriel de l'espace $\mathscr{F}(E,K)$ (**exercice**).

Exemple I.3.4. Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. D'après le lemme I.3.2, l'application

$$\begin{aligned} q_b \colon E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto b(x,x) \end{aligned}$$

est une forme quadratique, de forme polaire b.

Définition I.3.5. Soit K un corps de caractéristique différente de 2, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. La forme quadratique

$$\begin{aligned} q_b \colon E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto b(x,x) \end{aligned}$$

est appelée la *forme quadratique associée à* b.

Le lemme suivant caractérise la forme polaire d'une forme quadratique.

LEMME I.3.6. *Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique (où K est de caractéristique différente de 2). Alors, la forme polaire de q est l'unique forme bilinéaire symétrique $b : E \times E \longrightarrow K$ vérifiant*

$$q(x) = b(x,x) \quad \textit{pour tout } x \in E.$$

Démonstration. Commençons par démontrer que la forme polaire de q vérifie l'égalité demandée. Pour tout $x \in E$, on a

$$b_q(x,x) = \frac{1}{2}(q(2x) - q(x) - q(x)).$$

Comme q est une forme quadratique, on a $q(2x) = 4q(x)$, et on obtient

$$q(x) = b_q(x,x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Si maintenant $b \in \mathscr{BS}(E)$ vérifie $q(x) = b(x,x)$ pour tout $x \in E$, alors pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} b_q(x,y) &= \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \\ &= \frac{1}{2}(b(x+y,x+y) - b(x,x) - b(y,y)) \\ &= \frac{1}{2}(b(x,y) + b(y,x)) = b(x,y). \end{aligned}$$

On a donc $b = b_q$, d'où le résultat. □

REMARQUE I.3.7. Ce lemme permet de vérifier qu'une application est une forme quadratique et de trouver sa forme polaire lorsque l'on a déjà une intuition du résultat.

En effet, soit $q : E \longrightarrow K$ une application. Supposons que l'on trouve une forme bilinéaire symétrique $b : E \times E \longrightarrow K$ telle que

$$q(x) = b(x,x) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Alors, $q = q_b$, ce qui montre que q est une forme quadratique. De plus, le lemme précédent montre que la forme polaire de q est b.

EXEMPLES I.3.8.

(1) Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_1x_3 - x_1x_2 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^3.$$

Soit $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$b(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_1y_3 + x_3y_1 - \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_1) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}^3.$$

Alors, b est bilinéaire symétrique, et on constate que l'on a

$$q(x) = b(x,x) \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^3.$$

On en déduit que q est une forme quadratique, de forme polaire b.

(2) De manière plus générale, soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. Soit $\mathbf{e}$ une base de E, et soit $M \in \mathrm{M}_n(K)$ une matrice **symétrique**. Alors, l'application

$$\begin{aligned} q_M \colon E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto [x]_{\mathbf{e}}^t M [x]_{\mathbf{e}} \end{aligned}$$

est une forme quadratique, de forme polaire

$$\begin{aligned} b_M \colon E \times E &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto [x]_{\mathbf{e}}^t M [y]_{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Autrement dit, si $M = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(K)$ est une matrice **symétrique**, l'application

$$\begin{aligned} q_M \colon \quad E \quad &\longrightarrow K \\ \sum_{k=1}^n x_k e_k &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j \end{aligned}$$

est une forme quadratique, de forme polaire

$$\begin{aligned} b_M \colon \quad E \times E \quad &\longrightarrow K \\ (\sum_{k=1}^n x_k e_k, \sum_{k=1}^n y_k e_k) &\longmapsto \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i y_i + \sum_{i<j} a_{ij}(x_i y_j + x_j y_i). \end{aligned}$$

Nous allons maintenant établir une bijection entre l'espace des formes bilinéaires symétriques et l'espace des formes quadratiques sur E.

THÉORÈME I.3.9. *Soit K un corps de caractéristique différente de 2, et soit E un K-espace vectoriel. L'application*

$$\begin{aligned} \varphi \colon \mathscr{BS}(E) &\longrightarrow \mathscr{Q}(E) \\ b &\longmapsto q_b \end{aligned}$$

est un isomorphisme de K-espaces vectoriels, d'isomorphisme réciproque

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} \colon \mathscr{Q}(E) &\longrightarrow \mathscr{BS}(E) \\ q &\longmapsto b_q. \end{aligned}$$

Démonstration. Démontrons d'abord la linéarité de φ. Pour toutes formes bilinéaires symétriques $b_1, b_2 \in \mathscr{BS}(E)$, tout $\lambda \in K$, et tout $x \in E$, on a

$$q_{b_1+\lambda b_2}(x) = (b_1 + \lambda b_2)(x, x) = b_1(x, x) + \lambda b_2(x, x) = q_{b_1}(x) + \lambda q_{b_2}(x).$$

Autrement dit, $q_{b_1+\lambda b_2} = q_{b_1} + \lambda q_{b_2}$, c'est-à-dire

$$\varphi(b_1 + \lambda b_2) = \varphi(b_1) + \lambda \varphi(b_2).$$

Montrons maintenant la bijectivité de φ. Pour cela, on va montrer que l'application

$$\begin{aligned} \psi \colon \mathscr{Q}(E) &\longrightarrow \mathscr{BS}(E) \\ q &\longmapsto b_q \end{aligned}$$

est l'application inverse de φ. Autrement dit, pour tout $b \in \mathscr{BS}(E)$, et pour tout $q \in \mathscr{Q}(E)$, on doit démontrer les égalités

$$b_{q_b} = b \text{ et } q_{b_q} = q.$$

Soit $b \in \mathscr{BS}(E)$. Par définition, b_{q_b} est la forme polaire de $\varphi(b) = q_b$, c'est-à-dire b, d'après l'exemple I.3.4.

Soit maintenant $q \in \mathscr{Q}(E)$. Le lemme I.3.6 montre que la forme quadratique q_{b_q} associée à b_q est q, d'où le résultat voulu. □

Ce théorème permet d'obtenir le lemme suivant.

LEMME I.3.10. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Si $q : E \longrightarrow K$ est une forme quadratique, il existe une unique matrice* **symétrique** *$M \in M_n(K)$ telle que*

$$q(x) = [x]_{\mathbf{e}}^t M [x]_{\mathbf{e}} \text{ \textit{pour tout} } x \in E.$$

Elle est donnée par $M = ((b_q(e_i, e_j))_{i,j} = \mathrm{Mat}(b_q; \mathbf{e})$.

Démonstration. D'après le théorème précédent par exemple, on a $q(x) = b_q(x, x)$ pour tout $x \in E$. D'après la définition d'une matrice représentative, on a

$$q(x) = [x]_{\mathbf{e}}^t \mathrm{Mat}(b_q; \mathbf{e}) [x]_{\mathbf{e}} \text{ pour tout } x \in E.$$

Supposons maintenant que $M \in \mathrm{M}_n(K)$ soit une matrice symétrique vérifiant l'égalité désirée. Cette égalité se retraduit en disant que les formes quadratiques associées à b_q et à b_M sont égales. Le théorème précédent donne alors l'égalité $b_q = b_M$. On a par conséquent égalité des matrices représentatives, i.e. $\mathrm{Mat}(b_q; \mathbf{e}) = M$. □

DÉFINITION I.3.11. Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique sur E (où K est de caractéristique différente de 2). Le *noyau* de q est par définition le noyau de sa forme polaire b_q. On le note $\mathrm{Ker}(q)$. On dit que q est dégénérée/non dégénérée si b_q l'est.

Si E est de dimension finie $n \geq 1$, et si $\mathbf{e}$ est une base de E, la *matrice représentative de q dans la base* $\mathbf{e}$, notée $\mathrm{Mat}(q; \mathbf{e})$ est la matrice de b_q dans la base $\mathbf{e}$. Autrement dit, on a

$$\mathrm{Mat}(q; \mathbf{e}) = \mathrm{Mat}(b_q; \mathbf{e}).$$

C'est l'unique matrice symétrique $M \in \mathrm{M}_n(K)$ vérifiant

$$q(x) = [x]_{\mathbf{e}}^t M [x]_{\mathbf{e}} \text{ pour tout } x \in E.$$

Le *rang* de q est le rang de sa forme polaire, i.e. le rang de n'importe quelle matrice représentative de q (ou de b_q).

L'exemple I.3.8 (2) donne immédiatement le résultat suivant.

Lemme I.3.12 (Exemple fondamental). *Soit K un corps de caractéristique différente de 2.*

Soit $M = (a_{ij})_{ij} \in \mathrm{M}_n(K)$ une matrice **symétrique**, *soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit*

$$\begin{aligned} q_M \colon E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto [x]_{\mathbf{e}}^t M [x]_{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

Autrement dit,

$$q_M(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_{ij} x_i x_j$$

pour tous $x_i \in K$,

Alors, q_M est une forme quadratique. De plus, on a $\mathrm{Mat}(q_M; \mathbf{e}) = M$.

Exemple I.3.13. Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2x_3$ pour tous $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

Alors q est une forme quadratique, dont la matrice représentative dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 3 & \frac{3}{2} \\ 1 & \frac{3}{2} & 2 \end{pmatrix}.$$

Attention au facteur 2 dans les double produits ! !

Les deux résultats qui suivent donnent les propriétés fondamentales de la matrice représentative d'une forme quadratique.

Les propriétés de la matrice représentative d'une forme bilinéaire donne immédiatement la formule de changement de base suivante.

Proposition I.3.14 (Formule de changement de base). *Soit K un corps de caractéristique différente de 2.*

Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soient $\mathbf{e}, \mathbf{e}'$ deux bases de E. Enfin, soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique.

Si $P \in \mathrm{GL}_n(K)$ est la matrice dont les colonnes sont $[e'_1]_{\mathbf{e}}, \ldots, [e'_n]_{\mathbf{e}}$, alors on a

$$\mathrm{Mat}(q; \mathbf{e}') = P^t \mathrm{Mat}(q; \mathbf{e}) P.$$

Enfin, le théorème I.3.9 et le corollaire I.1.12 donnent le résultat suivant.

Proposition I.3.15. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. On a un isomorphisme entre $\mathscr{Q}(E)$ et le sous-espace $\mathscr{S}_n(K)$ des matrices symétriques de taille n. Cette bijection est donnée par*

$$\begin{array}{ccc} q & \longmapsto & \mathrm{Mat}(q; \mathbf{e}) \\ q_M & \longleftarrow\!\shortmid & M. \end{array}$$

Remarque I.3.16. Ce résultat dit entre autres que toutes les formes quadratiques sur un K-espace vectoriel E de dimension finie sont de la forme b_M, où M est une matrice symétrique (une fois fixée une base de E).

Chapitre II

Orthogonalité

II.1. Définitions

On généralise ici la notion d'orthogonalité, bien connue pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

Définition II.1.1. Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. On dit que $x, y \in E$ sont *b-orthogonaux* (ou simplement *orthogonaux* s'il n'y a pas de confusion possible) si $b(x, y) = 0$. On le note $x \perp y$.

On dit qu'un vecteur $x \in E$ est *isotrope* si $b(x, x) = 0$, c'est-à-dire si x est orthogonal à lui-même.

Le *cône isotrope de b* est l'ensemble des vecteurs isotropes de b, et est noté $\mathscr{C}_b$.

On dit que b est *isotrope* si elle possède au moins un vecteur isotrope **non nul**. On dit que b est *anisotrope* sinon. Autrement dit, b est anisotrope si, pour tout $x \in E$, on a

$$b(x, x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Si S est une partie de E, on note $S^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les éléments de S. Autrement dit,

$$S^\perp = \{x \in E \mid b(x, y) = 0 \ \text{ pour tout } y \in S\}.$$

On l'appelle *l'orthogonal de S*.

C'est un sous-espace vectoriel de E (**exercice**).

Remarques II.1.2.

(1) Si b est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on retrouve la notion d'orthogonalité usuelle.

(2) On a $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \mathrm{Ker}(b)$.

(3) Les définitions impliquent immédiatement que $\mathrm{Ker}(b) \subset \mathscr{C}_b$.

(4) Une forme anisotrope est non dégénérée.

En effet, supposons que $b : E \times E \longrightarrow K$ soit anisotrope. Alors, $\mathscr{C}_b = \{0\}$, et donc $\mathrm{Ker}(b) = \{0\}$ d'après le point précédent.

(5) Une forme non dégénérée peut très bien être isotrope.

Par exemple, la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} b\colon K^2 \times K^2 &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto x_1y_2 + x_2y_1 \end{aligned}$$

est non dégénérée, puisque sa matrice représentative dans la base canonique est la matrice inversible $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. En revanche, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est isotrope.

Ceci montre également que l'inclusion $\mathrm{Ker}(b) \subset \mathscr{C}_q$ est stricte en général.

(6) Pour toute partie S de E, on a $\mathrm{Vect}_K(S)^\perp = S^\perp$ (**exercice**).

(7) Si $S_1 \subset S_2$, alors $S_2^\perp \subset S_1^\perp$ (**exercice**).

(8) Pour toute partie S de E, on a $S \subset (S^\perp)^\perp$.
En effet, soit $y \in S$. Pour tout $x \in S^\perp$, on a $b(y,x) = b(x,y) = 0$, puisque $x \in S^\perp$ et $y \in S$. Ainsi, y est orthogonal à tout élément de $S^\perp$, i.e. $y \in (S^\perp)^\perp$.
Notons qu'une condition nécessaire pour avoir l'égalité est que S soit un sous-espace vectoriel de E, puisque $(S^\perp)^\perp$ en est un. Même dans ce cas, l'égalité n'est pas assurée.
Par exemple, considérons la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (P,Q) &\longmapsto P(0)Q(0), \end{aligned}$$

et soit $F = \mathbb{R} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1)$. On a alors

$$F^\perp = \{P \in \mathbb{R}[X] \mid P(0) = 0\},$$

et par conséquent, on a $(F^\perp)^\perp = \mathbb{R}[X] \neq F$.

La proposition suivante permet de calculer la dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, lorsque E est de dimension finie.

Proposition II.1.3. *Soit E un K-espace de dimension finie $n \geq 1$, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Alors, pour tout sous-espace F de E, on a*

$$\dim_K(F^\perp) = \dim_K(E) - \dim_K(F).$$

De plus, pour tout sous-espace F de E, on a $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration. Soit F un sous-espace de E, et soit

$$\begin{aligned} \rho_F\colon E^* &\longrightarrow F^* \\ \varphi &\longmapsto \varphi_{|F}. \end{aligned}$$

Considérons alors l'application linéaire $f = b^* \circ \rho_F$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f\colon E &\longrightarrow F^* \\ x &\longmapsto b(x, \_\,)_{|F}. \end{aligned}$$

Nous allons appliquer le théorème du rang à f. Commençons par déterminer son noyau. Pour tout $x \in E$, on a

$$x \in \mathrm{Ker}(f) \iff b(x, \_\,)_{|F} = 0 \iff b(x,y) = 0 \text{ pour tout } y \in F \iff x \in F^{\perp}.$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = F^{\perp}$.

Montrons que f est surjective. Puisque b est non dégénérée, b^* est injective, donc bijective d'après la remarque I.2.4. En particulier, b^* est surjective. Il suffit donc de démontrer que ρ_F est surjective. Soit G un supplémentaire de F dans E. On a donc $E = F \oplus G$. Soit $\psi \in F^*$. On définit $\varphi \in E^*$ par

$$\varphi(x_F + x_G) = \psi(x_F) \text{ pour tout } x_F \in F \text{ et tout } x_G \in G.$$

Par définition, $\rho_F(\varphi) = \varphi_{|F} = \psi$. Ainsi, ρ_F est surjective, et f également. Le théorème du rang donne alors

$$\dim_K(F^{\perp}) + \dim_K(F^*) = \dim_K(E).$$

Puisque $\dim_K(F^*) = \dim_K(F)$, on obtient l'égalité voulue.

On a donc en particulier

$$\dim_K((F^{\perp})^{\perp}) = \dim_K(E) - \dim_K(F^{\perp}) = \dim_K(F).$$

Comme $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ d'après la remarque II.1.2 (9), on en déduit que $F = (F^{\perp})^{\perp}$. □

Ce résultat est faux si b est dégénérée.

Exemple II.1.4. Soit

$$\begin{aligned} b\colon K^3 \times K^3 &\longrightarrow K \\ (x,y) &\longmapsto x_3 y_3, \end{aligned}$$

et soit $F = \mathrm{Vect}_K(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$. Alors, $F^{\perp} = K^3$, et donc

$$\dim_K(F) + \dim_K(F^{\perp}) = 4 \neq \dim_K(K^3).$$

De plus, on a $(F^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Ker}(b) = \{x \in K^3 \mid x_3 = 0\} \neq F$.

Lorsque $E = \mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire, pour toute droite D, on a une décomposition en somme directe $E = D \oplus D^{\perp}$, ce qui permet de parler de projection orthogonale sur une droite ou un plan. On voudrait généraliser cette situation pour une forme bilinéaire symétrique arbitraire. Le théorème suivant nous donne des résultats dans ce sens.

Théorème II.1.5. *Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique.*

(1) *Pour tout sous-espace F de dimension finie tel que la restriction $b_{|F\times F} : F \times F \longrightarrow K$ de b à $F \times F$ est non dégénérée, on a $E = F \oplus F^\perp$. Si de plus $b_{|F^\perp \times F^\perp}$ est aussi non dégénérée, alors $F = (F^\perp)^\perp$.*

(2) *si $b : E \times E \longrightarrow K$ est anisotrope, alors pour tout sous-espace F de dimension finie, on a $E = F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.*

Démonstration. Avant de commencer la démonstration, faisons quelques remarques préliminaires. Soit F un sous-espace de E. Alors, l'application duale associée à $b_{|F\times F}$ est simplement

$$\begin{aligned} \theta\colon F &\longrightarrow F^* \\ z &\longmapsto b(z,\_\,)_{|F}, \end{aligned}$$

puisque que l'on restreint les deux arguments de b à F.

La définition du noyau d'une forme bilinéaire symétrique montre également que $\mathrm{Ker}(b_{F\times F}) = F \cap F^\perp$. En particulier, $b_{|F\times F}$ est non dégénérée si, et seulement si, $F \cap F^\perp = \{0\}$.

Passons à la démonstration proprement dite.

(1) Supposons que $b_{|F\times F} : F \times F \longrightarrow K$ soit non dégénérée. Par hypothèse, θ est injective, donc un isomorphisme d'après la remarque I.2.4.

Soit maintenant $x \in E$.

La forme linéaire $b(x,\_\,)_{|F} \in F^*$ possède un unique antécédent $x_F \in F$ par θ. On a donc $b(x,\_\,)_{|F} = b(x_F,\_\,)_{|F}$, soit encore $b(x - x_F,\_\,)_{|F} = 0$. Autrement dit, on a

$$b(x - x_F, y) = 0 \quad \text{pour tout } y \in F.$$

Par conséquent, $x - x_F \in F^\perp$. Puisque $x = x_F + (x - x_F) \in F + F^\perp$, on a donc

$$E = F + F^\perp.$$

Il reste à montrer que la somme est directe. Comme $b_{|F\times F}$ est non dégénérée, on a $F \cap F^\perp = \{0\}$. On a donc bien $E = F \oplus F^\perp$.

Supposons de plus que $b_{|F^\perp \times F^\perp}$ est non dégénérée, et montrons que $(F^\perp)^\perp = F$. On sait déjà que $F \subset (F^\perp)^\perp$. Il reste donc à montrer l'autre inclusion. Soit $x \in (F^\perp)^\perp$. Puisque $E = F \oplus F^\perp$, on peut écrire $x = x_F + x_{F^\perp}$, avec $x_F \in F$ et $x_{F^\perp} \in F^\perp$. Comme $F \subset (F^\perp)^\perp$, on a $x_{F^\perp} = x - x_F \in (F^\perp)^\perp$. Par hypothèse, on a $F^\perp \cap (F^\perp)^\perp = \{0\}$. Par conséquent, $x_{F^\perp} = 0$, et on a $x = x_F \in F$. On obtient ainsi l'inclusion manquante.

(2) Il découle de la définition que la restriction d'une forme bilinéaire symétrique anisotrope à un sous-espace est encore anisotrope. Il suffit alors d'appliquer (1). □

Le théorème précédent est faux si F est de dimension infinie, même dans le cas anisotrope.

Exemple II.1.6. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles $u = (u_n)_{n\geq 1}$ bornées. Pour tous $u, v \in E$, la série $\sum_{n\geq 1} \frac{u_n v_n}{n^2}$ est convergente, et on peut considérer la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} b\colon E \times E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto \sum_{n\geq 1} \frac{u_n v_n}{n^2}. \end{aligned}$$

Notons que cette forme est anisotrope. En effet, soit $u \in E \setminus \{0\}$. Alors, il existe $k \geq 1$ tel que $u_k \neq 0$. Mais alors, on a

$$b(u,u) \geq \frac{u_k^2}{k^2} > 0.$$

Par conséquent, si $u \in E$ vérifie $b(u,u) = 0$, alors $u = 0$.

Soit F le sous-espace des suites réelles nulles à partir d'un certain rang. Remarquons que pour tout $k \geq 1$, la suite e_k dont tous les termes sont nuls, sauf le k-ème qui vaut 1, est dans F.

Remarquons que pour tout $u \in E$, on a $b(u, e_k) = \frac{u_k}{k^2}$. Il en résulte aisément que $F^\perp = \{0\}$, et $(F^\perp)^\perp = \{0\}^\perp = E$. On a donc $E \neq F \oplus F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp \neq F$.

On peut maintenant définir la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, lorsque b est anisotrope.

Définition II.1.7. Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique anisotrope. Soit F un sous-espace de E de dimension finie. La *projection orthogonale sur* F, notée p_F, est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

Autrement dit, pour tout $x \in E$, $p_F(x)$ est l'unique élément $x_F \in F$ tel que $x - x_F \in F^\perp$.

Remarques II.1.8.

(1) On peut bien sûr définir la projection orthogonale sur F dès que l'on a une décomposition en somme directe $E = F \oplus F^\perp$, même si b est isotrope, mais cela a un intérêt limité pour ce que nous voulons faire.

(2) La plupart du temps, on appliquera le théorème précédent lorsque E est de dimension finie. Néanmoins, le cas de la dimension infinie peut être utile également, comme par exemple dans la théorie des séries de Fourier.

Remarquons que nous n'avons pas expliqué comment calculer explicitement la projection orthogonale. C'est entre autres l'objet du paragraphe suivant.

II.2. Bases orthogonales

Le but est maintenant d'exhiber des bases de E (de dimension finie) dans laquelle la matrice représentative de $b : E \times E \longrightarrow K$ est diagonale, l'intérêt étant de faciliter les calculs.

Définition II.2.1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. Une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E est *b-orthogonale* si les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont deux à deux orthogonaux, i.e. si

$$b(e_i, e_j) = 0 \quad \text{pour tous } i \neq j, i, j \in [\![1, n]\!] \, .$$

Autrement dit, $\mathbf{e}$ est b-orthogonale si $\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})$ est diagonale. Cela revient aussi à dire qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in K$ tels que

$$b(\sum_{i=1} x_i e_i, \sum_{i=1} y_i e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k y_k,$$

pour tous $x_i, y_i \in K$.

On dit que $\mathbf{e}$ est *b-orthonormée* si pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$b(e_i, e_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

Autrement dit, $\mathbf{e}$ est b-orthonormée si $\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}) = I_n$. Cela revient aussi à dire que

$$b(\sum_{i=1} x_i e_i, \sum_{i=1} y_i e_i) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k,$$

pour tous $x_i, y_i \in K$.

Exemples II.2.2.

(1) La base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est une base orthonormée pour le produit scalaire.

(2) Plus généralement, la base canonique de K^n est une base orthonormée pour la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} b\colon K^n \times K^n &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i. \end{aligned}$$

(3) Considérons la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto 2(x_1y_2 + x_2y_1). \end{aligned}$$

Soient $e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Alors, $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$ est une base b-orthogonale. En effet, on a

$$b(e_1,e_1) = 1,\ b(e_2,e_2) = -1,\ b(e_1,e_2) = 0.$$

En revanche, on ne peut trouver de base de E qui soit b-orthonormée. En effet, supposons que $\mathbf{e}' = (e'_1, e'_2)$ soit b-orthonormée. Alors, pour tout $x = x'_1e'_1 + x'_2e'_2$, on aurait

$$b(x,x) = x_1'^2 + x_2'^2 \geq 0.$$

Or, ce n'est pas le cas, puisque $b(e_2,e_2) = -1 < 0$.

On va maintenant démontrer l'existence de bases b-orthogonales, modulo une légère hypothèse sur le corps de base.

Théorème II.2.3. *Soit K un corps de caractéristique différente de 2, soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$. Alors, pour toute forme bilinéaire symétrique $b : E \times E \longrightarrow K$, E admet au moins une base b-orthogonale.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n. Soit (H_n) la proposition suivante :

(H_n) Pour tout K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et toute forme bilinéaire symétrique $b : E \times E \longrightarrow K$, E admet au moins une base b-orthogonale.

On suppose que $n = 1$. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. Alors, toute base de E est b-orthogonale.

Supposons que (H_n) soit vraie. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n+1$, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique. Si b est nulle, toute base de E est b-orthonormée. Supposons que b soit non nulle. D'après l'identité de polarisation (lemme I.3.2 (2)), il existe $e_1 \in E$ tel que $b(e_1,e_1) \neq 0$. Soit $F = \mathrm{Vect}_K(e_1)$. Puisque $b(e_1,e_1) \neq 0$, la forme bilinéaire symétrique $b_{|F\times F}$ est non dégénérée. D'après le théorème II.1.5 (1), on a $E = F \oplus F^\perp$. En particulier, $F^\perp$ est de dimension n. Par hypothèse de récurrence, $F^\perp$ possède une base $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ qui est $b_{|F^\perp \times F^\perp}$-orthogonale. Mais alors, $(e_2, \ldots, e_{n+1})$ est clairement b-orthogonale. Comme $e_1 \in F$, e_1 est orthogonal à

$e_2, \ldots, e_{n+1}$. Ainsi, les vecteurs $e_1, \ldots, e_{n+1}$ sont deux à deux orthogonaux. Enfin, puisque $E = F \oplus F^\perp$, $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ est une base de E. Ainsi, (H_{n+1}) est vraie. Ceci achève la récurrence. $\square$

Notons que la démonstration donne une méthode pour trouver une base b-orthogonale, mais qui n'est pas simple à mettre en œuvre.

Exemple II.2.4. Considérons la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{aligned} b_M \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x^t M y, \end{aligned}$$

où $M = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On commence par trouver $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $b(e_1, e_1) \neq 0$. Par exemple, prenons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a alors $b(e_1, e_1) = 3$. Si $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1)$, on a $F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\}$. On recommence le procédé avec $F^\perp$. Le vecteur $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un élément de $F^\perp$, et on a $b(e_2, e_2) = 6$. Il faut enfin trouver un vecteur e_3 qui soit à la fois orthogonal à e_1 et à e_2. Or, on a

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, e_2)^\perp = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 0, 4x_2 + 2x_3 = 0\} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}).$$

Soit $e_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a $b(e_3, e_3) = 0$. Par construction, $\mathbf{e} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base b-orthogonale, et on a

$$\mathrm{Mat}(b; \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme application, nous allons expliquer comment déterminer la projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie, dans le cas où b est anisotrope.

Proposition II.2.5. *Soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique anisotrope, et soit F un sous-espace de dimension finie de E. Si $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base b-orthogonale de F, alors pour tout $x \in E$, on a*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{b(e'_i, x)}{b(e'_i, e'_i)} e'_i.$$

Démonstration. Gardons les notations de l'énoncé. Soit $x \in E$, et soit $y = \sum_{i=1}^{n} \frac{b(e'_i, x)}{b(e'_i, e'_i)} e'_i$. Par définition, $y \in F$. De plus, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$b(e'_j, x - y) = b(e'_j, x) - \sum_{i=1}^{n} \frac{b(e'_i, x)}{b(e'_i, e'_i)} b(e'_j, e'_i).$$

Comme $\mathbf{e}'$ est b-orthogonale, on en déduit que

$$b(e'_j, x - y) = b(e'_j, x) - \frac{b(e'_j, x)}{b(e'_j, e'_j)} b(e'_j, e'_j) = 0.$$

Ainsi, $x - y$ est orthogonal à $e'_1, \ldots, e'_n$. Comme $\mathbf{e}'$ est une base de F, on en déduit que $x - y \in F^{\perp}$. Par conséquent, on a bien $y = p_F(x)$. □

COROLLAIRE II.2.6. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique anisotrope, et soit $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une base b-orthogonale de E. Alors, pour tout $x \in E$, on a*

$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{b(e'_i, x)}{b(e'_i, e'_i)} e'_i.$$

Démonstration. Il suffit de prendre $F = E$ dans la proposition précédente. □

Nous allons maintenant donner un algorithme qui permet d'exhiber une base b-orthonormée à partir d'une base arbitraire dans le cas anisotrope.

THÉORÈME II.2.7 (Algorithme de Gram-Schmidt). *Soit E un K-espace vectoriel, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique anisotrope. Enfin, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E.*

Soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$ la famille d'éléments de E définie par récurrence comme suit :

$$e'_1 = e_1 \quad \text{et } e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{b(e'_i, e_{k+1})}{b(e'_i, e'_i)} e'_i \quad \text{pour tout } k \in [\![1, n-1]\!].$$

Alors, on a :

(1) *pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}_K(e'_1, \ldots, e'_k) = \mathrm{Vect}_K(e_1, \ldots, e_k)$;*

(2) *pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la famille $(e'_1, \ldots, e'_k)$ est une base b-orthogonale de $\mathrm{Vect}_K(e_1, \ldots, e_k)$.*

En particulier, $(e'_1, \ldots, e'_n)$ est une base b-orthogonale de $\mathrm{Vect}_K(e_1, \ldots, e_n)$.

Démonstration. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, posons $F_k = \mathrm{Vect}_K(e_1, \dots, e_k)$. Notons que l'on peut définir la projection orthogonale sur F_k, puisque F_k est de dimension finie k (la famille $(e_1, \dots, e_k)$ étant libre) et b est anisotrope.

Démontrons le résultat par récurrence finie sur k.

Pour $k = 1$, il n'y a rien à faire. Soit $k \in [\![1, n]\!]$. Supposons avoir démontré que $\mathrm{Vect}_K(e'_1, \dots, e'_k) = \mathrm{Vect}_K(e_1, \dots, e_k)$ et que $(e'_1, \dots, e'_k)$ est une base b-orthogonale de $\mathrm{Vect}_K(e_1, \dots, e_k)$.

D'après la proposition II.2.5, on a $e'_{k+1} = e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1})$. On a alors

$$F_k = \mathrm{Vect}_K(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}) = \mathrm{Vect}_K(e_1, \dots, e_k, e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1})),$$

la seconde égalité découlant du fait que $p_{F_k}(e_{k+1})$ est une combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_k$.

On a ainsi

$$F_k = \mathrm{Vect}_K(e_1, \dots, e_k, e'_{k+1}) = \mathrm{Vect}_K(e'_1, \dots, e'_k, e'_{k+1}).$$

Comme F_{k+1} est de dimension $k+1$, $(e'_1, \dots, e'_{k+1})$ est une base de F_{k+1}. Par hypothèse de récurrence, $e'_1, \dots, e'_k$ sont orthogonaux deux à deux. Enfin, on a $e'_{k+1} = e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1}) \in F_k^{\perp}$. Par conséquent, e'_{k+1} est orthogonal à tout élément de F_k, donc à $e'_1, \dots, e'_k$. Finalement, $(e'_1, \dots, e'_{k+1})$ est une base b-orthogonale de F_{k+1}. Ceci achève la récurrence. □

Remarques II.2.8.

(1) L'algorithme de Gram-Schmidt permet de fabriquer une base b-orthogonale d'un sous-espace de dimension finie, en partant d'une base arbitraire.

(2) En gardant les notations de l'énoncé, la matrice de la base $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ dans la base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ est triangulaire supérieure, avec des 1 sur la diagonale (**exercice**).

Exemple II.2.9. On considère la base de $\mathbb{R}^3$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Appliquons le procédé de Gram-Schmidt à cette base afin d'obtenir une base orthogonale pour le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$. On pose $e'_1 = e_1$. On a

$$e'_2 = e_2 - \frac{e'_1 \cdot e_2}{e'_1 \cdot e'_1} e'_1 = e_2 - \frac{e_1 \cdot e_2}{e_1 \cdot e_1} e_1.$$

On a donc
$$e'_2 = e_2 - \frac{1}{2}e'_1 = e_2 - \frac{1}{2}e_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On a maintenant
$$e'_3 = e_3 - \frac{e'_1 \cdot e_3}{e'_1 \cdot e'_1}e'_1 - \frac{e'_2 \cdot e_3}{e'_2 \cdot e'_2}e'_2.$$
Donc on obtient
$$e'_3 = e_3 - \frac{1}{2}e'_1 - \frac{1}{3}e'_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$
L'objet du paragraphe suivant est de proposer un algorithme pour déterminer une base orthogonale dans le cas général. Pour cela, on passe par les formes quadratiques. Avant toute chose, on a besoin de quelques compléments sur les formes linéaires.

II.3. Bases antéduales

LEMME II.3.1. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors, toute forme linéaire $\varphi \in E^*$ est de la forme*
$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad E \quad &\longrightarrow K \\ \sum_{k=1}^n x_k e_k &\longmapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k, \end{aligned}$$
pour certains $a_k \in K$.

En particulier, toute forme linéaire φ sur K^n est de la forme
$$\begin{aligned} \varphi\colon E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \sum_{k=1}^n a_k x_k, \end{aligned}$$
pour certains $a_k \in K$.

Démonstration. Si on pose $a_i = \varphi(e_i)$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, pour tout $x_i \in K$, on a
$$\varphi(\sum_{i=1} x_i e_i) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi(e_i) = \sum_{i=1}^n x_i a_i = \sum_{i=1}^n a_i x_i.$$

La dernière partie est obtenue en appliquant ce qui précède à $E = K^n$ et sa base canonique. □

LEMME II.3.2. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^*. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, écrivons*

$$\begin{aligned} \varphi_i \colon \quad E \quad &\longrightarrow K \\ \sum_{j=1}^{n} x_j e_j &\longmapsto \sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j, \end{aligned}$$

et soit $U = (u_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(K)$.

Autrement dit, U est la matrice dont la i-ème **ligne** *sont les coefficients définissant φ_i. Alors :*

(1) *pour tout $x \in E$, on a $U[x]_{\mathbf{e}} = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \vdots \\ \varphi_n(x) \end{pmatrix}$;*

(2) *la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^* si, et seulement si, U est inversible.*

Démonstration. Gardons les notations de l'énoncé. Si $x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j$, la i-ème coordonnée de $U[x]_{\mathbf{e}}$ est $\sum_{j=1}^{n} u_{ij} x_j = \varphi_i(x)$, d'où (1).

Montrons (2). Rappelons que l'on a l'égalité $\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} \varphi_j(e_i) e_i^*$, où $\mathbf{e}^*$ est la base duale de $\mathbf{e}$. Autrement dit, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$[\varphi_j]_{\mathbf{e}^*} = \begin{pmatrix} \varphi_j(e_1) \\ \vdots \\ \varphi_j(e_n) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, la famille $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de E^* si, et seulement la matrice $(\varphi_j(e_i))_{i,j}$ est inversible. Or, par définition, on a $\varphi_j(e_j) = u_{ji}$. La matrice précédente est donc U^t, qui est inversible si, et seulement si, U l'est. □

PROPOSITION II.3.3. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une base de E^*.*

Alors, il existe une unique base $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ de E telle que

$$\varphi_i = f_i^* \quad \textit{pour tout } i \in [\![1, n]\!].$$

La base $\mathbf{f}$ est obtenue par le procédé suivant.

Pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, écrivons

$$\varphi_i\colon \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & K \\ \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j e_j & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^n u_{ij} x_j, \end{array}$$

et soit $U = (u_{ij})_{i,j} \in \mathrm{M}_n(K)$.

Autrement dit, U est la matrice dont la i-ème **ligne** *sont les coefficients définissant φ_i. Alors, U est inversible, et la j-ème* **colonne** *de U^{-1} est le vecteur des coordonnées de f_j dans la base $\mathbf{e}$.*

Démonstration. Gardons les notations de l'énoncé. Notons que la matrice U est inversible, d'après le lemme II.3.2 (2). De plus, pour toute base $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$, on a $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ si, et seulement si, on a

$$(\varphi_i(f_j))_{i,j} = I_n.$$

Si P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs coordonnées des éléments de $\mathbf{f}$ dans la base $\mathbf{e}$, cela équivaut alors à l'égalité $UP = I_n$, d'après le point (1) du lemme II.3.2 (2).

On a donc $P = U^{-1}$, ce qui prouve à la fois l'existence et l'unicité de $\mathbf{f}$. $\square$

Définition II.3.4. Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une base de E^*. L'unique base $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ de E telle que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = (f_1^*, \dots, f_n^*)$ s'appelle la *base antéduale* de $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$.

Exemple II.3.5. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$, et soit $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R}_2[X] \longrightarrow \mathbb{R}$ les formes linéaires définies par

$$\varphi_1(P) = P(0),\ \varphi_2(P) = P(1),\ \varphi_3(P) = P(-1).$$

Alors, $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E. En effet, si $P = a_0 + a_1X + a_2X^2$, on a

$$\varphi_1(P) = a_0,\ \varphi_2(P) = a_0 + a_1 + a_2,\ \varphi_3(P) = a_0 - a_1 + a_2.$$

La matrice U correspondante est donnée par

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie aisément que $\det(U) = 2 \neq 0$. Ainsi, U est inversible et $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est une base de E^* par le lemme II.3.2. De plus, on a

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, la base antéduale de $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ est donnée par

$$(1 - X^2, \frac{1}{2}(X + X^2), \frac{1}{2}(-X + X^2)).$$

II.4. Orthogonalité et formes quadratiques

Dans tout ce qui suit, K est un corps de caractéristique différente de 2.

DÉFINITION II.4.1. Soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Deux vecteurs $x, y \in E$ sont dits *q-orthogonaux* si x et y sont b_q-orthogonaux.

On dit qu'un vecteur $x \in E$ est *isotrope* si x est isotrope pour la forme polaire b_q. Cela revient à dire que $q(x) = 0$.

Le *cône isotrope de q* est l'ensemble des vecteurs isotropes de q, et est noté $\mathscr{C}_q$. On a donc

$$\mathscr{C}_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}.$$

On dit que q est *isotrope/anisotrope* si sa forme polaire l'est. Par exemple, q est anisotrope si, pour tout $x \in E$, on a

$$q(x) = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Si E est de dimension $n \geq 1$, une base $\mathbf{e}$ sera dite *q-orthogonale* si elle est b_q-orthogonale.

Autrement dit, une base $\mathbf{e}$ est q-orthogonale si, et seulement si, $\mathrm{Mat}(q; \mathbf{e})$ est diagonale. Cela revient à dire qu'il existe $a_1, \ldots, a_n \in K$ tels que

$$q(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 \text{ pour tout } x_i \in K.$$

Nous allons maintenant proposer une méthode d'obtention systématique d'une base orthogonale pour une forme quadratique. Le théorème suivant est extrêmement important pour la suite.

THÉORÈME II.4.2 (Réduction de Gauss). *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Alors, il existe des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in E^*$ linéairement indépendantes et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^\times$ tels que*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i (\varphi_i(x))^2 \text{ pour tout } x \in E.$$

Démonstration. On commence par le cas $E = K^n$.

Nous allons procéder par récurrence sur $n \geq 1$. Pour $n \geq 1$, on note (H_n) la propriété suivante.

(H_n) Pour tout $m \in [\![1, n]\!]$, et pour toute forme quadratique $q : K^m \longrightarrow K$, il existe des formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in (K^m)^*$ linéairement indépendantes et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^\times$ tels que

$$q(x) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i(\varphi_i(x))^2 \text{ pour tout } x \in K^n.$$

Supposons que $n = 1$. Dans ce cas, on a nécessairement $m = 1$. Si $q : K \longrightarrow K$ est une forme quadratique, on a

$$q(x_1) = x_1^2 q(1) \text{ pour tout } x_1 \in K.$$

Si $q(1) = 0$, q est nulle. On pose alors $r = 0$ et l'énoncé est vide. Si $q(1) \neq 0$, on pose $\alpha_1 = q(1)$ et $\varphi_1 = \mathrm{Id}_K$. On a alors $q(x) = \alpha_1(\varphi_1(x))^2$ pour tout $x \in E$, et (H_1) est alors vraie.

Supposons maintenant que (H_n) soit vraie pour un entier $n \geq 1$, et montrons (H_{n+1}). Soit $m \in [\![1, n+1]\!]$. Si $m \leq n$, on applique l'hypothèse de récurrence. On peut donc supposer que $m = n + 1$. Soit $q : K^{n+1} \longrightarrow K$ une forme quadratique. Si M est la matrice représentative de q dans la base canonique, on a donc

$$q(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{i,j=1}^{n+1} a_{ij}x_ix_j = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n+1} a_{ij}x_ix_j$$

pour tous $x_i \in K$.

On distingue deux cas.

Premier cas. Il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $a_{kk} \neq 0$. On regroupe alors tous les termes contenant x_k, on factorise par a_{kk}, puis complète le carré.

Pour tout $x \in K^{n+1}$, on a

$$q(x) = a_{kk}x_k^2 + 2f_k((x_i)_{i \neq k})x_k + q_1((x_i)_{i \neq k}),$$

où f_k et q_1 sont respectivement une forme linéaire et une forme quadratique sur K^n en les variables $x_i, i \neq k$.

On a alors

$$\begin{array}{rcl} q(x) & = & a_{kk}(x_k^2 + \frac{2}{a_{kk}} f_k x_k) + q_1((x_i)_{i \neq k}) \\ & = & a_{kk}((x_k + \frac{f_k}{a_{kk}})^2 - \frac{f_k^2}{a_{kk}^2}) + q_1((x_i)_{i \neq k}) \end{array}.$$

On peut donc écrire

$$q(x) = a_{kk}(x_k + \frac{f_k}{a_{kk}})^2 + q_2((x_i)_{i \neq k}),$$

où q_2 est une forme quadratique sur K^n en les variables $x_i, i \neq k$.

Posons $\alpha_1 = a_{kk}$ et

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1 \colon & K^{n+1} & \longrightarrow & K \\ & (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & x_k + \frac{f_k}{a_{kk}}. \end{array}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe des formes linéaires $\psi_2, \dots, \psi_r \in (K^n)^*$ linéairement indépendantes en les variables $x_i, i \neq k$ et des scalaires $\alpha_2, \dots, \alpha_r \in K^\times$ tels que

$$q_2 = \sum_{i=2}^{r} \alpha_i \psi_i^2.$$

On peut considérer les formes linéaires ψ_i comme des formes linéaires sur K^{n+1} en les regardant comme des formes linéaires en x_i. Autrement dit, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i \colon & K^{n+1} & \longrightarrow & K \\ & (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & \psi_i((x_i)_{i \neq k}). \end{array}$$

Il faut maintenant vérifier que $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sont linéairement indépendantes. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ tels que

$$\lambda_1 \varphi_1 + \cdots + \lambda_r \varphi_r = 0.$$

On évalue cette égalité en le k-ième vecteur de la base canonique de K^{n+1} (i.e. on remplace x_i par 0 si $i \neq k$, et par 1 si $i = k$. Par définition, pour tout $i \in [\![2, r]\!]$, on a

$$\varphi_i(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = \psi_i(0, \dots, 0) = 0,$$

puisque ψ_i est linéaire. La définition de φ_1 montre que l'on a

$$\varphi_1(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) = 1 + \frac{f_k(0, \dots, 0)}{a_{kk}} = 1.$$

On obtient donc $\lambda_1 = 0$, et par conséquent

$$\lambda_2 \varphi_2 + \cdots + \lambda_r \varphi_r = 0.$$

En utilisant la définition des φ_i, cela se récrit

$$\lambda_2 \psi_2((x_i)_{i \neq k}) + \cdots + \lambda_r \psi_r((x_i)_{i \neq k}) = 0$$

pour tous $x_i, i \neq k$, soit encore

$$\lambda_2 \psi_2 + \cdots + \lambda_r \psi_r = 0.$$

Comme $\psi_2, \dots, \psi_r$ sont linéairement indépendantes, on obtient $\lambda_2 = \cdots = \lambda_r = 0$, et (H_{n+1}) est vraie.

Second cas. Pour tout $i \in [\![1, n+1]\!]$, on a $a_{ii} = 0$. Dans ce cas, soit $q = 0$, auquel cas $r = 0$ et il n'y a rien à faire, soit il existe $k, \ell \in [\![1, n+1]\!] , k < \ell$, tels que $a_{k\ell} \neq 0$.

Dans ce cas, on regroupe tous les termes qui contiennent x_k et x_ℓ et on fait apparaître un double produit. On écrit

$$q(x) = 2a_{k\ell}x_kx_\ell + 2f_k((x_i)_{i\neq k,\ell})x_k + 2f_\ell((x_i)_{i\neq k,\ell})x_\ell + q_1((x_i)_{i\neq k,\ell}),$$

où f_k et f_ℓ sont des formes linéaires sur K^{n-1} en les variables $x_i, i \neq k, \ell$, et q_1 est une forme quadratique sur K^{n-1} en les variables $x_i, i \neq k, \ell$.

On a ainsi

$$q(x) = 2a_{k\ell}(x_k+\frac{1}{a_{k\ell}}f_\ell((x_i)_{i\neq k,\ell}))(x_\ell+\frac{1}{a_{k\ell}}f_k((x_i)_{i\neq k,\ell}))-\frac{2}{a_{k\ell}}f_k((x_i)_{i\neq k})f_\ell((x_i)_{i\neq k})+q_1((x_i)_{i\neq k,\ell}).$$

On a donc

$$q(x) = 2a_{k\ell}(x_k + \frac{1}{a_{k\ell}}f_\ell((x_i)_{i\neq k,\ell}))(x_\ell + \frac{1}{a_{k\ell}}f_k((x_i)_{i\neq k,\ell})) + q_2((x_i)_{i\neq k,\ell}),$$

où q_2 est une forme quadratique sur K^{n-1} en les variables $x_i, i \neq k, \ell$. En utilisant l'identité $AB = \frac{1}{4}((A+B)^2-(A-B)^2)$, on obtient finalement

$$q(x) = \frac{a_{k\ell}}{2}(x_k+x_\ell+\psi_1((x_i)_{i\neq k,\ell}))^2-\frac{a_{k\ell}}{2}(x_k-x_\ell+\psi_2((x_i)_{i\neq k,\ell}))^2+q_2((x_i)_{i\neq k,\ell}),$$

où q_2 est une forme quadratique sur K^{n-1} en les variables $x_i, i \neq k, \ell$, et ψ_1, ψ_2 sont des formes linéaires sur K^{n-1} en ces mêmes variables.

Par hypothèse de récurrence, il existe des formes linéaires $\psi_3, \dots, \psi_r \in (K^{n-1})^*$ linéairement indépendantes en les variables $x_i, i \neq k, \ell$ et des scalaires $\alpha_3, \dots, \alpha_r \in K^\times$ tels que

$$q_3 = \sum_{i=3}^{r} \alpha_i \psi_i^2.$$

On pose également $\alpha_1 = \dfrac{a_{k\ell}}{2}, \alpha_2 = -\dfrac{a_{k\ell}}{2}$,

$$\begin{array}{rccl} \varphi_1\colon & K^{n+1} & \longrightarrow & K \\ & (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & x_k + x_\ell + \psi_1((x_i)_{i\neq k,\ell}), \end{array}$$

ainsi que

$$\begin{array}{rccl} \varphi_2\colon & K^{n+1} & \longrightarrow & K \\ & (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & x_k - x_\ell + \psi_2((x_i)_{i\neq k,\ell}). \end{array}$$

Comme précédemment, pour tout $i \in [\![3, r]\!]$, on pose

$$\begin{array}{rccl} \varphi_i\colon & K^{n+1} & \longrightarrow & K \\ & (x_1, \dots, x_{n+1}) & \longmapsto & \psi_i((x_i)_{i\neq k,\ell}). \end{array}$$

Il reste à vérifier que $\varphi_1, \dots, \varphi_r$ sont linéairement indépendantes. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$ tels que

$$\lambda_1\varphi_1 + \cdots + \lambda_r\varphi_r = 0.$$

On évalue d'abord l'égalité en $x_k = \dfrac{1}{2}, x_\ell = \dfrac{1}{2}$ et $x_i = 0, i \neq k, \ell$. En utilisant les définitions des formes linéaires, on obtient $\lambda_1 = 0$. En évaluant ensuite en $x_k = \dfrac{1}{2}, x_\ell = -\dfrac{1}{2}$ et $x_i = 0, i \neq k, \ell$, on obtient $\lambda_2 = 0$. On finit alors comme précédemment pour obtenir $\lambda_3 = \cdots = \lambda_r$. Ainsi, (H_{n+1}) est vraie.

Ceci achève la démonstration dans le cas de $E = K^n$.

Soit maintenant un K-espace vectoriel E de dimension finie $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique sur E. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E fixée. On vérifie aisément que l'application

$$\begin{array}{rccl} q' : & K^n & \longrightarrow & K \\ & (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) \end{array}$$

est une forme quadratique sur K^n. D'après le cas précédent, il existe des formes linéaires $\psi_1, \ldots, \psi_r \in (K^n)^*$ linéairement indépendantes, et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^\times$ tels que

$$q' = \sum_{i=1}^r \alpha_i \psi_i^2.$$

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on pose

$$\varphi_i(\sum_{i=1}^n x_i e_i) = \psi_i(x_1, \ldots, x_n) \text{ pour tous } x_1, \ldots, x_n \in K.$$

Il est clair que $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sont des formes linéaires sur E, et qu'elles sont linéairement indépendantes, puisque les ψ_i le sont. Mais alors, pour tout $x_i \in K$, on a

$$\begin{aligned} q(\sum_{i=1}^n x_i e_i) &= q'(x_1, \ldots, x_n) \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x_1, \ldots, x_n)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(\sum_{i=1}^n x_i e_i)^2, \end{aligned}$$

soit $q = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i^2$, d'où le résultat voulu. □

Le résultat est plus pénible à démontrer qu'à mettre en œuvre. D'autre part, la méthode utilisée fournit un moyen explicite de tout calculer. Donnons deux exemples.

Exemples II.4.3.

(1) Soit $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2xy + 2xz + 2xt + y^2 + 6yz - 2yt + z^2 + 10zt + t^2$$

pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$. C'est une forme quadratique. Appliquons la réduction de Gauss à q.

On a

$$\begin{aligned} q(u) &= x^2 + 2(y+z+t)x + y^2 + 6yz - 2yt + z^2 + 10zt + t^2 \\ &= (x+y+z+t)^2 - (y+z+t)^2 + y^2 + 6yz - 2yt + z^2 + 10zt + t^2 \\ &= (x+y+z+t)^2 + 4yz - 4yt + 8zt. \end{aligned}$$

On a maintenant

$$\begin{aligned} 4yz - 4yt + 8zt &= 4(yz + (-t)y + (2t)z) \\ &= 4((y+2t)(z-t) + 2t^2) \\ &= 4(y+2t)(z-t) + 8t^2 \\ &= (y+z+t)^2 - (y-z+3t)^2 + 8t^2 \end{aligned}.$$

Finalement, on obtient

$$q(x,y,z,t) = (x+y+z+t)^2 + (y+z+t)^2 - (y-z+3t)^2 + 8t^2 \text{ pour tous } x,y,z,t \in \mathbb{R}.$$

On a donc $r = 4$, $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = -1, \alpha_4 = 8$, et pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, on a

$$\varphi_1(u) = x+y+z+t,\ \varphi_2(u) = y+z+t, \varphi_3(u) = y-z+3t,\ \varphi_4(u) = t.$$

(2) Soit $q\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = a_2X^2 + a_1X + a_0 & \longmapsto & q(P) = a_2^2 + a_0^2 - 4a_0a_1 - 6a_0a_2. \end{array}$

Pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\begin{aligned} q(P) &= (a_2 - 3a_0)^2 - 8a_0^2 - 4a_0a_1 \\ &= (a_2 - 3a_0)^2 - 8(a_0^2 + \frac{a_0a_1}{2}) \\ &= (a_2 - 3a_0)^2 - 8((a_0 + \frac{a_1}{4})^2 - \frac{a_1^2}{16}) \\ &= (a_2 - 3a_0)^2 - 8(a_0 + \frac{a_1}{4})^2 + \frac{1}{2}a_1^2. \end{aligned}$$

On a donc $r = 3, \alpha_1 = 1, \alpha_2 = -8, \alpha_3 = \dfrac{1}{2}$. De plus, on a

$$\varphi_1\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = a_2X^2 + a_1X + a_0 & \longmapsto & a_2 - 3a_0 \end{array}, \quad \varphi_2\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = a_2X^2 + a_1X + a_0 & \longmapsto & a_0 + \dfrac{a_1}{4} \end{array},$$

$$\varphi_3\colon \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P = a_2X^2 + a_1X + a_0 & \longmapsto & a_1 \end{array}.$$

Nous pouvons maintenant expliquer comment obtenir une base q-orthogonale de façon systématique.

PROPOSITION II.4.4. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow K$ une forme quadratique. Soient $\varphi_1, \ldots, \varphi_r \in$*

E^* des formes linéaires linéairement indépendantes et des scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^\times$ tels que

$$q = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \varphi_i^2.$$

Complétons $(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)$ en une base $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ de E^*, et soit $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ la base antéduale correspondante.

Alors, $\mathbf{f}$ est une base de E q-orthogonale, et on a

$$\mathrm{Mat}(q; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, $\mathrm{rg}(q) = r$.

Démonstration. Par définition d'une base antéduale, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\varphi_i(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k) = f_i^*(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k) = x_i.$$

Ainsi, on a

$$q(\sum_{k=1}^{n} x_k f_k) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2 \text{ pour tout } x_k \in K.$$

Si on note D la matrice de l'énoncé, on a donc

$$q(x) = [x]_{\mathbf{f}}^t D [x]_{\mathbf{f}} \text{ pour tout } x \in E,$$

ce qui revient exactement à dire que $\mathrm{Mat}(q; \mathbf{f}) = D$, d'après la définition d'une matrice représentative. En particulier, $\mathbf{f}$ est q-orthogonale. Comme D est de rang r, puisque les α_i sont tous non nuls, on a bien $\mathrm{rg}(q) = r$. □

Cette proposition fournit un moyen explicite de calculer une base q-orthogonale d'une forme quadratique. Si l'on s'intéresse au cas d'une base b-orthogonale, où b est une forme bilinéaire symétrique, il suffit de considérer la forme quadratique q_b associée. Comme b est la forme polaire de q_b, une base q_b-orthogonale sera par définition b-orthogonale.

Exemple II.4.5. Soit $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x, y, z, t) = x^2 + 2xy + 2xz + 2xt + y^2 + 6yz - 2yt + z^2 + 10zt + t^2$$

pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

On sait que

$q(x, y, z, t) = (x+y+z+t)^2+(y+z+t)^2-(y-z+3t)^2+8t^2$ pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

Comme on a appliqué la réduction de Gauss, les formes linéaires de la décomposition sont linéairement indépendantes. Puisque le dual de $\mathbb{R}^4$ est de dimension 4, elles forment déjà une base. Pour calculer la base antéduale, on applique les résultats du paragraphe précédent. On pose

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que l'on a

$$P = U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Les colonnes de cette matrice donnent la base q-orthogonale $\mathbf{f}$ cherchée, et on a

$$\mathrm{Mat}(q; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 8 \end{pmatrix}.$$

Chapitre III

Formes bilinéaires et quadratiques réelles, produits scalaires

On s'intéresse ici aux formes bilinéaires et quadratiques sur les espaces vectoriels réels. En particulier, on explicitera des conditions nécessaires et suffisantes à l'existence de bases orthonormées.

III.1. Formes positives, négatives, produits scalaires

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Supposons que E soit de dimension finie, et qu'il existe au moins une base b-orthonormée $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. On aura alors

$$b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

pour tous $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. En particulier, on a

$$b(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2,$$

pour tout $x_i \in \mathbb{R}$.

Il s'ensuit que $b(x, x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Ceci motive la définition suivante.

Définition III.1.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. On dit que q est :

(1) *positive* si $q(x) \geq 0$ pour tout $x \in E$;
(2) *définie positive* si $q(x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$;
(3) *négative* si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in E$;
(4) *définie négative* si $q(x) < 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

On dit qu'une forme bilinéaire $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est (définie) positive/(définie) négative si sa forme quadratique associée l'est. Autrement dit, $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est :

(1) *positive* si $b(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in E$;
(2) *définie positive* si $b(x, x) > 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$;

(3) *négative* si $b(x,x) \leq 0$ pour tout $x \in E$;

(4) *définie négative* si $b(x,x) < 0$ pour tout $x \in E \setminus \{0\}$.

Si E est l'espace vectoriel nul, toute forme bilinéaire symétrique/quadratique sur E est à la fois définie positive et définie négative.

Remarque III.1.2. Une forme quadratique/bilinéaire symétrique est définie positive si, et seulement si, elle est positive et anisotrope.

Le même genre de remarque vaut pour les formes définies négatives.

On verra plus loin qu'une forme anisotrope sur un espace vectoriel réel de dimension finie est nécessairement définie positive ou définie négative.

On peut maintenant caractériser les formes bilinéaires symétriques possédant une base orthonormée.

Lemme III.1.3. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme bilinéaire symétrique. Alors, E possède au moins une base b-orthonormée si, et seulement si, b est définie positive.*

Démonstration. On a déjà vu en début de paragraphe que la condition était nécessaire. Inversement, supposons que b soit définie positive. D'après le théorème II.2.3, il existe au moins une base $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de E qui soit b-orthogonale. Comme b est définie positive, et que les vecteurs $e'_1, \ldots, e'_n$ sont non nuls (ils font partie d'une base), on peut poser

$$e_i = \frac{e'_i}{\sqrt{b(e'_i, e'_i)}} \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!] .$$

Mais alors, la base $\mathbf{e}$ est orthonormée. En effet, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a

$$b(e_i, e_j) = \frac{b(e'_i, e'_j)}{\sqrt{b(e'_i, e'_i)}\sqrt{b(e'_j, e'_j)}}.$$

Puisque la base $\mathbf{e}'$ est b-orthogonale, on obtient $b(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$. D'autre, on obtient clairement $b(e_i, e_i) = 1$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Ceci achève la démonstration. □

Cela conduit tout naturellement à la définition suivante.

Définition III.1.4. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Un *produit scalaire sur E* est une forme bilinéaire symétrique sur E définie positive. Un espace *euclidien* est un espace préhilbertien de dimension finie.

Exemples III.1.5.

(1) L'application

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x,y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i\end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$, que l'on appellera produit scalaire usuel (ou canonique). C'est l'unique produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ pour lequel la base canonique est une base orthonormée.

(2) L'application

$$\begin{aligned}\langle\,,\rangle : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (P,Q) \qquad &\longmapsto \langle P,Q\rangle = \int_a^b P(t)Q(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Nous allons traiter cet exemple en détail.

(a) Montrons que $\langle\,,\rangle$ est symétrique. En effet, pour tout $P,Q \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\langle Q,P\rangle = \int_a^b Q(t)P(t)\mathrm{d}t = \int_a^b P(t)Q(t)\mathrm{d}t = \langle P,Q\rangle.$$

(b) Montrons que $\langle\,,\rangle$ est bilinéaire. La linéarité en P suffit, puisque l'on a déjà montré la symétrie. Pour tous $P_1, P_2, P, Q \in \mathbb{R}[X]$, et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\langle P_1+P_2,Q\rangle &= \int_a^b (P_1+P_2)(t)Q(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b (P_1(t)+P_2(t))Q(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b P_1(t)Q(t)\mathrm{d}t + \int_a^b P_2(t)Q(t)\mathrm{d}t\\ &= \langle P_1,Q\rangle + \langle P_2,Q\rangle\end{aligned}$$

et aussi

$$\begin{aligned}\langle \lambda P,Q\rangle &= \int_a^b (\lambda P)(t)Q(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_a^b \lambda P(t)Q(t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\int_a^b P(t)Q(t)\mathrm{d}t\\ &= \lambda\langle P,Q\rangle\end{aligned}.$$

Ainsi, $\langle\,,\rangle$ est bilinéaire.

(c) Montrons enfin que b est définie positive.

Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a

$$\langle P, P\rangle = \int_a^b P(t)^2 \mathrm{d}t.$$

Or, l'intégrale d'une fonction positive est positive.
Comme la fonction

$$\begin{aligned}[a, b] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ t &\longmapsto P(t)^2\end{aligned}$$

est positive, on en déduit que

$$\langle P, P\rangle \geq 0 \text{ pour tout } P \in \mathbb{R}[X].$$

Supposons maintenant que l'on ait $\langle P, P\rangle = 0$. On veut montrer que $P = 0$. L'hypothèse sur P se récrit

$$\int_a^b P(t)^2 \mathrm{d}t = 0.$$

Or l'intégrale d'une fonction positive et continue $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est nulle si et seulement si f est identiquement nulle. Comme la fonction

$$[a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto P(t)^2$$

est positive et continue, on en déduit

$$P(t)^2 = 0 \text{ pour tout } t \in [a, b],$$

c'est-à-dire

$$P(t) = 0 \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

En particulier, le polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ a une infinité de racines (i.e. une infinité de zéros). Ceci n'est possible que si $P = 0$.
Finalement, on a bien démontré que $\langle\, ,\rangle$ est un produit scalaire.

(3) L'application

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (x, y) &\longmapsto x_1y_1 - x_2y_2\end{aligned}$$

n'est pas un produit scalaire. Elle est bien bilinéaire symétrique, mais elle n'est pas positive, comme on l'a vu précédemment.

(4) L'application

$$\begin{aligned} b\colon \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (P, Q) &\longmapsto P(0)Q(0)\end{aligned}$$

n'est pas un produit scalaire euclidien. Elle est bien bilinéaire, symétrique, positive, mais pas définie positive. Par exemple, on a $b(X, X) = 0$, mais $X \neq 0$.

On reviendra dans le paragraphe suivant sur les propriétés des produits scalaires. On finit ce paragraphe en démontrant une égalité fort utile.

PROPOSITION III.1.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Soit* $b : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ *une forme bilinéaire symétrique positive.*

Alors, pour tous $x, y \in E$, *on a*

$$b(x,y)^2 \leq b(x,x)b(y,y).$$

Si de plus b *est un produit scalaire, alors l'égalité a lieu si, et seulement si la famille* (x,y) *est liée.*

Démonstration. Soient $x, y \in E$ fixés. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $b(x+ty, x+ty) \geq 0$. Mais alors, on obtient

$$b(y,y)t^2 + 2b(x,y)t + b(x,x) \geq 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

La théorie des polynômes du second degré à coefficients réels entraîne alors que l'on a

$$\Delta = 4(b(x,y)^2 - b(x,x)b(y,y)) \leq 0.$$

On en déduit alors immédiatement l'inégalité voulue.

Supposons maintenant que b un produit scalaire. Elle est donc définie positive. Si (x,y) est liée, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$. Dans les deux cas, on a facilement $b(x,y)^2 = b(x,x)b(y,y)$. Si maintenant (x,y) est libre, alors en particulier $x + ty \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Puisque b est définie positive, on obtient

$$b(y,y)t^2 + 2b(x,y)t + b(x,x) > 0 \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

La théorie des polynômes du second degré à coefficients réels entraîne alors cette fois que l'on a

$$\Delta = 4(b(x,y)^2 - b(x,x)b(y,y)) < 0.$$

Ainsi, $b(x,y)^2 < b(x,x)b(y,y)$ et on ne peut avoir égalité dans ce cas. Ceci achève la démonstration. □

III.2. Propriétés algébriques et métriques des produits scalaires

On va maintenant étudier les propriétés des produits scalaires. Commençons par rappeler le résultat qui a motivé l'introduction de cette notion.

THÉORÈME III.2.1. *Tout espace euclidien possède une base orthonormée pour le produit scalaire.*

REMARQUE III.2.2. Quitte à se répéter, notons que si $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ est un espace euclidien, et si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée, alors on a

$$\langle \sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

pour tous $x_i, y_i \in \mathbb{R}$. Cela se voit en utilisant la définition de matrice représentative dans une base, ou simplement par bilinéarité.

Autrement dit, une fois que l'on a choisi une base orthonormée, le produit scalaire ≪ se comporte comme le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ ≫. On peut reformuler l'égalité ci-dessus en disant que pour tous $x, y \in E$, on a

$$\langle x, y\rangle = [x]_{\mathbf{e}}^t [y]_{\mathbf{e}}.$$

Le lemme suivant permet de caractériser les bases orthonormées en termes matriciels.

Lemme III.2.3. *Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base* **orthonormée** *fixée, et soit $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de n vecteurs de E. Enfin, soit $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice de $\mathbf{f}$ dans la base $\mathbf{e}$, i.e. la matrice dont les colonnes sont les vecteurs $[f_1]_{\mathbf{e}}, \ldots, [f_n]_{\mathbf{e}}$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *la famille $\mathbf{f}$ est une base orthonormée ;*
(2) $P^t P = I_n$ *;*
(3) $P^t = P^{-1}$.

Démonstration. Les conditions (2) et (3) sont clairement équivalentes. Si on note $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, alors on a $P = (a_{ij})_{i,j}$. Mais alors, on a

$$P^t P = (\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj})_{i,j}.$$

Or, puisque $\mathbf{e}$ est orthonormée, on a $\langle f_i, f_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj}$. Ainsi, on obtient

$$P^t P = (\langle f_i, f_j\rangle)_{i,j}.$$

En particulier, si $\mathbf{f}$ est une base orthonormée, on a $P^t P = I_n$. Inversement, si $P^t P = I_n$, alors P est inversible. La famille $\mathbf{f}$ est donc une base de E. De plus, l'égalité $P^t P = I_n = (\langle f_i, f_j\rangle)_{i,j}$ entraîne que $\mathbf{f}$ est orthonormée. □

Définition III.2.4. Une matrice $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $P^t P = I_n$ est appelée une *matrice orthogonale* . L'ensemble des matrices orthogonales est noté $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. C'est un groupe pour le produit matriciel (**exercice**).

En appliquant le lemme précédent à $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique, on constate qu'une matrice $P \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si ses colonnes forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ pour son produit scalaire usuel.

On continue en définissant une norme associée à un produit scalaire.

PROPOSITION III.2.5. *Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien. Alors, l'application*

$$\begin{aligned} \|\ \|_2 \colon E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{aligned}$$

est une norme sur E. *Autrement dit, on a :*

(1) *pour tout* $x \in E$, $\|x\|_2 \geq 0$;

(2) *pour tout* $x \in E$, $\|x\|_2 = 0 \iff x = 0$;

(3) *pour tout* $x \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{R}$, *on a* $\|\lambda x\|_2 = |\lambda| \cdot \|x\|_2$;

(4) *pour tous* $x, y \in E$, *on a* $\|x + y\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2$.

De plus, pour tous $x, y \in E$, *on a*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2 \text{ (Inégalité de Cauchy-Schwarz)}$$

avec égalité si, et seulement si, la famille (x, y) *est liée.*

Démonstration. Notons que $\|\ \|_2$ est bien définie, puisque $\langle x, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in E$. De plus, la dernière partie de l'énoncé découle immédiatement de la proposition III.1.6, un produit scalaire étant anisotrope. Montrons maintenant les points $(1)-(4)$. Le point (1) est clair. Si $x \in E$, on a

$$\|x\|_2 = 0 \iff \langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0,$$

puisqu'un produit scalaire est anisotrope, d'où (2). Le point (3) provient de la bilinéarité du produit scalaire. Enfin, soient $x, y \in E$. Alors, on a

$$\|x+y\|_2^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle + 2\langle x, y\rangle = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\langle x, y\rangle \leq |\langle x, y\rangle| \leq \|x\|_2 \|y\|_2.$$

Mais alors, on en déduit

$$\|x + y\|_2^2 \leq \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\|x\|_2\|y\|_2,$$

soit

$$\|x + y\|_2^2 \leq (\|x\|_2 + \|y\|_2)^2,$$

d'où (4) en prenant la racine carrée. □

DÉFINITION III.2.6. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace préhilbertien. L'application $\|\ \|_2$ est appelée la *norme euclidienne* associée au produit scalaire.

Exemple III.2.7. Si $\langle\, , \rangle$ est le produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ défini par

$$\begin{aligned} \langle\, , \rangle \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \end{aligned}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

En particulier, pour $n = 2$ ou 3, on obtient la norme usuelle.

Remarques III.2.8.

(1) Dans le cas d'un espace euclidien, le qualificatif de « base orthonormée » prend tout son sens. En effet, une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est orthonormée si les vecteurs $e_1, \ldots, e_n$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires (i.e. de norme 1).

(2) Si E est un espace euclidien, pour obtenir une base orthonormée, on applique l'algorithme de Gram-Schmidt pour construire une base orthogonale $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$, puis on pose

$$e_i = \frac{e_i}{\|e_i\|_2} \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!] .$$

La base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est alors orthonormée.

Le lemme suivant généralise un théorème bien connu en géométrie euclidienne.

Lemme III.2.9 (Théorème de Pythagore). *Soit E un espace préhilbertien. Alors, pour tous $x, y \in E$, on a*

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \iff x \perp y.$$

Démonstration. Comme on l'a déjà constaté, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle,$$

d'où le résultat. □

On revient maintenant à la projection orthogonale. Le résultat suivant découle du théorème II.1.5 et de la proposition II.2.5.

Théorème III.2.10. *Soit $(E, \langle\, , \rangle)$ un espace préhilbertien. Pour tout sous-espace F de dimension finie de E, on a $E = F \oplus F^{\perp}$ et $(F^{\perp})^{\perp} = F$. De plus :*

(1) *pour toute base orthogonale $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de F, et pour tout $x \in E$, on a*

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle e'_i, x\rangle}{\langle e'_i, e'_i\rangle} e'_i$$

(2) *pour toute base orthonormée* $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ *de* F, *et pour tout* $x \in E$, *on a*
$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i.$$

COROLLAIRE III.2.11. *Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace euclidien de dimension* $n \geq 1$.

Pour tout sous-espace F, *on a* $E = F \oplus F^\perp$ *et* $(F^\perp)^\perp = F$. *De plus :*

(1) *pour toute base orthogonale* $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ *de* E, *et pour tout* $x \in E$, *on a*
$$x = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle e'_i, x\rangle}{\langle e'_i, e'_i\rangle} e'_i$$

(2) *pour toute base orthonormée* $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ *de* E, *et pour tout* $x \in E$, *on a*
$$x = \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, x\rangle e_i.$$

On va maintenant donner une caractérisation de la projection orthogonale comme solution d'un problème de minimisation.

THÉORÈME III.2.12. *Soit* $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ *un espace préhilbertien, et soit* F *un sous-espace de dimension finie.*

Alors, pour tout $x \in F$, *la projection orthogonale* $p_F(x)$ *de* x *sur* F *est l'unique élément* $y_0 \in F$ *tel que*
$$\|x - y_0\|_2 \leq \|x - y\|_2 \quad \textit{pour tout } y \in F.$$

DÉMONSTRATION. Soit $x \in E$. Par définition, $x - p_F(x)$ est orthogonal à tout élément de F. En particulier, si $y \in F, x - p_F(x)$ et $p(x) - y$ sont orthogonaux. D'après le théorème de Pythagore, pour tout $y \in F$, on a donc

$$\|x - y\|_2^2 = \|x - p_F(x)\|_2^2 + \|p_F(x) - y\|_2^2 \quad (*)$$

On obtient donc
$$\|x - y\|_2^2 \geq \|x - p_F(x)\|_2^2 \quad \text{pour tout } y \in F,$$
d'où
$$\|x - p_F(x)\|_2 \leq \|x - y\|_2 \quad \text{pour tout } y \in F.$$
Soit maintenant $y_0 \in F$ tel que
$$\|x - y_0\|_2 \leq \|x - y\|_2 \quad \text{pour tout } y \in F.$$
En particulier, puisque $p_F(x) \in F$, on a
$$\|x - y_0\|_2 \leq \|x - p_F(x)\|_2 \leq \|x - y_0\|_2,$$

la dernière égalité découlant du point précédent. Ainsi, $\|x - y_0\|_2 = \|x - p_F(x)\|_2$. En appliquant (*) à y_0, on obtient $\|p_F(x) - y_0\|_2 = 0$, et par conséquent $p_F(x) - y_0 = 0$, soit $y_0 = p_F(x)$. Ceci achève la démonstration. □

Définition III.2.13. Soit $(E, \langle\, ,\rangle)$ un espace préhilbertien, et soit F un sous-espace vectoriel de E. Pour tout $x \in E$, la *distance de x à F* est le réel $d(x, F)$ défini par

$$d(x, F) = \inf_{y \in F} \|x - y\|_2.$$

Lorsque F est de dimension finie, on a donc $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|_2$ pour tout $x \in E$.

Pour finir ce paragraphe, nous allons maintenant revenir sur le procédé de Gram-Schmidt, en le raffinant par un résultat d'unicité.

Théorème III.2.14 (Gram-Schmidt version 2.0). *Soit E un espace préhilbertien, soit $n \geq 1$ un entier, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille libre de E.*

Soit $(e'_1, \ldots, e'_n)$ la famille d'éléments de E définie par récurrence comme suit :

$$e'_1 = e_1 \quad \text{et } e'_{k+1} = e_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e'_i, e_{k+1}\rangle}{\langle e'_i, e'_i\rangle} e'_i \quad \text{pour tout } k \in [\![1, n-1]\!].$$

Alors, on a :

(1) *pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e'_1, \ldots, e'_k) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_k)$;*
(2) *pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la famille $(e'_1, \ldots, e'_k)$ est une base orthogonale de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_k)$;*
(3) *pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\langle e'_k, e_k\rangle > 0$.*

De plus, si $\mathbf{e}'' = (e''_1, \ldots, e''_n)$ vérifie les propriétés $(1) - (3)$ alors pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, il existe $\lambda_k > 0$ tel que $e''_k = \lambda_k e'_k$.

En particulier, il existe une et une seule famille $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ de vecteurs de E vérifiant :

(i) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(f_1, \ldots, f_k) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_k)$;
(ii) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la famille $(f_1, \ldots, f_k)$ est une base orthonormée de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_k)$;
(iii) pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\langle f_k, e_k\rangle > 0$.

Elle est donnée par

$$f_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|_2} \quad \text{pour tout } k \in [\![1, n]\!].$$

Démonstration. Puisqu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique anisotrope, on peut appliquer Gram-Schmidt. On sait alors que la famille $\mathbf{e}'$ vérifie les conditions (1) et (2). Montrons que $\mathbf{e}'$ vérifie (3).

On a $e'_1 = e_1$, et donc $\langle e'_1, e_1\rangle = \langle e_1, e_1\rangle > 0$. Si maintenant $k \in [\![1, n-1]\!]$, on a

$$e'_{k+1} = e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1}),$$

où $F_k = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1, \ldots, e_k)$. Mais alors, on a

$$\langle e'_{k+1}, e_{k+1}\rangle = \langle e'_{k+1}, e'_{k+1} + p_{F_k}(e_{k+1})\rangle = \langle e'_{k+1}, e'_{k+1}\rangle + \langle e'_{k+1}, p_{F_k}(e_{k+1})\rangle.$$

Comme $e'_{k+1} = e_{k+1} - p_{F_k}(e_{k+1})$, e'_{k+1} est en particulier orthogonal à $p_{F_k}(e_{k+1})$. On a finalement

$$\langle e'_{k+1}, e_{k+1}\rangle = \langle e'_{k+1}, e'_{k+1}\rangle > 0,$$

d'où (3).

Il reste à démontrer la seconde partie. Soit $\mathbf{e}'' = (e''_1, \ldots, e''_n)$ vérifiant les conditions (1) $-$ (3). Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, soit (H_k) la propriété suivante :

(H_k) Pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}^\times$ tel que $e''_i = \lambda_i e'_i$.

Nous allons montrer (H_n) par récurrence finie. Puisque $\mathbf{e}''$ et **e'** vérifient (1), on a en particulier

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e''_1) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e'_1).$$

En particulier, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tel que $e''_1 = \lambda_1 e'_1$. De plus, e''_1 est non nul (puisque c'est une base de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_1)$) et donc λ_1 est non nul. Ainsi, (H_1) est vraie. Supposons maintenant que (H_k) soit vraie pour un certain $k \in [\![1, n-1]\!]$, et montrons que (H_{k+1}) est vraie.

La condition (2) implique que $e''_{k+1} \in F_{k+1}$. Mais, $(e'_1, \ldots, e'_{k+1})$ est une base orthogonale de F_{k+1}. On a donc

$$e''_{k+1} = \sum_{i=1}^{k+1} \frac{\langle e'_i, e''_{k+1}\rangle}{\langle e'_i, e'_i\rangle} e'_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle e'_i, e''_{k+1}\rangle}{\langle e'_i, e'_i\rangle} e'_i + \frac{\langle e'_{k+1}, e''_{k+1}\rangle}{\langle e'_{k+1}, e'_{k+1}\rangle} e'_{k+1}.$$

Par hypothèse de récurrence, e'_i est proportionnel à e''_i pour tout $i \in [\![1, k]\!]$. Comme les vecteurs $(e''_1, \ldots, e''_k, e''_{k+1})$ sont orthogonaux deux à deux par (2), tous les termes de la dernière somme sont alors nuls, et on obtient que e''_{k+1} est proportionnel à e'_{k+1}. Ceci achève la récurrence.

Il reste à voir que les λ_k sont > 0. Or, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$\langle e''_k, e_k\rangle = \langle \lambda_k e'_k, e_k\rangle = \lambda_k \langle e'_k, e_k\rangle.$$

Mais alors, on a

$$\lambda_k = \frac{\langle e''_k, e_k\rangle}{\langle e'_k, e_k\rangle} > 0$$

par (3).

Pour démontrer le tout dernier point, on remarque qu'une famille $\mathbf{f}$ vérifiant $(i)-(iii)$ vérifie aussi $(1)-(3)$. On a donc

$$f_k = \lambda_k e'_k, \text{ avec } \lambda_k > 0, \quad \text{pour tout } k \in [\![1, n]\!] .$$

Mais alors, on a

$$\langle f_k, f_k \rangle = 1 = \lambda_k^2 \langle e'_k, e'_k \rangle,$$

d'où $\lambda_k^2 = \dfrac{1}{\|e'_k\|_2^2}$. Comme $\lambda_k > 0$, on en déduit que $\lambda_k = \dfrac{1}{\|e'_k\|_2}$.

Réciproquement, il est clair que la famille $\mathbf{f}$ définie par

$$f_k = \frac{e'_k}{\|e'_k\|_2} \quad \text{pour tout } k \in [\![1, n]\!]$$

vérifie $(i)-(iii)$, puisque $\mathbf{e}'$ vérifie $(1)-(3)$ et que f_k diffère de e'_k d'une constante > 0. $\square$

III.3. Formes quadratiques réelles

On revient maintenant à l'étude des formes quadratiques réelles. Soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. Clairement, q n'a aucune raison d'être positive ou négative. Par exemple, la forme

$$\begin{aligned} q \colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 \end{aligned}$$

prend des valeurs strictement positives et strictement négatives.

En revanche, il existe des sous-espaces sur lesquels q est définie positive (resp. définie négative).

Par exemple, si $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0\}$, alors F est un sous-espace de dimension 2 tel que $q_{|F}$ est définie positive. De même $G = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_3 = 0\}$ est un sous-espace de dimension 1 tel que $q_{|G}$ est définie négative. On peut se demander quelle est la dimension maximale de tels sous-espaces. Ceci motive la définition suivante.

Définition III.3.1. Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique.

La *signature de* q, notée $\mathrm{sign}(q)$, est le couple d'entiers (r_+, r_-), où r_+ est la dimension maximale d'un sous-espace F tel que $q_{|F}$ est définie positive, et r_+ est la dimension maximale d'un sous-espace G tel que $q_{|G}$ est définie négative.

En particulier, q est définie positive si, et seulement si, $\mathrm{sign}(q) = (n, 0)$, et q est définie négative si, et seulement si, $\mathrm{sign}(q) = (0, n)$.

Cette définition n'étant absolument pas pratique, nous allons donner un moyen de la calculer explicitement.

Proposition III.3.2. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique de signature (r_+, r_-). Enfin, soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base q-orthogonale.*

Alors, on a

$$r_+ = |\{i \in [\![1, n]\!] \mid q(e_i) > 0\}|,$$

$$r_- = |\{i \in [\![1, n]\!] \mid q(e_i) < 0\}|.$$

Autrement dit, si $\mathrm{Mat}(q; \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{pmatrix}$, *alors on a*

$$r_+ = |\{i \in [\![1, n]\!] \mid a_i > 0\}|,$$

$$r_- = |\{i \in [\![1, n]\!] \mid a_i < 0\}|.$$

En particulier, $r_+ + r_- = \mathrm{rg}(q)$.

Démonstration. Notons $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$. Posons

$$I = \{i \in [\![1, n]\!] \mid q(e_i) > 0\}$$

et

$$J = \{i \in [\![1, n]\!] \mid q(e_i) \leq 0\}.$$

Soit $F_+ = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_i, i \in I)$ et $H = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(e_i, i \in J)$.

Par construction, on a donc $n = \dim_{\mathbb{R}}(F_+) + \dim_{\mathbb{R}}(H)$.

Remarquons maintenant que $q_{|F_+}$ est définie positive. En effet, puisque $\mathbf{e}$ est une base orthogonale, pour tout $x_i \in \mathbb{R}, i \in I$, on a

$$q(\sum_{i \in I} x_i e_i) = \sum_{i \in I} q(e_i) x_i^2 \geq 0.$$

De plus, comme $q(e_i) > 0$ pour tout $i \in I$, cette dernière somme est nulle si, et seulement si, tous les x_i sont nuls.

En particulier, comme F_+ est de dimension $|I|$, on a

$$r_+ \geq \dim_{\mathbb{R}}(F_+).$$

Remarquons aussi que $q_{|H}$ est négative. En effet, pour tout $x_j \in \mathbb{R}, j \in J$, on a

$$q(\sum_{j \in J} x_j e_j) = \sum_{j \in J} q(e_j) x_i^2 \leq 0.$$

Soit maintenant F un sous-espace de E tel que $q_{|F}$ soit définie positive. Alors, $F \cap H = \{0\}$. En effet, si $x \in F \cap H$, alors on a $q(x) \geq 0$ car $x \in F$, et $q(x) \leq 0$ car $x \in H$, d'après ce qui précède. Ainsi, $q(x) = 0$. Mais comme $q_{|F}$ est définie positive, on obtient $x = 0$.

Par conséquent, F et H sont en somme directe, et on a $\dim_{\mathbb{R}}(F+H) = \dim_{\mathbb{R}}(F) + \dim_{\mathbb{R}}(H)$. Mais $\dim_{\mathbb{R}}(F+H) \leq n$. On a donc

$$\dim_{\mathbb{R}}(F) + \dim_{\mathbb{R}}(H) \leq \dim_{\mathbb{R}}(F_+) + \dim_{\mathbb{R}}(H),$$

soit $\dim_{\mathbb{R}}(F) \leq \dim_{\mathbb{R}}(F_+)$. En particulier, si F est de dimension maximale, on obtient $r_+ \leq \dim_{\mathbb{R}}(F_+)$. Finalement, on a

$$r_+ = \dim_{\mathbb{R}}(F_+) = |I| = |\{i \in [\![1,n]\!] \mid \alpha_i > 0\}|.$$

On procède de même pour l'autre égalité. La dernière partie provient du fait que le rang est donné par le nombre d'éléments α_i non nuls. $\square$

Remarque III.3.3. Ce résultat dit que pour calculer la signature d'une forme quadratique réelle, il suffit de trouver une base q-orthogonale, d'écrire la matrice dans cette base, et de compter le nombre de coefficients diagonaux > 0 et < 0.

En fait, on peut se passer du calcul explicite d'une base q-orthogonale, en utilisant la réduction de Gauss. En effet, si on écrit

$$q = \alpha_1 \varphi_1^2 + \cdots + \alpha_r \varphi_r^2,$$

où $\alpha_i \in \mathbb{R}^\times$ et où les formes linéaires $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ sont linéairement indépendantes, la proposition II.4.4 et la proposition précédente montrent immédiatement que l'on a

$$\begin{aligned} r_+ &= |\{i \in [\![1,n]\!] \mid \alpha_i > 0\}|, \\ r_- &= |\{i \in [\![1,n]\!] \mid \alpha_i < 0\}|. \end{aligned}$$

Exemple III.3.4. Soit $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$q(x,y,z,t) = x^2 + 2xy + 2xz + 2xt + y^2 + 6yz - 2yt + z^2 + 10zt + t^2$$

pour tous $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

On sait que

$$q(x,y,z,t) = (x+y+z+t)^2 + (y+z+t)^2 - (y-z+3t)^2 + 8t^2 \text{ pour tous } x,y,z,t \in \mathbb{R}.$$

Ceci ayant été obtenu par réduction de Gauss, on a $\operatorname{sign}(q) = (3,1)$.

Corollaire III.3.5. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors, il existe une base q-orthogonale $\mathbf{f}$ de E telle que*

$$\operatorname{Mat}(q; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & \mathbf{0}_{(n-s-t)\times(n-s-t)} \end{pmatrix}.$$

De plus, on a $\operatorname{sign}(q) = (s,t)$.

Démonstration. Soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$. Si $q(e_i) = 0$, on pose $e'_i = e_i$. Sinon, on pose $e'_i = \dfrac{1}{\sqrt{|q(e_i)|}} e_i$. Notons que dans ce dernier cas, on a

$$q(e'_i) = \frac{q(e_i)}{|q(e_i)|} = \pm 1.$$

Alors, la famille $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ est encore une base q-orthogonale, et on a

$$q(e'_i) \in \{0, 1, -1\} \text{ pour tout } i \in [\![1, n]\!]$$

En réordonnant les vecteurs, on obtient une base $\mathbf{f}$ possédant les propriétés voulues. Le reste découle de la proposition III.3.2. □

On peut maintenant caractériser les formes quadratiques réelles anisotropes.

PROPOSITION III.3.6. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors, q est anisotrope si, et seulement si, elle est définie positive ou définie négative, c'est-à-dire si, et seulement si,* $\mathrm{sign}(q) = (n, 0)$ *ou* $(0, n)$.

Démonstration. Soit $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base q-orthogonale telle que

$$\mathrm{Mat}(q; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} I_s & & \\ & -I_t & \\ & & \mathbf{0}_{(n-s-t)\times(n-s-t)} \end{pmatrix}.$$

Supposons que $\mathrm{sign}(q) \neq (n, 0)$ et $(0, n)$.

D'après la proposition III.3.5, cela signifie, soit qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que $q(f_i) = 0$, auquel cas q est isotrope, soit qu'il existe $i, j \in [\![1, n]\!]$ tels que $q(f_i) = 1$ et $q(f_j) = -1$. Dans ce dernier cas, comme f_i et f_j sont orthogonaux, on a

$$q(f_i + f_j) = q(f_i) + q(f_j) = 1 - 1 = 0.$$

Puisque f_i et f_j sont distincts, on a $f_i - f_j \neq 0$, et q est encore isotrope.

Si maintenant $\mathrm{sign}(q) = (n, 0)$ ou $(0, n)$, i.e. si q est définie positive ou définie négative, alors elle est anisotrope par définition. □

Nous nous intéressons maintenant aux formes quadratiques sur un espace euclidien. Le théorème suivant est fondamental.

THÉORÈME III.3.7 (Théorème spectral pour les matrices symétriques). *Toute matrice $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$* **symétrique** *réelle est diagonalisable en base orthonormée. Autrement dit, il existe une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ (pour le produit scalaire usuel) formée de vecteurs propres de M.*

De manière équivalente, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$P^{-1}MP = D (= P^t MP).$$

De plus, les sous-espaces propres de M sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. La reformulation découle du lemme III.2.3.

Avant de commencer, montrons que toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique sont réelles, et que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de M, et soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ un vecteur propre complexe associé à λ.

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, on note $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1 \\ \vdots \\ \overline{x}_n \end{pmatrix}$. Notons $M = (a_{ij})_{i,j}$. Par définition, on a $MX = \lambda X$, et donc

$$\sum_{j=1} a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!] \,.$$

En conjuguant, puisque $a_{ij} \in \mathbb{R}$, on obtient

$$\sum_{j=1} a_{ij} \overline{x}_j = \overline{\lambda} \overline{x}_i \quad \text{pour tout } i \in [\![1, n]\!] \,,$$

soit $M\overline{X} = \overline{\lambda X}$. En transposant, puisque M est symétrique, on a

$$\overline{X}^t M = \overline{\lambda X}^t.$$

En multipliant par X à droite, on obtient

$$\overline{X}^t M X = \overline{X}^t \lambda X = \overline{\lambda X}^t X,$$

soit

$$(\lambda - \overline{\lambda}) \overline{X}^t X = 0.$$

Or, on a

$$\overline{X}^t X = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i x_i = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \neq 0,$$

car X est non nul. Ainsi, $\lambda = \overline{\lambda}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$.

On vient donc de démontrer que toute valeur propre de M est réelle. Montrons maintenant que les sous-espaces propres de M sont orthogonaux deux à deux. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ deux valeurs propres distinctes de M, et soient $X, Y \in \mathbb{R}^n$ vérifiant respectivement $MX = \lambda X$ et $MY = \mu Y$.

Alors, on a d'une part

$$X^t M Y = X^t \mu Y = \mu X^t Y,$$

et d'autre part

$$X^t M Y = (MX)^t Y = (\lambda X)^t Y = \lambda X^t Y.$$

Ainsi, $(\mu - \lambda)X^tY = 0$, d'où $X^tY = 0$, ce qui signifie bien que X et Y sont orthogonaux pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Pour démontrer qu'une matrice symétrique est diagonalisable en base orthonormée, on procède par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est clair, puisque 1 est une base orthonormée de $\mathbb{R}$ et toute matrice 1×1 est diagonale.

Supposons que le résultat soit vrai pour toute matrice symétrique réelle de taille $n-1$, et soit $M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle de taille n. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de M, et soit e'_1 un vecteur propre associé.

Grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt, on trouve une base orthogonale $\mathbf{e}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ commençant par e'_1. En posant $e_i = \dfrac{e'_i}{\|e'_i\|_2}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on obtient une base orthonormée $\mathbf{e}$ de $\mathbb{R}^n$.

Si P est la matrice dont les colonnes sont $e_1, \ldots, e_n$, alors $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, d'après le lemme III.2.3. De plus, puisque e_1 est aussi un vecteur propre associé à λ, on a

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & N & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Comme $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et M est symétrique, on a

$$(P^{-1}MP)^t = (P^tMP)^t = P^tMP = P^{-1}MP.$$

Autrement dit, $P^{-1}MP$ est symétrique.

On en déduit aisément que les coefficients de la première ligne, à part le premier, sont tous nuls, et que N est symétrique. Par hypothèse de récurrence, il existe $R \in \mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D réelle telles que $R^{-1}NR = D$.

On a donc

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & RDR^{-1} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}.$$

Posons $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & R & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$ et $D' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & D & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$.

Un simple calcul par blocs montre alors que $P^{-1}MP = Q^{-1}D'Q$, d'où

$$(PQ^{-1})^{-1}M(PQ^{-1}) = QP^{-1}MPQ^{-1} = D'.$$

Or, puisque $R \in \mathrm{O}_{n-1}(\mathbb{R})$, on a aisément $Q^{-1} = Q^t$, i.e. $Q \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Mais alors, on a

$$(PQ^{-1})^{-1} = QP^{-1} = QP^t = (PQ^t)^t = (PQ^{-1})^t,$$

d'où $PQ^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$. Ainsi, la propriété est vraie au rang n, ce qui achève la récurrence, puisque D' est bien entendu diagonale. □

Remarque III.3.8. Le théorème est faux si M n'est pas symétrique, ou si M est complexe.

À titre d'exercice, le lecteur exhibera une matrice symétrique complexe non diagonalisable, et une matrice réelle diagonalisable dont les sous-espaces propres ne sont pas orthogonaux.

Exemple III.3.9. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

On vérifie que les valeurs propres sont 5 et -5, et que

$$E_5 = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\}, E_{-5} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}.$$

Une base orthonormée pour E_5 est donc

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

et une base orthonormée pour E_{-5} est donc

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

La base recherchée est donc donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Cette propriété spectrale des matrices se retraduit aussi en termes de formes quadratiques.

Théorème III.3.10 (Diagonalisation simultanée). *Soit $(E, \langle\,,\rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique. Alors, il existe une base orthonormée de E qui soit aussi q-orthogonale.*

Démonstration. On se fixe une base $\mathbf{e}$ orthonormée de E pour son produit scalaire.

La matrice $M = \mathrm{Mat}(q; \mathbf{e})$ est symétrique réelle.

D'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale réelle D telles que $P^{-1}MP = D$. Comme P est inversible, ses colonnes sont les vecteurs coordonnées d'une base $\mathbf{f}$ de E dans la base

$\mathbf{e}$. D'après le lemme III.2.3, $\mathbf{f}$ est une base orthonormée de E. Mais on a aussi

$$\mathrm{Mat}(q;\mathbf{f}) = P^t M P = P^{-1} M P = D.$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}(q;\mathbf{f})$ est diagonale, i.e. $\mathbf{f}$ est q-orthogonale. $\square$

Exemple III.3.11. Munissons $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire usuel, et soit

$$\begin{aligned} q\colon \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3). \end{aligned}$$

Soit $\mathbf{e}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. C'est une base orthonormée pour le produit scalaire usuel. On a alors

$$\mathrm{Mat}(q;\mathbf{e}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On vérifie que les valeurs propres sont 3 et 0, et que

$$E_3 = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}, E_0 = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}.$$

Une base orthonormée pour E_1 est donc

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour trouver une base orthonormée de E_0, on applique Gram-Schmidt.

On pose $e_1' = \mathrm{Vect}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\}$, et donc

$$e_2' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Une base orthonormée pour E_0 est donc

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

La base $\mathbf{f}$ recherchée est alors donnée par

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, f_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}, f_3 = \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}.$$

Si $x = x'_1 f_1 + x'_2 f_2 + x'_3 f_3$, on a $q(x) = 3x'^2_3$.

Le théorème spectral nous fournit également un autre moyen de calculer la signature d'une forme quadratique.

Proposition III.3.12. *Soit E un espace vectoriel réel de dimension $n \geq 1$, et soit $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme quadratique, de signature (r_+, r_-).*

Alors, r_+ et r_- sont respectivement le nombre de valeurs propres >0 et le nombre de valeurs propres <0 de n'importe quelle matrice représentative de q.

Démonstration. On se fixe une base $\mathbf{e}$ de E. La matrice $M = \mathrm{Mat}(q; \mathbf{e})$ étant symétrique réelle, d'après le théorème spectral, il existe $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale réelle D telles que $P^{-1}MP = D$. Comme P est inversible, ses colonnes sont les vecteurs coordonnées d'une base $\mathbf{f}$ de E dans la base $\mathbf{e}$. On a alors

$$\mathrm{Mat}(q; \mathbf{f}) = P^t MP = P^{-1}MP = D.$$

Puisque $P^{-1}MP = D$, les éléments diagonaux de D sont exactement les valeurs propres de M. Comme $\mathrm{Mat}(q; \mathbf{f}) = D$, $\mathbf{f}$ est q-orthogonale, et on utilise alors la proposition III.3.2 pour conclure. □

Chapitre IV

Géométrie euclidienne

Dans ce chapitre, on s'intéresse à certains endomorphismes particuliers d'espaces euclidiens. On commence par définir la notion d'adjoint dans un cadre général.

IV.1. Adjoint d'un endomorphisme

Définition IV.1.1. Soit $b : E\times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit qu'un endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ est *adjoint à u* (par rapport à b) si l'on a

$$b(u(x), y) = b(x, u^*(y)) \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Remarque IV.1.2. Si $b : E\times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée, et si $u \in \mathscr{L}(E)$ possède un endomorphisme adjoint, alors celui-ci est unique.

En effet, soient $u_1^*, u_2^* \in \mathscr{L}(E)$ deux endomorphismes adjoints à u, et soit $y \in E$. Pour tout $x \in E$, on a

$$b(u(x), y) = b(x, u_1^*(y)) = b(x, u_2^*(y)),$$

d'où $b(x, (u_1^* - u_2^*)(y)) = 0$ pour tout $x \in E$. Comme b est non dégénérée, on en déduit que $(u_1^* - u_2^*)(y) = 0$, soit $u_1^*(y) = u_2^*(y)$. Ceci étant valable pour tout $y \in E$, on obtient $u_1^* = u_2^*$.

Un adjoint n'existe pas toujours.

Exemple IV.1.3. Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni du produit scalaire $\langle\ ,\rangle$ défini par

$$\langle \sum_n a_n X^n, Q\rangle = \sum_n b_n X_n\rangle \sum_n a_n b_n.$$

Considérons l'endomorphisme de E défini par

$$\begin{aligned} u\colon E &\longrightarrow E \\ P &\longmapsto (P(1). \end{aligned} .$$

Alors, u n'a pas d'adjoint. En effet, si u^* est un adjoint de u, alors pour tout $n \geq 0$, on a

$$\langle u(X^n), 1\rangle = \langle X^n u^*(1)\rangle.$$

Si on pose $u^*(1) = \sum_n b_n X^n$, alors on obtient $1 = b_n$ pour tout $n \geq 0$, ce qui est impossible puisque les coefficients b_n sont tous nuls sauf un nombre fini.

En revanche, l'existence d'un adjoint pour tout endomorphisme est assurée en dimension finie.

Théorème IV.1.4. *Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et soit $b : E \times E \longrightarrow K$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée. Alors, tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ admet un unique endomorphisme adjoint $u^* \in Lin(E)$.*

De plus, si $\mathbf{e}$ est une base de E, et si $M = \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})$, on a

$$\mathrm{Mat}(u^*; \mathbf{e}) = M^{-1}\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})^t M.$$

D'autre part, on a les propriétés suivantes :

(1) *l'application*

$$\begin{aligned} \mathscr{L}(E) &\longrightarrow \mathscr{L}(E) \\ u &\longmapsto u^* \end{aligned}$$

est linéaire. De plus, pour tous $u, u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E)$, on a $(u_1 \circ u_2)^* = u_2^* \circ u_1^*$ et $(u^*)^* = u$;

(2) *on a $\mathrm{Ker}(u^*) = (\mathrm{Im}(u))^\perp$ et $\mathrm{Im}(u^*) = \mathrm{Ker}(u)^\perp$.*
En particulier, u^* et u ont même rang.

Démonstration. Fixons nous une base $\mathbf{e}$ de E, et posons $M = \mathrm{Mat}(b; \mathbf{e})$. Commençons par remarquer que pour tous $u, v \in \mathscr{L}(E)$, les applications

$$\begin{aligned} b_u \colon E \times E &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto b(u(x), y) \end{aligned} \quad \text{et} \quad \begin{aligned} b_v \colon E \times E &\longrightarrow K \\ (x, y) &\longmapsto b(x, v(y)) \end{aligned}$$

sont bilinéaires.

De plus, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{aligned} b_u(x, y) &= b(u(x), y) \\ &= [u(x)]_{\mathbf{e}}^t M [y]_{\mathbf{e}} \\ &= (\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})[x]_{\mathbf{e}})^t M [y]_{\mathbf{e}} \\ &= [x]_{\mathbf{e}}^t (\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})^t M)[y]_{\mathbf{e}}, \end{aligned}$$

et de même, on a

$$\begin{aligned} b_v(x, y) &= b(x, v(y)) \\ &= [x]_{\mathbf{e}}^t M([v(y)]_{\mathbf{e}} \\ &= [x]_{\mathbf{e}})^t (M\mathrm{Mat}(v; \mathbf{e}))[y]_{\mathbf{e}}. \end{aligned}$$

D'après la définition d'une matrice représentative, on en déduit

$$\mathrm{Mat}(b_u, \mathbf{e}) = (\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})^t M \quad \text{et } \mathrm{Mat}(b_v, \mathbf{e}) = M\mathrm{Mat}(v; \mathbf{e}).$$

Ainsi, un endomorphisme $u^* \in \mathscr{L}(E)$ est adjoint à u si, et seulement si, on a

$$\mathrm{Mat}(u;\mathbf{e})^t M = M\mathrm{Mat}(u^*;\mathbf{e}).$$

Comme b est non dégénérée, M est inversible, cela équivaut à

$$\mathrm{Mat}(u^*;\mathbf{e}) = M^{-1}\mathrm{Mat}(u;\mathbf{e})^t M.$$

Cela démontre à la fois l'existence et l'unicité d'un tel endomorphisme u^* (que l'on avait déjà établie par ailleurs), puisqu'un endomorphisme est complètement déterminé par sa matrice représentative dans la base $\mathbf{e}$.

Pour démontrer (1), on peut, soit utiliser les matrices représentatives, soit la définition. Si $u, u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E)$, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} b((u_1+\lambda u_2)(x), y) & = & b(u_1(x), y) + \lambda b(u_2(x), y) \\ & = & b(x, u_1^*(y)) + \lambda b(x, u_2^*(y)) \\ & = & b(x, (u_1^* + \lambda u_2^*)(y)) \end{array}$$

Ceci démontre que $u_1^* + \lambda u_2^*$ est adjoint à $u_1 + \lambda u_2$.

De même, pour tous $x, y \in E$, on a

$$b(u^*(x), y) = b(y, u^*(x)) = b(u(y), x) = b(x, u(y)),$$

ce qui démontrer que u est l'adjoint de u^*.

Montrons (2). Pour tout $y \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} y \in \mathrm{Ker}(u^*) & \iff & u^*(y) = 0 \\ & \iff & b(x, u^*(y)) = 0 \ \text{ pour tout } x \in E \\ & \iff & b(u(x), y) = 0 \ \text{ pour tout } x \in E \\ & \iff & y \in (\mathrm{Im}(u))^{\perp}, \end{array}$$

d'où la première égalité.

Pour la seconde, pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{array}{rcl} x \in \mathrm{Ker}(u) & \iff & u(x) = 0 \\ & \iff & b(u(x), y) = 0 \ \text{ pour tout } y \in E \\ & \iff & b(x, u^*(y)) = 0 \ \text{ pour tout } y \in E \\ & \iff & x \in (\mathrm{Im}(u^*))^{\perp}, \end{array} .$$

On a donc $(\mathrm{Im}(u^*))^{\perp} = \mathrm{Ker}(u)$. D'après la proposition II.1.3, on obtient $\mathrm{Im}(u^*) = (\mathrm{Ker}(u))^{\perp}$.

On a alors

$$\mathrm{rg}(u^*) = \dim_K((\mathrm{Ker}(u))^{\perp}) = \dim_K(E) - \dim_K(\mathrm{Ker}(u)) = \mathrm{rg}(u).$$

$\square$

Corollaire IV.1.5. *Soit E un espace euclidien, et soit $\mathbf{e}$ une base orthonormée de E. Pour tout endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$, on a*

$$\mathrm{Mat}(u^*;\mathbf{e}) = \mathrm{Mat}(u;\mathbf{e})^t.$$

Remarque IV.1.6. En appliquant les résultats précédents à $\mathbb{R}^n$, muni de son produit scalaire usuel, et à la base canonique, on obtient

$$\mathrm{Ker}(M^t) = \mathrm{Im}(M)^\perp \text{ et } \mathrm{Im}(M^t) = (\mathrm{Ker}(M))^\perp \text{ pour tout } M \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}).$$

IV.2. Endomorphismes symétriques et projections orthogonales d'un espace euclidien

Dans ce qui suit, E est un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

Définition IV.2.1. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On dit que u est *symétrique* si $u^* = u$, c'est-à-dire si

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Le lemme suivant caractérise matriciellement les endomorphismes symétriques.

Lemme IV.2.2. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *l'endomorphisme u est symétrique ;*
(2) *pour toute base orthonormée $\mathbf{e}$ de E, $\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})$ est symétrique ;*
(3) *il existe une base orthonormée $\mathbf{e}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})$ est symétrique.*

Démonstration. Si $u^* = u$, alors pour toute base orthonormée $\mathbf{e}$ de E, on a $\mathrm{Mat}(u^*; \mathbf{e}) = \mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})$. Par le théorème IV.1.4, cela implique que $\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})$ est symétrique, d'où « (1) $\Longrightarrow$ (2) ». L'implication « (2) $\Longrightarrow$ (3) »est claire. Supposons maintenant qu'il existe une base orthonormée $\mathbf{e}$ de E telle que $\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})$ est symétrique. Toujours par le même théorème, on obtient alors

$$\mathrm{Mat}(u^*; \mathbf{e}) = \mathrm{Mat}(u; \mathbf{e}).$$

Mais alors, on a $u^* = u$, d'où « (3) $\Longrightarrow$ (1) ». □

Le théorème spectral pour les matrices symétriques se retraduit de la façon suivante.

Théorème IV.2.3. *Soit E un espace euclidien. Alors, tout endomorphisme symétrique de E est diagonalisable en base orthonormée. De plus, ses sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux.*

Démonstration. Soit $\mathbf{e}$ une base orthonormée de E. Alors, $M = \mathrm{Mat}(u; \mathbf{e})$ est symétrique, puisque u est symétrique. D'après le théorème spectral, il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP = D$.

Les colonnes de la matrice P sont les vecteurs coordonnées dans la base $\mathbf{e}$ des éléments d'une base $\mathbf{f}$ formée de vecteurs propres. Comme $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, cette base est orthonormée.

Enfin, les sous-espaces propres de u étant ceux de M, ceux-ci sont orthogonaux. □

Pour finir ce bref paragraphe, nous allons caractériser les projections orthogonales d'un espace euclidien.

DÉFINITION IV.2.4. Un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ est un *projecteur* si $p \circ p = p$.

Dans ce cas, c'est la projection sur $\mathrm{Im}(p)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(p)$.

Un endomorphisme $p \in \mathscr{L}(E)$ est un *projecteur orthogonal* si $p \circ p = p$, et si $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(p)^{\perp}$. Autrement dit, $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur orthogonal si c'est la projection orthogonale sur son image.

On a alors la caractérisation suivante.

PROPOSITION IV.2.5. *Soit $p \in \mathscr{L}(E)$ un projecteur. Les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *p est un projecteur orthogonal ;*
(2) *pour toute base orthonormée $\mathbf{e}$ de E,* $\mathrm{Mat}(p; \mathbf{e})$ *est symétrique ;*
(3) *il existe une base orthonormée* $\mathbf{e}$ *de E telle que* $\mathrm{Mat}(p; \mathbf{e})$ *est symétrique.*

Démonstration. D'après le lemme IV.2.2, cela revient à montrer que p est un projecteur orthogonal si, et seulement si, p est un endomorphisme symétrique.

Supposons que p soit un projecteur orthogonal. Soit $F = \mathrm{Im}(p)$. Alors, p est la projection orthogonale sur F. Soit $\mathbf{e}$ la base de E en accolant une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^{\perp}$. C'est donc une base orthonormée de $\mathbf{e}$, et on a

$$\mathrm{Mat}(p; \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} I_r & \\ & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

où $r = \mathrm{rg}(p)$. Une matrice diagonale étant symétrique, le lemme IV.2.2 montre que p est symétrique. Inversement, si p est symétrique, par le théorème IV.1.4, on a

$$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Ker}(p^*) = (\mathrm{Im}(p))^{\perp},$$

et p est un donc un projecteur orthogonal. □

IV.3. Isométries d'un espace euclidien

Encore une fois, E désigne un espace euclidien de dimension $n \geq 1$.

On commence par un lemme.

LEMME IV.3.1. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *pour tout $x \in E$, $\|u(x)\|_2 = \|x\|_2$;*

(2) *pour tous* $x, y \in E$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ *;*

(3) *on a* $u^* = u^{-1}$ *;*

(4) *pour toute base orthonormée* $\mathbf{e}$*,* $\mathrm{Mat}(u^*; \mathbf{e}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ *;*

(5) *il existe une base orthonormée* $\mathbf{e}$ *telle que* $\mathrm{Mat}(u^*; \mathbf{e}) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$*.*

Démonstration. On a déjà vu que pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|x + y\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 + 2\langle x, y\rangle.$$

Supposons que $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifie (1). Alors, pour tous $x, y \in E$, on a

$$\|u(x + y)\|_2^2 = \|u(x) + u(y)\|_2^2 = \|u(x)\|_2^2 + \|u(y)\|_2^2 + 2\langle u(x), u(y)\rangle.$$

En utilisant l'hypothèse sur u, on en déduit (2). Inversement, si u vérifie (2), en prenant $y = x$ et en passant à la racine carrée, on obtient (1).

De plus, la propriété (3) est vérifiée si, et seulement si, on a

$$\langle x, (u^* \circ u)(y)\rangle = \langle x, y\rangle \quad \text{pour tous } x, y \in E.$$

Cela équivaut à dire que, pour tout $y \in E$, on a $\langle x, (u^* \circ u)(y) - y\rangle = 0$ pour tout $x \in E$. Cela se retraduit par $(u^* \circ u)(y) - y = 0$ pour tout $y \in E$, puisqu'un produit scalaire est non dégénéré. Ceci est équivalent à $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$.

Ceci équivaut à $u^* = u^{-1}$. En effet, si $u^* = u^{-1}$, alors $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$. Inversement, si $u^* \circ u = \mathrm{Id}_E$, alors u est alors injective, donc bijective puisque E est de dimension finie. En effet, si $x \in E$ vérifie $u(x) = 0$, alors $u^*(u(x)) = u^*(0) = 0 = x$. Mais alors, on a $u^* = u^{-1}$.

Les propriétés (4) et (5) équivalent alors (3), puisque la matrice de u^* dans une base orthonormée est la transposée de la matrice de u dans cette même base. □

Définition IV.3.2. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est une *isométrie* si elle vérifie une des conditions équivalentes du lemme précédent.

On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries de E ; On montre que c'est un groupe pour la composition (**exercice !**), appelé *groupe orthogonal de* E.

Lemme IV.3.3. *Pour tout* $u \in \mathrm{O}(E)$*, on a* $\det(u) \pm 1$*.*

Démonstration. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$, et soit M sa matrice représentative dans une base orthonormée fixée. Alors, on a $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, soit $M^t M = I_n$. On a alors

$$\det(M^t M) = \det(M^t)\det(M) = \det(M)^2 = \det(I_n) = 1,$$

d'où $\det(M) = \pm 1$, c'est-à-dire $\det(u) = \pm 1$. □

Définition IV.3.4. Une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ est *directe* si $\det(u) = 1$, et *indirecte* si $\det(u) = -1$. *isométrie* L'ensemble des isométries directes est noté $\mathrm{O}^+(E)$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{O}(E)$ (**exercice !**), appelé *groupe spécial orthogonal de E.*

L'ensemble des isométries indirectes est noté $\mathrm{O}^-(E)$. Ce n'est **pas** un groupe pour la composition, puisque la composition de deux endomorphismes de déterminant -1 est de déterminant 1.

Exemple IV.3.5. Soit F un sous-espace de E, et soit $s_F \in \mathscr{L}(E)$ la symétrie orthogonale par rapport à F. Autrement dit, on a

$$s_F(x_F + x_{F^\perp}) = x_F - x_{F^\perp} \quad \text{pour tout } x_F \in F \quad \text{et tout } x_{F^\perp} \in F^\perp.$$

Alors, $s_F \in \mathrm{O}(E)$.

En effet, soit $\mathbf{e}$ la base de E en accolant une base orthonormée de F et une base orthonormée de $F^\perp$. C'est donc une base orthonormée de $\mathbf{e}$, et on a

$$\mathrm{Mat}(s_F; \mathbf{e}) = \begin{pmatrix} I_r & \\ & -I_{n-r} \end{pmatrix},$$

où $r = \dim_{\mathbb{R}}(F)$. Un simple calcul montre que cette matrice appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, d'où le résultat.

C'est une isométrie directe si F est $n - r$ est pair, et indirecte si $n - r$ est impair.

Un exemple particulièrement important de symétrie orthogonale est celui des symétries par rapport à un hyperplan.

Définition IV.3.6. Une *réflexion orthogonale de E* est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

C'est une isométrie indirecte de E, d'après ce qui précède.

On verra plus loin que tout isométrie est une composée d'au plus n réflexions orthogonales.

Pour l'instant, on se contente de déterminer les isométries d'un espace euclidien de dimension ≤ 3.

IV.4. Isométries en petite dimension

On commence par un lemme général concernant le spectre d'une isométrie.

Lemme IV.4.1. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ une isométrie d'un espace euclidien. Alors,* $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1, -1\}$.

Démonstration. Supposons que u possède une valeur propre réelle $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre associé. Alors, on a

$$\|x\|_2 = \|u(x)\|_2 = \|\lambda x\|_2 = |\lambda| \|x\|_2.$$

Comme x est non nul, $\|x\|_2$ est non nul, et on en déduit que $|\lambda| = 1$, d'où le résultat. $\square$

On commence par le cas facile d'un espace euclidien de dimension 1. Dans ce cas, tout endomorphisme est de la forme $\lambda \mathrm{Id}_E$. Clairement, λ est alors une valeur propre de u, et par conséquent $\lambda^2 = 1$.

On a alors deux isométries : Id_E, qui est directe, et $-\mathrm{Id}_E$, qui est indirecte.

Un cas plus intéressant est celui d'un plan euclidien, i.e. d'un espace euclidien de dimension 2. Une fois fixée une base orthonormée $\mathbf{e} = (e_1, e_2)$, cela revient à déterminer les éléments de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$.

Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On sait que $\det(M) = ad - bc = \varepsilon, \varepsilon = \pm 1$, et que $M^t = M^{-1}$.

Mais alors, on a

$$M^t = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} M^{-1} = \varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$d = \varepsilon a, \ b = -\varepsilon c,$$

et comme $\det(M) = \varepsilon$, on a alors $\varepsilon a^2 + \varepsilon c^2 = \varepsilon$, soit

$$a^2 + c^2 = 1.$$

Bref, M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} a & -\varepsilon c \\ c & \varepsilon a \end{pmatrix}, \quad \text{avec } a^2 + c^2 = 1.$$

Réciproquement, une matrice de cette forme est bien orthogonale, comme un simple calcul le montre.

La condition $a^2 + c^2 = 1$ revient à dire que (a, c) se trouve sur le cercle unité. Il existe donc $\theta \in \mathbb{R}$, unique à un multiple de 2π près, tel que

$$a = \cos(\theta), \ c = \sin(\theta).$$

Si $u \in \mathrm{O}(E)$, on a donc

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e}) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{si } u \in \mathrm{O}^+(E),$$

et

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e}) = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{si } u \in \mathrm{O}^-(E).$$

Dans le premier cas, si $E = \mathbb{R}^2$ et si $\mathbf{e}$ est sa base canonique, on reconnaît la matrice d'une rotation d'angle θ. On aurait donc envie de dire dans la cas général que u est une rotation d'angle θ. Ici, on va avoir un problème, car il n'y a pas de choix canonique d'une base orthonormée.

Pour pointer du doigt la difficulté, calculons la matrice représentative de u dans la base orthonormée $\mathbf{f} = (e_2, e_1)$. On a facilement

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = R_{-\theta} = R_{-\theta}.$$

Alors ? Quel est l'angle de la rotation ? θ ou $-\theta$?

En fait, le cas de $\mathbb{R}^2$ est un peu trompeur, dans le sens où, pour définir un angle orienté, on a choisi de travailler avec la base canonique de $\mathbb{R}^2$, ce qui a ensuite permis de définir une orientation des angles comme on la connaît (le sens anti-horaire). Ce choix est tout à fait arbitraire : on aurait tout aussi bien pu choisir le sens horaire, par exemple.

On en vient à la notion d'orientation d'un espace euclidien. Si $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ sont deux bases orthonormées, on sait que la matrice P des vecteurs coordonnées des éléments de $\mathbf{e}'$ dans la base $\mathbf{e}$ est une matrice orthogonale. On a donc $\det(P) = \pm 1$, ou encore $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') = \pm 1$.

Définition IV.4.2. Deux bases orthonormées $\mathbf{e}$ et $\mathbf{e}'$ ont *même orientation* si $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') = 1$, et ont *des orientations opposées* si $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') = -1$.

A priori, la définition n'est pas symétrique. Le lemme suivant assure entre autres que c'est bien le cas.

Lemme IV.4.3. *Soient* $\mathbf{e}, \mathbf{e}', \mathbf{e}''$ *des bases orthonormées de* E. *Alors :*

(1) *la base* $\mathbf{e}$ *a la même orientation qu'elle-même ;*
(2) *si* $\mathbf{e}$ *et* $\mathbf{e}'$ *ont même orientation, alors* $\mathbf{e}'$ *et* $\mathbf{e}$ *ont même orientation ;*
(3) *si* $\mathbf{e}$ *et* $\mathbf{e}'$ *ont même orientation, et si* $\mathbf{e}'$ *et* $\mathbf{e}''$ *ont même orientation, alors* $\mathbf{e}$ *et* $\mathbf{e}''$ *ont même orientation.*

Deux bases sont toujours soit de même orientation, soit d'orientation opposée. De plus, il existe au moins deux bases ayant une orientation différente.

Démonstration. Le point (1) est clair, puisque $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) = 1$.

Remarquons que l'on a

$$\det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e}) = \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}')^{-1} = \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}'),$$

puisque tous ces déterminants valent 1 ou -1, d'où (2). On a aussi

$$\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}'') = \det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e}) \det_{\mathbf{e}'}(\mathbf{e}''),$$

d'où (3).

Le point suivant découle de la définition même. Enfin, si $\mathbf{e}$ est une base orthonormée fixée, la base obtenue en remplaçant le premier vecteur par son opposé a une orientation opposée (puisque cette opération multiple le déterminant par -1). $\square$

Orienter l'espace va alors consister à se fixer une base orthonormée de référence, et considérer l'orientation des autres bases par rapport à elle.

DÉFINITION IV.4.4. Un *espace euclidien orienté* est un couple $(E, \mathbf{e})$, où E est un espace euclidien et $\mathbf{e}$ est une base orthonormée.

Une base orthonormée $\mathbf{e}'$ de E est dite *directe* si $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') = 1$, et *indirecte* si $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}') = -1$.

Par définition, si $(E, \mathbf{e})$ est orienté, alors $\mathbf{e}$ est une base orthonormée directe.

Voyons comment cela résout notre problème. Orientons E grâce à $\mathbf{e}$, et soit $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ une base orthonormée directe. Alors, la matrice P correspondant à cette base est dans $\mathrm{O}_2^+(\mathbb{R})$, donc de la forme $R_\tau, \tau \in \mathbb{R}$ par ce qui précède.

Supposons que $u \in \mathrm{O}^+(E)$. On a alors $\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e}) = R_\theta,\ \theta \in \mathbb{R}$.

Mais alors, on a

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f}) = R_\tau^- R_\theta R_\tau = R_{-\tau} R_\theta R_\theta = R_{-\tau+\theta+\tau} = R_\theta,$$

d'après un simple calcul, ou d'après les propriétés des rotations.

Ainsi, on obtient toujours le même angle. On laisse constater le même phénomène pour les isométries indirectes.

Essayons maintenant de déterminer la nature géométrique des éléments de $\mathrm{O}^-(E)$. Comme S_θ est symétrique et que $\mathbf{e}$ est orthonormée, u est un endomorphisme symétrique, donc diagonalisable en base orthonormée. Or, si $\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e}) = S_\theta$, le polynôme caractéristique de u est donnée par

$$\chi_u = X^2 - 1 = (X-1)(X+1).$$

C'est donc une réflexion orthogonale, puisque le sous-espace des points fixes est de dimension $2-1$. Un simple calcul utilisant les identités trigonométriques montre que la droite propre correspondant à la valeur propre 1 est engendrée par

$$v_\theta = \cos(\theta/2) e_1 + \sin(\theta/2) e_2$$

alors que la droite propre correspondant à la valeur propre -1 est engendrée par

$$w_\theta = -\sin(\theta/2) e_1 + \cos(\theta/2) e_2.$$

Dans E muni de sa base $\mathbf{e}$, c'est donc une réflexion orthogonale par rapport à la droite déterminée par l'angle $\theta/2$ (i.e. celle qui fait un angle de $\theta/2$ par rapport au premier vecteur de base).

Remarquons également que, puisque u est diagonalisable en base orthonormée, il existe une base orthonormée $\mathbf{f} = (f_1, f_2)$ telle que

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Quitte à remplacer f_1 par $-f_1$, on peut toujours supposer que $\mathbf{f}$ est directe (changer un vecteur d'une base en son opposé multiplie le déterminant par -1).

On a donc le théorème suivant.

Théorème IV.4.5. *Soit E un plan euclidien orienté. Alors :*

(1) *les isométries directes de E sont les rotations. Plus précisément, si $u \in \mathrm{O}^+(E)$, pour* **toute** *base orthonormée directe de E, on a*

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e}) = R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ est unique à multiple de 2π près, et ne dépend pas de la base orthonormée directe choisie. L'endomorphisme u est alors une rotation d'angle θ.

En particulier, $\mathrm{O}^+(E)$ est un groupe commutatif;

(2) *les isométries indirectes de E sont les réflexions orthogonales. Plus précisément, si $u \in \mathrm{O}^-(E)$, pour* **toute** *base orthonormée directe* $\mathbf{e}$ *de E, on a*

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{e}) = S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$ est unique à multiple de 2π près, mais dépend de la base orthonormée directe choisie.

De plus, il existe une base orthonormée directe $\mathbf{f}$ *de E telle que*

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Exemple IV.4.6. Soit $M = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice de réflexion orthogonale. On vérifie que E_1 est engendré par $\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5} - 2 \end{pmatrix}$. L'hyperplan de la réflexion est alors la droite engendrée par ce vecteur.

On passe maintenant au cas plus délicat d'un espace euclidien orienté de dimension 3. Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

Le polynôme caractéristique de u est un polynôme à coefficients réels de degré 3. Il admet donc au moins une racine réelle. Autrement dit, u possède une valeur propre réelle, qui est donc ± 1 d'après le lemme IV.4.1.

Choisissons un vecteur propre unitaire $f_1 \in E$ pour cette valeur propre. On a donc $u(f_1) = \varepsilon f_1$, $\varepsilon = \pm 1$. Soit $F = \mathbb{R} f_1$. Alors, $F^\perp$ est de dimension 2. Remarquons que $F^\perp$ est stable par u. En effet, soit $x \in F^\perp$. Comme $u^* = u^{-1}$, on a

$$\langle u(x), f_1 \rangle = \langle x, u^{-1}(f_1) \rangle = \varepsilon^{-1} \langle x, f_1 \rangle = 0.$$

Comme u conserve la norme euclidienne sur E, elle la conserve aussi sur $F^\perp$, et la restriction de u à $F^\perp$ est alors une isométrie du plan euclidien $F^\perp$.

Choisissons une base orthonormée quelconque $\mathbf{f}' = (f_2, f_3)$ de $F^\perp$. Comme $F^\perp$ est stable par u, et comme $u(f_1) = \varepsilon f_1$, on a

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f})) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \\ & \mathrm{Mat}(u_{|_{F^\perp}}; \mathbf{f}') \end{pmatrix}.$$

On obtient en particulier que $\det(u_{|_{F^\perp}}) = \varepsilon \det(u)$.

On a alors plusieurs cas.

• Cas $u \in \mathrm{O}^+(E)$ et $\varepsilon = 1$. Alors, $u_{|_{F^\perp}} \in \mathrm{O}^+(F^\perp)$. Dans ce cas, on prend une base orthonormée $\mathbf{f}'$ de $F^\perp$ telle que $\mathbf{f}$ soit directe (c'est toujours possible, quitte à remplacer f_2 par $-f_2$). On oriente alors $F^\perp$ grâce à $\mathbf{f}'$. D'après la description des isométries du plan euclidien, on a

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R},$$

où θ est unique à un multiple de 2π près.

On obtient ainsi une rotation d'axe $\mathbb{R} f_1$, et d'angle θ (dans le plan $(\mathbb{R} f_1)^\perp$). L'orientation de l'axe force bien entendu l'orientation du plan qui lui est orthogonal, si on veut garder la même orientation globale. Si on remplace f_1 par $-f_1$, alors c'est la base $(-f_1, -f_2, f_3)$ qui est directe. On doit donc prendre l'orientation opposée pour $F^\perp$.

Remarquons que l'on peut calculer trouver l'axe de rotation, ainsi que l'angle sans trop de calculs.

Clairement, l'axe de la rotation est donné par $E_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, qui est de dimension 1. En calculant la trace, on voit aussi que l'on a

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u) - 1}{2}.$$

Cela ne suffit pas à déterminer θ, car on a $\sin(\theta)$ au signe près seulement.

Pour déterminer le signe exact. Choisissons un vecteur $v \in E$ non colinéaire à f_1 (i.e. un vecteur qui n'est pas fixe par u).

Écrivons $v = v_1 f_1 + v_2 f_2 + v_3 f_3$. On a alors

$$[u(v)]_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \cos(\theta) - v_3 \sin(\theta) \\ v_2 \sin(\theta) + v_3 \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On a par conséquent

$$\det_{\mathbf{f}}(f_1, v, u(v)) = \begin{vmatrix} 1 & v_1 & v_1 \\ 0 & v_2 & v_2 \cos(\theta) - v_3 \sin(\theta) \\ 0 & v_3 & v_2 \sin(\theta) + v_3 \cos(\theta) \end{vmatrix} = \sin(\theta)(v_2^2 + v_3^2).$$

Comme v n'est pas colinéaire à f_1, v_2 ou v_3 est non nul, et donc $v_2^2+v_3^2 > 0$. Ainsi, ce déterminant est du signe de $\sin(\theta)$. Remarquons maintenant que ceci est vrai pour n'importe quelle base orthonormée directe $\mathbf{e}$. En effet, on a alors

$$\det_{\mathbf{e}}(f_1, v, u(v)) = \det_{\mathbf{e}}(f_1, v, u(v)) \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{f}).$$

Comme $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ sont toutes les deux directes, elles ont la même orientation et $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{f}) = 1$. Autrement dit,

$$\det_{\mathbf{e}}(f_1, v, u(v)) = \det_{\mathbf{f}}(f_1, v, u(v)).$$

Si f_1 n'est pas unitaire, le résultat est encore valable, puisqu'on obtient le déterminant précédent, multiplié par sa norme, qui est > 0.

Remarquons que dans ce cas, u n'est pas diagonalisable et 1 est unique valeur propre, sauf dans deux cas exceptionnels : $\theta = 0$ modulo 2π, auquel cas $u = \mathrm{Id}_E$, et $\theta = \pi$ modulo 2π, auquel cas on a une rotation d'angle π, que l'on appelle aussi *renversement* d' axe E_1 (c'est aussi une symétrie orthogonale de droite E_1). Ces deux cas correspondent respectivement à $\mathrm{tr}(u) = 3$ et $\mathrm{tr}(u) = -1$. Notons que dans ce dernier cas, -1 est valeur propre de u.

• Cas $u \in \mathrm{O}^+(E)$ et $\varepsilon = -1$. Alors, $u_{|_{F^\perp}} \in \mathrm{O}^-(F^\perp)$. On prend une base orthonormée $\mathbf{f'}$ de $F^\perp$ qui diagonalise $u_{|_{F^\perp}}$, de sorte que $\mathbf{f}$ soit directe. Alors, la base $\mathbf{g} = (f_2, f_3, f_1)$ est aussi directe (**exercice !**), et on a On a alors

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

On obtient une rotation d'axe $E_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et d'angle π, cas déjà considéré. Notons que $\mathrm{tr}(u) = -1$ dans ce cas.

• Cas $u \in \mathrm{O}^-(E)$ et $\varepsilon = -1$. En utilisant le même procédé, on trouve cette fois une base orthonormée directe $\mathbf{f}$ telle que

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R},$$

où θ est unique à un multiple de 2π près.

On obtient la composée d'une rotation d'axe $E_{-1} = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ et d'angle θ, et d'une réflexion orthogonale d'hyperplan $E_{-1}^{\perp}$. Cette fois, on a

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u) + 1}{2},$$

et pour tout vecteur non nul f_1 de E, et pour tout $v \in E$ qui n'est pas dans E_{-1}, pour toute base orthonormée directe $\mathbf{e}$, $\det_{\mathbf{e}}(f_1, v, u(v))$ est du signe de $-\sin(\theta)$.

Encore une fois, dans ce cas u n'est pas diagonalisable et -1 est l'unique valeur propre de u, sauf dans deux cas exceptionnels : $\theta = 0$ modulo 2π, auquel cas u est une réflexion orthogonale d'hyperplan E_1, et $\theta = \pi$ modulo 2π, auquel cas $u = -\mathrm{Id}_E$. Ils correspondent respectivement au cas $\mathrm{tr}(u) = 1$ et $\mathrm{tr}(u) = -3$. Dans le premier cas, 1 est aussi valeur propre de u.

• Cas $u \in \mathrm{O}^-(E)$ et $\varepsilon = 1$. Dans ce cas, $u_{|_{F^\perp}} \in \mathrm{O}^-(F^\perp)$. Comme précédemment, on prend une base orthonormée $\mathbf{f}'$ de $F^\perp$ qui diagonalise $u_{|_{F^\perp}}$, de sorte que $\mathbf{f}$ soit directe. La base $\mathbf{g} = (f_3, f_1, f_2)$ est directe, et on a alors

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{g}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On obtient une réflexion orthogonale d'hyperplan E_1, cas déjà considéré.

THÉORÈME IV.4.7. *Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3, et soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors :*

(1) *Si $u \in \mathrm{O}^+(E)$, alors il existe une base $\mathbf{f}$ orthonormée directe de E telle que*

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \text{avec } \theta \in \mathbb{R},$$

où θ est unique à un multiple de 2π près.

C'est une rotation d'axe $E_1 = \mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$ et d'angle θ.

De plus, on a

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u) - 1}{2}.$$

Si f_1 est un vecteur de E_1 non nul, alors pour tout $v \notin E_1$, et pour toute base orthonormée directe $\mathbf{e}$, $\det_{\mathbf{e}}(f_1, v, u(v))$ est du signe de $\sin(\theta)$.

Enfin, on a $\mathrm{tr}(u) = 3$ si, et seulement si $u = \mathrm{Id}_E$, et on a les équivalences

$$\mathrm{tr}(u) = -1 \iff u \text{ est la rotation d'angle } \pi \text{ et d'axe } E_1 \iff -1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u).$$

(2) *Si $u \in \mathrm{O}^-(E)$, alors il existe une base* $\mathbf{f}$ *orthonormée directe de E telle que*

$$\mathrm{Mat}(u;\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad \textit{avec } \theta \in \mathbb{R},$$

où θ est unique à un multiple de 2π près.

C'est la composée d'une rotation d'axe $E_{-1} = \mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E)$ et d'angle θ, et d'une réflexion orthogonale d'hyperplan $E_{-1}^{\perp}$.

De plus, on a

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u)+1}{2}.$$

Si $\mathbf{f_1}$ est un vecteur de E_{-1} non nul, alors pour tout $v \notin E_{-1}$, et pour toute base orthonormée directe $\mathbf{e}$, $\mathrm{det}_{\mathbf{e}})(f_1, v, u(v))$ est du signe de $-\sin(\theta)$.

Enfin, on a $\mathrm{tr}(u) = -3$ si, et seulement si $u = -\mathrm{Id}_E$, et on a les équivalences

$$\mathrm{tr}(u) = 1 \iff u \textit{ est la réflexion orthogonale d'hyperplan } E_1 \iff 1 \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(u).$$

Exemple IV.4.8. Soit $M = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

C'est une matrice de $\mathrm{O}^+(\mathbb{R}^3)$. C'est donc une matrice de rotation. On vérifie que l'axe de rotation E_1 est engendré par $f_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a $\cos(\theta) = -\dfrac{6}{7}$, et ainsi $|\sin(\theta)| = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$.

De plus, le premier vecteur de la base canonique n'est pas proportionnel à f_1, et on a

$$\det(f_1, v, Mv) = \begin{vmatrix} -3 & 1 & \frac{3}{7} \\ 2 & 0 & -\frac{6}{7} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{vmatrix} = -\frac{4}{7} < 0.$$

On a donc $\sin(\theta) = -\dfrac{\sqrt{13}}{7}$.

IV.5. Isométries d'un espace euclidien : cas général

On élucide ici la structure des isométries d'un espace euclidien de dimension quelconque. On commence par deux lemmes techniques.

LEMME IV.5.1. *Soit E un espace euclidien, et soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Si F est un sous-espace de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.*

Démonstration. Soit F un sous-espace stable par u, et soit $x \in F^\perp$. Comme $u(F) \subset F$ et qu'une isométrie est bijective, on a $\dim_{\mathbb{R}}(u(F)) = \dim_{\mathbb{R}}(F)$. Ainsi, $u(F) = F$ et par conséquent $u^{-1}(F) = F$. Comme $u^* = u^{-1}$, pour tout $y \in F$, on a

$$\langle u(x), y\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle = 0,$$

car $u^{-1}(y) \in F$ et $x \in F^\perp$. Ainsi, on a bien $u(x) \in F^\perp$. □

LEMME IV.5.2. *Soit E un espace réel de dimension $n \geq 1$, et soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors, u possède un sous-espace stable de dimension 1 ou 2.*

Démonstration. Soit M la matrice représentative de u dans une base $\mathbf{e}$ fixée. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre complexe de M, et soit $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ une vecteur propre associé.

On peut écrire $X = X_0 + iX_1$, avec $X_0, X_1 \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda = a + ib$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. L'égalité $MX = \lambda X$ se récrit alors

$$MX_0 + iMX_1 = (aX_0 - bX_1) + i(bX_0 + aX_1).$$

Comme M est à coefficients réels, par identification, on obtient

$$MX_0 = aX_0 - bX_1 \quad \text{et} \quad MX_1 = bX_0 + aX_1.$$

Soient $x_0, x_1 \in E$ tels que $[x_j]_{\mathbf{e}} = X_j, j = 0, 1$. Alors, le sous-espace de E engendré par x_0 et x_1 est non nul (car X étant non nul, au moins un des deux vecteurs X_0, X_1 est non nul), de dimension ≤ 2, et stable par u. □

On peut maintenant maintenant démontrer le résultat suivant.

THÉORÈME IV.5.3. *Soit E un espace euclidien orienté de dimension $n \geq 1$, et soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors, il existe une base orthonormée directe de E telle que*

$$\mathrm{Mat}(u; \mathbf{f}) = \begin{pmatrix} I_p & & & & & & \\ & -I_q & & & & & \\ & & \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) & & & \\ & & \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \cos(\theta_s) & -\sin(\theta_s) \\ & & & & & \sin(\theta_s) & \cos(\theta_s) \end{pmatrix},$$

où $p, q, s \geq 0$ vérifient $p + q + 2s = \dim_{\mathbb{R}}(E)$, et $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

De plus, on a $p = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E))$ et $q = \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(u + \mathrm{Id}_E))$.

Démonstration. On le montre par récurrence sur n. Il n'y a rien à faire si $n = 1$, et le cas $n = 2$ est donné par le théorème IV.4.5, à reformulation près (si $\theta = 0$ ou π modulo 2π, on a l'identité ou une réflexion orthogonale, et $s = 0$). Supposons que le résultat soit vrai pour toute isométrie d'un espace euclidien de dimension $\leq n-1$, pour un certain $n \geq 3$, et soit u une isométrie d'un espace euclidien E de dimension n.

Par le lemme IV.5.2, il existe un sous-espace F de E de dimension ≤ 2 stable par u. Par le lemme IV.5.1, F et $F^\perp$ sont stables par u et les endomorphismes u_F sont $u_{F^\perp}$ sont bien entendu des isométries de F et $F^\perp$ respectivement.

Par les cas $n = 1, 2$, il existe une base orthonormée directe de F dans laquelle la matrice représentative de u_F a la forme voulue.

Puisque $\dim(F^\perp) = n - \dim(F) \leq n-1$, par hypothèse de récurrence, il existe une base orthonormée directe de $F^\perp$ dans laquelle la matrice représentative de $u_{F^\perp}$ a la forme voulue. Pour conclure, il suffit de recoller ces deux bases et de changer l'ordre des vecteurs si nécessaire pour obtenir une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u a la forme voulue. Si cette base n'est pas directe, on remplace un des vecteurs par son opposé, ce qui ne change pas la forme de la matrice (au pire, un des angles est changé en son opposé).

Le dernier point est clair, puisqu'on a pris le soin de demander que les angles θ_i ne soient pas multiples de π (et donc les blocs 2×2 ne possèdent pas de valeurs propres réelles). □

Ce résultat s'interprète géométriquement en disant que toute isométrie est une composée d'une symétrie orthogonale, et de rotations dont les plans sont deux à deux orthogonaux, et tous contenus dans le sous-espace des points fixes de la symétrie orthogonale.

Nous allons en déduire que toute isométrie d'un espace euclidien de dimension n est la composée d'au plus n réflexions orthogonales.

THÉORÈME IV.5.4. *Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit $u \in \mathrm{O}(E)$. Alors, u est la composée de $n - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E))$ réflexions orthogonales.*

En particulier, toute isométrie de E est la composée d'au plus n réflexions orthogonales.

Démonstration. Soit $\mathbf{f}$ une base orthonormée directe de E telle que

$$\mathrm{Mat}(u;\mathbf{f}) = \begin{pmatrix} I_p &&&&&&& \\ & -I_q &&&&&& \\ && \cos(\theta_1) & -\sin(\theta_1) &&&& \\ && \sin(\theta_1) & \cos(\theta_1) &&&& \\ &&&& \ddots &&& \\ &&&&& \cos(\theta_s) & -\sin(\theta_s) \\ &&&&& \sin(\theta_s) & \cos(\theta_s) \end{pmatrix},$$

où $p, q, s \geq 0$ vérifient $p + q + 2s = \dim_{\mathbb{R}}(E)$, et $\theta_j \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Clairement, cette matrice est le produit de q matrices de la forme

$$S_r = \begin{pmatrix} I_r && \\ & -1 & \\ && I_{n-r-1} \end{pmatrix},$$

où -1 est en position $(r+1, r+1)$ et $r \in [\![0, n-1]\!]$, et de s matrices de la forme

$$R'_\theta = \begin{pmatrix} I_r && \\ & R_\theta & \\ && I_{n-r-2} \end{pmatrix},$$

avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ et $r \in [\![0, n-2]\!]$.

Une matrice de la forme S_r est la matrice d'une réflexion orthogonale. Nous allons montrer que R'_θ est le produit de deux produits de matrices de réflexions orthogonales.

Or, on a

$$R_\theta = S_\theta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Or S_θ est la matrice d'une réflexion orthogonale, et la deuxième l'est également. Alors, R'_θ est le produit d'une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} I_r && \\ & S_\theta & \\ && I_{n-r-2} \end{pmatrix},$$

et d'une matrice de la forme S_r, qui est la matrice d'une réflexion orthogonale. Quant à la première matrice, c'est aussi la matrice d'une réflexion orthogonale, comme on le voit en diagonalisant S_θ en base orthonormée.

Finalement, $\mathrm{Mat}(u;\mathbf{f})$ est le produit de $q + 2s$ matrices de réflexions orthogonales. Or, $n = p + q + 2s$. On a donc

$$q + 2s = n - p = n - \dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)),$$

d'où le résultat. $\square$

Remarque IV.5.5. Ce théorème peut se démontrer directement, sans passer par le théorème de structure des isométries.

IV.6. Réduction des coniques et des quadriques

Jusqu'à la fin de ce paragraphe, on se place dans l'espace affine $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, muni de son repère orthonormé usuel.

Définition IV.6.1. Une *conique* est le lieu géométrique de $\mathbb{R}^2$ défini par une équation de la forme

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0,$$

où au moins un des termes quadratiques est non nul.

Une *quadrique* est le lieu géométrique de $\mathbb{R}^3$ défini par une équation de la forme

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0,$$

où au moins un des termes quadratiques est non nul.

On veut classer les types de différentes coniques et quadriques. Puisque l'on veut conserver le lieu géométrique, on ne s'autorise qu'à faire des changements de variables qui soient des changements repères qui soient orthonormés, des translations ou des isométries (i.e. qui conservent les distances et les angles).

Ceci est nécessaire : en effet, l'équation

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

représente une ellipse de centre O, alors que le changement de variables $x' = \frac{x}{3}$ et $y' = \frac{y}{2}$ donne l'équation

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

représente le cercle unité, qui n'est pas le même lieu géométrique.

Cas des coniques.

Considérons la conique

$$ax^2 + by^2 + 2cxy + dx + ey + f = 0,$$

et soit

$$\begin{array}{rccl} q\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & ax^2 + by^2 + 2cxy. \end{array}$$

D'après le théorème de diagonalisation simultanée, il existe une base orthornormée (v_1, v_2) de $\mathbb{R}^2$ qui est q-orthogonale.

Dans le nouveau repère (O, v_1, v_2), l'équation de la conique s'écrit

$$a'x'^2 + c'y'^2 + d'x + e'y + f' = 0.$$

On se débarrasse ensuite d'un ou deux termes linéaires en complètant les carrés.

Après éventuellement permutation des nouvelles variables et/ou changements du type $X \leftrightarrow -Y$, $Y \leftrightarrow -Y$ (autrement dit des réflexions orthogonales), on obtient une équation d'un des types suivants, (exception faite de quelques cas dégénérés : ensemble vide, un point, une droite, deux droites), selon la signature de q :

(1) Signature $(2,0)$ ou $(0,2)$: $\dfrac{X^2}{U^2}+\dfrac{Y^2}{V^2}=1$: c'est une ellipse (ou un cercle si $U=V$).

(2) Signature $(1,1)$: $\dfrac{X^2}{U^2}-\dfrac{Y^2}{V^2}=1$: c'est une hyperbole.

(3) Signature $(1,0)$ ou $(0,1)$: $Y^2=2\lambda X$: c'est une parabole.

Exemple IV.6.2. Considérons la conique d'équation

$$3x^2-3y^2+8xy+6\sqrt{5}x-2\sqrt{5}y+5=0.$$

Soit $\begin{array}{rccl} q\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & 3x^2-3y^2+8xy. \end{array}$

Sa matrice représentative dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

On sait que les valeurs propres sont 5 et -5, et la forme quadratique est donc de signature $(1,1)$. On a donc une hyperbole (sauf cas dégénéré).

D'après un exemple précédent, une base orthonormée qui est aussi q-orthogonale est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix},$$

les vecteurs étant respectivement des vecteurs propres pour 5 et -5.

Soient x', y' les coordonnées dans cette nouvelle base. On a donc

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2x'+y' \\ x'-2y' \end{pmatrix}.$$

Par construction de cette base, la forme q dans cette base s'écrit

$$5{x'}^2-5{y'}^2.$$

On a alors

$$5{x'}^2-5{y'}^2+10x'+10y'+5=0,$$

soit

$$x'^2 - y'^2 + 2x' + 2y' + 1 = 0.$$

On a donc

$$(x' + 1)^2 - (y' - 1)^2 + 1 = 0.$$

En posant $X = x' + 1, Y = y' - 1$, on obtient $X^2 - Y^2 = -1$. En posant $X' = Y$ et $Y' = X$, on obtient finalement l'équation réduite de l'hyperbole

$$X'^2 - Y'^2 = 1.$$

Remarquons que, si on veut seulement la nature de la conique, sans nécessairement avoir une équation réduite, il est plus rapide de calculer la signature de la partie quadratique en utilisant l'algorithme de Gauss.

Par exemple ici, on a

$$\begin{array}{rcl} 3x^2 - 3y^2 + 8xy & = & 3(x^2 + \frac{8}{3}xy) - 3y^2 \\ & = & 3((x + \frac{4}{3}y)^2 - \frac{16}{9}y) - 3y^2 \\ & = & 3(x + \frac{4}{3})^2 - \frac{25}{3}y^2 \end{array} .$$

On retrouve le fait que la forme quadratique q est de signature $(1, 1)$, et donc que la conique considérée est une hyperbole.

Néanmoins, connaître la signature ne détecte pas les cas dégénérés.

Par exemple, considérons cette fois la conique d'équation

$$3x^2 - 3y^2 + 8xy + 6\sqrt{5}x - 2\sqrt{5}y = 0.$$

On obtient alors l'équation réduite

$$X'^2 - Y'^2 = 0.$$

On a donc la réunion de des deux droites d'équations $Y' = X'$ et $Y' - X' = 0$.

Cas des quadriques.

Comme précédemment, on se ramène au cas d'une équation sans termes croisés, et on se débarasse d'un ou plusieurs termes linéaires.

Après éventuellement permutation des nouvelles variables et/ou changements du type $X \leftrightarrow -X$, $Y \leftrightarrow -Y$, $Z \leftrightarrow -Z$, et éventuellement une nouvelle translation/rotation,

on obtient une équation du type suivant (exception faite de quelques cas dégénérés) :

(1) Signature $(3, 0)$ ou $(0, 3)$: $\dfrac{X^2}{U^2} + \dfrac{Y^2}{V^2} + \dfrac{Z^2}{W^2} = 1$: c'est un ellipsoïde.

(2) Signature $(2, 1)$ ou $(1, 2)$:

On obtient 3 cas :

(a) $\dfrac{X^2}{U^2}+\dfrac{Y^2}{V^2}-\dfrac{Z^2}{W^2}=-1$: c'est un hyperboloïde à deux nappes

(b) $\dfrac{X^2}{U^2}+\dfrac{Y^2}{V^2}-\dfrac{Z^2}{W^2}=1$: c'est un hyperboloïde à une nappe

(c) $\dfrac{X^2}{U^2}+\dfrac{Y^2}{V^2}=\dfrac{Z^2}{W^2}$: c'est un cône.

(3) Signature $(2,0)$ ou $(0,2)$.

On obtient deux cas :

(a) $\dfrac{X^2}{U^2}+\dfrac{Y^2}{V^2}=1$: c'est un cyclindre elliptique

(b) $\dfrac{X^2}{U^2}+\dfrac{Y^2}{V^2}=\dfrac{Z}{W}$: c'est un paraboloïde elliptique.

(4) Signature $(1,1)$:

(a) $\dfrac{X^2}{U^2}-\dfrac{Y^2}{V^2}=\pm 1$: c'est un cyclindre hyperbolique.

(b) $\dfrac{X^2}{U^2}-\dfrac{Y^2}{V^2}=\dfrac{Z}{W}$: c'est un paraboloïde hyperbolique.

Signature $(1,0)$ ou $(0,1)$: $X^2=2pY$: cylindre parabolique.

Exemple IV.6.3. Soit la quadrique

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz+\sqrt{3}x+\sqrt{3}y+2=0.$$

Soit $\begin{array}{rccl} q\colon & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz. \end{array}$

Sa matrice représentative dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

D'après l'exemple III.3.11, une base orthonormée qui est aussi q-orthogonale est donnée par

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

les vecteurs étant respectivement des vecteurs propres pour $3, 0$ et 0.

Soient x', y', z' les coordonnées dans cette nouvelle base.

Par construction de cette base, la forme q dans cette base s'écrit

$$3(x')^2.$$

Elle est donc de signature $(1, 0)$, et on a donc un cyclindre parabolique (ou un cas dégénéré).

On vérife que l'équation de cette conique dans cette base est

$$3(x')^2 + 2x' + \sqrt{2}z' + 2 = 0,$$

soit

$$3(x' + \frac{1}{3})^2 + \sqrt{2}z' + \frac{5}{3} = 0.$$

Si on pose $X = x' + \dfrac{1}{3}, Y = z' + \dfrac{5}{3\sqrt{2}}, Z = y'$, on obtient

$$X^2 = -\frac{\sqrt{2}}{3}Y.$$