Université Grenoble Alpes **L2 Sciences** **2020-2021**
Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 1

Révisions !

Exercice 1

1. Soient (e_1, e_2, e_3) des vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que $\text{vect}(e_1, e_2, e_3) = \text{vect}(e_1, e_2)$ si et seulement si e_3 est combinaison linéaire de e_1 et e_2.

2. Soient $(e_1, ..., e_n)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E. Soit $x \in E$. Montrer que $(e_1, ..., e_n, x)$ est liée si et seulement si x est combinaison linéaire de $e_1, ..., e_n$.

Exercice 2

Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivant sont-ils en somme directe ?

1. $E = \text{vect}((1, 1, 0))$, $F = \text{vect}((-1, 0, 1))$

2. $E = \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 0))$, $F = \text{vect}((-1, 0, 1), (0, 0, 1))$

3. $E = \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 0))$, $F = \text{vect}((-1, 0, 1))$

4. $E = \text{vect}((1, 1, 0), (0, 1, 0))$, $F = \text{vect}((-1, 1, 0)$

Exercice 3

Donner un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ des sous-espaces vectoriels E de $\mathbb{R}^3$ suivants :
a. $E = \text{vect}((1, 1, 0), (-1, 0, 1))$ **b.** $E = \text{vect}((1, -1, 0))$
c. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$.

Exercice 4

1. On considère les sous-espaces vectoriels $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ et $G = \text{vect}((1, -1, 1))$ de $\mathbb{R}^3$. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de F et donner un supplémentaire de G dans F.

2. Même question avec $F = \text{vect}((0, 1, 1), (-1, 1, 0))$ et $G = \text{vect}((1, 0, 1))$.

Exercice 5

(cours)
Soit $u : E \to F$ une application linéaire d'un espace vectoriel E dans un espace vectoriel F. Soit G un supplémentaire de $\text{Ker}\, u$ dans E.

1. Montrer que l'application linéaire u' induite par restriction de u à G au départ et à $\text{Im}\, u$ à l'arrivée est un isomorphisme.

2. En déduire le théorème du rang.

Exercice 6

Soit F un sous-espace vectoriel strict d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E en somme directe avec F.

2. Montrer que F possède un supplémentaire dans E.

Exercice 7

Soient F, G des sous-espaces vectoriels stricts d'un espace vectoriel E. Montrer qu'il existe une droite vectorielle de E en somme directe à la fois avec F et avec G.

Exercice 8

Soient F, G, H des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E.
Montrer que F, G, H sont en somme directe si et seulement si G, H sont en somme directe et F est en somme directe avec $G \oplus H$.

Exercice 9

Soient E un espace vectoriel et F_i, $1 \leq i \leq s$ des sous-espaces de E de dimensions finies n_i, $b_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,n_i})$ une base de F_i, et $F = \sum F_i$.

1. Si les F_i sont en somme directe et $F = F_1 \oplus \ldots \oplus F_s$, montrer que la famille b obtenue en "concaténant" les familles b_i est une base de F et en déduire que $\dim F = \sum n_i = \sum \dim F_i$.

2. Si les F_i ne sont pas en somme directe, montrer que b est une famille génératrice liée de F, et en déduire que $\dim F < \sum \dim F_i$.

3. Énoncer une condition nécessaire et suffisante sur $\dim F$ pour que la somme $\sum F_i$ soit directe.

Exercice 10

Soit E un espace vectoriel.

1. Montrer que si E est de dimension finie et si des sous-espaces vectoriels F, G vérifient $F \cap G = \{0\}$, alors $\dim F + \dim G \leq \dim E$.

2. Que peut-on dire si des sous-espaces vectoriels F_1, F_2, G_1, G_2 vérifient $E = F_1 \oplus F_2$, $F_1 \subset G_1$, $F_2 \subset G_2$ et $G_1 \cap G_2 = \{0\}$?

3. Que peut-on dire si des sous-espaces vectoriels $F_1, \ldots, F_k, G_1, \ldots, G_k$ vérifient $E = F_1 \oplus \ldots \oplus F_k$ et $E = G_1 \oplus \ldots \oplus G_k$, avec $F_1 \subset G_1$,..., $F_k \subset G_k$?

Exercice 11

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ l'espace des matrices carrées de taille 3 à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ se décompose en la somme d'une matrice symétrique et d'une matrice antisymétrique.

2. En déduire une décomposition de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ est somme directe de deux sous-espaces vectoriels.

Exercice 12

On note $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$ l'ensemble des applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Donner des lois + et . qui font de $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Montrer que $F = \{f \in \mathcal{A}([0,1],\mathbb{R}) \mid f(1) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$.

3. Donner un supplémentaire de F dans $\mathcal{A}([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 13

On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par la formule suivante

$$f : (x,y,z) \mapsto (2x + y,\ x + z + y,\ 3x + y - z)$$

1. Determiner si f est injective, surjective, bijective.

2. Même question pour $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ donnée par

$$g : (x,y,z) \mapsto (x + y + z,\ x + 2y + 3z).$$

3. Même question pour $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ donnée par

$$h : (x,y,z) \mapsto (x + y + z,\ x + 2y + 3z, x + z).$$

4. Même question pour $j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ donnée par

$$j : (x,y,z) \mapsto (x + y,\ x + y + z,\ x - y + z,\ x - y - z).$$

Feuille de TD 2

Applications linéaires.

Exercice 1

1. Donner un endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pour lequel $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ ne sont pas en somme directe.

2. Donner un endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pour lequel $\mathbb{R}^2 = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$.

Exercice 2

1. Convention : dans le plan $\mathbb{R}^2$, que l'on identifie à $\mathbb{C}$, une rotation d'angle θ autour du point $(0, 0)$ est l'application donnée par la multiplication par le nombre complexe $e^{i\theta}$. Justifier qu'une rotation autour du point $(0, 0)$ est une application linéaire du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

2. Donner la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de l'application linéaire définie par la rotation d'angle $\pi/6$ autour du point $(0, 0)$. Puis donner la matrice, toujours dans la base canonique de la rotation d'angle θ.

3. Quelle est la composition de la rotation d'angle θ_1 et de la rotation d'angle θ_2 autour de $(0, 0)$? Ecrire sa matrice (dans la base canonique) de deux manières différentes.

4. On se donne la base de $\mathbb{R}^2$ suivante : $\mathcal{B} = ((1, 0), (1, 1))$. En calculant les images des vecteurs de cette base, donner la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de la rotation d'angle $\pi/4$ autour du point $(0, 0)$. – On suggère de verifier que la formule de changement de base correspond au sens géométrique de cette situation.

Exercice 3

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_{\text{can}}} f = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que $\mathcal{B} = ((1, -1, 0), (1, 0, 1), (-1, 1, 1))$ forme un base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

3. En déduire que f est une projection, dont on déterminera le noyau et l'image.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel.

1. Montrer qu'un endomorphisme p de E est un projecteur si et seulement si $\operatorname{Id} - p$ est un projecteur.

On suppose désormais que p est un projecteur de E.

2. Montrer que $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} - p) = \operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Im}(\operatorname{Id} - p) = \operatorname{Ker} p$.

3. Montrer qu'un endomorphisme u de E commute avec p si et seulement si $u(\operatorname{Ker} p) \subset \operatorname{Ker} p$ et $u(\operatorname{Im} p) \subset \operatorname{Im} p$.

Exercice 5

On considère l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (3x + 2y - 2z,\ z,\ 4x + 3y - 2z)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Les sous-espaces vectoriels suivants sont-ils stables par f ?
a. $A = \operatorname{vect}((1, -1, 0))$ **b.** $B = \operatorname{vect}((1, -1, 1))$ **c.** $C = \operatorname{vect}((0, 1, 1))$
d. $D = \operatorname{vect}((0, 1, 1), (1, 0, 1))$ **e.** $E = \operatorname{vect}((1, 0, 1))$

3. Montrer que $\mathbb{R}^3 = B \oplus D$ et que $\mathcal{B} = ((1, -1, 1), (0, 1, 1), (1, 0, 1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Montrer qu'aucun supplémentaire de C dans D n'est stable par f et déterminer la matrice de $f_{|D}$ dans la base $\mathcal{B}_{|D} = ((0, 1, 1), (1, 0, 1))$ de D.

5. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 6

On considère l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (x + y - z,\ -2x - y + 2z,\ y)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Montrer que les sous-espaces vectoriels suivants sont stables par f :
a. $A = \operatorname{vect}((1, 0, 1))$ **b.** $B = \operatorname{vect}((0, 1, 1), (1, 1, 3))$

3. Montrer que B se décompose comme somme directe de deux sous-espaces stables par f.

4.a. Montrer que $\mathbb{R}^3$ est somme directe de trois droites stables par f.
b. Déterminer la matrice de f dans une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition en somme directe (c'est-à-dire une base de $\mathbb{R}^3$ dont les vecteurs sont exactement ceux des bases de chacune des droites).

Exercice 7

Soit $f : E \to E$ un endomorphisme. On note $f^0 = \operatorname{Id}$ et par récurrence pour tout entier p, on note $f^{p+1} = f^p \circ f$.

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Ker} f^2 \subset ... \subset \operatorname{Ker} f^p \subset ...$ et que chacun de ces sous-espaces vectoriels de E est stable par f.

2. Montrer que $\operatorname{Ker}(\operatorname{Id} + f)$, $\operatorname{Ker}(2 \operatorname{Id} - f + f^2)$ sont stables par f.

3. Montrer que pour tout entier p on a $\operatorname{Im} f^{p+1} \subset \operatorname{Im} f^p$ et que ces sous-espaces sont stables par f.

Exercice 8

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ vérifiant $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{Id} = 0$. Montrer que $\mathbb{R}^n = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id})$ et que ces deux noyaux sont stables par f.

Université Grenoble Alpes **2020-2021**

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 3

Valeurs propres, vecteurs propres.

Exercice 1

On considère l'application linéaire suivante :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (y + z,\ x - z,\ -x + y + 2z)$$

1. Donner la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2a. Par un calcul matriciel, montrer que f est une projection de $\mathbb{R}^3$ sur un sous-espace vectoriel F parallèlement à un sous-espace vectoriel G.
b. Déterminer des bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$ de F et G.

3. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ de $\mathbb{R}^3$.

4. Quelles sont les valeurs propres de f ? Quels sont les espaces propres associés ?

Exercice 2

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs 2 et 3 sont des valeurs propres de f.

2. Donner une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

3. Y a-t-il d'autres valeurs propres de f ?

Exercice 3

Soit E l'espace des fonctions de classe C^∞, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit $u : E \to E$ l'application (linéaire) qui à $f \in E$ associe f' sa dérivée.

1. Déterminer les valeurs propres de u, et leurs vecteurs propres.

2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$. Montrer que la famille $(f_\lambda)_{\lambda \in \mathbb{R}}$ est une famille libre.

Exercice 4

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique B_c est :

$$\mathrm{Mat}_{B_c}\, f = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver un vecteur propre v_λ pour la valeur propre $\lambda = 1$, et un autre v_μ pour la valeur propre $\mu = 2$.

2. Verifier que (v_λ, v_μ) est une base de $\mathbb{R}^2$. Aurait-on pu invoquer un résultat du cours pour cela ?

3. Justifier que f ne possède pas d'autre valeur propre.

4. Donner la matrice de f dans la base $B_d = (v_\lambda, v_\mu)$.

5. Donner une matrice P inversible telle que $P^{-1} \operatorname{Mat}_{B_c} f P = \operatorname{Mat}_{B_d} f$.

6. En déduire $(\operatorname{Mat}_{B_c} f)^6$.

Exercice 5

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique B_c est :

$$\operatorname{Mat}_{B_c} f = A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les valeurs propres de f.

2. Donner une base B_1 de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres pour f.

3. Quelle est la matrice D de f dans la base B_1 ?

4. Donner la matrice de passage P de la base B_c à la base B_1.

5. Quelle relation lie A, D, et P ? (citer le cours, et verifier que la relation a bien lieu)

6. Calculer A^{536} et A^{89}.

Exercice 6

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique B_c est :

$$\operatorname{Mat}_{B_c} f = A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de f.

2. Soit P le plan d'équation $x - 4y + z = 0$. Donner une base B_P de P.

3. Verifier que les vecteurs de B_P sont vecteurs propres de f pour la même valeur propre.

4. Donner une base de diagonalisation de f. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 7

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique B_c est :

$$\operatorname{Mat}_{B_c} f = A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Verifier que 3 est une valeur propre de f.

2. Montrer que f possède exactement deux valeurs propres.

3. L'application f est elle diagonalisable ?

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 4

Permutations.

Exercice 1

Décomposer les permutations suivantes de $\mathcal{S}_7$ en produit de cycles disjoints (c'est-à-dire de supports disjoints) et donner leurs signatures :

1. $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 6 & 7 & 5 \end{bmatrix}$.

2. $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 1 & 6 & 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

Exercice 2

On considère la permutation σ de $\mathcal{S}_5$ suivante :

$$\sigma = (2\ 3)(1\ 2)(2\ 5)(1\ 3)(2\ 4)(1\ 4)(3\ 5).$$

Déterminer la décomposition en produit de cycles disjoints et la signature de σ.

Exercice 3

On considère $Z_n \subset \mathcal{S}_n$ défini par $Z_n = \{s \in \mathcal{S}_n, \forall \sigma \in \mathcal{S}_n, s \circ \sigma = \sigma \circ s\}$.

1. Déterminer Z_1 et Z_2

2. Montrer que si $n \geq 3$, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ il existe $\sigma_i \in \mathcal{S}_n$ dont le support est exactement $\{1, \ldots, n\} \setminus \{i\}$.

3. En déduire que si $n \geq 3$, $Z_n = \{Id\}$.

Exercice 4

1. Montrer qu'un cycle de longueur 3 est égal à un produit de deux transpositions.

2. Montrer qu'un cycle de longueur n est égal à un produit de $n-1$ transpositions. En déduire que toute permutation s'écrit comme le produit d'une famille de transpositions.

3. Dans $\mathcal{S}_4$, on considère les cycles $c_1 = (1, 3, 4)$ et $c_2 = (1, 3, 2)$. Calculer $c_2 \circ c_1$ et donner sa décomposition en cycles.

4. En s'inspirant du calcul précédent, montrer que tout produit de deux transpositions de $\mathcal{S}_n$ est un produit de cycles de longueur 3.

5. Montrer que le groupe alterné $\mathcal{A}_n$, formé des éléments de signature 1, est engendré par les cycles de longueur 3.

Déterminants.

Exercice 5

Soit $A = (C_1\ C_2\ C_3)$ une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$, dont les C_i sont les colonnes.

1. Exprimer en fonction de $\det A$ les déterminants des matrices suivantes :
a. $(C_1\ \ 2C_2 - C_3\ \ C_3)$. **b.** $(C_2\ \ -C_3\ \ C_1)$. **c.** $(C_1 - C_2\ \ C_2 - C_3\ \ C_1)$.
d. $(C_2 - C_1\ \ C_3 - C_2\ \ C_3)$. **e.** $(C_1 - C_2\ \ C_2 - C_3\ \ C_3 - C_1)$.

Exercice 6

Calculer les déterminants des matrices suivantes :

f. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$ **g.** $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

h. $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ **i.** $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **j.** $E = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 7

Soient $a, b, c, d, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants et donner une condition nécessaire et suffisante à leur annulation :

a. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_2 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$ **c.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & a & a \\ 1 & a & 0 & b \\ 1 & a & b & 0 \end{vmatrix}$

d. $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix}$ **e.** $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & c & b & bc \\ 1 & a & d & ad \\ 1 & c & d & cd \end{vmatrix}$ **f.** $\begin{vmatrix} -a & b & c & d \\ b & -a & d & c \\ c & d & -a & b \\ d & c & b & -a \end{vmatrix}$.

Exercice 8

Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} a+b & a & \dots & a \\ a & a+b & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$ avec $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 9

(déterminant de Van der Monde)

1. Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$. Calculer les déterminants suivants et donner une condition nécessaire et suffisante à leur annulation :

a. $\begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{vmatrix}$ **b.** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

2. Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$. Montrer que :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i).$$

Indication : remplacer la colonne C_i par $C_i - a_n C_{i-1}$ pour $i = n, \ldots, 2$.

Exercice 10

Combien y a-t-il de mineurs 3×3 dans une matrice de taille 4×3 ? 4×4 ? 7×5 ?

Exercice 11

Soient $a, b \in \mathbb{K}$. Déterminer le rang de la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \\ 1 & b & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 12

Déterminer en fonction du paramètre $m \in \mathbb{C}$ le rang de la matrice suivante :

$$M = \begin{pmatrix} m+1 & 1 & m+1 \\ 1 & m+1 & m+1 \\ m & 2m & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 13

Soient $x \in \mathbb{K}$ et $n \geq 2$ un entier. On considère la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$A(n) = \begin{pmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^{n-1} \\ x & 1 & x & \ldots & x^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ x^{n-2} & x^{n-3} & \ddots & 1 & x \\ x^{n-1} & x^{n-2} & \ldots & x & 1 \end{pmatrix}.$$

On note $\Delta(n) = \det A(n)$ et $\Delta_{i,j}(n)$ le mineur $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en rayant la ligne i et la colonne j $(1 \leq i, j \leq n)$.

1. Calculer les mineurs $\Delta_{1,1}(n)$ et $\Delta_{2,1}(n)$ en fonction de $\Delta(n-1)$.

2. Montrer que pour $i \geq 3$, le mineur $\Delta_{i,1}(n)$ est nul.

3. Calculer $\Delta(n)$.

4. Déterminer le rang de $A(n)$ en fonction de x.

Exercice 14

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère la matrice $M_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ suivante :

$$M_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & x & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & x \end{vmatrix}.$$

On note $\Delta_n = \det M_n$.

1. Calculer Δ_3.

2. Donner une relation de récurrence entre Δ_n et Δ_{n-1}. En déduire Δ_n.

3. Déterminer le rang de M_n.

Exercice 15

On considère une matrice $(n+p) \times (n+p)$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, de la forme

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec A de taille $n \times n$, B de taille $n \times p$, C de taille $p \times n$, D de taille $p \times p$.

1. Si σ est une permutation de $\{1, \dots, n+p\}$ telle que $\sigma(i) \leq n$ pour $i \leq n$, montrer que σ se décompose en une permutation σ' de $\{1, \dots, n\}$ et une permutation σ'' de $\{n+1, \dots, n+p\}$.

2. En déduire que, si $C = 0$ (autrement dit, si les coefficients m_{ij} de M vérifient $m_{ij} = 0$ pour $n+1 \leq i \leq n+p$ et $1 \leq j \leq n$) alors

$$\det(M) = \det(A)\det(D).$$

(On dit dans ce cas que M est “triangulaire supérieure par blocs”, on peut démontrer le résultat analogue lors que M est triangulaire inférieure par blocs, c'est à dire quand $B = 0$).

3. En général, si A est inversible, montrer que

$$\det(M) = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

(Multiplier M à gauche par une matrice triangulaire inférieure adéquate de blocs diagonaux égaux aux matrices unités, de façon que le produit soit une matrice triangulaire supérieure par blocs).

4. Montrer par récurrence sur s que le déterminant d'une matrice triangulaire (par exemple supérieure) par blocs

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_{12} & B_{13} & \dots & B_{1s} \\ 0 & A_2 & B_{23} & \dots & B_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & A_{s-1} & B_{s-1s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & A_s \end{pmatrix},$$

où A_i est carrée $n_i \times n_i$ et B_{ij} rectangulaire $n_i \times n_j$, est donné par

$$\det(M) = \det(A_1) \dots \det(A_s).$$

Feuille de TD 5

Arithmétique sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 1

1. Calculer le pgcd d de 246 et 1014.

2. Quels sont tous les couples d'entiers (x, y) vérifiant $1014x + 246y = d$?

Exercice 2

1. Soit a un entier. Montrer que le reste de la division euclidienne de a^2 par 7 est un élément de $\{0, 1, 2, 4\}$.

2. Soient a et b deux éléments de $\mathbb{Z}$ tels que 7 divise $a^2 + b^2$. Montrer que 7 divise à la fois a et b.

Exercice 3

1. Déterminer ce que vaut $(2^{2020} + 562)$ modulo 4.

2. Déterminer les résidus possibles modulo 10 des puissances de 2.

3. Determiner les résidus possibles des puissances de 5 modulo 1000. En déduire, pour tout $k \geq 2$, les deux derniers chiffres (de l'écriture décimale en base 10) du nombre décimal 2^{-k}.

Exercice 4

Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 5, montrer que $p^2 - 1$ est divisible par 24.

Exercice 5

Pour tout entier strictement positif n, notons u_n le dernier chiffre dans l'écriture décimale de n^n. Montrer que la suite (u_n) est périodique de période 20.

Exercice 6

Soit p un nombre premier impair. Justifier qu'il existe un entier a tel que

$$\sum_{1}^{p-1} \frac{1}{k} = \frac{a}{(p-1)!}.$$

Montrer que p divise a.

Exercice 7

Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.

Exercice 8

On veut montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4. On procède par l'absurde. Sinon l'ensemble des entiers premiers congrus à 1 mod 4 est fini. Ecrivons $\{p_1, \ldots, p_n\}$ cet ensemble. On considère l'entier $N = 1 + 4(p_1 \cdots p_n)^2$.

1. Montrer que tout diviseur premier p de N est congru à 3 modulo 4.

2. Soit $a = 2p_1 \cdots p_n$. Montrer que a^2 est congru à -1 modulo p.

3. En déduire que $(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ est congru à 1 modulo p.

4. Montrer que $\frac{p-1}{2}$ est pair et en déduire une contradiction.

Exercice 9

Soit n et m premiers entre eux. Existe-il un élément $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $\underbrace{x + x \ldots + x}_{m \text{ termes}} = 0$ et $x \neq 0$?
Soit m divisant n, cette fois. Même question.

Exercice 10

Soit $(A, +, \times)$ un anneau principal. Utiliser l'existence et l'unicité de la factorisation des éléments de A en produit d' irréductibles pour démontrer les résultats suivants.

1. Si x^m divise y^m (avec $x, y \in A \setminus \{0\}$ et $m \in \mathbb{N}^*$), alors x divise y.

2. Si $x, y \in A \setminus \{0\}$ sont premiers entre eux et s'il existe $z \in A \setminus \{0\}$ tel que $xy = z^m$, alors on peut écrire $x = u'z'^m$ et $y = u''z''^m$ avec $z = z'z''$ et $u'u'' = 1$.

3. Si $a \in \mathbb{N}^*$, prouver que $\sqrt[m]{a}$ est un rationnel si et seulement si $a = b^m$ avec $b \in \mathbb{N}^*$, de sorte qu'on a alors $\sqrt[m]{a} = b \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 11

(Triplets pythagoriciens) On se propose de déterminer tous les triangles rectangles dont les longueurs des côtés sont des multiples entiers de l'unité, c'est-à-dire tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que $a^2 + b^2 = c^2$.

1. Soit $d = \text{pgcd}(a, b)$. Montrer que $d \mid c$, et se ramener ainsi au cas d'un triplet (α, β, γ) avec $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$ avec $\text{pgcd}(\alpha, \beta) = 1$. Montrer que l'on a alors aussi $\text{pgcd}(\alpha, \gamma) = 1$ et $\text{pgcd}(\beta, \gamma) = 1$.

2. Montrer que α et β ne peuvent pas être tous deux impairs en étudiant la divibilité de γ^2 par 2 et 4, et en déduire que γ est impair.

3. Quitte à permuter éventuellement α et β, on suppose α impair et β pair et on écrit $\beta^2 = (\gamma + \alpha)(\gamma - \alpha)$. Montrer que $(\gamma + \alpha)/2$ et $(\gamma - \alpha)/2$ sont premiers entre eux.

4. En déduire qu'il existe $r, s \in \mathbb{N}^*$ tels que $(\gamma + \alpha)/2 = r^2$ et $(\gamma - \alpha)/2 = s^2$.

5. Montrer qu'à permutation près de (a, b), les triplets Pythagoriciens sont les entiers de la forme

$$a = d(r^2 - s^2), \qquad b = 2drs, \qquad c = d(r^2 + s^2)$$

avec $d, r, s \in \mathbb{N}^*$, r, s premiers entre eux, et $r > s$.

6. Montrer que dans l'anneau $\mathbb{C}[X]$, les triplets pythagoriciens, c'est-à-dire les polynômes non nuls tels que $A^2 + B^2 = C^2$ sont encore exactement de la forme précédente (avec $D, R, S \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$).

Exercice 12

Déterminer tous les éléments $x \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x \equiv 3 \mod \langle 7 \rangle, \qquad x \equiv -2 \mod \langle 11 \rangle.$$

Exercice 13

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$P \equiv 1 \mod \langle X^2 + 1 \rangle, \qquad P \equiv X \mod \langle X^2 + X + 1 \rangle.$$

Exercice 14

1. Faire la division euclidienne de $X^4 + 2X^3 + 2X + 1$ par $X^2 - 1$, puis par $X^2 + 1$, dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Déterminer le reste de la division euclidienne de $X^{2020} + 1$ par $X^2 - 1$ puis par $X^2 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15

1. Utiliser l'algorithme d'Euclide pour déterminer le pgcd $D(X)$ (choisi unitaire) des polynômes $A(X)$, $B(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que

$$A(X) = X^4 + X^3 - X^2 - 2X - 2, \qquad B(X) = X^5 + X^4 + X^3 - 3X^2 - 3X - 3.$$

2. Calculer $A(X)/D(X)$ et $B(X)/D(X)$ et expliciter le ppcm de $A(X)$ et $B(X)$.

3. Déterminer des polynômes $U(X)$, $V(X) \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $D(X) = U(X)A(X) + V(X)B(X)$.

4. Déterminer les racines de $A(X)$ et $B(X)$ dans chacun des trois corps $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ et leurs décompositions en polynômes irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$, resp. $\mathbb{R}(X)$, resp. $\mathbb{C}[X]$.

Exercice 16

Soit $P(X) = X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que i est racine du polynôme $P(X)$ dans $\mathbb{C}$. En déduire une autre racine complexe de P.

2. Donner la décomposition de $P(X)$ en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 17

Pour quelles valeurs de $a, b \in \mathbb{R}$ le polynôme $P(X) = X^5 - 2X^3 + X^2 + aX + b$ est-il divisible par le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$ dans $\mathbb{R}[X]$? Dans un tel cas, déterminer le quotient de P par Q.

Exercice 18

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $P(X) = X^4 + aX^3 + (b-1)X^2 - aX - b$.

1. Montrer que 1 et -1 sont racines du polynôme P. En déduire que $X^2 - 1$ divise $P(X)$.

2. Calculer $P'(1)$ et $P'(-1)$ (où P' désigne le polynôme dérivé de P).

3. Pour quelles valeurs de a et b le polynôme $X^4 + aX^3 + (b-1)X^2 - aX - b$ est-il le carré d'un polynôme de $\mathbb{C}[X]$?

Exercice 19

Montrer que si p et q sont des entiers premiers entre eux, alors $(X-1)(X^{pq}-1)$ est divisible par $(X^p - 1)(X^q - 1)$.

Unité d'Enseignement MAT 301

Feuille de TD 6

Réduction des endomorphismes.

Exercice 1

1. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}} f = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Déterminer les valeurs propres de f.
b. Donner une base de chaque espace propre de f.
c. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
d. Si oui, donner une base de vecteurs propres, et la matrice de f dans cette base. (On pourra, en plus, pour s'exercer, donner la matrice de changement de base de la base canonique vers cette base et son inverse.)

2. Même question que la question précédente pour :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}} f = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

3. Même question que les questions précédentes pour l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ de matrice :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_{can}} f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ est :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de f.

2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

3. Montrer qu'on peut trouver deux vecteurs propres f_1, f_2 de f tels que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, e_1)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 3

On note $E = \mathbb{K}_2[X]$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes de degré au plus 2. On considère l'application linéaire suivante :

$$F : \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X], \qquad P(X) \mapsto P'(X) + P(0)X$$

où P' désigne le polynôme dérivée de P.

1. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E.

2. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de f.

3. Montrer que f est diagonalisable et trouver une base de vecteurs propres de f.

Exercice 4

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}[X]$ de dimension infinie, on note $F = \mathbb{K}_3[X]$ le sous-espace vectoriel formé des polynômes de degré au plus 3 et G l'ensemble des polynômes divisibles par X^4.

1. Montrer que G est un sous-espace vectoriel de E et que $E = F \oplus G$.

On considère l'application suivante :

$$f : E \to E, \qquad P(X) \mapsto P(X^2).$$

2. Montrer que f est linéaire et que les seuls vecteurs propres de f sont les polynômes de degré 0.

3. Quels sont les sous-espaces vectoriels de E de dimension finie stables par f ?

Exercice 5

Soit A une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont deux à deux distincts.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 6

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On suppose que A ne possède qu'une seule valeur propre.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si A est diagonale.

2. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose que f n'a qu'une valeur propre λ. Montrer que f est diagonalisable si et seulement si f est l'homothétie de rapport λ.

3. Soit f un endomorphisme nilpotent (c'est-à-dire pour lequel il existe $n > 0$ tel que $f^n = 0$) d'un espace vectoriel E de dimension finie.
Montrer que f est diagonalisable si et seulement si $f = 0$.
Indication : utiliser la question précédente.

Exercice 7

Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps $\mathbb{K}$, tel que le polynôme minimal de f soit $(X-\lambda)^n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

1. Montrer que $g = f - \lambda \operatorname{Id}_E$ possède un vecteur cyclique v, c'est-à-dire un vecteur v de E tel que $\mathcal{B} = (v, g(v), \ldots, g^{n-1}(v))$ soit une base de E.

2. Déterminer les matrices de g et f dans la base $\mathcal{B}$.

3. Montrer que $\mathcal{B}' = (v, f(v), \ldots, f^{n-1}(v))$ est aussi une base de E et déterminer la matrice de f dans $\mathcal{B}'$.

Exercice 8

1. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme dont le polynôme caractéristique est $(X+1)^2(X-2)^3$. Quel peut être le polynôme minimal de f ?

2. Déterminer les polynômes caractéristiques et minimaux des matrices suivantes :

$$\textbf{a. } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{b. } B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{c. } C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{d. } D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{e. } E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{f. } F = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Déterminer les polynômes minimaux des matrices suivantes :

$$\textbf{a. } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \textbf{b. } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{c. } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ -5 & 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\textbf{d. } D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \textbf{e. } E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 10

Soit $d \geq 2$ un entier. On note $E = \mathbb{K}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ de degré au plus d. Soit $Q \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On considère l'application $\Phi_Q : E \to E$ qui à un polynôme de E associe le reste de sa division euclidienne par Q.

1. Montrer que Φ_Q est bien définie et linéaire.

2. On considère dans cette question le cas $d = 2$ et $Q(X) = X^2 - 1$.

a. Montrer que Φ_Q est diagonalisable.
b. Quelle est la nature géométrique de Φ_Q ? Quel est son polynôme minimal ?

3. Mêmes questions pour d et Q quelconques.

4. Mêmes questions pour l'application $\Phi_a : E \to E$ qui à un polynôme $P \in E$ associe le polynôme constant $P(a)$, pour $a \in \mathbb{K}$ fixé.

Exercice 11

Montrer sans le théorème de Cayley-Hamilton que l'ensemble des polynômes annulateurs d'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à 0.

Exercice 12

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n de deux façon différentes :

1. En diagonalisant A sous la forme $A = P^{-1}DP$ avec D diagonale.

2. En faisant la division euclidienne de X^n par le polynôme minimal de A.

Exercice 13

1. Déterminer le p.g.c.d. unitaire de $X^3 - 1$ et $X^2 - 2X + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

2. Montrer que le seul endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel annulé par $X^3 - 1$ et par $X^2 - 2X + 1$ est l'endomorphisme identité.

Exercice 14

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que 0 est racine simple de P. On notera $P(X) = XQ(X)$.

1. Montrer que X et $Q(X)$ sont premiers entre eux et déterminer $U(X), V(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $U(X)X + V(X)Q(X) = 1$. En déduire que X est p.g.c.d. de X^2 et $P(X)$ et déterminer des polynômes $S(X), T(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que $S(X)X^2 + T(X)P(X) = X$.

2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que P soit un polynôme annulateur de A. Montrer que $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$.