

# Cours d'électricité en régime alternatif

**L1 - Année 2019-2020**

**UE PHY 201**

# **1      Introduction**

## **1.1    Pourquoi étudier le courant alternatif ?**

A l'exception des centrales photovoltaïques, l'électricité produite dans le monde est fournie par des générateurs rotatifs.

Le principe de fonctionnement d'un générateur rotatif consiste à faire tourner (varier) un champ magnétique devant une bobine (ou l'inverse), ce qui induit une tension alternative aux bornes de la bobine :

$$u(t) = U_m \cos (\omega t)$$



Moteur à explosion

Turbine à vapeur

Générateur Diesel

Turbines à eau

L'objet de ce cours consiste à étudier l'électricité en Courant Alternatif (AC en anglais : Alternative Current), par opposition au Courant Continu (DC en anglais : Direct Current), lequel a été étudié au premier Semestre.

## **1.2    Approximation du régime quasi-stationnaire**

Dans les circuits que nous allons étudier, le courant et la tension varient lentement par rapport au temps d'établissement du courant d'un bout à l'autre du circuit. C'est l'Approximation du Régime Quasi-Stationnaire (ARQS).

Si l'ARQS est vérifiée, le courant  $i(t)$  est le même en tout point d'une branche d'un circuit. Les Lois de Kirchhoff et la Loi d'Ohm restent valides en AC :

- $\sum u(t) = 0$       autour d'une maille.
- $\sum i(t) = 0$       en un nœud.
- $u(t) = R i(t)$       pour une résistance.
- $u(t) = e(t) - r i(t)$       pour un générateur.

Remarquons que l'ARQS reste valable pour des signaux jusqu'à des fréquences assez élevées : en effet, l'onde de tension (et de courant) s'établit dans un circuit à la vitesse  $c \approx 3.10^8$  m/s (vitesse de propagation de l'information). Pour un circuit de taille  $\ell \approx 1$  m, le courant s'établit dans tout le circuit en un temps :  $\tau = \ell/c = 3,3.10^{-9}$  s.

En comparant ce temps caractéristique  $\tau$  d'établissement du courant, à la période  $T$  d'un signal de fréquence  $f$ , on voit que l'ARQS est valide pour des fréquences  $f$  telles que :

$$1/T = f \ll 1/\tau = 3.10^8 \text{ Hz}$$

On voit que l'ARQS sera vérifiée dans la plupart des situations courantes, notamment en situation de TP où les générateurs dépassent rarement 10 MHz.

# **2      Grandeur Physiques en électricité**

## **2.1    Rappels : tension, courant, impédance, admittance**

- La tension  $u$  (ou différence de potentiel, en Volts) peut être vue comme une mesure de la différence de densité de charges entre deux points d'un circuit : en présence d'une tension, les électrons subissent une force électrostatique orientée de la zone la plus dense en électrons vers la zone la moins dense.

- Le courant  $i$  est une mesure du flux de charges (Coulombs) par unité de temps (Ampère = C/s). Les grandeurs  $u$  et  $i$  sont des grandeurs réelles, que l'on peut mesurer respectivement à l'aide d'un voltmètre et d'un ampèremètre.
  - L'impédance électrique d'un dipôle, généralement notée  $Z$ , représente l'aptitude d'un composant à *freiner* le passage du courant lorsqu'on lui impose une certaine différence de potentiel.
- Pour un élément d'impédance  $Z$ , la relation entre la tension et le courant s'écrit :
- $$u = Z i$$
- Pour une tension  $u$  donnée, on obtient un courant  $i$  d'autant plus grand que l'impédance est faible. Et inversement. Autrement dit, on peut voir la tension  $u$  comme une « excitation » à laquelle le composant réagit en laissant passer un courant  $i$  (« réponse ») qui dépend de son impédance  $Z$ .
- L'admittance  $Y$  d'un dipôle est l'inverse de son impédance :  $Y = 1/Z$ . Pour un élément d'impédance  $Z$ , et d'admittance  $Y$ , on a :

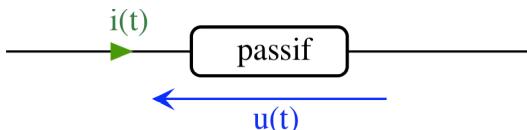
$$u = Z i \quad \text{et} \quad i = Y u$$

## 2.2 Conventions de représentation

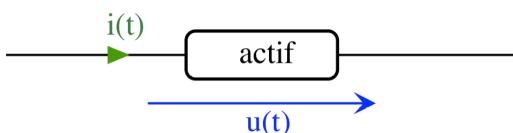
La tension aux bornes d'un élément est représentée par une flèche à côté de l'élément, pointant vers la zone de potentiel élevé (= zone de charge relative positive = zone de faible densité en électrons).

Le courant est représenté par une flèche tracée sur les fils.

Pour un élément passif (ne fournissant pas d'énergie), le courant descend les potentiels, et la flèche du courant pointe en sens contraire de la flèche de tension. Le courant circule donc en sens contraire des électrons (comme si le courant représentait un mouvement de charges positives qui se déplaçaient dans le conducteur).



Pour un élément actif (fournissant de l'énergie), le courant remonte les potentiels, et la flèche du courant pointe dans le même sens que la flèche de tension.



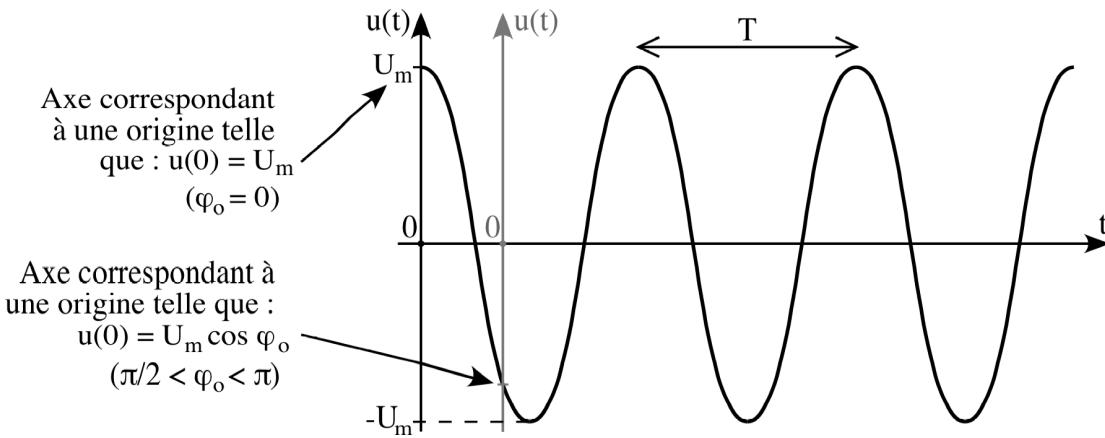
## 2.3 Grandeurs sinusoïdales

Les grandeurs  $u$  et  $i$  peuvent varier au cours du temps. Par convention, on représentera les grandeurs variables par des lettres minuscules ( $u(t)$  et  $i(t)$  ou  $u$  et  $i$ ), et on utilisera des lettres majuscules ( $U$  et  $I$ ) pour des grandeurs continues (ou constantes).

En électricité, la plupart des signaux sont sinusoïdaux, ou peuvent être décomposés en signaux élémentaires sinusoïdaux (cf. TP n°4 : Décomposition de Fourier). Par exemple, une tension sinusoïdale s'écrit :

$$u(t) = U_m \cos (\omega t + \varphi_0)$$

- $U_m$  (en Volt) est l'amplitude (ou valeur maximale) du signal ( $U_m \geq 0$ ),
- $\omega$  est la pulsation (en rad.s<sup>-1</sup>) avec  $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$ ,
- $f$  est la fréquence du signal (qui s'exprime en Hz = s<sup>-1</sup>),
- $T$  est la période du signal (en s),
- $\varphi_0$  est la phase du signal par rapport à l'origine du temps : à l'instant  $t = 0$ , on a  $u(t=0) = U_m \cos \varphi_0$ .



## 2.4 Excitation et réponse

Pour un élément d'impédance  $Z$ , la relation instantanée entre la tension et le courant s'écrit :

$$u(t) = Z i(t)$$

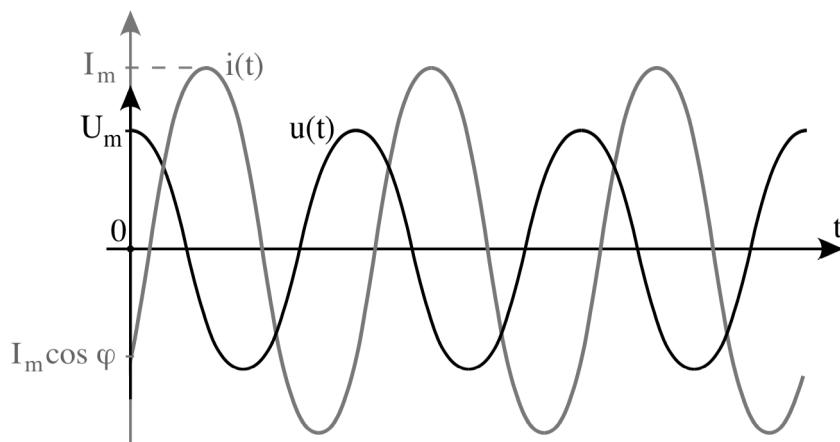
Pour simplifier les expressions, et dans la mesure du possible, on choisit généralement l'origine du temps de façon à avoir  $\varphi_0 = 0$  :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t)$$

La « réponse » du composant soumis à « l'excitation »  $u(t)$  est le courant  $i(t)$ . En pratique, cette réponse contient 2 informations : une amplitude et une phase (par rapport à l'excitation). On pourra noter :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

- $I_m$  (en Ampère) est l'amplitude (ou valeur maximale) du courant ( $I_m \geq 0$ ),
- $\omega$  est la pulsation (en  $s^{-1}$ ). La pulsation (ou la fréquence) de la réponse est nécessairement égale à celle de l'excitation (dans l'ARQS, la réponse ne peut accumuler ni avance ni retard par rapport à l'excitation).
- $\varphi$  est le déphasage du courant par rapport à la tension, c'est à dire par rapport à l'origine du temps (on rappelle que l'on a choisi l'origine du temps telle que :  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ ).



Attention : sur cette figure, la tension et le courant sont tracés sur un même graphe par commodité, mais ils correspondent à deux grandeurs distinctes et d'unités différentes. Ce graphe possède donc deux échelles distinctes en ordonnée : l'une en Volts et l'autre en Ampères.

Remarque : ces notions d'« excitation » et de « réponse » sont relatives, puisque l'on peut aussi considérer que lorsqu'un composant est soumis à un courant (imposé par le reste du circuit), cette « excitation » provoque l'apparition d'une tension aux bornes du composant (« réponse »).

En tous les cas, il existe une relation univoque entre les deux grandeurs, relation qui s'écrit :  $u(t) = Z i(t)$  ou  $i(t) = u(t) / Z$ .

## 2.5 Changement de l'origine du temps

Le choix de l'origine du temps (instant où l'on « démarre le chronomètre ») est arbitraire et ne change pas la Physique. Supposons - comme au paragraphe précédent - que l'on choisisse l'origine du temps au moment où la tension  $u(t)$  atteint sa valeur maximale. La tension s'écrit :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t) \quad (\text{soit} \quad u(t=0) = U_m)$$

Et de façon générale, le courant  $i(t)$  s'écrit alors :

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$$

où le déphasage  $\varphi$  peut être compris entre  $-\pi$  et  $+\pi$ .

On peut alors décider d'effectuer un changement (décalage) de l'origine du temps de  $\delta t = \varphi/\omega$ . Ceci correspond au changement de variable :  $t \rightarrow t - \delta t = t - \varphi/\omega$ . La tension devient alors :

$$u(t) = U_m \cos[\omega(t - \varphi/\omega)]$$

Soit :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t - \varphi)$$

Et le courant s'écrit :

$$i(t) = I_m \cos[\omega(t - \varphi/\omega) + \varphi]$$

Soit :

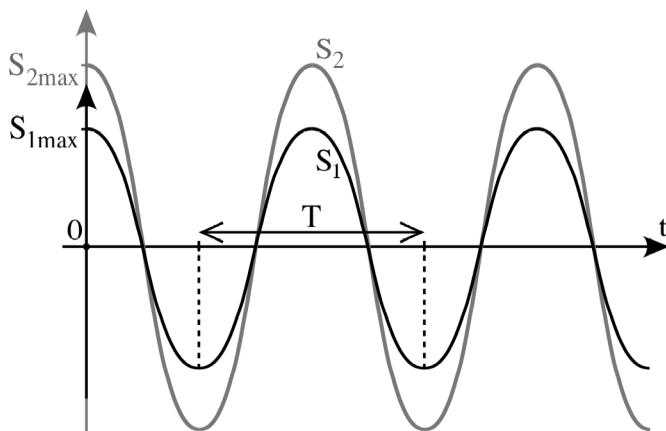
$$i(t) = I_m \cos(\omega t)$$

Cette nouvelle origine du temps correspond cette fois au moment où le courant  $i(t)$  passe par sa valeur maximale  $I_m$ .

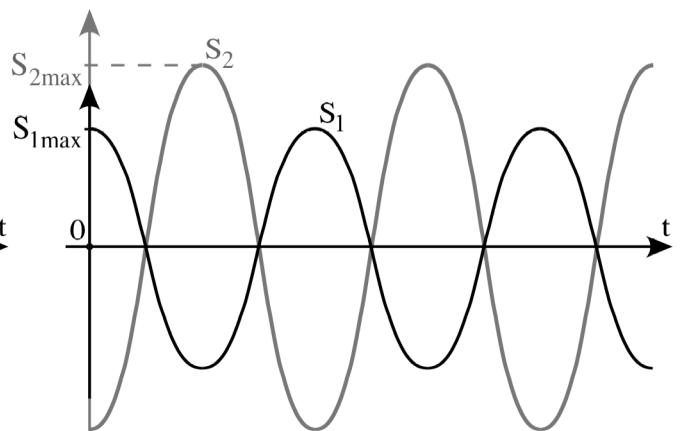
Globalement, on voit qu'un déphasage du courant de  $+\varphi$  par rapport à la tension (première origine du temps) est tout à fait équivalent à un déphasage de la tension de  $-\varphi$  par rapport au courant (seconde origine du temps).

## 2.6 Déphasages

- Lorsque deux signaux (par exemple l'« excitation » et la « réponse » d'un dipôle) atteignent leurs extrema en même temps et passent par zéro en même temps, on dit qu'ils sont en phase.
- Lorsqu'un signal atteint son maximum au moment où l'autre atteint son minimum, on dit que ces signaux sont en opposition de phase.



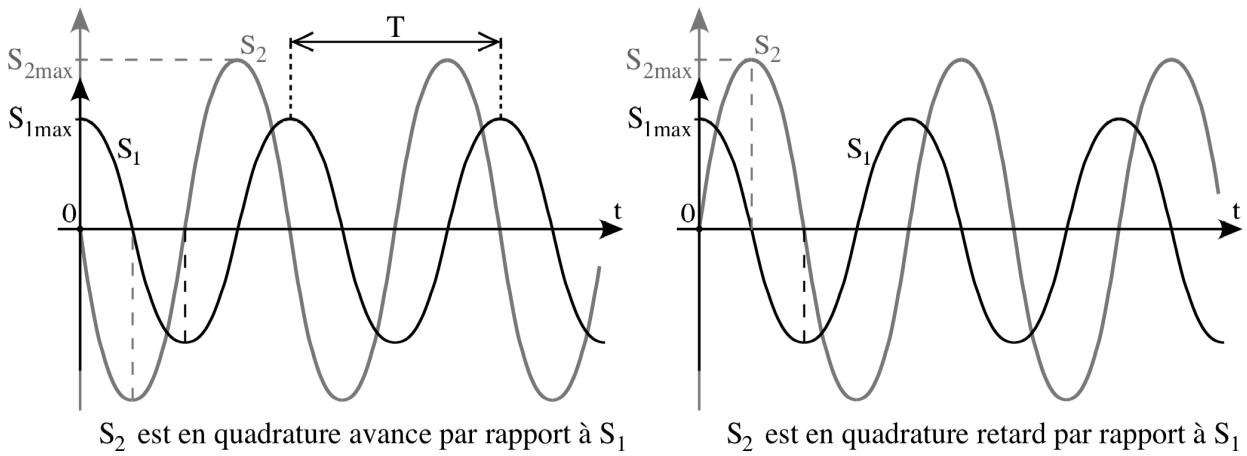
Signaux en phase



Signaux en opposition de phase

- Lorsque deux signaux sont décalés d'un quart de période, on dit qu'ils sont en quadrature de phase. Cette quadrature peut être « avance » ou « retard ».

On verra plus loin que la notion de déphasage intervient notamment dans les calculs de facteur de puissance. De même, c'est une notion centrale dans la conception de filtres HiFi et la conception de systèmes d'asservissement.



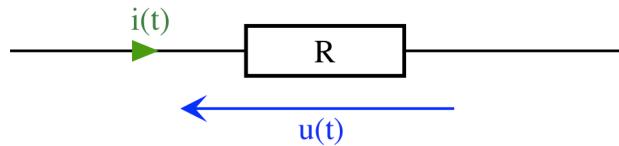
### **3 Composants élémentaires**

#### **3.1 Résistance**

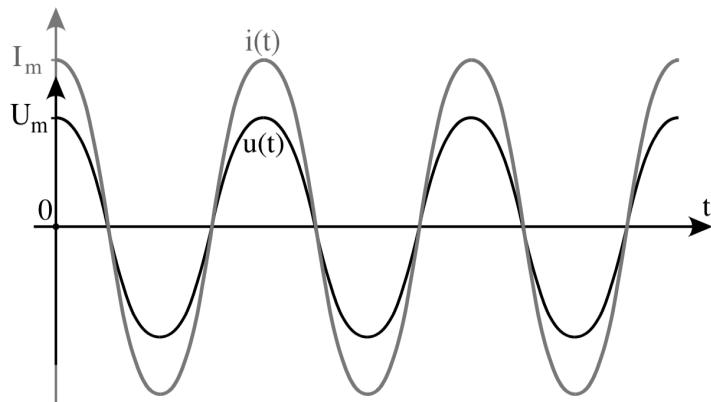


Une résistance suit la Loi d'Ohm qui s'écrit :  $u(t) = R i(t)$ , c'est à dire  $Z = R$ , qui est une grandeur réelle qui s'exprime en Ohms :  $\Omega$ . Autrement dit, le courant s'écrit :  $i(t) = u(t)/R$ .

Une résistance n'introduit pas de déphasage entre le courant et la tension (tous deux passent en même temps par leurs extrema, et passent en même temps par zéro).



Si la tension est sinusoïdale :  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$  alors  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$  avec :  $U_m = RI_m$  : les amplitudes  $U_m$  et  $I_m$  sont proportionnelles. Et on voit qu'il n'y a pas de déphasage entre  $u(t)$  et  $i(t)$  :



Déphasage nul entre le courant et la tension dans une résistance.

#### **3.2 Bobine d'induction**

Une bobine (ou solénoïde, ou inductance, ou self) est constituée de l'enroulement d'un fil conducteur autour d'un noyau en matériau ferromagnétique.

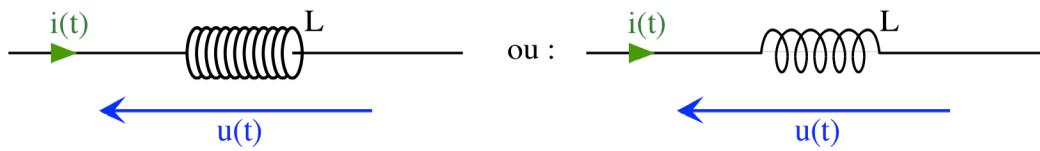


En étudiant l'auto-induction du champ magnétique créé par la bobine sur elle-même, on peut montrer que la relation entre la tension aux bornes d'une bobine idéale et le courant qui la traverse s'écrit :

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

$L$  est l'inductance de la bobine, qui s'exprime en Henry : H.

Le schéma conventionnel est le suivant :



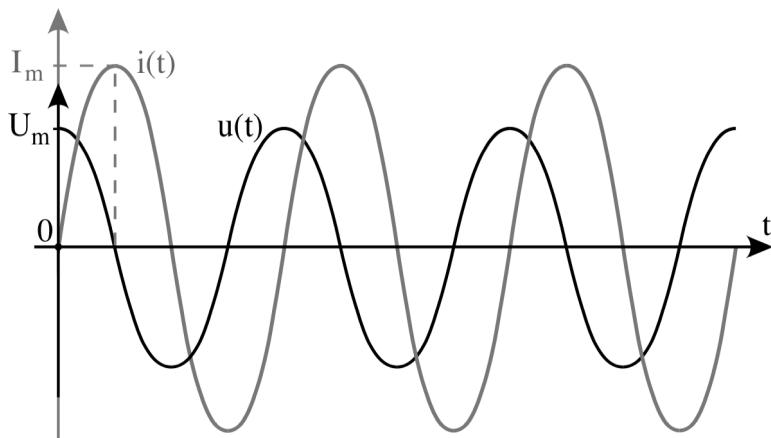
La relation précédente indique que si le courant est croissant ( $di/dt \geq 0$ ), la tension aux bornes de la bobine est positive, et inversement.

Si le courant est sinusoïdal :  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$

alors en dérivant, on a :  $u(t) = -L\omega I_m \sin(\omega t)$

que l'on peut écrire :  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \pi/2)$  avec :  $U_m = L\omega I_m$ .

On voit que la dérivée fait apparaître un déphasage de  $\pi/2$  entre la tension aux bornes de l'inductance et le courant la traversant. La tension est en avance de  $\pi/2$  par rapport au courant (autrement dit, le courant est en quadrature retard par rapport à la tension). Lorsque  $i(t)$  atteint son maximum, la tension  $u(t)$  passe par zéro en décroissant.



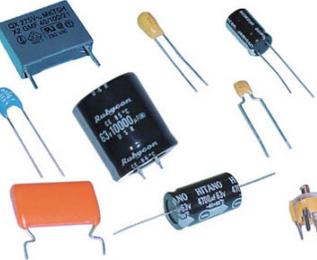
Déphasage entre le courant et la tension dans une bobine d'induction.

### 3.3 Condensateur

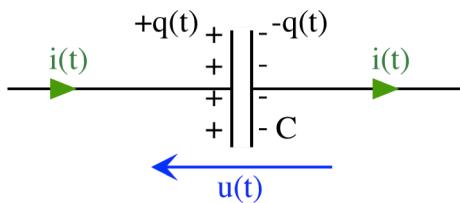
Un Condensateur (ou capacité, par abus de langage) est constitué de deux armatures conductrices en regard. Ces armatures peuvent avoir diverses formes et tailles, et elles sont séparées par un isolant ou par un matériau diélectrique.

Lorsqu'un courant (des charges) arrive sur une armature, il ne peut pas passer sur l'autre armature à cause de l'isolant, mais les charges peuvent s'accumuler sur l'armature. Par effet électrostatique, les

charges de même signe de l'autre armature sont repoussées, et le condensateur porte à tout moment deux quantités de charges opposées sur ses deux armatures (la charge globale est nulle).



Le schéma conventionnel est le suivant :



A tout instant, la quantité de charge  $q(t)$  portée par une armature du condensateur et la tension  $u(t)$  à ses bornes sont proportionnelles. La constante de proportionnalité est la « capacité »  $C$  du condensateur :

$$q(t) = C u(t)$$

Comme on sait que le courant est égal à la dérivée de la charge qui circule dans un circuit, on peut écrire :

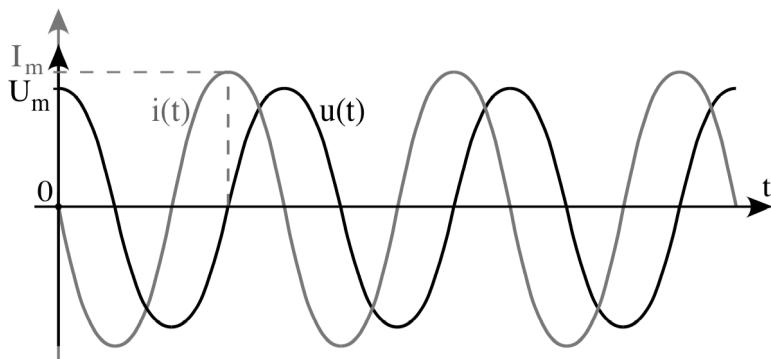
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}$$

Cette relation indique que si la tension est croissante aux bornes d'un condensateur ( $du/dt \geq 0$ ), alors le courant est positif, et inversement.

En particulier, si on a une tension sinusoïdale :  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$  alors  $i(t) = -C\omega U_m \sin(\omega t)$

que l'on peut écrire :  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \pi/2)$

avec :  $I_m = C\omega U_m$  ou  $U_m = I_m/C\omega$ .



Déphasage entre le courant et la tension dans un condensateur.

On voit que la dérivée fait apparaître un déphasage de  $\pi/2$  entre le courant ‘traversant’ le condensateur et la tension à ses bornes. Le courant est en avance de  $\pi/2$  par rapport à la tension (autrement dit, le courant est en quadrature avance par rapport à la tension). Lorsque  $i(t)$  atteint son maximum, la tension  $u(t)$  passe par zéro en croissant.

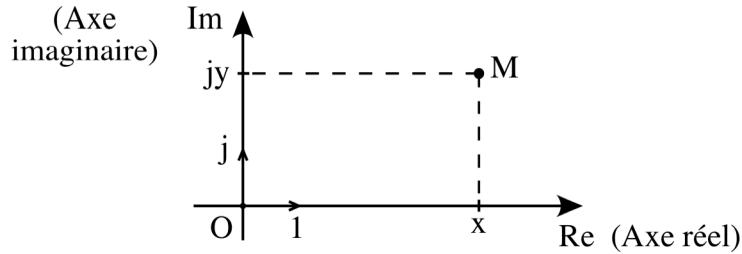
## 4 Formalisme complexe

### 4.1 Rappel sur les complexes : conventions de notation

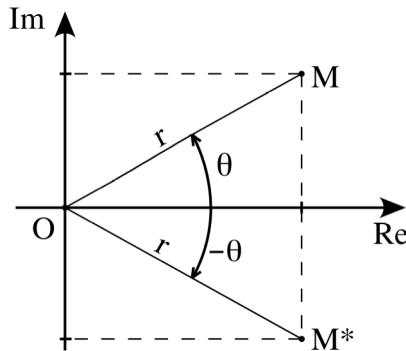
Dans ce cours, les nombres complexes seront représentés par une lettre soulignée :  $\underline{z}$  (cette convention est assez courante, mais elle n'est pas universelle). Considérons le nombre complexe de partie réelle  $x$  et de partie imaginaire  $y$  :  $\underline{z} = x + jy$ , où  $x$  et  $y$  sont des réels :  $x = \text{Re}(\underline{z})$  et  $y = \text{Im}(\underline{z})$ .

«  $j$  » est le nombre imaginaire pur :  $j^2 = -1$  (on n'utilise pas la notation «  $i$  » pour éviter la confusion avec l'intensité d'un courant).

On peut représenter les nombres complexes dans un plan muni de 2 axes, où le nombre  $\underline{z} = x + jy$  est associé au point  $M(x,y)$  :



Le complexe conjugué de  $\underline{z}$  est noté  $\underline{z}^*$  et il s'écrit :  $\underline{z}^* = x - jy$ . Ce complexe conjugué est représenté par le point  $M^*$ , symétrique du point  $M$  par rapport à l'axe réel :



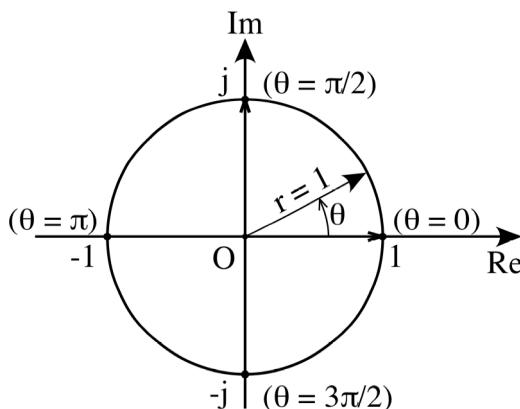
### 4.2 Représentations polaire et exponentielle

En projetant sur les axes réel et imaginaire, on peut écrire :  $\underline{z} = x + jy = r \cos \theta + j r \sin \theta$ . Soit :

$\underline{z} = r [\cos \theta + j \sin \theta]$ , c'est à dire :

$$\underline{z} = r e^{j\theta}$$

(c'est la formule d'Euler), où  $r$  et  $\theta$  correspondent aux coordonnées polaires du point  $M$ .



$$\begin{aligned} e^{j\pi/2} &= j \\ e^{j\pi} &= -1 \\ e^{j3\pi/2} &= -j \\ e^{j2\pi} &= e^0 = 1 \end{aligned}$$

On voit que :  $x = r \cos \theta$  et  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $y = r \sin \theta$  et  $\theta = \text{Arc tg}(y/x)$

- $r$  est le module de  $\underline{z}$ , que l'on note :  $|\underline{z}| = r$
- $\theta$  est l'argument de  $\underline{z}$ , que l'on note :  $\text{Arg}(\underline{z}) = \theta$ .

Le complexe conjugué de  $\underline{z}$  s'écrit :  $\underline{z}^* = x - jy = r e^{j(\theta_0)}$ . Le cercle trigonométrique ( cercle de rayon  $r = 1$  dans le plan complexe) permet de définir certaines grandeurs remarquables :

La notation exponentielle permet de simplifier de nombreux calculs. Elle permet notamment d'exprimer les fonctions trigonométriques :

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad \text{et} \quad e^{-j\theta} = \cos \theta - j \sin \theta$$

d'où :  $\cos \theta = \frac{1}{2} (e^{j\theta} + e^{-j\theta})$  et  $\sin \theta = \frac{1}{2j} (e^{j\theta} - e^{-j\theta})$

Ce qui permet de retrouver assez aisément la plupart des formules trigonométriques.

#### 4.3 Produits et quotients

Le produit de deux nombres complexes s'écrit :

$$\underline{z} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 [\cos \theta_1 + j \sin \theta_1] \cdot r_2 [\cos \theta_2 + j \sin \theta_2]$$

On pourrait développer les produits en sinus et cosinus, mais il est plus simple de passer en écriture complexe :

$$\underline{z} = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = r_1 e^{j\theta_1} \cdot r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

On voit directement que :  $|\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| \cdot |\underline{z}_2|$  et  $\text{Arg}(\underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2) = \text{Arg}(\underline{z}_1) + \text{Arg}(\underline{z}_2)$ .

De la même façon, pour un quotient, on a :

$$\underline{z} = \underline{z}_1 / \underline{z}_2 = (r_1 e^{j\theta_1}) / (r_2 e^{j\theta_2}) = (r_1 / r_2) e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$$

On voit donc que :  $|\underline{z}_1 / \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| / |\underline{z}_2|$  et  $\text{Arg}(\underline{z}_1 / \underline{z}_2) = \text{Arg}(\underline{z}_1) - \text{Arg}(\underline{z}_2)$ .

#### 4.4 Fonctions sinusoïdales

L'utilisation de grandeurs sinusoïdales permet l'emploi du formalisme complexe, ce qui simplifie les expressions. En effet, la tension sinusoïdale  $u(t)$  :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t)$$

est égale à la *partie réelle* de la grandeur  $U_m \exp(j\omega t)$  :

$$u(t) = \text{Re}[U_m \exp(j\omega t)]$$

Par convention, on écrira simplement (sans noter  $\text{Re}[\dots]$ ) :

$$\underline{u}(t) = U_m \exp(j\omega t)$$

en se souvenant que la grandeur physique à laquelle on s'intéresse est la partie réelle du nombre complexe considéré.

On a vu que sous l'effet d'une tension d'excitation  $u(t)$ , un composant "résiste" au passage du courant par l'intermédiaire son impédance. Et bien, les impédances peuvent également être représentées par des nombres complexes : ainsi la grandeur  $\underline{Z}$  comporte 2 caractéristiques :

- Le module de  $\underline{Z}$ , qui conditionne l'amplitude  $I_m$  du courant pour une tension d'amplitude  $U_m$  donnée.
- L'argument de  $\underline{Z}$ , qui conditionne le déphasage de  $i(t)$  par rapport à  $u(t)$ . En effet, on verra plus loin que certains composants introduisent un déphasage entre le courant et la tension.

#### 4.5 Impédance et admittance complexes

Nous noterons  $\underline{Z}$  les impédances complexes des composants ou des circuits électriques : cette notation contient les informations sur le module et la phase :

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\theta)$$

Que l'on peut aussi noter :

$$\underline{Z} = x + jy$$

où le module de  $\underline{Z}$  est :

$$|\underline{Z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

et l'argument :  $\text{Arg}(\underline{Z}) = \theta$  est tel que :

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{y}{x}$$

Suivant le cas, on utilisera soit la notation  $\underline{Z} = x + jy$ , soit la notation  $\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\theta)$ .

L'admittance  $\underline{Y}$  est un nombre complexe qui est l'inverse de l'impédance complexe :  $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$ . Par suite, si  $\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\theta)$  alors :

$$\underline{Y} = [|\underline{Z}| \exp(j\theta)]^{-1} = |\underline{Z}|^{-1} \exp(-j\theta).$$

#### 4.6 Expression du courant en fonction de la tension

Si l'on connaît l'impédance  $\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\theta)$  d'un composant (ou d'un circuit), on peut écrire directement la relation entre la tension à ses bornes et le courant qui le traverse (on pourrait appeler cette relation la « Loi d'Ohm généralisée ») :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z} i(t)$$

Choisissons par exemple l'origine du temps telle que :  $i(t) = I_m \exp j(\omega t)$  et écrivons l'expression générale de la tension sous la forme :  $\underline{u}(t) = U_m \exp j(\omega t + \varphi)$ .

A partir de l'expression  $\underline{u}(t) = \underline{Z} i(t)$ , on va exprimer l'amplitude  $U_m$  et le déphasage  $\varphi$  en fonction de l'impédance  $\underline{Z}$  :

$$\begin{aligned} U_m \exp j(\omega t + \varphi) &= [|\underline{Z}| \exp(j\theta)] I_m \exp j(\omega t) \\ &= |\underline{Z}| I_m \exp j(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

En identifiant les modules et les phases, on voit que :

$$U_m = |\underline{Z}| I_m$$

et

$$\omega t + \varphi = \omega t + \theta$$

soit :

$$\varphi = \theta \text{ (à } 2\pi \text{ près)}$$

L'expression globale est donc :

$$\underline{u}(t) = |\underline{Z}| I_m \exp j(\omega t + \theta)$$

En résumé : un composant (ou un circuit) d'impédance :  $\underline{Z} = |\underline{Z}| \exp(j\theta)$  (où  $\theta$  peut être  $> 0$  ou  $< 0$ ) :

- impose un rapport  $|\underline{Z}|$  entre l'amplitude de la tension et l'amplitude du courant :

$$U_m / I_m = |\underline{Z}|$$

- et impose un déphasage  $\theta$  entre le courant et la tension.

Si :  $i(t) = I_m \exp j(\omega t)$

alors :  $\underline{u}(t) = U_m \exp j(\omega t + \theta)$

- Si  $0 < \theta < \pi$  alors le courant est en retard sur la tension.

- Si  $-\pi < \theta < 0$  alors le courant est en avance sur la tension.

Remarque : Si l'on avait choisi l'origine du temps telle que :

$$\underline{u}(t) = U_m \exp j(\omega t)$$

alors le courant aurait été :  $i(t) = (U_m / |\underline{Z}|) \exp j(\omega t - \theta)$  ce qui ne change pas les raisonnements qui précédent.

Exemple : voici une situation où le courant est en avance sur la tension (le courant atteint son maximum avant la tension) :

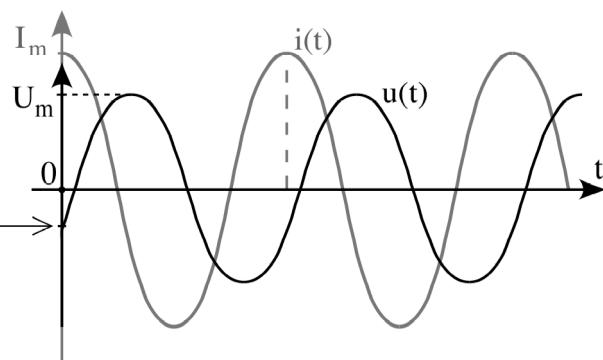
$$i(t) = I_m \exp j(\omega t)$$

et

$$u(t) = U_m \exp j(\omega t + \theta)$$

soit :

$$u(t=0) = U_m \cos \theta$$



Sur cet exemple, on voit que  $\cos \theta < 0$  et plus précisément :  $-\pi < \theta < -\pi/2$ .

## 5 Impédances complexes des composants usuels

### 5.1 Impédance d'une résistance

Une résistance possède une impédance  $Z_R = R$  qui est purement réelle : une résistance n'introduit pas de déphasage entre le courant qui la traverse et la tension à ses bornes (tous deux passent en même temps par leurs extrêmes, et passent en même temps par zéro).

La Loi d'Ohm est valable en alternatif, et on peut écrire :

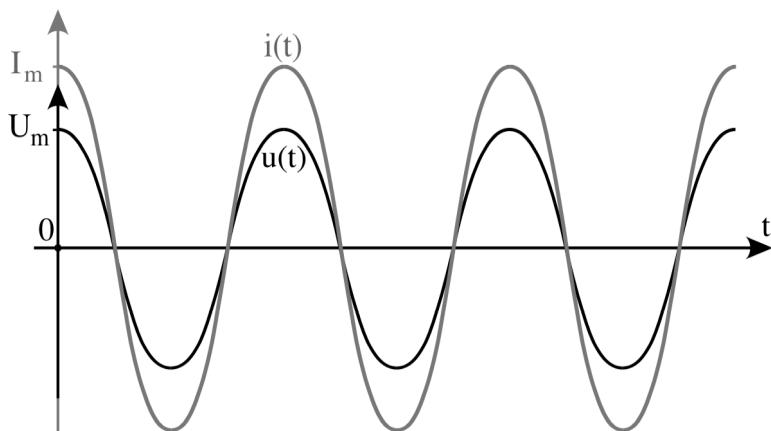
$$u(t) = R i(t)$$

Soit :

$$U_m \exp j(\omega t) = R I_m \exp j(\omega t)$$

et :

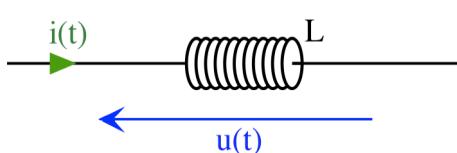
$$I_m = U_m / R$$



Voir une animation sur : [http://physics.bu.edu/~duffy/semester2/c20\\_AC.html](http://physics.bu.edu/~duffy/semester2/c20_AC.html)

### 5.2 Impédance d'une bobine d'induction

On a vu que la relation entre la tension aux bornes d'une bobine idéale et le courant qui la traverse s'écrit :  $u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$



Si le courant s'écrit :  $i(t) = I_m \exp j(\omega t)$

alors en dérivant :  $u(t) = jL\omega I_m \exp j(\omega t)$

$$= [\exp j(\pi/2)] L\omega I_m \exp j(\omega t)$$

$$= L\omega I_m \exp j(\omega t + \pi/2)$$

En identifiant cette expression avec :  $\underline{u}(t) = U_m \exp j(\omega t + \theta)$  on voit que l'impédance d'une bobine s'écrit :

$$\underline{Z}_L = L\omega \exp j(\pi/2) = jL\omega$$

qui est une grandeur purement imaginaire.

- Le déphasage  $\theta$  entre le courant traversant l'inductance et la tension à ses bornes est constant :  $\theta = \pi/2$ .

*Comme  $\theta = \pi/2 > 0$ , le courant est en retard de  $\pi/2$  par rapport à la tension.*

- Le module de l'impédance :  $|Z_L| = L\omega$  est proportionnel à la fréquence : pour une tension  $u$  donnée, l'amplitude du courant est grande lorsque la fréquence  $f$  est faible, et inversement.

Cette dépendance de l'amplitude (ou de l'impédance) avec la fréquence est une caractéristique nouvelle : une telle dépendance n'existe pas pour une résistance.

- En résumé : pour un courant :  $i(t) = I_m \exp j\omega t$

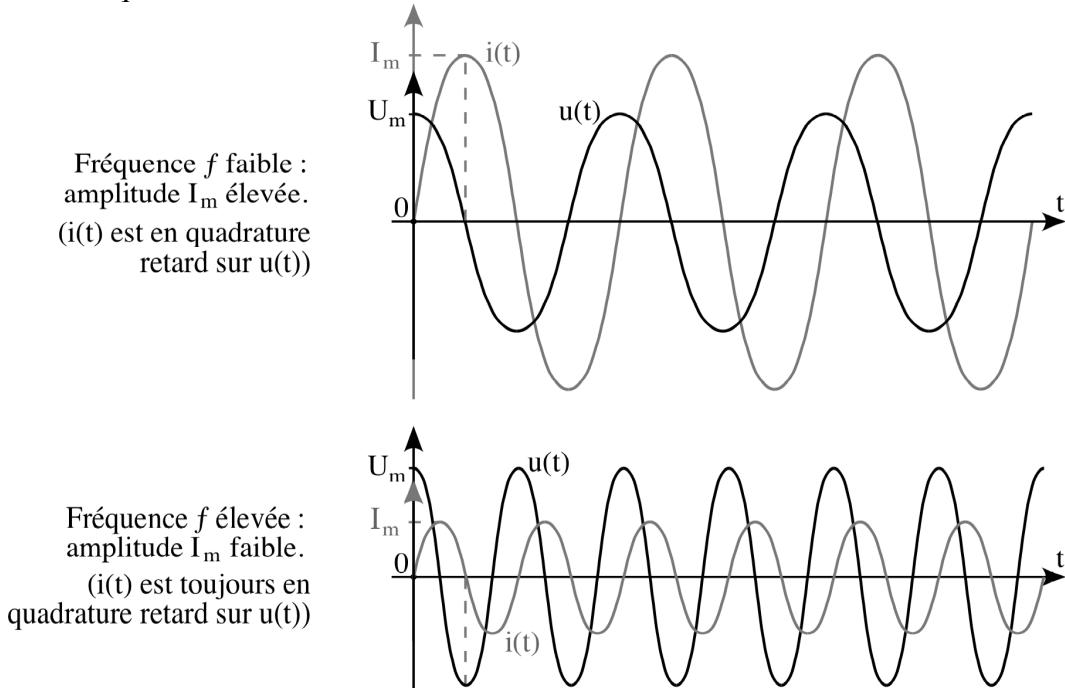
on a :  $\underline{u}(t) = (L\omega I_m) \exp j(\omega t + \pi/2)$

- Et inversement (en changeant l'origine du temps) :

pour une tension :  $\underline{u}(t) = U_m \exp j\omega t$

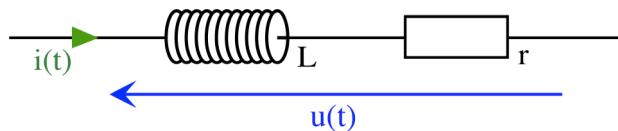
on a :  $i(t) = (U_m/L\omega) \exp j(\omega t - \pi/2)$

Si l'on impose une tension d'amplitude fixe  $U_m$  aux bornes d'une bobine, l'amplitude du courant dépend de la fréquence :



Voir une animation sur : [http://physics.bu.edu/~duffy/semester2/c20\\_AC.html](http://physics.bu.edu/~duffy/semester2/c20_AC.html) (cliquer sur 'Inductor')

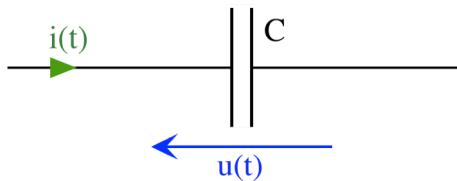
Remarque : Une bobine réelle comporte toujours une petite composante résistive  $r$  (parfois négligeable) modélisée en série avec l'inductance  $L$ . L'impédance complète s'écrit :  $\underline{Z}_L = r + jL\omega$



En général, pour écrire l'impédance d'un circuit constitué de plusieurs composants, on essayera de « regrouper » la partie résistive  $r$  de la bobine réelle avec les autres résistances présentes dans le circuit.

### 5.3 Impédance d'un condensateur

On a vu que la relation entre la tension aux bornes d'un condensateur et le courant qui le traverse s'écrit :  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}$



Si le courant s'écrit :  $\underline{i}(t) = I_m \exp j(\omega t)$

$$\text{alors en intégrant : } \underline{u}(t) = \int \underline{i}/C = (I_m/jC\omega) \exp j(\omega t) = (-jI_m/C\omega) \exp j(\omega t) \\ = [\exp j(-\pi/2)] (I_m/C\omega) \exp j(\omega t) = (I_m/C\omega) \exp j(\omega t - \pi/2)$$

On identifie cette expression avec :  $\underline{u}(t) = U_m \exp j(\omega t + \theta)$  ce qui donne :  $U_m = (1/C\omega) I_m$  et  $\theta = -\pi/2$ .

L'impédance d'un condensateur est donc une grandeur purement imaginaire qui s'écrit :

$$\underline{Z}_C = 1/(jC\omega) = -j/(C\omega) = (1/C\omega) \exp j(-\pi/2)$$

- Le déphasage  $\theta$  entre le courant traversant la capacité et la tension à ses bornes est constant :  $\theta = -\pi/2$ .

*Comme  $\theta = -\pi/2 < 0$ , le courant est en avance de  $\pi/2$  par rapport à la tension aux bornes du condensateur.*

- Le module de l'impédance :  $|Z_C| = 1/C\omega$  est inversement proportionnel à la fréquence : pour une tension  $u$  donnée, l'amplitude du courant est grande lorsque la fréquence  $f$  est élevée, et inversement.

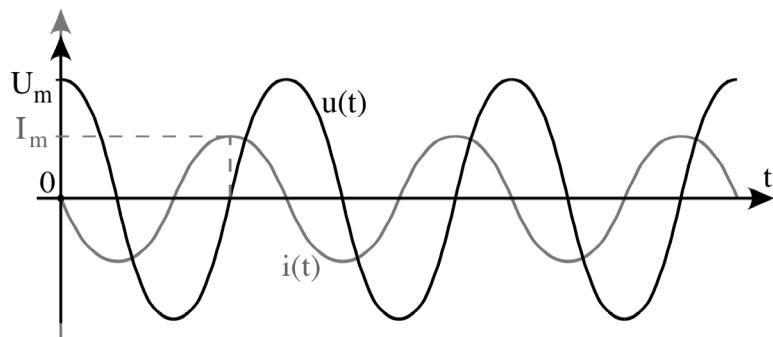
Cette dépendance de l'amplitude (ou de l'impédance) avec la fréquence est l'inverse de celle que nous avons mise en évidence dans une bobine

- En résumé : pour un courant :  $\underline{i}(t) = I_m \exp j\omega t$

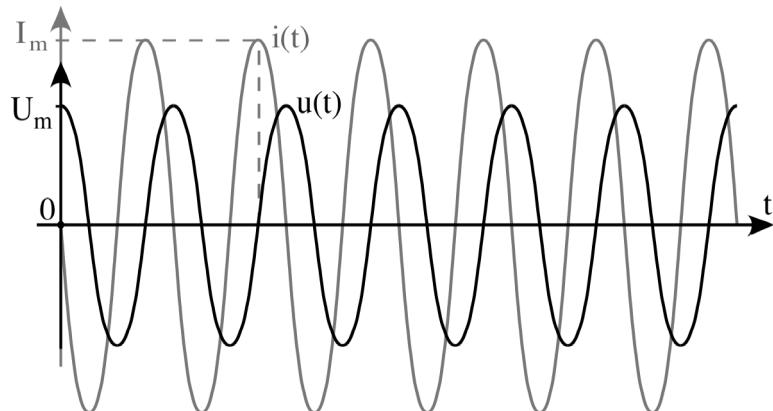
on a :

$$\underline{u}(t) = (I_m/C\omega) \exp j(\omega t - \pi/2)$$

Fréquence  $f$  faible : amplitude  $I_m$  faible.  
( $i(t)$  est en quadrature avance sur  $u(t)$ )



Fréquence  $f$  élevée : amplitude  $I_m$  élevée.  
( $i(t)$  est toujours en quadrature avance sur  $u(t)$ )



Voir une animation sur : [http://physics.bu.edu/~duffy/semester2/c20\\_AC.html](http://physics.bu.edu/~duffy/semester2/c20_AC.html) (cliquer sur 'Capacitor')

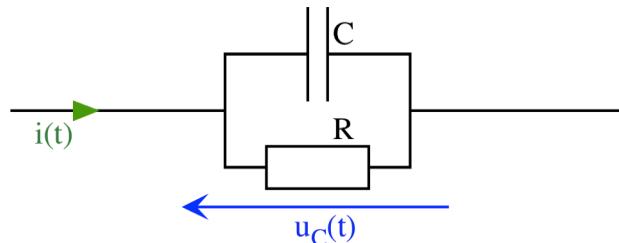
- Et inversement (en changeant l'origine du temps) :

pour une tension  $\underline{u}(t) = U_m \exp j\omega t$

on a :  $\underline{i}(t) = (C\omega U_m) \exp j(\omega t + \pi/2)$

Si l'on impose une tension d'amplitude fixe  $U_m$  aux bornes d'un condensateur, l'amplitude du courant dépend de la fréquence :

Remarque : Un condensateur réel possède toujours une composante résistive  $R$  (résistance de fuite) que l'on représente en parallèle sur  $C$ . Ceci explique qu'un condensateur réel se décharge tout seul s'il n'est branché à rien. L'impédance complète  $\underline{Z}_C$  s'obtient à partir de :  $1/\underline{Z}_C = 1/R + jC\omega$



En général, cette composante résistive  $R$  est très grande ( $M\Omega$  ou  $G\Omega$ ) et le plus souvent on la néglige.

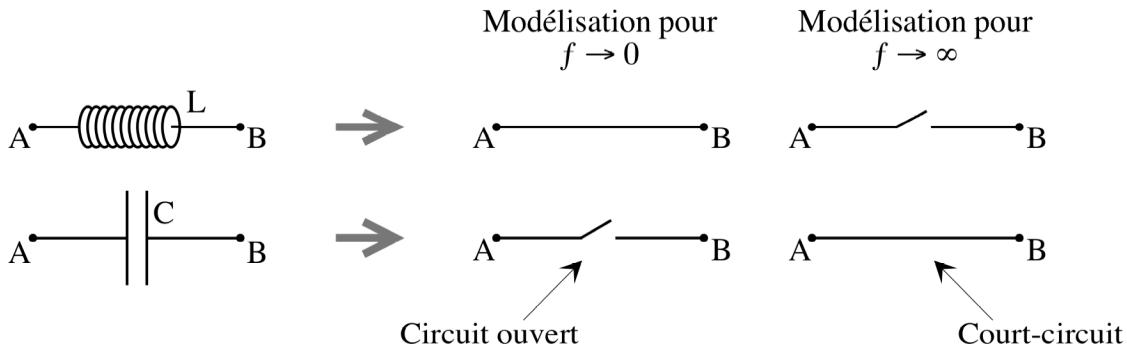
#### 5.4 Modélisations à haute et à basse fréquences

On vient de voir que pour une bobine  $|\underline{Z}_L| = L\omega$  est proportionnel à la fréquence. Et pour un condensateur  $|\underline{Z}_C| = 1/C\omega$  est inversement proportionnel à la fréquence.

Autrement dit, une inductance à basse fréquence se comporte comme un court-circuit, alors qu'à haute fréquence elle se comporte comme un circuit ouvert.

Et inversement : à haute fréquence un condensateur se comporte comme un court-circuit, alors qu'à basse fréquence il se comporte comme un circuit ouvert.

On peut modéliser une inductance et un condensateur dans les cas limites de la façon suivante :



On utilise parfois le terme de « coupe-circuit » pour parler de circuit ouvert, et celui de « fil continu » pour parler de court-circuit.

Attention, cette modélisation ne rend compte que des modules des impédances et ne fait pas apparaître les déphasages ( $\theta_{Bobine} = \pi/2$  et  $\theta_{Condensateur} = -\pi/2$ ) entre le courant et la tension.

## 6 Représentation de Fresnel

### 6.1 Principe de fonctionnement

La représentation des tensions et des courants en fonction du temps devient vite malcommode lorsque l'on est en présence de plusieurs composants. On peut résumer l'évolution temporelle d'une grandeur

sinusoïdale grâce à la représentation de Fresnel.

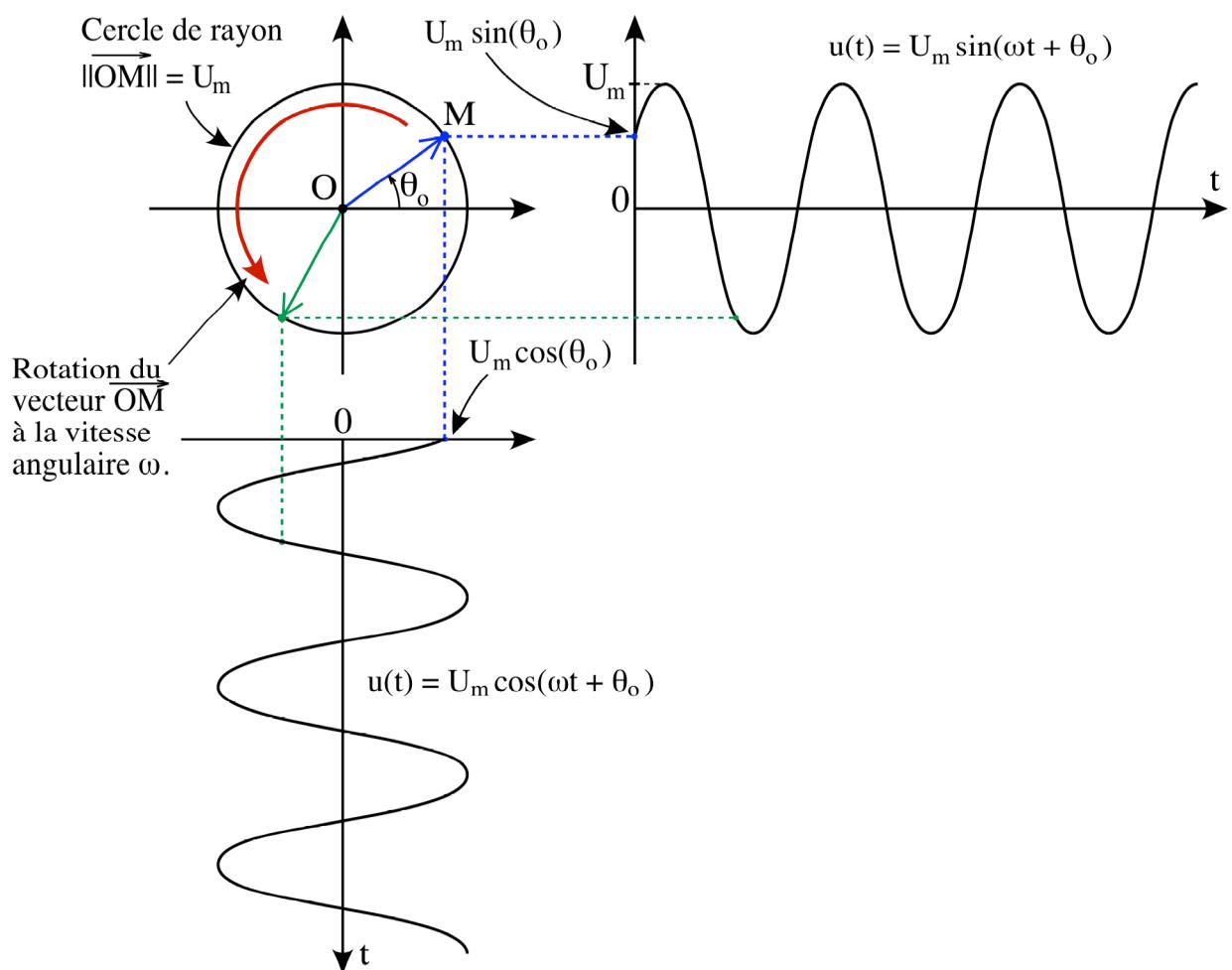
Celle-ci consiste à représenter un vecteur :

- dont la norme est égale à l'amplitude de la grandeur considérée,
- et dont l'angle par rapport à l'axe horizontal est égal à la phase.

Le passage de la représentation de Fresnel à la représentation temporelle (sinusoïdale) s'obtient en faisant tourner le vecteur à la vitesse angulaire  $\omega$  (dans le sens trigonométrique) et en projetant son extrémité sur l'axe vertical ( $\sin(\omega t + \theta_0)$ ) ou sur l'axe horizontal ( $\cos(\omega t + \theta_0)$ ).

[Voir : [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Elec/Alternatif/Fresnel.html](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Alternatif/Fresnel.html) ]

En pratique, on représente les vecteurs de Fresnel à l'instant  $t = 0$ , en se souvenant que l'évolution en fonction du temps s'obtiendrait en faisant tourner l'ensemble du dessin à la vitesse angulaire  $\omega$  dans le sens trigonométrique.

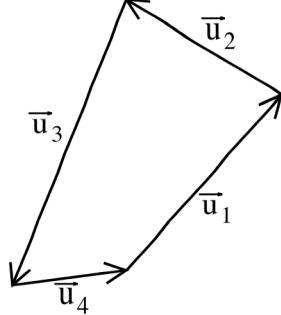
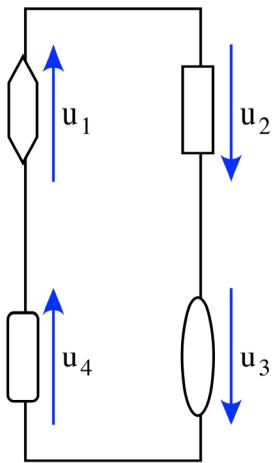


## 6.2 Loi des mailles et Loi des noeuds

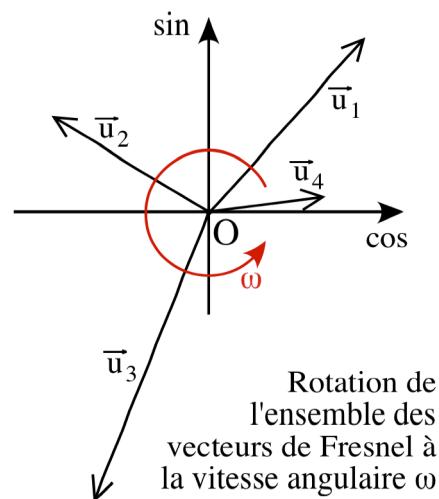
Pour un circuit comportant plusieurs éléments, la loi des mailles (somme des tensions = 0 le long d'un circuit fermé) se traduit dans un diagramme de Fresnel des tensions, par la nullité de la somme *vectorielle* des tensions.

Sur cet exemple (4 dipôles quelconques), la loi des mailles :  $u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 0$  se traduit par la nullité (à tout instant) de la somme des vecteurs de Fresnel :

$$\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 + \vec{u}_4 = \vec{0}$$



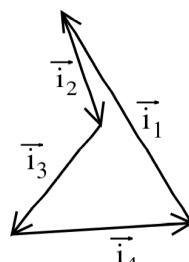
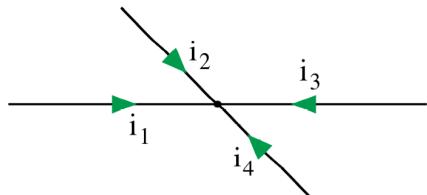
Nullité de la somme vectorielle des tensions



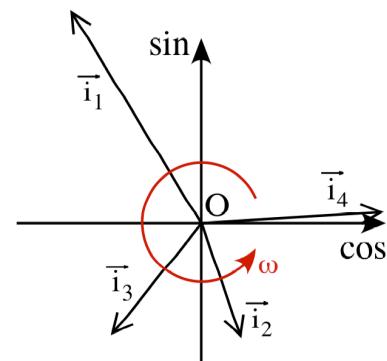
Rotation de l'ensemble des vecteurs de Fresnel à la vitesse angulaire  $\omega$

Cette dernière représentation contient l'information sur les amplitudes des tensions (modules des vecteurs), ainsi que sur les déphasages respectifs entre elles (orientation des vecteurs).

De la même façon, la loi des noeuds (somme des courants = 0 en un noeud) se traduit dans un diagramme de Fresnel des courants, par la nullité (à tout instant) de la somme *vectorielle* des courants :



Nullité de la somme vectorielle des tensions



Rotation de l'ensemble des vecteurs de Fresnel à la vitesse angulaire  $\omega$

Sur cet exemple, la loi des noeuds :  $i_1 + i_2 + i_3 + i_4 = 0$  se traduit par la nullité de la somme des vecteurs de Fresnel :

$$\vec{i}_1 + \vec{i}_2 + \vec{i}_3 + \vec{i}_4 = \vec{0}$$

On peut donc utiliser la représentation de Fresnel pour les tensions et/ou pour les courants (et on représente souvent ces grandeurs sur un même graphe), mais on n'oubliera pas qu'il s'agit de vecteurs de nature différente (il n'aurait par exemple aucun sens de construire un vecteur somme :  $\vec{u} + \vec{i}$ !).

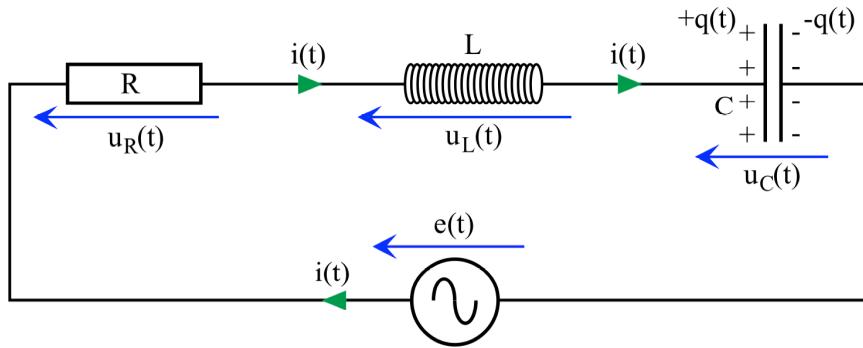
## 7 Application à un circuit RLC série

### 7.1 Mise en équation sans les impédances complexes

On considère un circuit constitué en série, d'une résistance, d'une bobine idéale et d'un condensateur parfait. L'ensemble est alimenté par un générateur fournissant une tension sinusoïdale  $e(t)$  d'amplitude  $E_m$  à la pulsation  $\omega$ . Les tensions aux bornes des différents dipôles du circuit seront sinusoïdales, à la pulsation  $\omega$ , et avec des déphasages divers par rapport à  $e(t)$ .

On écrit la Loi des mailles :  $e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$

Soit (en oubliant les  $(t)$ ) :  $e = R i + L(di/dt) + u_C$



En se souvenant que  $q = Cu_C$  et que  $i = (dq/dt) = C(du_C/dt)$  on peut écrire :

$$e = RC(du_C/dt) + LC(d^2u_C/dt^2) + u_C$$

Que l'on écrit sous forme canonique :

$$LC(d^2u_C/dt^2) + RC(du_C/dt) + u_C = e$$

C'est une équation différentielle du second ordre en  $u_C$  (elle comporte la dérivée temporelle seconde de  $u_C$ ), à coefficients constants, et avec second membre (terme  $e(t)$ ).

On peut montrer que la solution générale de cette équation est la somme de :

- la solution générale de l'équation *sans* second membre (dite équation homogène),
- et d'une solution particulière de l'équation *avec* second membre.

La résolution de l'équation homogène peut se faire de façon analytique (analyse des solutions de l'« équation caractéristique ») et la solution correspond au régime transitoire. Mais cette approche n'est pas au programme de ce cours.

Pour déterminer la solution de l'équation avec second membre (régime permanent), il est beaucoup plus simple d'utiliser les impédances complexes.

## 7.2 Impédance complexe du circuit RLC

L'impédance globale  $\underline{Z}$  des 3 composants en série est la somme des 3 impédances :

$$\begin{aligned} \underline{e}(t) &= \underline{Z}_{\text{Circuit total}} \underline{i}(t) \\ &= (\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C) \underline{i}(t) \\ &= (R + jL\omega + 1/jC\omega) \underline{i}(t) \end{aligned}$$

On écrit l'impédance totale sous forme  $\underline{Z} = x + jy$  :

$$\underline{Z} = R + j \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right) = R + j \left( \frac{LC\omega^2 - 1}{C\omega} \right)$$

On peut écrire cette impédance sous la forme :

$$\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\theta}$$

- Le module  $|\underline{Z}|$  permet alors de déterminer le courant :  $I_m = E_m / |\underline{Z}|$ .

$$\text{Il s'écrit : } |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \left( L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

- L'argument  $\theta$  permet de déterminer la phase de  $\underline{i}(t)$  par rapport à  $\underline{e}(t)$ .

$$\text{L'argument } \theta \text{ est défini par : } \operatorname{tg} \theta = \frac{LC\omega^2 - 1}{RC\omega} = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}$$

### 7.3 Pulsation propre du circuit RLC

- On voit que  $|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}$  passe par un minimum pour  $L\omega = 1/C\omega$ , c'est à dire pour :

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Si l'on se souvient que l'impédance représente l'aptitude d'un composant ou d'un circuit à *freiner* le passage du courant, alors on voit sans calcul que le courant sera maximal pour  $\omega = \omega_0$ .

La pulsation  $\omega_0$  est la pulsation propre du circuit RLC. Si  $\omega = \omega_0$  alors  $|Z| = R$  et  $I_m = E_m/R$  (le courant est maximal).

- Toujours pour la pulsation propre :  $\omega = \omega_0$ , déterminons la phase de  $i(t)$  par rapport à  $e(t)$  : on voit directement que si  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  alors  $\operatorname{tg} \theta = 0$  et donc  $\theta = 0$ .

Si l'origine du temps est telle que :  $i(t) = I_m \exp j(\omega t)$ , alors :  $e(t) = E_m \exp j(\omega t + 0)$ .

Conclusion : lorsque la pulsation du générateur est égale à la pulsation propre du circuit :  $\omega = \omega_0$ , alors :

- . le courant  $i(t)$  présente une amplitude maximale,
- . le courant  $i(t)$  est en phase avec la tension du générateur  $e(t)$ .

### 7.4 Limites basse et haute fréquences

- Si le circuit est alimenté à basse fréquence :  $\omega \ll \omega_0$  on a alors :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \approx \frac{1}{C\omega}$$

A basse fréquence, l'impédance qui domine dans le circuit RLC est celle du condensateur (si  $\omega \rightarrow 0$ , la résistance et la bobine ont une impédance négligeable devant  $1/C\omega$ ).

Et de même,  $\operatorname{tg} \theta = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \approx \frac{-1}{RC\omega}$  qui tend vers  $-\infty$  lorsque  $\omega$  tend vers 0. Soit  $\theta \rightarrow -\pi/2$ .

A basse fréquence, le circuit RLC série a un comportement capacitif (condensateur).

- Si maintenant le circuit est alimenté à haute fréquence :  $\omega \gg \omega_0$  on a alors :

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2} \approx L\omega$$

A haute fréquence, l'impédance qui domine dans le circuit est celle de la bobine (si  $\omega \rightarrow \infty$  alors  $L\omega \rightarrow \infty$  : la résistance et le condensateur ont une impédance négligeable devant  $L\omega$ ).

De même,  $\operatorname{tg} \theta = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R} \approx \frac{L\omega}{R}$  qui tend vers  $+\infty$  lorsque  $\omega$  tend vers l'infini. Soit  $\theta \rightarrow +\pi/2$ .

A haute fréquence, le circuit RLC série a un comportement inductif (bobine).

### 7.5 Evolution des diverses grandeurs

On pourra étudier l'évolution des diverses grandeurs du circuit à partir des simulations suivantes :

[http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Elec/Alternatif/transfert2RLC.html](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Elec/Alternatif/transfert2RLC.html)

(Animation extrêmement bien faite. Seul détail : R ne s'exprime pas en W mais en  $\Omega$ ).

Dans cette dernière simulation, quelques notations diffèrent de celles utilisées dans ce cours :

- Tension générateur :  $u$  au lieu de  $e$
- Impédances :  $X_C$  au lieu de  $Z_C$  et  $X_L$  au lieu de  $Z_L$
- Déphasage :  $\varphi$  au lieu de  $\theta$

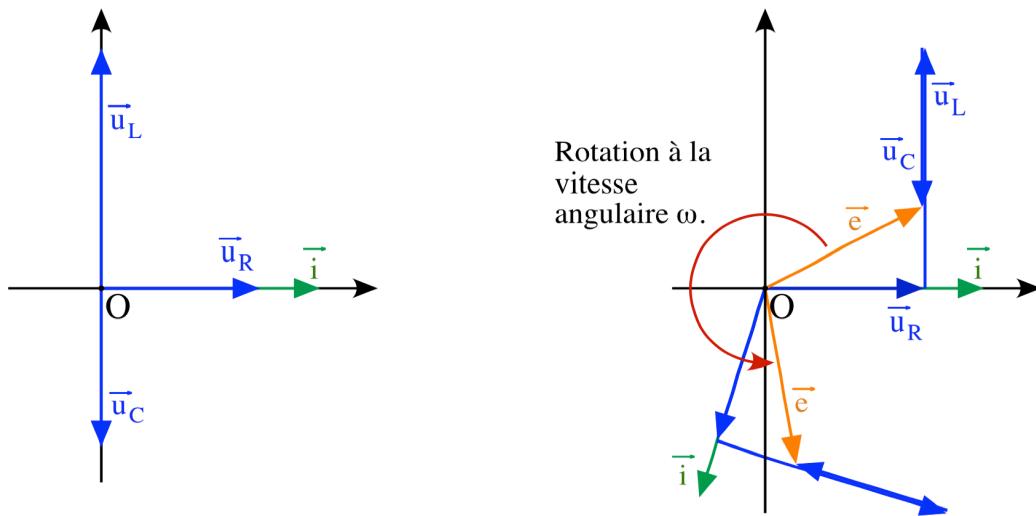
On retrouve certaines observations :

- A la pulsation propre du circuit :  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  on voit que :
  - L'impédance globale  $Z$  passe par un minimum
  - L'amplitude  $I_m$  du courant passe par un maximum
  - et le déphasage  $\theta = 0$  : le courant et la tension sont en phase → Comportement résistif.
- Dans la limite des basses fréquences :  $\omega \rightarrow 0$  on a :
  - $I_m \rightarrow 0$
  - déphasage  $\theta \rightarrow -\pi/2$  :  $i$  est en quadrature avance sur  $u$  → Comportement capacitif.
- Dans la limite des hautes fréquences :  $\omega \rightarrow \infty$  on a :
  - $I_m \rightarrow 0$
  - déphasage  $\theta \rightarrow +\pi/2$  :  $i$  est en quadrature retard sur  $u$  → Comportement inductif.

## 7.6 Représentations de Fresnel

Supposons que l'on choisisse une origine du temps telle que :  $i(t) = I_m \exp(j\omega t)$

On peut alors représenter  $i(t)$  par un vecteur horizontal (en vert ci-dessous, à  $t = 0$ ).



On représente ensuite les 3 tensions (vecteurs)  $\vec{u}_R$ ,  $\vec{u}_L$  et  $\vec{u}_C$  en respectant les déphasages respectifs des tensions aux bornes de R, L et C par rapport à  $i(t)$  (le courant est identique dans les 3 composants, puisqu'ils sont en série). On sait que  $u_R$  est en phase avec  $i$ ,  $u_C$  est en quadrature retard sur  $i$ , et  $u_L$  est en quadrature avance sur  $i$ .

En mettant bout à bout ces 3 vecteurs, on construit la somme des tensions :  $\vec{e} = \vec{u}_R + \vec{u}_L + \vec{u}_C$ .

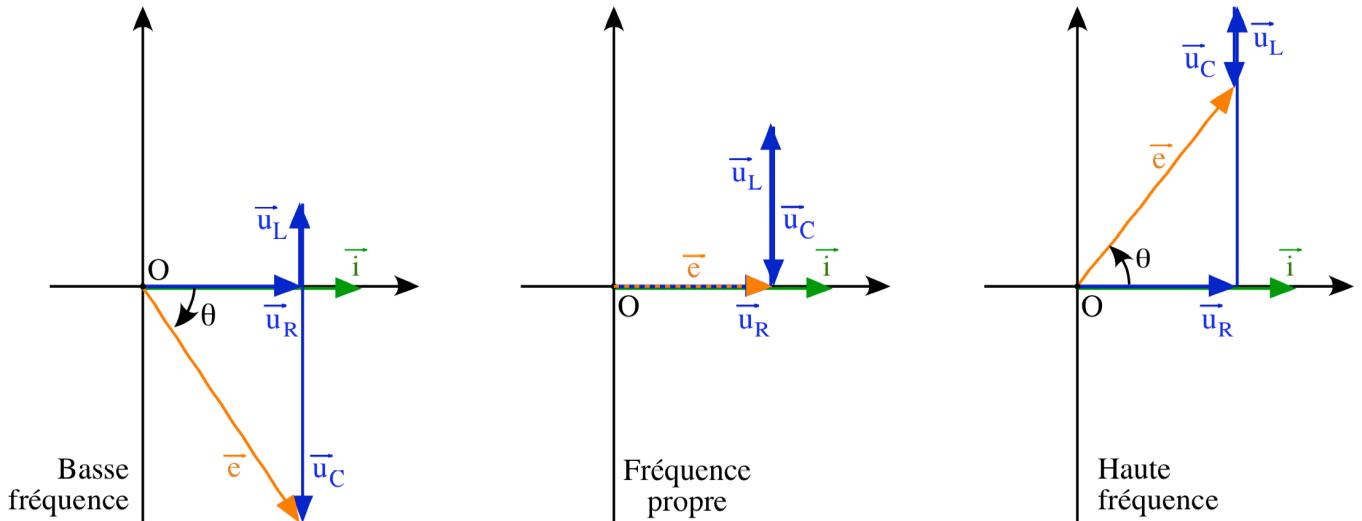
Rappel : pour retrouver le comportement temporel, il faut faire tourner tous les vecteurs de la figure de gauche à la vitesse angulaire  $\omega$  et projeter leurs extrémités sur un axe.

Interprétation : on voit qu'à courant fixé, la tension  $e(t)$  (c'est à dire  $|\vec{e}|$ ) est minimale lorsque  $|\vec{u}_L| = |\vec{u}_C|$ , c'est à dire :  $L\omega I_m = I_m/C\omega$ . Soit :  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

On voit également les limites basse et haute fréquences du circuit :

- Si  $\omega \rightarrow 0$  on a un comportement capacitif.
- Si  $\omega \rightarrow \infty$  on a un comportement inductif.

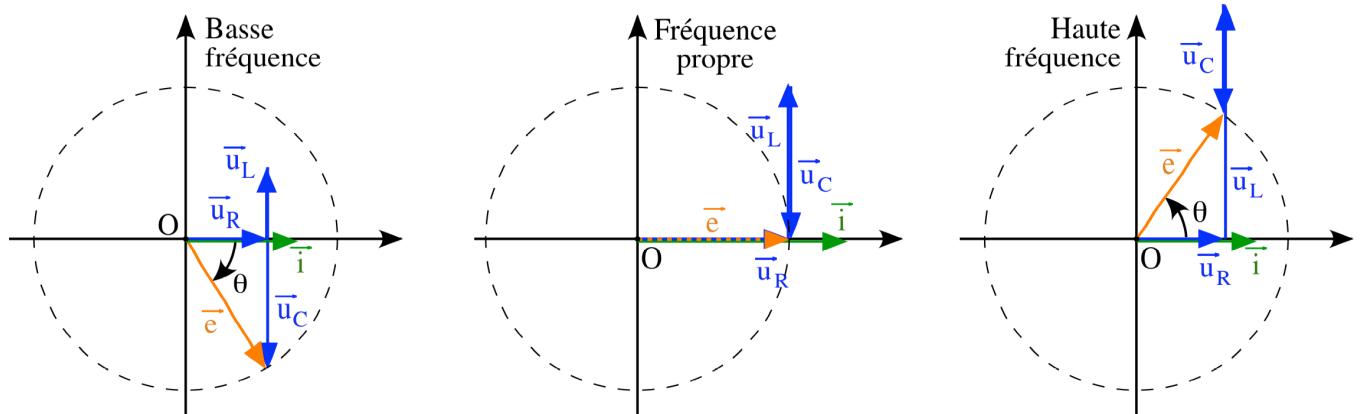
Les schémas de Fresnel à différentes fréquences résument toutes les grandeurs (amplitude, phase).



En pratique, dans la plupart des circuits, on impose plutôt la tension que le courant. On peut alors dire qu'à tension fixée, le courant  $i(t)$  (ou son amplitude :  $|i|$ ) est maximal lorsque  $|\underline{u}_R|$  est maximal, c'est à dire :  $|\underline{u}_L| = |\underline{u}_C|$ , ce qui entraîne :  $L\omega I_m = I_m/C\omega$ . Soit :  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Si l'on représente trois diagrammes de Fresnel correspondant à trois fréquences différentes, mais cette fois avec une amplitude de la tension  $e(t)$  constante (c'est à dire  $|e|$  constante), on voit que l'amplitude du courant  $i(t)$  est maximale pour  $\omega = \omega_0$ .

Sur les trois diagrammes suivants, l'amplitude du courant  $i(t)$  est représentée proportionnelle à  $|\underline{u}_R|$  puisque l'on a  $|i| = |\underline{u}_R| / R$ .



On va détailler le phénomène de résonance en courant ci dessous.

## 7.7 Résonance

La résonance en courant correspond à l'excitation du circuit à sa fréquence propre ( $f_0 = \omega_0/2\pi$ ). Cette résonance est caractérisée par un facteur de qualité Q que l'on peut définir de plusieurs façons :

$$\text{Première définition : } Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$$

où  $\Delta f = f_2 - f_1$  est la largeur de la résonance, définie par :

$$I(f_1) = I(f_2) = I_{1,2} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$$

où  $I_{\max}$  est l'amplitude du courant lorsque  $\omega = \omega_0$  (courant max).

Le facteur de qualité Q est donc une mesure de « l'étroitesse » de la courbe de résonance. Il dépend

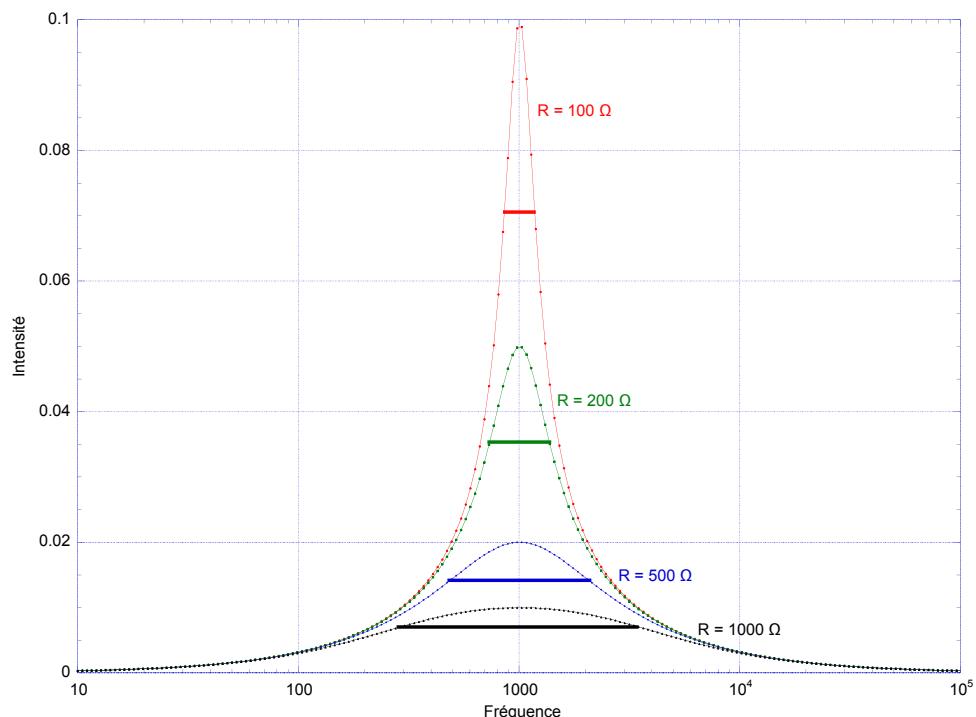
notamment de la résistance R du circuit, ce qui est illustré sur le schéma suivant par les segments de couleur, de largeur  $\Delta f = f_2 - f_1$  pour  $I_{1,2} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

On peut relier entre-elles les expressions de  $\omega_1 = 2\pi f_1$  et  $\omega_2 = 2\pi f_2$ . Pour cela, on écrit :  $I_1 = I_2 = I_m/\sqrt{2} = U_m/(R\sqrt{2})$  d'où l'on déduit que  $|Z_1| = |Z_2| = \sqrt{2}R$ . Soit :  $|Z_{1 \text{ ou } 2}|^2 = 2R^2$

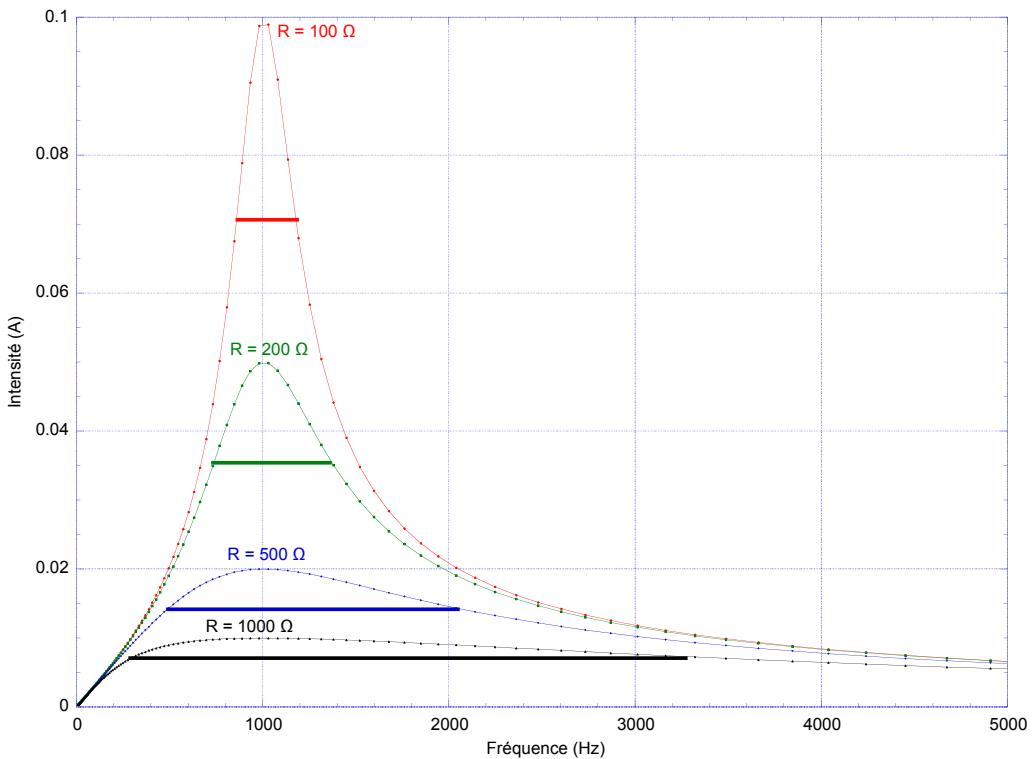
On introduit cette condition dans l'expression générale de  $|Z_{1,2}|^2$  :

$$\begin{aligned} |Z_{1,2}|^2 &= R^2 + \left( L\omega_{1,2} - \frac{1}{C\omega_{1,2}} \right)^2 \\ &= R^2 + L^2\omega_{1,2}^2 \left( 1 - \frac{1}{LC\omega_{1,2}^2} \right)^2 \\ &= R^2 + L^2\omega_{1,2}^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2} \right)^2 \text{ qui doit donc être égal à } 2R^2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } L^2\omega_{1,2}^2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2} \right)^2 = R^2 \quad \text{c'est à dire : } L\omega_{1,2} \left| 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_{1,2}^2} \right| = R.$$



Courbes de l'intensité dans un circuit RLC série, avec :  $L = 0,05 \text{ H}$  ;  $C = 0,5 \mu\text{F}$  ; et R variable (cf. figure). La fréquence est en échelle Log.



Les mêmes courbes que les précédentes, mais en échelle Linéaire.

L'expression précédente a deux solutions :

- Si  $\omega_1 < \omega_0$  alors  $\omega_0 / \omega_1 > 1$  et on a :  $L\omega_1 \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - 1 \right) = R$

- Si  $\omega_2 > \omega_0$  alors  $\omega_0 / \omega_2 < 1$  et on a :  $L\omega_2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} \right) = R$

En égalant les deux expressions, on a :  $L\omega_1 \left( \frac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - 1 \right) = L\omega_2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} \right)$

En simplifiant par L et en multipliant des 2 côtés par  $\omega_1\omega_2$  on obtient :  $\omega_2(\omega_0^2 - \omega_1^2) = \omega_1(\omega_2^2 - \omega_0^2)$

Soit, en développant et en regroupant les termes :  $\omega_0^2(\omega_1 + \omega_2) = \omega_1\omega_2(\omega_1 + \omega_2)$

Et finalement :  $\omega_1\omega_2 = \omega_0^2$  (ce qui est équivalent à :  $f_1f_2 = f_0^2$ )

Les pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2$  (ou les fréquences  $f_1$  et  $f_2$ ) sont inversement proportionnelles l'une à l'autre.

On peut alors exprimer simplement la différence  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \omega_2 - (\omega_0^2/\omega_2) = \omega_2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} \right)$$

En se souvenant de l'égalité obtenue plus haut :  $L\omega_2 \left( 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega_2^2} \right) = R$ , on voit que :  $\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L}$

Finalement, le facteur de qualité Q peut donc s'écrire de différentes façons :

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On retiendra que le facteur de qualité Q est d'autant plus grand que l'amortissement (c'est à dire la résistance R) est faible.

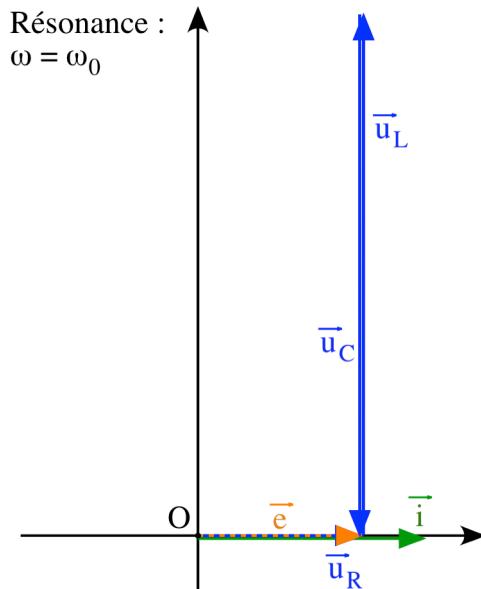
## 7.8 Facteur de surtension aux bornes du condensateur

On exprime la tension  $U_{C0}$  aux bornes du condensateur lorsque l'on est à la résonance  $f_0$  :

$$U_{C0} = \frac{I_m}{C\omega_0} = \frac{(U_m/Z_m)}{C\omega_0} = \frac{(U_m/R)}{C\omega_0} = \frac{U_m}{RC\omega_0}$$

On remarque que :  $\frac{U_{C_0}}{U_m} = \frac{1}{RC\omega_0}$  est égal à Q. Le rapport  $S = U_C/U_{Géné}$  est appelé facteur de surtension aux bornes du Condensateur. A la résonance,  $S = U_{C_0}/U_m$  est égal au facteur de qualité du circuit Q.

(NB : le facteur de surtension  $S = U_C/U_{\text{Générateur}}$  passe par un maximum plus grand que Q pour une pulsation qui n'est pas exactement égale à  $\omega_0$ . Voir exercice de T.D.)



Exemple : Pour la courbe de résonance rouge du paragraphe 7.7, on a :  $L = 0,05 \text{ H}$  ;  $C = 0,5 \mu\text{F}$  et  $R = 100 \Omega$ , d'où :

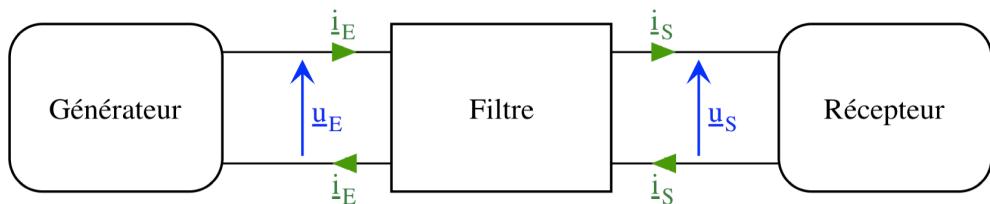
$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{100 \Omega} \sqrt{\frac{0,05 \text{ H}}{0,5 \cdot 10^{-6} \text{ F}}} = 3,16$$

Si la tension appliquée par le générateur est de 10 V et que la fréquence est  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 1006$  Hz, alors la tension aux bornes du Condensateur sera de 31,6 V. Le diagramme de Fresnel correspondant est représenté sur le dessin ci-dessus. Bien entendu, on a le même facteur de surtension aux bornes de la bobine, puisqu'à la résonance on a  $|u_L| = |u_C|$ .

8 Les filtres

## 8.1 Définitions - Fonction de transfert

Un filtre est un circuit qui met en forme une grandeur électrique (courant ou tension). Nous nous intéressons ici aux quadripôles (ou quadrupôles), qui sont des filtres présentant deux fils d'entrée et deux fils de sortie permettant un transfert d'énergie entre un générateur et un récepteur.



Dans ce cours, nous limiterons notre approche aux quadripôles linéaires (lorsque l'on double le signal

d'entrée, le signal de sortie devient deux fois plus grand).

Les filtres électroniques peuvent utiliser des composants actifs (amplificateurs), des résistances (impédance ne dépendant pas de la fréquence), et/ou des réactances comme des condensateurs ou des bobines (impédances qui dépendent de la fréquence) qui emmagasinent de l'énergie pour la restituer ultérieurement.

Un quadripôle possède une *fonction de transfert*  $\underline{H}(\omega)$  qui relie la tension de sortie à la tension d'entrée :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{u}_S}{\underline{u}_E}$$

$\underline{H}(\omega)$  est une grandeur complexe :

- Le déphasage entre la sortie  $\underline{u}_S$  et l'entrée  $\underline{u}_E$  est  $\theta = \text{Arg}(\underline{H}(\omega))$ .
- Le module  $|\underline{H}(\omega)|$  de la fonction de transfert relie les valeurs efficaces du signal de sortie et du signal d'entrée :

$$|\underline{u}_S| = |\underline{H}(\omega)| |\underline{u}_E|$$

Le module  $|\underline{H}(\omega)|$  est appelé « gain » de la fonction de transfert. Par convention, le gain en tension  $G_u$  se mesure en Décibels (dB) et il est défini par :

$$G_u = 20 \log_{10} |\underline{H}(\omega)|$$

- Lorsque  $|\underline{H}(\omega)| = 1$  on a :  $G_u = 0$  dB.
- Lorsque  $|\underline{H}(\omega)| = 1/\sqrt{2}$  on a :  $G_u = -3$  dB.
- Lorsque  $|\underline{H}(\omega)| = 1/10$  on a :  $G_u = -20$  dB.

Soulignons que  $|\underline{H}(\omega)|$  et  $G_u$  représentent la même grandeur, mais dans des échelles différentes.

Remarque 1 : le gain en puissance d'un circuit est défini par :

$$G_p = 10 \log_{10} (P_S/P_E)$$

où  $P_S$  est la puissance en sortie du circuit, et  $P_E$  est la puissance en entrée. On verra plus loin que la puissance est proportionnelle au carré de la tension, ce qui permet de retrouver la définition du gain en tension :

$$G_p = 10 \log_{10} (P_S/P_E) = 10 \log_{10} (\underline{u}_S^2 / \underline{u}_E^2) = 20 \log_{10} (|\underline{u}_S| / |\underline{u}_E|) = G_u$$

Remarque 2 : le décibel est également utilisée en acoustique : c'est une échelle de mesure qui est basée sur notre sensation physiologique du bruit. Le décibel sonore exprime le quotient des fluctuations de pression acoustique  $P$  (en Pascal) par rapport à une valeur de référence  $P_0$  qui correspond au seuil de perception de l'oreille humaine. Le niveau d'un son en décibels est égal à :

$$20 \log_{10} (P/P_0) \quad \text{où} \quad P_0 = 2.10^{-5} \text{ Pa}$$

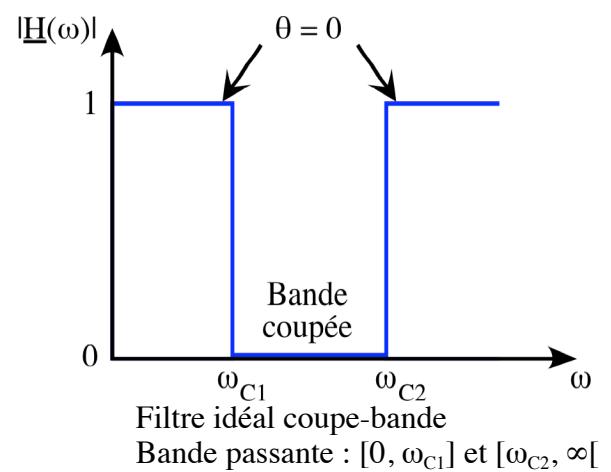
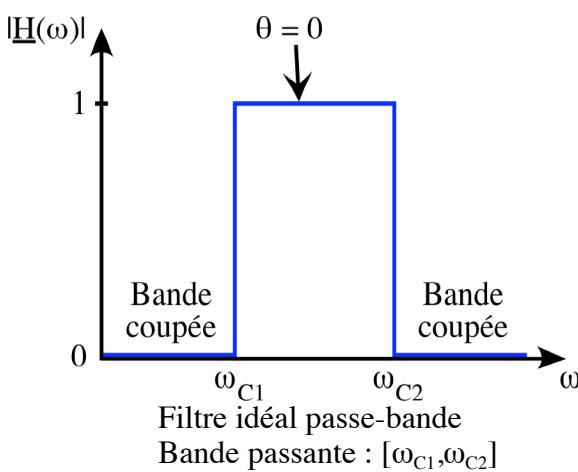
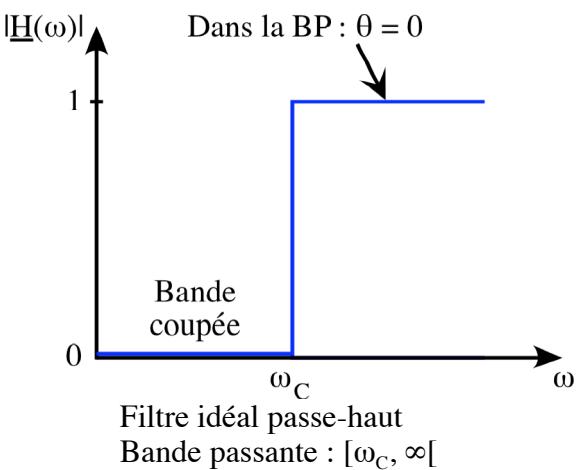
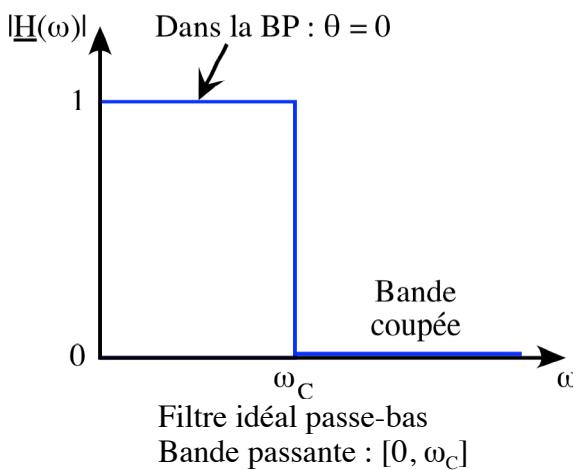
## 8.2 Filtre idéal

Un filtre idéal est un quadripôle dont la fonction de transfert permet :

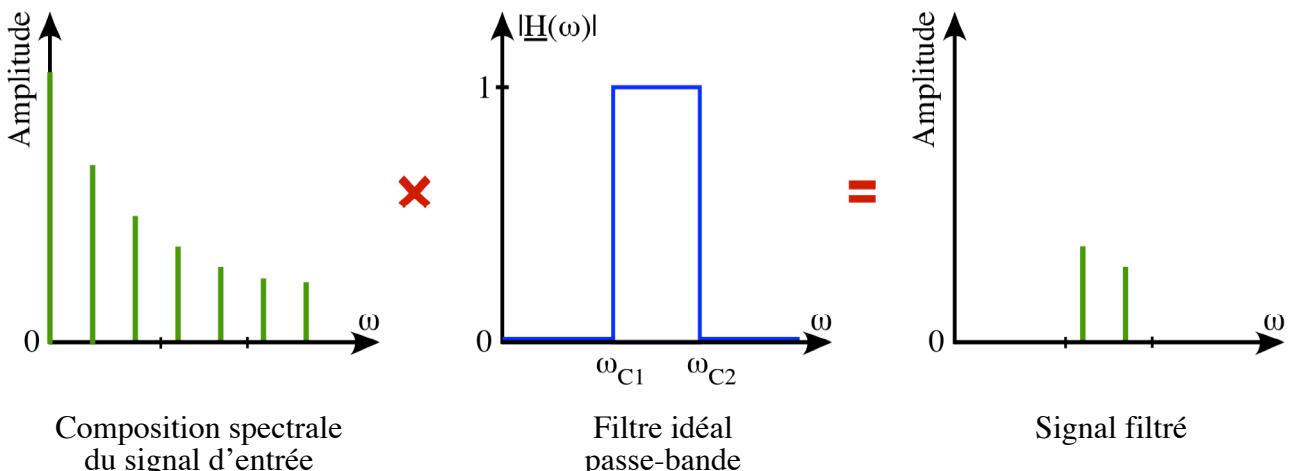
- de transmettre sans déphasage et sans déformation, les composantes sinusoïdales d'un signal dans un domaine fréquentiel constituant sa « bande passante » (BP).
- d'éliminer les composantes sinusoïdales situées dans sa (ou ses) « bande(s) coupée(s) », c'est à dire à l'extérieur de sa bande passante.

Les fréquences situées aux frontières entre une bande passante et une bande coupée sont appelées « fréquences de coupure » et notées  $\omega_C$ .

Remarque : par abus de langage, on parle souvent de « fréquence » au lieu de pulsation, ce qui ne porte pas à confusion puisque ces deux grandeurs sont simplement égales à  $2\pi$  près :  $\omega = 2\pi f$ .



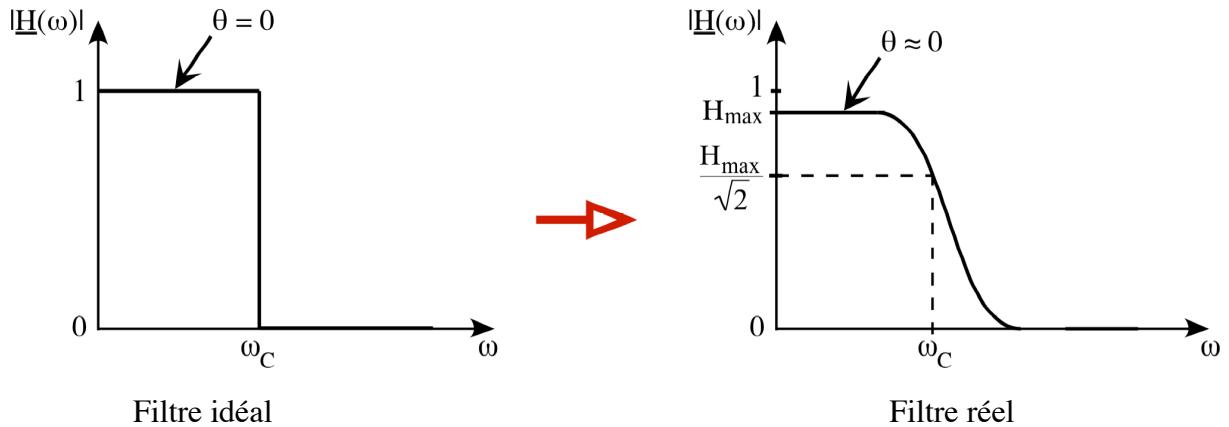
Exemple : voici un signal constitué de la somme de plusieurs sinusoïdes pures, filtré par un filtre passe-bande idéal :



(C'est exactement ce que l'on fera dans le TP n°4).

### 8.3 Filtre réel

En pratique, un filtre n'est jamais idéal : plusieurs paramètres peuvent être ‘imparfaits’ : • le module de la fonction de transfert dans la BP peut être inférieur à 1, • le déphasage dans la BP n'est pas tout à fait nul, et • les profils des courbes des fonctions de transfert sont moins raides :



Pour un filtre réel, on définit la fréquence de coupure  $\omega_C$  par la condition suivante sur le gain :

$$|H(\omega_C)| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$$

où  $H_{\max}$  est la valeur maximale du module de la fonction de transfert. On a donc :  $|u_s| = \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} |u_e|$

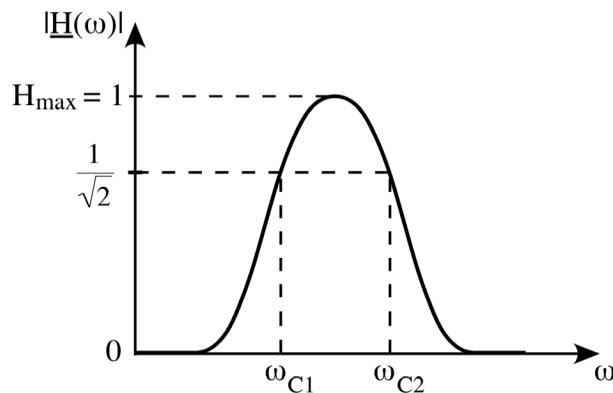
Si la valeur maximale du module de la fonction de transfert est égale à 1 (ce qui sera le cas pour la plupart des filtres que nous allons étudier), on aura alors :

$$|H(\omega_C)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad |u_s| = \frac{|u_e|}{\sqrt{2}}$$

La définition de la fréquence de coupure s'applique aussi aux filtres passe-bande. On a alors deux fréquences de coupure :  $\omega_{C1}$  et  $\omega_{C2}$  qui sont définies par :

$$|H(\omega_{C1})| = |H(\omega_{C2})| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (\text{si } H_{\max} = 1)$$

Remarque : La courbe  $|H(\omega)|$  d'un filtre passe-bande (ci-dessous) rappelle la courbe de la tension (ou du courant) aux bornes de la résistance d'un circuit RLC série. La différence  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  qui représentait la largeur de la résonance, correspond à la bande passante. On reprendra cet exemple plus loin.



#### 8.4 Diagramme de Bode

On a défini le gain en tension d'un filtre comme :  $G_u = 20 \log_{10} |H(\omega)|$ . Le diagramme de Bode du filtre correspond au graphe :

$$G_u = 20 \log_{10} |H(\omega)| = f(\log_{10} \omega)$$

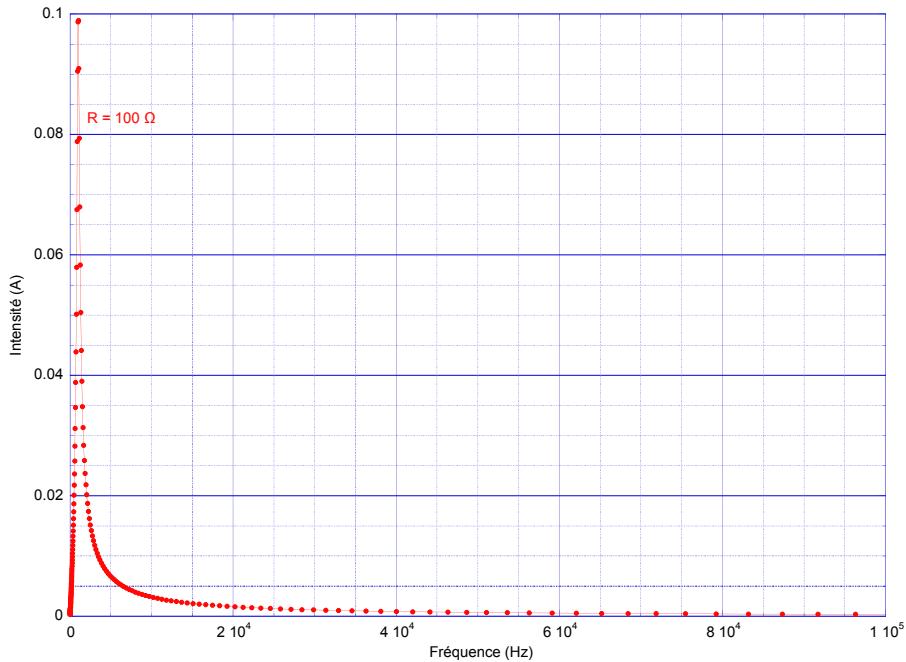
Dans un diagramme de Bode, on trace donc le logarithme du module de la fonction de transfert (c'est à dire  $G_u$ ) en fonction du logarithme de la fréquence (on verra comment au paragraphe suivant).

Le tracé du log d'une grandeur en fonction du log d'une variable :  $\log_{10}(Y) = f(\log_{10}(X))$  permet :

- de visualiser le comportement de la fonction sur de grandes étendues des paramètres X et Y.

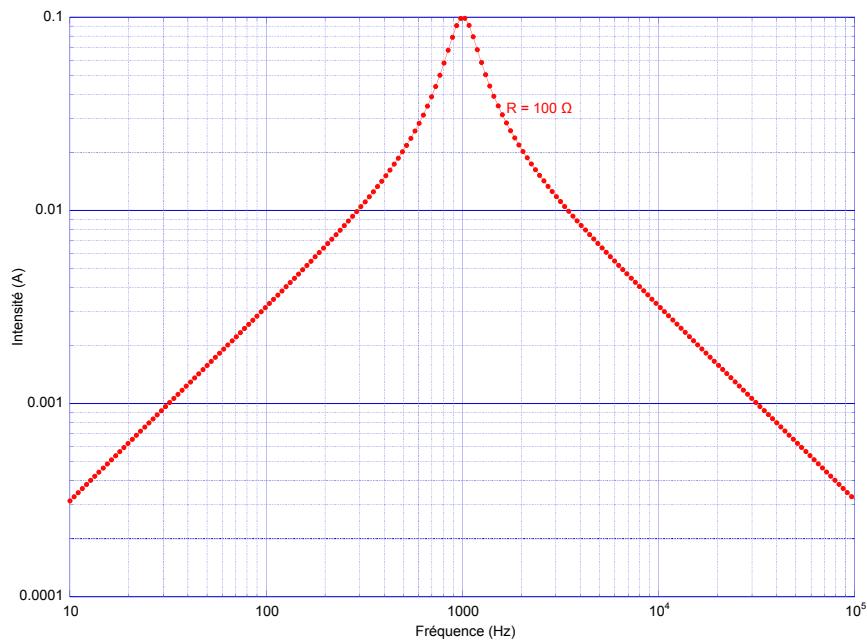
- de visualiser les éventuelles lois de puissances  $Y = X^n$  qui se traduisent par des droites dans une représentation log-log.

Exemple : on a représenté ci-dessous la résonance en intensité d'un circuit RLC série dans une représentation linéaire :



Cette courbe est difficilement exploitable : on a par exemple du mal à déterminer sur ce graphe la valeur du courant pour  $\omega = 10 \omega_0$ , ou bien à déterminer la fréquence correspondant à un courant  $I = I_{\max}/\sqrt{2}$ ...

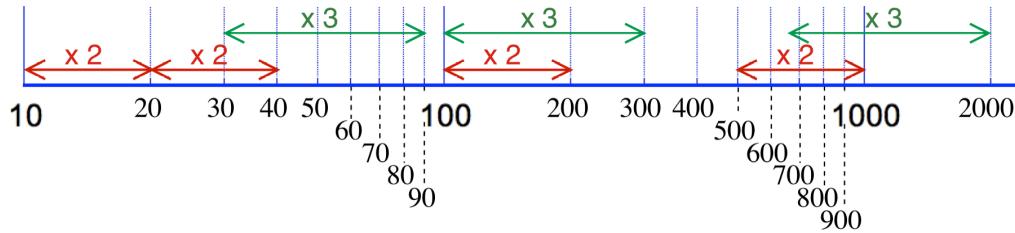
En traçant la même courbe en échelles log-log, on obtient le graphe suivant, à partir duquel il est beaucoup plus facile de déterminer des points particuliers :



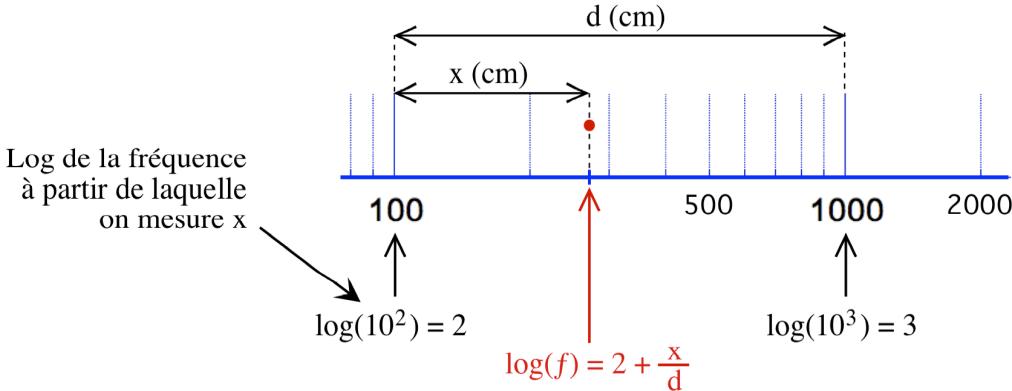
## 8.5 Echelles logarithmiques

Par construction, dans une échelle log, une même distance entre 2 points correspond à un même facteur

multiplicatif :



En inversant cette observation, on peut déterminer la valeur d'un point sur un graphe. Si l'on veut par exemple déterminer la fréquence  $f$  correspondant au point rouge de la figure suivante :



on mesure la distance  $x$  (en cm par exemple), puis on mesure la distance  $d$  (en cm également) qui correspond à une décade (facteur multiplicatif  $\times 10$ ). Le log de la fréquence  $f$  correspond alors au rapport  $x/d$ , augmenté de la valeur du point d'origine (ici : 2) :

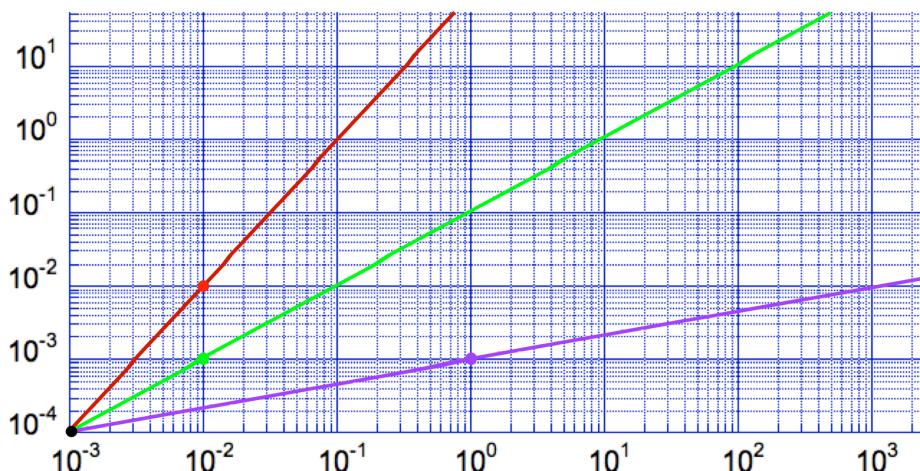
$$\log(f) = 2 + (x/d)$$

Soit :

$$f = 10^{[2 + (x/d)]}$$

Sur l'exemple ci dessus, on mesure :  $x = 2,7$  cm et  $d = 6,3$  cm d'où  $f \approx 270$  Hz.

Avec une échelle log-log, on peut également mettre en évidence des lois de puissances : on a représenté ci dessous trois lois de puissance en échelles log :



- courbe rouge :  $Y = k X^2$  soit  $\log_{10}(Y) = k' + 2 \log_{10}(X)$  : lorsque  $X$  est multiplié par 10, le log de  $Y$  augmente de 2, ce qui signifie que  $Y$  est multiplié par  $10^2 = 100$ .

- courbe verte :  $Y = k X$  soit  $\log_{10}(Y) = k' + \log_{10}(X)$  : lorsque  $X$  est multiplié par 10, le log de  $Y$  augmente de 1, ce qui signifie que  $Y$  est multiplié par  $10^1 = 10$ .

- courbe violette :  $Y = k X^{1/3}$  soit  $\log_{10}(Y) = k' + (1/3) \log_{10}(X)$  : lorsque  $X$  est multiplié par 1000, le log de  $Y$  augmente de 1, ce qui signifie que  $Y$  est multiplié par 10.

Une échelle log-log, permet ainsi décrire le comportement d'une fonction sur des étendues extrêmement larges.

## 8.6 Application aux tracés de gains de filtres

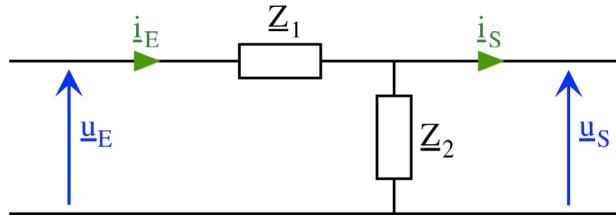
Pour représenter le gain d'un filtre en fonction de la fréquence, on pourrait tracer  $|H|$  en fonction de  $\omega$  en échelles linéaires. Mais on préfère une représentation en échelles logarithmiques où l'on trace  $G_u$  en fonction de  $\log_{10}(\omega)$ . Pour cela, on peut en pratique :

- soit utiliser du papier linéaire (papier millimétré normal) et tracer  $G_u$  en fonction de  $\log_{10}(\omega)$ .
- soit utiliser du papier log-log (mais dans ce cas, il faut tracer  $|H|$  en ordonnée et  $\omega$  en abscisse. Et on obtient alors un graphe homothétique à  $G_u = f(\log_{10}(\omega))$ .
- soit utiliser du papier lin-log (placer  $G_u$  sur l'axe lin en ordonnée et  $\omega$  sur l'axe log en en abscisse).

(Lors de l'examen, vous aurez probablement le choix du papier millimétré. Le dernier type de tracé est recommandé).

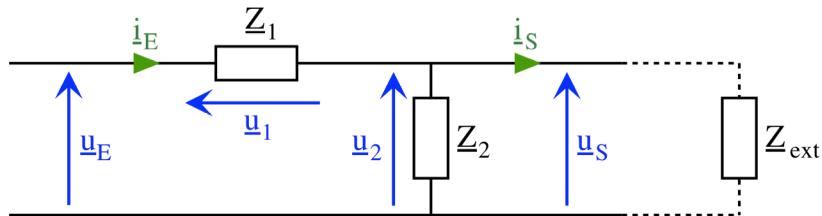
Rappelons qu'un tracé en échelles lin-lin ou lin-log ou log-log ne change pas la physique, mais seulement la représentation d'une fonction.

## 8.7 Filtres en L



Comme leur forme le suggère, les filtres « en L » sont constitués de deux dipôles :  $Z_1$  et  $Z_2$  connectés comme sur le schéma ci-dessus.

Pour déterminer la fonction de transfert  $H(\omega)$  d'un tel filtre, il faut exprimer  $u_s$  en fonction de  $u_e$ . Pour simplifier, on suppose que ce filtre alimente une charge d'impédance  $Z_{ext}$  très grande devant  $Z_2$  :  $|Z_{ext}| \gg |Z_2|$ .



On a alors  $i_s \approx 0$ , ce qui permet d'écrire :  $u_s = u_2 = Z_2(i_e - i_s) \approx Z_2 i_e$

D'autre part, on a :  $u_e = u_1 + u_2 = (Z_1 + Z_2) i_e$

$$\text{Soit : } H(\omega) = \frac{u_s}{u_e} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \frac{i_e}{i_e}$$

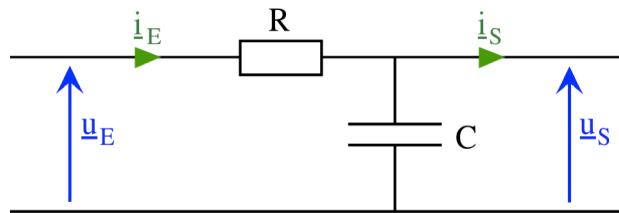
La fonction de transfert  $H(\omega)$  s'écrit donc simplement :  $H(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$

Pour déterminer la dépendance complète de  $u_s$  par rapport à  $u_e$ , il faudra calculer le module et l'argument de  $H(\omega)$ , et c'est ce que nous allons faire dans quelques cas particuliers.

## 9 Filtre passe-bas

### 9.1 Fonction de transfert

On s'intéresse au filtre en L où  $Z_1$  et  $Z_2$  sont respectivement une résistance et un condensateur :



On a donc :  $Z_1 = R$  et  $Z_2 = 1/jC\omega$ . D'où :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1/jC\omega}{R + (1/jC\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_1)^2} \quad \text{où l'on définit : } \omega_1 = 1/RC.$$

### 9.2 Gain

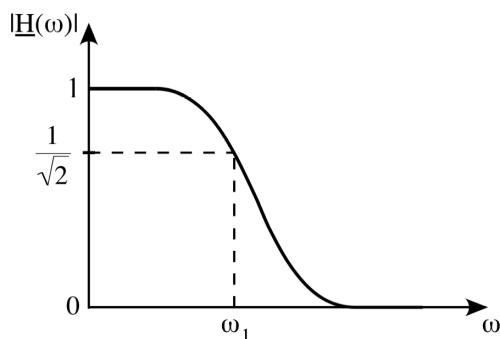
On peut alors écrire le gain :  $|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}}$

Sans faire une étude complète de la fonction  $|\underline{H}(\omega)|$ , on voit que pour  $\omega \rightarrow 0$  on a  $|\underline{H}(\omega)| \rightarrow 1$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$  on a  $|\underline{H}(\omega)| \rightarrow 0$

La fréquence de coupure  $\omega_C$  correspond à  $|\underline{H}(\omega_C)| = 1/\sqrt{2}$ , c'est à dire :  $\omega_C/\omega_1 = 1$  soit  $\omega_C = \omega_1 = 1/RC$ .

Ce filtre RC est un filtre passe-bas dont la fréquence (ou plutôt pulsation) de coupure vaut :  $\omega_1 = 1/RC$ . Autrement dit, la bande passante à -3 dB est  $[0, \omega_1]$ .

La variation du gain avec la fréquence est qualitativement la suivante :



### 9.3 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode correspond à la même courbe que celle qui précède ( $|\underline{H}| = f(\omega)$ ), mais tracée dans des échelles logarithmiques : on trace  $G_u = 20 \log_{10} |\underline{H}(\omega)|$  en fonction de  $\log_{10} \omega$ .

On vient de voir que pour le filtre passe-bas, on a :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}}$$

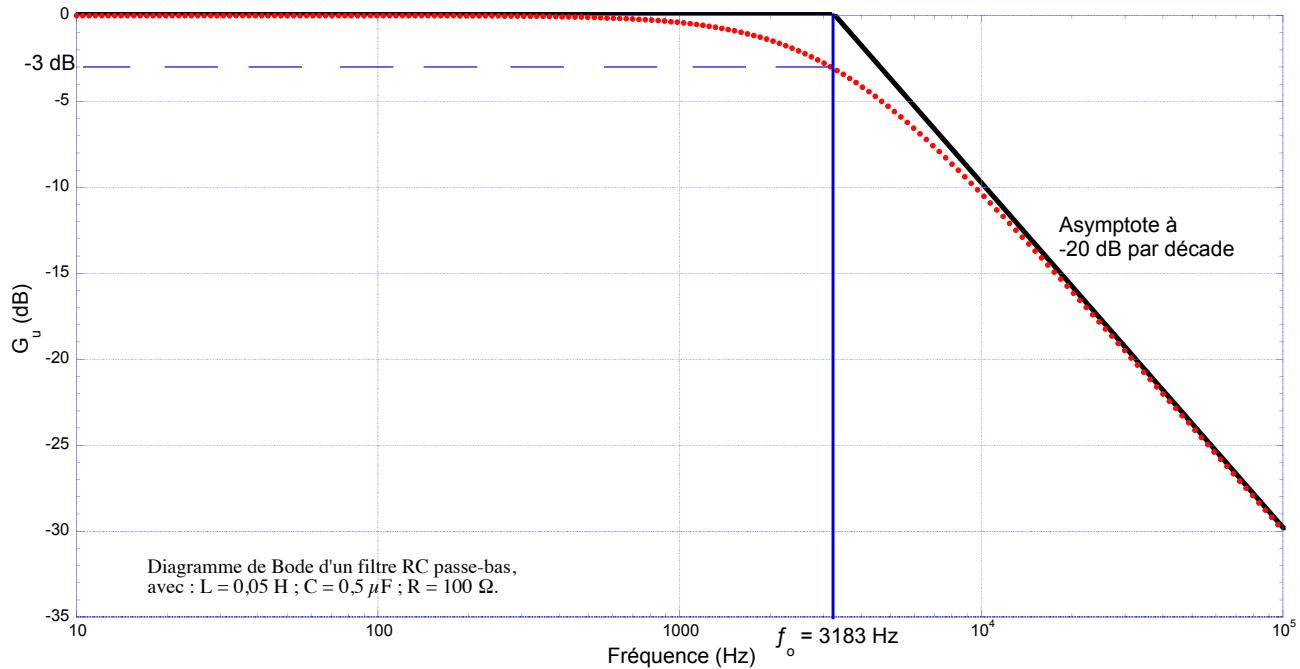
$$\begin{aligned} \text{D'où : } G_u &= 20 \log_{10} |\underline{H}(\omega)| = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_1)^2}} \right) = 20 \left[ \log_{10}(1) - \log_{10} \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right)^{1/2} \right] \\ &= -20 \times \frac{1}{2} \log_{10} \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) = -10 \log_{10} \left( 1 + \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

- Pour les basses fréquences  $\omega \ll \omega_1$ , donc  $(\omega/\omega_1)^2 \ll 1$  et on a :  $G_u \approx -10 \log_{10}(1) = 0$

A basse fréquence, l'asymptote est une droite horizontale à 0 dB.

- Pour les hautes fréquences  $\omega \gg \omega_1$ , donc  $(\omega/\omega_1)^2 \gg 1$  et on a :
- $$G_u \approx -10 \log_{10} \left( \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \approx -20 [\log_{10}(\omega) - \log_{10}(\omega_1)] \approx 20 \log_{10}(\omega_1) - 20 \log_{10}(\omega) = \text{cte} - 20 \log_{10}(\omega)$$

A haute fréquence, l'asymptote est une droite dont la pente est négative et vaut : -20 dB/décade (lorsque  $\omega$  est multipliée par 10,  $G_u$  diminue de 20 dB).



- On vérifie que pour  $\omega = \omega_1$ , on a :  $G_u = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_1)^2}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$
- $\omega_1$  est bien la fréquence de coupure à -3 dB.
- Finalement, le diagramme de Bode a l'allure représentée ci-dessus.

## 9.4 Déphasage

Etudions maintenant le déphasage entre  $\underline{u}_S$  et  $\underline{u}_E$ . Supposons que :  $\underline{u}_E = U_E \exp(j\omega t)$

On écrit alors :  $\underline{u}_S = \underline{H}(\omega) \underline{u}_E$  c'est à dire :  $\text{Arg}(\underline{u}_S) = \text{Arg}(\underline{H}(\omega)) + \text{Arg}(\underline{u}_E)$

Autrement dit, on aura :  $\underline{u}_S = U_S \exp j(\omega t + \theta)$  où :  $\theta = \text{Arg}(\underline{H}(\omega))$

Etudions la dépendance de  $\theta$  en fonction de la fréquence :

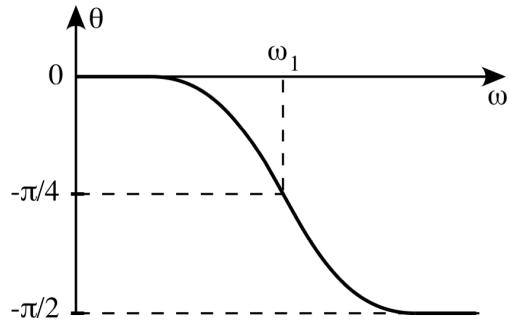
$$\text{On a : } \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+j(\omega/\omega_1)} = \frac{1-j(\omega/\omega_1)}{1+(\omega/\omega_1)^2}$$

$$\text{On a donc : } \theta = \text{Arc tan} [-(\omega/\omega_1)/1] = -\text{Arc tan} (\omega/\omega_1).$$

On voit que pour  $\omega \rightarrow 0$  on a  $\theta \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$  on a  $\theta \rightarrow -\pi/2$ .

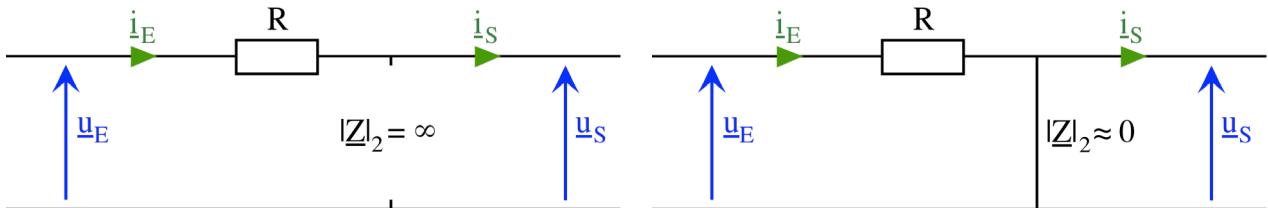
Pour  $\omega = \omega_C = \omega_1 = 1/RC$  on a :  $\theta = -\text{Arc tan} (1) = -\pi/4 = -45^\circ$ .

A basse fréquence (par rapport à la bande passante), on retrouve bien le critère des filtres parfaits, puisque le déphasage entre  $\underline{u}_S$  et  $\underline{u}_E$  est nul. Pour des fréquences plus élevées, le déphasage croît (négativement), passe par  $-\pi/4$  à la fréquence de coupure, et tend vers  $-\pi/2$  aux fréquences élevées.



## 9.5 Analyse qualitative

On peut retrouver les résultats des calculs qui précèdent en analysant qualitativement ce filtre : on se souvient qu'à basse fréquence un condensateur se comporte comme un circuit ouvert et qu'à haute fréquence il se comporte comme un court-circuit (voir paragraphe 5.4) :



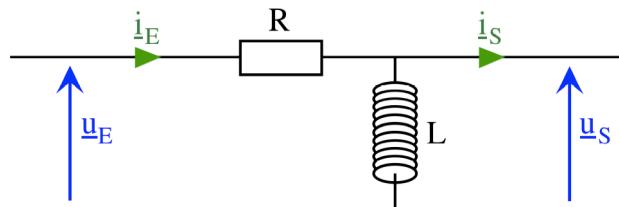
Filtre passe-bas à basse fréquence :  
si  $i_S \approx 0$  alors  $i_E \approx i_S \approx 0$  et  $u_S = u_E$

Filtre passe-bas à haute fréquence :  $u_S \approx 0$

## 10 Filtre passe-haut

### 10.1 Fonction de transfert

On s'intéresse maintenant à un filtre en L dans lequel les dipôles  $Z_1$  et  $Z_2$  sont respectivement une résistance et une inductance. Nous allons suivre le même raisonnement que pour l'étude du filtre RC.



On a donc :  $Z_1 = R$  et  $Z_2 = jL\omega$ . D'où :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{1}{1 + (R/jL\omega)} = \frac{1}{1 - j(\omega_2/\omega)} \quad \text{où l'on définit : } \omega_2 = R/L.$$

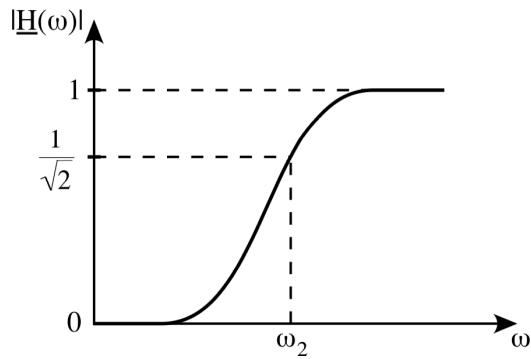
### 10.2 Gain

On peut alors écrire le gain :  $|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_2/\omega)^2}}$

Sans faire une étude complète de la fonction  $|\underline{H}(\omega)|$ , on voit que pour  $\omega \rightarrow 0$  on a  $|\underline{H}(\omega)| \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$  on a  $|\underline{H}(\omega)| \rightarrow 1$ .

La fréquence de coupure  $\omega_C$  correspond à  $|\underline{H}(\omega_C)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , c'est à dire :  $\omega_2 / \omega_C = 1$  soit  $\omega_C = \omega_2 = R/L$ .

La variation du gain avec la fréquence est la suivante :



C'est un filtre passe-haut dont la fréquence (ou pulsation) de coupure vaut :  $\omega_2 = R/L$ . Autrement dit, la bande passante à -3 dB est  $[\omega_2, \infty]$ .

### 10.3 Diagramme de Bode

Pour ce filtre passe-haut, on a :  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_2/\omega)^2}}$

$$\text{D'où : } G_u = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_2/\omega)^2}} = 20 \left[ \log_{10}(1) - \frac{1}{2} \log_{10} \left( 1 + \left( \frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 \right) \right] = -10 \log_{10} \left( 1 + \left( \frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 \right)$$

- Pour les basses fréquences  $\omega \ll \omega_2$ , donc  $(\omega_2/\omega)^2 \gg 1$  et on a :

$$G_u \approx -10 \log_{10} \left( \frac{\omega_2}{\omega} \right)^2 = -20 [\log_{10}(\omega_2) - \log_{10}(\omega)] = \text{cte} + 20 \log_{10}(\omega)$$

A basse fréquence, l'asymptote est une droite dont la pente est positive et vaut : +20 dB/décade (lorsque  $\omega$  est multipliée par 10,  $G_u$  augmente de 20 dB).

- Pour les hautes fréquences  $\omega \gg \omega_2$ , donc  $(\omega_2/\omega)^2 \ll 1$  et on a :  $G_u \approx -10 \log_{10}(1) = 0$

A haute fréquence, l'asymptote est une droite horizontale à 0 dB.

- On vérifie que pour  $\omega = \omega_2$ , on a :  $G_u = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+(\omega_2/\omega)^2}} = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{2}} = -3 \text{ dB}$

$\omega_2$  est bien la fréquence de coupure à -3 dB.

- Finalement, le diagramme de Bode a l'allure représentée ci-dessous.

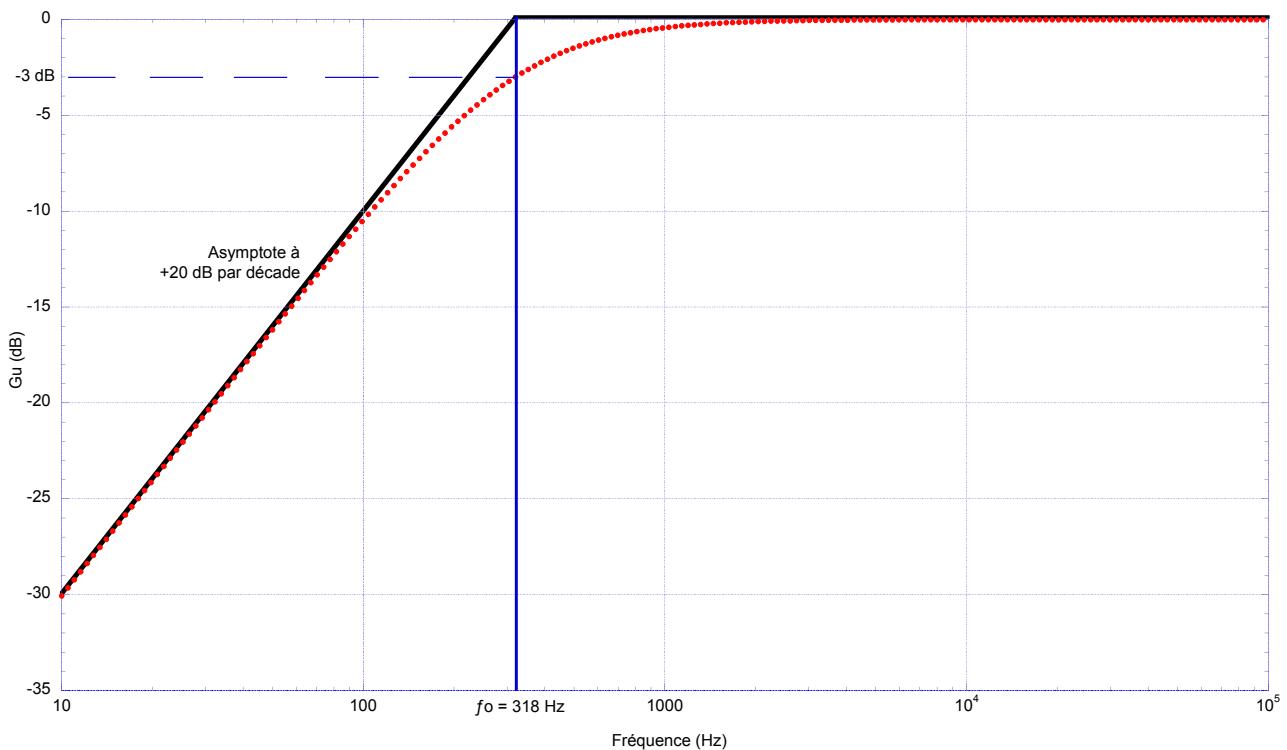


Diagramme de Bode d'un filtre RL passe-haut, avec :  $L = 0,05 \text{ H}$  et  $R = 100 \Omega$ .

#### 10.4 Déphasage

Etudions maintenant le déphasage entre  $\underline{u}_s$  et  $\underline{u}_E$ . Supposons que :  $\underline{u}_E = U_E \exp(j\omega t)$

$$\text{On aura alors : } \underline{u}_s = U_s \exp j(\omega t + \theta) \quad \text{où : } \theta = \text{Arg} (\underline{H}(\omega))$$

Etudions la dépendance de  $\theta$  avec la fréquence :

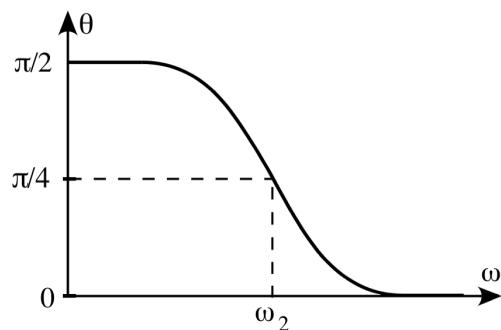
$$\text{On a : } \underline{H}(\omega) = \frac{1}{1-j(\omega_2/\omega)} = \frac{1+j(\omega_2/\omega)}{1+(\omega_2/\omega)^2}$$

$$\text{On a donc : } \theta = \text{Arc tan} [(\omega_2/\omega)/1] = \text{Arc tan} (\omega_2/\omega).$$

On voit que pour  $\omega \rightarrow 0$  on a  $\theta \rightarrow \pi/2$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$  on a  $\theta \rightarrow 0$ .

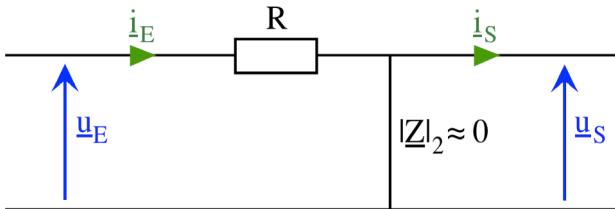
Pour  $\omega = \omega_C = \omega_2 = R/L$  on a :  $\theta = \text{Arc tan} (1) = \pi/4 = 45^\circ$ .

A haute fréquence (par rapport à la bande passante), on retrouve bien le critère des filtres parfaite, puisque le déphasage entre  $\underline{u}_s$  et  $\underline{u}_E$  est nul. Pour des fréquences plus faibles, le déphasage croît, passe par  $\pi/4$  à la fréquence de coupure, et tend vers  $\pi/2$  aux basses fréquences.

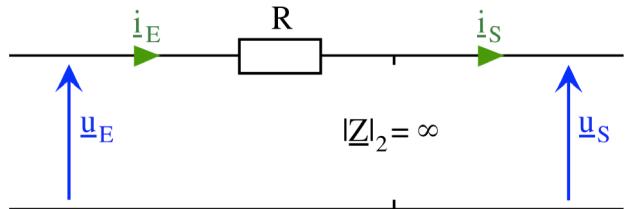


## 10.5 Analyse qualitative

On peut retrouver les résultats des calculs qui précèdent en analysant qualitativement ce filtre : on se souvient qu'à basse fréquence une bobine se comporte comme un court-circuit et qu'à haute fréquence elle se comporte comme un circuit ouvert (voir paragraphe 5.4) :



Filtre passe-haut à basse fréquence :  $\underline{u}_S \approx 0$

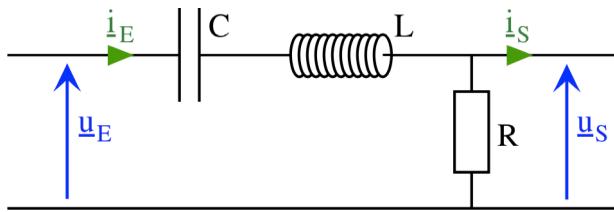


Filtre passe-haut à haute fréquence :  
si  $\underline{i}_S \approx 0$  alors  $\underline{i}_E \approx \underline{i}_S \approx 0$  et  $\underline{u}_S = \underline{u}_E$

## 11 Filtre passe bande

### 11.1 Fonction de transfert

On considère un circuit RLC série qui peut être vu comme un filtre en L : dans ce filtre,  $Z_1$  est constituée d'un condensateur et d'une inductance en série, et  $Z_2$  est une résistance.



On a donc :  $Z_1 = jL\omega + 1/jC\omega$  et  $Z_2 = R$ .

La fonction de transfert s'écrit :  $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$  soit :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{R}{R + j(L\omega - \frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1 + j(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega})}$$

On rappelle que la pulsation propre du circuit s'écrit :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  et le facteur de qualité :

$$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On peut alors écrire la fonction de transfert sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

### 11.2 Gain

Le gain s'écrit :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

On voit que pour  $\omega \rightarrow 0$  on a  $|\underline{H}(\omega)| \rightarrow 0$  et pour  $\omega \rightarrow \infty$  on a également  $|\underline{H}(\omega)| \rightarrow 0$ . Entre ces deux valeurs,  $|\underline{H}(\omega)|$  passe par un maximum lorsque la racine passe par un minimum, c'est à dire si :

$$\left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0 \quad \text{soit : } \omega = \omega_0$$

Pour  $\omega = \omega_0$  on a  $|\underline{H}(\omega)| = 1$ , ce qui s'explique directement par la représentation de Fresnel : à la résonance, l'impédance totale du circuit se réduit à  $Z = R$ . La tension d'entrée (tension appliquée au circuit) est égale à la tension aux bornes de la résistance  $R$ , c'est à dire la tension de sortie  $\underline{u}_S$  :

$$\underline{u}_S = \underline{u}_R = \underline{H}(\omega_0)\underline{u}_E = \underline{u}_E$$

Les fréquences de coupure  $\omega_{C1}$  et  $\omega_{C2}$  correspondent à  $|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , c'est à dire :

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Soit : } \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{L}{R}\omega^2 - \frac{1}{RC} = \pm \omega \quad \Rightarrow \quad \omega^2 \pm \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0$$

• La première équation :  $\omega^2 + \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0$  a pour solutions :

$$\omega = \frac{1}{2} \left[ -\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right]$$

Seule la solution positive ( $\omega > 0$ ) a un sens physique. On l'écrit :

$$\omega_{C1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

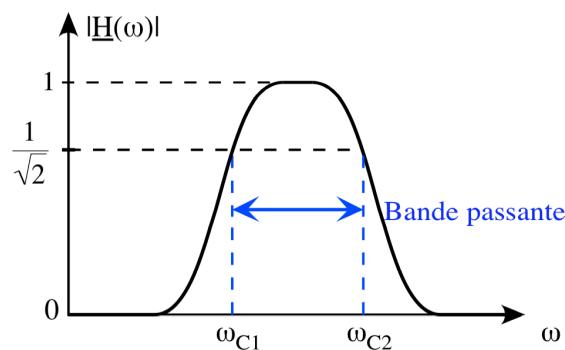
• La seconde équation :  $\omega^2 - \frac{R}{L}\omega - \frac{1}{LC} = 0$  a pour solutions :

$$\omega = \frac{1}{2} \left[ \frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \frac{4}{LC}} \right]$$

Seule la solution positive ( $\omega > 0$ ) a un sens physique. On l'écrit :

$$\omega_{C2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

On remarque que l'on a bien  $\Delta\omega = \omega_{C2} - \omega_{C1} = R/L$  comme on l'avait vu dans l'étude du circuit RLC. La variation du gain avec la fréquence est la suivante :



C'est un filtre passe-bande dont les fréquences (ou pulsations) de coupure valent :

$$\omega_{C1,C2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Autrement dit, la bande passante à -3 dB est  $[\omega_{C1}, \omega_{C2}]$ .

### 11.3 Diagramme de Bode

Pour ce filtre passe-bande, on a :  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

$$\text{D'où : } G_u = 20 \log_{10} \frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = 20 \left( \log_{10}(1) - \frac{1}{2} \log_{10} \left[ 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right] \right)$$

Et finalement :

$$G_u = -10 \log_{10} \left[ 1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right]$$

- Pour les basses fréquences :  $\omega \ll \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  on a :

$$G_u \approx -10 \log_{10} \left( -Q \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = -20 \log_{10} \left| -Q \frac{\omega_0}{\omega} \right| = -20 [\log_{10}(Q\omega_0) - \log_{10}(\omega)] = \text{cte} + 20 \log_{10}(\omega)$$

A basse fréquence, l'asymptote est une droite dont la pente est positive et vaut : +20 dB/décade (lorsque  $\omega$  est multipliée par 10, le gain  $G_u$  augmente de 20 dB).

- Pour les hautes fréquences :  $\omega \gg \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  on a :

$$G_u \approx -10 \log_{10} \left( Q \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 = -20 \log_{10} \left| Q \frac{\omega}{\omega_0} \right| = -20 \left[ \log_{10}(\omega) - \log_{10}\left(\frac{\omega_0}{Q}\right) \right] = \text{cte} - 20 \log_{10}(\omega)$$

A haute fréquence, l'asymptote est une droite dont la pente est négative et vaut : -20 dB/décade (lorsque  $\omega$  est multipliée par 10, le gain  $G_u$  diminue de 20 dB).

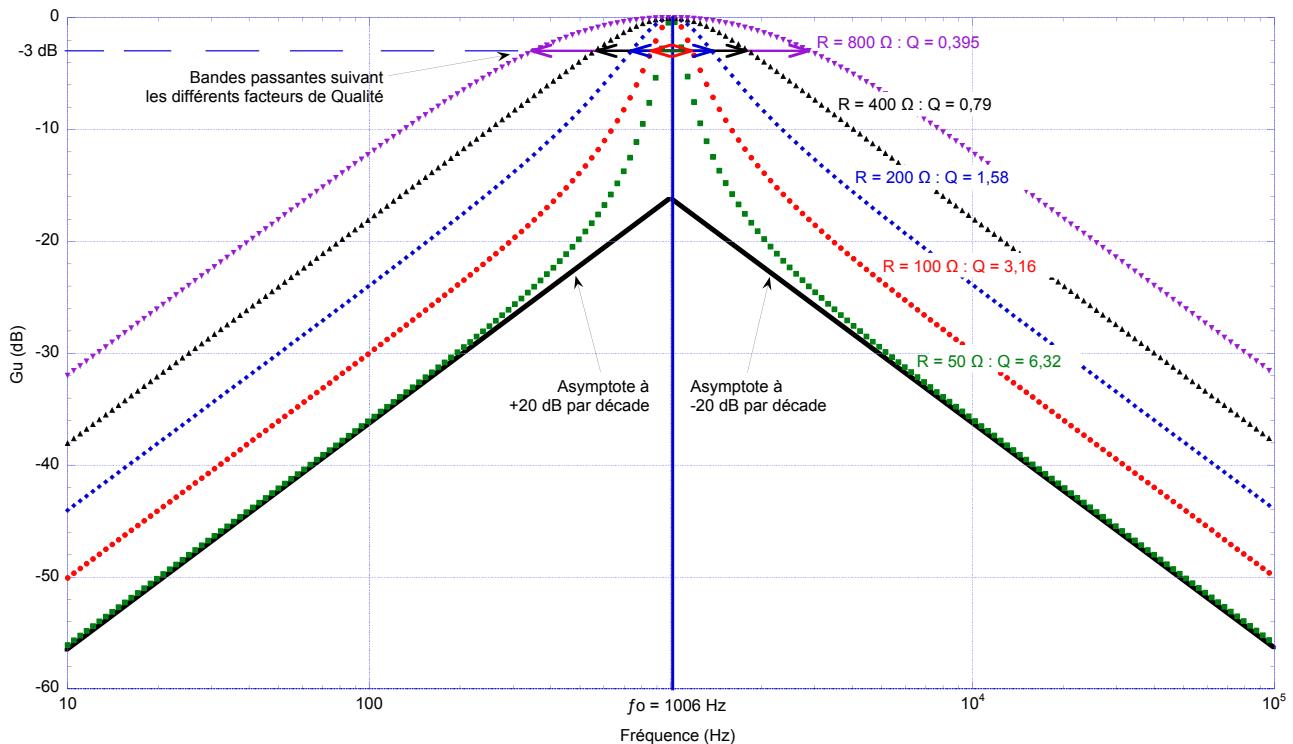


Diagramme de Bode d'un filtre RLC,  
avec :  $L = 0,05 \text{ H}$  ;  $C = 0,5 \mu\text{F}$  ; et  $R$  variable :  $R = 50 ; 100 ; 200 ; 400 ; 800 \Omega$ .

- On vérifie que pour  $\omega = \omega_0$ , on a :  $G_u = -10 \log_{10}[1 + Q^2(1 - 1)^2] = -10 \log_{10}(1) = 0 \text{ dB}$

- Et pour  $\omega = \omega_{C1,C2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$ , on avait obtenu :  $|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Soit :  $G_u = 20 \log_{10}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \text{ dB}$

- Finalement, le diagramme de Bode a l'allure représentée sur la figure précédente.

On voit que la bande passante est d'autant plus étroite (le filtre est d'autant plus sélectif) que le facteur de Qualité Q est élevé.

## 11.4 Déphasage

Etudions maintenant le déphasage entre  $u_s$  et  $u_E$ . Supposons que :  $u_E = U_E \exp(j\omega t)$

On aura alors :  $u_s = U_s \exp j(\omega t + \theta)$

Où :  $\theta = \text{Arg}(H(\omega))$

Etudions la dépendance de  $\theta$  avec la fréquence :

On repart de l'expression :

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)} = \frac{1-j\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)}{1+\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}$$

On a donc :  $\theta = \text{Arc tan} \left[ -\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)/1 \right] = -\text{Arc tan} \left( \frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)$

- On voit que pour  $\omega \rightarrow 0$  on a  $\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) \rightarrow -\infty$  et  $\theta \rightarrow +\pi/2$

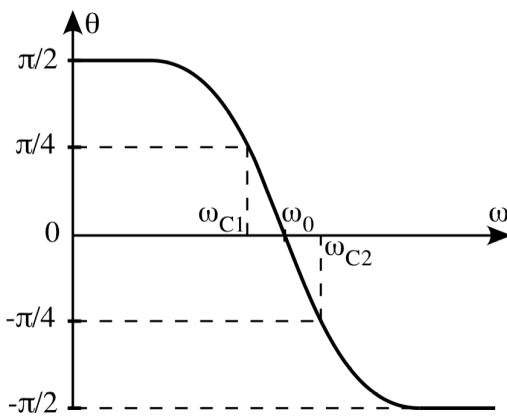
- et pour  $\omega \rightarrow \infty$  on a  $\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) \rightarrow +\infty$  et  $\theta \rightarrow -\pi/2$ .

- Pour  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  on a :  $\theta = \text{Arc tan}(0) = 0$  : au milieu de la Bande Passante, le déphasage entre  $u_s$  et  $u_E$  est nul.

- Enfin, pour  $\omega_{C1}$  ou  $\omega_{C2}$ , on se souvient que  $\left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right) = \pm 1$  et on a donc :

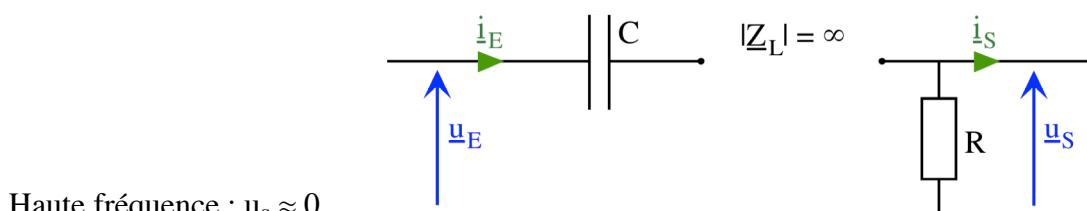
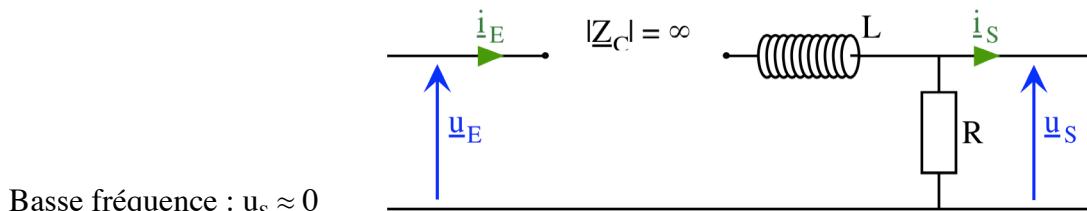
$$\theta_{1,2} = -\text{Arc tan}(\pm 1) = \pm \pi/4 = \pm 45^\circ.$$

La dépendance globale de  $\theta$  avec la fréquence est donc la suivante :



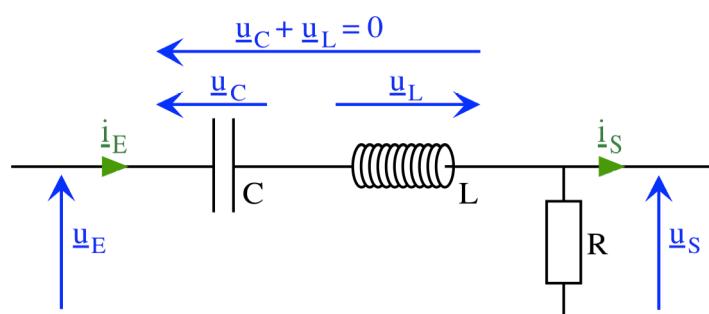
## 11.5 Analyse qualitative

On peut retrouver les résultats des calculs qui précèdent en analysant qualitativement ce filtre : on se souvient qu'à basse fréquence un condensateur se comporte comme un circuit ouvert et qu'à haute fréquence une bobine se comporte comme un circuit ouvert (voir paragraphe 5.4) :



A basse comme à haute fréquence, le circuit est « coupé », et la tension  $\underline{u}_S$  tend vers zéro.

A la fréquence de résonance  $\omega = \omega_0$ , les tensions de la bobine et du condensateur sont à tout instant opposées, et la tension  $\underline{u}_C + \underline{u}_L = 0$ . D'où :  $\underline{u}_E = \underline{u}_S$ .



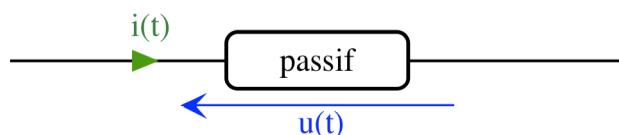
Fréquence de résonance  $\omega = \omega_0$  :

On retrouve bien les caractéristiques d'un filtre passe-bande.

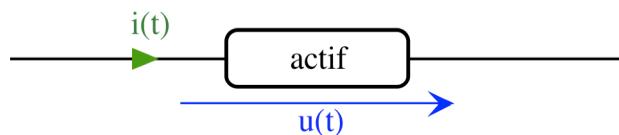
## 12 Energies et Puissances

### 12.1 Rappel des conventions de représentation

Pour un dipôle passif (recevant de l'énergie), le courant descend les potentiels, et on le représente ainsi :



Pour un dipôle actif (fournissant de l'énergie), le courant remonte les potentiels, et on le représente ainsi :



Dans une analogie hydraulique, un dipôle passif est comme une rivière dans laquelle l'eau descend (l'énergie potentielle de l'eau diminue), et un dipôle actif est une pompe qui remonte l'eau en altitude (la pompe fournit de l'énergie potentielle à l'eau).

### 12.2 Puissance instantanée

La puissance instantanée (fournie ou absorbée) par un dipôle (générateur ou récepteur) s'écrit :

$$P(t) = u(t) \times i(t)$$

Il s'agit ici du produit de la tension réelle et du courant réel :

$$P(t) = \operatorname{Re}[u(t)] \times \operatorname{Re}[i(t)]$$

Comme on sait que :  $\operatorname{Re}[a] \times \operatorname{Re}[b] \neq \operatorname{Re}[a.b]$ , il faut extraire les parties réelles de  $u$  et de  $i$  avant de faire le produit.

Intéressons-nous à un dipôle quelconque d'impédance  $Z = Z_0 \exp(j\theta)$  parcouru par un courant  $i(t)$ , et aux bornes duquel on a une tension  $u(t)$ .

On choisit l'origine du temps telle que le courant s'écrive :  $i(t) = I_m \cos \omega t$ . La tension s'écrit alors :  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta)$  avec  $U_m = Z_0 I_m$ .

On écrit alors :

$$\begin{aligned} P(t) &= u(t).i(t) = U_m \cos(\omega t + \theta) \times I_m \cos \omega t = U_m I_m [\cos(\omega t + \theta) \times \cos(\omega t)] \\ &= \frac{U_m I_m}{2} [\cos(\omega t + \theta + \omega t) + \cos(\omega t + \theta - \omega t)] \end{aligned}$$

$$\text{Et finalement : } P(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \theta) + \cos(\theta)]$$

Comme la tension et le courant, la puissance instantanée varie avec le temps, et elle dépend des caractéristiques  $Z_0$  et  $\theta$  du dipôle.

### 12.3 Puissance moyenne (ou active) et puissance apparente

La puissance moyenne (ou puissance active)  $\langle P \rangle$  correspond à la puissance consommée ou fournie pendant une période. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle_T &= \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \\ &= \frac{U_m I_m}{2T} \int_0^T [\cos(2\omega t + \theta) + \cos(\theta)] dt = \frac{U_m I_m}{2T} \left[ \left[ \frac{\sin(2\omega t + \theta)}{2\omega} \right]_0^T + [t \cos(\theta)]_0^T \right] \\ &= \frac{U_m I_m}{2T} \left[ \frac{1}{2\omega} \left( \sin \left\{ 2 \times \frac{2\pi}{T} T + \theta \right\} - \sin \{0 + \theta\} \right) + (T - 0) \cos \theta \right] \end{aligned}$$

$$\text{Soit : } \langle P \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos \theta$$

- Le terme  $\cos \theta$  est le facteur de puissance du dipôle.
- La puissance est une grandeur homogène à  $M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$  ( $M$  = Masse,  $L$  = Longueur,  $T$  = Temps). L'unité de la puissance dans le système SI est le Watt :  $1 \text{ W} = 1 \text{ Volt} \times \text{Ampère} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ .

### 12.4 Puissance apparente et puissance réactive

Le terme  $S = U_m I_m / 2$  est la « puissance apparente ». En régime alternatif, la puissance apparente  $S$  est le produit de la valeur efficace de la tension électrique aux bornes du dipôle par la valeur efficace du courant électrique qui le traverse.

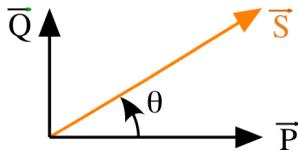
En effet, comme  $I_{\text{eff}} = I_m / \sqrt{2}$  et  $U_{\text{eff}} = U_m / \sqrt{2}$ , on a :  $S = U_m I_m / 2 = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$ .

La puissance apparente est la puissance maximale qui pourrait être dissipée dans le dipôle si son impédance  $Z$  était purement réelle. Elle se mesure en VA (Volt.Ampères) pour la distinguer de la puissance active.

Enfin, on définit la puissance réactive :  $Q = \frac{U_m I_m}{2} \sin \theta$ .

Pour un dipôle purement réactif (bobine idéale ou condensateur parfait) la puissance réactive peut être vue comme la puissance échangée au cours d'une période entre le composant et le reste du circuit. La puissance réactive se mesure en VAr (Volt.Ampères réactifs) pour la distinguer de la puissance active et de la puissance apparente (on n'additionnera jamais des puissances actives avec des puissances réactives ou des puissances apparentes).

On peut représenter les différentes puissances dans un diagramme de Fresnel :



Et on remarque que  $S^2 = P^2 + Q^2$ .

On verra qu'un circuit qui présente une puissance réactive trop élevée peut entraîner des courants importants dans le réseau électrique, ce qui s'accompagne de pertes thermiques et de surcharges dans les transformateurs de distribution. Il convient alors de compenser cette puissance réactive en augmentant le facteur de puissance.

## 12.5 Puissance active dans les composants R, L et C

### 1) Pour une résistance :

On sait que le déphasage  $\theta$  entre la tension et le courant est nul :  $Z_R = R \exp(j\omega t) = R$ . La puissance active s'écrit :

$$\langle P_R \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos 0 \quad \text{Soit } \langle P_R \rangle = \frac{RI_m^2}{2}$$

Si l'on exprime la puissance active en fonction de la valeur efficace du courant :  $I_{eff} = I_m / \sqrt{2}$ , on obtient l'expression connue :

$$\langle P_R \rangle = RI_{eff}^2$$

En courant alternatif, la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans une résistance est égale à la puissance que l'on dissiperait si l'on alimentait cette résistance avec un courant continu égal à la valeur efficace du courant alternatif.

### 2) Pour un condensateur parfait :

L'impédance s'écrit :  $Z_C = 1/jC\omega = (1/C\omega) \exp(-j\pi/2)$  : le déphasage entre la tension et le courant est égal à :  $\theta = -\pi/2$ . La puissance active s'écrit donc :

$$\langle P_C \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La puissance active d'un condensateur est nulle. Autrement dit, le condensateur fournit autant de puissance (lorsqu'il se décharge) qu'il n'en absorbe (lorsqu'il se charge). Par contre, la puissance réactive d'un condensateur est grande :  $Q_C = (U_m I_m / 2) \sin \theta = -U_m I_m / 2 = -U_{eff} I_{eff}$ .

### 3) Pour une inductance idéale :

L'impédance s'écrit :  $Z_L = jL\omega = L\omega \exp(j\pi/2)$  : le déphasage entre la tension et le courant est égal à  $\pi/2$ . La puissance active s'écrit :

$$\langle P_L \rangle = \frac{U_m I_m}{2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

La puissance active d'une bobine d'induction est nulle. Autrement dit, la bobine fournit autant de puissance (lorsque le courant diminue), qu'elle n'en absorbe (lorsque le courant augmente). Par contre, la puissance réactive d'une inductance est grande :  $Q_L = (U_m I_m / 2) \sin \theta = U_m I_m / 2 = U_{eff} I_{eff}$ .

### 4) Nomenclature des dipôles :

- Un dipôle actif est un dipôle qui fournit de l'énergie au circuit extérieur : générateur, pile, ...
- Un dipôle passif est un dipôle qui reçoit de l'énergie de l'extérieur. Parmi les dipôles passifs, on distingue :

- les dipôles réactifs, qui permettent l'accumulation temporaire de l'énergie électrique. Exemples : les condensateurs et les inductances sont des dipôles passifs purement réactifs.
- les dipôles non réactifs, qui ne permettent pas l'accumulation temporaire d'énergie. Exemple : les résistances sont des dipôles passifs non réactifs.

## 12.6 Facteur de puissance et consommation électrique

Les distributeurs d'électricité facturent à l'usager la puissance active consommée. Si le facteur de puissance d'une installation domestique ou industrielle est faible (si l'installation est capacitive ou inductive), l'intensité électrique qui circule dans le réseau peut être grande mais la puissance moyenne (active) consommée est faible.

Exemple : on branche un condensateur  $C = 0,1 \text{ mF}$  sur le secteur (tension  $U_{\text{eff}} = 220 \text{ V}$ ). Le courant est :

$$I_{\text{eff}} = U_{\text{eff}} / |Z| = U_{\text{eff}} \times C\omega$$

$$\text{A.N. : } I_{\text{eff}} = 220 \text{ V} \times 0,1 \cdot 10^{-3} \text{ F} \times 2\pi \times 50 \text{ Hz} = 6,9 \text{ A}$$

Ce courant circule dans les lignes EDF et provoque des déperditions par effet Joule. Mais l'usager ne consomme et ne paie rien, parce que la puissance active du condensateur est nulle...

(NB : ne pas essayer de réaliser cette expérience : un condensateur présente généralement une tension limite d'utilisation, ou tension de 'claquage', souvent inférieure à 220 V. Au delà de cette tension de claquage, il se forme un arc électrique à travers l'isolant et le condensateur est détruit avec risque d'explosion).

En pratique, une installation électrique réelle ne possède jamais un facteur de puissance rigoureusement nul, mais celui-ci peut être jugé « trop faible » par EDF. Ceci est le cas notamment si l'installation comporte des moteurs électriques. Une telle installation provoquera de la dissipation thermique par effet Joule dans les fils d'alimentation (en amont de l'installation). Mais cette puissance ne sera pas payée par l'usager.

C'est la raison pour laquelle les distributeurs d'électricité exigent des usagers un facteur de puissance suffisamment élevé ( $\cos \theta > 0,8$  à 0,93 suivant les sources). Voici quelques exemples de valeurs caractéristiques :

- |                                      |                            |
|--------------------------------------|----------------------------|
| - Moteur asynchrone :                | $\cos \theta \approx 0,8$  |
| - Lampe fluorescente non compensée : | $\cos \theta \approx 0,5$  |
| - Four à induction :                 | $\cos \theta \approx 0,85$ |
| - Poste de soudure à l'arc :         | $\cos \theta \approx 0,5$  |

## 13 Echanges d'énergie

### 13.1 Echanges d'énergie dans un condensateur

Lorsqu'un condensateur se charge, il se comporte comme un récepteur, et lorsqu'il se décharge, il se comporte comme un générateur. Nous allons vérifier cela en calculant les énergies reçues ou cédées en fonction du temps.

Considérons un condensateur initialement déchargé sous tension nulle, et calculons l'énergie échangée en fonction du temps. On suppose que le condensateur est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale, et que le courant s'écrit :  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ . La tension à ses bornes s'écrit alors :

$$u(t) = (I_m/C\omega) \cos(\omega t - \pi/2)$$

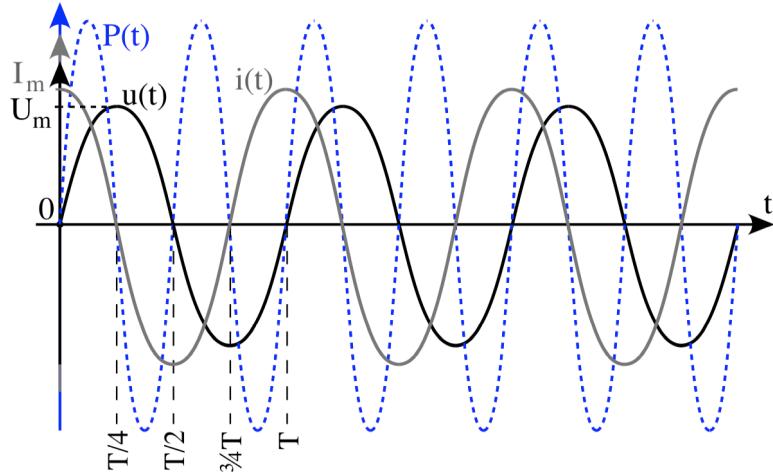
On reprend l'expression de la puissance instantanée établie ci-dessus :

$$P(t) = \frac{U_m I_m}{2} [\cos(2\omega t + \theta) + \cos(\theta)] \quad \text{avec } \theta = -\pi/2 \text{ et } U_m = I_m/C\omega \text{ soit : } I_m = CU_m\omega.$$

$$\text{D'où : } P(t) = \frac{CU_m^2\omega}{2} [\cos(2\omega t - \pi/2) + \cos(-\pi/2)]$$

$$\text{Soit : } P(t) = \frac{CU_m^2\omega}{2} \sin(2\omega t) \quad (\text{on rappelle que } \cos(\alpha - \pi/2) = \sin \alpha)$$

Cette puissance instantanée est représentée sur la figure suivante :



Calculons maintenant l'énergie échangée en fonction du temps entre les instants quelconques  $t_1$  et  $t_2$  :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \frac{CU_m^2\omega}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sin(2\omega t) dt = \frac{CU_m^2\omega}{2} \left[ \frac{-\cos(2\omega t)}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{CU_m^2}{4} [\cos(2\omega t_1) - \cos(2\omega t_2)]$$

$$\text{Soit : } E = \frac{CU_m^2}{4} \left[ \cos \left( 2 \times 2\pi \frac{t_1}{T} \right) - \cos \left( 2 \times 2\pi \frac{t_2}{T} \right) \right]$$

On va calculer l'énergie échangée au cours des 4 quarts de la période  $T$  :

- De  $t_1 = 0$  à  $t_2 = T/4$ , on a :

$$E = \frac{CU_m^2}{4} \left[ \cos(0) - \cos \left( \frac{4\pi}{4} \right) \right] = \frac{CU_m^2}{4} [1 + 1] \quad \text{Soit : } E = \frac{1}{2} CU_m^2$$

Interprétation : au cours du premier quart de période ( $0 \leq t \leq T/4$ ) :

- La tension est passée de 0 à  $U_m$  et le condensateur s'est chargé sous la tension  $U_m$ .
- A l'instant  $t = T/4$ , la charge est  $Q_m = CU_m$ .
- Entre 0 et  $T/4$ , la puissance est positive : le condensateur reçoit (et stocke) une énergie :  $E = \frac{1}{2} CU_m^2$ .
- De  $t_1 = T/4$  à  $t_2 = T/2$ , on a :

$$E = \frac{CU_m^2}{4} \left[ \cos \left( \frac{4\pi}{4} \right) - \cos(2\pi) \right] = \frac{CU_m^2}{4} [-1 - 1] \quad \text{Soit : } E = -\frac{1}{2} CU_m^2$$

Interprétation : au cours du second quart de période ( $T/4 \leq t \leq T/2$ ) :

- La tension est passée de  $U_m$  à 0 et le condensateur s'est déchargé : à l'instant  $t = T/2$ , la charge est  $Q = 0$ .
- Entre  $T/4$  et  $T/2$ , la puissance est négative : le condensateur rend l'énergie  $E = \frac{1}{2} CU_m^2$  au reste du circuit. A l'instant  $t = T/2$ , le condensateur ne contient plus d'énergie.
- De  $t_1 = T/2$  à  $t_2 = 3/4T$ , on a :

$$E = \frac{CU_m^2}{4} [\cos(2\pi) - \cos(3\pi)] = \frac{1}{2} CU_m^2$$

Interprétation : au cours du troisième quart de période ( $T/2 \leq t \leq 3/4T$ ) :

- La tension est passée de 0 à  $-U_m$  et le condensateur s'est chargé sous la tension  $-U_m$  : la charge est opposée à celle que l'on avait lors du premier quart de période (mais égale en valeur absolue).
- A l'instant  $t = 3/4T$ , la charge est  $Q = -Q_m = -CU_m$ .
- Entre  $T/2$  et  $3/4T$ , la puissance est positive : le condensateur reçoit (et stocke) une énergie :  $E = \frac{1}{2} CU_m^2$ .
- De  $t_1 = 3/4T$  à  $t_2 = T$ , on a :

$$E = \frac{CU_m^2}{4} [\cos(3\pi) - \cos(4\pi)] = -\frac{1}{2} CU_m^2$$

Interprétation : au cours du dernier quart de période ( $\frac{3}{4}T \leq t \leq T$ ) :

- La tension est passée de  $-U_m$  à 0 et le condensateur s'est déchargé : à l'instant  $t = T$ , la charge est  $Q = 0$ .

- Entre  $\frac{3}{4}T$  et  $T$ , la puissance est négative : le condensateur rend l'énergie  $E = \frac{1}{2}CU_m^2$  au reste du circuit. A l'instant  $t = T$ , le condensateur ne contient plus d'énergie et on se retrouve dans la même situation qu'au temps  $t = 0$ .

• Conclusion :

L'énergie stockée dans un condensateur s'écrit à tout instant :

$$E(t) = \frac{1}{2}C[u(t)]^2$$

Elle ne dépend que de la tension instantanée aux bornes du condensateur.

A l'inverse, on peut vérifier que la Puissance instantanée échangée (reçue ou fournie) par le condensateur s'écrit :

$$P(t) = \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2}C \frac{d[u(t)]^2}{dt} = \frac{1}{2}C \times 2u(t) \frac{du(t)}{dt} = u(t) \frac{d(Cu(t))}{dt} = u(t) \frac{dQ(t)}{dt} = u(t) \cdot i(t)$$

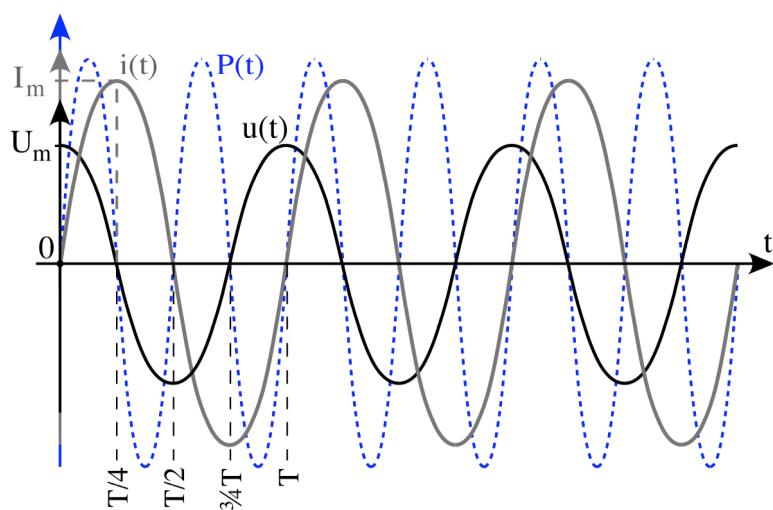
ce qui correspond bien à la définition de la puissance instantanée.

### 13.2 Echanges d'énergie dans une inductance

Les raisonnements et calculs qui suivent sont semblables à ceux du paragraphe précédent.

Lorsqu'une inductance est parcourue par un courant croissant, elle se comporte comme un récepteur, et lorsque le courant diminue, elle se comporte comme un générateur. Nous allons vérifier cela en calculant les énergies reçues ou cédées au cours d'une période.

Considérons une inductance initialement parcourue par un courant nul, et calculons l'énergie échangée en fonction du temps. On suppose que l'inductance est alimentée par un générateur délivrant une tension sinusoïdale qui s'écrit :  $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ . Le courant s'écrit alors :  $i(t) = I_m \cos(\omega t - \pi/2)$  ( $i(t)$  est en retard de  $\pi/2$  par rapport à la tension).



On exprime la puissance instantanée sous la forme :

$$P(t) = u(t) \cdot i(t) = U_m \cos(\omega t) \times I_m \cos(\omega t - \pi/2).$$

$$P(t) = U_m I_m \frac{1}{2} [\cos(2\omega t - \pi/2) + \cos(\pi/2)] = \frac{U_m I_m}{2} \sin(2\omega t) \quad \text{avec } U_m = L I_m \omega$$

$$\text{soit : } P(t) = \frac{L I_m^2 \omega}{2} \sin(2\omega t)$$

Calculons maintenant l'énergie échangée en fonction du temps entre les instants quelconques  $t_1$  et  $t_2$  :

$$E = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt = \frac{LI_m^2\omega}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sin(2\omega t) dt = \frac{LI_m^2\omega}{2} \left[ \frac{-\cos(2\omega t)}{2\omega} \right]_{t_1}^{t_2} = \frac{LI_m^2}{4} [\cos(2\omega t_1) - \cos(2\omega t_2)]$$

$$\text{Soit : } E = \frac{LI_m^2}{4} \left[ \cos\left(4\pi \frac{t_1}{T}\right) - \cos\left(4\pi \frac{t_2}{T}\right) \right]$$

On va calculer l'énergie échangée au cours des 4 quarts de la période  $T$  :

- De  $t_1 = 0$  à  $t_2 = T/4$ , on a :

$$E = \frac{LI_m^2}{4} \times 2 = \frac{1}{2} LI_m^2$$

Interprétation : au cours du premier quart de période ( $0 \leq t \leq T/4$ ) :

- Le courant est passé de 0 à  $I_m$ .
- Entre 0 et  $T/4$ , la puissance est positive : l'inductance reçoit (et stocke) une énergie :  $E = \frac{1}{2} LI_m^2$ .

- De  $t_1 = T/4$  à  $t_2 = T/2$ , on a :

$$E = \frac{LI_m^2}{4} \times (-2) = -\frac{1}{2} LI_m^2$$

Interprétation : au cours du second quart de période ( $T/4 \leq t \leq T/2$ ) :

- Le courant est passé de  $I_m$  à 0 : à l'instant  $t = T/2$ , le courant est nul.
- Entre  $T/4$  et  $T/2$ , la puissance est négative : l'inductance rend l'énergie  $E = \frac{1}{2} LI_m^2$  au reste du circuit. A l'instant  $t = T/2$ , l'inductance ne contient plus d'énergie.

- De  $t_1 = T/2$  à  $t_2 = \frac{3}{4}T$ , on a :

$$E = \frac{LI_m^2}{4} \times 2 = \frac{1}{2} LI_m^2$$

Interprétation : au cours du troisième quart de période ( $T/2 \leq t \leq \frac{3}{4}T$ ) :

- Le courant est passé de 0 à  $-I_m$  : le courant circule dans le sens opposé à celui que l'on avait lors du premier quart de période (mais il est égal en valeur absolue).

- Entre  $T/2$  et  $\frac{3}{4}T$ , la puissance est positive : l'inductance reçoit (et stocke) une énergie :  $E = \frac{1}{2} LI_m^2$ .

- De  $t_1 = \frac{3}{4}T$  à  $t_2 = T$ , on a :

$$E = \frac{LI_m^2}{4} \times (-2) = -\frac{1}{2} LI_m^2$$

Interprétation : au cours du dernier quart de période ( $\frac{3}{4}T \leq t \leq T$ ) :

- Le courant est passé de  $-I_m$  à 0 : à l'instant  $t = T$ , le courant est nul.
- Entre  $\frac{3}{4}T$  et  $T$ , la puissance est négative : l'inductance rend l'énergie  $E = \frac{1}{2} LI_m^2$  au reste du circuit. A l'instant  $t = T$ , l'inductance ne contient plus d'énergie. On se retrouve dans l'état de départ (à  $t = 0$ ).

- Conclusion :

L'énergie stockée dans une inductance s'écrit à tout instant :

$$E(t) = \frac{1}{2} L[i(t)]^2$$

Elle ne dépend que du courant instantané qui traverse l'inductance.

On peut vérifier très simplement que la Puissance instantanée échangée (reçue ou fournie) par l'inductance s'écrit :

$$P(t) = \frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{2} L \frac{d[i(t)]^2}{dt} = \frac{1}{2} L \times 2i(t) \frac{di(t)}{dt} = i(t)L \frac{d(i(t))}{dt} = u(t) \cdot i(t)$$

on retrouve bien l'expression de la puissance instantanée.

### 13.3 Echanges d'énergie dans un circuit LC

A partir de ce qui précède, on peut analyser les échanges d'énergie dans un circuit LC. On considère un circuit LC idéal dans lequel le condensateur est initialement chargé sous la tension  $u_C(t=0) = U_{Cm}$ .

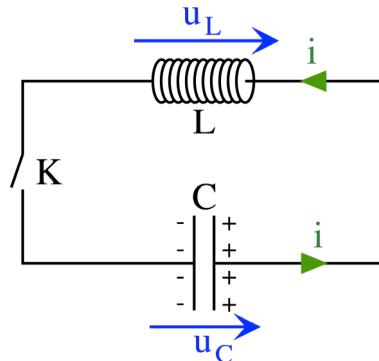
On ferme l'interrupteur K à l'instant  $t = 0$ .

- Aux bornes du condensateur, on a :  $i = d(-q(t))/dt$  (car l'électrode sur laquelle arrive le courant porte la charge  $-q$ ). On a donc :  $i(t) = C d(-u_C)/dt$ .

Le condensateur se comporte initialement comme un générateur.

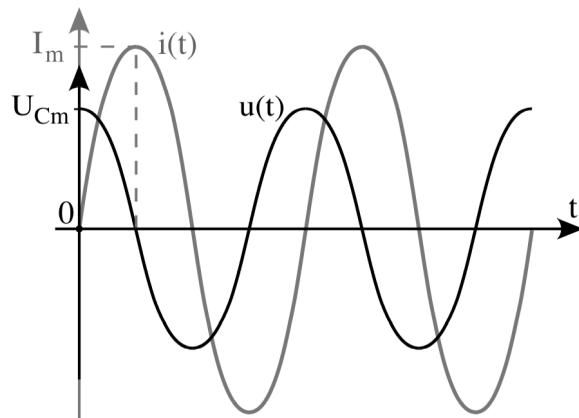
- Aux bornes de l'inductance, on a :  $u_L = L di/dt$
- La Loi des mailles permet d'écrire :  $u_L = u_C = u$  (pour simplifier les notations) et on écrit alors :  $u_L = u = L di(t)/dt = -LC d^2(u_C)/dt^2 = -LC d^2(u)/dt^2$ . Soit :

$$\frac{d^2[u(t)]}{dt^2} = -\omega_0^2 u(t) \quad \text{où } \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$



C'est une équation différentielle du 2<sup>ème</sup> ordre, dont la solution est telle que sa dérivée seconde est égale à la fonction elle même, multipliée par une constante négative. C'est donc une fonction sinusoïdale : on vérifie que la solution s'écrit :  $u(t) = U_m \cos(\omega_0 t)$  où :  $u(t=0) = U_m = U_{Cm}$  est la tension que l'on avait à l'origine aux bornes du condensateur.

On a alors :  $u(t) = U_{Cm} \cos(\omega_0 t)$  et  $i(t) = -C du/dt = CU_{Cm}\omega_0 \sin(\omega_0 t) = I_m \sin(\omega_0 t)$  :



Connaissant les expressions de la tension  $u(t)$  et du courant  $i(t)$ , on peut exprimer les énergies :

- L'énergie stockée dans l'inductance s'écrit :

$$E_L(t) = \frac{1}{2} L [i(t)]^2 = \frac{1}{2} L C^2 U_{Cm}^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{C U_{Cm}^2}{2} \sin^2(\omega_0 t)$$

- L'énergie stockée dans le condensateur s'écrit :

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C [u_C(t)]^2 = \frac{C U_{Cm}^2}{2} \cos^2(\omega_0 t)$$

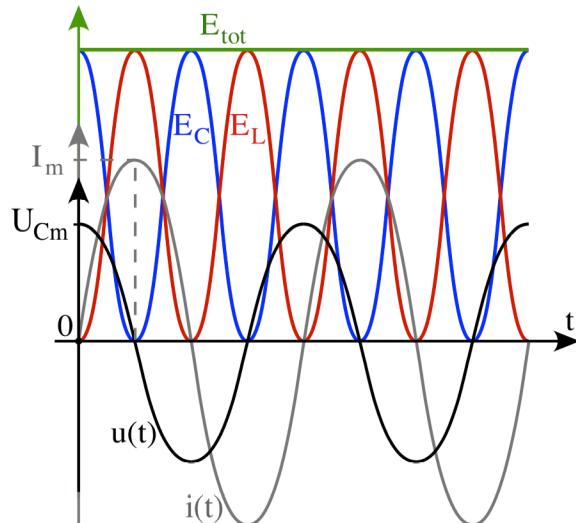
On vérifie que l'énergie totale est constante :  $E_{tot} = E_L(t) + E_C(t)$

$$E_{\text{tot}} = \frac{CU_{\text{Cm}}^2}{2} [\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)] = \frac{1}{2} CU_{\text{Cm}}^2$$

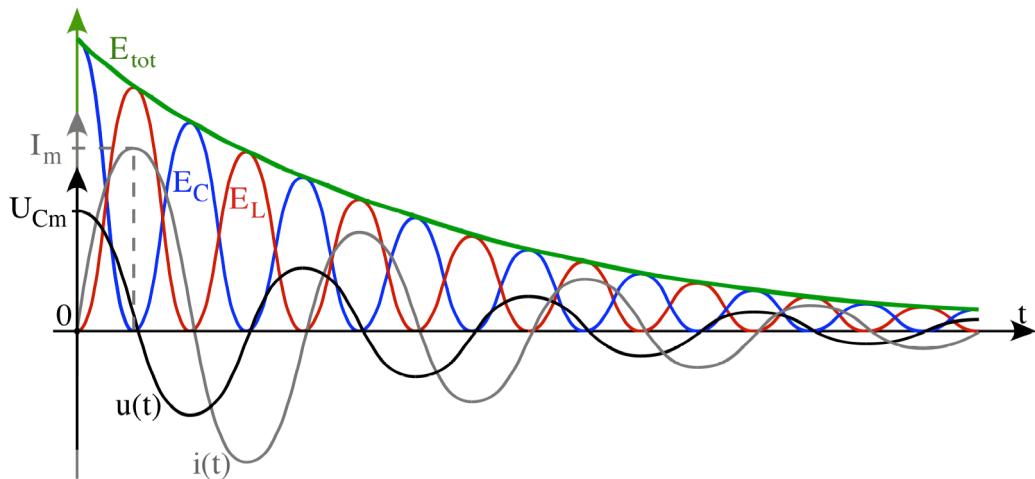
ce qui correspond à l'énergie initiale du condensateur.

Il y a un échange permanent d'énergie entre le condensateur et l'inductance : en l'absence d'élément dissipatif (pas de résistance), l'énergie totale se conserve indéfiniment.

(Attention : sur le graphe qui suit, on a représenté 3 types de grandeurs distinctes : un courant, une tension et des énergies. L'axe des ordonnées comporte 3 échelles différentes).



Dans un circuit réel (contenant des résistances : résistance interne de l'inductance, résistances des fils...) l'énergie de départ va être progressivement dissipée par effet Joule, et on peut montrer que toutes les grandeurs vont décroître exponentiellement :



Pour conclure, on peut remarquer qu'en électricité, il est généralement plus facile de résoudre les problèmes en raisonnant sur les énergies plutôt que sur les tensions et les courants.

## TABLE

1	Introduction.....	2
1.1	Pourquoi étudier le courant alternatif ?.....	2
1.2	Approximation du régime quasi-stationnaire .....	2
2	Grandeurs Physiques en électricité .....	2
2.1	Rappels : tension, courant, impédance, admittance .....	2
2.2	Conventions de représentation.....	3
2.3	Grandeurs sinusoïdales .....	3
2.4	Excitation et réponse.....	4
2.5	Changement de l'origine du temps .....	5
2.6	Déphasages .....	5
3	Composants élémentaires .....	6
3.1	Résistance .....	6
3.2	Bobine d'induction .....	6
3.3	Condensateur .....	7
4	Formalisme complexe .....	9
4.1	Rappel sur les complexes : conventions de notation .....	9
4.2	Représentations polaire et exponentielle .....	9
4.3	Produits et quotients .....	10
4.4	Fonctions sinusoïdales .....	10
4.5	Impédance et admittance complexes .....	10
4.6	Expression du courant en fonction de la tension .....	11
5	Impédances complexes des composants usuels .....	12
5.1	Impédance d'une résistance .....	12
5.2	Impédance d'une bobine d'induction .....	12
5.3	Impédance d'un condensateur .....	14
5.4	Modélisations à haute et à basse fréquences.....	15
6	Représentation de Fresnel .....	15
6.1	Principe de fonctionnement .....	15
6.2	Loi des mailles et Loi des noeuds .....	16
7	Application à un circuit RLC série .....	17
7.1	Mise en équation sans les impédances complexes.....	17
7.2	Impédance complexe du circuit RLC .....	18
7.3	Pulsation propre du circuit RLC .....	19
7.4	Limites basse et haute fréquences.....	19
7.5	Evolution des diverses grandeurs .....	19
7.6	Représentations de Fresnel .....	20
7.7	Résonance .....	21
7.8	Facteur de surtension aux bornes du condensateur.....	23
8	Les filtres .....	24

8.1	Définitions - Fonction de transfert.....	24
8.2	Filtre idéal .....	25
8.3	Filtre réel.....	26
8.4	Diagramme de Bode .....	27
8.5	Echelles logarithmiques .....	28
8.6	Application aux tracés de gains de filtres .....	30
8.7	Filtres en L .....	30
9	Filtre passe-bas .....	31
9.1	Fonction de transfert .....	31
9.2	Gain.....	31
9.3	Diagramme de Bode .....	31
9.4	Déphasage .....	32
9.5	Analyse qualitative .....	33
10	Filtre passe-haut .....	33
10.1	Fonction de transfert .....	33
10.2	Gain.....	33
10.3	Diagramme de Bode .....	34
10.4	Déphasage .....	35
10.5	Analyse qualitative .....	36
11	Filtre passe bande .....	36
11.1	Fonction de transfert .....	36
11.2	Gain.....	36
11.3	Diagramme de Bode .....	38
11.4	Déphasage .....	39
11.5	Analyse qualitative .....	39
12	Energies et Puissances .....	40
12.1	Rappel des conventions de représentation .....	40
12.2	Puissance instantanée.....	40
12.3	Puissance moyenne (ou active) et puissance apparente .....	41
12.4	Puissance apparente et puissance réactive .....	41
12.5	Puissance active dans les composants R, L et C .....	42
12.6	Facteur de puissance et consommation électrique .....	43
13	Echanges d'énergie .....	43
13.1	Echanges d'énergie dans un condensateur.....	43
13.2	Echanges d'énergie dans une inductance.....	45
13.3	Echanges d'énergie dans un circuit LC .....	47