Probabilités et Lancer de Dés

Colin Bossu Réaubourg

7 novembre 2025

Résumé

Le lancer de dés est un exemple souvent utilisé pour introduire les concepts de probabilité. Ce document s'attache à un problème particulier : comment déterminer les chances d'obtenir une somme spécifique en lançant plusieurs dés. L'analyse commence par la situation la plus connue, celle de dés identiques, pour laquelle différentes méthodes de dénombrement sont détaillées. Par la suite, le cadre est élargi pour inclure des cas moins standards, tels que des lancers impliquant des dés de types variés ou des situations où le résultat d'un dé influence le suivant. L'objectif est de présenter les raisonnements mathématiques qui permettent de passer de l'énoncé d'un problème à sa solution.

Table des matières

1 Somme de Dés Identiques

1.1 Énoncé du Problème

Le premier problème que nous abordons est un classique de la théorie des probabilités.

> Soient $\boldsymbol{m}$ dés équilibrés à $\boldsymbol{n}$ faces, numérotées de 1 à n. On lance ces m dés simultanément et on note S la variable aléatoire correspondant à la somme des résultats. On cherche à déterminer la loi de probabilité de S, c'est-à-dire à calculer la probabilité $\mathbb{P}(S = s)$ pour tout entier s.

1.1.1 Cadre Mathématique et Notations

Définition 1.1 (Espace de Probabilité)**.** *L'expérience aléatoire consiste à lancer m dés. L'univers, ou espace des issues possibles, est l'ensemble des m-uplets $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}^m$. La taille (ou cardinal) de cet univers est $|\Omega| = n^m$.*
Les dés étant équilibrés et les lancers indépendants, nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. Chaque issue élémentaire $\omega \in \Omega$ a une probabilité de $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n^m}$.

Définition 1.2 (Variable Aléatoire Somme)**.** *Soit X_k la variable aléatoire représentant le résultat du k-ième dé. La variable aléatoire S est la somme de ces résultats :*

$$S = X_1 + X_2 + \cdots + X_m$$

Les valeurs possibles pour la somme s sont les entiers compris entre m (tous les dés donnent 1) et mn (tous les dés donnent n).

Pour calculer $\mathbb{P}(S = s)$, il nous suffit de trouver le nombre de cas favorables, que nous noterons $N(m, s)$, c'est-à-dire le nombre d'issues $(x_1, \ldots, x_m) \in \Omega$ telles que $x_1 + \cdots + x_m = s$. La probabilité est alors :

$$\mathbb{P}(S = s) = \frac{N(m, s)}{n^m}$$

Le cœur du problème est donc un problème de dénombrement.

1.2 Méthode 1 : Dénombrement Combinatoire

Cette approche utilise les fonctions génératrices pour modéliser le problème, puis le principe d'inclusion-exclusion pour le résoudre.

1.2.1 Fonctions génératrices

Le nombre de cas favorables $N(m, s)$ est le coefficient de t^s, noté $[t^s]$, dans le développement du polynôme suivant :

$$P(t) = (t^1 + t^2 + \cdots + t^n)^m$$

Chaque terme $(t^1 + \cdots + t^n)$ représente les issues possibles pour un dé. Le produit de m de ces termes modélise la somme des résultats des m dés.

1.2.2 Résolution par Inclusion-Exclusion

Le calcul de $N(m,s)$ est équivalent à trouver le nombre de solutions entières de l'équation :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = s$$

avec la contrainte $1 \leq x_k \leq n$ pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$.

Étape 1 : Changement de variable. Pour se ramener à un problème avec des entiers non-négatifs, posons $y_k = x_k - 1$. L'équation devient :

$$(y_1 + 1) + (y_2 + 1) + \cdots + (y_m + 1) = s \iff y_1 + y_2 + \cdots + y_m = s - m$$

avec la nouvelle contrainte $0 \leq y_k \leq n - 1$.

Étape 2 : Dénombrement sans contrainte supérieure. Ignorons temporairement la contrainte $y_k \leq n-1$. Le nombre de solutions en entiers non-négatifs de $y_1+\cdots+y_m = s-m$ est un problème classique de "combinaisons avec répétition" (stars and bars), dont la solution est :

$$\binom{(s-m)+m-1}{m-1} = \binom{s-1}{m-1}.$$

Étape 3 : Application du principe d'inclusion-exclusion. Nous devons maintenant soustraire les solutions qui violent la contrainte supérieure. Soit A_k l'ensemble des solutions où $y_k \geq n$. Nous cherchons le nombre de solutions qui ne sont dans aucun des A_k.

Le nombre de solutions où au moins j variables violent la contrainte (par exemple $y_1, \ldots, y_j \geq n$) est obtenu en posant $z_k = y_k - n$ pour $k = 1, \ldots, j$. L'équation devient :

$$(z_1 + n) + \cdots + (z_j + n) + y_{j+1} + \cdots + y_m = s - m$$

$$z_1 + \cdots + z_j + y_{j+1} + \cdots + y_m = s - m - jn$$

Le nombre de solutions pour cette nouvelle équation en entiers non-négatifs est $\binom{(s-m-jn)+m-1}{m-1} = \binom{s-jn-1}{m-1}$. Il y a $\binom{m}{j}$ façons de choisir les j variables qui violent la contrainte.

Par le principe d'inclusion-exclusion, le nombre total de solutions valides est :

$$N(m,s) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s-jn-1}{m-1}$$

La sommation s'arrête lorsque $s - jn - 1 < m - 1$, car le coefficient binomial devient nul. La borne supérieure est donc $k = \lfloor \frac{s-m}{n} \rfloor$.

Formule par Approche Combinatoire

La probabilité que la somme de m dés à n faces soit égale à s est :

$$\mathbb{P}(S = s) = \frac{1}{n^m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s-m}{n} \rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s - jn - 1}{m - 1}$$

Cette formule est valide pour $m \leq s \leq mn$. Par convention, $\binom{a}{b} = 0$ si $a < b$.

Exemple 1.1 (2 dés à 6 faces, somme de 7)**.** Calculons la probabilité d'obtenir une somme de 7 avec 2 dés à 6 faces. Ici, $m = 2$, $n = 6$ et $s = 7$. La borne de la somme est $\lfloor \frac{7-2}{6} \rfloor = \lfloor \frac{5}{6} \rfloor = 0$. Il n'y a donc qu'un seul terme ($j = 0$).

$$N(2, 7) = (-1)^0 \binom{2}{0} \binom{7 - 0 \cdot 6 - 1}{2 - 1} = 1 \cdot 1 \cdot \binom{6}{1} = 6.$$

La probabilité est donc $\mathbb{P}(S = 7) = \frac{6}{6^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Ce résultat est correct, les combinaisons étant (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1).

1.3 Méthode 2 : Démonstration par Récurrence

Cette méthode valide la formule précédente en utilisant un raisonnement par récurrence sur le nombre de dés m.

1.3.1 Relation de Récurrence pour N(m, s)

Pour obtenir une somme s avec m dés, le m-ième dé doit afficher une valeur $k \in \{1, \ldots, n\}$. La somme des $m - 1$ premiers dés doit alors être $s - k$. On a donc la relation de récurrence suivante :

$$N(m, s) = \sum_{k=1}^{n} N(m - 1, s - k)$$

avec les conditions initiales : $N(1, s) = 1$ si $1 \leq s \leq n$, et 0 sinon.

1.3.2 Preuve par Récurrence

Propriété 1.1. Pour tout $m \geq 1$ et $s \in \mathbb{Z}$, on a :

$$N(m, s) = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s - jn - 1}{m - 1}.$$

(La somme est finie car les termes deviennent nuls).

Démonstration. **Base de récurrence (m = 1)**
Pour $m = 1$, la formule donne : $N(1, s) = (-1)^0 \binom{1}{0} \binom{s-1}{0} + \cdots = \binom{s-1}{0}$. Si $1 \leq s \leq n$, alors $s - 1 \geq 0$, donc $\binom{s-1}{0} = 1$. Si $s > n$ ou $s < 1$, alors soit les termes s'annulent (ex : $N(1, n + 1) = \binom{n}{0} - \binom{1}{1}\binom{0}{0} = 1 - 1 = 0$), soit $s - 1 < 0$ et $\binom{s-1}{0} = 0$. La formule est donc vérifiée pour $m = 1$.

Hérédité
Supposons la formule vraie au rang $m-1$. On veut la montrer au rang m.

$$\begin{aligned} N(m,s) &= \sum_{k=1}^{n} N(m-1, s-k) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{m-1}{j}\binom{s-k-jn-1}{m-2} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{m-1}{j}\sum_{k=1}^{n}\binom{s-jn-k-1}{m-2} \quad \text{(interversion des sommes)} \end{aligned}$$

Concentrons-nous sur la somme intérieure $\sum_{k=1}^{n}\binom{s-jn-k-1}{m-2}$.

Lemme 1.1 (Identité de la Crosse de Hockey)**.** Pour des entiers $r \geq d \geq 0$, on a $\sum_{i=d}^{r}\binom{i}{d} = \binom{r+1}{d+1}$. Par extension, $\sum_{i=a}^{b}\binom{i}{d} = \binom{b+1}{d+1} - \binom{a}{d+1}$.

Posons $i = s-jn-k-1$ et $d = m-2$. Quand k va de 1 à n, i va de $s-jn-n-1$ à $s-jn-2$. La somme devient $\sum_{i=s-jn-n-1}^{s-jn-2}\binom{i}{m-2}$. D'après le lemme, cette somme vaut :

$$\binom{s-jn-1}{m-1} - \binom{s-(j+1)n-1}{m-1}.$$

En substituant ce résultat dans l'expression de $N(m,s)$:

$$\begin{aligned} N(m,s) &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{m-1}{j}\left[\binom{s-jn-1}{m-1} - \binom{s-(j+1)n-1}{m-1}\right] \\ &= \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{m-1}{j}\binom{s-jn-1}{m-1} - \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{m-1}{j}\binom{s-(j+1)n-1}{m-1} \end{aligned}$$

Dans la seconde somme, posons $j' = j+1$ (donc $j = j'-1$) :

$$\sum_{j'=1}^{\infty}(-1)^{j'-1}\binom{m-1}{j'-1}\binom{s-j'n-1}{m-1} = -\sum_{j'=1}^{\infty}(-1)^{j'}\binom{m-1}{j'-1}\binom{s-j'n-1}{m-1}$$

En réinjectant et en renommant j' en j :

$$N(m,s) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j \binom{m-1}{j}\binom{s-jn-1}{m-1} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j \binom{m-1}{j-1}\binom{s-jn-1}{m-1}$$

On isole le terme $j=0$ de la première somme et on regroupe le reste :

$$N(m,s) = \binom{m-1}{0}\binom{s-1}{m-1} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\left[\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1}\right]\binom{s-jn-1}{m-1}$$

Grâce à la formule de Pascal, $\binom{m-1}{j} + \binom{m-1}{j-1} = \binom{m}{j}$.

$$N(m,s) = \binom{s-1}{m-1} + \sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{s-jn-1}{m-1}$$

En notant que $\binom{s-1}{m-1} = (-1)^0\binom{m}{0}\binom{s-0n-1}{m-1}$, on peut réintégrer le premier terme dans la somme :

$$N(m,s) = \sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\binom{m}{j}\binom{s-jn-1}{m-1}$$

Ceci achève la démonstration par récurrence. ∎

1.4 Méthode 3 : Transformée de Fourier Discrète

Cette approche, plus abstraite, utilise les outils de l'analyse harmonique pour trouver $N(m,s)$. Elle est équivalente à l'utilisation des fonctions caractéristiques en probabilités.

1.4.1 Modélisation

L'idée est de construire une fonction dont la valeur nous donne $N(m,s)$. Soit L un entier suffisamment grand, par exemple $L = mn$. Soit $\omega = e^{2\pi i/L}$ une racine L-ième primitive de l'unité.

Le nombre de cas $N(m,s)$ peut être exprimé à l'aide de la somme suivante, qui agit comme un "filtre" :

$$N(m,s) = \sum_{x_1=1}^{n} \cdots \sum_{x_m=1}^{n} \left(\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \omega^{k(\sum x_j - s)} \right)$$

En effet, la somme intérieure $\sum_{k=0}^{L-1} (\omega^\ell)^k$ vaut L si $\ell \equiv 0 \pmod{L}$ (c'est-à-dire $\sum x_j = s$), et 0 sinon.

1.4.2 Calcul

En réarrangeant les sommes, on obtient :

$$\begin{aligned}
N(m,s) &= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \sum_{x_1=1}^{n} \cdots \sum_{x_m=1}^{n} \omega^{k(\sum x_j - s)} \\
&= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \omega^{-ks} \sum_{x_1=1}^{n} \cdots \sum_{x_m=1}^{n} \omega^{k \sum x_j} \\
&= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \omega^{-ks} \sum_{x_1=1}^{n} \cdots \sum_{x_m=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \omega^{k x_j} \\
&= \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \omega^{-ks} \left(\sum_{i=1}^{n} \omega^{ki} \right)^m
\end{aligned}$$

La somme $\sum_{i=1}^{n} \omega^{ki}$ est une série géométrique qui peut être calculée explicitement.

Formule par Transformée de Fourier

La probabilité que la somme des m dés à n faces soit égale à s est :

$$\mathbb{P}(S = s) = \frac{1}{L n^m} \sum_{k=0}^{L-1} e^{-2\pi i k s/L} \left(\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i k j/L} \right)^m$$

avec L un entier supérieur ou égal à mn. Cette formule, bien que moins pratique pour le calcul manuel, est très puissante d'un point de vue théorique et pour le calcul numérique.

1.5 Approximation par la Loi Normale

Lorsque le nombre total de dés $M = \sum m_i$ est grand, l'approche par les fonctions génératrices peut devenir calculatoire. Une version plus générale du Théorème Central Limite (le théorème de Lindeberg-Feller) s'applique aussi à la somme de variables aléatoires indépendantes mais non identiquement distribuées. Cela nous permet d'approcher la loi de la somme de dés hétérogènes par une loi normale.

1.5.1 Espérance et Variance de la Somme Totale

Le principe reste le même, mais nous devons sommer les espérances et les variances de tous les dés. Pour un dé de type i (à n_i faces), nous avons :

— Son espérance : $\mu_i = \frac{n_i+1}{2}$.

— Sa variance : $\sigma_i^2 = \frac{n_i^2-1}{12}$.

La somme totale S est la somme de m_1 dés de type 1, m_2 dés de type 2, etc. Par linéarité de l'espérance et additivité de la variance pour des variables indépendantes, on obtient :

— **Espérance de la somme totale :**

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{k} m_i \mu_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{n_i+1}{2}$$

— **Variance de la somme totale :**

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{k} m_i \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{n_i^2-1}{12}$$

1.5.2 Formule d'Approximation

Avec ces paramètres, la formule d'approximation est structurellement la même que pour les dés identiques, en n'oubliant pas la correction de continuité.

Formule d'Approximation pour Dés Hétérogènes

La probabilité que la somme totale S soit égale à s est approximée par :

$$\mathbb{P}(S = s) \approx \Phi\left(\frac{s + 0.5 - \mu_S}{\sigma_S}\right) - \Phi\left(\frac{s - 0.5 - \mu_S}{\sigma_S}\right)$$

où μ_S et σ_S^2 sont la somme des espérances et variances de tous les dés lancés, et $\Phi(z)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exemple 1.2 (Lancer de 5d6 + 5d10, somme de 45)**.** On lance 5 dés à 6 faces et 5 dés à 10 faces. Quelle est la probabilité que la somme soit 45 ?

1. Paramètres :

— Type 1 (d6) : $m_1 = 5$, $n_1 = 6$. $\mu_1 = 3.5$, $\sigma_1^2 = 35/12$.

— Type 2 (d10) : $m_2 = 5$, $n_2 = 10$. $\mu_2 = 5.5$, $\sigma_2^2 = 99/12$.

— Somme cible : $s = 45$.

2. Espérance et variance de la somme :

$$\mu_S = (5 \times 3.5) + (5 \times 5.5) = 17.5 + 27.5 = 45.$$
$$\sigma_S^2 = \left(5 \times \frac{35}{12}\right) + \left(5 \times \frac{99}{12}\right) = \frac{175 + 495}{12} = \frac{670}{12} \approx 55.83.$$

L'écart-type est $\sigma_S = \sqrt{55.83} \approx 7.47$.

3. Calcul de l'approximation : La somme cible est à nouveau la moyenne, ce qui simplifie le calcul.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S = 45) &\approx \Phi\left(\frac{45.5 - 45}{7.47}\right) - \Phi\left(\frac{44.5 - 45}{7.47}\right)\\ &\approx \Phi\left(\frac{0.5}{7.47}\right) - \Phi\left(\frac{-0.5}{7.47}\right) \approx \Phi(0.0669) - \Phi(-0.0669)\\ &\approx 0.5267 - (1 - 0.5267) = 2 \times 0.5267 - 1 \approx 0.0534.\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir une somme de 45 est d'environ 5.34%.

2 Somme de Dés Hétérogènes

2.1 Énoncé du Problème

On dispose de $\boldsymbol{k}$ types de dés. Pour chaque type $i \in \{1, \ldots, k\}$, on lance m_i dés à n_i faces (numérotées de 1 à n_i). Soit S la variable aléatoire représentant la somme des résultats de tous les dés lancés. On cherche à déterminer la probabilité $\mathbb{P}(S = s)$.

2.1.1 Cadre et Notations

- Nombre total de dés : $M = \sum_{i=1}^{k} m_i$.
- Univers $\Omega = \{1, .., n_1\}^{m_1} \times \cdots \times \{1, .., n_k\}^{m_k}$.
- Cardinal de l'univers : $|\Omega| = \prod_{i=1}^{k} n_i^{m_i}$.
- L'objectif est de trouver $N(s)$, le nombre de cas favorables pour que la somme soit s.

2.2 Résolution par les Fonctions Génératrices

2.2.1 Dérivation de la fonction génératrice totale

Définition 2.1 (Fonction génératrice)**.** *Une fonction génératrice est une série formelle (ou un polynôme) dont les coefficients encodent une suite de nombres. Pour un dé, le coefficient de t^j sera 1 si le résultat j est possible, et 0 sinon.*

Étape 1 : Fonction génératrice d'un dé unique. Pour un dé de type i (à n_i faces), les résultats possibles $\{1, \ldots, n_i\}$ sont représentés par le polynôme :

$$g_i(t) = t^1 + t^2 + \cdots + t^{n_i} = \sum_{j=1}^{n_i} t^j = t\frac{1 - t^{n_i}}{1 - t}$$

Étape 2 : Fonction génératrice pour un ensemble de dés homogènes. Les lancers des m_i dés du type i étant indépendants, la fonction génératrice $G_i(t)$ pour la somme de leurs résultats est le produit de leurs fonctions génératrices individuelles.

$$G_i(t) = [g_i(t)]^{m_i} = \left(t\frac{1 - t^{n_i}}{1 - t}\right)^{m_i}$$

Étape 3 : Fonction génératrice totale. De même, la somme globale S est la somme de variables aléatoires indépendantes (les sommes de chaque type de dé). La fonction génératrice totale $G(t)$ est donc le produit des fonctions $G_i(t)$:

$$G(t) = \prod_{i=1}^{k} G_i(t) = \prod_{i=1}^{k} \left(t\frac{1 - t^{n_i}}{1 - t}\right)^{m_i}$$

Le nombre de cas favorables $N(s)$ est le coefficient de t^s dans le développement de $G(t)$, noté $N(s) = [t^s]G(t)$.

2.2.2 Extraction du coefficient de t^s

Réorganisons l'expression de $G(t)$ pour isoler les termes.

$$\begin{aligned} G(t) &= \left(\prod_{i=1}^{k} t^{m_i}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} (1-t^{n_i})^{m_i}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} (1-t)^{-m_i}\right) \\ &= t^{\sum m_i} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} (1-t^{n_i})^{m_i}\right) \cdot (1-t)^{-\sum m_i} \\ &= t^{M} \cdot \left(\prod_{i=1}^{k} (1-t^{n_i})^{m_i}\right) \cdot (1-t)^{-M} \end{aligned}$$

Posons $A(t) = \prod_{i=1}^{k}(1-t^{n_i})^{m_i}$. C'est un polynôme fini. Utilisons le développement en série du binôme généralisé : $(1-t)^{-M} = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{M+l-1}{l} t^l = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{M+l-1}{M-1} t^l$. L'expression devient : $G(t) = t^M \cdot A(t) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} \binom{M+l-1}{M-1} t^l\right)$.

Trouver $[t^s]G(t)$ revient à trouver $[t^{s-M}]$ dans le produit $A(t) \cdot (1-t)^{-M}$. Soit $A(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j$ (où $a_j = [t^j]A(t)$). Le coefficient est obtenu par la convolution des coefficients de $A(t)$ et de la série binomiale :

$$N(s) = [t^{s-M}] \left(\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j t^j\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} \binom{M+l-1}{M-1} t^l\right) \right)$$

Par la formule du produit de Cauchy, on obtient :

$$\begin{aligned} N(s) &= \sum_{j\geq 0} a_j \cdot [t^{s-M-j}] \left(\sum_{l=0}^{\infty} \binom{M+l-1}{M-1} t^l\right) \\ &= \sum_{j\geq 0} a_j \binom{M+(s-M-j)-1}{M-1} = \sum_{j\geq 0} a_j \binom{s-j-1}{M-1} \end{aligned}$$

Théorème 2.1 (Formule pour Dés Hétérogènes)**.** La probabilité que la somme des résultats de l'ensemble de dés décrit soit égale à s est donnée par :

$$\boxed{\mathbb{P}(S=s) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{k} n_i^{m_i}} \sum_{j\geq 0} \left([t^j] \prod_{i=1}^{k} (1-t^{n_i})^{m_i}\right) \binom{s-j-1}{\left(\sum_{i=1}^{k} m_i\right)-1}}$$

2.2.3 Application Numérique

Exemple 2.1 (Lancer de 2d6 et 1d4, somme de 8)**.** Calculons la probabilité d'obtenir une somme de 8 en lançant deux dés à 6 faces et un dé à 4 faces.

1. Paramètres du problème :

— $k = 2$ types de dés.

— Type 1 (d6) : $m_1 = 2$, $n_1 = 6$.

— Type 2 (d4) : $m_2 = 1$, $n_2 = 4$.

— Somme cible : $s = 8$.

2. Paramètres généraux :
- Nombre total de dés : $M = m_1 + m_2 = 2 + 1 = 3$.
- Nombre total de cas : $|\Omega| = n_1^{m_1} \cdot n_2^{m_2} = 6^2 \cdot 4^1 = 36 \cdot 4 = 144$.

3. Calcul du polynôme de correction $A(t)$:

$$A(t) = (1 - t^{n_1})^{m_1}(1 - t^{n_2})^{m_2} = (1 - t^6)^2(1 - t^4)^1$$

Développons ce polynôme :

$$A(t) = (1 - 2t^6 + t^{12})(1 - t^4) = 1 - t^4 - 2t^6 + 2t^{10} + t^{12} - t^{16}$$

Les coefficients non nuls $a_j = [t^j]A(t)$ sont : $a_0 = 1$, $a_4 = -1$, $a_6 = -2$, $a_{10} = 2$, $a_{12} = 1$, $a_{16} = -1$.

4. Calcul du nombre de cas favorables $N(8)$: Nous appliquons la formule avec $s = 8$ et $M = 3$:

$$N(8) = \sum_{j \geq 0} a_j \binom{8 - j - 1}{3 - 1} = \sum_{j \geq 0} a_j \binom{7 - j}{2}$$

Considérons uniquement les j où $a_j \neq 0$ et $7 - j \geq 2$:

$$\begin{aligned} N(8) &= a_0 \binom{7 - 0}{2} + a_4 \binom{7 - 4}{2} + a_6 \binom{7 - 6}{2} + \dots \\ &= a_0 \binom{7}{2} + a_4 \binom{3}{2} + a_6 \binom{1}{2} \end{aligned}$$

Le terme pour $j = 6$ est nul car $\binom{1}{2} = 0$. Les termes suivants le sont aussi.

$$N(8) = (1) \cdot \frac{7 \times 6}{2} + (-1) \cdot \frac{3 \times 2}{2} = 21 - 3 = 18$$

Il existe donc 18 combinaisons de lancers dont la somme est 8.

5. Calcul de la probabilité finale :

$$\mathbb{P}(S = 8) = \frac{N(8)}{|\Omega|} = \frac{18}{144} = \frac{1}{8}$$

La probabilité d'obtenir une somme de 8 est de $\frac{1}{8}$, soit 12,5%.

2.3 Approximation par la Loi Normale

Lorsque le nombre total de dés $M = \sum m_i$ est grand, l'approche par les fonctions génératrices peut devenir calculatoire. Une version plus générale du Théorème Central Limite (le théorème de Lindeberg-Feller) s'applique aussi à la somme de variables aléatoires indépendantes mais non identiquement distribuées. Cela nous permet d'approcher la loi de la somme de dés hétérogènes par une loi normale.

2.3.1 Espérance et Variance de la Somme Totale

Le principe reste le même, mais nous devons sommer les espérances et les variances de tous les dés. Pour un dé de type i (à n_i faces), nous avons :

— Son espérance : $\mu_i = \frac{n_i+1}{2}$.

— Sa variance : $\sigma_i^2 = \frac{n_i^2-1}{12}$.

La somme totale S est la somme de m_1 dés de type 1, m_2 dés de type 2, etc. Par linéarité de l'espérance et additivité de la variance pour des variables indépendantes, on obtient :

— **Espérance de la somme totale :**

$$\mu_S = \sum_{i=1}^{k} m_i \mu_i = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{n_i+1}{2}$$

— **Variance de la somme totale :**

$$\sigma_S^2 = \sum_{i=1}^{k} m_i \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{k} m_i \frac{n_i^2-1}{12}$$

2.3.2 Formule d'Approximation

Avec ces paramètres, la formule d'approximation est structurellement la même que pour les dés identiques, en n'oubliant pas la correction de continuité.

Formule d'Approximation pour Dés Hétérogènes

La probabilité que la somme totale S soit égale à s est approximée par :

$$\mathbb{P}(S = s) \approx \Phi\left(\frac{s + 0.5 - \mu_S}{\sigma_S}\right) - \Phi\left(\frac{s - 0.5 - \mu_S}{\sigma_S}\right)$$

où μ_S et σ_S^2 sont la somme des espérances et variances de tous les dés lancés, et $\Phi(z)$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Exemple 2.2 (Lancer de 5d6 + 5d10, somme de 45)**.** On lance 5 dés à 6 faces et 5 dés à 10 faces. Quelle est la probabilité que la somme soit 45 ?

1. Paramètres :

— Type 1 (d6) : $m_1 = 5$, $n_1 = 6$. $\mu_1 = 3.5$, $\sigma_1^2 = 35/12$.

— Type 2 (d10) : $m_2 = 5$, $n_2 = 10$. $\mu_2 = 5.5$, $\sigma_2^2 = 99/12$.

— Somme cible : $s = 45$.

2. Espérance et variance de la somme :

$$\mu_S = (5 \times 3.5) + (5 \times 5.5) = 17.5 + 27.5 = 45.$$
$$\sigma_S^2 = \left(5 \times \frac{35}{12}\right) + \left(5 \times \frac{99}{12}\right) = \frac{175 + 495}{12} = \frac{670}{12} \approx 55.83.$$

L'écart-type est $\sigma_S = \sqrt{55.83} \approx 7.47$.

3. Calcul de l'approximation : La somme cible est à nouveau la moyenne, ce qui simplifie le calcul.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S=45) &\approx \Phi\left(\frac{45.5-45}{7.47}\right)-\Phi\left(\frac{44.5-45}{7.47}\right)\\ &\approx \Phi\left(\frac{0.5}{7.47}\right)-\Phi\left(\frac{-0.5}{7.47}\right)\approx \Phi(0.0669)-\Phi(-0.0669)\\ &\approx 0.5267-(1-0.5267)=2\times 0.5267-1\approx 0.0534.\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir une somme de 45 est d'environ 5.34%.

3 Somme avec Contrainte de Face Minimale

3.1 Énoncé du Problème

Nous allons maintenant complexifier le problème initial en ajoutant une contrainte sur la valeur minimale que chaque dé peut prendre.

> On lance $\boldsymbol{m}$ dés à $\boldsymbol{n}$ faces. Soit S la somme des dés. On impose que chaque dé montre un résultat au moins égal à $\boldsymbol{r}$, où $1 \leq r \leq n$. Trouver le nombre de façons d'obtenir une somme $S = s$.

3.2 Résolution par Changement de Variable

La méthode la plus élégante pour résoudre ce problème consiste à le transformer pour se ramener au cas déjà résolu dans la première section. L'idée est d'effectuer un changement de variable qui "absorbe" la contrainte inférieure.

3.2.1 Principe de la Méthode

Le problème est de trouver le nombre de solutions, que nous noterons $N_r(m, s)$, de l'équation :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = s$$

avec la double contrainte $r \leq x_k \leq n$ pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$.

La contrainte inférieure $x_k \geq r$ est ce qui distingue ce problème du premier. Nous allons introduire de nouvelles variables y_k qui, elles, commenceront à 1.

3.2.2 Démonstration Étape par Étape

Étape 1 : Définition du changement de variable. Posons pour chaque dé k une nouvelle variable aléatoire y_k telle que :

$$y_k = x_k - (r - 1)$$

Ce choix est judicieux car il transforme directement la contrainte inférieure.

Étape 2 : Transformation des contraintes. Analysons les nouvelles bornes pour les variables y_k :

— **Borne inférieure :** $x_k \geq r \iff y_k + (r - 1) \geq r \iff y_k \geq 1$.

— **Borne supérieure :** $x_k \leq n \iff y_k + (r - 1) \leq n \iff y_k \leq n - r + 1$.

Les nouvelles variables y_k sont donc des entiers compris entre 1 et $n' = n - r + 1$.

Étape 3 : Transformation de l'équation de la somme. Réécrivons l'équation de la somme en fonction des y_k. Puisque $x_k = y_k + r - 1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{m} x_k = \sum_{k=1}^{m} (y_k + r - 1) = s$$

$$\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right) + \sum_{k=1}^{m}(r-1) = s$$
$$\left(\sum_{k=1}^{m} y_k\right) + m(r-1) = s$$

Ce qui nous donne la nouvelle équation pour la somme des y_k :

$$y_1 + y_2 + \cdots + y_m = s - m(r-1)$$

Étape 4 : Identification à un problème connu. Le problème a été transformé. Nous cherchons maintenant le nombre de solutions entières de l'équation :

$$y_1 + \cdots + y_m = s'$$

avec les contraintes $1 \leq y_k \leq n'$, où :
- $s' = s - m(r-1)$ est la nouvelle somme cible.
- $n' = n - r + 1$ est le nouveau nombre de faces.

Ceci est **exactement le même problème que celui traité dans la Section 1**, mais avec m dés à n' faces et une somme cible de s'.

Étape 5 : Application de la formule générale. Nous pouvons directement utiliser la formule de dénombrement $N(m, s)$ trouvée dans la section 1, en remplaçant s par s' et n par n'.

$$N(m, s) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s-m}{n} \rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s - jn - 1}{m - 1}$$

En substituant $s' = s - m(r-1)$ et $n' = n - r + 1$, on obtient $N_r(m, s)$:

$$N_r(m, s) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s' - jn' - 1}{m - 1}$$

où la borne supérieure de la somme est $k = \lfloor \frac{s'-m}{n'} \rfloor = \lfloor \frac{s-m(r-1)-m}{n-r+1} \rfloor = \lfloor \frac{s-mr}{n-r+1} \rfloor$.

Formule pour la Somme avec Contrainte Minimale

Le nombre de façons d'obtenir une somme s en lançant m dés à n faces, avec chaque dé montrant au moins r, est :

$$N_r(m, s) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s-mr}{n-r+1} \rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s - m(r-1) - j(n-r+1) - 1}{m - 1}$$

Cette formule est valide pour $mr \leq s \leq mn$.

3.3 Application Numérique

Exemple 3.1 (Lancer de 3d6, somme de 12, avec chaque dé ≥ 3)**.** Calculons le nombre de façons d'obtenir une somme de 12 en lançant trois dés à 6 faces, sachant que chaque dé doit afficher une valeur de 3 ou plus.

1. Paramètres du problème :
- Nombre de dés : $m = 3$.
- Nombre de faces : $n = 6$.
- Contrainte minimale : $r = 3$.
- Somme cible : $s = 12$.

2. Transformation en problème équivalent : Nous effectuons le changement de variable $y_k = x_k - (3 - 1) = x_k - 2$.
- Nouveau nombre de faces : $n' = n - r + 1 = 6 - 3 + 1 = 4$. Les y_k peuvent prendre les valeurs $\{1, 2, 3, 4\}$.
- Nouvelle somme cible : $s' = s - m(r - 1) = 12 - 3(3 - 1) = 12 - 6 = 6$.

Le problème est donc équivalent à trouver le nombre de façons d'obtenir une somme de 6 en lançant 3 dés à 4 faces.

3. Application de la formule : Nous utilisons la formule de la Section 1 avec les nouveaux paramètres ($m = 3, n' = 4, s' = 6$). La borne de la somme est $\lfloor \frac{s'-m}{n'} \rfloor = \lfloor \frac{6-3}{4} \rfloor = \lfloor \frac{3}{4} \rfloor = 0$. Il n'y aura donc que le terme pour $j = 0$.

$$\begin{aligned} N_3(3, 12) &= (-1)^0 \binom{3}{0} \binom{s' - 0 \cdot n' - 1}{m - 1} \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \binom{6-1}{3-1} \\ &= \binom{5}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10. \end{aligned}$$

Il y a donc **10 façons** d'obtenir une somme de 12 avec 3 dés à 6 faces, si chaque dé est supérieur ou égal à 3.

4. Vérification par dénombrement direct : Les résultats possibles pour chaque dé sont $\{3, 4, 5, 6\}$. Cherchons les combinaisons de 3 de ces nombres qui somment à 12 :
- (3, 3, 6) : Il y a $\frac{3!}{2!1!} = 3$ permutations : (3,3,6), (3,6,3), (6,3,3).
- (3, 4, 5) : Il y a $3! = 6$ permutations : (3,4,5), (3,5,4), (4,3,5), (4,5,3), (5,3,4), (5,4,3).
- (4, 4, 4) : Il y a $\frac{3!}{3!} = 1$ permutation.

Le nombre total de cas favorables est $3 + 6 + 1 = 10$. Le résultat est confirmé.

5. Calcul de la probabilité (si nécessaire) : L'univers total des lancers sans contrainte est $|\Omega| = 6^3 = 216$. La probabilité de cet événement serait $\mathbb{P}(S = 12 \text{ et } \forall k, X_k \geq 3) = \frac{10}{216} = \frac{5}{108}$.

4 Probabilité de Divisibilité

Nous abordons ici la probabilité qu'une séquence de lancers de dés forme une chaîne de divisibilité. Nous traiterons d'abord le cas simple de deux dés avant de généraliser à m dés.

4.1 Cas de Deux Dés (m=2)

4.1.1 Énoncé du Problème

On lance deux dés équilibrés à $\boldsymbol{n}$ faces. Soient X_1 et X_2 les résultats obtenus. Quelle est la probabilité que le résultat du premier dé divise le résultat du second, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_1 \mid X_2)$?

4.1.2 Cadre Mathématique et Résolution

Définition 4.1 (Espace de Probabilité)**.** *L'expérience consiste à lancer deux dés à n faces. L'univers des issues possibles est l'ensemble des couples d'entiers $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}^2$. Le cardinal de l'univers est $|\Omega| = n \times n = n^2$. Chaque couple (x_1, x_2) est équiprobable, avec une probabilité de $\frac{1}{n^2}$.*

Définition 4.2 (Événement de Divisibilité)**.** *L'événement qui nous intéresse, que nous noterons A, est l'ensemble des couples $(x_1, x_2) \in \Omega$ tels que x_1 divise x_2. On le note $x_1 \mid x_2$.*

$$A = \{(x_1, x_2) \in \Omega \mid \exists k \in \mathbb{Z}, x_2 = k \cdot x_1\}$$

Pour calculer la probabilité $\mathbb{P}(A)$, nous devons dénombrer les cas favorables, c'est-à-dire le cardinal de A, noté $|A|$. La probabilité sera alors $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{n^2}$.

Démonstration : Dénombrement des cas favorables. La méthode la plus directe consiste à fixer la valeur du premier dé, X_1, et à compter combien de valeurs possibles pour X_2 satisfont la condition de divisibilité.

1. **Fixer le premier résultat :** Soit i le résultat du premier dé, $X_1 = i$, où $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. **Compter les multiples :** Pour une valeur i fixée, nous cherchons le nombre de résultats j pour le deuxième dé ($X_2 = j$) tels que $i \mid j$ et $1 \leq j \leq n$. Les multiples de i sont de la forme $k \cdot i$ pour $k \in \mathbb{N}^*$. Nous devons trouver combien de ces multiples sont inférieurs ou égaux à n.

$$k \cdot i \leq n \iff k \leq \frac{n}{i}$$

   Puisque k doit être un entier, le nombre de valeurs possibles pour k (et donc pour j) est $\left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$.
3. **Sommer sur toutes les valeurs du premier dé :** Le nombre total de cas favorables, $|A|$, est la somme, pour chaque valeur possible i du premier dé, du nombre de multiples correspondants.

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Cette somme est également connue sous le nom de fonction sommatoire de la fonction nombre de diviseurs, $\sum_{i=1}^{n} \tau(i)$.

Formule de Divisibilité pour Deux Dés

La probabilité que le résultat d'un dé à n faces divise le résultat d'un second dé à n faces est :

$$\mathbb{P}(X_1 \mid X_2) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor$$

Exemple 4.1 (2 dés à 6 faces)**.** Calculons la probabilité que le premier dé divise le second pour $n = 6$.

— Nombre de cas total : $|\Omega| = 6^2 = 36$.

— Nombre de cas favorables :

$$\begin{aligned} |A| &= \sum_{i=1}^{6} \left\lfloor \frac{6}{i} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{6}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{6}{6} \right\rfloor \\ &= 6 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 \\ &= 14 \end{aligned}$$

Les 14 paires sont : (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,3), (3,6), (4,4), (5,5), (6,6).

— Probabilité finale : $\mathbb{P}(A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18} \approx 0.389$.

4.2 Généralisation à m Dés

4.2.1 Énoncé du Problème

On lance m dés à n faces, obtenant les résultats $X_1, X_2, \ldots, X_m$. Quelle est la probabilité que ces résultats forment une chaîne de divisibilité, c'est-à-dire $\mathbb{P}(X_1 \mid X_2 \mid \cdots \mid X_m)$?

Cela signifie que X_1 divise X_2, X_2 divise X_3, et ainsi de suite jusqu'à X_{m-1} qui divise X_m.

4.2.2 Résolution Détaillée

L'univers est $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}^m$, avec $|\Omega| = n^m$. L'événement d'intérêt, noté B, est l'ensemble des m-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ tels que $x_1 \mid x_2 \mid \cdots \mid x_m$. Pour dénombrer les cas favorables $|B|$, nous construisons la chaîne pas à pas. Le nombre de choix à chaque étape dépend du choix précédent.

Le nombre total de chaînes de divisibilité de longueur m est donné par la somme imbriquée suivante :

$$|B| = \sum_{x_1=1}^{n} \sum_{\substack{x_2 \in \{1,\ldots,n\} \\ x_1 \mid x_2}} \sum_{\substack{x_3 \in \{1,\ldots,n\} \\ x_2 \mid x_3}} \cdots \sum_{\substack{x_m \in \{1,\ldots,n\} \\ x_{m-1} \mid x_m}} 1$$

Cette formule, bien que correcte, n'est pas une forme close simple. Elle représente un algorithme de calcul. On peut la définir de manière récursive.

Définition 4.3 (Fonction de dénombrement récursive)**.** *Soit $N(k,v)$ le nombre de chaînes de divisibilité de longueur k commençant par la valeur v, où toutes les valeurs sont dans $\{1,\ldots,n\}$.*

- ***Cas de base :*** *Une chaîne de longueur 1 est juste le nombre lui-même. Donc, pour tout $v \in \{1,\ldots,n\}$, $N(1,v)=1$.*
- ***Étape de récurrence :*** *Une chaîne de longueur k commençant par v est formée de v suivi d'une chaîne de longueur $k-1$ commençant par un multiple de v.*

$$N(k,v) = \sum_{\substack{j\in\{1,\ldots,n\} \\ v|j}} N(k-1,j)$$

Le nombre total de cas favorables pour m dés est la somme sur tous les points de départ possibles :

$$|B| = \sum_{i=1}^{n} N(m,i)$$

Formule de Divisibilité pour m Dés

La probabilité qu'une séquence de m lancers de dés à n faces forme une chaîne de divisibilité est :

$$\mathbb{P}(X_1 \mid \cdots \mid X_m) = \frac{|B|}{n^m} = \frac{1}{n^m}\sum_{i=1}^{n} N(m,i)$$

où $N(m,i)$ est calculé par la relation de récurrence ci-dessus.

Exemple 4.2 (3 dés à 4 faces)**.** Calculons la probabilité d'obtenir une chaîne de divisibilité pour $m=3$ et $n=4$.

- Nombre de cas total : $|\Omega| = 4^3 = 64$.
- Nombre de cas favorables $|B|$: nous listons les chaînes (x_1,x_2,x_3) telles que $x_1|x_2$ et $x_2|x_3$.
  - Chaînes commençant par 1 ($x_1=1$) :
    - Si $x_2=1$: x_3 doit être un multiple de 1. Chaînes : (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,1,4). (4 chaînes)
    - Si $x_2=2$: x_3 doit être un multiple de 2. Chaînes : (1,2,2), (1,2,4). (2 chaînes)
    - Si $x_2=3$: x_3 doit être un multiple de 3. Chaîne : (1,3,3). (1 chaîne)
    - Si $x_2=4$: x_3 doit être un multiple de 4. Chaîne : (1,4,4). (1 chaîne)

    Total pour $x_1=1$: $4+2+1+1=8$ chaînes.
  - Chaînes commençant par 2 ($x_1=2$) :
    - Si $x_2=2$: x_3 doit être un multiple de 2. Chaînes : (2,2,2), (2,2,4). (2 chaînes)
    - Si $x_2=4$: x_3 doit être un multiple de 4. Chaîne : (2,4,4). (1 chaîne)

    Total pour $x_1=2$: $2+1=3$ chaînes.
  - Chaînes commençant par 3 ($x_1=3$) :
    - Si $x_2=3$: x_3 doit être un multiple de 3. Chaîne : (3,3,3). (1 chaîne)

    Total pour $x_1=3$: 1 chaîne.
  - Chaînes commençant par 4 ($x_1=4$) :
    - Si $x_2=4$: x_3 doit être un multiple de 4. Chaîne : (4,4,4). (1 chaîne)

Total pour $x_1 = 4$: 1 chaîne.

Le nombre total de cas favorables est $|B| = 8 + 3 + 1 + 1 = 13$.

— Probabilité finale : $\mathbb{P}(B) = \frac{13}{64} \approx 0.203$.

5 Loi du Maximum et du Minimum

5.1 Énoncé du Problème

On lance m dés à n faces. Soient $X_1, \dots, X_m$ les résultats. On définit les variables aléatoires $M = \max(X_1, \dots, X_m)$ et $L = \min(X_1, \dots, X_m)$. Déterminer la loi de probabilité de M, sa fonction de répartition $\mathbb{P}(M \leq k)$ et son espérance $\mathbb{E}[M]$. Faire de même pour L.

5.1.1 Cadre et Notations

Le cadre mathématique est identique à celui du premier problème, avec l'univers $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}^m$ de cardinal $|\Omega| = n^m$. Les variables aléatoires X_i sont indépendantes et identiquement distribuées suivant une loi uniforme discrète sur $\{1, \dots, n\}$.

5.2 Loi du Maximum (M)

Pour déterminer la loi de M, l'approche la plus simple est de passer par sa fonction de répartition.

Définition 5.1 (Fonction de répartition)**.** *La fonction de répartition d'une variable aléatoire Y, notée $F_Y(k)$, donne la probabilité que Y prenne une valeur inférieure ou égale à k.*

$$F_Y(k) = \mathbb{P}(Y \leq k)$$

5.2.1 Démonstration : Fonction de Répartition de M

Étape 1 : Événements équivalents. L'événement "le maximum des résultats est inférieur ou égal à k" est équivalent à l'événement "tous les résultats sont inférieurs ou égaux à k".

$$\{M \leq k\} \iff \{X_1 \leq k \text{ et } X_2 \leq k \text{ et } \dots \text{ et } X_m \leq k\}$$

Cette équivalence est la clé de la résolution.

Étape 2 : Utilisation de l'indépendance. Les lancers de dés X_i étant des événements indépendants, la probabilité de leur intersection est le produit de leurs probabilités :

$$\mathbb{P}(M \leq k) = \mathbb{P}(X_1 \leq k \text{ et } \dots \text{ et } X_m \leq k) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i \leq k)$$

Étape 3 : Calcul de la probabilité pour un seul dé. Pour un seul dé à n faces, le nombre de résultats favorables à l'événement $\{X_i \leq k\}$ est k (les faces $1, 2, \dots, k$). La probabilité est donc :

$$\mathbb{P}(X_i \leq k) = \frac{k}{n}$$

Cette formule est valide pour $1 \leq k \leq n$.

Étape 4 : Expression finale de la fonction de répartition. En combinant les résultats, on obtient :

$$F_M(k) = \mathbb{P}(M \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^m$$

On note que si $k < 1$, $F_M(k) = 0$, et si $k \geq n$, $F_M(k) = 1$.

5.2.2 Démonstration : Loi de Probabilité de M

La loi de probabilité, $\mathbb{P}(M = k)$, peut être déduite de la fonction de répartition par la relation :

$$\mathbb{P}(M = k) = \mathbb{P}(M \leq k) - \mathbb{P}(M \leq k-1) = F_M(k) - F_M(k-1)$$

En substituant l'expression de $F_M(k)$:

$$\mathbb{P}(M = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^m - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m = \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}$$

Loi de Probabilité du Maximum

La probabilité que le maximum de m dés à n faces soit égal à k (pour $k \in \{1, \ldots, n\}$) est :

$$\mathbb{P}(M = k) = \frac{k^m - (k-1)^m}{n^m}$$

5.2.3 Démonstration : Espérance de M

L'espérance d'une variable aléatoire à valeurs entières positives peut être calculée par la formule :

$$\mathbb{E}[M] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(M \geq k)$$

Or, $\mathbb{P}(M \geq k) = 1 - \mathbb{P}(M < k) = 1 - \mathbb{P}(M \leq k-1) = 1 - F_M(k-1)$.

$$\mathbb{E}[M] = \sum_{k=1}^{n} (1 - F_M(k-1)) = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m\right)$$

En séparant la somme :

$$\mathbb{E}[M] = \sum_{k=1}^{n} 1 - \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^m = n - \frac{1}{n^m} \sum_{k=1}^{n} (k-1)^m$$

Avec un changement d'indice $j = k - 1$, la somme devient $\sum_{j=0}^{n-1} j^m$.

Espérance du Maximum

L'espérance du maximum de m dés à n faces est :

$$\mathbb{E}[M] = \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \left(\frac{k-1}{n}\right)^m\right) = n - \frac{1}{n^m} \sum_{j=0}^{n-1} j^m$$

5.3 Loi du Minimum (L)

La démarche pour la variable L est symétrique, mais il est plus simple de calculer $\mathbb{P}(L \geq k)$.

5.3.1 Démonstration : Loi de Probabilité de L

Étape 1 : Événements équivalents. L'événement "le minimum des résultats est supérieur ou égal à k" est équivalent à l'événement "tous les résultats sont supérieurs ou égaux à k".

$$\{L \geq k\} \iff \{X_1 \geq k \text{ et } \dots \text{ et } X_m \geq k\}$$

Étape 2 : Calcul de la probabilité pour un seul dé. Le nombre de résultats favorables à $\{X_i \geq k\}$ est $n-k+1$ (les faces $k, k+1, \dots, n$). La probabilité est donc $\mathbb{P}(X_i \geq k) = \frac{n-k+1}{n}$.

Étape 3 : Utilisation de l'indépendance.

$$\mathbb{P}(L \geq k) = \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(X_i \geq k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^m$$

Étape 4 : Déduction de la loi de probabilité. On utilise la relation $\mathbb{P}(L = k) = \mathbb{P}(L \geq k) - \mathbb{P}(L \geq k+1)$.

$$\mathbb{P}(L = k) = \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^m - \left(\frac{n-(k+1)+1}{n}\right)^m = \frac{(n-k+1)^m - (n-k)^m}{n^m}$$

Loi de Probabilité du Minimum

La probabilité que le minimum de m dés à n faces soit égal à k (pour $k \in \{1, \dots, n\}$) est :

$$\mathbb{P}(L = k) = \frac{(n-k+1)^m - (n-k)^m}{n^m}$$

5.3.2 Démonstration : Espérance de L

On utilise la même formule pour l'espérance :

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(L \geq k)$$

En substituant l'expression trouvée :

Espérance du Minimum

L'espérance du minimum de m dés à n faces est :

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{n-k+1}{n}\right)^m = \frac{1}{n^m} \sum_{j=1}^{n} j^m$$

(Le second membre est obtenu par le changement d'indice $j = n-k+1$).

5.4 Application Numérique

Exemple 5.1 (Lancer de 3 dés à 6 faces (3d6))**.** On a $m = 3$ et $n = 6$. Le nombre total d'issues est $6^3 = 216$.

1. Probabilité que le maximum soit 4. On cherche $\mathbb{P}(M = 4)$. En utilisant la formule :

$$\mathbb{P}(M = 4) = \frac{4^3 - (4-1)^3}{6^3} = \frac{4^3 - 3^3}{216} = \frac{64 - 27}{216} = \frac{37}{216} \approx 17.13\%$$

2. Probabilité que le minimum soit 3. On cherche $\mathbb{P}(L = 3)$. En utilisant la formule :

$$\mathbb{P}(L = 3) = \frac{(6 - 3 + 1)^3 - (6-3)^3}{6^3} = \frac{4^3 - 3^3}{216} = \frac{64 - 27}{216} = \frac{37}{216} \approx 17.13\%$$

3. Calcul de l'espérance du maximum.

$$\mathbb{E}[M] = \sum_{k=1}^{6} \left(1 - \left(\frac{k-1}{6}\right)^3\right)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M] &= \left(1 - \frac{0^3}{216}\right) + \left(1 - \frac{1^3}{216}\right) + \left(1 - \frac{2^3}{216}\right) + \left(1 - \frac{3^3}{216}\right) + \left(1 - \frac{4^3}{216}\right) + \left(1 - \frac{5^3}{216}\right) \\
&= 6 - \frac{1}{216}(0 + 1 + 8 + 27 + 64 + 125) \\
&= 6 - \frac{225}{216} = \frac{1296 - 225}{216} = \frac{1071}{216} \approx 4.958
\end{aligned}$$

Le maximum attendu en lançant 3d6 est d'environ 4.96.

4. Calcul de l'espérance du minimum.

$$\mathbb{E}[L] = \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{6 - k + 1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216} \sum_{k=1}^{6} (7 - k)^3$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[L] &= \frac{1}{216}\left((7-1)^3 + (7-2)^3 + \cdots + (7-6)^3\right) \\
&= \frac{1}{216}(6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3) \\
&= \frac{1}{216}(216 + 125 + 64 + 27 + 8 + 1) = \frac{441}{216} \approx 2.042
\end{aligned}$$

Le minimum attendu en lançant 3d6 est d'environ 2.04.

On peut noter la relation de symétrie : $\mathbb{E}[L] + \mathbb{E}[M] = n + 1 = 7$.

6 Dénombrement de Résultats Spécifiques

6.1 Énoncé du Problème

On lance m dés à n faces. Soit Y la variable aléatoire désignant le nombre de dés dont le résultat est pair. Déterminer la loi de probabilité de Y.

6.2 Résolution du Problème Principal

6.2.1 Cadre Mathématique et Modélisation

Définition 6.1 (Épreuve de Bernoulli). *Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui n'a que deux issues possibles, traditionnellement appelées "succès" et "échec".*

Dans notre cas, chaque lancer d'un dé peut être considéré comme une épreuve de Bernoulli :

— **Succès** : Le résultat du dé est un nombre pair.
— **Échec** : Le résultat du dé est un nombre impair.

Les lancers des m dés sont indépendants les uns des autres. Nous avons donc une répétition de m épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre (probabilité de succès).

Calcul de la probabilité de succès. Soit E l'événement "le résultat d'un dé est pair". Les résultats possibles sont $\{1, 2, \dots, n\}$. Les résultats pairs sont $\{2, 4, 6, \dots\}$. Le nombre de résultats pairs est $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. La probabilité d'un succès pour un seul dé, notée p, est donc :

$$p = \mathbb{P}(E) = \frac{\text{Nombre de faces paires}}{\text{Nombre total de faces}} = \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$$

La probabilité d'un échec est $1 - p = 1 - \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n} = \frac{n - \lfloor n/2 \rfloor}{n} = \frac{\lceil n/2 \rceil}{n}$. Notons que si n est pair, $n = 2k$, alors $p = k/(2k) = 1/2$. Si n est impair, $n = 2k+1$, alors $p = k/(2k+1)$.

6.2.2 Démonstration

La variable aléatoire Y compte le nombre de succès parmi les m épreuves. Nous cherchons à calculer $\mathbb{P}(Y = k)$ pour $k \in \{0, 1, \dots, m\}$.

Étape 1 : Choisir les dés "succès". Pour obtenir exactement k succès, nous devons d'abord choisir lesquels des m dés vont donner un résultat pair. Il y a $\binom{m}{k}$ manières de faire ce choix.

Étape 2 : Calculer la probabilité d'une configuration spécifique. Considérons une configuration spécifique où les k premiers dés sont pairs et les $m - k$ suivants sont impairs. Les lancers étant indépendants, la probabilité de cet événement est :

$$\underbrace{\mathbb{P}(E) \times \cdots \times \mathbb{P}(E)}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{\mathbb{P}(\bar{E}) \times \cdots \times \mathbb{P}(\bar{E})}_{m-k \text{ fois}} = p^k (1-p)^{m-k}$$

Toute autre configuration de k succès et $m-k$ échecs aura la même probabilité, car la multiplication est commutative.

Étape 3 : Sommer les probabilités. Puisqu'il y a $\binom{m}{k}$ configurations disjointes menant à exactement k succès, la probabilité totale $\mathbb{P}(Y=k)$ est la somme des probabilités de chacune de ces configurations.

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{m}{k} p^k (1-p)^{m-k}$$

Ceci est la définition de la loi binomiale de paramètres m et p. On note $Y \sim \mathcal{B}(m,p)$.

Loi du Nombre de Résultats Pairs

La variable aléatoire Y désignant le nombre de dés pairs suit une loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$, où m est le nombre de dés et $p = \frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}$ est la probabilité qu'un dé unique donne un résultat pair. La probabilité d'obtenir exactement k résultats pairs est :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \binom{m}{k} \left(\frac{\lfloor n/2 \rfloor}{n}\right)^k \left(\frac{\lceil n/2 \rceil}{n}\right)^{m-k}$$

6.3 Variantes et Généralisation

Le même raisonnement s'applique à d'autres types de résultats.

Déterminer la loi du nombre de dés dont le résultat est :
- un multiple d'un entier a donné, avec $1 < a \leq n$.
- supérieur à un seuil b donné, avec $1 \leq b < n$.

Dans les deux cas, la loi est binomiale. Il suffit de recalculer la probabilité de succès p.

Cas d'un multiple de a. Les multiples de a entre 1 et n sont $\{a, 2a, \ldots, \lfloor n/a \rfloor a\}$. Il y en a $\lfloor n/a \rfloor$. La probabilité de succès est $p_a = \frac{\lfloor n/a \rfloor}{n}$. La loi du nombre de dés multiples de a est $\mathcal{B}(m, p_a)$.

Cas d'un résultat supérieur à b. Les résultats supérieurs à b sont $\{b+1, b+2, \ldots, n\}$. Il y en a $n-b$. La probabilité de succès est $p_b = \frac{n-b}{n}$. La loi du nombre de dés supérieurs à b est $\mathcal{B}(m, p_b)$.

6.4 Application Numérique

Exemple 6.1 (Lancer de 5 dés à 8 faces (5d8))**.** On lance 5 dés à 8 faces. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 2 résultats multiples de 3 ?

1. Paramètres du problème :
- Nombre de dés : $m = 5$.
- Nombre de faces : $n = 8$.
- Condition de succès : le résultat est un multiple de $a = 3$.
- Nombre de succès visé : $k = 2$.

2. Calcul de la probabilité de succès (p) : Les multiples de 3 entre 1 et 8 sont $\{3, 6\}$. Il y en a 2. Le nombre total de résultats est 8.

$$p = \frac{\text{Nombre de multiples de 3}}{\text{Nombre total de faces}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

La probabilité d'échec est $1 - p = \frac{3}{4}$.

3. Application de la formule binomiale : On cherche $\mathbb{P}(Y = 2)$ pour $Y \sim \mathcal{B}(5, 1/4)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y = 2) &= \binom{5}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \left(\frac{3}{4}\right)^{5-2} \\
&= \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{16}\right) \left(\frac{3}{4}\right)^3 \\
&= 10 \cdot \frac{1}{16} \cdot \frac{27}{64} \\
&= \frac{270}{1024} = \frac{135}{512}
\end{aligned}$$

4. Résultat final : La probabilité d'obtenir exactement 2 multiples de 3 en lançant 5 dés à 8 faces est de $\frac{135}{512} \approx 26.37\%$.

7 Somme avec Dés Indiscernables

7.1 Énoncé du Problème

On lance m dés à n faces. Les dés sont considérés comme **indiscernables**. Combien y a-t-il de combinaisons de résultats possibles (non ordonnées) dont la somme est égale à s ?

7.1.1 Cadre Mathématique et Distinction Clé

Ce problème se distingue fondamentalement des précédents par la notion de dés **indiscernables**.

— **Dés discernables** (cas précédents) : Les dés sont uniques (par ex., un rouge, un bleu). Le résultat $(1, 6)$ est différent de $(6, 1)$. L'univers est constitué de m-uplets ordonnés et l'équiprobabilité s'applique à chaque m-uplet.

— **Dés indiscernables** : Tous les dés sont identiques. Le résultat $\{1, 6\}$ est une seule et même combinaison, peu importe quel dé physique a donné quel résultat. L'ordre des résultats n'a pas d'importance.

L'univers des issues est l'ensemble des **multiensembles** de taille m, où les éléments sont tirés de $\{1, 2, \ldots, n\}$. Le problème n'est plus un calcul de probabilité au sens classique, car les différentes combinaisons de somme (par ex. $\{1, 1\}$ et $\{1, 2\}$ pour deux dés) n'ont pas la même probabilité d'apparaître. Il s'agit d'un pur problème de **dénombrement combinatoire**.

Mathématiquement, nous cherchons le nombre de solutions entières de l'équation :

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = s$$

avec les deux contraintes suivantes :

1. $1 \leq x_i \leq n$ pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ (chaque dé a n faces).
2. $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_m$ (cette convention d'ordre élimine les permutations et garantit que chaque combinaison n'est comptée qu'une seule fois).

Ce problème est équivalent au dénombrement des **partitions de l'entier s en m parts, chaque part étant comprise entre 1 et n**.

7.2 Résolution par les Fonctions Génératrices

La méthode la plus élégante pour résoudre ce type de problème de partition est d'utiliser les fonctions génératrices. Puisque nous avons deux contraintes (la somme s et le nombre de dés m), nous utiliserons une fonction génératrice à deux variables.

Définition 7.1 (Fonction Génératrice à deux variables)**.** *Nous construisons une fonction $G(t, z)$ où :*

— *L'exposant de la variable **t** suivra la **somme** des résultats.*

— *L'exposant de la variable **z** suivra le **nombre de dés** utilisés.*

Le nombre de combinaisons recherché sera le coefficient de $z^m t^s$ dans le développement en série de $G(t, z)$, noté $[z^m t^s]G(t, z)$.

7.2.1 Construction de la Fonction Génératrice

Pour construire $G(t, z)$, nous considérons chaque face possible du dé, de 1 à n, comme une "source" de parts pour notre partition.

Étape 1 : Contribution d'une seule face. Considérons la face de valeur k (où $1 \leq k \leq n$). Nous pouvons utiliser cette face zéro fois, une fois, deux fois, etc., dans notre combinaison.

— Ne pas l'utiliser du tout : contribution de $1 = (zt^k)^0$.
— L'utiliser une fois : contribution de z^1t^k. (Un dé, somme k)
— L'utiliser deux fois : contribution de z^2t^{2k}. (Deux dés, somme $2k$)
— ...

La somme de toutes ces possibilités pour la face k est une série géométrique :

$$1 + zt^k + (zt^k)^2 + (zt^k)^3 + \cdots = \frac{1}{1 - zt^k}$$

Étape 2 : Contribution de toutes les faces. Les choix du nombre de fois où chaque face apparaît sont indépendants. Pour obtenir la fonction génératrice globale, nous multiplions les contributions de chaque face possible, de $k = 1$ à $k = n$.

$$G(t, z) = \left(\frac{1}{1 - zt^1}\right)\left(\frac{1}{1 - zt^2}\right)\cdots\left(\frac{1}{1 - zt^n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - zt^k}$$

Formule par Fonctions Génératrices

Le nombre de façons d'obtenir une somme s avec m dés indiscernables à n faces est donné par le coefficient de z^mt^s dans le développement en série de la fonction génératrice :

$$C(m, n, s) = [z^mt^s] \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - zt^k}$$

Contrairement à la formule pour les dés discernables, il n'existe pas de formule "fermée" simple pour ce coefficient. La solution est la fonction génératrice elle-même, et le calcul du coefficient se fait typiquement par expansion polynomiale ou via une relation de récurrence.

7.2.2 Calcul par Récurrence

Une approche algorithmique efficace pour calculer $C(m, n, s)$ dérive de la structure du problème. Toute combinaison $(x_1, \ldots, x_m)$ ordonnée de somme s appartient à l'un des deux cas disjoints suivants :

1. **Au moins un dé vaut 1** ($x_1 = 1$). Si on retire ce dé, il reste $m - 1$ dés dont la somme doit être $s - 1$. Les faces de ces dés peuvent toujours aller jusqu'à n. Le nombre de telles combinaisons est $C(m - 1, n, s - 1)$.
2. **Aucun dé ne vaut 1** ($x_1 > 1$). Chaque face est donc au moins 2. On peut "réduire" chaque face de 1 en posant $y_i = x_i - 1$. On cherche alors le nombre de combinaisons de m dés à $n - 1$ faces (allant de 1 à $n - 1$) dont la somme est $s - m$. Le nombre de telles combinaisons est $C(m, n - 1, s - m)$.

On obtient ainsi la relation de récurrence suivante :

$$C(m, n, s) = C(m - 1, n, s - 1) + C(m, n - 1, s - m)$$

7.3 Application Numérique

Exemple 7.1 (3 dés à 4 faces, somme de 6). Calculons le nombre de façons d'obtenir une somme de 6 en lançant 3 dés indiscernables à 4 faces.

1. Paramètres du problème : $m = 3$ dés, $n = 4$ faces (de 1 à 4), $s = 6$.

2. Méthode 1 : Énumération directe. Nous cherchons les triplets (x_1, x_2, x_3) tels que $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ et $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 4$.
- Si $x_1 = 1$: on cherche x_2, x_3 avec $1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 4$ et $x_2 + x_3 = 5$. Les solutions sont $(1, 4)$ et $(2, 3)$. Cela donne les combinaisons $\{1, 1, 4\}$ et $\{1, 2, 3\}$.
- Si $x_1 = 2$: on cherche x_2, x_3 avec $2 \leq x_2 \leq x_3 \leq 4$ et $x_2 + x_3 = 4$. La seule solution est $(2, 2)$. Cela donne la combinaison $\{2, 2, 2\}$.
- Si $x_1 = 3$: on cherche x_2, x_3 avec $3 \leq x_2 \leq x_3 \leq 4$ et $x_2 + x_3 = 3$. Impossible.

Au total, il y a **3 combinaisons** possibles : $\{1, 1, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, et $\{2, 2, 2\}$.

3. Méthode 2 : Utilisation de la récurrence. Calculons $C(3, 4, 6)$ en utilisant la relation $C(m, n, s) = C(m - 1, n, s - 1) + C(m, n - 1, s - m)$.

$$C(3, 4, 6) = C(2, 4, 5) + C(3, 3, 3)$$

Calculons chaque terme :
- $C(3, 3, 3)$: Nombre de façons de faire une somme de 3 avec 3 dés à 3 faces. La seule combinaison est $\{1, 1, 1\}$. Donc $C(3, 3, 3) = 1$.
- $C(2, 4, 5)$: Nombre de façons de faire une somme de 5 avec 2 dés à 4 faces. Les combinaisons (ordonnées) sont $\{1, 4\}$ et $\{2, 3\}$. Donc $C(2, 4, 5) = 2$.

En substituant, on obtient :

$$C(3, 4, 6) = 2 + 1 = 3$$

Le résultat est bien sûr le même. L'approche par récurrence est plus systématique pour des problèmes de plus grande taille.

8 Problème de la Somme la Plus Proche

8.1 Énoncé du Problème

Ce problème s'appuie sur la loi de probabilité de la somme, mais s'intéresse à la probabilité que cette somme se situe dans un intervalle autour d'une valeur cible.

On lance $\boldsymbol{m}$ dés à $\boldsymbol{n}$ faces et on note S leur somme. Une valeur cible T et une distance maximale d sont fixées. Calculer la probabilité que la somme S soit à une distance au plus d de la cible T, c'est-à-dire $\mathbb{P}(|S-T| \leq d)$.

8.2 Analyse et Résolution

La résolution de ce problème est une application directe du calcul de la loi de probabilité de la somme $\mathbb{P}(S = s)$ que nous avons établi dans la première section.

8.2.1 Définition de l'Événement

L'événement qui nous intéresse est $A = \{\omega \in \Omega \mid |S(\omega) - T| \leq d\}$. L'inégalité avec la valeur absolue peut être réécrite comme suit :

$$|S-T| \leq d \iff -d \leq S-T \leq d \iff T-d \leq S \leq T+d$$

L'événement A se produit donc si la somme S prend une valeur entière dans l'intervalle $[T-d, T+d]$.

8.2.2 Décomposition de l'Événement

L'événement A est l'union des événements élémentaires disjoints $\{S = s\}$ pour tous les entiers s dans l'intervalle $[T-d, T+d]$.

$$A = \bigcup_{s=T-d}^{T+d} \{S = s\}$$

Les événements $\{S = s_1\}$ et $\{S = s_2\}$ étant disjoints pour $s_1 \neq s_2$, la probabilité de leur union est la somme de leurs probabilités individuelles. C'est l'un des axiomes de la théorie des probabilités.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{s=T-d}^{T+d} \{S = s\}\right) = \sum_{s=T-d}^{T+d} \mathbb{P}(S = s)$$

8.2.3 Application de la Formule de la Somme

Le cœur du travail a déjà été fait dans la Section 1, où nous avons dérivé la formule pour $\mathbb{P}(S = s)$. Il nous suffit de la substituer dans la somme ci-dessus. Rappelons que :

$$\mathbb{P}(S = s) = \frac{N(m,s)}{n^m} = \frac{1}{n^m} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s-m}{n} \rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s-jn-1}{m-1}$$

En combinant les deux équations, nous obtenons la solution générale.

Formule pour la Somme la Plus Proche

La probabilité que la somme S de m dés à n faces se trouve à une distance au plus d d'une cible T est donnée par :

$$\mathbb{P}(|S-T| \leq d) = \sum_{s=T-d}^{T+d} \mathbb{P}(S=s) = \frac{1}{n^m} \sum_{s=T-d}^{T+d} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s-m}{n} \rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s-jn-1}{m-1} \right)$$

La somme est bien sûr restreinte aux valeurs de s possibles, c'est-à-dire $m \leq s \leq mn$.

8.3 Application Numérique

Exemple 8.1 (3 dés à 6 faces, cible 12, distance 2)**.** Calculons la probabilité que la somme de 3 dés à 6 faces soit comprise entre $12-2=10$ et $12+2=14$ (inclus).

1. Paramètres du problème :
- Nombre de dés : $m=3$.
- Nombre de faces : $n=6$.
- Cible : $T=12$.
- Distance : $d=2$.

2. Définition de l'événement : Nous cherchons $\mathbb{P}(|S-12| \leq 2) = \mathbb{P}(10 \leq S \leq 14)$. Cela se décompose en :

$$\mathbb{P}(S=10) + \mathbb{P}(S=11) + \mathbb{P}(S=12) + \mathbb{P}(S=13) + \mathbb{P}(S=14)$$

Le nombre total de cas est $|\Omega| = 6^3 = 216$. Nous devons calculer le nombre de cas favorables $N(3,s)$ pour $s \in \{10,11,12,13,14\}$.

3. Calcul des cas favorables pour chaque somme : La formule est $N(m,s) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s-m}{n} \rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s-jn-1}{m-1}$. Avec $m=3, n=6$, cela devient :

$$N(3,s) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{s-3}{6} \rfloor} (-1)^j \binom{3}{j} \binom{s-6j-1}{2}$$

- Pour $s=10$, $j_{max} = \lfloor \frac{7}{6} \rfloor = 1$: $N(3,10) = \binom{3}{0}\binom{9}{2} - \binom{3}{1}\binom{10-6-1}{2} = 1 \cdot 36 - 3 \cdot \binom{3}{2} = 36 - 9 = 27$.
- Pour $s=11$, $j_{max} = \lfloor \frac{8}{6} \rfloor = 1$: $N(3,11) = \binom{3}{0}\binom{10}{2} - \binom{3}{1}\binom{11-6-1}{2} = 1 \cdot 45 - 3 \cdot \binom{4}{2} = 45 - 18 = 27$.
- Pour $s=12$, $j_{max} = \lfloor \frac{9}{6} \rfloor = 1$: $N(3,12) = \binom{3}{0}\binom{11}{2} - \binom{3}{1}\binom{12-6-1}{2} = 1 \cdot 55 - 3 \cdot \binom{5}{2} = 55 - 30 = 25$.
- Pour $s=13$, $j_{max} = \lfloor \frac{10}{6} \rfloor = 1$: $N(3,13) = \binom{3}{0}\binom{12}{2} - \binom{3}{1}\binom{13-6-1}{2} = 1 \cdot 66 - 3 \cdot \binom{6}{2} = 66 - 45 = 21$.
- Pour $s=14$, $j_{max} = \lfloor \frac{11}{6} \rfloor = 1$: $N(3,14) = \binom{3}{0}\binom{13}{2} - \binom{3}{1}\binom{14-6-1}{2} = 1 \cdot 78 - 3 \cdot \binom{7}{2} = 78 - 63 = 15$.

4. Sommation des cas favorables : Le nombre total de cas favorables est la somme des nombres que nous venons de calculer :

$$N(10 \leq S \leq 14) = 27 + 27 + 25 + 21 + 15 = 115$$

5. Calcul de la probabilité finale : La probabilité est le rapport du nombre de cas favorables sur le nombre total de cas possibles.

$$\mathbb{P}(|S - 12| \leq 2) = \frac{115}{216} \approx 0.5324$$

Il y a donc environ 53,24% de chances que la somme de 3 dés à 6 faces se situe entre 10 et 14 (inclus).

9 Différences Successives des Résultats Ordonnés

9.1 Énoncé du Problème

On lance m dés à n faces. On ordonne les résultats : $X_{(1)} \leq X_{(2)} \leq \cdots \leq X_{(m)}$. On définit les variables aléatoires $D_k = X_{(k+1)} - X_{(k)}$ pour $k = 1, \ldots, m-1$. Déterminer la loi de probabilité conjointe du vecteur $(D_1, \ldots, D_{m-1})$.

9.1.1 Cadre Mathématique et Notations

L'expérience consiste à lancer m dés à n faces. L'univers $\Omega = \{1, \ldots, n\}^m$ a pour cardinal $|\Omega| = n^m$.

Définition 9.1 (Statistiques d'Ordre)**.** *Les* ***statistiques d'ordre*** *sont les résultats du lancer, triés par ordre non-décroissant. Pour une issue $\omega = (x_1, \ldots, x_m)$, on note $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \cdots \leq x_{(m)}$ les valeurs ordonnées. La variable aléatoire correspondante est notée $X_{(k)}$.*

Définition 9.2 (Différences Successives)**.** *Les variables aléatoires D_k sont définies comme les différences entre deux résultats ordonnés consécutifs :*

$$D_k = X_{(k+1)} - X_{(k)} \quad \textit{pour } k \in \{1, \ldots, m-1\}$$

Ces différences sont des entiers non-négatifs ($D_k \geq 0$).

Notre objectif est de calculer la probabilité conjointe $\mathbb{P}(D_1 = d_1, D_2 = d_2, \ldots, D_{m-1} = d_{m-1})$ pour un vecteur de différences donné $(d_1, \ldots, d_{m-1})$. Cette probabilité s'obtient par dénombrement :

$$\mathbb{P}(D_1 = d_1, \ldots, D_{m-1} = d_{m-1}) = \frac{N(d_1, \ldots, d_{m-1})}{n^m}$$

où $N(d_1, \ldots, d_{m-1})$ est le nombre d'issues dans Ω qui, une fois ordonnées, produisent ce vecteur de différences.

9.2 Démonstration par Dénombrement Combinatoire

La méthode consiste à décomposer le comptage en deux étapes :

1. Dénombrer le nombre de *séquences ordonnées* $(x_{(1)}, \ldots, x_{(m)})$ qui correspondent au vecteur de différences $(d_1, \ldots, d_{m-1})$.
2. Pour une telle séquence ordonnée, dénombrer le nombre d'issues *non ordonnées* $(x_1, \ldots, x_m)$ qui sont des permutations de cette séquence.

Étape 1 : Dénombrement des séquences ordonnées. Un vecteur de différences $(d_1, \ldots, d_{m-1})$ et la valeur initiale $x_{(1)}$ déterminent entièrement la séquence ordonnée. En effet :

$$\begin{aligned}
x_{(2)} &= x_{(1)} + d_1 \\
x_{(3)} &= x_{(2)} + d_2 = x_{(1)} + d_1 + d_2 \\
&\vdots \\
x_{(k)} &= x_{(1)} + \sum_{j=1}^{k-1} d_j
\end{aligned}$$

Pour qu'une telle séquence soit valide, elle doit respecter les contraintes $1 \leq x_{(1)}$ et $x_{(m)} \leq n$. La première contrainte est simple. La seconde devient :

$$x_{(1)} + \sum_{j=1}^{m-1} d_j \leq n$$

En posant $S_d = \sum_{j=1}^{m-1} d_j$, on obtient une condition sur $x_{(1)}$:

$$1 \leq x_{(1)} \leq n - S_d$$

Le nombre de valeurs entières possibles pour $x_{(1)}$ est donc $(n - S_d) - 1 + 1 = n - S_d$. Ce nombre doit être positif, donc la condition de possibilité est $n - S_d \geq 1$. Le nombre de séquences ordonnées valides est :

$$N_{ord} = \max(0, n - S_d)$$

Étape 2 : Dénombrement des permutations. Soit une séquence ordonnée valide $(x_{(1)}, \ldots, x_{(m)})$. Nous devons compter combien d'issues originales $(x_1, \ldots, x_m)$ sont des permutations de cette séquence. Ce nombre dépend des répétitions dans la séquence. Une répétition $x_{(k)} = x_{(k+1)}$ se produit si et seulement si la différence $d_k = 0$.

Définition 9.3 (Coefficient Multinomial)**.** *Soit une séquence de m éléments contenant p valeurs distinctes $v_1, \ldots, v_p$ avec des fréquences respectives $c_1, \ldots, c_p$ (où $\sum_{i=1}^{p} c_i = m$). Le nombre de permutations distinctes de cette séquence est donné par le coefficient multinomial :*

$$\binom{m}{c_1, c_2, \ldots, c_p} = \frac{m!}{c_1! c_2! \ldots c_p!}$$

Le profil des répétitions (c'est-à-dire les valeurs des c_i) est entièrement déterminé par le vecteur des différences $(d_1, \ldots, d_{m-1})$, et ne dépend pas du choix de $x_{(1)}$. Par exemple, la séquence $(1, 1, 2, 4, 4, 4)$ et la séquence $(2, 2, 3, 5, 5, 5)$ sont toutes deux générées par des différences $(0, 1, 2, 0, 0)$ et ont le même nombre de permutations. Notons ce coefficient de permutation $C(d_1, \ldots, d_{m-1})$. Pour le calculer, il faut identifier les groupes de valeurs identiques. Un groupe de taille c est formé par $c - 1$ zéros consécutifs dans le vecteur des différences.

Étape 3 : Résultat final. Le nombre total de cas favorables $N(d_1, \ldots, d_{m-1})$ est le produit du nombre de séquences ordonnées possibles par le nombre de permutations pour chaque séquence.

$$N(d_1, \ldots, d_{m-1}) = N_{ord} \times C(d_1, \ldots, d_{m-1})$$

$$N(d_1,\ldots,d_{m-1}) = \max\left(0, n - \sum_{j=1}^{m-1} d_j\right) \cdot \frac{m!}{c_1!c_2!\ldots c_p!}$$

où les c_i sont les tailles des groupes de valeurs identiques dans une séquence ordonnée générée par les d_j.

Loi de Probabilité des Différences Successives

La probabilité conjointe du vecteur de différences $(D_1,\ldots,D_{m-1})$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(D_1 = d_1,\ldots,D_{m-1} = d_{m-1}) = \frac{1}{n^m}\max\left(0, n - \sum_{j=1}^{m-1} d_j\right) \cdot C(d_1,\ldots,d_{m-1})$$

où $C(d_1,\ldots,d_{m-1})$ est le coefficient multinomial correspondant au nombre de permutations de toute séquence ordonnée générée par les différences d_j. La formule n'est valide que si tous les d_j sont des entiers non-négatifs.

9.3 Application Numérique

Exemple 9.1 (3 dés à 4 faces, différences (0, 1))**.** Calculons la probabilité que les différences successives soient $d_1 = 0$ et $d_2 = 1$ lors du lancer de 3 dés à 4 faces. On cherche $\mathbb{P}(D_1 = 0, D_2 = 1)$.

1. Paramètres du problème :
- Nombre de dés : $m = 3$.
- Nombre de faces : $n = 4$.
- Vecteur de différences : $(d_1, d_2) = (0, 1)$.
- Nombre total de cas : $|\Omega| = 4^3 = 64$.

2. Dénombrement des séquences ordonnées possibles : La somme des différences est $S_d = d_1 + d_2 = 0 + 1 = 1$. Le nombre de séquences ordonnées possibles est :

$$N_{ord} = n - S_d = 4 - 1 = 3.$$

Ces 3 séquences sont obtenues pour $x_{(1)} \in \{1, 2, 3\}$:
- Si $x_{(1)} = 1 \implies (x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = (1, 1 + 0, 1 + 0 + 1) = (1, 1, 2)$.
- Si $x_{(1)} = 2 \implies (x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = (2, 2 + 0, 2 + 0 + 1) = (2, 2, 3)$.
- Si $x_{(1)} = 3 \implies (x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}) = (3, 3 + 0, 3 + 0 + 1) = (3, 3, 4)$.

3. Calcul du coefficient de permutation : Le vecteur de différences $(0, 1)$ implique une structure de répétition. La présence de $d_1 = 0$ signifie $x_{(1)} = x_{(2)}$, tandis que $d_2 = 1 > 0$ signifie $x_{(2)} < x_{(3)}$. Toutes les séquences ordonnées auront la forme (v, v, w) avec $v \neq w$. Les valeurs distinctes ont donc les fréquences $c_1 = 2$ (pour la valeur v) et $c_2 = 1$ (pour la valeur w). Le coefficient de permutation est :

$$C(0, 1) = \frac{m!}{c_1!c_2!} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{6}{2} = 3.$$

Par exemple, pour la séquence $(1, 1, 2)$, les 3 permutations sont $(1, 1, 2)$, $(1, 2, 1)$ et $(2, 1, 1)$.

4. Calcul du nombre de cas favorables : Le nombre total de lancers favorables est le produit du nombre de séquences ordonnées par le nombre de permutations pour chacune :

$$N(0,1) = N_{ord} \times C(0,1) = 3 \times 3 = 9.$$

5. Calcul de la probabilité finale :

$$\mathbb{P}(D_1 = 0, D_2 = 1) = \frac{N(0,1)}{|\Omega|} = \frac{9}{64}.$$

La probabilité que les résultats ordonnés soient de la forme $(v, v, v+1)$ est de $9/64$.

10 Somme avec Exclusion de Totaux

10.1 Énoncé du Problème

Ce problème étend l'analyse de la somme en introduisant des contraintes sur les valeurs totales possibles.

On lance m dés à n faces. Soit $F \subset \{m, m+1, \ldots, mn\}$ un ensemble de sommes "interdites". Soit S la variable aléatoire de la somme des résultats. On cherche à répondre aux deux questions suivantes :

1. Quelle est la probabilité que la somme S appartienne à F ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme s, sachant que la somme obtenue n'est pas dans F (c'est-à-dire $S \notin F$) ?

10.2 Résolution

La résolution de ce problème repose sur les résultats de dénombrement établis dans la première section et sur la définition de la probabilité conditionnelle.

10.2.1 Cadre Mathématique et Notations

Rappelons les éléments clés :

— L'univers Ω est de cardinal $|\Omega| = n^m$.

— L'événement "obtenir une somme s" est noté $\{S = s\}$.

— Le nombre de cas favorables à l'événement $\{S = s\}$ est $N(m, s)$, dont la formule a été établie précédemment :

$$N(m,s) = \sum_{j=0}^{\left\lfloor \frac{s-m}{n} \right\rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{s-jn-1}{m-1}$$

— La probabilité d'obtenir une somme s est $\mathbb{P}(S = s) = \frac{N(m,s)}{n^m}$.

Nous définissons l'événement E_F comme "la somme obtenue appartient à l'ensemble interdit F".

$$E_F = \{\omega \in \Omega \mid S(\omega) \in F\} = \bigcup_{f \in F} \{S = f\}$$

10.2.2 Probabilité que la Somme soit Interdite

Étape 1 : Dénombrer les cas favorables à E_F. Les événements $\{S = f_1\}$ et $\{S = f_2\}$ pour $f_1 \neq f_2$ sont disjoints. Par conséquent, le nombre de cas favorables à l'événement E_F est la somme des nombres de cas favorables pour chaque somme interdite $f \in F$.

$$|E_F| = \sum_{f \in F} N(m, f)$$

Étape 2 : Calculer la probabilité. La probabilité de l'événement E_F est le rapport du nombre de cas favorables au nombre total de cas.

Probabilité d'une Somme Interdite

La probabilité que la somme S appartienne à un ensemble de valeurs interdites F est :

$$\mathbb{P}(S \in F) = \frac{\sum_{f \in F} N(m,f)}{n^m} = \frac{1}{n^m} \sum_{f \in F} \left(\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{f-m}{n} \rfloor} (-1)^j \binom{m}{j} \binom{f - jn - 1}{m-1} \right)$$

10.2.3 Probabilité Conditionnelle d'une Somme Autorisée

On cherche à calculer $\mathbb{P}(S = s \mid S \notin F)$ pour une somme s qui n'est pas interdite ($s \notin F$).

Définition 10.1 (Probabilité conditionnelle)**.** *La probabilité de l'événement A sachant l'événement B est donnée par :*

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

Étape 1 : Identifier les événements.

— L'événement A est $\{S = s\}$.

— L'événement B est $\{S \notin F\}$. C'est le complémentaire de E_F, noté E_F^c.

On cherche donc $\mathbb{P}(S = s \mid S \notin F)$.

Étape 2 : Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$. L'intersection est $A \cap B = \{S = s\} \cap \{S \notin F\}$.

— Si $s \in F$, l'intersection est l'ensemble vide, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. La probabilité conditionnelle est nulle, ce qui est logique.

— Si $s \notin F$, l'événement $\{S = s\}$ est entièrement inclus dans l'événement $\{S \notin F\}$. L'intersection est donc simplement $\{S = s\}$. Par conséquent, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(S = s) = \frac{N(m,s)}{n^m}$.

Étape 3 : Calculer $\mathbb{P}(B)$. L'événement B est $\{S \notin F\}$. Sa probabilité est :

$$\mathbb{P}(S \notin F) = 1 - \mathbb{P}(S \in F) = 1 - \frac{\sum_{f \in F} N(m,f)}{n^m} = \frac{n^m - \sum_{f \in F} N(m,f)}{n^m}$$

Le numérateur, $n^m - \sum_{f \in F} N(m,f)$, représente le nombre total de combinaisons dont la somme est *autorisée*.

Étape 4 : Assembler le résultat. Pour $s \notin F$:

$$\mathbb{P}(S = s \mid S \notin F) = \frac{\mathbb{P}(S = s)}{\mathbb{P}(S \notin F)} = \frac{\frac{N(m,s)}{n^m}}{\frac{n^m - \sum_{f \in F} N(m,f)}{n^m}} = \frac{N(m,s)}{n^m - \sum_{f \in F} N(m,f)}$$

Probabilité Conditionnelle d'une Somme Autorisée

La probabilité d'obtenir une somme s, sachant qu'elle n'appartient pas à un ensemble interdit F, est :
- Nulle si $s \in F$.
- Donnée par la formule suivante si $s \notin F$:

$$\mathbb{P}(S = s \mid S \notin F) = \frac{N(m,s)}{\text{Nombre total de cas autorisés}} = \frac{N(m,s)}{n^m - \sum_{f\in F} N(m,f)}$$

Cette formule a une interprétation intuitive : c'est le nombre de façons d'obtenir s, divisé par le cardinal du nouvel univers restreint aux seules issues autorisées.

10.3 Application Numérique

Exemple 10.1 (Craps : 2d6, somme de 7 sachant qu'on ne fait pas "craps")**.** Au jeu de Craps, on lance deux dés à 6 faces. Le joueur perd immédiatement si la somme est 2, 3 ou 12 (c'est un "craps"). Quelle est la probabilité d'obtenir 7, sachant qu'on n'a pas perdu au premier lancer ?

1. Paramètres du problème :
- Nombre de dés : $m = 2$.
- Nombre de faces : $n = 6$.
- Ensemble des sommes interdites : $F = \{2, 3, 12\}$.
- Somme cible (non interdite) : $s = 7$.
- Nombre total de cas : $|\Omega| = 6^2 = 36$.

2. Dénombrement des cas interdits : Nous devons calculer $N(2, f)$ pour chaque $f \in F$.
- $f = 2$: La seule combinaison est (1,1). Donc $N(2, 2) = 1$.
- $f = 3$: Les combinaisons sont (1,2) et (2,1). Donc $N(2, 3) = 2$.
- $f = 12$: La seule combinaison est (6,6). Donc $N(2, 12) = 1$.

Le nombre total de cas où la somme est interdite est $\sum_{f\in F} N(m,f) = 1 + 2 + 1 = 4$.

3. Calcul de $\mathbb{P}(S \in F)$: La probabilité de faire "craps" est :

$$\mathbb{P}(S \in \{2, 3, 12\}) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9} \approx 11.1\%$$

4. Calcul de la probabilité conditionnelle pour $s = 7$: On veut calculer $\mathbb{P}(S = 7 \mid S \notin \{2, 3, 12\})$.
- D'abord, on dénombre les cas pour la somme cible $s = 7$. Les combinaisons sont (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1). Donc $N(2, 7) = 6$.
- Ensuite, on calcule le nombre total de cas autorisés :

$$n^m - \sum_{f\in F} N(m,f) = 36 - 4 = 32.$$

— On applique la formule de la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}(S = 7 \mid S \notin F) = \frac{N(2,7)}{32} = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$$

5. Conclusion : La probabilité d'obtenir une somme de 7, sachant que le résultat n'est ni 2, ni 3, ni 12, est de $\frac{3}{16}$ (soit 18,75%). C'est plus élevé que la probabilité inconditionnelle $\mathbb{P}(S = 7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \approx 16,67\%$, car l'espace des issues possibles a été réduit.

11 Distribution de la Somme Modulo p

11.1 Énoncé du Problème

On lance m dés à n faces. Soit S la somme des résultats. On fixe un entier $p \geq 2$. On s'intéresse au reste $R = S \pmod p$. Déterminer la distribution de probabilité de la variable aléatoire R.

11.2 Résolution par les Racines de l'Unité

11.2.1 Cadre Mathématique et Notations

Définition 11.1 (Racine p-ième de l'unité)**.** *Soit $p \geq 2$ un entier. On définit la racine p-ième primitive de l'unité, notée ω, par :*

$$\omega = e^{2\pi i/p} = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{p}\right)$$

Cette valeur possède la propriété fondamentale $\omega^p = 1$.

L'outil central de cette démonstration est le lemme suivant, qui agit comme un "filtre de congruence".

Lemme 11.1 (Filtre de Congruence)**.** Pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, la somme suivante vaut :

$$\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\omega^{ka} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \equiv 0 \pmod p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Démonstration. **Cas 1 :** Si $a \equiv 0 \pmod p$, alors il existe un entier q tel que $a = qp$. Dans ce cas, $\omega^{ka} = \omega^{kqp} = (\omega^p)^{kq} = 1^{kq} = 1$. La somme devient $\sum_{k=0}^{p-1} 1 = p$. En divisant par p, on obtient 1.

Cas 2 : Si $a \not\equiv 0 \pmod p$, alors $\omega^a \neq 1$. La somme est une série géométrique de raison ω^a :

$$\sum_{k=0}^{p-1}(\omega^a)^k = \frac{(\omega^a)^p - 1}{\omega^a - 1} = \frac{(\omega^p)^a - 1}{\omega^a - 1} = \frac{1^a - 1}{\omega^a - 1} = \frac{0}{\omega^a - 1} = 0.$$

En divisant par p, le résultat reste 0. ∎

11.2.2 Démonstration Étape par Étape

Notre objectif est de calculer $\mathbb{P}(R = r)$ pour chaque $r \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Par définition, $\mathbb{P}(R = r)$ est la somme des probabilités de toutes les issues dont la somme S est congrue à r modulo p.

$$\mathbb{P}(R = r) = \mathbb{P}(S \equiv r \pmod p) = \sum_{s \text{ t.q. } s \equiv r \pmod p} \mathbb{P}(S = s)$$

Étape 1 : Application du filtre de congruence. On peut réécrire cette somme en utilisant le lemme. L'expression $S - r$ est congrue à 0 $\pmod p$ si et seulement si $S \equiv r \pmod p$.

$$\mathbb{P}(R = r) = \sum_s \mathbb{P}(S = s) \cdot \left(\frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \omega^{k(s-r)} \right)$$

où la première somme parcourt toutes les valeurs possibles de s (de m à mn).

Étape 2 : Interversion des sommes. Les sommes étant finies, nous pouvons les intervertir.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R = r) &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \sum_s \mathbb{P}(S = s)\, \omega^{k(s-r)} \\ &= \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \omega^{-kr} \left(\sum_s \mathbb{P}(S = s)\, \omega^{ks} \right)\end{aligned}$$

Étape 3 : Introduction de la fonction caractéristique. La somme entre parenthèses est l'espérance de la variable aléatoire complexe ω^{kS}. C'est la fonction caractéristique de S évaluée en $2\pi k/p$.

$$\sum_s \mathbb{P}(S = s)\, \omega^{ks} = \mathbb{E}[\omega^{kS}]$$

L'équation devient :

$$\mathbb{P}(R = r) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} \omega^{-kr} \mathbb{E}[\omega^{kS}]$$

Étape 4 : Utilisation de l'indépendance des dés. Puisque $S = X_1 + \cdots + X_m$ et que les lancers X_i sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.), l'espérance d'un produit est le produit des espérances.

$$\mathbb{E}[\omega^{kS}] = \mathbb{E}[\omega^{k(X_1 + \cdots + X_m)}] = \mathbb{E}[\omega^{kX_1} \cdots \omega^{kX_m}] = \prod_{j=1}^{m} \mathbb{E}[\omega^{kX_j}]$$

Comme tous les dés sont identiques, $\mathbb{E}[\omega^{kX_j}] = \mathbb{E}[\omega^{kX_1}]$ pour tout j.

$$\mathbb{E}[\omega^{kS}] = \left(\mathbb{E}[\omega^{kX_1}] \right)^m$$

Étape 5 : Calcul de la fonction caractéristique d'un dé. Calculons l'espérance pour un seul dé X. Chaque face $j \in \{1, \ldots, n\}$ a une probabilité de $1/n$.

$$\mathbb{E}[\omega^{kX}] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}(X = j)\, \omega^{kj} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \omega^{kj}$$

Cette somme est une série géométrique.

- Si k est un multiple de p, alors $\omega^k = 1$. La somme vaut $\sum_{j=1}^{n} 1 = n$. Donc, $\mathbb{E}[\omega^{kX}] = \frac{n}{n} = 1$.
- Si k n'est pas un multiple de p, alors $\omega^k \neq 1$. La somme vaut $\omega^k \frac{1-(\omega^k)^n}{1-\omega^k} = \omega^k \frac{1-\omega^{kn}}{1-\omega^k}$. Donc, $\mathbb{E}[\omega^{kX}] = \frac{\omega^k(1-\omega^{kn})}{n(1-\omega^k)}$.

Étape 6 : Synthèse de la formule finale. En combinant tous les résultats, nous obtenons la formule générale.

Distribution de la Somme Modulo p

La probabilité que la somme S de m dés à n faces soit congrue à r modulo p est :

$$\mathbb{P}(S \equiv r \pmod p) = \frac{1}{p} \sum_{k=0}^{p-1} e^{-2\pi ikr/p} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi ikj/p} \right)^m$$

11.2.3 Application Numérique

Exemple 11.1 (2 dés à 6 faces, somme modulo 3)**.** Calculons la distribution de la somme de deux dés à 6 faces modulo 3.

1. Paramètres du problème : $m = 2$ (dés), $n = 6$ (faces), $p = 3$. On cherche $\mathbb{P}(R = r)$ pour $r \in \{0, 1, 2\}$. La racine de l'unité est $\omega = e^{2\pi i/3}$. On a $\omega^3 = 1$ et $1 + \omega + \omega^2 = 0$.

2. Formule à appliquer :

$$\mathbb{P}(R = r) = \frac{1}{3} \sum_{k=0}^{2} \omega^{-kr} (\mathbb{E}[\omega^{kX}])^2$$

3. Calcul de $\mathbb{E}[\omega^{kX}]$ pour $k \in \{0, 1, 2\}$.

— **Pour k = 0 :** $\mathbb{E}[\omega^{0X}] = \mathbb{E}[1] = 1$.

— **Pour k = 1 :**

$$\mathbb{E}[\omega^X] = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} \omega^j = \frac{1}{6}(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 + \omega^5 + \omega^6)$$

Sachant que $\omega^3 = 1$, $\omega^4 = \omega$, $\omega^5 = \omega^2$, $\omega^6 = 1$:

$$\mathbb{E}[\omega^X] = \frac{1}{6}(\omega + \omega^2 + 1 + \omega + \omega^2 + 1) = \frac{2}{6}(1 + \omega + \omega^2) = \frac{1}{3}(0) = 0.$$

— **Pour k = 2 :**

$$\mathbb{E}[\omega^{2X}] = \frac{1}{6} \sum_{j=1}^{6} (\omega^2)^j = \frac{1}{6}(\omega^2 + \omega^4 + \omega^6 + \omega^8 + \omega^{10} + \omega^{12})$$

$$\mathbb{E}[\omega^{2X}] = \frac{1}{6}(\omega^2 + \omega + 1 + \omega^2 + \omega + 1) = \frac{2}{6}(1 + \omega + \omega^2) = 0.$$

Le fait que $n = 6$ soit un multiple de $p = 3$ simplifie grandement les calculs.

4. Calcul des probabilités finales.

— Pour $r = 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R = 0) &= \frac{1}{3} \left(\omega^0 (\mathbb{E}[\omega^{0X}])^2 + \omega^0 (\mathbb{E}[\omega^{1X}])^2 + \omega^0 (\mathbb{E}[\omega^{2X}])^2 \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 \cdot (1)^2 + 1 \cdot (0)^2 + 1 \cdot (0)^2 \right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

— Pour $r = 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R = 1) &= \frac{1}{3}\left(\omega^0(\mathbb{E}[\omega^{0X}])^2 + \omega^{-1}(\mathbb{E}[\omega^{1X}])^2 + \omega^{-2}(\mathbb{E}[\omega^{2X}])^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 \cdot (1)^2 + \omega^2 \cdot (0)^2 + \omega \cdot (0)^2\right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

— Pour $r = 2$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R = 2) &= \frac{1}{3}\left(\omega^0(\mathbb{E}[\omega^{0X}])^2 + \omega^{-2}(\mathbb{E}[\omega^{1X}])^2 + \omega^{-4}(\mathbb{E}[\omega^{2X}])^2\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(1 \cdot (1)^2 + \omega \cdot (0)^2 + \omega^2 \cdot (0)^2\right) = \frac{1}{3}\end{aligned}$$

5. Conclusion de l'exemple. La distribution de la somme modulo 3 est uniforme : $\mathbb{P}(R = 0) = \mathbb{P}(R = 1) = \mathbb{P}(R = 2) = \frac{1}{3}$. Ce résultat est intuitif : sur un dé à 6 faces, il y a deux faces pour chaque congruence modulo 3 ($\{3,6\}$ pour 0, $\{1,4\}$ pour 1, $\{2,5\}$ pour 2). La distribution pour un seul dé est donc uniforme, et la somme de variables uniformes modulo p (quand n est multiple de p) reste uniforme.

12 Approche par Tenseur des Probabilités

12.1 Énoncé du Problème

Construire le tenseur $\mathbf{P} \in (\mathbb{R}^n)^{\otimes m}$ des probabilités conjointes des m dés. Exprimer le tenseur de probabilités conditionnelles, sachant l'événement $S = s$, comme une projection du tenseur initial sur le sous-espace des m-uplets de somme s.

12.2 Cadre Tensoriel et Démonstration

Définition 12.1 (Tenseur)**.** *Un **tenseur d'ordre m** (ou de rang m) est un tableau de nombres à m dimensions (ou indices). Dans notre cas, nous manipulerons des tenseurs d'ordre m dont chaque dimension a une taille n. Un tel tenseur* $\mathbf{T}$ *a des composantes notées* $T_{i_1,i_2,\ldots,i_m}$*, où chaque indice* i_k *parcourt* $\{1,\ldots,n\}$*.*

Étape 1 : Construction du Tenseur de Probabilité Conjointe. Le résultat d'un seul dé à n faces est décrit par un vecteur de probabilité $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$. Les dés étant équilibrés, chaque face a une probabilité $\frac{1}{n}$ de sortir.

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} 1/n \\ 1/n \\ \vdots \\ 1/n \end{pmatrix}$$

Les m lancers sont indépendants. La loi de probabilité conjointe du m-uplet de résultats $(X_1,\ldots,X_m)$ est obtenue par le **produit tensoriel** des vecteurs de probabilité individuels. Le tenseur de probabilité conjointe $\mathbf{P}$ est donc :

$$\mathbf{P} = \underbrace{\mathbf{p} \otimes \mathbf{p} \otimes \cdots \otimes \mathbf{p}}_{m \text{ fois}} = \mathbf{p}^{\otimes m}$$

C'est un tenseur d'ordre m et de dimensions $(n,n,\ldots,n)$. Ses composantes sont données par :

$$P_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = p_{i_1} \cdot p_{i_2} \cdots p_{i_m} = \left(\frac{1}{n}\right)^m = \frac{1}{n^m}$$

pour tous les indices $i_k \in \{1,\ldots,n\}$. Le tenseur $\mathbf{P}$ est donc un tableau à m dimensions rempli de la valeur constante $\frac{1}{n^m}$, représentant l'équiprobabilité de chaque issue.

Étape 2 : Définition du Tenseur Indicateur de Contrainte. L'événement "$S = s$" définit un sous-ensemble de l'univers Ω. On peut représenter ce sous-ensemble par un **tenseur indicateur** (ou masque) $\mathbf{I}^{(s)}$, de même forme que $\mathbf{P}$. Ses composantes sont :

$$I^{(s)}_{i_1,i_2,\ldots,i_m} = \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 + i_2 + \cdots + i_m = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ce tenseur "sélectionne" les entrées du tenseur $\mathbf{P}$ qui correspondent à l'événement qui nous intéresse.

Étape 3 : Calcul de la Probabilité de l'Événement. La probabilité de l'événement $S = s$ est la somme des probabilités de toutes les issues élémentaires qui le réalisent. En termes de tenseurs, cela se calcule en effectuant un produit de Hadamard (terme à terme) entre $\mathbf{P}$ et $\mathbf{I}^{(s)}$, puis en sommant tous les éléments du tenseur résultant.

$$\mathbb{P}(S = s) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_m=1}^{n} P_{i_1,\ldots,i_m} \cdot I^{(s)}_{i_1,\ldots,i_m}$$

Puisque $P_{i_1,\ldots,i_m} = 1/n^m$ pour toutes les issues, on a :

$$\mathbb{P}(S = s) = \sum_{i_1,\ldots,i_m \text{ t.q. } \sum i_k = s} \frac{1}{n^m} = \frac{N(m, s)}{n^m}$$

où $N(m, s)$ est le nombre d'issues favorables, qui est simplement la somme de tous les éléments du tenseur indicateur $\mathbf{I}^{(s)}$.

Étape 4 : Construction du Tenseur de Probabilité Conditionnelle. Par définition, la probabilité conditionnelle d'une issue $(i_1, \ldots, i_m)$ sachant que $S = s$ est :

$$\mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m \mid S = s) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m \text{ et } S = s)}{\mathbb{P}(S = s)}$$

Le numérateur est non nul uniquement si l'issue $(i_1, \ldots, i_m)$ satisfait la condition $\sum i_k = s$. Dans ce cas, il est égal à $\mathbb{P}(X_1 = i_1, \ldots, X_m = i_m) = 1/n^m$.

On peut donc construire le **tenseur de probabilité conditionnelle $\mathbf{P}^{(s)}$** dont les composantes sont ces probabilités conditionnelles.

$$P^{(s)}_{i_1,\ldots,i_m} = \begin{cases} \frac{1/n^m}{\mathbb{P}(S=s)} & \text{si } \sum i_k = s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

En utilisant le tenseur indicateur $\mathbf{I}^{(s)}$, cette opération s'écrit de manière concise. La "projection" demandée est une opération en deux temps :

1. **Filtrage :** On ne conserve que les probabilités des issues d'intérêt en appliquant le masque. Cela correspond au produit de Hadamard $\mathbf{P} \odot \mathbf{I}^{(s)}$.
2. **Normalisation :** On divise par la probabilité totale de l'événement, $\mathbb{P}(S = s)$, pour que la somme des composantes du nouveau tenseur soit égale à 1.

Tenseur de Probabilité Conditionnelle

Le tenseur $\mathbf{P}^{(s)}$ représentant la loi de probabilité conjointe des résultats des dés, sachant que leur somme est s, est donné par :

$$\mathbf{P}^{(s)} = \frac{1}{\mathbb{P}(S = s)} \left(\mathbf{P} \odot \mathbf{I}^{(s)} \right)$$

où $\odot$ désigne le produit de Hadamard (terme à terme), $\mathbf{P}$ est le tenseur des probabilités conjointes initiales, et $\mathbf{I}^{(s)}$ est le tenseur indicateur de la condition $S = s$. Ses composantes sont :

$$P^{(s)}_{i_1,\ldots,i_m} = \frac{I^{(s)}_{i_1,\ldots,i_m}}{N(m, s)}$$

12.3 Application Numérique

Exemple 12.1 (2 dés à 6 faces, somme de 4)**.** Soit le lancer de $m = 2$ dés à $n = 6$ faces. Nous cherchons le tenseur de probabilité conditionnelle sachant que la somme S est égale à $s = 4$.

1. Tenseur de probabilité conjointe P. C'est une matrice 6×6 où chaque élément vaut $\frac{1}{6^2} = \frac{1}{36}$.

$$\mathbf{P} = \frac{1}{36} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Tenseur indicateur $\mathbf{I}^{(4)}$. C'est une matrice 6×6 dont l'élément (i, j) vaut 1 si $i + j = 4$, et 0 sinon. Les couples solutions sont (1,3), (2,2), (3,1).

$$\mathbf{I}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Probabilité $\mathbb{P}(S = 4)$. Le nombre de cas favorables est $N(2, 4) = 3$ (la somme des éléments de $\mathbf{I}^{(4)}$).

$$\mathbb{P}(S = 4) = \frac{N(2,4)}{n^m} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}.$$

4. Tenseur conditionnel $\mathbf{P}^{(4)}$. On applique la formule : $\mathbf{P}^{(4)} = \frac{1}{\mathbb{P}(S=4)}(\mathbf{P} \odot \mathbf{I}^{(4)})$. Le produit de Hadamard $\mathbf{P} \odot \mathbf{I}^{(4)}$ est :

$$\mathbf{P} \odot \mathbf{I}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/36 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/36 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/36 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On multiplie par le facteur de normalisation $\frac{1}{\mathbb{P}(S=4)} = 12$:

$$\mathbf{P}^{(4)} = 12 \cdot (\mathbf{P} \odot \mathbf{I}^{(4)}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ce tenseur final nous donne la distribution de probabilité conditionnelle. Il montre qu'étant donné que la somme est 4, il n'y a que trois résultats possibles pour le couple (X_1, X_2) : (1,3), (2,2) et (3,1), et chacun a une probabilité de $\frac{1}{3}$, ce qui est intuitivement correct.

13 Somme de Dés Dépendants (Chaîne de Markov)

Lorsque les lancers de dés ne sont plus indépendants, la modélisation devient plus complexe. Un cadre puissant pour décrire une dépendance simple est celui des chaînes de Markov, où le résultat d'un lancer ne dépend que du résultat du lancer précédent.

13.1 Énoncé du Problème

On lance m dés à n faces. Les lancers ne sont plus indépendants. Le résultat X_{k+1} du dé $k+1$ dépend du résultat X_k du dé k via une matrice de transition (chaîne de Markov). Trouver la loi de la somme $S = X_1 + \cdots + X_m$.

13.2 Cadre Mathématique et Notations

Nous modélisons la suite des lancers $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ comme une chaîne de Markov à temps discret et à espace d'états fini.

Définition 13.1 (Espace d'états)**.** *L'espace des états est l'ensemble des résultats possibles pour un dé, soit $\mathcal{E} = \{1, 2, \ldots, n\}$.*

Définition 13.2 (Distribution initiale)**.** *Le résultat du premier dé, X_1, suit une loi de probabilité définie par le vecteur ligne de distribution initiale $\pi_0 \in \mathbb{R}^{1\times n}$, où*

$$\pi_0(i) = \mathbb{P}(X_1 = i) \quad \textit{pour } i \in \{1, \ldots, n\}.$$

On a bien sûr $\sum_{i=1}^{n} \pi_0(i) = 1$. Dans le cas le plus simple, le premier dé est équilibré et $\pi_0(i) = 1/n$ pour tout i.

Définition 13.3 (Matrice de transition)**.** *La dépendance entre les lancers successifs est décrite par une matrice de transition (ou matrice stochastique) $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$. L'élément M_{ij} de cette matrice est la probabilité conditionnelle :*

$$M_{ij} = \mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i) \quad \textit{pour } i, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Pour chaque ligne i, la somme des probabilités de transition vers tous les états possibles doit être égale à 1, i.e., $\sum_{j=1}^{n} M_{ij} = 1$.

Contrairement au cas indépendant, la probabilité d'une séquence de lancers $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ n'est plus uniforme. Elle est donnée par :

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_m = x_m) = \pi_0(x_1) \cdot M_{x_1x_2} \cdot M_{x_2x_3} \cdots M_{x_{m-1}x_m}.$$

Notre objectif est de calculer $\mathbb{P}(S = s)$ en sommant les probabilités de toutes les séquences dont la somme des résultats vaut s. Une sommation directe étant fastidieuse, nous adaptons la méthode des fonctions génératrices.

13.3 Résolution par Fonctions Génératrices Modifiées

L'idée est de construire une fonction génératrice qui non seulement encode la somme des résultats, mais aussi l'état du dernier dé lancé. Pour cela, nous utilisons un vecteur de fonctions génératrices.

Étape 1 : Vecteur de fonctions génératrices. Définissons le vecteur ligne $g_k(t) \in (\mathbb{R}[t])^{1\times n}$ dont la j-ième composante, $g_k(t)_j$, est la fonction génératrice de la somme des k premiers dés, sachant que le k-ième dé a donné le résultat j.

$$g_k(t)_j = \sum_{s\geq 0} \mathbb{P}(S_k = s \text{ et } X_k = j)\, t^s, \quad \text{où } S_k = X_1 + \cdots + X_k.$$

Étape 2 : Relation de récurrence. Pour passer de $g_k(t)$ à $g_{k+1}(t)$, on exprime la probabilité $\mathbb{P}(S_{k+1} = s \text{ et } X_{k+1} = j)$ en fonction des états à l'étape k :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{k+1} = s, X_{k+1} = j) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_{k+1} = s, X_{k+1} = j, X_k = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = s - j, X_k = i) \cdot \mathbb{P}(X_{k+1} = j \mid X_k = i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = s - j, X_k = i) \cdot M_{ij}
\end{aligned}$$

Multiplions par t^s et sommons sur s pour obtenir $g_{k+1}(t)_j$:

$$\begin{aligned}
g_{k+1}(t)_j &= \sum_{s\geq 0} \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(S_k = s - j, X_k = i) \cdot M_{ij} \right) t^s \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_{ij} \sum_{s\geq 0} \mathbb{P}(S_k = s - j, X_k = i) t^s \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_{ij} t^j \sum_{s\geq 0} \mathbb{P}(S_k = s - j, X_k = i) t^{s-j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} M_{ij} t^j \cdot g_k(t)_i
\end{aligned}$$

Étape 3 : Formulation matricielle. L'expression précédente est un produit matriciel. Définissons la **matrice de transition génératrice** $T(t) \in (\mathbb{R}[t])^{n\times n}$ par :

$$T_{ij}(t) = M_{ij} t^j$$

La relation de récurrence s'écrit alors sous forme vectorielle :

$$g_{k+1}(t)_j = \sum_{i=1}^{n} g_k(t)_i \cdot T_{ij}(t) \implies \mathbf{g_{k+1}(t) = g_k(t) T(t)}$$

Étape 4 : Initialisation et solution. La récurrence est initialisée avec le vecteur $g_1(t)$. Par définition, $\mathbb{P}(S_1 = s, X_1 = j)$ est non nulle seulement si $s = j$, auquel cas elle vaut $\mathbb{P}(X_1 = j) = \pi_0(j)$. Donc :

$$g_1(t)_j = \pi_0(j) t^j$$

Le vecteur initial est $g_1(t) = (\pi_0(1)t^1, \pi_0(2)t^2, \ldots, \pi_0(n)t^n)$.

Par récurrence, le vecteur de fonctions génératrices pour la somme de m dés est :

$$g_m(t) = g_1(t)[T(t)]^{m-1}$$

Étape 5 : Fonction génératrice totale. La fonction génératrice totale pour la somme $S = S_m$, notée $G(t)$, est obtenue en sommant sur tous les états finaux possibles du m-ième dé :

$$G(t) = \sum_{j=1}^{n} g_m(t)_j = g_m(t) \cdot \mathbf{1},$$

où $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne de taille n dont toutes les entrées sont 1.

Formule pour la Somme de Dés Dépendants

La probabilité que la somme de m dés en chaîne de Markov soit égale à s est le coefficient de t^s dans le développement de la fonction génératrice $G(t)$:

$$\mathbb{P}(S = s) = [t^s]G(t)$$

où $G(t)$ est calculée par :

$$G(t) = \mathbf{g_1(t)}\, [\mathbf{T(t)}]^{m-1}\, \mathbf{1}$$

avec :

— $\mathbf{g_1(t)} = (\pi_0(1)t^1, \pi_0(2)t^2, \ldots, \pi_0(n)t^n)$ (vecteur ligne).

— $\mathbf{T(t)}$ est la matrice $n \times n$ dont les éléments sont $T_{ij}(t) = M_{ij}t^j$.

— $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne de taille n rempli de 1.

13.4 Application Numérique

Exemple 13.1 (3 dés à 2 faces (pièces 1/2) avec dépendance)**.** Calculons la distribution de la somme pour $m = 3$ dés à $n = 2$ faces (numérotées 1 et 2).

1. Paramètres du problème :

— $m = 3$, $n = 2$. Espace d'états $\mathcal{E} = \{1, 2\}$.

— Distribution initiale : le premier dé est équilibré. $\pi_0 = (1/2, 1/2)$.

— Matrice de transition : si un dé donne 1, le suivant a 80% de chance de donner 2. Si un dé donne 2, le suivant a 90% de chance de donner 1.

$$M = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.9 & 0.1 \end{pmatrix}$$

2. Construction des matrices génératrices :

$$g_1(t) = (\pi_0(1)t^1, \pi_0(2)t^2) = (0.5t, \quad 0.5t^2)$$

$$T(t) = \begin{pmatrix} M_{11}t^1 & M_{12}t^2 \\ M_{21}t^1 & M_{22}t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.2t & 0.8t^2 \\ 0.9t & 0.1t^2 \end{pmatrix}$$

3. Calcul de $[T(t)]^{m-1} = [T(t)]^2$:

$$\begin{aligned}
[T(t)]^2 &= \begin{pmatrix} 0.2t & 0.8t^2 \\ 0.9t & 0.1t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.2t & 0.8t^2 \\ 0.9t & 0.1t^2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (0.2t)(0.2t) + (0.8t^2)(0.9t) & (0.2t)(0.8t^2) + (0.8t^2)(0.1t^2) \\ (0.9t)(0.2t) + (0.1t^2)(0.9t) & (0.9t)(0.8t^2) + (0.1t^2)(0.1t^2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.04t^2 + 0.72t^3 & 0.16t^3 + 0.08t^4 \\ 0.18t^2 + 0.09t^3 & 0.72t^3 + 0.01t^4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Calcul de $g_3(t) = g_1(t)[T(t)]^2$: Le vecteur $g_3(t) = (g_3(t)_1, g_3(t)_2)$ est :

$$\begin{aligned}
g_3(t)_1 &= 0.5t \cdot (0.04t^2 + 0.72t^3) + 0.5t^2 \cdot (0.18t^2 + 0.09t^3) \\
&= (0.02t^3 + 0.36t^4) + (0.09t^4 + 0.045t^5) \\
&= 0.02t^3 + 0.45t^4 + 0.045t^5 \\
g_3(t)_2 &= 0.5t \cdot (0.16t^3 + 0.08t^4) + 0.5t^2 \cdot (0.72t^3 + 0.01t^4) \\
&= (0.08t^4 + 0.04t^5) + (0.36t^5 + 0.005t^6) \\
&= 0.08t^4 + 0.40t^5 + 0.005t^6
\end{aligned}$$

5. Calcul de la fonction génératrice totale $G(t)$: $G(t) = g_3(t)_1 + g_3(t)_2$

$$\begin{aligned}
G(t) &= (0.02t^3 + 0.45t^4 + 0.045t^5) + (0.08t^4 + 0.40t^5 + 0.005t^6) \\
&= 0.02t^3 + 0.53t^4 + 0.445t^5 + 0.005t^6
\end{aligned}$$

6. Interprétation des résultats : Les coefficients de ce polynôme nous donnent la loi de probabilité de la somme S :

— $\mathbb{P}(S = 3) = [t^3]G(t) = 0.02$ (correspond à la séquence 1-1-1)
— $\mathbb{P}(S = 4) = [t^4]G(t) = 0.53$
— $\mathbb{P}(S = 5) = [t^5]G(t) = 0.445$
— $\mathbb{P}(S = 6) = [t^6]G(t) = 0.005$ (correspond à la séquence 2-2-2)

La somme des probabilités est $0.02 + 0.53 + 0.445 + 0.005 = 1$, ce qui confirme notre calcul.