Probabilités et Galettes des rois

Étude géométrique du découpage de la Galette des Rois

Colin BOSSU RÉAUBOURG

10 janvier 2026

Table des matières

1 Étude de la probabilité d'intersection d'une fève par le découpage d'une galette

1.1 Introduction au problème : L'aléa de la fève

Dans la tradition culinaire française, la « Galette des Rois » est partagée en parts égales par des découpes radiales convergeant vers son centre. Un enjeu pratique et symbolique réside dans l'intégrité de la « fève », un petit objet circulaire dissimulé à l'intérieur. Si le couteau rencontre la fève, non seulement la tradition est perturbée, mais la découpe devient ardue.

Nous cherchons ici à quantifier le risque géométrique : quelle est la probabilité que, lors d'un découpage idéal en k parts, l'une des lames de couteau intersecte le disque représentant la fève ?

1.2 Formalisme mathématique

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Nous modélisons le problème dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure canonique.

— **La Galette** est représentée par le disque fermé $\mathcal{G} = \bar{D}(O, R)$, où O est l'origine.

— **La Fève** est représentée par un disque mobile $\mathcal{F} = \bar{D}(C, r)$, de rayon $r < R$.

— **L'Espace de Configuration** : Le centre de la fève C est une variable aléatoire uniformément distribuée sur le domaine admissible $\mathcal{D}_{adm}$. Pour que la fève soit entièrement contenue dans la galette, son centre doit vérifier $d(O, C) \leq R - r$. Ainsi, $\mathcal{D}_{adm} = \bar{D}(O, R - r)$. La densité de probabilité du centre C, notée $f_C(x, y)$, est donc :

$$f_C(c) = \frac{1}{\text{Aire}(\mathcal{D}_{adm})} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_{adm}}(c) = \frac{1}{\pi(R-r)^2} \mathbf{1}_{\mathcal{D}_{adm}}(c) \tag{1}$$

— **Le Découpage** : On considère un ensemble de k rayons (segments) $\mathcal{L} = \{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$ tels que chaque L_j est défini par l'angle $\theta_j = \theta_0 + \frac{2\pi j}{k}$. Par invariance de rotation du problème, nous fixerons $\theta_0 = 0$ sans perte de généralité.

$$L_j = \left\{ (t \cos\theta_j, t \sin\theta_j) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [0, R] \right\} \tag{2}$$

Problème : Calculer $\mathbb{P}(\exists j \in \{1, \ldots, k\} : L_j \cap \mathcal{F} \neq \emptyset)$.

1.3 Analyse Géométrique de l'Intersection

Soit C la position du centre de la fève, exprimée en coordonnées polaires (ρ, α). Une droite radiale passant par l'origine avec un angle θ intersecte le disque $\bar{D}(C, r)$ si et seulement si la distance orthogonale de C à cette droite est inférieure ou égale à r.

La distance d'un point $C(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ à la droite d'équation $x\sin\theta - y\cos\theta = 0$ est donnée par :

$$d(C, \text{droite}_\theta) = |\rho\cos\alpha\sin\theta - \rho\sin\alpha\cos\theta| = \rho|\sin(\theta - \alpha)| \tag{3}$$

L'intersection a lieu si $\rho|\sin(\theta - \alpha)| \leq r$, soit $|\sin(\theta - \alpha)| \leq \frac{r}{\rho}$.

1.3.1 Cas 1 : $\rho \leq r$

Si le centre de la fève est très proche du centre de la galette ($\rho \leq r$), l'origine O est incluse dans la fève ($O \in \mathcal{F}$). Comme toutes les coupes radiales passent par O, elles intersectent toutes la fève. La probabilité conditionnelle est alors :

$$p(\rho) = 1 \quad \text{pour} \quad \rho \in [0, r] \tag{4}$$

1.3.2 Cas 2 : $\rho > r$

L'ensemble des angles θ tels qu'une coupe intersecte la fève est un intervalle centré en α d'ouverture angulaire $\delta(\rho)$:

$$\theta \in \left[\alpha - \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right), \alpha + \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right)\right] \tag{5}$$

La largeur de cet intervalle est $\delta(\rho) = 2 \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right)$.

Puisqu'il y a k coupes réparties régulièrement tous les $\frac{2\pi}{k}$ radians, la probabilité que l'une d'elles tombe dans cet intervalle (pour un α uniforme) est le rapport entre la largeur totale des zones "favorables" et la période angulaire totale $2\pi/k$. Cependant, si les intervalles se chevauchent, la probabilité sature à 1. La probabilité conditionnelle à une distance ρ est donc :

$$p(\rho) = \min\left(1, \frac{k \cdot \delta(\rho)}{2\pi}\right) = \min\left(1, \frac{k}{\pi} \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right)\right) \tag{6}$$

1.4 Développement du Calcul Intégral

La probabilité totale P est l'espérance de $p(\rho)$ sur le domaine $\mathcal{D}_{adm}$. En passant en coordonnées polaires (ρ, α) :

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{R-r} p(\rho) \frac{\rho \, d\rho \, d\alpha}{\pi(R-r)^2} = \frac{2}{(R-r)^2} \int_0^{R-r} p(\rho) \rho \, d\rho \tag{7}$$

1.4.1 Détermination des bornes

Soit ρ_0 la valeur critique telle que $\frac{k}{\pi} \arcsin\left(\frac{r}{\rho_0}\right) = 1$.

$$\rho_0 = \frac{r}{\sin\left(\frac{\pi}{k}\right)} \tag{8}$$

Si $\rho \leq \rho_0$, alors $p(\rho) = 1$. Si $\rho > \rho_0$, alors $p(\rho) = \frac{k}{\pi} \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right)$. L'intégrale se décompose ainsi :

$$P = \frac{2}{(R-r)^2} \left[\int_0^{\rho_0} \rho \, d\rho + \frac{k}{\pi} \int_{\rho_0}^{R-r} \rho \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho\right] \tag{9}$$

1.4.2 Calcul de la primitive

Calculons $I(\rho) = \int \rho \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right) d\rho$ par intégration par parties. Posons : $u = \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right) \implies du = \frac{1}{\sqrt{1-(\frac{r}{\rho})^2}} \cdot \left(-\frac{r}{\rho^2}\right) d\rho = \frac{-r}{\rho\sqrt{\rho^2-r^2}} d\rho$ $dv = \rho \, d\rho \implies v = \frac{\rho^2}{2}$

Alors :

$$I(\rho) = \frac{\rho^2}{2} \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right) - \int \frac{\rho^2}{2} \left(\frac{-r}{\rho\sqrt{\rho^2 - r^2}}\right) d\rho = \frac{\rho^2}{2} \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{r}{2} \int \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 - r^2}} d\rho \tag{10}$$

La seconde intégrale est immédiate (de la forme $w'/\sqrt{w}$) :

$$I(\rho) = \frac{\rho^2}{2} \arcsin\left(\frac{r}{\rho}\right) + \frac{r}{2}\sqrt{\rho^2 - r^2} + C \tag{11}$$

1.4.3 Évaluation de l'expression analytique

$$P = \frac{1}{(R-r)^2}\left[\rho_0^2 + \frac{2k}{\pi}\left(I(R-r) - I(\rho_0)\right)\right] \tag{12}$$

En remplaçant $I(\rho_0)$:

$$I(\rho_0) = \frac{\rho_0^2}{2}\arcsin\left(\frac{r}{\rho_0}\right) + \frac{r}{2}\sqrt{\rho_0^2 - r^2} \tag{13}$$

Or $\arcsin(r/\rho_0) = \pi/k$, donc :

$$I(\rho_0) = \frac{\rho_0^2\pi}{2k} + \frac{r}{2}\sqrt{\rho_0^2 - r^2} \tag{14}$$

Le terme ρ_0^2 de l'intégrale de gauche se simplifie partiellement avec le $I(\rho_0)$ dans le crochet.

1.5 Application Numérique

Données : $R = 12$, $r = 1$, $k = 10$.

1. **Rayon critique :** $\rho_0 = \frac{1}{\sin(\pi/10)} \approx 3,236$ cm.
2. **Borne supérieure :** $R - r = 11$ cm.
3. **Calcul de $I(11)$:**
   — $\arcsin(1/11) \approx 0,0910$ rad.
   — $\sqrt{11^2 - 1^2} = \sqrt{120} \approx 10,954$.
   — $I(11) = \frac{121}{2}(0,0910) + \frac{1}{2}(10,954) \approx 5,505 + 5,477 = 10,982$.
4. **Calcul de $I(\rho_0)$:**
   — $\arcsin(1/3,236) = \pi/10 \approx 0,314$.
   — $\sqrt{3,236^2 - 1} \approx 3,077$.
   — $I(\rho_0) = \frac{3,236^2}{2}(0,314) + \frac{1}{2}(3,077) \approx 1,645 + 1,538 = 3,183$.
5. **Probabilité finale :**

$$P = \frac{1}{11^2}\left[3,236^2 + \frac{20}{\pi}(10,982 - 3,183)\right] \tag{15}$$

$$P = \frac{1}{121}\left[10,471 + 6,366 \times 7,799\right] \approx \frac{10,471 + 49,648}{121} \approx \frac{60,119}{121} \approx 0,4968 \tag{16}$$

1.6 Conclusion et Interprétation

L'analyse de la fonction $P(k)$ montre que la probabilité croît de manière quasi-linéaire avec le nombre de parts k (pour k petit), avant de saturer asymptotiquement vers 1.

D'un point de vue pratique, pour une galette de 24 cm de diamètre et 10 convives, le "coupeur" a **une chance sur deux** de toucher la fève. Pour minimiser ce risque, il faudrait soit réduire le nombre de parts, soit placer la fève statistiquement plus près du bord de la galette, car la densité de probabilité d'intersection $p(\rho)$ décroît en $1/\rho$ lorsque l'on s'éloigne du centre.

2 Étude de la sensibilité au centrage : Probabilité d'intersection avec excentricité de découpe

2.1 Introduction au problème : L'aléa de la maladresse

Dans l'étude précédente, nous avons supposé un découpage idéal où toutes les lames convergent vers un point unique : l'origine géométrique de la galette. Or, la réalité expérimentale du découpage manuel introduit un biais systématique ou aléatoire. Il est rare que le couteau passe exactement par le centre.

Nous cherchons ici à quantifier l'impact de ce biais. Si le découpeur introduit un décalage (offset) constant h par rapport au centre, créant ainsi une "zone d'évitement" centrale ou une caustique, comment cela affecte-t-il la probabilité de toucher la fève ? Paradoxalement, la maladresse protège-t-elle ou expose-t-elle davantage l'objet caché ?

2.2 Formalisme mathématique

Nous conservons l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et la modélisation de la **Galette** $\mathcal{G} = \bar{D}(O, R)$ et de la **Fève** $\mathcal{F} = \bar{D}(C, r)$ avec C uniformément distribué sur $\mathcal{D}_{adm} = \bar{D}(O, R - r)$.

- **Le Paramètre d'Imperfection** : Soit $h \in [0, R)$ la distance orthogonale (l'impact) de chaque ligne de coupe par rapport à l'origine O. Nous supposons $h > r$ pour analyser le cas où le centre est épargné, ou h petit pour une perturbation.
- **Le Découpage Excentré** : Les k coupes ne sont plus des rayons, mais des cordes tangentes à un cercle virtuel de rayon h. La j-ème ligne de coupe L_j est définie par son angle normal $\theta_j = \frac{2\pi j}{k}$ et son décalage h :

$$L_j = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \sin\theta_j - y \cos\theta_j = h\right\} \tag{17}$$

  Ceci modélise un découpage où le couteau vise systématiquement "à côté" du centre d'une distance h.

Problème : Calculer $\mathbb{P}(\exists j \in \{1, \dots, k\} : L_j \cap \mathcal{F} \neq \emptyset)$ en fonction de l'excentricité h.

2.3 Analyse Géométrique de l'Intersection

Soit $C(\rho, \alpha)$ le centre de la fève en coordonnées polaires. La distance d'un point $C(\rho\cos\alpha, \rho\sin\alpha)$ à la droite L_j (d'angle normal θ_j et de décalage h) est donnée par :

$$d(C, L_j) = |\rho\cos\alpha\sin\theta_j - \rho\sin\alpha\cos\theta_j - h| = |\rho\sin(\theta_j - \alpha) - h| \tag{18}$$

L'intersection a lieu si $d(C, L_j) \leq r$, ce qui équivaut à :

$$-r \leq \rho\sin(\theta_j - \alpha) - h \leq r \implies \frac{h-r}{\rho} \leq \sin(\theta_j - \alpha) \leq \frac{h+r}{\rho} \tag{19}$$

2.3.1 Condition d'existence

Pour qu'une solution existe, il faut que l'argument de l'arcsinus soit dans $[-1, 1]$.

- Si $\rho < h - r$, alors $\frac{h-r}{\rho} > 1$. Aucune intersection n'est possible (la fève est dans le "noyau" central non découpé). $p(\rho) = 0$.
- Si $\rho > h + r$, les deux bornes sont admissibles.

2.3.2 Fenêtre Angulaire

Pour une distance ρ donnée (suffisamment grande), l'ensemble des angles θ menant à une intersection est la réunion de deux intervalles (ou un seul continu selon la position relative), dont la largeur angulaire totale $\delta(\rho)$ est déterminée par la différence des arcsinus des bornes effectives. En supposant $h > r$ (le décalage est supérieur au rayon de la fève), et pour $\rho > h + r$, la largeur angulaire de la zone de danger pour une coupe donnée est :

$$\delta(\rho) = \arcsin\left(\frac{h+r}{\rho}\right) - \arcsin\left(\frac{h-r}{\rho}\right) \tag{20}$$

La probabilité conditionnelle (sans saturation) est la proportion de cette fenêtre sur le secteur angulaire moyen $2\pi/k$:

$$p(\rho) \approx \frac{k}{2\pi}\delta(\rho) = \frac{k}{2\pi}\left[\arcsin\left(\frac{h+r}{\rho}\right) - \arcsin\left(\frac{h-r}{\rho}\right)\right] \tag{21}$$

Note : Nous négligeons ici les effets de saturation (chevauchement des coupes) pour simplifier l'analyse comparative, en supposant k modéré et ρ grand.

2.4 Développement du Calcul Intégral

La probabilité totale P_h est l'intégrale de $p(\rho)$ sur le domaine admissible.

$$P_h = \frac{1}{\pi(R-r)^2}\int_0^{2\pi} d\alpha \int_{h+r}^{R-r} \frac{k}{2\pi}\delta(\rho)\rho\, d\rho = \frac{k}{\pi(R-r)^2}\int_{h+r}^{R-r} \delta(\rho)\rho\, d\rho \tag{22}$$

(L'intégrale commence à $h + r$ car pour $\rho < h - r$, $p(\rho) = 0$. La zone intermédiaire est négligée pour l'approximation).

L'expression fait intervenir la différence de deux termes de même forme. Définissons la primitive fondamentale $\mathcal{J}(A)$:

$$\mathcal{J}(A) = \int \rho \arcsin\left(\frac{A}{\rho}\right) d\rho \tag{23}$$

D'après l'intégration par parties effectuée dans la preuve précédente :

$$\mathcal{F}(A, \rho) = \frac{\rho^2}{2}\arcsin\left(\frac{A}{\rho}\right) + \frac{A}{2}\sqrt{\rho^2 - A^2} \tag{24}$$

Ainsi, l'intégrale définie entre ρ_{min} et ρ_{max} est $[\mathcal{F}(A, \rho)]_{\rho_{min}}^{\rho_{max}}$.

La probabilité s'écrit alors par linéarité :

$$P_h = \frac{k}{\pi(R-r)^2}\left([\mathcal{F}(h+r, \rho)]_{h+r}^{R-r} - [\mathcal{F}(h-r, \rho)]_{h+r}^{R-r}\right) \tag{25}$$

Notons que pour la borne inférieure $\rho = A$, le terme $\sqrt{A^2 - A^2}$ s'annule et $\arcsin(1) = \pi/2$. Donc $\mathcal{F}(A, A) = A^2\pi/4$.

2.5 Application Numérique

Comparons la coupe parfaite ($h = 0$) avec une coupe maladroite. **Données :** $R = 12$, $r = 1$, $k = 10$. **Excentricité :** $h = 2$ cm (le couteau passe à 2 cm du centre).

1. **bornes effectives :**

— $R_{max} = 11$.
— $A_1 = h + r = 3$.
— $A_2 = h - r = 1$.

2. **Calcul des primitives à la borne supérieure ($R_{max} = 11$) :**
   — **Terme 1 ($A_1 = 3$) :** $\arcsin(3/11) \approx 0,276$ rad. $\sqrt{11^2 - 3^2} = \sqrt{112} \approx 10,583$. $\mathcal{F}(3,11) = \frac{121}{2}(0,276) + \frac{3}{2}(10,583) \approx 16,698 + 15,875 = 32,573$.
   — **Terme 2 ($A_2 = 1$) :** $\arcsin(1/11) \approx 0,091$ rad. $\sqrt{11^2 - 1^2} \approx 10,954$. $\mathcal{F}(1,11) = \frac{121}{2}(0,091) + \frac{1}{2}(10,954) \approx 5,505 + 5,477 = 10,982$.
3. **Calcul des primitives aux bornes inférieures :**
   — $\mathcal{F}(3,3) = \frac{3^2\pi}{4} \approx \frac{9\times 3.1416}{4} \approx 7,068$.
   — Attention, pour le terme $A_2 = 1$, la borne inférieure de l'intégrale globale est environ $h + r = 3$ (zone de validité), et non 1.
   — Calculons $\mathcal{F}(1,3)$: $\arcsin(1/3) \approx 0,340$. $\sqrt{3^2 - 1^2} = \sqrt{8} \approx 2,828$. $\mathcal{F}(1,3) = \frac{9}{2}(0,340) + \frac{1}{2}(2,828) \approx 1,53 + 1,414 = 2,944$.
4. **Assemblage :** L'intégrale vaut $(32,573 - 7,068) - (10,982 - 2,944) = 25,505 - 8,038 = 17,467$.

$$P_h = \frac{10}{\pi(11)^2} \times 17,467 \approx \frac{174,67}{380,13} \approx 0,459 \tag{26}$$

Résultat comparatif :
— Coupe parfaite ($h = 0$) : $P \approx 0,497$ (calcul précédent).
— Coupe excentrée ($h = 2$) : $P \approx 0,459$.

2.6 Conclusion et Interprétation

L'analyse mathématique révèle un résultat contre-intuitif : **l'imprécision du découpage diminue le risque de trancher la fève.**

En introduisant un décalage h, on crée une zone centrale ("l'œil du cyclone") de rayon $h - r$ où la probabilité d'intersection tombe à zéro, car aucune lame ne traverse cette région. Bien que les coupes se densifient tangentiellement autour de ce cercle virtuel, la perte de la zone de danger maximal (le centre exact O, où $p(\rho) = 1$ dans le cas idéal) l'emporte statistiquement sur l'augmentation du risque en périphérie.

Ainsi, pour préserver l'intégrité de la fève (et les dents des convives), il est géométriquement préférable d'être un coupeur maladroit et d'éviter de viser le centre avec trop de précision.