
Détermination de l'Enveloppe de Sûreté

*Étude comparative des trajectoires balistiques dans le vide et en milieu
fluide linéaire*

Colin BOSSU RÉAUBOURG

16 janvier 2026

Table des matières

1 Cadre du Problème et Définitions	2
2 Étude du Mouvement dans le Vide	2
2.1 Équations horaires et trajectoire	2
2.2 Détermination de la parabole de sûreté	2
3 Modélisation avec Frottements Fluides Linéaires	3
3.1 Intégration des équations du mouvement	3
3.2 Équation de la trajectoire avec frottements	4
3.3 Courbe de sûreté en milieu résistant	4

1 Cadre du Problème et Définitions

On considère un point matériel M de masse m , assimilable à un projectile, évoluant dans un référentiel terrestre $R(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ supposé galiléen. L'origine O coïncide avec le point de lancement. L'axe (Oz) est défini comme la verticale ascendante et l'axe (Ox) comme l'axe horizontal dans le plan du mouvement.

Le champ de pesanteur est supposé uniforme dans la région de l'espace considérée, noté $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ avec g l'accélération de la pesanteur.

Les conditions initiales à l'instant $t = 0$ sont définies par :

- **Position** : $O\vec{M}(0) = \vec{0}$.
- **Vitesse** : $\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\vec{e}_x + v_0 \sin(\alpha)\vec{e}_z$.

Le paramètre $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ représente l'angle de tir par rapport à l'horizon, et $v_0 > 0$ est la norme de la vitesse initiale, fixée pour cette étude. L'objectif est de déterminer l'équation de l'enveloppe des trajectoires, courbe délimitant la zone de l'espace physiquement accessible par le projectile, communément appelée *parabole de sûreté* dans le cas idéal [1].

2 Étude du Mouvement dans le Vide

Dans cette première approche, nous négligeons toute interaction avec l'air. Le système est conservatif.

2.1 Équations horaires et trajectoire

Le projectile est soumis uniquement à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$. En appliquant le Principe Fondamental de la Dynamique (PFD) dans le référentiel galiléen, nous obtenons :

$$m\vec{a} = m\vec{g} \implies \frac{d^2 O\vec{M}}{dt^2} = -g\vec{e}_z \quad (1)$$

Par projection sur les axes (Ox) et (Oz) et intégration successive par rapport au temps t , en tenant compte des conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos(\alpha) \\ \dot{z}(t) = -gt + v_0 \sin(\alpha) \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = (v_0 \cos \alpha)t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \end{cases} \quad (2)$$

Pour obtenir l'équation cartésienne de la trajectoire, on élimine la variable temporelle $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$ que l'on substitue dans l'expression de $z(t)$:

$$z(x, \alpha) = -\frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + (v_0 \sin \alpha) \left(\frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right) \quad (3)$$

Ce qui se simplifie en :

$$z(x, \alpha) = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + x \tan \alpha \quad (4)$$

2.2 Détermination de la parabole de sûreté

L'enveloppe de la famille de trajectoires paramétrées par α correspond à la frontière de la zone accessible. Mathématiquement, pour une abscisse x donnée, nous cherchons la valeur de α qui maximise l'altitude z .

Utilisons l'identité trigonométrique $1/\cos^2 \alpha = 1 + \tan^2 \alpha$. L'équation (4) devient :

$$z(x, \alpha) = -\frac{gx^2}{2v_0^2}(1 + \tan^2 \alpha) + x \tan \alpha \quad (5)$$

Posons la variable $u = \tan \alpha$. Nous cherchons à maximiser la fonction $z(u)$:

$$z(u) = -\frac{gx^2}{2v_0^2}u^2 + xu - \frac{gx^2}{2v_0^2} \quad (6)$$

La condition d'optimalité est donnée par l'annulation de la dérivée partielle par rapport au paramètre de tir :

$$\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{gx^2}{v_0^2}u + x = 0 \implies u_{opt} = \frac{v_0^2}{gx} \quad (7)$$

Cette valeur u_{opt} correspond à la tangente de l'angle optimal pour atteindre une abscisse x . En réinjectant u_{opt} dans l'expression de la trajectoire, nous obtenons l'équation de l'enveloppe $z_{surete}(x)$:

$$\begin{aligned} z_{max}(x) &= -\frac{gx^2}{2v_0^2} \left(\frac{v_0^2}{gx} \right)^2 + x \left(\frac{v_0^2}{gx} \right) - \frac{gx^2}{2v_0^2} \\ &= -\frac{v_0^2}{2g} + \frac{v_0^2}{g} - \frac{gx^2}{2v_0^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Théorème 2.1 (Parabole de Sûreté). Dans le vide, la zone de sécurité est délimitée par une parabole d'équation :

$$z_{surete}(x) = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2}x^2 \quad (9)$$

Le sommet de cette parabole se situe à l'altitude $H_{max} = \frac{v_0^2}{2g}$ et sa portée maximale au sol est $R_{max} = \frac{v_0^2}{g}$.

3 Modélisation avec Frottements Fluides Linéaires

Aux vitesses modérées, la résistance de l'air est souvent modélisée par une force proportionnelle à la vitesse (régime de Stokes). Bien que ce modèle soit une approximation, il présente l'avantage d'être analytiquement intégrable [2].

3.1 Intégration des équations du mouvement

Le bilan des forces s'écrit désormais :

- Poids : $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$
- Frottement fluide : $\vec{f} = -h\vec{v}$ où $h > 0$ est le coefficient de frottement.

Le PFD s'écrit $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - h\vec{v}$. En introduisant la constante de temps $\tau = m/h$, l'équation vectorielle différentielle devient :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{\tau}\vec{v} = \vec{g} \quad (10)$$

La projection sur les axes donne deux équations différentielles linéaires du premier ordre :

1. **Sur l'axe (Ox) :** $\dot{v}_x + \frac{1}{\tau}v_x = 0$. La solution, compte tenu de $v_x(0) = v_0 \cos \alpha$, est :

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau} \implies x(t) = v_0 \tau \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \quad (11)$$

2. **Sur l'axe (Oz) :** $\dot{v}_z + \frac{1}{\tau} v_z = -g$. La solution générale est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière constante ($-g\tau$). Avec $v_z(0) = v_0 \sin \alpha$:

$$v_z(t) = (v_0 \sin \alpha + g\tau)e^{-t/\tau} - g\tau \quad (12)$$

Par intégration temporelle pour la position $z(t)$:

$$z(t) = \tau(v_0 \sin \alpha + g\tau)(1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t \quad (13)$$

3.2 Équation de la trajectoire avec frottements

Il est possible d'éliminer le temps t explicitement. À partir de l'équation de $x(t)$, nous isolons le terme exponentiel :

$$1 - e^{-t/\tau} = \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \implies t = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \quad (14)$$

Cette expression est définie pour $x < v_0 \tau \cos \alpha$, ce qui met en évidence l'existence d'une asymptote verticale (portée limite). En substituant dans $z(t)$, nous obtenons l'équation de la trajectoire :

$$z(x, \alpha) = x \tan \alpha + \frac{gx\tau}{v_0 \cos \alpha} + g\tau^2 \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \quad (15)$$

3.3 Courbe de sûreté en milieu résistant

La recherche de l'enveloppe nécessite de résoudre $\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$. Contrairement au cas du vide, il n'existe pas de solution analytique simple de la forme $z = f(x)$. Nous devons définir la courbe paramétriquement.

Pour simplifier les calculs, posons la variable réduite $X = \frac{x}{v_0 \tau}$. L'équation (15) se réécrit :

$$z = x \tan \alpha + \frac{g\tau X}{\cos \alpha} + g\tau^2 \ln \left(1 - \frac{X}{\cos \alpha} \right) \quad (16)$$

Calculons la dérivée partielle par rapport à α :

$$\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{x}{\cos^2 \alpha} + g\tau X \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} + g\tau^2 \frac{1}{1 - \frac{X}{\cos \alpha}} \left(-X \frac{\sin \alpha \cos \alpha + X \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha (\cos \alpha - X)} \right) \quad (17)$$

Après simplification rigoureuse du terme logarithmique dérivé (voir [3] pour des méthodes similaires de perturbation), la condition d'enveloppe $\frac{\partial z}{\partial \alpha} = 0$ conduit à l'équation implicite suivante liant x et l'angle optimal α :

$$1 + \frac{g}{v_0} \sin \alpha = \frac{g\tau}{v_0} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha - \frac{x}{v_0 \tau}} \quad (18)$$

Propriété 3.1 (Enveloppe Transcendantale). La zone de sécurité en présence de frottements linéaires est délimitée par une courbe définie par le système paramétrique suivant (paramètre α) :

$$\begin{cases} \frac{x}{v_0 \tau} = \cos \alpha - \frac{g\tau}{v_0} \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{1 + \frac{g}{v_0} \sin \alpha} & \text{(issu de l'inversion de Eq. 18)} \\ z = x \tan \alpha + \frac{gx\tau}{v_0 \cos \alpha} + g\tau^2 \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \end{cases} \quad (19)$$

Cette enveloppe présente deux caractéristiques notables par rapport à la parabole du vide :

1. Elle possède une asymptote verticale correspondant à la portée maximale absolue (obtenue pour $\alpha \rightarrow 0$ optimisé), bornée par $x_{lim} < v_0\tau$.
2. Le sommet de la courbe (tir vertical $\alpha = \pi/2$) est abaissé et se situe à une hauteur $z_{max} = v_0\tau + g\tau^2 \ln \left(\frac{g\tau}{v_0 + g\tau} \right)$.

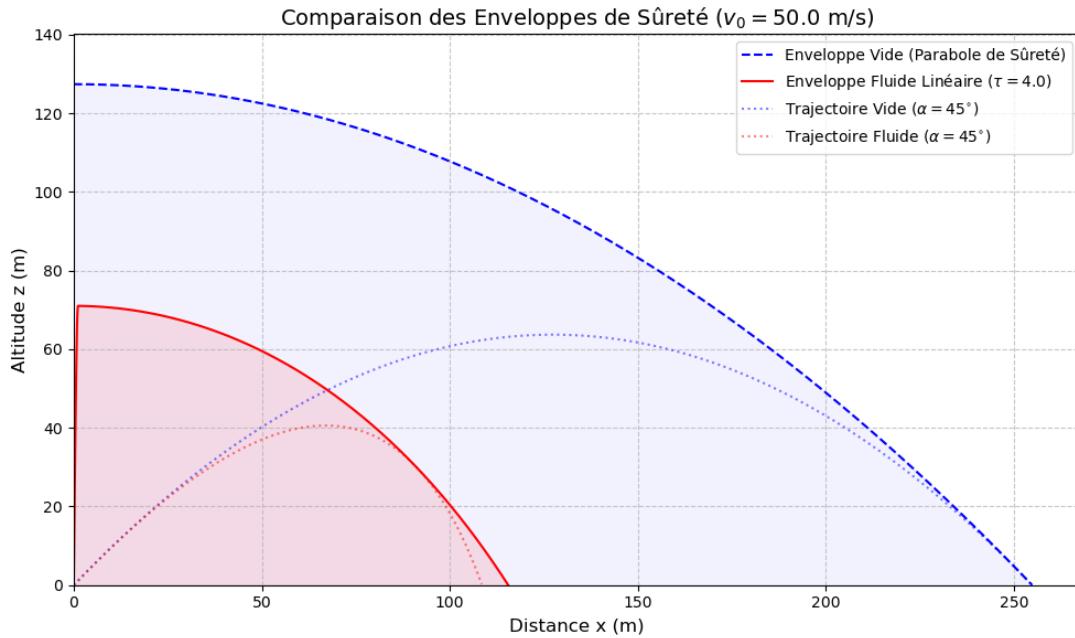


Figure 1 – Comparaison numérique des zones de sûreté. La courbe bleue représente la parabole de sûreté idéale (vide), tandis que la courbe rouge illustre l'enveloppe réduite sous l'effet d'un frottement fluide linéaire ($\tau = 4.0$ s). On observe clairement la perte de portée et la saturation verticale (asymptote) caractéristiques du milieu résistant.

Références

- [1] J.-P. Pérez, *Mécanique : fondements et applications*. Paris : Dunod, 2001.
- [2] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *Le cours de physique de Feynman*, vol. 1. Addison-Wesley, 1963. Traduction française chez Dunod.
- [3] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Mécanique*, vol. 1 of *Physique théorique*. Moscou : Mir, 1960.