

MAT402 : Suites et séries de fonctions

Hélène EYNARD-BONTEMPS

Table des matières

1	Suites de fonctions	5
I	Convergence simple	5
II	Convergence uniforme	6
III	Propriétés de la limite	11
III.1	Continuité	11
III.2	Primitives/Intégrales	13
III.3	Dérivabilité	15
IV	Théorèmes d'approximation	16
2	Séries de fonctions	17
I	Différents types de convergence	17
I.1	Convergences simple et uniforme	17
I.2	Convergence normale	19
II	Propriétés de la somme	22
II.1	Continuité	22
II.2	Intégrales	22
II.3	Dérivabilité	23
II.4	Étude d'un exemple célèbre	23
3	Séries entières	25
I	Séries entières, rayon, disque et domaine de convergence	25
I.1	Définitions	25
I.2	(Autres) méthodes de détermination du rayon de convergence	28
I.3	Opérations / comparaisons et rayon de convergence	29
II	Propriétés de la somme	31
II.1	Convergence	31
II.2	Continuité	31
II.3	Régularité	31
II.4	Application aux équations différentielles	33
II.5	Primitive	33
III	Fonctions développables en séries entières	33
III.1	Définition et contre-exemple	34
III.2	Opérations sur les développements en séries entières	35
III.3	DSE classiques	35
4	Séries de Fourier	37
I	Théorie géométrique des séries de Fourier	40
I.1	Polynômes trigonométriques	40
I.2	Coefficients de Fourier	40
I.3	Structure hermitienne	44
II	Théorèmes de convergence	48

II.A	Théorème de Dirichlet	48
II.B	Théorème de convergence normale	51
II.C	Formule de Parseval et convergence en norme L_2	53
III	Compléments	55
III.A	Unicité du développement en série trigonométrique	55
III.B	Retour sur l'équation de la chaleur	56
III.C	Généralisation aux fonctions T -périodique	57

Chapitre 1

Suites de fonctions

Dans tout ce cours, \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Soit I un sous-ensemble de \mathbb{R} . Formellement, une *suite de fonctions définies sur I* est une application de \mathbb{N} dans \mathbb{K}^I (ensemble des fonctions définies sur I et à valeurs dans \mathbb{K}), qui à chaque $n \in \mathbb{N}$ associe donc une fonction $f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$. Comme pour les suites réelles, on note une telle suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Le but de ce chapitre est de donner un sens précis (et en fait plusieurs) à la phrase “la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge sur I vers une fonction f ”, et de voir, selon le type de convergence, les propriétés des f_n qui sont préservées par passage à la limite.

I Convergence simple

Définition 1.1. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} . On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *converge simplement* (ou *point par point*, ou encore *ponctuellement*) sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ si, pour tout $t \in I$, la suite *numérique* $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(t) \in \mathbb{K}$. On écrit alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } I} f$.

Remarque 1.2. L’unicité de la limite d’une suite numérique convergente entraîne que la fonction f ci-dessus, si elle existe, est unique (définie par $f : t \in I \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t)$). On l’appelle alors *limite simple de la suite de fonctions* $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Remarque 1.3. On prendra soin de préciser sur quel domaine de \mathbb{R} a lieu la convergence. Il pourra s’avérer qu’une suite de fonctions converge sur un domaine strictement plus petit que le domaine de définition des fonctions en question.

Mise en garde 1.4. Il est indispensable de faire dès maintenant et tout au long de ce cours la différence entre les objets suivants, où t désigne un élément de I :

$$f_n(t) , \quad f_n , \quad (f_n(t))_{n \in \mathbb{N}} , \quad (f_n)_{n \in \mathbb{N}} .$$

Le premier est un nombre (élément de \mathbb{K}), le deuxième une fonction (élément de \mathbb{K}^I), le troisième une suite numérique (élément de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$), et le dernier une suite de fonctions (élément de $(\mathbb{K}^I)^{\mathbb{N}}$). En particulier, dans ce cours, on prendra garde à ne jamais écrire “la fonction $f(t)$...”, mais bien “la fonction f ”.

Exemple 1.5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \in [0, 1] \mapsto x^n \in \mathbb{R}$. Pour étudier l’éventuelle convergence simple sur $I = [0, 1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il s’agit d’étudier, pour chaque $x \in I$, la convergence de la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} = (x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (où x est maintenant un paramètre fixé). On remarque que :

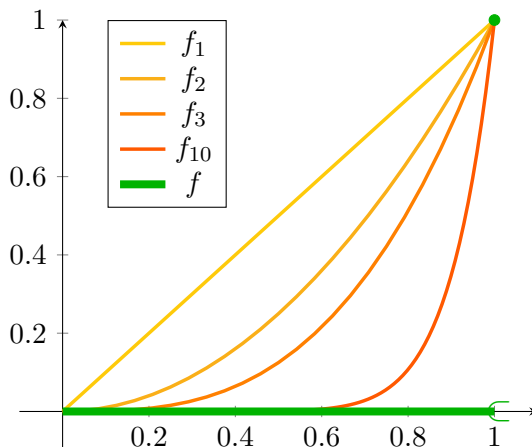
- si $x \in [0, 1[$, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 (suite géométrique de raison dans $] -1, 1[$) ;

— si $x = 1$, la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante égale à 1 donc converge vers 1.

Posons donc

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

On a montré que pour tout $x \in [0, 1]$, $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(x)$, donc la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *simplement* sur I vers la fonction f .



Remarque 1.6. Lorsqu'on étudie une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on représente souvent dans un même repère les graphes de plusieurs éléments de la suite $f_{n_0}, f_{n_1}, \dots, f_{n_k}$, pour des entiers n_0, \dots, n_k distincts, comme ci-dessus, ainsi que le graphe de la limite simple f lorsqu'on l'a déterminée. La variable en abscisse est x (ou t), variable commune aux fonctions de la suite, et pas n !

Remarque 1.7. Toutes les fonctions f_n ci-dessus sont continues (et même C^∞) sur $[0, 1]$, mais la limite simple f ne l'est pas. Intuitivement, cela vient du fait que la convergence a lieu point par point (indépendamment et pas à la même vitesse) et ne préserve donc pas les propriétés semi-globales telles que la continuité. On va donc introduire une notion de convergence plus forte qui n'a pas ce défaut : la convergence *uniforme*, qui a un caractère global justement, comme son nom l'indique. Avant cela, exprimons la convergence simple "en symboles" :

Définition équivalente 1.8 (sous forme quantifiée).

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVS sur } I} f \Leftrightarrow \forall x \in I, (f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge dans } \mathbb{K} \text{ vers } f(x) \\ \Leftrightarrow (*) \quad \forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Remarque 1.9. Dans $(*)$, le rang N à partir duquel l'inégalité $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ a lieu dépend à la fois de ε et de x . C'est cette dépendance en x qui empêche la convergence simple de transmettre à la limite les propriétés telles que la continuité, le fait d'être borné... On va voir que si ce rang N ne dépend que de ε (et pas de x), ces propriétés sont préservées par passage à la limite. D'où l'importance de l'ordre des quantificateurs !

Exercice 1.10. Déterminez le N en question en fonction de x et ε dans le cas de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étudiée précédemment. Que constatez-vous ?

II Convergence uniforme

Définition 1.11. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} . On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *uniformément* sur I vers une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ si

$$(**) \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

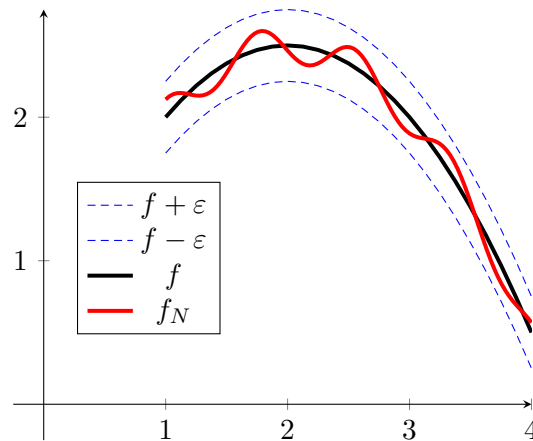
On écrit alors $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } I} f$.

Entre (*) et (**), on a juste déplacé “ $\forall x \in I$ ”, mais cela fait une grosse différence, comme on peut le voir grâce à l’interprétation graphique de la convergence uniforme dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

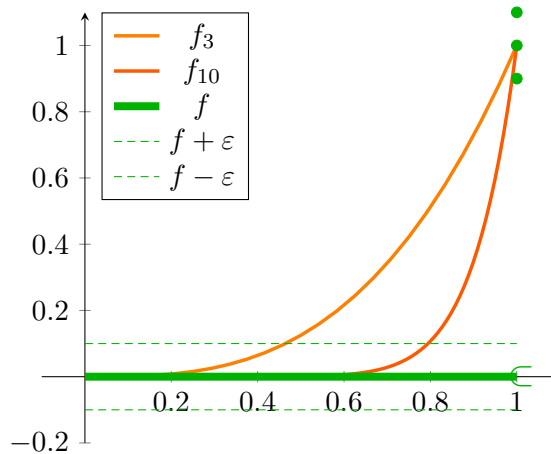
Interprétation graphique 1.12. (**) se réécrit :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, f(x) - \varepsilon \leq f_n(x) \leq f(x) + \varepsilon$$

En mots, cela signifie : pour tout $\varepsilon > 0$, à partir d’un certain rang N , les graphes de toutes les fonctions f_n sont “coincés” dans la “bande” de hauteur 2ε comprise entre les graphes de $f - \varepsilon$ et de $f + \varepsilon$.



Ce n’était pas le cas pour la suite de l’exemple du paragraphe précédent.



La convergence simple n’entraîne donc pas la convergence uniforme. En revanche :

Proposition 1.13. Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction f , alors elle converge aussi simplement vers f . En abrégé :

$$\text{CVU} \implies \text{CVS}.$$

Corollaire 1.14. Si la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction f , une telle f est unique, et on l’appelle limite uniforme de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sur I .

Preuve de la proposition. On suppose que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers f . Soit $x \in I$. Soit $\varepsilon > 0$. Par définition de la convergence uniforme, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \geq N, \forall y \in I, |f_n(y) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

En particulier, pour ce N et pour tout $n \geq N$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ puisque $x \in I$. On a donc montré :

$$\forall x \in I, \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

c'est-à-dire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f . \square

On peut également caractériser la convergence uniforme en termes de *norme uniforme* $\|\cdot\|_{\infty, I}$. En effet, en reformulant (**),

$$\begin{aligned} f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } I} f &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f_n - f| \text{ est majorée par } \varepsilon \text{ sur } I \\ &\Leftrightarrow (1) \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \varepsilon \\ &\Leftrightarrow (2) (\exists N' \in \mathbb{N} \text{ t.q. } \forall n \geq N', \|f_n - f\|_{\infty, I} \text{ est fini et}) \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty, I} = 0. \end{aligned}$$

La seule difficulté pour justifier cette dernière équivalence provient du fait qu'a priori, $\|f_n - f\|_{\infty, I}$ peut prendre la valeur $+\infty$. Mais si (1) est vrai, en prenant $\varepsilon = 1$ par exemple, on a bien que $\|f_n - f\|_{\infty, I}$ est fini (puisque inférieur à 1!) pour tout n à partir du rang N_1 correspondant, et (1) indique alors que la suite de réels $(\|f_n - f\|_{\infty, I})_{n \geq N_1}$ (ainsi bien définie) converge vers 0. La réciproque est immédiate par définition de la convergence d'une suite réelle vers 0. On dispose alors de la caractérisation plus maniable :

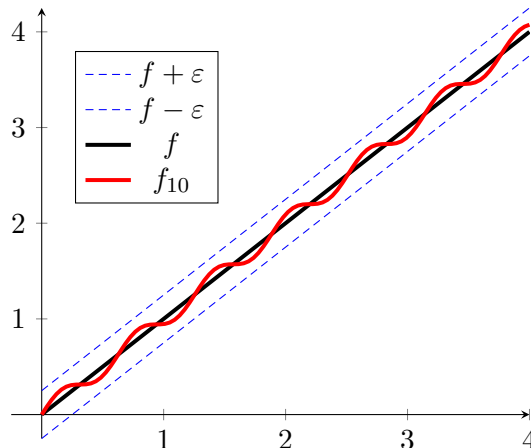
Caractérisation 1.15 (de la CVU en termes de $\|\cdot\|_{\infty}$).

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } I} f \Leftrightarrow \exists (M_n)_{n \geq n_0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^{\geq n_0}} \text{ convergeant vers } 0 \text{ t.q. } \forall n \geq n_0, \|f_n - f\|_{\infty, I} \leq M_n.$$

Méthode 1.16. $\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq M_n$ est équivalent à : $\forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq M_n$. Pour étudier la CVU d'une suite $(f_n)_n$ vers une fonction f , il s'agit donc simplement, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, d'essayer de majorer au mieux $|f_n(x) - f(x)|$ par un réel M_n *indépendamment de* $x \in I$, et de voir si la suite $(M_n)_n$ ainsi définie tend vers 0.

Preuve de la caractérisation. Si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{CVU sur } I} f$, il suffit de prendre $M_n = \|f_n - f\|_{\infty, I}$ (pour n supérieur au plus petit rang à partir duquel tous les $\|f_n - f\|_{\infty, I}$ sont finis)! Inversement, s'il existe une suite $(M_n)_{n \geq n_0}$ comme dans l'énoncé, $\|f_n - f\|_{\infty, I}$ est fini à partir du rang n_0 et la suite $(\|f_n - f\|_{\infty, I})_{n \geq n_0}$ converge vers 0 par comparaison de suites numériques! On a donc bien l'équivalence. \square

Exemple 1.17



Exemple 1.17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(t) = t + \frac{1}{n} \sin(nt)$. On veut savoir si la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers une certaine fonction f . Pour commencer, il nous faut déjà trouver un candidat pour f . Pour cela, on peut d'abord étudier la convergence simple (puisque l'on sait que si elle existe, la limite uniforme coïncide avec la limite simple).

Soit donc $t \in \mathbb{R}$ fixé. Pour tout $n \geq 1$, $|\frac{\sin(nt)}{n}| \leq \frac{1}{n}$, donc par comparaison $(\frac{\sin(nt)}{n})_n$ tend vers 0, donc $(f_n(t))_{n \geq 1} = (t + \frac{1}{n} \sin(nt))_{n \geq 1}$ converge vers t . Ainsi, si on pose $f = \text{id}_{\mathbb{R}} : t \in \mathbb{R} \mapsto t \in \mathbb{R}$, on vient de montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge *simplement* sur \mathbb{R} vers f .

Étudions la convergence uniforme. Soit $n \geq 1$,

$$\forall t \in \mathbb{R}, |f_n(t) - f(t)| = |(t + \frac{1}{n} \sin(nt)) - t| = \left| \frac{\sin(nt)}{n} \right| \leq \frac{1}{n}.$$

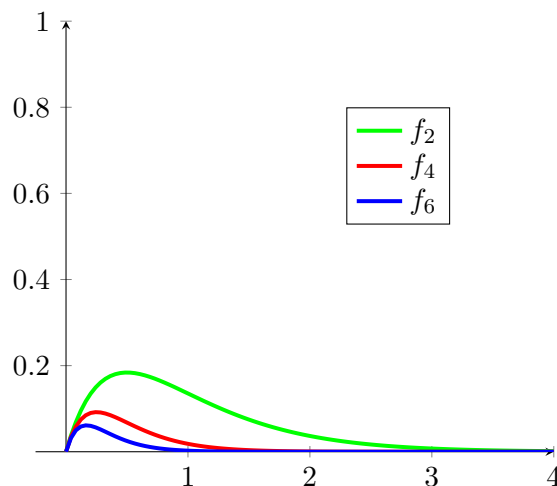
Ainsi,

$$\forall n \geq 1, \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}} \leq \frac{1}{n},$$

et $(\frac{1}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 0 donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f .

Remarque 1.18. Les “calculs” intervenant dans la preuve de la convergence simple et dans celle de la convergence uniforme sont les mêmes. Ce qui change tout, c'est la rédaction, et notamment les quantificateurs et leur ordre ! Il faut y accorder la plus grande attention.

Exemple 1.19



Exemple 1.19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(x) = xe^{-nx}$. Montrons que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ vers la fonction nulle (ici, f est donnée ! C'est la fonction nulle). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ici, pour majorer $|f_n(x) - x| = xe^{-nx}$ indépendamment de x , on n'a guère d'autre choix que de déterminer le sup (et en fait le max) de la fonction positive f_n sur \mathbb{R}_+ . Cette fonction est C^1 et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f'_n(x) = (1 - nx)e^{-nx}$. On en déduit qu'elle est croissante sur $[0, \frac{1}{n}]$ et décroissante sur $[\frac{1}{n}, +\infty[$, donc elle atteint son max en $\frac{1}{n}$, et celui-ci vaut $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{en}$. Ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \|f_n - f\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \|f_n\|_{\infty, \mathbb{R}_+} = \frac{1}{en},$$

et $(\frac{1}{en})_{n \geq 1}$ converge vers 0 donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction nulle.

Dans les exemples ci-dessus, on commençait par identifier l'éventuelle limite f si elle n'était pas donnée, puis on prouvait la convergence uniforme. Mais comme pour les suites numériques, il arrive qu'on ait besoin de prouver la convergence uniforme d'une suite de fonctions sans pouvoir identifier sa limite. C'est notamment souvent le cas pour les *séries* de fonctions, que l'on verra au chapitre suivant. On dispose pour cela d'un outil théorique qui est l'analogue pour les suites de fonctions du critère de Cauchy pour les suites numériques : le critère de Cauchy *uniforme*.

Définition 1.20. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} . On dit que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *uniformément de Cauchy* ou *satisfait le critère de Cauchy uniforme* sur I si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in I, |f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$$

i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \|f_p - f_q\|_{\infty, I} \leq \varepsilon$$

Théorème 1.21. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} . Alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément convergente si et seulement si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy.

Démonstration. “ \Rightarrow ” On suppose $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformément convergente. Notons f sa limite uniforme. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Par convergence uniforme, comme $\varepsilon/2 > 0$ également, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\forall x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon/2$. Soient alors $p, q \geq N$. Alors pour tout $x \in I$,

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f(x)| + |f(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

On a donc montré que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément de Cauchy.

“ \Leftarrow ” On suppose $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uniformément de Cauchy. Commençons par montrer qu’elle admet alors une limite simple. En effet, soit $x \in I$. Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \geq N$, pour tout $y \in I$, $|f_p(y) - f_q(y)| \leq \varepsilon$. Cette inégalité est en particulier vraie pour $y = x$. On vient ainsi de montrer que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Or toute suite réelle ou complexe qui est de Cauchy est convergente, donc $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ admet une limite, que l’on note $f(x)$. Ainsi, la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *simplement* vers f .

Montrons que la convergence est uniforme. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ comme ci-dessus. Soient $x \in I$ et $n \geq N$ fixés. On a :

$$\forall q \geq N, |f_n(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon.$$

On peut passer à la limite quand $q \rightarrow +\infty$ dans l’inégalité large ci-dessus (tout le reste est fixé), et on obtient :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $x \in I$ et pour tout $n \geq N$, on a montré :

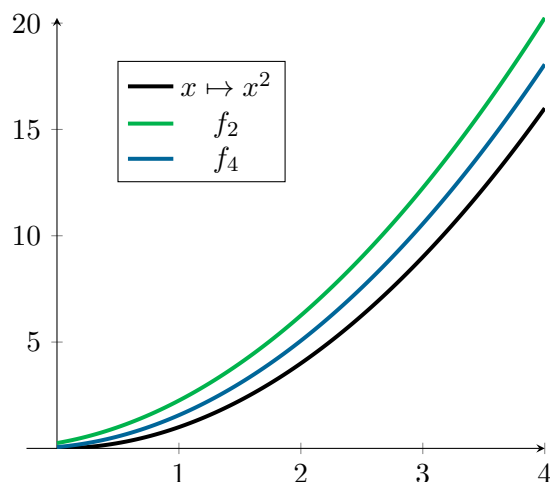
$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in I, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon,$$

c’est-à-dire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge *uniformément* vers f . □

Outre le “critère pratique” 1.15 de majoration uniforme et le critère de Cauchy, il y a, comme pour les suites numériques, certaines opérations autorisées sur les suites de fonctions uniformément convergentes. Mais attention ! Il y en a moins que pour les suites numériques !

Proposition 1.22. Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des suites de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} convergeant uniformément sur I vers des fonctions f et g respectivement, alors pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la suite de fonctions $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la fonction $\alpha f + \beta g$.

Attention ! La suite produit de deux suites de fonctions uniformément convergentes n’est pas forcément uniformément convergente. Contre-exemple : la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \frac{1}{n}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers $\text{id}_{\mathbb{R}} : x \mapsto x$, mais la suite $(f_n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} vers $x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$.



Exercice 1.23. Prouver les affirmations ci-dessus.

Exercice 1.24. Quelle condition pourrait-on ajouter sur les suites dont on fait le produit pour assurer la convergence uniforme du produit ?

III Propriétés de la limite

On peut montrer “facilement” (à condition de ne pas s’emmêler entre les différents paramètres) que la limite uniforme d’une suite de fonctions *bornées* est elle aussi bornée (exercice !). Attention, ceci n’est pas vrai pour une limite *simple* (exercice !).

Quelles autres propriétés sont préservées par passage à la limite uniforme, et sous quelles conditions ?

III.1 Continuité

Contrairement à la limite simple (cf. premier exemple du cours), la limite uniforme d’une suite de fonctions continues hérite de la propriété de continuité :

Théorème 1.25. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} qui converge uniformément sur I vers une fonction f , et soit $t_0 \in I$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en t_0 , alors f l’est aussi.

On peut voir ce résultat comme un théorème d’interversion de limites :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_n(t) \right).$$

On a déjà vu un contre-exemple au théorème dans le cas d’une convergence seulement *simple*, ce qui veut dire que sans les bonnes hypothèses, l’interversion de limites ci-dessus n’est en général pas licite !

En supposant les f_n continues sur I (i.e. en tout point $t_0 \in I$), on obtient, en version abrégée :

Corollaire 1.26. La limite uniforme d’une suite de fonctions continues est une fonction continue.

Preuve du théorème. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\eta > 0$ tel que pour tout $t \in I$, si $|t - t_0| \leq \eta$, $|f(t) - f(t_0)| \leq \varepsilon$.

Or on sait que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f sur I , donc comme $\varepsilon/3$ est encore strictement positif, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\|f_n - f\|_{\infty, I} \leq \varepsilon/3$. C’est en particulier vrai pour $n = N$.

Or la fonction f_N est continue en t_0 , donc on peut choisir $\eta > 0$ tel que :

$$\forall t \in I, |t - t_0| \leq \eta \implies |f_N(t) - f_N(t_0)| \leq \varepsilon/3.$$

Mais alors pour tout $t \in I$ tel que $|t - t_0| \leq \eta$, on a :

$$\begin{aligned} |f(t) - f(t_0)| &\leq |f(t) - f_N(t)| + |f_N(t) - f_N(t_0)| + |f_N(t_0) - f(t_0)| \\ &\leq \underbrace{\|f - f_N\|_{\infty, I}}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{\varepsilon/3}_{\text{par choix de } \eta} + \underbrace{\|f_N - f\|_{\infty, I}}_{\leq \varepsilon/3} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qu'on voulait. □

Application 1.27. On peut construire, comme limites uniformes de suites de fonctions continues, des fonctions continues (d'après le théorème précédent) MAIS ayant des propriétés originales, par exemple n'étant dérivables en aucun point! (cf. TD).

Application 1.28. La contraposée de ce théorème sert souvent à montrer la NON-convergence uniforme d'une suite de fonctions vers une fonction f donnée, en observant que les fonctions de la suite sont continues alors que f ne l'est pas. C'est par exemple le cas dans le premier exemple du chapitre.

Exercice 1.29. On a démontré graphiquement, puis grâce à la contraposée du théorème ci-dessus, que la suite des fonctions $f_n : x \mapsto x^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$ vers sa limite simple. Le montrer en utilisant la caractérisation 1.15 de la CVU en termes de $\|\cdot\|_{\infty}$.

Remarque 1.30. Si une suite de fonctions $(f_n)_n$ CVS vers une fonction f , la continuité des f_n et la CVU sont à elles-deux une condition suffisante pour avoir la continuité de f . Mais aucune des deux sous-conditions n'est nécessaire. En effet, considérons la suite $(f_n)_n$ définie par $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto 0$ si $x < n$, 1 si $x \geq n$. On peut montrer que $(f_n)_n$ tend simplement vers la fonction nulle, qui est continue, alors que les f_n ne le sont pas et que la convergence n'est pas uniforme (exercice).

Le théorème ci-dessus possède une généralisation utile :

Proposition 1.31. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} qui converge uniformément vers une fonction f sur tout segment $J \subset I$. Alors f est continue sur I .*

Ce théorème nous facilitera particulièrement la vie lorsque nous étudierons les séries entières (chap. 3).

Attention ! On n'a pas dit "alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU vers f sur I ", et c'est faux en général ! Prenons par exemple la suite de fonctions définies sur \mathbb{R}_+ par $f_n(t) = (t + \frac{1}{n})^2$, $n \geq 1$. On a déjà vu que cette suite ne convergeait pas uniformément sur \mathbb{R}_+ . Elle converge en revanche simplement vers la fonction $f : t \mapsto t^2$ (le justifier), et la convergence est uniforme sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+$. En effet, étant donné un tel segment, pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\forall t \in [a, b], |f_n(t) - f(t)| = \frac{2t}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \text{ (indépendant de } t)$$

donc

$$\|f_n - f\|_{\infty, [a, b]} \leq \frac{2b}{n} + \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU sur $[a, b]$ vers f .

On peut également généraliser le théorème 1.25 sous la forme du théorème d'interversion de limites suivant :

Corollaire 1.32. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $I =]a, b[$ dans \mathbb{K} , avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, convergeant uniformément sur I vers une fonction f . On suppose que chaque fonction f_n admet une limite l_n en a . Alors :

1. la suite numérique $(l_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente, on note l sa limite ;
2. f admet l pour limite en a .

Autrement dit :

$$\lim_{t \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\lim_{t \rightarrow a} f_n(t) \right).$$

(en particulier tout a un sens dans l'expression ci-dessus). On a bien sûr le même résultat en remplaçant a par b .

Idée de preuve. On commence par prouver le point 1 en montrant que la suite $(l_n)_n$ est de Cauchy. Ensuite, dans le cas où a est fini, on prolonge chacune des fonctions f_n par continuité en a par la valeur l_n . On note g_n la fonction ainsi obtenue, qui est donc continue en a . On montre que $(g_n)_n$ converge uniformément sur $[a, b[$ vers la fonction g qui coïncide avec f sur $]a, b[$ et vaut l en a . La fonction g est continue en a d'après le théorème 1.25, et on en déduit le résultat voulu.

Dans le cas où $a = -\infty$, on considère les fonctions $g_n : t \in]0, 1/b[$ (ou $]1/b, 0[$) $\mapsto f_n(\frac{1}{x})$ et on se ramène au cas précédent. \square

III.2 Primitives/Intégrales

La question générale ici est : si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{CV sur } [a, b]} f$, que peut-on dire de $\int_a^b f$ par rapport aux $\int_a^b f_n$. Noter que l'on se restreint dans ce cours à l'intégration sur des segments.

Théorème 1.33. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues d'un segment $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} convergeant uniformément sur J vers une fonction f (qui est donc continue sur J). On pose

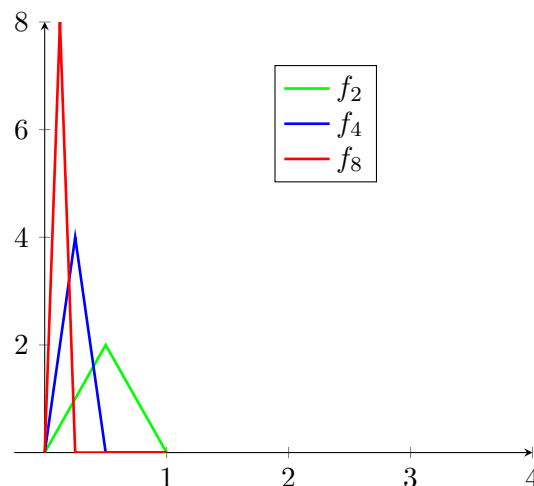
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad F_n : J \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{et} \quad F : J \rightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto \int_a^x f_n(t) dt \quad \quad x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

(les primitives s'annulant en a de f_n et f respectivement).

Alors la suite de fonctions $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers F sur J . En particulier, $(F_n(b))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $F(b)$, c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f_n(t) dt \right) = \int_a^b \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt.$$

Remarque 1.34



Remarque 1.34. Si l'on remplace la CVU de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par une CVS, en général, cela ne marche pas. En effet, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 2}$ définies sur $[0, 1]$ par : $\forall n \geq 2$, $f_n(0) = f_n(2/n) = f_n(1) = 0$, $f_n(1/n) = n$, et f_n est affine sur chacun des intervalles $[0, 1/n]$, $[1/n, 2/n]$ et $[2/n, 1]$.

Par construction, ces fonctions sont continues. De plus, $(f_n)_{n \geq 2}$ CVS vers la fonction nulle sur $[0, 1]$. En effet, soit $x \in [0, 1]$. Si $x = 0$, $(f_n(x))_{n \geq 2}$ est constante égale à 0 donc converge bien vers 0. Si $x > 0$, en posant $N = \lfloor \frac{2}{x} \rfloor + 1$, de sorte que $N > \frac{2}{x}$, on a, pour tout $n \geq N$, $\frac{2}{n} \leq x$ donc $f_n(x) = 0$, donc $(f_n(x))_{n \geq 2}$ est stationnaire et de limite nulle.

Regardons maintenant les intégrales. Pour tout $n \geq 2$, $\int_0^1 f_n(t) dt$ est l'aire du triangle isocèle de base $\frac{2}{n}$ et de hauteur n , soit 1, alors que $\int_0^1 f(t) dt = 0$. Ainsi,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^1 f_n(t) dt \right) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \right) dt.$$

Ceci prouve au passage que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers la fonction nulle $\tilde{0}$ sur $[0, 1]$, ce que l'on peut vérifier à la main : pour tout $n \geq 2$, $\|f_n - \tilde{0}\|_{\infty, [0, 1]} = \sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x)| = n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \neq 0$.

Preuve du théorème. Pour tout $x \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F(x)| &= \left| \int_a^x f_n(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right| \\ &= \left| \int_a^x (f_n(t) - f(t)) dt \right| \\ &\leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)| dt \\ &\leq \int_a^x \|f_n - f\|_{\infty, I} dt \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty, J} \times |x - a| \\ &\leq \|f_n - f\|_{\infty, J} \times |b - a|. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\|F_n - F\|_{\infty, J} \leq \|f_n - f\|_{\infty, J} \times |b - a| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers F sur $[a, b]$. \square

Exercice 1.35. Vérifier que, sous les hypothèses du théorème, si J est un intervalle *borné* (pas forcément un segment) et si $a \in I$, alors $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge toujours uniformément vers F sur J .

Remarque 1.36. En revanche, si on ne suppose pas J borné, étant donné $a \in J$, en général, on n'a pas la convergence uniforme de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers F sur J tout entier. Considérer par exemple la suite constituée des fonctions $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x + \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), qui converge uniformément vers l'identité sur \mathbb{R} (déjà vu). En prenant $a = 0$, déterminer F_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, ainsi que F . On observe en particulier que pour tout $n \geq 1$, $F_n(n) - F(n) = 1$, donc $\|F_n - F\|_{\infty, \mathbb{R}} \geq 1$, donc la suite des sup ne tend pas vers 0.

En revanche, on peut montrer grâce au théorème la convergence uniforme de $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers F sur tout segment inclus dans J .

Mise en garde 1.37. La formule d'interversion limite/intégrale du théorème concerne des intégrales *propres*, sur des segments. Elle n'est en général pas vraie pour les intégrales généralisées étudiées en MAT302, même si la suite de fonctions converge uniformément. Considérer par exemple la suite de fonctions continues $(f_n)_n$ de \mathbb{R}_+ dans \mathbb{R} définies par $f_n(x) = \frac{1}{n}$ si $x \in [0, n]$, 0 si $x \geq n + 1$, et f_n affine sur $[n, n + 1]$. Montrer que cette suite converge uniformément vers la fonction nulle sur \mathbb{R}_+ . On a pourtant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{+\infty} f_n \geq \int_0^n f_n = 1$ alors que $\int_0^{+\infty} 0 = 0 \dots$

III.3 Dérivabilité

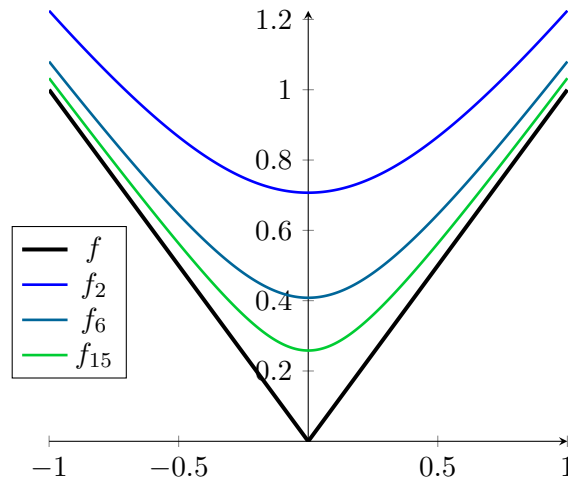
On a déjà vu un exemple de suite de fonctions dérivables convergeant simplement vers une fonction qui n'est même pas continue. En fait, même la convergence uniforme n'est pas suffisante pour préserver la dérivabilité, comme le montre l'exemple suivant.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$. En effet, étant donné $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f_n(x) - f(x)| = \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| \leq \sqrt{\left| \left(x^2 + \frac{1}{n} \right) - x^2 \right|} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

($\forall y, z \in \mathbb{R}, |\sqrt{y} - \sqrt{z}| \leq \sqrt{|y - z|}$), et $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n \geq 1}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, donc par critère de CVU, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f .

Or toutes les fonctions f_n sont C^1 sur \mathbb{R} ($x \mapsto x^2 + \frac{1}{n}$ est C^1 sur \mathbb{R} , à valeurs dans $[\frac{1}{n}, +\infty[$, intervalle sur lequel $\sqrt{\cdot}$ est C^1 , à la différence de $[0, +\infty[$), mais f ne l'est pas, n'étant pas dérivable en 0.



Le théorème suivant fournit une condition suffisante pour que la limite d'une suite de fonctions C^1 le soit elle aussi :

Théorème 1.38. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions C^1 sur un intervalle borné I telle que

1. $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVS sur I vers une fonction f ;
2. $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ CVU sur I vers une fonction g .

Alors la convergence de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est uniforme, la limite f est C^1 , et $f' = g$. Cette dernière égalité se réécrit :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} (f'_n).$$

Démonstration. Soit $a \in I$, on applique le théorème 1.33 (sous sa forme un peu améliorée de l'exercice 1.35) à la suite de fonctions $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui en satisfait bien les hypothèses (elle converge uniformément, et comme les fonctions f_n sont supposées C^1 , leurs dérivées sont continues). On obtient alors la convergence uniforme sur I de la suite $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers la fonction G , où :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad G_n : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x f'_n(t) dt \end{array} \quad \text{et} \quad G : \begin{array}{ccc} I & \rightarrow & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & \int_a^x g(t) dt. \end{array}$$

Or pour tout $x \in I$, $G_n(x) = f_n(x) - f_n(a)$, ou encore $f_n(x) = G_n(x) + f_n(a)$. Vérifions que la suite des fonctions définies par le membre de droite de l'égalité, $(G_n + f_n(a))_{n \in \mathbb{N}}$, converge uniformément vers $G + f(a)$. En effet, $\forall x \in I$,

$$|(G_n(x) + f_n(a)) - (G(x) + f(a))| \leq |G_n(x) - G(x)| + |f_n(a) - f(a)| \leq \|G_n - G\|_{\infty, I} + |f_n(a) - f(a)|,$$

et la suite numérique $(\|G_n - G\|_{\infty, I} + |f_n(a) - f(a)|)_n$, indépendante de x , tend vers 0 comme somme de suites tendant vers 0 (on utilise ici la convergence simple de $(f_n)_n$ vers f , et plus particulièrement la convergence de $(f_n(a))_n$ vers $f(a)$), donc on a bien la convergence uniforme voulue, qui entraîne aussi la convergence simple. Mais $(G_n + f_n(a))_{n \in \mathbb{N}} = (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, donc ceci montre la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$, qui converge aussi simplement sur I vers f , donc par unicité de la limite simple, $f = G + f(a)$. Or comme g est C^0 , G est C^1 , donc f aussi, et $f' = G' = g$. \square

IV Théorèmes d'approximation

Concluons ce chapitre par deux théorèmes d'approximation. Nous venons de voir qu'une limite uniforme de fonctions C^1 n'était pas forcément C^1 , et c'est en fait bien plus fort : TOUTE fonction C^0 sur un segment (même celles qui ne sont dérivables nulle part, et cela existe) est limite uniforme de fonctions C^1 . Plus précisément :

Théorème 1.39 (Weierstrass). *Toute fonction C^0 sur un segment de \mathbb{R} est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions polynomiales (donc C^∞).*

Pour ceux qui ont déjà fait un peu de topologie, on dit que les fonctions C^1 sont *denses* dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur un segment muni de la norme uniforme $\|\cdot\|_\infty$. Vous verrez la démonstration de ce théorème en L3 de Mathématiques.

Mais on a vu aussi qu'une suite de fonctions non continues pouvait converger uniformément vers une fonction continue. Et en fait :

Théorème 1.40. *Toute fonction C^0 sur un segment de \mathbb{R} est limite uniforme sur ce segment d'une suite de fonctions en escalier (en général pas continues).*

Vous avez en fait démontré ce théorème, même s'il était bien sûr formulé différemment, en MAT302, en utilisant le théorème de Heine qui affirme qu'une fonction C^0 sur un segment est uniformément continue.

Chapitre 2

Séries de fonctions

On rappelle qu'étant donnée une suite numérique $(u_n)_{n \geq n_0}$, la *série de terme général* u_n , notée $(\sum_{n \geq n_0} u_n)$, désigne la *suite* des sommes partielles $(S_n)_{n \geq n_0}$ définies pour tout $n \geq n_0$ par $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$. Si cette suite converge, on note $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$ sa limite, appelée *somme* de la série $(\sum_{n \geq n_0} u_n)$ (bien faire la nuance entre les deux notations ; l'une désigne un nombre, l'autre une suite de nombres).

De la même manière, étant donnée une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq n_0}$ de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} , la *série de fonctions* $(\sum_{n \geq n_0} f_n)$, désigne la *suite de fonctions* $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par : pour tout $n \geq n_0$, $S_n = \sum_{k=n_0}^n f_k$ (fonction de I dans \mathbb{K}). Pour simplifier, dans les définitions et théorèmes ci-dessous, on supposera $n_0 = 0$.

I Différents types de convergence

I.1 Convergences simple et uniforme

Dans ce qui suit, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désigne une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans \mathbb{K} .

Définition 2.1. On dit que la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ converge simplement sur I si

- la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I ,

i.e. si :

- $\forall x \in I$, $\sum_{k=n_0}^n f_k(x)$ admet une limite quand $n \rightarrow +\infty$,

ou encore si :

- $\forall x \in I$, la série numérique $(\sum_{n \geq n_0} f_n(x))$ est une série convergente.

Si la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ converge simplement sur I , on note $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ la limite simple de la suite des sommes partielles, i.e. la fonction $x \in I \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x)$, et on définit la suite de fonctions $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des restes par : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n : x \in I \mapsto \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$ (reste d'indice n de la suite de fonctions).

Exemple 2.2. Soit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto x^n$ (par convention, f_0 est la fonction constante égale à 1). Alors $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVS sur $] -1, 1[$ (et pas ailleurs) : pour tout $x \in] -1, 1[$, la série numérique $(\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n)$ converge et sa somme vaut $\frac{1}{1-x}$, et pour $x \notin] -1, 1[$, la série diverge. Ainsi, $\sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est la fonction $x \in] -1, 1[\mapsto \frac{1}{1-x}$.

Définition 2.3. On dit que la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ converge uniformément sur I si la suite des (fonctions) sommes partielles $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur I .

Exemple 2.4. La convergence de la série de l'exemple précédent n'est pas uniforme sur $] -1, 1[$. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction S_n est polynomiale donc continue donc bornée sur le segment $[-1, 1]$, donc aussi sur $] -1, 1[$, mais sa limite simple ne l'est pas, or nous avons vu que la CVU préservait le caractère borné.

Proposition 2.5. *Si la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVS sur I (de sorte que la suite des restes est bien définie), $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVU sur I si et seulement si la suite des restes $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I .*

Démonstration. Supposons que $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVS sur I et notons $S : I \rightarrow \mathbb{K}$ sa somme, i.e. la limite simple de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVU sur I si et seulement si $\|S - S_n\|_{\infty, I}$ est fini à partir d'un certain rang et tend vers 0 (*). Mais

$$\forall x \in I, \quad S(x) - S_n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = R_n(x)$$

donc (*) équivaut à : $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I . \square

Exemple 2.6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n : x \in I = [-1, 1] \mapsto \frac{x^2}{n^2}$. Montrons que la série $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ CVU sur I . Pour cela, commençons par prouver la CVS : pour tout $x \in [-1, 1]$, $|\frac{x^2}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$, et $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2})$ converge par le critère de Riemann, donc par comparaison de séries à termes positifs, $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |\frac{x^2}{n^2}|)$ converge, i.e. $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{x^2}{n^2})$ converge absolument, donc converge (théorème sur les séries numériques). Ceci montre la convergence simple de la série de fonctions. De plus,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^2}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left| \frac{x^2}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} =: r_n$$

où r_n est indépendant de x et est le reste d'une série numérique convergente, donc $(r_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tend vers 0. Ceci montre que $(R_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur I .

Méthode 2.7. On va en fait voir beaucoup plus efficace pour montrer la CVU de cette série de fonctions dans le paragraphe suivant. La convergence des restes est à utiliser *en dernier recours*.

Remarque 2.8. Notons qu'on peut ainsi prouver la convergence uniforme d'une série de fonctions sans connaître l'expression de la somme S , et sans pour autant avoir recours au critère de Cauchy uniforme du chapitre précédent. Voyons néanmoins comment ce dernier s'exprime pour une série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$: on dit que celle-ci est uniformément de Cauchy sur I si c'est le cas de la suite des sommes partielles :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geq N, \forall x \in I, |S_p(x) - S_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Les rôles de p et q étant interchangeables dans cette expressions, on peut remplacer " $\forall p, q \geq N$ " par " $\forall p \geq q \geq N$ ", de sorte qu'alors, pour tout $x \in I$, $S_p(x) - S_q(x) = \sum_{k=q+1}^p f_k(x)$. Ainsi, $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ est uniformément de Cauchy sur I si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p \geq q \geq N, \forall x \in I, \left| \sum_{k=q+1}^p f_k(x) \right| \leq \varepsilon.$$

En appliquant le théorème 1.21 du chapitre 1 à la suite des sommes partielles, on obtient naturellement qu'une série de fonctions est uniformément de Cauchy sur I si et seulement si elle est uniformément convergente sur I .

Méthode 2.9. Notons que

$$\begin{array}{ccc} (\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n) \text{ CVU sur } I & & \\ \updownarrow & & \\ (S_n)_n \text{ CVU sur } I & \Rightarrow & (f_n)_n = (S_n - S_{n-1})_n \text{ CVU sur } I \text{ vers } \tilde{0}. \end{array}$$

Donc par contraposée, si $(f_n)_n$ ne CVU pas vers $\tilde{0}$, alors $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ n'est pas uniformément convergente. Mais *attention!* La CVU de $(f_n)_n$ vers $\tilde{0}$ est une condition nécessaire mais pas suffisante à la CVU de la série de fonctions, tout comme la convergence vers 0 du terme général d'une série numérique est nécessaire mais pas suffisante à la convergence de la série.

I.2 Convergence normale

Comme annoncé, nous allons voir maintenant un type de convergence *plus fort*, spécifique aux *séries* de fonctions, à tester en priorité.

Définition 2.10. On dit que $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ converge *normalement* sur I s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\|f_n\|_{\infty, I}$ est fini, et que la série numérique $(\sum_{n \geq n_0} \|f_n\|_{\infty, I})$ converge.

“Convergence *normale*” (CVN) fait ainsi référence à la *norme* $\|\cdot\|_{\infty, I}$ (et pas au caractère ordinaire de la convergence!).

Caractérisation 2.11. Une série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ converge *normalement* sur I s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_n)_{n \geq n_0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}^{\geq n_0}}$ tels que :

- $\forall n \geq n_0, \|f_n\|_{\infty, I} \leq \alpha_n$,
- la série numérique $(\sum_{n \geq n_0} \alpha_n)$ converge.

La preuve de cet énoncé est laissée en exercice.

Méthode 2.12. Pour montrer la CVN d'une série $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$, il s'agit donc, pour chaque n (éventuellement à partir d'un certain rang), de majorer au mieux $|f_n(x)|$ indépendamment de $x \in I$ par un nombre α_n et de vérifier que $(\sum \alpha_n)$ converge.

Exemple 2.13. Reprenons la série de fonctions de l'exemple 2.6. Pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [-1, 1]$, $|f_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$, or la série numérique $(\sum \frac{1}{n^2})$ converge, donc la série de fonction $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ CVN sur I . Nous allons voir que cela entraîne en fait la convergence uniforme.

Il s'agit d'un des théorèmes centraux de ce cours.

Théorème 2.14. Si une série de fonctions converge normalement sur I , alors elle converge uniformément sur I :

$$CVN \implies CVU.$$

Démonstration. Soit $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ une suite de fonctions convergeant normalement sur I . La preuve consiste à montrer qu'elle est alors uniformément de Cauchy.

On sait qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\sum_{n \geq n_0} \|f_n\|_{\infty, I})$ est une série numérique bien définie et convergente, donc sa suite de sommes partielles est de Cauchy (dans \mathbb{R}). Ainsi, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe $N \geq n_0$ tel que

$$\forall p \geq q \geq N, \quad \left| \sum_{k=n_0}^p \|f_k\|_{\infty, I} - \sum_{k=n_0}^q \|f_k\|_{\infty, I} \right| = \sum_{k=q+1}^p \|f_k\|_{\infty, I} \leq \varepsilon.$$

Mais alors pour un tel N ,

$$\forall p \geq q \geq N, \forall x \in I, \quad \left| \sum_{k=q+1}^p f_k(x) \right| \leq \sum_{k=q+1}^p |f_k(x)| \leq \sum_{k=q+1}^p \|f_k\|_{\infty, I} \leq \varepsilon,$$

ce qui montre précisément que $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ est uniformément de Cauchy, donc uniformément convergente sur I . \square

Bien sûr, si CVN et CVU ont deux noms différents, c'est que ces notions ne sont pas équivalentes. Il existe des séries uniformément convergentes mais pas normalement convergentes. Comme pour montrer qu'il y a des séries numériques convergentes mais pas absolument convergentes, il faut aller chercher un exemple du côté des séries qui changent de signe. Étudions en détail deux exemples clef. *Les méthodes sont à retenir.*

Exemple 2.15. Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{(-1)^n}{n+x^2}$, qui satisfait :

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{1}{n+x^2} = \frac{1}{n}.$$

La série harmonique $(\sum \frac{1}{n})$ diverge, donc $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ n'est pas normalement convergente sur \mathbb{R} . Montrons qu'elle y est en revanche uniformément convergente.

Tout d'abord, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\frac{1}{n+x^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite positive décroissante qui tend vers 0, donc d'après le critère des séries alternées (CSA), $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n+x^2})$ converge. Ceci montre la CVS de $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ sur \mathbb{R} . Pour étudier la CVU, intéressons-nous aux restes. Le CSA nous donne une autre information importante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |R_n(x)| \leq |f_{n+1}(x)|,$$

(le reste d'ordre n d'une série alternée est inférieur en valeur absolue à la valeur absolue de son premier terme). Il suffit donc de vérifier que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers la fonction nulle, ce qui est bien le cas :

$$\forall n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x)| \leq \frac{1}{n}$$

et $(\frac{1}{n})_n$ est une suite indépendante de x et qui tend vers 0 (attention, ici c'est bien la *suite* qu'on considère, et plus la série).

On pourrait plus généralement énoncer un *critère des séries de fonctions alternées* (exercice : trouver et démontrer un tel énoncé) mais dans ce cours on préfère ne retenir que la méthode. De la même façon, on peut exploiter la transformation d'Abel pour démontrer une CVU dans le cas de non CVN. Commençons par rappeler ce critère :

Théorème 2.16 (Critère d'Abel). *Soient $(\sum_{n \geq n_0} u_n)$ et $(\sum_{n \geq n_0} v_n)$ deux séries numériques telles que*

- *(u_n) est une suite réelle décroissante convergeant vers 0 ;*
- *la suite $(V_n) = (\sum_{k=n_0}^n v_k)$ est bornée (son module est majoré par un réel C).*

Alors la série $(\sum_{n \geq n_0} u_n v_n)$ converge et son reste d'ordre m , R_m , satisfait : $|R_m| \leq 2Cu_{m+1}$.

Démonstration. Le coeur de la preuve est la *transformation d'Abel*, qui s'apparente à une "intégration par parties discrète". Si u et v étaient des fonctions C^1 et non des suites, on aurait sur tout segment :

$$(*) \quad \int uv = [uV] - \int u'V,$$

avec V une primitive de v . Pour la suite (v_n) , l'équivalent de la primitive est la suite des sommes partielles $(V_n) = (\sum_{k=n_0}^n v_k)$, et pour la suite (u_n) , le rôle de la dérivée est joué par la suite des "taux d'accroissement" $(u'_n) = (u_{n+1} - u_n)$. On a alors pour tous $n, m \geq n_0$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=m+1}^n u_k v_k + \sum_{k=m+1}^n u'_k V_k &= \sum_{k=m+1}^n u_k (V_k - V_{k-1}) + \sum_{k=m+1}^n (u_{k+1} - u_k) V_k \\ &= - \sum_{k=m+1}^n u_k V_{k-1} + \sum_{k=m+2}^{n+1} u_k V_{k-1} \\ &= u_{n+1} V_n - u_{m+1} V_m \quad (= "[uV]"), \end{aligned}$$

soit

$$\sum_{k=m+1}^n u_k v_k = (u_{n+1} V_n - u_{m+1} V_m) - \sum_{k=m+1}^n u'_k V_k$$

qui est l'équivalent séquentiel de (*). La suite (V_n) étant bornée et (u_n) tendant vers 0, la suite $(u_{n+1}V_n)$ converge vers 0. En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$|u'_k V_k| = (u_k - u_{k+1})|V_k| \leq C(u_k - u_{k+1}),$$

Or la série $(\sum(u_k - u_{k+1}))$ est convergente (télescopique avec (u_n) convergente), donc par comparaison de séries à TG positif, $(\sum u'_k V_k)$ est absolument convergente. En particulier, $\sum_{k=m+1}^n u'_k V_k$ admet une limite quand n tend vers $+\infty$, et celle-ci satisfait :

$$\left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} u'_k V_k \right| \leq C \sum_{k=m+1}^{+\infty} (u_k - u_{k+1}) = C u_{m+1}.$$

Ceci montre bien que $\sum_{k=m+1}^n u_k v_k$ a une limite quand n tend vers $+\infty$, donc que la série $(\sum u_n v_n)$ converge, et que ses restes satisfont pour tout m :

$$\left| \sum_{k=m+1}^{+\infty} u_k v_k \right| = \left| -u_{m+1} V_m - \sum_{k=m+1}^{+\infty} u'_k V_k \right| \leq 2C u_{m+1},$$

ce qu'on voulait. □

Exemple 2.17. Utilisons ce résultat pour étudier la convergence de la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ avec $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{\cos nx}{n}$.

Remarquons d'abord qu'on n'a pas convergence normale sur \mathbb{R} car comme dans l'exemple précédent, pour tout $n \geq 1$, $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n}$, donc $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n\|_\infty)$ diverge.

Étudions donc la convergence simple. Pour $x \in 2\pi\mathbb{Z}$, $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x)) = (\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n})$ est divergente. Pour $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, montrons que $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x))$ converge grâce au critère d'Abel. Posons $(u_n)_n = (\frac{1}{n})_n$, $(v_n)_n = (\cos(nx))_n$ et $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$ (x étant fixé). La suite réelle $(u_n)_n$ est décroissante et tend vers 0. vérifions que la suite (V_n) est bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^n \cos(kx) \\ &= \sum_{k=1}^n \operatorname{Re}(e^{ikx}) \\ &= \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikx} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{ix} \sum_{k=0}^{n-1} e^{ikx} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} \right) \quad \text{car } e^{ix} \neq 1 \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{ix} \frac{e^{inx/2}(e^{-inx/2} - e^{inx/2})}{e^{ix/2}(e^{-ix/2} - e^{ix/2})} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(e^{i(n-1)x/2} \frac{2i \sin(nx/2)}{2i \sin(x/2)} \right) \\ &= \cos\left(\frac{n-1}{2}x\right) \frac{\sin(\frac{n}{2}x)}{\sin(\frac{x}{2})}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|V_n| \leq \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})} =: C(x)$ puisque $|\cos|$ et $|\sin|$ sont majorés par 1. La suite $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc bornée et le critère d'Abel montre donc que $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n(x))$ converge. Ainsi,

$(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. La convergence n'y est pas normale car sur ce sous-ensemble I de \mathbb{R} encore, $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \|f_n\|_{\infty, I}) = (\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n})$. En fait, pour tout sous-ensemble I de \mathbb{R} contenant un intervalle ouvert non vide, on peut vérifier que pour tout n assez grand, $\|f_n\|_{\infty, I} = \frac{1}{n}$, car $\cos(nx)$ prend la valeur 1 sur I , et on n'a donc pas convergence normale sur I .

Étudions la convergence uniforme. La seconde partie du critère d'Abel nous dit que pour tout $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$,

$$(**) \quad |R_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{+\infty} f_k(x) \right| \leq 2 \frac{C(x)}{n}.$$

Malheureusement $C : x \mapsto \frac{1}{\sin(\frac{x}{2})}$ n'est pas majoré sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Il l'est en revanche sur $J_\varepsilon = [\varepsilon, 2\pi - \varepsilon] + 2\pi\mathbb{Z}$ pour tout $\varepsilon > 0$, par $c = \frac{1}{\sin(\frac{\varepsilon}{2})}$. Ainsi,

$$\|R_n\|_{\infty, J_\varepsilon} \leq \frac{2c}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc la suite des restes converge uniformément vers 0 sur J_ε , donc série de fonctions $(\sum f_n)$ converge uniformément sur J_ε . On peut vérifier que la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ (ce qui précède ne le montre pas car rien ne nous dit que $(**)$ soit la meilleure majoration possible des restes).

II Propriétés de la somme

Comme dans le chapitre précédent, on s'intéresse maintenant aux propriétés préservées ou non par passage à la somme infinie. Les énoncés suivants ne sont que des traductions de ceux du chapitre précédent en termes de séries.

II.1 Continuité

Théorème 2.18. Si $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVU sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en $t_0 \in I$ alors $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est continue en t_0 :

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lim_{t \rightarrow t_0} f_k(t) \right).$$

Démonstration. On applique le théorème du chapitre précédent à la suite de fonctions des sommes partielles, qui sont toutes continues en t_0 comme sommes *finies* de fonctions continues en t_0 par hypothèse. \square

Exercice 2.19. Trouver un contre-exemple dans le cas où la convergence est supposée seulement simple.

II.2 Intégrales

Théorème 2.20. Si $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVU sur $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[a, b]$ (de sorte que, d'après le paragraphe précédent, $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est continue sur $[a, b]$), alors la série numérique $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \int_a^b f_n(t) dt)$ converge et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\int_a^b f_k(t) dt \right) = \int_a^b \left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(t) \right) dt.$$

Démonstration. Exercice ! \square

On parle dans ce cas d'intégration terme à terme.

II.3 Dérivabilité

Théorème 2.21. Soit $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ une suite de fonctions de I intervalle borné dans \mathbb{K} telle que :

- $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVS sur I ,
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est C^1 sur I ,
- $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n)$ CVU sur I .

Alors $(\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n)$ CVU sur I , $S = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k$ est C^1 et $S' = \sum_{k=0}^{+\infty} (f'_k)$, i.e.

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} f_k \right)' = \sum_{k=0}^{+\infty} (f'_k).$$

On parle dans ce cas de *dérivation terme à terme*.

Démonstration. Exercice! □

II.4 Étude d'un exemple célèbre

Pour finir, nous allons appliquer les résultats précédents à une série de fonctions extrêmement célèbre, ayant pour somme la *fonction ζ de Riemann*. Pourquoi est-elle célèbre? Allez voir sur Wikipedia!

Pour tout $n \geq 1$, on pose $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n^x}$. On commence par étudier la CVS de $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$. D'après le critère de Riemann, la série numérique $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^x})$ converge si et seulement si $x > 1$, donc $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ converge simplement sur $]1, +\infty[$. Sa somme est notée

$$\zeta : x \in]1, +\infty[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Que peut-on dire de cette fonction?

Montrons que la convergence de $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ est normale sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 1$, mais pas sur $I =]1, +\infty[$.

On commence par la seconde affirmation. Pour tout $n \geq 1$, $\|f_n\|_{\infty, I} = \sup_{x \in I} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n}$ (f_n est strictement décroissante sur I), et $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n})$ est divergente donc $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ ne converge pas normalement sur I . On peut en fait montrer que la convergence n'est pas non plus uniforme sur I . En effet, chaque $S_n = \sum_{k=1}^n f_k$ admet une limite finie $l_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ en 1, donc si la convergence était uniforme, d'après le théorème 1.32, la suite $(l_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ serait convergente, ce qui n'est pas le cas.

Soit maintenant $\alpha > 1$. Pour tout $n \geq 1$, $\|f_n\|_{\infty, [\alpha, +\infty[} = \sup_{x \in [\alpha, +\infty[} \frac{1}{n^x} = \frac{1}{n^\alpha}$, et $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha})$ est convergente donc $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n)$ converge normalement, et donc uniformément, sur $[\alpha, +\infty[$. Comme, pour tout $n \geq 1$, $f_n : x \in I \mapsto \frac{1}{n^x} = \exp(-x \ln(n))$ est continue sur I (comme composée de fonctions continues), ζ est également continue sur I .

Étudions maintenant la dérivabilité. Pour tout $n \geq 1$, f_n est C^1 sur I , de dérivée $f'_n : x \mapsto -\ln(n) \exp(-x \ln(n)) = -\frac{\ln(n)}{n^x}$. Grâce aux séries de Bertrand, par le même procédé que ci-dessus, on peut montrer que $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f'_n)$ converge normalement donc uniformément sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 1$. Le théorème de dérivation terme à terme 2.21 montre alors que ζ est C^1 sur $[\alpha, +\infty[$ pour tout $\alpha > 1$, donc en fait C^1 sur $]1, +\infty[$, et que ζ' est la fonction $x \in I \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln(n)}{n^x}$.

On peut finalement montrer par récurrence que ζ est C^∞ sur I et satisfait :

$$\forall p \geq 1, \quad \forall x \in]1, +\infty[, \quad \zeta^{(p)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln(n))^p}{n^x}.$$

Chapitre 3

Séries entières

Nous avons déjà rappelé que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

Vous avez également vu en MAT302 que l'exponentielle, définie comme l'unique fonction solution de l'équation différentielle $y' = y$ avec condition initiale $y(0) = 1$, ou comme la bijection réciproque de $\ln : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ (elle-même définie comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ s'annulant en 1), satisfait :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Ainsi, les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et \exp sont chacune la somme d'une série de fonctions d'un type particulier, dont le terme général est de la forme $x \mapsto a_n x^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite numérique. Nous allons voir qu'il existe des outils spécifiques à l'étude de ces séries de fonctions particulières, appelées *séries entières*, et que leurs sommes sont des fonctions elles aussi particulières. Elles sont notamment C^∞ sur leur *intervalle ouvert de convergence*.

Le *développement en série entière* de la fonction \exp ci-dessus a été démontré en MAT302 à partir des développements de Taylor en 0 de \exp à tout ordre :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

en montrant qu'à x fixé, la suite des restes tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On peut alors se demander si la même chose est vraie pour toute fonction C^∞ . Nous verrons que ce n'est pas le cas, mais il a fallu un certain temps aux mathématiciens pour s'en rendre compte !

I Séries entières, rayon, disque et domaine de convergence

I.1 Définitions

Définition 3.1. On appelle *série entière* une série de fonctions dont le terme général est de la forme $z \in \mathbb{C} \mapsto a_n z^n$, où $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite complexe. On note abusivement une telle série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$.

Pourquoi abusivement ? Car strictement parlant, $a_n z^n$ est un nombre, pas une fonction. Mais il s'agit là d'un amalgame courant, un peu comme celui consistant à identifier polynôme et fonction polynomiale associée, et qui permet ici d'alléger les notations.

Notons qu'ici les fonctions intervenant dans la série sont à variable complexe, alors que nous nous étions restreints jusqu'ici aux fonctions de la variable réelle. Cela ne change rien ! Les définitions de convergence simple et uniforme sont identiques !

Exemple 3.2. $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n} z^n)$ est une série entière. Ici, $a_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

Exemple 3.3. $(\sum_{n \in \mathbb{N}} n z^{2n})$ peut également être vue comme une série entière, mais pour cela il faut la réécrire de sorte que l'indice de sommation coïncide avec la puissance de z . La série entière en question est $\sum_{k \in \mathbb{N}} a_k z^k$ avec $a_k = k/2$ si k est pair et 0 si k est impair.

Étant donnée une suite $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la première question naturelle qui se pose est : que peut-on dire de l'ensemble $\mathcal{D}(a)$ des $z \in \mathbb{C}$ tels que la série *numérique* $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ converge, appelé *domaine de convergence de la série entière* ? La réponse passe par la notion de *rayon de convergence*. Pour le définir, on commence par introduire deux nouvelles notations : pour tout $r \in \mathbb{R}_+$, on note

$$D(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\} \quad \text{et} \quad \bar{D}(0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$

les disques *ouvert* et *fermé* centrés en 0 et de rayon r dans \mathbb{C} . On notera aussi abusivement $D(0, +\infty) = \bar{D}(0, +\infty) = \mathbb{C}$.

Exemple 3.4. Considérons $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} = ((-2)^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Étant donné $z \in \mathbb{C}$, $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n) = (\sum_{n \in \mathbb{N}} (-2z)^n)$ converge si et seulement si $|-2z| < 1$ (série géométrique), i.e. ssi $|z| < \frac{1}{2}$. Autrement dit, $\mathcal{D}(a) = D(0, \frac{1}{2})$.

Considérons maintenant $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Si $|z| > 1$, $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z^n)$ diverge grossièrement (son TG ne tend pas vers 0). Si $|z| < 1$, elle converge absolument (par comparaison à une série géométrique convergente). Si $|z| = 1$, i.e. z de la forme $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, elle diverge si $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$ (i.e. si $z = 1$), et on peut montrer par la méthode d'Abel qu'elle converge si $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$. Finalement, $\mathcal{D}(a) = \bar{D}(0, 1) \setminus \{1\}$ (en particulier $\mathcal{D}(a)$ contient $D(0, 1)$).

Considérons enfin $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\frac{1}{3^n n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$. Étant donné $z \in \mathbb{C}$, $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} a_n z^n) = (\sum_{n \in \mathbb{N}^*} (\frac{z}{3})^n \frac{1}{n^2})$ converge si et seulement si $|\frac{z}{3}| \leq 1$ (à justifier), i.e. ssi $|z| \leq 3$. Autrement dit, $\mathcal{D}(a) = \bar{D}(0, 3)$.

Dans les trois cas, le domaine de convergence est compris entre un disque ouvert et un disque fermé *de même rayon*, le fameux “rayon de convergence” :

Définition - Proposition 3.5. Étant donnée une série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$, on définit son *rayon de convergence*, noté R_a , par

$$R_a = \sup_{z \in \mathcal{D}(a)} |z| \quad \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

et on a :

$$D(0, R_a) \subset \mathcal{D}(a) \subset \bar{D}(0, R_a);$$

Dans les trois exemples ci-dessus, $R_a = \sup_{z \in \mathcal{D}(a)} |z|$ vaut respectivement $\frac{1}{2}$, 1 et 3, et on a bien les inclusions voulues. Dans ces cas, on a déterminé $\mathcal{D}(a)$ et on en a déduit le rayon de convergence. Mais en général, c'est dans l'autre sens que ça se passe : on va voir des méthodes très efficaces pour déterminer le rayon de convergence, et on en déduira *presque* le domaine de convergence grâce à l'encadrement de la partie “proposition” ci-dessus.

Notons qu'on peut avoir $R_a = 0$ (ex : $(a_n) = (n^n)$) et $R_a = +\infty$ (ex : $(a_n) = (\frac{1}{n^n})$).

Démonstration. L'inclusion de droite est immédiate : si $R_a = +\infty$, elle est triviale, et sinon, R_a est un majorant de $\{|z|, z \in \mathcal{D}(a)\}$, autrement dit : pour tout $z \in \mathcal{D}(a)$, $|z| \leq R_a$, ce qui signifie précisément que $\mathcal{D}(a)$ est inclus dans $\bar{D}(0, R_a)$.

Montrons l'autre inclusion. Elle est immédiate si $R_a = 0$ car alors $D(0, R_a) = \emptyset$. On suppose donc dorénavant $R_a > 0$. Soit $z' \in D(0, R_a)$, i.e. tel que $|z'| < R_a$. On veut montrer que $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z')^n)$ converge. Par caractérisation du sup, il existe $z \in \mathcal{D}(a)$ tel que $|z'| < |z| < R_a$

(en particulier $z \neq 0$). On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$: $a_n(z')^n = a_n z^n (\frac{z'}{z})^n$. Comme $z \in \mathcal{D}(a)$, $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ converge, donc en particulier $(a_n z^n)_n$ est une suite bornée. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout n , $|a_n z^n (\frac{z'}{z})^n| \leq M |\frac{z'}{z}|^n$, terme général d'une série géométrique convergente puisque $|\frac{z'}{z}| < 1$. Par comparaison de séries numériques à terme général positif, $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z')^n)$ converge absolument, donc converge, i.e. $z' \in \mathcal{D}(a)$. \square

On a en fait démontré au passage le lemme suivant, à retenir :

Lemme 3.6. *Si pour un complexe z la suite $(a_n z^n)_n$ est bornée, alors pour tout $z' \in \mathbb{C}$ tel que $|z'| < |z|$, la série numérique $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z')^n)$ est absolument convergente.*

Ceci va notamment nous permettre de donner d'autres caractérisations bien utiles du rayon de convergence :

Proposition 3.7. *Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe et R_a le rayon de cv de la série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$. On définit*

$$E_{\text{borné}}(a) = \{z \in \mathbb{C} : \text{la suite numérique } (a_n z^n)_n \text{ est bornée}\},$$

$$E_0(a) = \{z \in \mathbb{C} : \text{la suite numérique } (a_n z^n)_n \text{ tend vers } 0\}$$

$$\text{et } E_{CVA}(a) = \{z \in \mathbb{C} : \text{la série numérique } (\sum a_n z^n) \text{ CVA}\}.$$

Alors

$$D(0, R_a) \subset E_{CVA}(a) \subset \mathcal{D}(a) \subset E_0(a) \subset E_{\text{borné}}(a) \subset \bar{D}(0, R_a).$$

En particulier, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| < R_a \Rightarrow (\sum a_n z^n) \text{ CVA} \quad \text{et} \quad |z| > R_a \Rightarrow (\sum a_n z^n) \text{ diverge grossièrement}.$$

Ces inclusions montrent en outre que :

$$R_a = \sup_{z \in E_{\text{borné}}(a)} |z| = \sup_{z \in E_0(a)} |z| = \sup_{z \in E_{CVA}(a)} |z|.$$

Exemple 3.8. Pour $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = (\frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$, on vérifie que $E_0(a) = E_{\text{borné}}(a) = \bar{D}(0, 1)$, on a déjà vu que $\mathcal{D}(a) = \bar{D}(0, 1) \setminus \{1\}$, et on vérifie que $E_{CVA}(a) = D(0, 1)$, et ces ensembles vérifient bien les inclusions annoncées.

Démonstration. On a déjà montré l'inclusion de gauche dans la preuve précédente. De plus, étant donné $z \in \mathbb{C}$,

$$(\sum a_n z^n) \text{ CVA} \Rightarrow (\sum a_n z^n) \text{ CV} \Rightarrow (a_n z^n)_n \text{ tend vers } 0 \Rightarrow (a_n z^n)_n \text{ est bornée}$$

ce qui donne les inclusions

$$E_{CVA}(a) \subset \mathcal{D}(a) \subset E_0(a) \subset E_{\text{borné}}(a).$$

Reste l'inclusion de droite, qui découle du lemme précédent. En effet, si $z \in E_{\text{borné}}$, pour tout $z' \in \mathbb{C}$ tel que $|z'| < |z|$, $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n (z')^n)$ CVA, donc CV, donc $z' \in \mathcal{D}(a)$, donc $D(0, |z|)$ est inclus dans $\mathcal{D}(a)$, donc dans $\bar{D}(0, R_a)$, donc $|z| \leq R_a$. Ceci montre que $E_{\text{borné}}(a) \subset \bar{D}(0, R_a)$.

La fin du lemme (l'égalité des sup et de R_a) découle directement des inclusions : si un ensemble E_* satisfait $D(0, R_a) \subset E_* \subset \bar{D}(0, R_a)$, d'une part, pour tout $z \in E_*$, $z \in \bar{D}(0, R_a)$, i.e. $|z| \leq R_a$ donc $\sup_{z \in E_*} |z| \leq R_a$. D'autre part, pour tout $R \in]0, R_a[$, R appartient à $D(0, R_a)$ donc à E_* , donc $\sup_{z \in E_*} |z| \geq |R| = R$, et ce pour tout $R < R_a$, donc $\sup_{z \in E_*} |z| \geq R_a$, ce qui conclut. \square

On peut utiliser cette proposition pour déterminer facilement le r.c. dans certains cas, de la façon suivante :

Si on trouve un $z \in \mathbb{C}$ tel que

$(a_n z^n)$ est bornée	alors $R_a \geq z $.
ou $(a_n z^n)$ CV vers 0	
ou $(\sum a_n z^n)$ CV	
ou $(\sum a_n z^n)$ CVA	

Inversement,

si on trouve un $z \in \mathbb{C}$ tel que

$(a_n z^n)$ n'est pas bornée	alors $R_a \leq z $.
ou $(a_n z^n)$ ne tend pas vers 0	
ou $(\sum a_n z^n)$ DV	
ou $(\sum a_n z^n)$ DV	

Exemple 3.9. Retrouvons le rayon de cv R de $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{z^n}{n})$. $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n})$ CV donc $R \geq |-1| = 1$, mais $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n})$ DV (série harmonique) donc $R \leq 1$, et on retrouve bien $R = 1$.

Remarque 3.10. On voit d'après l'exemple ci-dessus qu'on ne peut en général rien dire de la convergence de la série numérique $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ pour z tel que $|z| = R_a$.

I.2 (Autres) méthodes de détermination du rayon de convergence

I.2.a Règle de d'Alembert

Rappel 3.11 (Règle de d'Alembert pour les séries numériques). Si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et satisfait $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

- Si $l < 1$, $(\sum u_n)$ CVA ;
- Si $l > 1$, $(\sum u_n)$ DV ;

(et si $l = 1$ on ne peut rien dire en général).

Corollaire 3.12 (Règle de d'Alembert pour les séries entières). Soit $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ une série entière telle que $a_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $R_a = \frac{1}{l}$ (avec la convention $\frac{1}{0} = +\infty$ et $\frac{1}{+\infty} = 0$).

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{C}^*$ fixé. Posons $(u_n)_n = (a_n z^n)_n$. À partir d'un certain rang, $u_n \neq 0$, et

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \left| \frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n} \right| = \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |z| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} l|z| \text{ (avec la convention } +\infty|z| = +\infty \text{)}.$$

Donc si $l|z| < 1$ (vrai quel que soit z si $l = 0$, jamais vrai si $l = +\infty$), i.e. si $|z| < \frac{1}{l}$, $(\sum u_n)$ CVA, i.e. $(\sum a_n z^n)$ CVA. Et si $l|z| > 1$ (vrai quel que soit z si $l = +\infty$, jamais vrai si $l = 0$), i.e. si $|z| > \frac{1}{l}$, $(\sum u_n)$ DV, i.e. $(\sum a_n z^n)$ DV. Ceci montre bien que $R_a = \frac{1}{l}$. \square

Exemple 3.13. Considérons la série entière $(\sum n^3 z^n)$. Ici,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^3}{n^3} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

donc le rayon de cv est $\frac{1}{1} = 1$. C'est plus généralement le cas pour toute série entière de la forme $(\sum P(n)z^n)$ avec P fonction polynomiale (exercice).

Exemple 3.14. Considérons la série entière $(\sum \frac{z^n}{n!})$. Ici,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc le rayon de cv est $+\infty$. La somme de cette série entière est appelée *exponentielle complexe* et nous la reverrons plusieurs fois au cours du chapitre.

I.2.b Règle de Cauchy

Rappel 3.15 (Règle de Cauchy pour les séries numériques). Si $(u_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfait $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n|^{1/n} = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

— Si $l < 1$, $(\sum u_n)$ CVA ;

— Si $l > 1$, $(\sum u_n)$ DV ;

(et si $l = 1$ on ne peut rien dire en général).

Corollaire 3.16 (Règle de Cauchy pour les séries entières). Soit $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ une série entière. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n|^{1/n} = l \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $R_a = \frac{1}{l}$ (avec la même convention que précédemment).

Démonstration. Exercice. □

I.3 Opérations / comparaisons et rayon de convergence

I.3.a Combinaison linéaire

Il est immédiat (l'écrire !) que pour toute série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{C}^*$, le rayon de cv de $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha a_n z^n)$ est le même que celui de $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$.

Proposition 3.17 (Somme). Soient $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ et $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n)$ des séries entières de rayons de cv respectifs R_a et R_b . Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| < \min(R_a, R_b) \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n \text{ CV et } \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

En particulier, le r.c. R_{a+b} de la série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n)$ satisfait :

$$R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b), \quad \text{avec égalité si } R_a \neq R_b.$$

Démonstration. Exercice. □

I.3.b Produit

Déjà, quelle est la notion de produit naturelle pour les séries entières ? On veut définir le produit $(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n)$ des séries entières $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ et $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n)$ de sorte que, partout où cela a un sens,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

On peut “deviner” les coefficients c_n convenables grâce au “calcul” non rigoureux suivant :

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \times (b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) z^2 + \dots$$

ce qui motive la définition suivante :

Définition 3.18. On définit la série entière produit de $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ et $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n)$ comme la série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n)$ avec

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}.$$

Proposition 3.19 (Produit). Soient $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ et $(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n z^n)$ des séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b , et soit $(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n)$ la série entière produit. Alors pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$|z| < \min(R_a, R_b) \Rightarrow \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n z^n \right) \text{ CV et } \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

En particulier, le rayon de cv R de la série produit satisfait $R \geq \min(R_a, R_b)$.

La preuve repose sur la notion de produit de Cauchy de séries numériques, et sur la proposition suivante le concernant. Étant données deux telles séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$, leur produit de Cauchy est la série $(\sum w_n)$ avec pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$. On a alors le résultat suivant :

Proposition 3.20. Si $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ sont deux séries numériques absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $(\sum w_n)$ l'est aussi, et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \right).$$

On admet ce résultat, et on laisse en exercice la preuve de la proposition 3.19 qui en découle. Notons au passage une autre conséquence de ce résultat concernant l'exponentielle complexe définie précédemment :

Proposition 3.21. Pour tous $x, y \in \mathbb{C}$, $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Remarque 3.22. Pour l'exponentielle réelle, on peut prouver ce résultat en vérifiant qu'à y fixé, $x \mapsto \exp(x + y)$ et $x \mapsto \exp(x) \times \exp(y)$ sont toutes deux solutions de l'ED $f' = f$ avec condition initiale $f(0) = \exp(y)$, et en invoquant l'unicité d'une telle solution.

Preuve de la proposition 3.21. On a vu précédemment que pour tous $x, y \in \mathbb{C}$, les séries numériques $(\sum \frac{x^n}{n!})$ et $(\sum \frac{y^n}{n!})$ convergeaient absolument, le rayon de la série entière $(\sum \frac{z^n}{n!})$ étant infini. Or le produit de Cauchy de ces séries numériques est la série de TG

$$w_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \frac{\binom{n}{k}}{n!} x^k y^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x + y)^n}{n!}$$

(formule du binôme). La proposition 3.20 affirme que cette série converge absolument et que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x + y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{y^n}{n!} \right),$$

ce qu'on voulait. □

I.3.c Comparaison

Proposition 3.23. Si $a_n = O(b_n)$ (i.e. s'il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|a_n| \leq C|b_n|$) alors $R_a \geq R_b$.

Démonstration. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R_b$, $(\sum_n |b_n z^n|)$ CV donc par comparaison $(\sum_n |a_n z^n|)$ aussi, donc $D(0, R_b) \subset E_{\text{CVA}}(a) \subset \bar{D}(0, R_a)$. Donc $R_a \geq R_b$. □

Exemple 3.24. Déterminons le rayon de cv R de $(\sum n \cos(\frac{n\pi}{12}) z^n)$. $(\cos(\frac{n\pi}{12}))_n$ est bornée donc $n \cos(\frac{n\pi}{12}) = O(n)$, et le rayon de cv de $\sum n z^n$ est 1, donc $R \geq 1$. De plus, $(a_n)_n = (n \cos(\frac{n\pi}{12}))_n$ ne converge pas vers 0 (la sous-suite $(u_{24k})_k = (24k)_k$ tend vers $+\infty$), donc $R \leq 1$. Finalement, $R = 1$.

Corollaire 3.25. — Si $|a_n| \sim |b_n|$, $R_a = R_b$.

— Si $|a_n| \leq |b_n| \leq |c_n|$ et $R_a = R_c = R$ alors $R_b = R$.

Exercice 3.26. Démontrer le corollaire ci-dessus.

Exemple 3.27. $\ln(1 + \frac{1}{n}) \sim \frac{1}{n}$ donc le rayon de cv de $(\sum \ln(1 + \frac{1}{n})z^n)$ est égal à celui de $(\sum \frac{z^n}{n})$, i.e. 1.

II Propriétés de la somme

Dans toute cette partie, on considère une série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$.

II.1 Convergence

On note S la somme de la série entière sur son domaine de convergence $\mathcal{D}(a)$, c'est-à-dire la fonction $z \in \mathcal{D}(a) \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$. On s'intéresse ici à sa restriction au domaine *réel* de convergence $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}(a) = \mathcal{D}(a) \cap \mathbb{R}$, qui satisfait : $] -R_a, R_a[\subset \mathcal{D}_{\mathbb{R}}(a) \subset [R_a, R_a]$.

Proposition 3.28. Pour tout $r < R_a$, la série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ converge normalement sur $[-r, r]$.

Rappelons qu'il y a là un abus de notation ; ce qui précède signifie que la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n)$, avec $u_n : x \mapsto a_n x^n$, converge normalement sur $[-r, r]$ (on prendra en général la lettre x pour désigner une variable réelle).

Remarque 3.29. En général, on n'a pas CVN (ni CVU) sur l'intervalle ouvert de convergence $] -R_a, R_a[$ (où il y a par contre toujours CVS vers S). Penser par exemple à la série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n)$, i.e. la série de fonctions $(\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n)$ avec $u_n : x \mapsto x^n$ qui ne peut converger uniformément sur $] -1, 1[$ car toutes les fonctions u_n y sont bornées alors que la somme $S : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{1}{1-x}$ ne l'est pas.

Démonstration. Soit $r < R_a$. Pour tout $x \in [-r, r]$, $|a_n x^n| \leq |a_n| r^n$, indépendant de x et terme général d'une série convergente par caractérisations de R_a , ce qui montre la CVN sur $[-r, r]$. \square

II.2 Continuité

Corollaire 3.30. S est continue sur $] -R_a, R_a[$.

Démonstration. Pour tout $r < R_a$, le TG $u_n : x \mapsto a_n x^n$ est polynomial donc continu sur $[-r, r]$, et la série CVN donc CVU sur $[-r, r]$, donc par le théorème de continuité de la somme du chapitre précédent, S est continue sur $[-r, r]$. Ceci étant vrai pour tout $r < R_a$, S est continue sur $] -R_a, R_a[$. \square

II.3 Régularité

Définition 3.31. On définit la série entière dérivée de $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n)$ comme $(\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1) a_{n+1} z^n)$.

Elle est obtenue par dérivation terme à terme de la série initiale (ce qui donne $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} n a_n z^{n-1})$) et changement d'indice.

Proposition 3.32. La série dérivée a le même rayon de cv que la série initiale. La somme de cette dernière, S , est dérivable sur $] -R_a, R_a[$ et la dérivée de cette somme est la somme de la série dérivée :

$$\forall x \in] -R_a, R_a[, \quad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k.$$

Démonstration. Le rayon de cv R' de $(\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)a_{n+1}z^n)$ est le même que celui de $(\sum_{n \in \mathbb{N}} (n+1)a_{n+1}z^{n+1}) = (\sum_{k \in \mathbb{N}} ka_k z^k)$ (multiplier le TG par $z (\neq 0)$ ne change rien à la convergence). Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|a_n| \leq |na_n|$, donc $R' \leq R_a$. Inversement, pour tout $r < R_a$, prenons $r' \in]r, R_a[$. Alors $na_n r^n = (n(\frac{r}{r'})^n) (a_n(r')^n)$, et les deux termes du produit tendent vers 0 par croissance comparée d'une part et définition de R_a d'autre part. Donc $R' \geq r$. Ceci étant vrai pour tout $r < R_a$, on obtient $R' \geq R_a$ et finalement $R' = R_a$.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$. Ces fonctions sont C^1 sur $] -R_a, R_a[$, la série $(\sum f_n)$ CVS sur $] -R_a, R_a[$, la série $(\sum f'_n)$ CVN sur $[-r, r]$ pour tout $r < R_a$ d'après ce qui précède et la proposition 3.28, donc par théorème de dérivation terme à terme, S est C^1 sur $] -R_a, R_a[$ et

$$\forall x \in] -R_a, R_a[, \quad S'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} ka_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)a_{k+1} x^k.$$

□

Exemple 3.33. On n'a pas besoin de la proposition pour dire que $S : x \in] -1, 1[\mapsto \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ est C^1 sur $] -1, 1[$, mais celle-ci nous indique par dérivation que

$$\forall x \in] -1, 1[, \quad S'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)x^n.$$

Corollaire 3.34. S est C^∞ sur $] -R_a, R_a[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in] -R_a, R_a[$,

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k) \cdots (n+1) a_{n+k} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} x^n.$$

En particulier, $S^{(k)}(0) = k!a_k$ ou encore $a_k = \frac{S^{(k)}(0)}{k!}$.

Étant donnée une fonction f de classe C^∞ sur un intervalle ouvert contenant 0, on définit sa série de Taylor comme la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$. On vient donc de montrer qu'une fonction qui est la somme d'une série entière est C^∞ et coïncide sur l'intervalle ouvert de convergence avec la somme de sa série de Taylor. On verra dans le paragraphe suivant que ce n'est pas le cas de toutes les fonctions C^∞ .

Corollaire 3.35. Si deux séries entières de rayons de cv non nuls satisfont $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ pour tout x assez petit, alors $a_k = b_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Remarque 3.36. C'est comme pour les polynômes. On ne peut pas écrire une fonction comme somme de série entière de plusieurs façons différentes.

Corollaire 3.37. Soit S la somme d'une série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n)$ (on se restreint à la variable réelle) de rayon de cv non nul. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, S admet pour DL à l'ordre n en 0 :

$$S(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + o(x^n).$$

Démonstration. S est C^∞ au voisinage de 0 donc admet un développement de Taylor à tout ordre :

$$S(x) = \sum_{k=0}^n \frac{S^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n),$$

et on conclut grâce au corollaire 3.34. □

Attention ! La réciproque est fautive : ce n'est pas parce qu'une fonction admet un DL en 0 à tout ordre qu'elle est la somme d'une série entière, comme on le verra dans le paragraphe suivant. Une fonction qui a cette propriété est dite *développable en série entière* (DSE) (au voisinage de 0).

II.4 Application aux équations différentielles

Les théorèmes précédents font des sommes de séries entières des fonctions faciles à dériver, qui enrichissent notre liste de fonctions “classiques” et sont donc tout indiquées pour résoudre des équations différentielles. Considérons par exemple l'équation $y' = y$, avec la condition initiale $y(0) = 1$. Imaginons que nous ne connaissons pas la fonction exponentielle et cherchons une solution parmi les fonctions DSE.

Analyse. Une telle fonction $S : x \in]-R, R[\mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$ est solution si et seulement si

$$S(0) = 1, \text{ i.e. } a_0 = 1, \text{ et } \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \quad \text{sur }]-R, R[,$$

ce qui équivaut à : pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = \frac{a_k}{k+1}$, et finalement, par une récurrence immédiate, $a_k = \frac{1}{k!}$.

Synthèse. On a déjà étudié la série entière correspondante. Elle est de rayon infini, donc sa somme est définie et C^∞ sur \mathbb{R} tout entier. On vient donc de démontrer l'existence d'une solution à l'équation différentielle donnée, définie sur \mathbb{R} , sans passer par la fonction \ln . C'est cette fonction que l'on appelle *fonction exponentielle*. L'unicité de la solution, qui est au programme du lycée, assure qu'elle coïncide avec la bijection réciproque de \ln , qui est également solution.

Plus généralement, les séries entières sont utiles pour trouver des solutions particulières d'équations différentielles, notamment des ED ordinaires du second ordre : $a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$.

II.5 Primitive

On note à nouveau S la somme d'une série entière $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n)$, restreinte à \mathbb{R} .

Théorème 3.38. *La primitive s'annulant en 0 de S s'obtient par intégration terme à terme :*

$$\forall x \in]-R_a, R_a[, \quad \int_0^x S(t) dt = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^{k+1}}{k+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n-1}}{n} x^n$$

(en particulier, la série entière $(\sum_{n \geq 1} \frac{a_{n-1}}{n} x^n)$ a même rayon de cv que $(\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n)$).

Démonstration. Exercice. Se ramener au paragraphe précédent. □

Exemple 3.39. Très utile pour retrouver les DL à tout ordre de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 : cette fonction est la primitive s'annulant en 0 de $x \mapsto \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-x)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k x^k$ sur $] -1, 1[$, donc

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

et d'après 3.37, cela donne les DL suivants de $x \mapsto \ln(1+x)$ en 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^k).$$

III Fonctions développables en séries entières

On se restreint ici aux fonctions d'une variable *réelle* mais on a une définition analogue pour les fonctions d'une variable *complexe*.

III.1 Définition et contre-exemple

Définition 3.40. Soit I un intervalle ouvert contenant 0. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est développable en série entière (DSE) en 0 s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

(ce qui sous-entend en particulier que $] - r, r[\subset I$ et que pour $x \in] - r, r[$, $(\sum_n a_n x^n)$ est une série convergente).

Autrement dit, f est DSE en 0 si f coïncide au voisinage de 0 avec la *somme* d'une série entière (de rayon de convergence nécessairement non nul puisque sa somme est définie au voisinage de 0!).

Définition 3.41. Soit I un intervalle ouvert non vide et $x_0 \in I$. On dit qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est développable en série entière en x_0 si la fonction $h \mapsto f(x_0 + h)$ (définie au voisinage de 0) est développable en série entière en 0, i.e. s'il existe $r > 0$ et une suite $(a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ tels que

$$\forall h \in]-r, r[, \quad f(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k h^k,$$

ou de façon équivalente (en faisant le changement de variable $x = x_0 + h$) :

$$\forall x \in]x_0 - r, x_0 + r[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Définition 3.42. Une fonction qui est DSE en chacun des points de son intervalle de définition est dite *analytique*.

L'étude des fonctions développables en série entière en un point quelconque se ramenant à celle des fonctions développables en série entière en 0, on se restreint à l'étude de ces dernières.

On a déjà vu qu'une fonction DSE (développable en série entière) en 0 était C^∞ au voisinage de 0 et que son DSE (développement en série entière) était donné par sa série de Taylor (en particulier, s'il existe, un DSE est unique). Voyons maintenant qu'il existe des fonctions C^∞ au voisinage de 0 qui ne sont pas DSE. Considérons pour cela la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(cette fonction n'est pas un exemple exotique et anecdotique, elle est très utile notamment pour construire des *fonctions plateau*). Cette fonction est C^∞ sur $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$. En 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^{-y} = 0$ donc f est continue en 0. Elle y est en outre dérivable, de dérivée 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y e^{-y} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}.$$

Puis sur \mathbb{R}_+^* , $f'(x) = \frac{1}{x^2} e^{-1/x}$, donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{-1/x}}{x^3} = \lim_{y \rightarrow +\infty} y^3 e^{-y} = 0 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0},$$

donc f' admet 0 comme dérivée en 0, et on montre de la même façon par récurrence que f est C^∞ sur \mathbb{R} et que toutes ses dérivées en 0 sont nulles. Sa série de Taylor en 0 est donc la série nulle, dont la somme est la fonction nulle. Mais f n'est pas la fonction nulle au voisinage de 0 ! Elle ne coïncide donc pas au voisinage de 0 avec la somme de sa série de Taylor. Elle n'est donc pas développable en série entière en 0.

III.2 Opérations sur les développements en séries entières

Proposition 3.43. *Si des fonctions f et g sont DSE au voisinage d'un point x_0 , avec pour coefficients $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$ respectivement, alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, αf , $f + g$, fg , f' , la primitive de f s'annulant en x_0 sont DSE également, et les coefficients du DSE sont donnés respectivement par*

$$(\alpha a_n)_n, \quad (a_n + b_n)_n, \quad \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right)_n, \quad ((n+1)a_{n+1})_n, \quad \left(\frac{a_{n-1}}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \quad (\text{et } 0 \text{ pour } n=0).$$

III.3 DSE classiques

On a vu que pour tout $x \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On peut en déduire notamment que pour $a \neq 0$,

$$\forall x \in]-|a|, |a|[, \quad \frac{1}{x-a} = -\frac{1}{a} \times \frac{1}{1-\frac{x}{a}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x}{a} \right)^n,$$

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

puis, par intégration terme à terme, que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Pour déterminer un DSE d'une fonction, on peut également utiliser le fait qu'elle satisfait une certaine équation différentielle. Par exemple, on peut montrer grâce aux formules trigo classiques que \cos et \sin satisfont $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$, donc en posant $f = \cos + i \sin$, on a $f' = if$. Comme on l'a fait pour l'exponentielle réelle précédemment, on montre qu'une fonction DSE au voisinage de 0 de la forme $g : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de l'équa diff $y' = iy$ si et seulement si $a_0 = 1$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $a_{k+1} = \frac{ia_k}{k+1}$, soit par une récurrence immédiate, $a_k = \frac{i^k}{k!}$, et donc $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = e^{ix}$ (exponentielle complexe). Or $x \mapsto e^{ix}$ est effectivement DSE en 0 et sur \mathbb{R} tout entier. Ainsi $x \mapsto e^{ix}$ est solution de l'équation différentielle et satisfait la condition initiale. On montre facilement (même sans connaître la théorie des équa diff) qu'il n'y a pas d'autre solution (DSE ou non). On vient donc de montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(*) \quad \cos x + i \sin x = e^{ix}.$$

Au lycée, on *définissait* e^{ix} comme $\cos x + i \sin x$ en "justifiant" la notation exponentielle par le fait que

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}.$$

L'égalité (*) est maintenant un théorème, reliant les fonctions trigonométriques et l'exponentielle complexe, définie plus tôt dans le chapitre.

Mais revenons au DSE de \cos et \sin . Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

(les sommes de droites sont bien définies car si la série numérique $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(ix)^n}{n!}$ est convergente, la série des parties réelles et la série des parties imaginaires convergent) donc par identification des parties réelles et imaginaires :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \quad \text{et} \quad \sin x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Ainsi \cos et \sin sont DSE en 0, de rayon de cv $+\infty$. Et on vérifie qu'elles sont bien sommes de leurs séries de Taylor en 0.

Considérons enfin la fonction $f_\alpha : x \in]-1, +\infty[\mapsto (1+x)^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $\alpha \in \mathbb{N}$, f_α est polynomiale et la formule du binôme donne :

$$f_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\alpha} \binom{\alpha}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\alpha} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k.$$

Cette formule se généralise dans le cas $\alpha \notin \mathbb{N}$ comme suit. On remarque que f_α est C^∞ et satisfait sur $] -1, +\infty[: f'_\alpha(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} = \frac{\alpha}{1+x} f_\alpha(x)$, i.e. est solution de l'équa diff $y' = \frac{\alpha}{1+x} y$, ou encore $(1+x)y' = \alpha y$ avec $y(0) = 1$. Une fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ DSE en 0 est solution de cette équa diff si et seulement si $a_0 = 1$ et

$$\begin{aligned} \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= (1+x) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1) a_{n+1} + n a_n) x^n \end{aligned}$$

donc, par identification des coefficients, si et seulement si

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \alpha a_n = (n+1) a_{n+1} + n a_n, \quad \text{i.e.} \quad a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n,$$

ce qui équivaut, par une récurrence immédiate, à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Étudions le rayon de cv de cette série entière à l'aide de la règle de d'Alembert. Comme $\alpha \notin \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\alpha - n}{n+1} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |0 - 1| = 1,$$

donc le rayon de cv est 1. Comme l'équa diff $(1+x)y' = \alpha y$ a une unique solution valant 1 en 0, on vient de montrer que f_α , cette solution, est DSE en 0 et que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad (1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

On peut en déduire un DSE de arcsin en 0 en utilisant le fait que $\arcsin'(x) = (1-x^2)^{-1/2}$, que l'on sait maintenant développer, puis en intégrant terme à terme.

Chapitre 4

Séries de Fourier

Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que certaines fonctions (très régulières) pouvaient se développer en “combinaisons linéaires infinies” des monômes $x \mapsto x^n$, i.e en *séries entières*, et que cela pouvait notamment servir à résoudre certaines équations différentielles. Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser à un autre type de développement, en *séries de Fourier*, dont les briques élémentaires sont cette fois-ci les fonctions trigonométriques $x \mapsto \cos(nx)$ et $x \mapsto \sin(nx)$. Cette théorie et ses développements jouent un rôle fondamental dans de nombreux domaines des sciences, et interviennent là encore dans la résolution d’équations différentielles. À titre d’exemple, présentons brièvement le problème qui a mené Fourier à s’intéresser à ces objets.¹

Motivation : Fourier et l’équation de la chaleur

Au début du XIXe siècle, Fourier s’est intéressé à la conduction de la chaleur dans une tige de longueur finie, que nous choisirons égale à π pour simplifier les expressions, ce qui ne nuit pas à la généralité : il suffit de changer d’unité de longueur ! On voit donc la tige comme le segment $[0, \pi]$ dans \mathbb{R} . Pour $x \in [0, \pi]$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on note $u(x, t)$ la température au point d’abscisse x de la tige à l’instant t . On s’intéresse au cas où la température est maintenue constante égale à 0 aux extrémités de la tige :

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (\text{condition au bord ou } (CB));$$

et on suppose que la température initiale de long de la tige est donnée par une certaine fonction f (nulle en 0 et π) :

$$\forall x \in [0, \pi], \quad u(x, 0) = f(x) \quad (\text{condition initiale ou } (CI)).$$

Il paraît raisonnable de supposer f continue (et non identiquement nulle sinon on sait résoudre l’équation qui suit), mais on ne fait pas d’autre hypothèse pour l’instant. La question que l’on se pose est : comment évolue la température le long de la tige au cours du temps. La physique nous dit que cette évolution peut être modélisée par l’équation suivante, qui porte sur les dérivées partielles et secondes de u par rapport aux variables x et t , et où nous avons remplacé par 1 les constantes physiques (liées au matériau, etc...) qui devraient y figurer :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (E)$$

On peut montrer que *s’il existe* une solution à $(E) + (CB) + (CI)$, alors celle-ci est unique. On s’intéresse ici à l’existence et au calcul d’une telle solution.

1. Pour plus de détails, on pourra consulter par exemple le manuel *Mathématiques L2* des éditions Pearson Education, et bien sûr Wikipedia !

On commence par chercher les solutions de (E) à variables séparées, i.e. de la forme $(x, t) \mapsto \varphi(x)\psi(t)$ avec $\varphi : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ et $\psi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ (de classe C^2 et C^1 respectivement pour que les dérivées aient un sens). Un tel produit est solution de (E) si et seulement si :

$$\forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+, \quad \varphi(x)\psi'(t) - \varphi''(x)\psi(t) = 0.$$

Supposons dans un premier temps que φ et ψ ne s'annulent pas à l'intérieur de leur domaine de définition. Alors la ligne ci-dessus devient :

$$\forall (x, t) \in]0, \pi[\times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Comme le membre de gauche ne dépend pas de x et que celui de droite ne dépend pas de t , φ et ψ satisfont cette égalité si et seulement si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \alpha \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} = \alpha,$$

ou encore

$$\forall x \in [0, \pi], \quad \varphi''(x) - \alpha\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \psi'(t) = \alpha\psi(t),$$

le passage aux intervalles fermés se justifiant par la continuité de chaque membre.

La seconde égalité équivaut à $\psi = (t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \psi(0)e^{\alpha t})$. Comme on doit avoir, pour tout $x \in [0, \pi]$, $\varphi(x)\psi(0) = f(x)$, avec f non identiquement nulle, $\psi(0)$ est nécessairement non nul, et donc ψ ne s'annule pas (comme prévu).

Concernant la première égalité, la condition au bord impose $\varphi(0)\psi(t) = \varphi(\pi)\psi(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, donc $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$. Rappelons que si $\alpha > 0$, les solutions de l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants $y'' - \alpha y = 0$ sont les fonctions de la forme $x \mapsto ae^{\sqrt{\alpha}x} + be^{-\sqrt{\alpha}x}$, avec $a, b \in \mathbb{R}$, et si $\alpha = 0$, les solutions sont les fonctions affines. Dans les deux cas, on vérifie facilement que toute solution s'annule en au plus un point. Donc nécessairement $\alpha < 0$. Notons $\omega = \sqrt{-\alpha}$. Alors les solutions sont les fonctions de la forme $x \mapsto a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$, avec $a, b \in \mathbb{R}$. Si φ est solution, elle est donc de cette forme. La condition $\varphi(0) = 0$ équivaut alors à $a = 0$, et, comme φ ne peut être identiquement nulle et donc $b \neq 0$, $\varphi(\pi) = 0$ équivaut à $\omega \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, et pour tout $b_n \in \mathbb{R}$, la fonction

$$u_n : (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+ \mapsto b_n \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

est solution de $(E) + (CB)$ (notons que $\varphi_n : x \mapsto b_n \sin(nx)$ s'annule sur $[0, \pi]$ pour $n \geq 2$ contrairement à l'hypothèse temporaire que nous avons faite ci-dessus, mais cette hypothèse ne servait qu'à nous aider dans la résolution, et la fonction ci-dessus n'en est pas moins solution).

En revanche, $u_n(x, 0) = b_n \sin(nx)$ donc à moins que f ne soit de cette forme, on n'a pas encore de solution satisfaisant (CI) . Mais si l'on ne se restreint plus maintenant aux solutions à variables séparées, on peut "superposer" (i.e. additionner) des solutions du type ci-dessus, et comme (E) est une équation linéaire, une telle somme sera encore solution. Ceci dit, f n'a aucune raison d'être une combinaison linéaire (*finie*) des fonctions $x \mapsto \sin(nx)$. En revanche, si l'on pouvait montrer que f est une combinaison *infinie* de telles fonctions, i.e. qu'il existe $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$$

(la convergence de la série faisant partie de l'hypothèse), alors, si tant est que tout converge dans ce qui suit et que l'on puisse appliquer les théorèmes de dérivation terme à terme,

$$u : (x, t) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

serait la solution recherchée.

Nous sommes donc ramenés à nous demander sous quelles conditions une fonction f peut être décomposée comme ci-dessus, comment déterminer les coefficients qui y apparaissent, et à quel type de convergence on a affaire. Ce sont précisément ces questions que nous allons aborder dans ce chapitre.

Des fonctions sur un segment aux fonctions périodiques

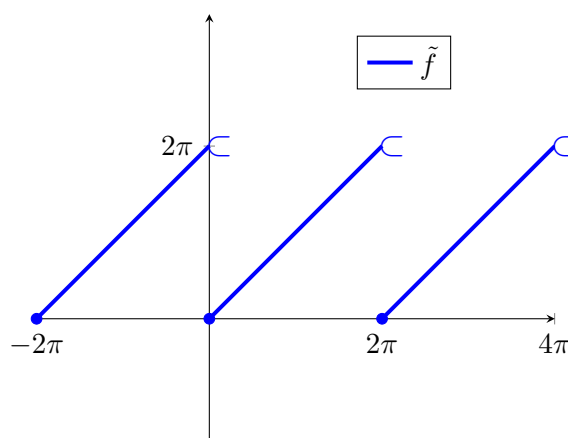
Rappel 4.1. Soit $T \in \mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite T -périodique si pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t + T) = f(t)$. Plus généralement, par une récurrence immédiate, une telle fonction satisfait : $\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, f(t + kT) = f(t)$. Ceci équivaut à dire que son graphe est invariant par translation horizontale de longueur T .

Notons que par imparité des fonctions $x \mapsto \sin(nx)$, si la série numérique $(\sum b_n(f) \sin(nx))$ converge pour tout $x \in [0, \pi]$, elle converge également pour $x \in [-\pi, 0]$. Puis, par 2π -périodicité des fonctions $x \mapsto \sin(nx)$, elle converge en fait pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx)$ est elle aussi 2π -périodique.

Dans ce chapitre, ce ne sont donc en fait pas les fonctions définies sur un segment que nous allons essayer de décomposer en sommes de séries trigonométriques, mais les fonctions périodiques définies sur \mathbb{R} tout entier. Étant donnée une fonction sur un intervalle de longueur T , on peut se ramener à une fonction T -périodique par la deuxième partie du procédé ci-dessus, formalisée dans la proposition suivante :

Proposition 4.2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étant donnée une fonction $f : [\alpha, \alpha + T[\rightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique fonction T -périodique $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ coïncidant avec f sur $[\alpha, \alpha + T[$.

Exemple 4.3. Voici le graphe de la fonction 2π -périodique \tilde{f} coïncidant avec l'identité sur $[0, 2\pi[$:



Exercice 4.4. Si f est continue par morceaux et prolongeable par continuité en $\alpha + T$, \tilde{f} est continue par morceaux. Si f est prolongeable en une fonction continue sur $[\alpha, \alpha + T]$, toujours notée f , telle que $f(\alpha) = f(\alpha + T)$, alors \tilde{f} est continue sur \mathbb{R} .

Preuve de la proposition. $\mathbb{R} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{Z}} [\alpha + kT, \alpha + (k+1)T[$ (union disjointe). On peut donc définir une fonction \tilde{f} par : si $t \in [\alpha + kT, \alpha + (k+1)T[$ (de sorte que $t - kT \in [\alpha, \alpha + T[$), $\tilde{f}(t) = f(t - kT)$. Cette fonction coïncide évidemment avec f sur $[\alpha, \alpha + T[$ et on vérifie immédiatement que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(t + T) = \tilde{f}(t)$. \square

I Théorie géométrique des séries de Fourier

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on notera dorénavant \cos_k la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto \cos(kx)$ et $\sin_k : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin(kx)$. Étant donnée une fonction f 2π -périodique, on se demande comment la décomposer en (somme de) *série trigonométrique*, i.e. sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \cos_k + b_k \sin_k$. Nous allons donner ici des formules pour calculer les coefficients d'une telle décomposition (sous de bonnes hypothèses sur f), et nous expliquerons ensuite d'où viennent ces formules. Nous allons voir qu'il peut être avantageux dans ce contexte d'étendre notre étude aux fonctions à valeurs complexes et de considérer non pas seulement les séries trigonométriques mais aussi les séries "exponentielles", de la forme $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e_k)$, où e_k désigne la fonction 2π -périodique à valeurs complexes $x \mapsto e^{ikx}$. Pas de panique concernant l'indice $k \in \mathbb{Z}$! Les sommes partielles d'une telle série de fonctions sont simplement les $S_n = \sum_{k=-n}^n c_k e_k$.

I.1 Polynômes trigonométriques

Un *polynôme trigonométrique* est une fonction de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \alpha_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx), \text{ avec } N \in \mathbb{N}, \alpha_0 \in \mathbb{C} \text{ et } (a_k)_k, (b_k)_k \in \mathbb{C}^N.$$

Il peut également être mis sous la forme $\sum_{k=-N}^N c_k e_k$ avec

$$c_0 = \alpha_0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad c_k = \frac{a_k - ib_k}{2} \quad \text{et} \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2}$$

(exercice, en utilisant : $\cos(kx) = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$ et $\sin(kx) = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$).

Réciproquement (exercice), un polynôme exponentiel $\sum_{k=-N}^N c_k e_k$ peut-être mis sous forme trigonométrique en prenant

$$\alpha_0 = c_0 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a_k = c_k + c_{-k} \quad \text{et} \quad b_k = i(c_k - c_{-k}).$$

I.2 Coefficients de Fourier

Tout ce qui suit s'applique à une fonction f continue par morceaux (C_{pm}^0) de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .

On rappelle qu'une fonction sur un intervalle quelconque est dite C_{pm}^0 si elle l'est sur tout segment inclus dans cet intervalle, et qu'une fonction sur un segment $[a, b]$ est dite C_{pm}^0 s'il existe une subdivision (finie) $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ et des fonctions $g_i : [a_i, a_{i+1}] \rightarrow \mathbb{C}$ (noter les crochets fermés!), $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, continues telles que f coïncide avec g_i sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour tout i , ou, de façon équivalente, s'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ telle que pour tout $i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$. Précisons qu'une fonction g à valeurs complexes est dite continue si ses parties réelle et imaginaire, $\text{Re}(g) : x \mapsto \text{Re}(g(x))$ et $\text{Im}(g) : x \mapsto \text{Im}(g(x))$, à valeurs réelles, sont continues.

Définition 4.5 (Coefficients de Fourier). On définit

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (\text{coeff. exponentiels})$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt) dt \quad (\text{coeff. trigo}).$$

Remarque 4.6. (i) Bien faire attention aux coefficients ($\frac{1}{2\pi}$ dans un cas, $\frac{1}{\pi}$ dans l'autre) et au signe — dans l'exponentielle.

(ii) Pas de panique concernant l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes. Si $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une telle fonction, elle se décompose en $\varphi = \operatorname{Re}(\varphi) + i\operatorname{Im}(\varphi)$ où $\operatorname{Re}(\varphi)$ et $\operatorname{Im}(\varphi)$ sont des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , C_{pm}^0 si φ l'est, et $\int_a^b \varphi$ est alors simplement le nombre complexe $\int_a^b \operatorname{Re}(\varphi) + i \int_a^b \operatorname{Im}(\varphi)$.

Et pareil pour la dérivation! En particulier, si $\omega \in \mathbb{C}$, on vérifie (exercice) que la fonction $x \in \mathbb{R} \mapsto e^{\omega x} \in \mathbb{C}$ est dérivable, de dérivée $x \mapsto \omega e^{\omega x}$, et qu'elle est la dérivée de $x \mapsto \frac{e^{\omega x}}{\omega}$.

(iii) Les intégrales de la définition sont bien définies car f est supposée C_{pm}^0 , donc par produit, $f \cos_n$, $f \sin_n$ et $f e_n$ le sont également.

Proposition 4.7 (Relations entre les coefficients). $a_0(f) = 2c_0(f)$, $b_0(f) = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f), \quad b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f))$$

$$c_n(f) = \frac{a_n(f) - ib_n(f)}{2} \quad \text{et} \quad c_{-n}(f) = \frac{a_n(f) + ib_n(f)}{2}.$$

Remarque-Définition 4.8. On reconnaît les relations du paragraphe précédent. Ceci montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx),$$

ou encore que les séries de fonctions $(\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) e_k)$ et $(\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}^*} a_k(f) \cos_k + b_k(f) \sin_k)$ coïncident (au sens où leurs sommes partielles coïncident).

La série de fonctions ainsi définie est la *série de Fourier de f* , on la notera S_f . Sous la première forme, on l'appelle parfois *série de Fourier (sous forme) exponentielle*, et sous la seconde *série de Fourier trigonométrique* (que l'on privilégiera pour les fonctions à valeurs réelles).

L'espoir est que cette série converge vers f dans un certain sens à déterminer, sous certaines hypothèses sur f (cf. II).

Démonstration. Le cas $n = 0$ découle immédiatement de $\cos(0) = e^{i0} = 1$ et $\sin(0) = 0$. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} a_n(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{e^{int} + e^{-int}}{2} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{int} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = c_{-n}(f) + c_n(f). \end{aligned}$$

La preuve pour $b_n(f)$ est analogue. On obtient ensuite $c_n(f)$ et $c_{-n}(f)$ en fonction de $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en combinant ces deux formules. \square

Remarque 4.9. Si f est réelle, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels, et $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ (conjugué complexe).

Remarque 4.10. Si $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction C_{pm}^0 et 2π -périodique,

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} h(t) dt = \int_0^{2\pi} h(t) dt.$$

En effet, d'après la relation de Chasles,

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} h(t) dt = \int_{\alpha}^0 h(t) dt + \int_0^{2\pi} h(t) dt + \int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} h(t) dt$$

Or

$$\begin{aligned}\int_{2\pi}^{\alpha+2\pi} h(t)dt &= \int_0^{\alpha} h(u+2\pi)du \quad (\text{changement de var. affine } u = t - 2\pi) \\ &= \int_0^{\alpha} h(u)du \quad \text{par } 2\pi\text{-périodicité} \\ &= - \int_{\alpha}^0 h(t)dt\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

Or dans notre cas, fe_n , $f\cos_n$ et $f\sin_n$ sont 2π -périodiques. En particulier, en prenant $\alpha = -\pi$, on peut remplacer l'intervalle d'intégration $[0, 2\pi]$ par $[-\pi, \pi]$ dans les définitions de $c_n(f)$, $a_n(f)$ et $b_n(f)$. Cela permet de réduire les calculs pour les fonctions paires et impaires comme suit.

Proposition 4.11. *Si f est paire,*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n(f) = 0, \quad c_n(f) = c_{-n}(f) = \frac{a_n(f)}{2} \quad (\text{réels si } f \text{ l'est}).$$

La forme trigonométrique de S_f ne contient que des "cos".

Si f est impaire,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = 0, \quad -c_n(f) = c_{-n}(f) = \frac{ib_n(f)}{2} \quad (\text{imaginaires purs si } f \text{ est réelle}).$$

La forme trigonométrique de S_f ne contient que des "sin".

Démonstration. Si f est paire (resp. impaire), $f\sin_n$ (resp. $f\cos_n$) est impaire, donc son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle. \square

Exemple 4.12. Calculons les coefficients de Fourier de la fonction 2π -périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x \in [\pi, 2\pi[$ (nous avons vu qu'il existait une unique telle fonction).

Cette fonction est continue par morceaux sur $[0, 2\pi]$ (elle est continue car constante sur $]0, \pi[$ et $]\pi, 2\pi[$ et ses restrictions à ces intervalles se prolongent en fonctions continues sur $[0, \pi]$ et $[\pi, 2\pi]$ respectivement), donc sur \mathbb{R} par 2π -périodicité. Cela a donc bien un sens de calculer ses coefficients de Fourier. Commençons par la forme exponentielle. Pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned}c_n(f) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-int}dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{-int}}{-in} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \times \frac{1 - e^{-in\pi}}{in} = \frac{1 - (-1)^n}{i2\pi n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{1}{i\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}\end{aligned}$$

(on vérifie bien que $c_{-n}(f) = \overline{c_n(f)}$ comme il se doit puisque f est à valeurs réelles). Pour $n = 0$,

$$c_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} dt = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, la série de Fourier de f sous forme exponentielle est

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{e_{2k+1}}{i(2k+1)\pi} \right).$$

On en déduit les coefficients de Fourier trigonométriques : $a_0(f) = 2c_0(f) = 1$ et

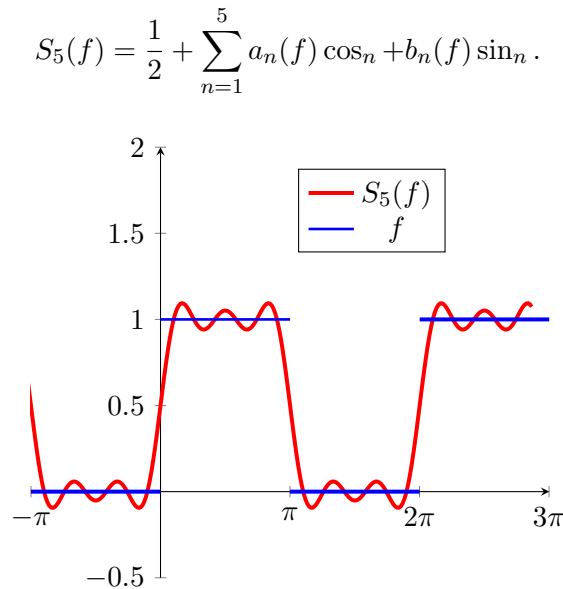
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(f) = c_n(f) + c_{-n}(f) = 0 \quad (\text{que } n \text{ soit pair ou impair})$$

$$\text{et } b_n(f) = i(c_n(f) - c_{-n}(f)) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \frac{2}{\pi n} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

($a_n(f)$ et $b_n(f)$ sont réels comme il se doit). Ainsi, la série de Fourier de f sous forme trigonométrique est

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2 \sin_{2k+1}}{(2k+1)\pi} \right).$$

On représente ci-dessous le graphe de f et une somme partielle de sa série de Fourier :



On remarque qu'à part le terme constant $\frac{a_0(f)}{2} = \frac{1}{2}$, la forme trigonométrique de S_f ne contient que des "sin". C'est cohérent avec le fait que la fonction $f - \frac{1}{2}$ (dont les coefficients de Fourier sont (cf. ci-dessous) ceux de f moins ceux de la fonction constante égale à $\frac{1}{2}$, dont on va voir dans un instant qu'ils sont tous nuls sauf le $c_0 = \frac{a_0}{2}$ qui vaut $\frac{1}{2}$) est *presque* impaire (elle le devient si on remplace sa valeur par 0 en tous les multiples de π , soit un nombre fini de points par période, ce qui ne change donc pas les coefficients de Fourier). Résumons ces dernières observations dans une nouvelle remarque, dont la preuve est immédiate.

Remarque 4.13. (i) Si f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ sont des fonctions C_{pm}^0 et 2π -périodiques, et $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(\lambda f + g) = \lambda a_n(f) + a_n(g), \quad b_n(\lambda f + g) = \lambda b_n(f) + b_n(g)$$

et

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(\lambda f + g) = \lambda c_n(f) + c_n(g).$$

(ii) Si f et g sont des fonctions C_{pm}^0 et 2π -périodiques qui coïncident sauf en un nombre fini de points par intervalle de longueur 2π , alors leurs coefficients de Fourier coïncident.

Exemple 4.14. Déterminons maintenant les coefficients de Fourier de la fonction sin, qui est bien 2π -périodique et C_{pm}^0 (et même C^∞). Puisque l'espoir est que, sous de bonnes hypothèses, une fonction coïncide avec la somme de sa série de Fourier, on peut s'attendre à ce que tous les coefficients de celle de sin (sous forme trigonométrique) soient nuls sauf celui devant sin, $b_1(f)$, qui vale 1. C'est ce que nous allons vérifier.

Tout d'abord sin est impair donc on sait déjà que tous les $a_n(f)$ sont nuls. Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Alors, de la formule $\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$, on tire :

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(t) \sin(nt) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((n-1)t) - \cos((n+1)t)) dt.$$

Pour $n \geq 2$, cela donne

$$b_n(f) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sin((n-1)t)}{n-1} - \frac{\sin((n+1)t)}{n+1} \right]_0^{2\pi} = 0$$

par 2π -périodicité de la primitive, et pour $n = 1$,

$$b_1(f) = \frac{1}{2\pi} \left[t - \frac{\sin(2t)}{2} \right]_0^{2\pi} = 1,$$

ce qu'on voulait.

On obtiendrait des résultats analogues pour toutes les fonctions \cos_q , \sin_q , e_q , comme on le reverra dans le paragraphe suivant, en donnant une interprétation géométrique de ce fait. Par linéarité, on voit alors que les coefficients de Fourier d'un polynôme trigonométrique sont simplement les coefficients de ce polynôme (comme quoi la formule définissant les coefficients de Fourier est bien choisie !) ou encore qu'à partir d'un certain rang, les sommes partielles d'une telle série de Fourier sont toutes égales au polynôme trigo. en question. En particulier, dans le cas des polynômes trigo., on a trivialement convergence (ponctuelle, uniforme, normale... puisqu'égalité à partir d'un certain rang) de la série de Fourier vers la fonction. Le but du paragraphe II est d'étendre cela à un maximum de fonctions 2π -périodiques.

I.3 Structure hermitienne

Nous allons voir que décomposer une fonction en somme de série exponentielle (puis trigonométrique) s'apparente à décomposer un vecteur d'un espace vectoriel dans une base orthonormée, sauf qu'ici on manipule des sommes *infinies*, ce qui nécessite une notion de *convergence*, alors que lorsqu'on parle de décomposition dans une base en algèbre linéaire, on n'a droit qu'à des combinaisons linéaires finies. En attendant de rendre tout ceci précis et rigoureux en L3 Maths, garder en tête cette approche géométrique permet de mieux comprendre et retenir certains résultats du II.

Qui dit “base orthonormée” dit “produit scalaire”. Voici ce qui va jouer pour nous ce rôle :

Définition 4.15. Étant données f et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ des fonctions 2π -périodiques et C_{pm}^0 , on définit

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{g(t)} dt.$$

En particulier, on a :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \langle f, e_n \rangle.$$

Qu'entend-on maintenant par “jouer le rôle d'un produit scalaire” ? Considérons le *produit scalaire* standard dans \mathbb{R}^2 (ou de façon analogue dans \mathbb{R}^3) défini par :

$$\forall \vec{x} = (x_1, x_2) \text{ et } \vec{y} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Ce qui lui vaut le nom de produit scalaire, c'est le fait qu'il soit une...

— *forme bilinéaire* : à deux vecteurs il associe un réel (\rightarrow “forme”), et (\rightarrow “bilinéaire”) $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$(\lambda \vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = \lambda \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z} \quad (\text{linéarité à gauche})$$

$$\text{et } \vec{x} \cdot (\lambda \vec{y} + \vec{z}) = \lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z} \quad (\text{linéarité à droite}).$$

— *symétrique* : $\forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$.

— *positive définie* : $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2, \vec{x} \cdot \vec{x} (= \|\vec{x}\|^2) \geq 0$ et $(\vec{x} \cdot \vec{x} = 0 \Rightarrow \vec{x} = (0, 0))$.

Notons \mathcal{C}_{pm} le \mathbb{C} -espace vectoriel (à vérifier!) des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} continues par morceaux et 2π -périodique. L'application $\langle \cdot, \cdot \rangle : (f, g) \in (\mathcal{C}_{\text{pm}})^2 \mapsto \langle f, g \rangle$ a des propriétés similaires (la différence vient de ce que l'on travaille ici en complexes) :

- *forme sesquilinéaire* : à deux fonctions de \mathcal{C}_{pm} , elle associe un nombre complexe (\rightarrow “forme”), et (\rightarrow “sesquilinéaire” = $\frac{3}{2}$ -linéaire) $\forall f, g, h \in \mathcal{C}_{\text{pm}}, \forall \lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle (\lambda f + g), h \rangle = \lambda \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle \quad (\text{linéarité à gauche}) \text{ et}$$

$$\langle f, \lambda g + h \rangle = \bar{\lambda} \langle f, g \rangle + \langle f, h \rangle \quad (\text{semi-linéarité à droite}).$$

- *hermitienne* : $\forall f, g \in \mathcal{C}_{\text{pm}}, \langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$.
- *positive (et presque définie)* : $\forall f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}, \langle f, f \rangle \geq 0$ et

$$(\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = \tilde{0} \underbrace{\text{sauf en un nombre fini de points par période}}_{(*)}).$$

Sans (*), ces propriétés feraient de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un *produit scalaire hermitien* sur \mathcal{C}_{pm} . Si l'on se restreint aux fonctions continues, (*) disparaît (cf. ci-dessous) et on a un authentique produit scalaire hermitien. C'est cependant trop restrictif, on veut typiquement pouvoir traiter les “fonctions créneaux” entrevues précédemment. On va pour cela introduire un espace intermédiaire, noté \mathcal{D} pour “Dirichlet”, défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}; \forall x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} \right\} \subset \mathcal{C}_{\text{pm}}$$

où $f(x_0^\pm) := \lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$, qui est égal à $f(x_0)$ si f est continu en x_0 , de sorte que \mathcal{D} contient l'ensemble \mathcal{C} des fonctions continues 2π -périodiques.

L'observation clef est que pour toute fonction f de \mathcal{C}_{pm} , il existe une (unique) fonction \tilde{f} de \mathcal{D} qui coïncide avec f sauf en un nombre fini de points par période (les éventuels points de discontinuité de f), et qui donc a les mêmes coefficients de Fourier.

Vérifions que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur \mathcal{D} . On vérifie facilement, grâce à la linéarité de l'intégrale et aux propriétés de la conjugaison complexe que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit une forme sesquilinéaire hermitienne sur \mathcal{C}_{pm} et donc a fortiori sur \mathcal{D} . Pour tout $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}$,

$$\langle f, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{f(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \geq 0$$

par positivité de l'intégrale. Supposons maintenant que $\langle f, f \rangle = 0$, i.e. $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = 0$. Si $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_n = 2\pi$ est une subdivision de $[0, 2\pi]$ telle que f soit continue sur chaque $]a_i, a_{i+1}[$, alors par Chasles,

$$0 = \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \int_0^{a_1} |f(t)|^2 dt + \dots + \int_{a_{n-1}}^{2\pi} |f(t)|^2 dt,$$

somme nulle de nombres positifs ou nuls, qui sont donc nécessairement tous nuls. Comme $|f|^2$ est continue et positive sur chacun des intervalles d'intégration, cela entraîne qu'elle y est nulle. Ainsi, f est nulle sauf éventuellement en un nombre fini de points par période (on retrouve (*)). Si maintenant on suppose en outre $f \in \mathcal{D}$, en les éventuels points de discontinuité de f (isolés), on a

$$f(x_0) = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = 0$$

puisque f est (localement) identiquement nulle de part et d'autre, donc f est en fait identiquement nulle sur $[0, 2\pi]$, donc sur \mathbb{R} par 2π -périodicité. Ceci achève de montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire hermitien sur \mathcal{D} .

Définition 4.16. On définit la *norme* associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathcal{D} , notée $\| \cdot \|_2$, par

$$\forall f \in \mathcal{D}, \quad \|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt}.$$

On admet le fait suivant :

Proposition 4.17 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tous $f, g \in \mathcal{D}$,*

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_2 \times \|g\|_2.$$

Exercice 4.18. $\| \cdot \|_2$ a les propriétés suivantes (qui font d'elle une *norme*, justement) :

- (*positivité*) $\forall f \in \mathcal{D}, \|f\|_2 \geq 0$;
- (*séparation*) $\forall f \in \mathcal{D}, (\|f\|_2 = 0 \Rightarrow f = \tilde{0})$;
- (*homogénéité*) $\forall f \in \mathcal{D}, \forall \lambda \in \mathbb{C}, \|\lambda f\|_2 = |\lambda| \times \|f\|_2$;
- (*inégalité triangulaire*) $\forall f, g \in \mathcal{D}, \|f + g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2$.

Proposition 4.19. *La famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur \mathcal{D} :*

$$\forall (k, l) \in \mathbb{Z}^2, \quad \langle e_k, e_l \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } k = l \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, cette famille est libre.

Démonstration. Soit $(k, l) \in \mathbb{Z}^2$. Si $k = l$,

$$\langle e_k, e_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ikt} e^{-ikt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} dt = 1$$

et si $k \neq l$,

$$\langle e_k, e_l \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(k-l)t} dt = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{i(k-l)t}}{i(k-l)} \right]_0^{2\pi} = 0$$

par 2π -périodicité de la primitive.

Le fait qu'une famille orthonormée pour un produit scalaire soit libre est un fait général. Supposons qu'une combinaison linéaire $\lambda_1 e_{i_1} + \dots + \lambda_n e_{i_n}$ soit nulle (avec $n \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ et $i_1, \dots, i_n \in \mathbb{Z}$ des indices distincts). Alors en particulier, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, par linéarité

$$0 = \langle 0, e_{i_j} \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \lambda_k e_{i_k}, e_{i_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_j,$$

ce qui montre que la famille est libre. □

Attention ! $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ n'est pas une *base* de \mathcal{D} car \mathcal{D} contient des fonctions qui ne sont pas C^1 alors que toute combinaison linéaire des e_k est nécessairement C^1 (ce ne sera en revanche pas le cas des *limites* de telles combinaisons linéaires).

Étant donné un \mathbb{C} -espace vectoriel V muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ de norme associée $\| \cdot \|$, deux vecteurs w et $w' \in V$ sont dits orthogonaux, ce qui se note " $w \perp w'$ ", si $\langle w, w' \rangle = 0$, et on a le "théorème de Pythagore" :

$$\forall (w, w') \in V^2, \quad w \perp w' \Rightarrow \|w + w'\|^2 = \|w\|^2 + \|w'\|^2$$

(le vérifier en exprimant $\| \cdot \|^2$ en fonction de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et en utilisant les propriétés du produit scalaire). Si en outre W est un sous-espace vectoriel de V de dimension finie, on peut définir la projection orthogonale de V sur W :

Proposition 4.20 (Admise). *Pour tout $v \in V$, il existe une unique décomposition de v de la forme $w + w^\perp$ avec $w \in W$ et $w^\perp \perp W$ (i.e. $\forall w' \in W, \langle w^\perp, w' \rangle = 0$). On appelle alors w le projeté orthogonal de v sur W , et on le note $p_W(v)$. Il satisfait :*

$$\forall w' \in W, \quad \|v - w'\| \geq \|v - p_W(v)\| \quad (\text{distance minimale})$$

(autrement dit, $p_W(v)$ réalise la distance minimale entre v et un point de W) ;

$$\|v\|^2 = \|p_W(v)\|^2 + \|v - p_W(v)\|^2 \quad (\text{Corollaire de Pythagore})$$

et en particulier

$$\|p_W(v)\|^2 \leq \|v\|^2 \quad (\text{Inégalité de Bessel})$$

et enfin si $(w_i)_{1 \leq i \leq m}$ est une base orthonormée de W ,

$$p_W(v) = \sum_{i=1}^m \langle v, w_i \rangle w_i.$$

Appliquons tout ceci à $V = \mathcal{D}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire défini précédemment, et, pour un $N \in \mathbb{N}$ donné, $W = T_N := \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{e_{-N}, \dots, e_0, \dots, e_N\}$, ensemble des polynômes trigonométriques de “degré” inférieur ou égal à N , dont $(e_{-N}, \dots, e_0, \dots, e_N)$ est une base orthonormée (elle est tautologiquement génératrice). On obtient pour tout $f \in \mathcal{D}$:

$$p_{T_N}(f) = \sum_{k=-N}^N \langle f, e_k \rangle e_k = \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k,$$

soit la somme partielle d’ordre N de la série de Fourier de f , que l’on notera $S_N(f)$. Ainsi, cette somme partielle réalise la meilleure approximation possible, *au sens de la norme $\|\cdot\|_2$* , de f par un polynôme trigonométrique de degré inférieur à N . La série S_f semble donc en ce sens un bon candidat pour “développer” f . L’inégalité de Bessel donne en outre :

$$\|f\|_2^2 \geq \|S_N(f)\|_2^2 = \left\| \sum_{k=-N}^N c_k(f) e_k \right\|_2^2 = \sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2$$

d’après Pythagore, par orthonormalité de $(e_k)_k$.

Corollaire 4.21. *Pour tout $f \in \mathcal{D}$ (et en fait aussi dans \mathcal{C}_{pm}), la famille $(|c_k(f)|^2)_{k \in \mathbb{Z}}$ est sommable ou, de façon équivalente, $\sum_{k=-N}^N |c_k(f)|^2$ admet une limite finie qd N tend vers $+\infty$ et cette limite satisfait :*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 \leq \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt. \quad (\text{Inégalité de Bessel})$$

On va voir qu’il y a en fait égalité (cf. Formule de Parseval), mais le théorème correspondant est substantiellement plus difficile. Si l’inégalité de Bessel ci-dessus découle directement d’un résultat complètement général d’algèbre bilinéaire (du même nom), l’égalité de Parseval est un résultat profond *d’analyse* (qui nécessite des études de convergence).

Notons que le résultat ci-dessus implique en particulier que $\lim_{|n| \rightarrow +\infty} c_n(f) = 0$. Nous aurons plus tard besoin d’un résultat plus fort :

Lemme 4.22 (Lemme de Riemann-Lebesgue). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux. Alors*

$$\int_a^b f(t) e^{ixt} dt \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0.$$

A fortiori,

$$\int_a^b f(t) \cos(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f(t) \sin(xt) dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Démonstration. On commence par le cas où f est une fonction en escalier et on prolongera au cas général *par densité*.

Cas f en escalier. Notons \mathcal{E} l'espace vectoriel des fonctions en escalier sur $[a, b]$ et \mathcal{F} le sous-ensemble des fonctions $g \in \mathcal{E}$ telles que $\int_a^b g(t)e^{ixt}dt \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$. C'est un sous-espace vectoriel de \mathcal{E} (la stabilité par combinaison linéaire est immédiate). On veut montrer que $\mathcal{F} = \mathcal{E}$. Or toute fonction en escalier s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions indicatrices d'intervalles : si $I \subset [a, b]$ est un intervalle, l'*indicatrice* de I est la fonction $\chi_I : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui vaut 1 sur I et 0 en dehors (c'est bien une fonction en escaliers). Autrement dit les indicatrices d'intervalles forment une famille génératrice de \mathcal{E} . Il nous suffit donc de montrer qu'elles appartiennent toutes à \mathcal{F} . Soit donc $I = (\alpha, \beta) \subset [a, b]$ un intervalle (les parenthèses peuvent signifier $[$ ou $]$). Alors pour tout $x \neq 0$,

$$\left| \int_a^b \chi_I(t)e^{ixt}dt \right| = \left| \int_\alpha^\beta e^{ixt}dt \right| = \left| \left[\frac{e^{ixt}}{ix} \right]_\alpha^\beta \right| = \left| \frac{1}{x} \left(\frac{e^{ix\beta} - e^{ix\alpha}}{i} \right) \right| \leq \frac{2}{x} \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0,$$

donc χ_I appartient à \mathcal{F} , ce qu'on voulait. Donc toutes les fonctions en escalier satisfont Riemann-Lebesgue.

Cas général. Soit $\varepsilon > 0$. On veut trouver $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$(*) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq A \Rightarrow \left| \int_a^b f(t)e^{ixt}dt \right| \leq \varepsilon.$$

On sait (cf. MAT302) qu'il existe $g \in \mathcal{E}$ tel que $\|f - g\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ (ce choix sera justifié a posteriori). On a alors

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(t)e^{ixt}dt \right| &= \left| \int_a^b ((f(t) - g(t)) + g(t))e^{ixt}dt \right| \\ &= \left| \int_a^b (f(t) - g(t))e^{ixt}dt + \int_a^b g(t)e^{ixt}dt \right| \\ &\leq \left| \int_a^b (f(t) - g(t))e^{ixt}dt \right| + \left| \int_a^b g(t)e^{ixt}dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(t) - g(t)| \cdot |e^{ixt}| dt + \left| \int_a^b g(t)e^{ixt}dt \right| \\ &\leq \underbrace{\int_a^b \frac{\varepsilon}{2(b-a)} dt}_{\frac{\varepsilon}{2}} + \left| \int_a^b g(t)e^{ixt}dt \right| \end{aligned}$$

De plus, puisque g est en escalier, d'après la première partie de la preuve, il existe $A \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| \geq A \Rightarrow \left| \int_a^b g(t)e^{ixt}dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a donc bien finalement trouvé $A \in \mathbb{R}_+$ satisfaisant $(*)$, ce qui conclut la preuve. □

II Théorèmes de convergence

II.A Théorème de Dirichlet

Le but de cette section est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.23 (Dirichlet). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique et C^1 par morceaux. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(S_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(f) \cos(kx) + b_k(f) \sin(kx) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

(= $f(x)$ si f est continue en x , ou si $f \in \mathcal{D}$). En particulier, toute fonction de \mathcal{D} qui est en outre C^1 par morceaux est limite simple de sa série de Fourier sur \mathbb{R} .

La définition de C^1 par morceaux est simplement celle de C^0 par morceaux où l'on a remplacé C^0 par C^1 . La conclusion n'est pas vraie en général si l'on suppose f seulement continue par morceaux, ou même continue. Nous ne le ferons pas ici, mais on peut construire explicitement une fonction continue dont la série de Fourier diverge en au moins un point. Bien sûr, vu le théorème, une telle fonction est nécessairement relativement "dégénérée".

II.A.1 Noyau de Dirichlet

La preuve du théorème ci-dessus repose sur l'étude du *Noyau de Dirichlet* que nous allons faire apparaître maintenant.

Expression intégrale de $S_n(f)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^n c_k(f) e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^n \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\sum_{k=-n}^n e^{ik(x-t)} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt \end{aligned}$$

où

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad D_n(u) := \sum_{k=-n}^n e^{iku}.$$

Le *Noyau de Dirichlet* est la suite de fonctions $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie. On vérifie immédiatement (exercice) que :

Propriétés 4.24. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

1. $D_n \in T_n$;
2. $c_0(D_n) = 1$, i.e. $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 1$;
3. D_n est paire donc $\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 1$.

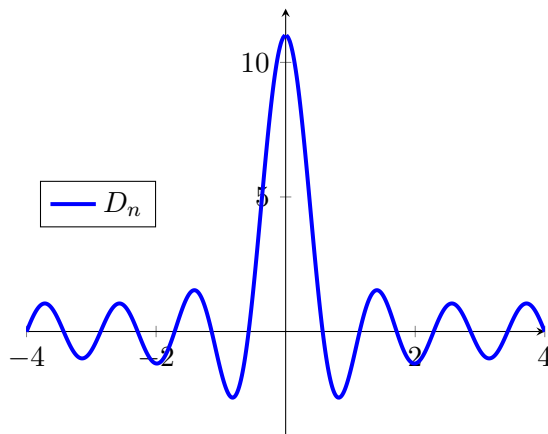
Expression condensée de D_n . Soit $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. Posons $u = e^{ix}$. Alors

$$\begin{aligned} D_n(x) &= \sum_{k=-n}^n (e^{ix})^k = \sum_{k=-n}^n u^k = u^{-n} \sum_{k=0}^{2n} u^k = u^{-n} \frac{u^{2n+1} - 1}{u - 1} \\ &= e^{-inx} \frac{e^{i(2n+1)x} - 1}{e^{ix} - 1} = e^{-inx} \frac{e^{i\frac{2n+1}{2}x} - e^{-i\frac{2n+1}{2}x}}{e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, \quad D_n(x) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin(\frac{x}{2})} \quad (\text{et pour } x \in 2\pi\mathbb{Z}, D_n(x) = \sum_{k=-n}^n 1 = 2n + 1).$$

Voici l'allure de son graphe pour $n = 5$.



II.A.2 Preuve du théorème

Soit f une fonction C^1 par morceaux 2π -périodique.

Nouvelles expressions intégrales de $S_n(f)$. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. En effectuant le changement de variable $u = t - x$ puis en utilisant la parité de D_n et la 2π -périodicité de $u \mapsto f(x+u)D_n(u)$, on obtient :

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(-u) du = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt.$$

Cette expression nous suffirait à démontrer le théorème si f était supposée en outre C^0 , mais dans le cas général, il faut la modifier encore un peu. Ceci dit, donnons dans le cas C^0 une justification intuitive de la convergence, quand $n \rightarrow +\infty$, de cette quantité vers $f(x)$. On peut penser pour cela à $\frac{1}{2\pi} D_n$ comme la densité d'une mesure de probabilité sur $[-\pi, \pi]$ (il lui manque pour cela la positivité, mais son intégrale sur cet intervalle est bien 1) dont la masse se concentre au voisinage de 0 quand n croît. Ainsi l'intégrale ci-dessus consiste à calculer la moyenne de $t \mapsto f(x+t)$ sur $[-\pi, \pi]$ en accordant un poids de plus en plus important aux valeurs de $f(x+t)$ pour t proche de 0, i.e. pour $x+t$ proche de x , jusqu'à, à la limite, ne plus tenir compte que de la valeur $f(x)$. Nous allons voir néanmoins que pour faire marcher ce raisonnement, on a besoin d'une certaine régularité de f .

Revenons au cas général. Par un changement de variable affine $s = -t$, et toujours par parité de D_n , on obtient :

$$\int_{-\pi}^0 f(x+t) D_n(t) dt = - \int_{\pi}^0 f(x-s) D_n(-s) ds = \int_0^{\pi} f(x-s) D_n(s) ds,$$

d'où

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^0 f(x+t) D_n(t) dt + \int_0^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt \right) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2} D_n(t) dt.$$

Rappelons qu'on veut comparer cette quantité à

$$\tilde{f}(x) := \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \tilde{f}(x) D_n(t) dt \quad \text{car} \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 1.$$

Ainsi, par linéarité et en remplaçant $D_n(t)$ par son expression sur $]0, \pi]$,

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) - S_n(f)(x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} ((f(x+t) - f(x^+)) + (f(x-t) - f(x^-))) \times \frac{\sin((n + \frac{1}{2})t)}{\sin(\frac{t}{2})} dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(t) \sin((n + \frac{1}{2})t) dt \\ \text{avec} \quad g(t) &= \frac{(f(x+t) - f(x^+)) + (f(x-t) - f(x^-))}{2 \sin(\frac{t}{2})} \text{ pour } t \in]0, \pi]. \end{aligned}$$

Si l'on montre que g se prolonge en fonction C^0 par morceaux sur $[0, \pi]$, le lemme de Riemann-Lebesgue fournira la convergence voulue. Or g est bien C^0 par morceaux sur $]0, \pi]$ par composition. De plus, le caractère C^1 par morceaux de f implique qu'il existe, pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, des fonctions f_- et f_+ C^1 sur $[x - \varepsilon, x]$ et $[x, x + \varepsilon]$ réciproquement telles que $f = f_-$ sur $[x - \varepsilon, x[$ et f_+ sur $]x, x + \varepsilon]$, de sorte que, puisque $2 \sin(\frac{t}{2}) \sim t$,

$$\begin{aligned} g(t) &\sim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x+t) - f(x^+)}{t} + \frac{f(x-t) - f(x^-)}{t} \\ &= \frac{f_+(x+t) - f_+(x)}{t} + \frac{f_-(x-t) - f_-(x)}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f'_+(x) + f'_-(x) \end{aligned}$$

($= 2f'(x)$ simplement si f est C^1 au voisinage de x). Ceci conclut la preuve.

II.A.3 Application

Nous avons vu que la fonction 2π -périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x \in [\pi, 2\pi[$ avait pour série de Fourier :

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2 \sin_{2k+1}}{(2k+1)\pi} \right).$$

Cette fonction est C^1 par morceaux (c'est une fonction en escalier). On peut donc lui appliquer le théorème de Dirichlet. Notamment, comme elle est continue en $\frac{\pi}{2}$, on obtient

$$1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2 \sin((2k+1)\frac{\pi}{2})}{(2k+1)\pi} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(k\pi + \frac{\pi}{2})}{2k+1} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}.$$

II.B Théorème de convergence normale

Nous venons d'obtenir un résultat de convergence simple. Si l'on augmente les hypothèses de régularité sur f , on obtient une convergence plus forte.

Théorème 4.25 (de convergence normale). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction 2π -périodique, C^1 par morceaux et continue. Alors sa série de Fourier trigonométrique est normalement donc uniformément convergente (et sa somme est f d'après le théorème de Dirichlet).*

Il est clair que la conclusion du théorème ne peut être vraie si f n'est pas supposée continue, car les polynômes trigonométriques sont continus, et une limite uniforme de fonctions continues est continue. Quant à l'hypothèse C^1 par morceaux, on a déjà vu qu'en la retirant, même la conclusion du théorème de convergence simple de Dirichlet n'était en général pas vraie.

Par définition de la convergence normale, ce théorème découle quasi-directement de la proposition suivante :

Proposition 4.26. *Sous les hypothèses du théorème, les familles $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$, $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ sont sommables.*

Rappelons qu'une famille $(\alpha_i)_{i \in I}$ est dite sommable s'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $\sum_{i \in J} |\alpha_j| \leq M$ pour tout sous-ensemble fini J inclus dans I . Si $I = \mathbb{N}$, cela revient simplement à dire que la série $(\sum_n \alpha_n)$ est absolument convergente, et si $I = \mathbb{Z}$, cela revient à dire que les séries $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n)$ et $(\sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{-n})$ sont absolument convergentes.

La proposition repose quant à elle sur le lemme suivant (ou plutôt sur sa généralisation qui suit) :

Lemme 4.27. Si f est C^1 2π -périodique, $c_n(f') = in c_n(f)$.

Démonstration. Par hypothèse, f' est C^0 et 2π -périodique donc cela a un sens de parler de ses coefficients de Fourier. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par intégration par parties,

$$c_n(f') = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) e^{-int} dt = \frac{1}{2\pi} \left(\underbrace{[f(t) e^{-int}]_0^{2\pi}}_0 - \int_0^{2\pi} f(t) (-in) e^{-int} dt \right) = in c_n(f).$$

□

Ce résultat s'étend aux fonctions seulement C^1 par morceaux *continues* (c'est là que cette hypothèse supplémentaire par rapport au théorème de Dirichlet joue un rôle).

Lemme 4.28. Soit f une fonction C^1 par morceaux, continue et 2π -périodique. Il existe une unique fonction $g \in \mathcal{D}$ telle que $g = f'$ partout où f est dérivable, et $c_n(g) = in c_n(f)$.

Démonstration. Soit $0 = \alpha_0 < \dots < \alpha_p = 2\pi$ une subdivision de $[0, 2\pi]$ telle que pour tout k , $f|_{[\alpha_k, \alpha_{k+1}[}$ se prolonge en fonction C^1 sur $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$. Alors f' est bien défini sur chaque $]\alpha_k, \alpha_{k+1}[$, ce qui impose $g = f'$ sur ces intervalles (et leurs translatés de 2π), et la contrainte $g \in \mathcal{D}$ impose la valeur de g en chacun des points restant : $g(\alpha_k) = \frac{f'(\alpha_k^-) + f'(\alpha_k^+)}{2}$ (ces quantités sont bien définies car f' admet des limites à droite et à gauche en ces points, f étant C^1 par morceaux). La fonction g ainsi obtenue (étendue à \mathbb{R} par 2π -périodicité) appartient à \mathcal{D} par construction.

Sur chaque $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, on peut effectuer la même intégration par parties que précédemment en remarquant que la restriction de f à ce segment est C^1 (c'est là qu'on utilise l'hypothèse de continuité de f !), de dérivée le prolongement par continuité au bord \tilde{g} de $g|_{] \alpha_k, \alpha_{k+1}[}$:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} g(t) e^{-int} dt &= \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} \tilde{g}(t) e^{-int} dt \\ &= [f(t) e^{-int}]_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} - \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t) (-in) e^{-int} dt \\ &= f(\alpha_{k+1}) e^{-in\alpha_{k+1}} - f(\alpha_k) e^{-in\alpha_k} + in \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} f(t) e^{-int} dt. \end{aligned}$$

En sommant pour k allant de 0 à $p-1$, on obtient, grâce à la relation de Chasles et au "téléscopage" d'une partie des termes (qui n'aurait pas lieu si f n'était pas supposée continue) :

$$c_n(g) = \int_0^{2\pi} g(t) e^{-int} dt = \underbrace{f(\alpha_p) e^{-in\alpha_p} - f(\alpha_0) e^{-in\alpha_0}}_{f(2\pi) e^{-i2\pi n} - f(0) e^0 = 0} + in \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt = in c_n(f).$$

□

Preuve de la proposition 4.26. On définit g comme dans la preuve précédente. Cette fonction est C^0 par morceaux donc la famille $(|c_n(g)|^2)_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable d'après Bessel. Or par inégalité arithmético-géométrique ($\forall a, b \in \mathbb{R}$, $ab \leq \frac{a^2 + b^2}{2}$, à vérifier et retenir) :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |c_n(f)| = \frac{|c_n(g)|}{n} \leq \frac{1}{2} \left(|c_n(g)|^2 + \frac{1}{n^2} \right)$$

et $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{Z}}$ est également sommable par le critère de Riemann, donc par comparaison de familles à termes positifs, $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ est sommable. Comme en outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n(f)| \leq 2|c_n(f)|$ et $|b_n(f)| \leq 2|c_n(f)|$ par inégalité triangulaire, $(a_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(f))_{n \in \mathbb{N}}$ sont également sommables. □

Preuve du théorème de convergence normale. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)| \leq |a_n(f)| + |b_n(f)|,$$

terme général d'une série convergente, donc la série de Fourier trigonométrique de f converge normalement. \square

Ce théorème a une conséquence remarquable :

Corollaire 4.29. *Toute fonctions 2π -périodique continue est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.*

Pour ceux qui connaissent les notions topologiques nécessaires, cela signifie que le sous-espace vectoriel T des polynômes trigonométriques est *dense* dans \mathcal{C} muni de la norme uniforme.

Attention ! On n'a pas dit qu'une telle fonction était limite uniforme *de sa série de Fourier* ! On a déjà vu qu'il existait des fonctions continues dont la série de Fourier divergeait en au moins un point.

Démonstration. On vient de démontrer que cette propriété est vraie pour les fonctions continues et C^1 par morceaux.

Pour le cas général, si f est seulement continue, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on note g_p l'unique fonction continue affine par morceaux (et donc C^1 par morceaux) 2π périodique qui coïncide avec f en $\frac{2k\pi}{p}$ pour tout $k \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$. On peut montrer (nous ne le ferons pas ici), en utilisant la continuité uniforme de f sur le segment $[0, 2\pi]$, comme pour l'approximation par des fonctions en escalier, que $(g_p)_p$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R} .

Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\|f - g_p\|_\infty < \frac{1}{2n}$. Comme g_p satisfait les hypothèses du théorème de convergence normale, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|g_p - S_N(g_p)\|_\infty < \frac{1}{2n}$. Ainsi, en posant $f_n = S_N(g_p)$, on obtient une suite $(f_n)_n$ de polynômes trigonométriques satisfaisant $\|f - f_n\|_\infty < \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc convergeant uniformément vers f , ce qu'on voulait. \square

On peut également obtenir ce résultat à partir du *théorème de convergence de Fejer*, qui évite de "transiter" par les fonctions C^1 mais nécessite en contrepartie d'introduire la suite des *moyennes de Cesaro* d'une suite de fonctions et d'étudier sa convergence.

Ce corollaire est le résultat d'analyse auquel nous faisons allusion dans le paragraphe I, qui va nous permettre de passer de l'*inégalité* de Bessel à l'*égalité* de Parseval.

II.C Formule de Parseval et convergence en norme L_2

II.C.1 Énoncé et preuve

Théorème 4.30 (Parseval). *Pour tout $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}$,*

$$\|S_n(f) - f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_n(f) - f|^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

(on dit que la série de Fourier de f tend vers f en moyenne quadratique, ou en norme L_2) et par suite

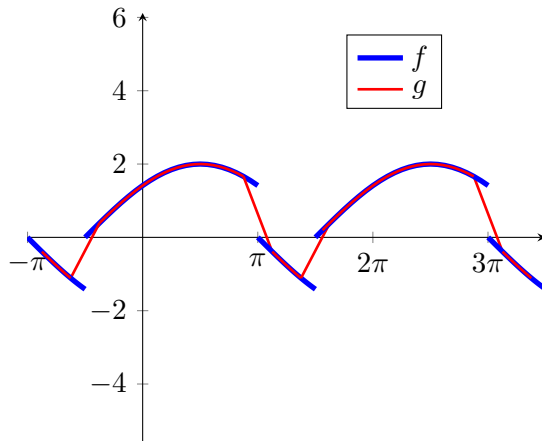
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{|a_0(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

(Formule de Parseval)

Certains verront en L3 maths que le premier point, avec le corollaire du paragraphe précédent et le lemme suivant, est un résultat tout-à-fait général sur les *espaces de Hilbert*.

Lemme 4.31. Soit $f \in \mathcal{D}$ (et plus généralement $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}$). Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $g \in \mathcal{C}$ tel que $\|f - g\|_2 \leq \varepsilon$. Autrement dit, dans l'espace \mathcal{D} muni de la norme L_2 , le sous-ensemble des fonctions continues est dense.

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{D}$, soit $M \in \mathbb{R}_+^*$ un majorant de $|f|$ (exercice : pourquoi cela existe-t-il ?) et soit α l'écart minimal entre deux discontinuités de f . Soit $\varepsilon > 0$ et $\eta = \min(\frac{\alpha}{2}, \frac{\pi}{p}(\frac{\varepsilon}{2M})^2)$ (à choisir a posteriori !). On définit g sur \mathbb{R} par $g = f$ en dehors du η -voisinage ouvert des discontinuités de f et g affine sur chaque intervalle du η -voisinage fermé (cf. dessin).



Par construction, g est continue, 2π -périodique, et $|g|$ est encore majoré par M . En outre, si a_1, \dots, a_p désignent les points de $[0, 2\pi[$ où f est discontinue,

$$\|g - f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^p \int_{a_j-\eta}^{a_j+\eta} |f(t) - g(t)|^2 dt \leq \frac{\eta p}{\pi} (2M)^2 \leq \varepsilon^2,$$

donc $\|g - f\|_2 \leq \varepsilon$. □

Preuve de Parseval. Commençons par démontrer le premier point pour $f \in \mathcal{C}$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après le corollaire 4.29, il existe un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$. Mais alors

$$\|f - P\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t) - P(t)|^2 dt \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \|f - P\|_\infty^2 dt = \|f - P\|_\infty^2$$

donc $\|f - P\|_2 \leq \|f - P\|_\infty \leq \varepsilon$. Soit n_0 le degré de P . Alors pour tout $n \geq n_0$, P appartient à T_n , donc comme $S_n(f)$ est l'élément de T_n qui réalise la distance de f à T_n , $\|S_n(f) - f\|_2 \leq \|f - P\|_2 \leq \varepsilon$, et ce pour tout $n \geq n_0$, ce qui montre la convergence souhaitée.

Soit maintenant $f \in \mathcal{D}$ et $\varepsilon > 0$. D'après le lemme précédent, il existe $g \in \mathcal{C}$ tel que $\|f - g\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Et d'après le paragraphe précédent, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|g - S_{n_0}(g)\|_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Par inégalité triangulaire, on a alors $\|f - S_{n_0}(g)\|_2 \leq \varepsilon$. Mais alors par le même argument que précédemment, on a $\|S_n(f) - f\|_2 \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui conclut la preuve du premier point en toute généralité (pour obtenir le cas $f \in \mathcal{C}_{\text{pm}}$, appliquer ce qui précède à \tilde{f}).

Pour la formule de Parseval, on considère toujours $f \in \mathcal{D}$. On a déjà vu que d'après Pythagore, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n(f)$ étant le projeté orthogonal de f sur T_n ,

$$\|f\|_2^2 = \|S_n(f)\|_2^2 + \|f - S_n(f)\|_2^2.$$

Ainsi, vu que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - S_n(f)\|_2^2 = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|S_n(f)\|_2^2$ existe et vaut $\|f\|_2^2$. Or on a déjà vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{+n} |c_k(f)|^2$, donc on obtient bien

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k(f)|^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=-n}^{+n} |c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

La version “trigonométrique” s’obtient directement en exprimant les $c_n(f)$ en fonctions des coefficients de Fourier trigonométriques. \square

II.C.2 Exemple d’application

Rappelons que la fonction 2π -périodique définie sur $[0, 2\pi[$ par $f(x) = 1$ si $x \in [0, \pi[$ et $f(x) = 0$ si $x \in [\pi, 2\pi[$ a pour série de Fourier :

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{2 \sin_{2k+1}}{(2k+1)\pi} \right).$$

Cette fonction est C^0 par morceaux (c’est une fonction en escalier). On peut donc lui appliquer le théorème de Parseval, et on obtient :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} \right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2}$$

soit

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

III Compléments

III.A Unicité du développement en série trigonométrique

Nous venons de voir que sous certaines hypothèses de régularité, une fonction 2π -périodique continue par morceaux peut s’écrire comme la somme d’une série trigonométrique particulière, sa série de Fourier, ou plus précisément comme limite (L_2 , simple ou uniforme suivant les hypothèses) d’une telle série. Mais “inversement”, si l’on dispose d’une décomposition d’une fonction f en série trigonométrique, cette série est-elle nécessairement la série de Fourier de f ? Par exemple, en observant que “ $\sin = 0 + 0 \cdot \cos + 1 \cdot \sin + 0$ ” fournit une décomposition de \sin en série trigonométrique, peut-on déduire directement sans calculs que les coefficients de Fourier de \sin sont ceux de ce développement, i.e. tous nuls sauf $b_1(\sin) = 1$? La réponse est affirmative, mais plus ou moins facile à démontrer selon les hypothèses sur f . Voici ce que l’on peut démontrer facilement à notre niveau :

Proposition 4.32. *Si une fonction f est limite uniforme d’une série trigonométrique, alors il s’agit forcément de sa série de Fourier.*

En particulier, d’après le théorème de convergence normale, toute fonction 2π -périodique C^1 par morceaux et continue est limite uniforme d’une unique série trigonométrique : sa série de Fourier.

Démonstration. Supposons qu’une fonction f est limite uniforme sur \mathbb{R} d’une série trigonométrique, de la forme $(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n \cos_n + \beta_n \sin_n)$. On veut montrer qu’alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^{(*)}$, $\alpha_n = a_n(f)$ et $\beta_n = b_n(f)$ (bien définis puisque f est continue comme limite uniforme de fonctions continues, et 2π -périodique comme limite simple de telles fonctions). Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt) \right) \cos(kt) dt \\ &= \frac{\alpha_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(kt) dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} ((\alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)) \cos(kt)) dt. \end{aligned}$$

Or $(\sum_{n \geq 1} \alpha_n \cos_n + \beta_n \sin_n)$ converge uniformément sur \mathbb{R} donc sur $[0, 2\pi]$, et \cos_k est bornée, donc $(\sum_{n \geq 1} (\alpha_n \cos_n + \beta_n \sin_n) \cos_k)$ converge uniformément sur $[0, 2\pi]$ (le vérifier), et on peut appliquer le théorème d'interversion \sum / \int , puis la linéarité simple :

$$a_k(f) = \alpha_0 \delta_{0,k} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\underbrace{\alpha_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(nt) \cos(kt) dt}_{\delta_{k,n}} + \underbrace{\beta_n \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(nt) \cos(kt) dt}_0 \right) = \alpha_k,$$

ce qu'on voulait. \square

Proposition 4.33. *Si une fonction C^0 par morceaux 2π -périodique est limite L_2 d'une série trigonométrique, alors il s'agit forcément de sa série de Fourier.*

Démonstration. Soit f une telle fonction. Supposons qu'il existe une série trigonométrique, de la forme $(\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \alpha_n \cos_n + \beta_n \sin_n) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \gamma_n e_n$, qui tend vers f en norme L_2 . Notons S_n la suite de ses sommes partielles. D'après Parseval, $\|f - S_n(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, et par hypothèse, $\|f - S_n\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or par inégalité triangulaire

$$0 \leq \|S_n - S_n(f)\|_2 \leq \|S_n - f\|_2 + \|f - S_n(f)\|_2$$

donc par encadrement, $\|S_n - S_n(f)\|_2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Mais $S_n - S_n(f) = \sum_{k=-n}^n (\gamma_k - c_k(f)) e_k$ donc par orthonormalité,

$$\|S_n - S_n(f)\|_2^2 = \sum_{k=-n}^n |\gamma_k - c_k(f)|^2,$$

suite positive qui croît avec n et tend vers 0, donc est nécessairement identiquement nulle, donc tous les $\gamma_k - c_k(f)$ sont nuls, ce qu'on voulait. \square

On a enfin le résultat plus difficile suivant, dû à Lebesgue, que l'on admettra ici :

Théorème 4.34. *Si une fonction 2π -périodique est limite simple d'une série trigonométrique, alors il s'agit forcément de sa série de Fourier.*

En particulier, si une fonction est C^1 par morceaux et appartient à \mathcal{D} , elle est limite simple d'une unique série trigonométrique : sa série de Fourier.

III.B Retour sur l'équation de la chaleur

Nous nous demandions au début du chapitre sous quelles conditions sur une fonction f continue sur $[0, \pi]$, nulle au bord, on pouvait trouver $(b_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall x \in [0, \pi], \quad f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

Les résultats du chapitre montrent qu'il suffit de supposer $\tilde{f} \in C^1$ par morceaux et de prendre $b_n = b_n(\tilde{f})$ pour tout n , d'après le théorème de Dirichlet, où \tilde{f} désigne l'unique prolongement impaire et 2π -périodique de f à \mathbb{R} . Exercice : montrer que c'est équivalent à supposer que f est C^1 par morceaux sur $[0, \pi]$.

La fonction $u : [0, \pi] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$(x, t) \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(f) \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

est-elle alors bien définie, C^1 en t et C^2 en x ? Puisque \tilde{f} est C^0 et C^1 par morceaux, d'après le théorème de convergence normale, $(\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |b_n(\tilde{f})|)$ est une série convergente. Or

$$|b_n(\tilde{f})| = \sup_{x \in [0, \pi], t \in \mathbb{R}_+} |u_n(x, t)| \quad \text{avec} \quad u_n(x, t) = b_n(\tilde{f}) \sin(nx) e^{-n^2 t}$$

donc par comparaison de séries numériques, $u(x, t)$ est bien défini pour tout $(x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+$. En outre, pour chaque t , $(\sum_n (x \mapsto u_n(x, t)))$ converge normalement sur $[0, \pi]$, donc u est continue par rapport à x , et de la même façon u est continue par rapport à t .

Étudions maintenant la dérivabilité. Pour tout $n \geq 1$, u_n est C^∞ par rapport aux deux variables, et

$$\forall (x, t) \in [0, \pi] \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) = -n^2 u_n(x, t)$$

de sorte que

$$\sup_{x \in [0, \pi], t \in \mathbb{R}_+} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| = \sup_{x \in [0, \pi], t \in \mathbb{R}_+} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| = n^2 |b_n(\tilde{f})|.$$

Si $(\sum_n n^2 |b_n(\tilde{f})|)$ est convergente, le théorème de dérivation sous le signe somme donne le caractère C^1 en t et C^2 en x de u sur tout son domaine de définition, et le fait que u est solution de $(E) + (CB) + (CI)$ sur ce domaine. Mais la convergence de $(\sum_n n^2 |b_n(\tilde{f})|)$ requiert des hypothèses supplémentaires de régularité sur f . Notons toutefois que notre seule hypothèse de continuité sur f n'était de toute façon pas raisonnable si l'on souhaitait trouver une solution au sens ci-dessus. En effet, supposer qu'il existe une solution u à $(E) + (CB) + (CI)$ sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$ nécessite en particulier que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)$ ait un sens, donc que f soit C^2 , et que

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = \frac{du(0, t)}{dt}(0) = 0 \quad \text{par } (CB),$$

et de même en π . On vérifie (exercice) que sous ces hypothèses, \tilde{f} est C^2 . On a alors $n^2 |b_n(\tilde{f})| = |b_n(\tilde{f}'')|$. Si l'on suppose en outre f'' (et donc \tilde{f}'') C^1 par morceaux, par le théorème de convergence normale, $|b_n(\tilde{f}'')|$ est le TG d'une série CV.

Ainsi, si f est C^2 , de dérivée seconde nulle au bord et C^3 par morceaux, $(E) + (CB) + (CI)$ admet une solution sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$.

Mais si l'on revient au cas où f est seulement supposée continue et C^1 par morceaux, la fonction u définie ci-avant est tout-de-même définie sur $[0, \pi] \times \mathbb{R}_+$, satisfait $(CB) + (CI)$ et (E) sur le domaine $[0, \pi] \times]0, +\infty[$. En effet, pour tout $\alpha > 0$,

$$\sup_{x \in [0, \pi], t \in [\alpha, +\infty[} \left| \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x, t) \right| = \sup_{x \in [0, \pi], t \in [\alpha, +\infty[} \left| \frac{\partial u_n}{\partial t}(x, t) \right| = n^2 |b_n(\tilde{f})| e^{-n^2 \alpha},$$

terme général d'une série convergente (exercice), donc on peut raisonner comme précédemment mais sur $[0, \pi] \times [\alpha, +\infty[$, et ce pour tout $\alpha > 0$.

III.C Généralisation aux fonctions T -périodique

Soit $T \neq 0$ un réel quelconque. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction C_{pm}^0 et T -périodique. La fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $g(t) = f(\frac{T}{2\pi}t)$, de sorte que $f(x) = g(\frac{2\pi}{T}x) = g(\omega x)$ avec $\omega := \frac{2\pi}{T}$, est 2π -périodique et C_{pm}^0 . On peut démontrer tout ce qui suit en généralisant ce qui précède, ou en l'appliquant à g et en traduisant en termes de f .

On définit :

$$\forall f, h \in C_{\text{pm}}^0, \quad \langle f, h \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \overline{h(t)} dt,$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad e_{n,T} : x \mapsto e^{in\omega x}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \cos_{n,T} : x \mapsto \cos(n\omega x) \quad \text{et} \quad \sin_{n,T} : x \mapsto \sin(n\omega x),$$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_{n,T}(f) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \langle f, e_{n,T} \rangle,$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n,T}(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt = 2\langle f, \cos_{n,T} \rangle$$

$$\text{et } b_{n,T}(f) = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt = 2\langle f, \sin_{n,T} \rangle,$$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, S_n(f)(x) &= \sum_{k=-n}^n c_{k,T}(f) e^{ik\omega x} \\ &= \frac{a_{0,T}(f)}{2} + \sum_{k=1}^n a_{k,T}(f) \cos(k\omega x) + b_{k,T}(f) \sin(k\omega x). \end{aligned}$$

Le théorème de Dirichlet devient :

Théorème 4.35. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique et C^1 par morceaux. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(S_n(f)(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge et*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k,T}(f) e^{ik\omega x} = \frac{a_{0,T}(f)}{2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{k,T}(f) \cos(k\omega x) + b_{k,T}(f) \sin(k\omega x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

(= $f(x)$ si f est continue en x).

Celui de convergence normale demeure :

Théorème 4.36. *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction T -périodique C^0 et C^1 par morceaux. Alors sa série de Fourier est normalement donc uniformément convergente (de somme f).*

Et l'égalité de Parseval devient :

Théorème 4.37. *Pour toute $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux et T -périodique,*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_{k,T}(f)|^2 = \frac{|a_{0,T}(f)|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} (|a_{n,T}(f)|^2 + |b_{n,T}(f)|^2) = \frac{1}{T} \int_0^T |f(t)|^2 dt.$$

(Formule de Parseval)