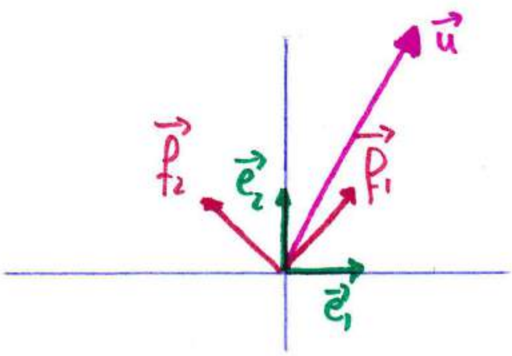
6) Changement de base

Comme nous avons vu la semaine dernière les coordonnées d'un vecteur dépendent de la base dans laquelle on l'écrit. Nous allons maintenant voir comment.

Commençons par un exemple: Plaçons nous dans $\mathbb{R}^2$, et considérons les deux bases $\underbrace{(\vec{e_1}, \vec{e_2})}_{e} = ((1,0), (0,1))$ et $\underbrace{(\vec{f_1}, \vec{f_2})}_{f} = ((1,1), (-1,1))$.

Donnons nous un vecteur $\vec{u} = (2,3)$. Voici un dessin de la situation :



On veut comprendre comment obtenir les coordonnées de $\vec{u}$ dans les deux bases, et passer de l'une à l'autre.

Première remarque: $\vec{u} = 2\vec{e_1} + 3\vec{e_2}$ (*) Ça, c'est facile.

Pour obtenir les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base f, il suffirait que nous soyons capable d'écrire $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ comme des combinaisons linéaires de $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$. En effet, si on savait faire ça, on reporterait dans (*), et on exprimerait $\vec{u}$ en fonction de $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$.

Mais nous ce que l'on sait faire facilement, c'est l'autre sens : exprimer $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$ en fonction de $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$:

$$\left.\begin{cases} \vec{f_1} = \vec{e_1} + \vec{e_2} & (1) \\ \vec{f_2} = -\vec{e_1} + \vec{e_2} & (2) \end{cases}\right) \mathrm{I}$$

On va donc " inverser" ces relations et exprimer $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ en fonction de $\vec{f_1}$ et $\vec{f_2}$:

$$\left.\begin{array}{ll} (1)+(2) \text{ donne} & \vec{e_2} = \frac{1}{2}\vec{f_1} + \frac{1}{2}\vec{f_2} \\ (1)-(2) \text{ donne} & \vec{e_1} = \frac{1}{2}\vec{f_1} - \frac{1}{2}\vec{f_2} \end{array}\right) \mathrm{II}$$

On peut alors reporter dans (*) : $\vec{u} = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{f_1} - \frac{1}{2}\vec{f_2}\right) + 3\left(\frac{1}{2}\vec{f_1} + \frac{1}{2}\vec{f_2}\right)$

$$= \frac{5}{2}\vec{f_1} + \frac{1}{2}\vec{f_2}.$$

Écrivons matriciellement ce que l'on vient de faire. !

Posons P la matrice de la famille $(\vec{f_1}, \vec{f_2})$ dans la base $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

P vérifie : $P\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ et $P\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Autrement dit " $P\vec{e_1} = \vec{f_1}$ " et " $P\vec{e_2} = \vec{f_2}$ " (c'est I)

Il suffit donc d'inverser P pour obtenir " $\vec{e_1} = P^{-1}\vec{f_1}$ " et " $\vec{e_2} = P^{-1}\vec{f_2}$ ".

<u>Calculez</u> : $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & +1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$ (exo pour vous)

Comparez à II ci-dessus.

Pour finir cet exemple :

$$P^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Autrement dit $2\vec{e_1} + 3\vec{e_2} = \frac{5}{2}\vec{f_1} + \frac{1}{2}\vec{f_2}$ on retrouve ce qu'on avait obtenu.

<u>Remarque</u> : J'ai écrit plus haut " $P\vec{e_i} = \vec{f_i}$ ". Ce n'est pas très bien car $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont des vecteurs et P une matrice. Il faut faire un tout petit peu attention, et je vais vous donner maintenant les énoncés " propres ".

<u>Définition</u> : Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension n, et soient deux bases $e = (\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n})$ et $f = (\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n})$. La matrice de passage de e à f est la matrice $\mathrm{mat}_e(\vec{f_1}, \dots, \vec{f_n})$. (Sa j-ème colonne est formées des coordonnées de $\vec{f_j}$ dans la base e). On la note P_e^f.
(<u>Matrice de passage de la base e à la base f</u>)

<u>Proposition</u> : Mêmes notations que dans la définition ci-dessus.

Soit $\vec{u}$ un vecteur de E. Notons X_e le vecteur colonne des coordonnées de $\vec{u}$ dans la base e, et X_f le vecteur des coord. de $\vec{u}$ dans f.

[Proposition 4.33 du poly]

Alors
$$\underbrace{X_f}_{\text{" nouvelle base "}} = (P_e^f)^{-1} \underbrace{X_e}_{\text{" ancienne base "}}$$

- Pour la preuve allez voir dans le poly.
- Allez dans le poly et refaites les calculs de l'exemple 4.34.

Remarque : ① La matrice P_e^f peut s'exprimer simplement en termes d'endomorphismes : considérons l'identité : $id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$.

(C'est donc l'endomorphisme le plus simple après l'endo nul ...).

Ecrivons la matrice de id_E dans les bases f et e : $mat_{f,e}(id_E)$

Plus précisément : $id_E : (E, f) \longrightarrow (E, e)$

E avec la base f — le même E, mais avec la base e.

L'image de $\vec{f_j}$ est $\vec{f_j}$ bien sûr, mais on l'exprime dans la base e.

La j-ème colonne de $mat_{f,e}(id_E)$ est donc formée des coordonnées de $\vec{f_j}$ dans la base e. C'est donc exactement P_e^f.

$$\boxed{P_e^f = mat_{f,e}(id_E)}$$

Cette remarque ↑ est très importante, car c'est elle qui va nous permettre de faire dans changements de base pour des endomorphismes & matrices. Et c'est ça qui est important.

② L'application $id_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x \end{array}$ est bijective, et sa bijection réciproque est ... elle même ($id \circ id = id$!). On a vu que "la matrice de l'application réciproque est la matrice inverse".

Par conséquent : $\left(mat_{f,e}(id_E)\right)^{-1} = mat_{e,f}(id_E)$. C'est à dire $\boxed{\left(P_e^f\right)^{-1} = P_f^e}$

Voici donc la question que l'on se pose.

Supposons donnée une application linéaire $\varphi : E \longrightarrow F$, où E et F sont deux espaces vectoriels de dimension finie.

Supposons que l'on ait . deux bases de E : e et e'
. deux base de F : f et f'.

$\boxed{\text{Comment passer de } \mathrm{mat}_{e,f}(\varphi) \text{ à } \mathrm{mat}_{e',f'}(\varphi) \text{ ?}}$

On résume la situation par le diagramme suivant.

$$\begin{tikzcd}
\text{E muni de la base e} & (E,e) \arrow[l] \arrow[r, "\varphi"] & (F,f) \arrow[d, "id_F"] \arrow[r] & \text{F muni de la base f} \\
\text{E muni de la base e'} & (E,e') \arrow[l] \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, "\varphi"] & (F,f') \arrow[r] & \text{F muni de la base f'}
\end{tikzcd}$$

<u>Autrement dit</u> : on suppose connue la matrice $\mathrm{mat}_{e,f}(\varphi)$ qui représente φ dans les base e et f, comment exprimer la matrice $\mathrm{mat}_{e',f'}(\varphi)$, qui représente φ dans les bases e' et f' ?

Nous avons maintenant tout ce qu'il faut pour résoudre notre problème.

Relisons le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
(E,e) \arrow[r, "\varphi"] & (F,f) \arrow[d, "id_F"] \\
(E,e') \arrow[u, "id_E"] \arrow[r, "1", "\varphi"'] & (F,f')
\end{tikzcd}$$

$\vec{u}$ $\quad$ 2 $\quad$ $\varphi(\vec{u})$

Pour comprendre $\varphi : (E,e') \longrightarrow (F,f')$ on a <u>deux chemins</u>, marqués ci-dessus : **1** et **2**.

- Quand on fait **1** on obtient $mat_{e',f'}(\varphi)$
- Quand on fait **2**, on applique à un vecteur $\vec{u}$ de (E,e') id_E, puis φ, puis id_F, c'est à dire qu'on écrit

$$\varphi = id_F \circ \varphi \circ id_E \qquad \text{(attention à l'ordre).}$$

> C'est le moment le plus dur du semestre.
> Pour moi aussi
> :)

Du point de vue des matrices on écrit donc

$$mat_{f,f'}(id_F) \cdot mat_{e,f}(\varphi) \cdot mat_{e',e}(id_E)$$

<u>C'est à dire</u> : $P^{f}_{f'} \times mat_{e,f}(\varphi) \times P^{e'}_{e} = \left(P^{f'}_{f}\right)^{-1} \times mat_{e,f}(\varphi) \times P^{e'}_{e}$

Or, les deux chemins donnent la même application linéaire, donc

$$\boxed{mat_{e',f'}(\varphi) = \left(P^{f'}_{f}\right)^{-1} mat_{e,f}(\varphi)\ P^{e'}_{e}}$$

Je résume :

Proposition : Soit $\varphi : E \longrightarrow F$ une application linéaire (E et F sont de dimensions finies). Soient e et e' deux bases de E, soient f et f' deux bases de F.

$$\mathrm{mat}_{e',f'}(\varphi) = \left(P_f^{f'}\right)^{-1} \mathrm{mat}_{e,f}(\varphi)\, P_e^{e'},$$

où : * $P_e^{e'}$ est la matrice de passage de e à e' (ses colonnes sont les coordonnées des vecteurs de e' dans la base e)

* $P_f^{f'}$ est la matrice de passage de f à f' (... idem avec des f' et des f...)

Cas particulier important : Lorsque $E = F$. On prend alors seulement deux bases e et e'. On a alors

$$\mathrm{mat}_{e'}(\varphi) = P^{-1}\, \mathrm{mat}_e(\varphi)\, P$$ où P est la matrice de passage de e à e' : coordonnées des vecteurs de e' dans e.

ON VA FAIRE UN EXEMPLE TOUT DE SUITE

Exemple - méthode :

Considérons l'application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ donnée par

$$\varphi(x,y,z) = (x - 2y + 4z,\ -7x - 7y + 23z,\ -3x - 4y + 12z).$$

On va considérer : . la base canonique $e = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ où $\vec{e_1} = (1,0,0)$, $\vec{e_2} = (0,1,0)$, $\vec{e_3} = (0,0,1)$

. la "nouvelle" base $e' = (\vec{e'_1}, \vec{e'_2}, \vec{e'_3})$ où

$\vec{e'_1} = (1,2,1) = \vec{e_1} + 2\vec{e_2} + \vec{e_3}$

$\vec{e'_2} = (2,1,1) = 2\vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}$

$\vec{e'_3} = (-1,3,1) = -\vec{e_1} + 3\vec{e_2} + \vec{e_3}$

. La matrice de φ dans e est $mat_e(\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -7 & -7 & 23 \\ -3 & -4 & 12 \end{bmatrix}$

. Pour connaître la matrice de φ dans , on commence par écrire la matrice de passage P de e à e' : les coordonnées des vecteurs de e' dans la base e. On a donc $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Exercice pour vous : vérifiez par le calcul que $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -7 \\ -1 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

La matrice de φ dans la base f est alors

$$mat_{e'}(\varphi) = P^{-1}\, mat_e(\varphi)\, P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(Faites ce calcul !)