Étude Cinématique d’une Ellipse Roulante

Détermination des trajectoires d’un point du contour et du foyer

Colin BOSSU RÉAUBOURG

16 janvier 2026

Table des matières

1 Introduction

Le problème du roulement sans glissement d'une courbe sur une droite est un classique de la cinématique et de la géométrie différentielle. Dans cette étude, nous considérons une ellipse $\mathcal{E}$ reposant sur une droite horizontale fixe. Nous nous proposons d'établir les équations paramétriques exactes décrivant la trajectoire de deux points remarquables liés à l'ellipse :

1. Un point P fixé sur le contour de l'ellipse.
2. Un foyer F de l'ellipse.

Ces résultats trouvent des applications directes en physique mathématique, notamment dans la description des surfaces de Delaunay [1] à courbure moyenne constante.

2 Paramétrage et Modélisation Géométrique

2.1 Définitions et Repères

Soit $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ le repère fixe orthonormé lié au sol (la droite horizontale étant l'axe (Ox)). Soit $\mathcal{R}_m = (C, \vec{u}, \vec{v})$ le repère mobile orthonormé attaché au centre C de l'ellipse et à ses axes principaux.

L'ellipse est définie par son demi-grand axe a et son excentricité e (avec $0 \leq e < 1$). Le demi-petit axe est donné par la relation fondamentale :

$$b = a\sqrt{1 - e^2} \tag{1}$$

Tout point M de l'ellipse est repéré dans $\mathcal{R}_m$ par son anomalie excentrique $\psi \in [0, 2\pi[$. Le vecteur position s'écrit :

$$\overrightarrow{CM}(\psi) = a\cos\psi\,\vec{u} + b\sin\psi\,\vec{v} \tag{2}$$

2.2 Vecteur Tangent et Condition de Contact

Le vecteur tangent à l'ellipse au point de paramètre ψ, exprimé dans le repère mobile, est obtenu par dérivation par rapport à l'anomalie excentrique :

$$\vec{\tau}(\psi) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{CM}}{\mathrm{d}\psi} = -a\sin\psi\,\vec{u} + b\cos\psi\,\vec{v} \tag{3}$$

Soit I le point de contact instantané entre l'ellipse et le sol. Nous noterons t l'anomalie excentrique correspondant à ce point de contact I. Soit α l'angle de rotation du repère mobile $\mathcal{R}_m$ par rapport au repère fixe $\mathcal{R}_0$. La matrice de passage de $\mathcal{R}_m$ vers $\mathcal{R}_0$ est la matrice de rotation R_α :

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{4}$$

Pour que l'ellipse repose sur la droite horizontale, le vecteur tangent au point de contact $\vec{\tau}(t)$ doit être horizontal dans le repère fixe. Sa composante verticale après rotation doit donc être nulle. Les composantes de $\vec{\tau}(t)$ dans $\mathcal{R}_m$ sont $u_\tau = -a\sin t$ et $v_\tau = b\cos t$. La projection verticale donne :

$$Y_\tau = u_\tau\sin\alpha + v_\tau\cos\alpha = -a\sin t\sin\alpha + b\cos t\cos\alpha = 0 \tag{5}$$

D'où la relation fondamentale liant l'orientation de l'ellipse au paramètre de contact :

$$\tan\alpha = \frac{b\cos t}{a\sin t} \tag{6}$$

2.3 Fonction de Normalisation et Orientation

Pour déterminer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$, nous introduisons la quantité $D(t)$ correspondant à la norme du vecteur tangent :

$$D(t) = \|\vec{\tau}(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \tag{7}$$

En utilisant (1), cette expression se simplifie :

$$D(t) = a\sqrt{1 - e^2 \cos^2 t} \tag{8}$$

Pour garantir que l'ellipse soit au-dessus du sol (le centre C ayant une ordonnée positive), une analyse de la projection du vecteur $\overrightarrow{CI}$ permet de fixer les signes :

$$\cos\alpha = -\frac{a \sin t}{D(t)} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = -\frac{b\cos t}{D(t)} \tag{9}$$

L'ordonnée du centre de l'ellipse est alors donnée par $y_C(t) = \frac{ab}{D(t)}$.

2.4 Condition de Roulement Sans Glissement

La condition de roulement sans glissement implique que la vitesse du point de contact par rapport au sol est nulle. Cela se traduit par l'égalité entre le déplacement élémentaire de l'abscisse du centre dx_C et la longueur de l'arc d'ellipse parcouru ds :

$$dx_C = ds = \|\vec{\tau}(t)\|\mathrm{d}t = D(t)\mathrm{d}t \tag{10}$$

En supposant le contact initial à $t = 0$ en $x = 0$, l'abscisse du centre est :

$$x_C(t) = \int_0^t a\sqrt{1 - e^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u \tag{11}$$

On reconnaît ici l'intégrale elliptique incomplète de deuxième espèce, classiquement notée $E(t, e)$ à un facteur a près [2].

3 Trajectoire d'un Point du Contour

Considérons un point P fixé sur l'ellipse, défini par son anomalie excentrique constante θ. Ses coordonnées dans le repère mobile sont $(a\cos\theta, b\sin\theta)$.

Théorème 3.1 (Trajectoire du Point P)**.** Soit une ellipse de paramètres (a, e) roulant sans glisser. Les coordonnées (X_P, Y_P) d'un point P d'anomalie θ dans le repère fixe sont données par :

$$\begin{cases} X_P(t) = a\displaystyle\int_0^t \sqrt{1 - e^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \frac{a\left(\sin(t-\theta) + e^2 \sin\theta\cos t\right)}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}} \\ Y_P(t) = a\sqrt{1-e^2}\dfrac{1 - \cos(t-\theta)}{\sqrt{1 - e^2\cos^2 t}} \end{cases} \tag{12}$$

Démonstration. La position absolue est donnée par $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OC} + \mathcal{R}_\alpha \overrightarrow{CP}_m$. Pour l'ordonnée Y_P :

$$\begin{aligned} Y_P &= y_C + (a\cos\theta)\sin\alpha + (b\sin\theta)\cos\alpha \\ &= \frac{ab}{D(t)} + a\cos\theta\left(-\frac{b\cos t}{D(t)}\right) + b\sin\theta\left(-\frac{a\sin t}{D(t)}\right) \\ &= \frac{ab}{D(t)}\left[1 - (\cos\theta\cos t + \sin\theta\sin t)\right] \end{aligned}$$

En utilisant la formule $\cos(t-\theta) = \cos t \cos\theta + \sin t \sin\theta$, on obtient l'expression finale de Y_P.

Pour l'abscisse X_P :

$$\begin{aligned} X_P &= x_C + (a\cos\theta)\cos\alpha - (b\sin\theta)\sin\alpha \\ &= x_C + \frac{1}{D(t)}\left(-a^2\cos\theta\sin t + b^2\sin\theta\cos t\right) \end{aligned}$$

En substituant $b^2 = a^2(1-e^2)$ et en développant le numérateur :

$$a^2[\sin\theta\cos t - \cos\theta\sin t - e^2\sin\theta\cos t] = a^2[-\sin(t-\theta) - e^2\sin\theta\cos t]$$

La division par $D(t)$ mène directement au résultat énoncé. ■

Exemple 3.1 (Validation par le Cercle)**.** Si $e = 0$, alors $b = a$ et $D(t) = a$. Les équations deviennent :

$$X_P(t) = at - a\sin(t-\theta) \quad \text{et} \quad Y_P(t) = a(1-\cos(t-\theta))$$

Ce sont les équations paramétriques canoniques d'une cycloïde.

4 Trajectoire du Foyer : L'Ondulaire

Nous considérons maintenant le foyer F situé sur le grand axe. Dans le repère mobile, ses coordonnées sont $\overrightarrow{CF}_m = (ae, 0)$.

Propriété 4.1. La trajectoire du foyer F est décrite par les équations suivantes, définissant une courbe appelée ondulaire :

$$\begin{cases} X_F(t) = a\displaystyle\int_0^t \sqrt{1-e^2\cos^2 u}\,\mathrm{d}u - \frac{ae\sin t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}} \\ Y_F(t) = a\sqrt{1-e^2}\dfrac{1-e\cos t}{\sqrt{1-e^2\cos^2 t}} \end{cases} \tag{13}$$

Démonstration. On applique la rotation au vecteur $\overrightarrow{CF}_m$:

$$\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ae \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae\cos\alpha \\ ae\sin\alpha \end{pmatrix}$$

En utilisant les expressions (9) :

$$\begin{aligned} X_F &= x_C + ae\left(-\frac{a\sin t}{D(t)}\right) = x_C - \frac{a^2 e\sin t}{D(t)} \\ Y_F &= y_C + ae\left(-\frac{b\cos t}{D(t)}\right) = \frac{ab}{D(t)} - \frac{abe\cos t}{D(t)} = \frac{ab(1-e\cos t)}{D(t)} \end{aligned}$$

En simplifiant par a dans les fractions après substitution de $D(t)$, on aboutit aux équations (13). ■

5 Lien avec les Surfaces de Delaunay

Les résultats précédents dépassent le cadre de la cinématique plane. En 1841, Charles-Eugène Delaunay a démontré un théorème fondamental reliant la courbe décrite par le foyer d'une conique roulante aux surfaces à courbure moyenne constante [1].

La surface de révolution engendrée par la rotation de la courbe (X_F, Y_F) (l'ondulaire) autour de l'axe des abscisses est un **onduloïde**. C'est la forme d'équilibre prise par une interface fluide soumise à une tension superficielle, comme un film de savon tubulaire. La courbure moyenne H de cette surface est donnée par la relation :

$$H = \frac{1}{2a} \tag{14}$$

Cette correspondance géométrique offre une méthode constructive pour résoudre l'équation différentielle non linéaire décrivant ces surfaces minimales généralisées [3].

Références

[1] C.-E. Delaunay, "Sur la surface de révolution dont la courbure moyenne est constante," *Journal de mathématiques pures et appliquées*, vol. 6, pp. 309–315, 1841.

[2] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.* New York : Dover Publications, 1964.

[3] K. Kenmotsu, "Surfaces of revolution with prescribed mean curvature," *Tohoku Mathematical Journal, Second Series*, vol. 32, no. 1, pp. 147–153, 1980.