

INF201 Algorithmique et Programmation Fonctionnelle Cours 6: Listes

Année 2018 - 2019





INF121 : Rappel des épisodes précédents . . .

Programmation fonctionnelle en OCaml:

- types de base : booléens, entiers, réels, caractères, chaînes de caractères
- ► identificateurs (locaux et globaux)
- définition et utilisation de fonctions
- définition de types : synonyme, énuméré, produit, somme/union
- pattern-matching : match ... with ...
- récursivité
 - ► fonction récursives (spécification, équations récursives, terminaison)
 - types récursifs

Rappels sur "récursivité" et "types récursifs"

fonction récursive

définie en "fonction d'elle-même" par des équations de récurrence (cas de base, cas récursifs) :

$$0! = 1$$
 et $\forall n > 0.n! = n \times (n-1)!$

- permet de décrire des suites de calcul de longueur arbitraire ex : (fact 5), (fact 10), etc.
- problème de terminaison

Rappels sur "récursivité" et "types récursifs"

fonction récursive

définie en "fonction d'elle-même" par des équations de récurrence (cas de base, cas récursifs) :
 0! = 1 et ∀n > 0.n! = n × (n − 1)!

- permet de décrire des suites de calcul de longueur arbitraire ex : (fact 5), (fact 10), etc.
- problème de terminaison

Type récursif

- ▶ défini en "fonction de lui-même" . . . (cas de base, cas récursifs) :
- permet de décrire des données de taille arbitraire entiers de Peano, polynômes, ligne brisée, etc.
- problème de terminaison : type "bien fondés"

Définition d'un type récursif (exemples)

- un entier de Peano est soit l'entier zero, soit le successeur d'un entier de Peano
 - ⇒ Deux constructeurs :
 - l'entier zéro
 - le successeur d'un entier de Peano

Définition d'un type récursif (exemples)

- un entier de Peano est soit l'entier zero, soit le successeur d'un entier de Peano
 - ⇒ Deux constructeurs :
 - l'entier zéro
 - le **successeur** d'un entier de Peano
- une ligne brisée est soit un segment unitaire orienté, soit une ligne brisée prolongée par un segment unitaire orienté :
 - ⇒ Deux constructeurs :
 - le segment unitaire orienté
 - la prolongation d'une ligne brisée par un segment unitaire orienté

Définition d'un type récursif (exemples)

- un entier de Peano est soit l'entier zero, soit le successeur d'un entier de Peano
 - ⇒ Deux constructeurs :
 - l'entier zéro
 - le **successeur** d'un entier de Peano
- une ligne brisée est soit un segment unitaire orienté, soit une ligne brisée prolongée par un segment unitaire orienté :
 - ⇒ Deux constructeurs :
 - le segment unitaire orienté
 - la **prolongation** d'une ligne brisée par un segment unitaire orienté
- un polynôme est soit un monôme soit l'addition d'un polynôme et d'un monôme . . .
 - ⇒ Deux constructeurs :
 - ► un monôme
 - l'addition d'une nonôme et d'un polynôme

Fonction (récursive) à paramètres de types récursifs ?

Exemples

- longueur d'une ligne brisee
- somme des elements d'un ensemble d'entiers
- valeur d'un polynôme en un point

Une approche systématique

- → filtrage sur les constructeurs de type
 - les équations de récurrence se déduisent de la définition du type
 - terminaison : le nombre de constructeurs décroît à chaque appel récursif

En Caml:

```
type t = C1 of ... | C2 of ... | Cn of ... let rec f (x:t) : ... = match x with  |C1 (...) -> ... |C2 (...) -> ... | ... |Cn (...) -> ... | ... |Cn (...) -> ... |Cn (...) ->
```

Un type récursif "incontournable" : le type **liste** (ou séquences)

Problème fréquent en programmation : gérer "globalement" un nombre arbitraire de données de même type

Exemples:

- un ensemble de valeurs numériques
- ► un texte (= une suite de caractères)
- ▶ une image (= un ensemble d'objets graphiques, ou une suite de pixels)
- etc.

Un type récursif "incontournable" : le type **liste** (ou séquences)

Problème fréquent en programmation : gérer "globalement" un nombre arbitraire de données de même type

Exemples:

- un ensemble de valeurs numériques
- ► un texte (= une suite de caractères)
- ▶ une image (= un ensemble d'objets graphiques, ou une suite de pixels)
- etc.

La notion de liste/séquence existe dans la plupart des langages de programmation :

- elle est utile dans de nombreux contextes
- elle nécessite des opérateurs spécifiques (prédéfinis ou sous forme de librairies)

⇒ il existe un "vrai" type liste en OCaml

Comment définir une liste ...

Qu'est-ce qu'une liste?

- ▶ une suite finie de valeurs de même type
- contenant un nombre arbitraire d'éléments
- ▶ fournis selon un ordre donné ([5, 8, 4] \neq [8, 5, 4])

Comment définir une liste ...

Qu'est-ce qu'une liste ?

- ▶ une suite finie de valeurs de même type
- contenant un nombre arbitraire d'éléments
- ▶ fournis selon un ordre donné ([5, 8, 4] \neq [8, 5, 4])

Définition récursive du type liste Seq(E)

Etant donné un ensemble E, l'ensemble des listes sur E est le plus petit ensemble \mathcal{L}_E t.q. :

- 1. \mathcal{L}_E contient la liste vide
- 2. si $I \in \mathcal{L}_E$ et $e \in E$ alors la liste obtenue par ajout de e à I appartient à \mathcal{L}_E

Comment définir une liste ...

Qu'est-ce qu'une liste ?

- ▶ une suite finie de valeurs de même type
- contenant un nombre arbitraire d'éléments
- ▶ fournis selon un ordre donné ([5, 8, 4] \neq [8, 5, 4])

Définition récursive du type liste Seq(E)

Etant donné un ensemble E, l'ensemble des listes sur E est le plus petit ensemble \mathcal{L}_E t.q. :

- 1. \mathcal{L}_E contient la liste vide
- 2. si $l \in \mathcal{L}_E$ et $e \in E$ alors la liste obtenue par ajout de e à l appartient à \mathcal{L}_E

Le type Liste est donc un type (union) récursif, par exemple :

- 1. la constante Nil représente la liste vide
- 2. le constructeur Cons(e,l) représente l'ajout en tête de e à l

Remarque On peut aussi choisir un constructeur "ajout en fin" . . .

Exemple de définition d'un type liste en Caml

```
Etant donné un type t (défini par ailleurs) :

type list_de_t = Nil | Cons of t * list_de_t

La liste dont les éléments sont v1, v2, ..., vn (de type t) est notée :

Cons (v1, Cons (v2, ...,Cons (vn, Nil) ...))
```

Exemple de définition d'un type liste en Caml

Etant donné un type t (défini par ailleurs) :

La liste dont les éléments sont v1, v2, ..., vn (de type t) est notée :

```
Cons (v1, Cons (v2, ..., Cons (vn, Nil) ...))
```

Remarque

- un élément de type liste est considéré comme une valeur
- li peut être utilisé en tant que valeur dans toute construction du langage
- l'opérateur d'égalité prend en compte l'ordre des éléments :

DEMO: Liste d'entiers

Exemple de définition d'un type liste en Caml

Etant donné un type t (défini par ailleurs) :

```
type list_de_t = Nil | Cons of t * list_de_t
```

La liste dont les éléments sont v1, v2, ..., vn (de type t) est notée :

Remarque

- un élément de type liste est considéré comme une valeur
- li peut être utilisé en tant que valeur dans toute construction du langage
- l'opérateur d'égalité prend en compte l'ordre des éléments :

DEMO: Liste d'entiers

Remarque On défini de même des listes de booléens, réels, fonctions, etc.

Typage

Une règle fondamentale : tous les éléments d'une liste sont de même type

Toutes les règles de typage déjà vues s'appliquent également aux listes (construction if...then...else, pattern-matching, fonctions, etc.)

Typage

Une règle fondamentale : tous les éléments d'une liste sont de même type

Toutes les règles de typage déjà vues s'appliquent également aux listes (construction if...then...else, pattern-matching, fonctions, etc.)

Nous verrons (plus tard) que :

- ▶ il existe construction de type en Ocaml pour définir une liste
- le type

```
type list_de_t = Nil | Cons of t * list_de_t
est en fait le type t list de OCaml, défini pour tout type t
```

Exercice : définir une liste dont certains éléments sont entiers, d'autres booléens ?

En faisant varier le nombre et la position d'insertion des nouveaux éléments ...

Définir les types (récursifs) correspondants aux listes suivantes :

1. les listes qui ne sont jamais vides (contenant au moins un élément)

En faisant varier le nombre et la position d'insertion des nouveaux éléments . . .

Définir les types (récursifs) correspondants aux listes suivantes :

- 1. les listes qui ne sont jamais vides (contenant au moins un élément)
- 2. les listes de longueur impaire ? dont la longueur est multiple de 5 ?

En faisant varier le nombre et la position d'insertion des nouveaux éléments . . .

Définir les types (récursifs) correspondants aux listes suivantes :

- 1. les listes qui ne sont jamais vides (contenant au moins un élément)
- 2. les listes de longueur impaire ? dont la longueur est multiple de 5 ?
- 3. les listes palindromes sur {a,b}

En faisant varier le nombre et la position d'insertion des nouveaux éléments . . .

Définir les types (récursifs) correspondants aux listes suivantes :

- 1. les listes qui ne sont jamais vides (contenant au moins un élément)
- 2. les listes de longueur impaire ? dont la longueur est multiple de 5 ?
- 3. les listes palindromes sur {a,b}
- 4. les listes sur $\{a,b\}$ contenant autant de a que de b

En faisant varier le nombre et la position d'insertion des nouveaux éléments ...

Définir les types (récursifs) correspondants aux listes suivantes :

- 1. les listes qui ne sont jamais vides (contenant au moins un élément)
- 2. les listes de longueur impaire ? dont la longueur est multiple de 5 ?
- 3. les listes palindromes sur {a,b}
- 4. les listes sur {a,b} contenant autant de a que de b

Remarque le choix des constructeurs n'est pas anodin . . . ⇒ conséquences sur l'écriture de fonctions sur le type liste

Retour sur le pattern-matching

Bonne nouvelle, il est aussi utilisable sur les listes!

pattern-matching (opérateur match ... with ...):

- → sélectionne une valeur selon la "forme" d'une expression donnée
 - le choix de la valeur est défini par filtrage
 - les filtres représentent des ensembles de valeurs possibles

Retour sur le pattern-matching

Bonne nouvelle, il est aussi utilisable sur les listes!

pattern-matching (opérateur match ... with ...):

- → sélectionne une valeur selon la "forme" d'une expression donnée
 - le choix de la valeur est défini par filtrage
 - les filtres représentent des ensembles de valeurs possibles

Plusieurs formes de filtrage sur les listes :

ensembles de valeurs attendues	filtre
liste vide	Nil
liste non vide	Cons (_, 1),Cons (_, _),
	Cons (e, 1), Cons (e,_)
liste à un seul élément	Cons (e, Nil), Cons (_,Nil)
liste non vide dont le premier élément est 42 (dans le cas d'une liste d'entiers)	Cons (42,1)

Remarque Les filtres "équivalents" diffèrent dans la manière de nommer les (sous-)expressions filtrées ...

```
type intlist = Nil | Cons of int * intlist
```

DEMO: Fonctions simples et exemples d'implémentations

```
type intlist = Nil | Cons of int * intlist
```

DEMO: Fonctions simples et exemples d'implémentations

Example (Crée une liste "singleton" (un seul élément) - singList)

- ▶ Profil: singList: int → intlist
- Description/Sémantique: singList n est la liste singleton constituée de l'élément n
- ► Exemples: singList 5 = Cons (5,Nil)

```
type intlist = Nil | Cons of int * intlist
```

DEMO: Fonctions simples et exemples d'implémentations

Example (Crée une liste "singleton" (un seul élément) - singList)

- ▶ Profil: singList: int → intlist
- Description/Sémantique: singList n est la liste singleton constituée de l'élément n
- ► Exemples: singList 5 = Cons (5,Nil)

Example (Tête de liste - tete)

- ▶ Profil: tete: intlist → int
- Description/Sémantique: tete 1 renvoie le 1er élément de la liste 1, et un message d'erreur si la liste est vide.
- ► Exs: tete (Cons (1,Nil)) = 1, tete Nil = "erreur: liste vide"

```
type intlist = Nil | Cons of int * intlist
```

DEMO: Fonctions simples et exemples d'implémentations

Example (Crée une liste "singleton" (un seul élément) - singList)

- ▶ Profil: singList: int → intlist
- Description/Sémantique: singList n est la liste singleton constituée de l'élément n
- ► Exemples: singList 5 = Cons (5,Nil)

Example (Tête de liste - tete)

- ▶ Profil: tete: intlist → int
- Description/Sémantique: tete 1 renvoie le 1er élément de la liste 1, et un message d'erreur si la liste est vide.
- Exs: tete (Cons (1,Nil)) = 1, tete Nil = "erreur: liste vide"

Autres exemples :

- ▶ fin
- ► la_tete_vaut_0
- second

Fonctions récursives sur les listes

La plupart des calculs effectués sur les listes s'expriment sous forme récursive ... car les listes sont un type récursif ...

Fonctions récursives sur les listes

La plupart des calculs effectués sur les listes s'expriment sous forme récursive ... car les listes sont un type récursif ...

Corps d'une fonction récursive sur les listes

- → une analyse par cas qui "reflète" la structure de l'argument "liste" :
 - a) traitement de la liste vide (Nil)
 - b) traitement de la liste non-vide (Cons (elt,fin)): le résultat dépend de l'élément courant elt et du résultat d'appel(s) récursif(s) sur fin.

Fonctions récursives sur les listes

La plupart des calculs effectués sur les listes s'expriment sous forme récursive ... car les listes sont un type récursif ...

Corps d'une fonction récursive sur les listes

- ightarrow une analyse par cas qui "reflète" la structure de l'argument "liste" :
 - a) traitement de la liste vide (Nil)
 - b) traitement de la liste non-vide (Cons (elt,fin)):
 le résultat dépend de l'élément courant elt et du résultat d'appel(s) récursif(s) sur fin.

Pour définir une fonction récursive $f: list_de_t1 \rightarrow t2$,

- a) f Nil = ...une valeur dans t2...
- b) f (Cons (elt, fin)) = (g (h elt) (f fin)) avec h: $t1 \rightarrow t3$ and g: $t3 \rightarrow t2 \rightarrow t2$

Longueur d'une liste

La longueur d'une liste est le nombre de ses éléments

- ▶ Profil: longueur: intlist → int
- ► Sémantique: longueur l = |/|, le nombre d'éléments
- ► Exemples: longueur Nil=0, longueur (Cons(9,Nil))=1...
- Equations récursives :

Longueur d'une liste

La longueur d'une liste est le nombre de ses éléments

- ▶ Profil: longueur: intlist → int
- ► Sémantique: longueur l = |/|, le nombre d'éléments
- ► Exemples: longueur Nil=0, longueur (Cons(9,Nil))=1...
- Equations récursives :

longueur Nil =

Longueur d'une liste

La longueur d'une liste est le nombre de ses éléments

- ▶ Profil: longueur: intlist → int
- ► Sémantique: longueur l = |/|, le nombre d'éléments
- ► Exemples: longueur Nil=0, longueur (Cons(9,Nil))=1...
- Equations récursives :

```
longueur NiI = 0
longueur (Cons(a, I)) =
```

Longueur d'une liste

La longueur d'une liste est le nombre de ses éléments

- ▶ Profil: longueur: intlist → int
- ► Sémantique: longueur l = |/|, le nombre d'éléments
- ► Exemples: longueur Nil=0, longueur (Cons(9,Nil))=1...
- Equations récursives :

```
longueur NiI = 0
longueur (Cons(a, I)) = 1 + longueur I
```

► Terminaison ?

Définition de fonctions récursives sur les listes

Longueur d'une liste

La longueur d'une liste est le nombre de ses éléments

- ▶ Profil: longueur: intlist → int
- ► Sémantique: longueur l = |/|, le nombre d'éléments
- ► Exemples: longueur Nil=0, longueur (Cons(9,Nil))=1...
- Equations récursives :

```
longueur NiI = 0
longueur (Cons(a, I)) = 1 + longueur I
```

- ► Terminaison ?
 - Soit mesure(longeur l) = taille(l) où taille(l) est le nbre d'occurrences du constructeur Cons dans l
 - ► Nous avons : mesure(longueur Cons(_, l)) > mesure(longueur l)

Définition de fonctions récursives sur les listes

Longueur d'une liste

La longueur d'une liste est le nombre de ses éléments

- ▶ Profil: longueur: intlist → int
- ► Sémantique: longueur l = |/|, le nombre d'éléments
- ► Exemples: longueur Nil=0, longueur (Cons(9,Nil))=1...
- Equations récursives :

```
longueur NiI = 0
longueur (Cons(a, I)) = 1 + longueur I
```

- ► Terminaison ?
 - Soit mesure(longeur l) = taille(l) où taille(l) est le nbre d'occurrences du constructeur Cons dans l
 - ► Nous avons : mesure(longueur Cons(_, l)) > mesure(longueur l)
- Implémentation

```
let rec longueur (l:intlist):int= match l with | \, \text{Nil} \to 0 \\ | \, \text{Cons} \, (\_, 1) \to 1 + \text{longueur} \, 1
```

DEMO: Exemple d'exécution sur Cons(1,Cons(2,Nil))

Plusieurs alternatives:

Plusieurs alternatives:

 ne pas considérer le cas où la liste est vide dans la fonction ("accepter" le warning émis par l'interpréteur)

Plusieurs alternatives :

- ne pas considérer le cas où la liste est vide dans la fonction ("accepter" le warning émis par l'interpréteur)
- générer une exception en cas d'appel avec une liste vide (en utilisant failwith ou assert)

Plusieurs alternatives:

- ne pas considérer le cas où la liste est vide dans la fonction ("accepter" le warning émis par l'interpréteur)
- générer une exception en cas d'appel avec une liste vide (en utilisant failwith ou assert)
- 3. définir et utiliserun type spécifique : le type liste non-vide

Plusieurs alternatives :

- ne pas considérer le cas où la liste est vide dans la fonction ("accepter" le warning émis par l'interpréteur)
- générer une exception en cas d'appel avec une liste vide (en utilisant failwith ou assert)
- 3. définir et utiliserun type spécifique : le type liste non-vide

```
type intlist_non_vide=
   Elt of int
   |Cons of int * intlist_non_vide
```

4. renvoyer un booléen en plus du résultat indiquant si celui-ci est pertinent

 → l'utilisation du résultat est conditionnée par ce booléen . . .

Plusieurs alternatives :

- ne pas considérer le cas où la liste est vide dans la fonction ("accepter" le warning émis par l'interpréteur)
- générer une exception en cas d'appel avec une liste vide (en utilisant failwith ou assert)
- 3. définir et utiliserun type spécifique : le type *liste non-vide*

```
type intlist_non_vide=
   Elt of int
   |Cons of int * intlist_non_vide
```

- 4. renvoyer un booléen en plus du résultat indiquant si celui-ci est pertinent

 → l'utilisation du résultat est conditionnée par ce booléen . . .
- définir une fonction à deux paramètres : le premier element de la liste et la fin de la liste (éventuellement vide).

Exercices

Pour des listes d'entiers :

- somme : renvoie la somme des éléments d'une liste
- ▶ appartient : indique si un élément appartient à une liste
- dernier : renvoie le dernier élément d'une liste
- ▶ minimum : renvoie le minimum d'une liste d'entiers
- ▶ pairs : renvoie les entiers pairs d'une liste
- ▶ supprime : supprime une/toutes les occurrences d'un élément
- concatene : concaténation de deux listes
- ▶ est_croissante : indique si une liste est croissante

Exercices

Pour des listes d'entiers :

- somme : renvoie la somme des éléments d'une liste
- ▶ appartient : indique si un élément appartient à une liste
- dernier : renvoie le dernier élément d'une liste
- ▶ minimum : renvoie le minimum d'une liste d'entiers
- ▶ pairs : renvoie les entiers pairs d'une liste
- ▶ supprime : supprime une/toutes les occurrences d'un élément
- ► concatene : concaténation de deux listes
- est_croissante : indique si une liste est croissante

Remarque mêmes fonctions avec des listes construite par "ajout en queue"

Une liste de cartes

- ▶ Définir (à l'aide d'un type liste) une "main" contenant 5 cartes
- ► Ecrire une fonction qui calcule la valeur de cette main

Example (Liste de cartes)

type carte = Petite of int | Valet | Dame | Cavalier | Roi | As
type main = Nil | Cons of carte * main

- ▶ valeur_carte: carte → int
- ▶ valeur_main:main → int

Conclusion (provisoire) sur les listes

- un type récursif "incontournable"
- permet de définir d'autres types (ensemble, polynômes, etc.)
- ▶ différents modes de construction (ajout en tête, en queue, etc.)
 → à adapter aux traitements envisagés . . .
- il existe un type prédéfini list en Ocaml
 - construction par ajout en tête
 - fonctions prédéfinies (librairie)
- on peut s'aider de schémas génériques pour écrire des fonctions sur des listes . . .