UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

MAT302, cours n°4

Séries de termes quelconques

Odile Garotta

(sur la base du polycopié de Romain Joly) *14 septembre 2020*

Chapitre 2 : Séries à termes positifs

1 Critères de comparaison

2 Séries de Riemann

2.1 Comparaison avec une intégrale

2.2 Séries de Riemann

2.3 Séries de Bertrand

3 Règles de d'Alembert et de Cauchy

Chapitre 3 : Séries de termes quelconques

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux séries $(\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n)$ avec (u_n) une suite de nombres complexes quelconques. Nous avons vu que (u_n) doit tendre vers 0 pour pouvoir espérer que la série converge. Nous avons également vu que la convergence de la série $(\sum |u_n|)$ entraîne celle de $(\sum u_n)$. Mais il est en fait possible que $(\sum u_n)$ converge sans que $(\sum |u_n|)$ converge. Nous illustrons cela par l'exemple type de la série $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n})$,

dont nous admettons (jusqu'à la section prochaine qui en donnera une preuve) qu'elle converge. On peut même montrer que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots = \ln 2 \ .$$

Puisque $(\sum |u_n|) = (\sum \frac{1}{n})$ est divergente, la série $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n})$ est donc convergente, mais pas absolument convergente.

Définition 3.1. *Une série qui converge sans converger absolument est dite* semi-convergente*.*

Il y a donc trois réponses possibles pour la nature des séries de nombres complexes quelconques :

1. la série $(\sum u_n)$ diverge,
2. la série $(\sum u_n)$ converge mais ne converge pas absolument,
3. la série $(\sum u_n)$ converge absolument.

Quand on demande la nature d'une série, il est important de préciser entre la semi-convergence (cad. le type 2) et la convergence absolue. Nous verrons en effet plus tard que certaines manipulations ne sont autorisées que si la série converge *absolument.*

Profitons encore de notre série de référence $(\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n})$ pour montrer que les *critères de comparaison* du chapitre précédent ne sont *pas valables* dans le cas d'une série dont les termes ne sont pas tous positifs. Considérons par exemple les séries $(\sum u_n)$ et $(\sum v_n)$ avec $u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ et $v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \frac{1}{n \ln n}$. On a

$$\frac{v_n}{u_n} = 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{\ln n} \quad \longrightarrow_{n\to\infty} \quad 1$$

et donc $u_n \sim v_n$. On a dit que $(\sum u_n)$ converge. Si $(\sum v_n)$ converge aussi, alors ce devrait être le cas de $(\sum (v_n - u_n))$. Or $v_n - u_n = \frac{1}{n \ln n}$, donc il s'agit d'une série de Bertrand divergente. Ainsi $(\sum v_n)$ diverge, et on a deux séries de termes généraux équivalents qui sont de nature différente.

Nous allons devoir introduire des outils plus perfectionnés pour étudier les séries de termes de signe quelconque qui ne convergent pas en valeur absolue.

2 Séries alternées

Le cas typique et le plus simple est celui des séries alternées.

Définition 3.2. *Une série* $(\sum u_n)$ *est appelée* série alternée *si le terme général est de la forme* $u_n = (-1)^n v_n$ *avec* $v_n \geq 0$ *un réel positif (ou de la forme* $u_n = (-1)^{n+1} v_n$*).*

La convergence des séries alternées est souvent obtenue par le critère suivant :

Théorème 3.3. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série alternée de terme général* $u_n = (-1)^n v_n$ *avec* $v_n \geq 0$*. Si* (v_n) *est une suite décroissante et qui converge vers* 0*, alors* $(\sum u_n)$ *est une série convergente.*

Démonstration : Notons $S_N = \sum_{n=0}^{N} u_n$ ($N \in \mathbb{N}$) les sommes partielles et soient $(P_K = S_{2K})$ et $(Q_K = S_{2K+1})$ les suites extraites paire et impaire. Nous allons montrer que les suites (P_K) et (Q_K) sont adjacentes, c'est-à-dire que
(P_K) est décroissante, (Q_K) est croissante et $|P_K - Q_K|$ tend vers 0.

- La suite (P_K) est décroissante, en effet
  $P_{K+1} - P_K = u_{2K+2} + u_{2K+1} = v_{2K+2} - v_{2K+1} \leq 0$ car (v_n) est décroissante.

- On montre de même que (Q_K) est croissante.
- Enfin, $P_K - Q_K = -u_{2K+1} = v_{2K+1}$ tend bien vers 0.

On a donc deux suites adjacentes, de sorte qu'elles convergent toutes les deux vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Pour conclure que la suite totale (S_N) converge, il suffit de le déduire de ce que ses suites extraites paire et impaire ont même limite. En effet, soit $\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe des rangs K_0 et K_1 tels que si $K \geq K_0$, alors $|S_{2K} - \ell| \leq \varepsilon$ et si $K \geq K_1$, alors $|S_{2K+1} - \ell| \leq \varepsilon$. On pose $N_0 = \max(2K_0, 2K_1+1)$, de sorte que pour tout $N \geq N_0$, on a $|S_N - \ell| \leq \varepsilon$. Cela montre bien que les sommes partielles convergent vers ℓ. $\square$

Un exemple typique est celui de la série alternée $(\sum \frac{(-1)^n}{n})$, qui converge puisque $\frac{1}{n}$ tend vers 0 en décroissant. Il en est de même pour la série $(\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}})$, et on note qu'elle aussi diverge en valeur absolue.

⚠ Considérons la série $(\sum u_n)$ avec $u_n = (-1)^n \sin(1/n)$. Il est vrai que $u_n \sim (-1)^n/n$ qui est le terme général d'une série convergente. Mais attention ! cela ne permet *pas* de conclure que $(\sum u_n)$ converge, car on ne peut utiliser cette comparaison dans le cas de séries de termes de signe quelconque (voir exemple de l'introduction). Il faut donc dire que $(\sin(1/n))$ est une suite positive décroissante vers 0 et utiliser *directement* le théorème précédent.

⚠ Pour appliquer ce critère, il est important de prouver que la suite $(v_n = (-1)^n u_n = |u_n|)$ est *décroissante*. En effet, si on reprend l'exemple $u_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n \ln n}$ de l'introduction, nous avons vu que $(\sum u_n)$ diverge. Pourtant, pour n assez grand, $1/n > 1/(n \ln n)$ et donc u_n est du signe de $(-1)^n$, la série $(\sum u_n)$ est alternée. Son terme général tend vers 0, donc si on ne peut utiliser le théorème précédent, c'est bien que la suite $(|u_n|)$ n'est pas décroissante.

3 Transformation d'Abel

Dans cette partie, nous allons présenter la transformation d'Abel et le critère de convergence associé. Il ne sera pas demandé de connaître par cœur les résultats de cette partie, mais on pourra demander de les appliquer en rappelant l'énoncé, ou d'utiliser votre feuille de notes qui sera autorisée aux examens.

Niels Henrik Abel (1802-1829, Norvège) est avec le français Évariste Galois (1811-1832) le représentant de la figure romantique du génie mathématique qui meurt jeune et incompris. Son nom est associé à un des plus grands prix mathématiques actuels, équivalent du prix Nobel.

La transformation d'Abel est une intégration par partie discrète. On considère une somme $\sum_{n=0}^{N} u_n$ avec $u_n = a_n b_n$. On va « dériver » b_n c'est-à-dire faire apparaître $b_{n+1} - b_n$, noté δb_n et on va « intégrer » a_n, c'est-à-dire faire apparaître $\sum_{k=0}^{n} a_k$, noté A_n. Pour ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{N} a_n b_n &= a_0 b_0 + a_1 b_1 + \ldots + a_N b_N \\
&= a_0(b_0 - b_1) + (a_0 + a_1)(b_1 - b_2) + (a_0 + a_1 + a_2)(b_2 - b_3) + \ldots \\
&\quad + (\sum_{k=0}^{N} a_k)(b_N - b_{N+1}) + (\sum_{k=0}^{N} a_k) b_{N+1} \\
&= A_N b_{N+1} - \sum_{n=0}^{N} A_n \, \delta b_n \,.
\end{aligned}$$

Cette transformation a son intérêt propre, et ici elle nous permet de démontrer le critère suivant :

Théorème 3.4. Critère d'Abel

Soit $(\sum u_n)$ *une série de nombres* complexes *dont le terme général se décompose sous la forme* $u_n = a_n b_n$ *avec*

i) la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$ *est bornée uniformément en* n*,*

ii) la série $(\sum |b_{n+1} - b_n|)$ *est convergente,*

iii) la suite (b_n) *tend vers* 0*.*

Alors la série $(\sum u_n)$ *est convergente.*

Démonstration : Pour prouver la convergence de la série $(\sum u_n)$, on regarde ses sommes partielles. Par la transformation d'Abel, on sait que

$$\sum_{n=0}^{N} a_n b_n = A_N b_{N+1} - \sum_{n=0}^{N} A_n\,\delta b_n \tag{3.1}$$

avec les notations ci-dessus. Les hypothèses nous disent que la suite (A_n) est uniformément bornée en n, disons $|A_n| \leq M$, que (b_n) tend vers 0 et que $(\sum \delta b_n)$ est une série absolument convergente. On en déduit que $|A_N b_{N+1}| \leq M|b_{N+1}|$ tend aussi vers 0 et que

$$|A_n\,\delta b_n| \leq M|\delta b_n|$$

est le terme positif d'une série qui converge. Donc la suite $(\sum_{n=0}^{N} A_n\,\delta b_n)$ converge vers une limite finie. Revenant à (3.1), il vient que les sommes partielles $\sum_{n=0}^{N} a_n b_n$ ont une limite finie et donc que la série converge.

$\square$

En corollaire, on a un critère plus simple pour les cas standard.

Corollaire 3.5. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série de nombres complexes dont le terme général se décompose sous la forme* $u_n = a_n b_n$ *avec*

i) la suite $n \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k$ *est bornée uniformément en* n*,*

ii) la suite (b_n) *est* réelle décroissante *et tend vers* 0*.*

Alors la série $(\sum u_n)$ *est convergente.*

Démonstration : Il suffit de voir que si (b_n) est réelle décroissante vers 0, alors $b_{n+1} - b_n \leq 0$ donc

$$\sum_{n=0}^{N} |b_{n+1} - b_n| = -\sum_{n=0}^{N} (b_{n+1} - b_n) = b_0 - b_{N+1}$$

par une simplification en cascade. Comme b_{N+1} tend vers 0, ces sommes partielles ont une limite et l'item $ii)$ du critère d'Abel est vérifié. $\square$

Exemples :

- Soit $(\sum(-1)^n b_n)$ une série alternée avec (b_n) réelle décroissante vers 0. On est dans le cadre du corollaire si on montre que $(\sum_{k=0}^n (-1)^k)$ est bornée. Mais cette suite ne fait que prendre les valeurs 1 puis 0, puis 1, puis $0\ldots$ On en conclut que *le critère des séries alternées est un corollaire du critère d'Abel.*

- Un exemple typique qui n'est pas une série alternée mais qui peut se traiter avec la transformation d'Abel est la série $(\sum \frac{\cos n}{n})$. Ce n'est pas une série alternée car $(\cos n)$ n'alterne pas toujours de signe. On peut rentrer dans le cadre du corollaire avec $a_n = \cos n$ et $b_n = 1/n$ si on sait montrer que les sommes partielles $(\sum_{k=0}^n \cos k)$ sont bornées.

Pour ce faire, on écrit

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=0}^{n}\cos k\right| = \left|\mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik}\right)\right| &= \left|\mathrm{Re}\left(\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right)\right| \\ &\leq \left|\frac{1-e^{i(n+1)}}{1-e^{i}}\right| \leq \frac{|1|+|e^{i(n+1)}|}{|1-e^{i}|} \\ &\leq \frac{2}{|1-e^{i}|}\ .\end{aligned}$$

On obtient bien que ces sommes de cosinus sont uniformément bornées en n. Notons au passage qu'il est carrément possible de trouver la *valeur* de ces sommes, avec juste un peu plus d'efforts.

4 Sommation par paquets

On pourrait vouloir ne pas sommer les termes d'une série un par un, mais en faisant des paquets. Le calcul suivant nous montre qu'il faut être prudent : $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\ldots = 0$ mais $1+(-1+1)+(-1+1)+\ldots = 1$. On pourrait penser que c'est parce que le terme général de notre série ne tend pas vers 0, mais alors que penser de

$$(1-1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\ldots \;=\; 0$$

et

$$1+\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots \;=\; 1\ ?$$

Formalisons un peu les choses. Soit $(\sum u_n)$ une série et soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante avec $\varphi(0) = 0$ qui va marquer le début des paquets. On appelle *sommation par paquets* associée à φ la série $(\sum v_n)$ avec

$$v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k \, .$$

Autrement dit, si on note S_N la somme partielle $\sum_{n=0}^{N} u_n$, cela revient à considérer la *suite extraite* $(S_{\varphi(N)})$, qui somme directement par paquets d'indices faits des intervalles $[\![\varphi(N), \varphi(N+1) - 1]\!]$.

Théorème 3.6. *Soit* $(\sum u_n)$ *une série et soit* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *une fonction strictement croissante avec* $\varphi(0) = 0$*. Soit* $(\sum v_n)$ *avec* $v_n = \sum_{k=\varphi(n)}^{\varphi(n+1)-1} u_k$ *la série consistant à sommer par paquets. Supposons que* $(|\varphi(n+1) - \varphi(n)|)$ *soit uniformément bornée, c'est-à-dire que la taille des paquets est bornée et supposons que* $u_n \to 0$*. Alors* $(\sum u_n)$ *et* $(\sum v_n)$ *ont même nature.*

Démonstration : Si $(\sum u_n)$ converge, alors $(\sum v_n)$ aussi puisque ses sommes partielles forment une suite extraite des sommes partielles de $(\sum u_n)$.
Supposons maintenant que $(\sum v_n)$ converge et soit $N \in \mathbb{N}$. Il existe un unique entier N' tel que $\varphi(N') \leq N < \varphi(N'+1)$. Soit M entier tel que

pour tout n $|\varphi(n+1)-\varphi(n)| < M$. On a

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{\varphi(N')-1} u_n\right| = \left|\sum_{n=\varphi(N')}^{N} u_n\right| \leq M \max_{\varphi(N')\leq n\leq N} |u_n| \ .$$

Or on a $\varphi(N') > N - M$ qui tend vers l'infini avec N, donc comme (u_n) tend vers 0, on en déduit que

$$\left|\sum_{n=0}^{N} u_n - \sum_{n=0}^{\varphi(N')-1} u_n\right| \xrightarrow[N\longrightarrow+\infty]{} 0 \ . \tag{3.2}$$

Finalement, comme $\sum_{n=0}^{\varphi(N')-1} u_n = \sum_{n=0}^{N'-1} v_n$, et que les sommes partielles de la série des v_n convergent, (3.2) montre que cela doit aussi être le cas pour les sommes partielles de la série d'origine. $\square$

Remarque : Si la série d'origine converge, toute sommation par paquets de la série converge également et donne la *bonne valeur de la somme*. En effet étudier une série sommation par paquets consiste à regarder une sous-suite des sommes partielles de la série d'origine. Il y a donc aussi convergence, et vers la même limite.

Exemple : On considère la série $(\sum_{n\geq 2} u_n)$ avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.
A priori, c'est un bon candidat pour le critère des séries alternées...
sauf que la suite $(1/(n+(-1)^n))_{n\geq 2}$ n'est pas décroissante : en effet son inverse (u'_n) vérifie $u'_{2k} = 2k+1 > u'_{2k+1} = 2k > 0$.

Comme u_n tend vers 0, nous pouvons regarder la nature de la série en sommant par paquets de taille bornée, ici *par paquets de deux*. On a

$$u_{2n}+u_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}+\frac{(-1)}{2n+1+(-1)} = \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n} = \frac{2n-(2n+1)}{2n(2n+1)} = \frac{-1}{2n(2n+1)}\,.$$

Donc $(v_n = u_{2n} + u_{2n+1})$ est une suite négative et $v_n \sim \frac{-1}{4n^2}$. Ce que nous avons dit pour les séries à termes positifs vaut évidemment aussi pour les séries à termes négatifs, quitte à changer v_n en $-v_n$. On peut donc utiliser l'équivalence avec une série de Riemann convergente pour conclure que $(\sum v_n)$ converge et donc $(\sum u_n)$ aussi.

Au passage, notons que l'on peut également traiter cet exemple par un *développement limité*. Comme les termes de la série ne sont pas de signe constant, on ne peut s'arrêter à un équivalent. Il faut aller jusqu'à ce que le reste soit contrôlé par le terme d'une série absolument convergente. On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\frac{(-1)^n}{n}} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\mathcal{O}(\frac{1}{n})\right) = \frac{(-1)^n}{n} + \mathcal{O}(\frac{1}{n^2}) \ .$$

Le terme général u_n est donc la somme du terme général d'une série alternée convergente et d'un reste dont la valeur absolue est contrôlée par le terme d'une série de Riemann convergente. Donc la série $(\sum u_n)$ est convergente.