Dynamique des Horizons Apparents

Étude de la métrique de McVittie en régimes d'expansion de Sitter et Fantôme

Colin BOSSU RÉAUBOURG

8 janvier 2026

Table des matières

1 Formalisme Géométrique : Métrique de McVittie

L'étude des objets compacts dans un univers en expansion nécessite un traitement non-perturbatif de la métrique. Nous adoptons ici la solution exacte de McVittie, qui décrit une masse centrale M immergée dans un fond FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) spatialement plat.

1.1 Métrique et Rayon Aréolaire

L'élément de ligne s'écrit en coordonnées isotropes (t, r, θ, ϕ) comme suit :

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\mu(t,r)}{1+\mu(t,r)}\right)^2 dt^2 + a(t)^2(1+\mu(t,r))^4(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{1}$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle cosmologique et le paramètre de compacité est défini par :

$$\mu(t,r) = \frac{GM}{2a(t)r} \tag{2}$$

Pour caractériser la structure causale locale, nous introduisons le rayon aréolaire $R(t,r)$, invariant géométrique défini par l'aire $\mathcal{A} = 4\pi R^2$ des sphères de symétrie :

$$R(t,r) = a(t)r(1+\mu)^2 \tag{3}$$

1.2 Condition de l'Horizon Apparent

Contrairement à l'horizon des événements, de nature téléologique et globale, l'horizon apparent est défini localement comme la surface marginalement piégée la plus externe. Mathématiquement, cette surface correspond au lieu où la normale au rayon aréolaire devient de genre nul :

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha R \nabla_\beta R = 0 \tag{4}$$

Lemme 1.1 (Calcul du Gradient)**.** Le gradient du rayon aréolaire dans la métrique de McVittie satisfait les relations suivantes :

$$\partial_r R = \frac{R}{r}\frac{1-\mu}{1+\mu} \tag{5}$$

$$\partial_t R = H(t)R\frac{1-\mu}{1+\mu} \tag{6}$$

où $H(t) = \dot{a}/a$ est le paramètre de Hubble.

Démonstration. Calculons d'abord la dérivée radiale. En utilisant $\partial_r \mu = -\mu/r$, nous avons :

$$\partial_r R = a(1+\mu)^2 + 2ar(1+\mu)\partial_r\mu = a(1+\mu)\left[1+\mu-2\mu\right] = a(1+\mu)(1-\mu) \tag{7}$$

En substituant $a(1+\mu) = R/[r(1+\mu)]$, on obtient l'expression désirée. Pour la dérivée temporelle, notons que $\partial_t \mu = -\mu H$. Ainsi :

$$\partial_t R = \dot{a}r(1+\mu)^2 + 2ar(1+\mu)(-\mu H) = Hra(1+\mu)^2 - 2Hra\mu(1+\mu) \tag{8}$$

Factorisons par $R = ar(1+\mu)^2$:

$$\partial_t R = HR - 2HR\frac{\mu}{1+\mu} = HR\left(1 - \frac{2\mu}{1+\mu}\right) = HR\frac{1-\mu}{1+\mu} \tag{9}$$

■

En injectant ces dérivées dans l'équation (4) avec les composantes inverses de la métrique $g^{tt} = -(\frac{1+\mu}{1-\mu})^2$ et $g^{rr} = a^{-2}(1+\mu)^{-4}$, nous obtenons :

$$-\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \left(HR\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 + \frac{1}{a^2(1+\mu)^4}\left(\frac{R}{r}\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 = 0 \tag{10}$$

Après simplification et usage de l'identité $\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 = 1 - \frac{2GM}{R}$, nous aboutissons à l'équation maîtresse définissant la position des horizons R_h :

$$H(t)^2 R_h^3 - R_h + 2GM = 0 \tag{11}$$

2 Expérience 1 : Univers de de Sitter

Dans cette section, nous considérons un univers dominé par une constante cosmologique Λ, caractérisé par un taux d'expansion constant.

2.1 Analyse de l'Équation Polynomiale

Soit $H = H_0 = \sqrt{\Lambda/3}$. Nous cherchons les racines réelles positives du polynôme $P(R) = H_0^2 R^3 - R + 2GM$. Étudions la fonction $f(R) = P(R)$. Sa dérivée première est :

$$f'(R) = 3H_0^2 R^2 - 1 \tag{12}$$

L'extremum pertinent pour $R > 0$ se situe en $R_c = \frac{1}{\sqrt{3}H_0}$. La valeur de la fonction en ce point critique détermine l'existence des horizons.

Théorème 2.1 (Condition de Nariai)**.** Pour qu'un trou noir puisse exister au sein d'un univers de de Sitter, la masse M et le paramètre de Hubble H_0 doivent satisfaire l'inégalité :

$$27G^2M^2H_0^2 \leq 1 \tag{13}$$

Démonstration. La condition d'existence de racines réelles est $f(R_c) \leq 0$, car $f(0) = 2GM > 0$ et $\lim_{R\to\infty} f(R) = +\infty$. Le minimum local doit donc être négatif ou nul pour croiser l'axe des abscisses. Calculons $f(R_c)$:

$$f(R_c) = H_0^2\left(\frac{1}{3\sqrt{3}H_0^3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}H_0} + 2GM = -\frac{2}{3\sqrt{3}H_0} + 2GM \tag{14}$$

L'inégalité $f(R_c) \leq 0$ conduit directement à $2GM \leq \frac{2}{3\sqrt{3}H_0}$, soit $27G^2M^2H_0^2 \leq 1$. ■

2.2 Solutions Perturbatives

Sous l'hypothèse $GMH_0 \ll 1$, nous pouvons développer les solutions pour l'horizon du trou noir (R_{BH}) et l'horizon cosmologique (R_C).

1. **Horizon du Trou Noir :** En posant $R_{BH} = 2GM(1+\delta)$, l'injection dans (11) donne au premier ordre :

$$R_{BH} \approx 2GM\left(1 + 4G^2M^2H_0^2\right) \tag{15}$$

   L'horizon est dilaté par l'expansion cosmique.

2. **Horizon Cosmologique :** En posant $R_C = \frac{1}{H_0}(1-\epsilon)$, on obtient :

$$R_C \approx \frac{1}{H_0}(1 - GMH_0) \tag{16}$$

   La masse centrale induit une contraction de l'horizon cosmologique.

3 Expérience 2 : Énergie Fantôme et Big Rip

Considérons un fluide d'énergie sombre exotique avec une équation d'état $p = w\rho$ où $w < -1$, violant la condition d'énergie dominante.

3.1 Dynamique Divergente de Hubbard

L'équation de conservation $\dot{\rho} + 3H\rho(1 + w) = 0$ implique $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. Comme $1 + w < 0$, la densité diverge avec l'expansion. L'intégration de l'équation de Friedmann donne le facteur d'échelle :

$$a(t) \propto (t_{rip} - t)^{-\frac{2}{3|1+w|}} \tag{17}$$

Le paramètre de Hubble évolue donc comme :

$$H(t) = \frac{2}{3|1 + w|} \frac{1}{t_{rip} - t} \tag{18}$$

Nous observons que $\lim_{t \to t_{rip}} H(t) = +\infty$.

3.2 Évaporation Topologique de l'Horizon

Contrairement au cas statique, $H(t)$ varie. L'équation des horizons (11) devient dépendante du temps. La condition d'existence (13) doit être vérifiée à tout instant t. Or, puisque $H(t)$ est strictement croissant, il existe un temps critique $t_* < t_{rip}$ où l'inégalité est saturée.

Propriété 3.1 (Temps Critique de Fusion)**.** Les horizons du trou noir et cosmologique fusionnent et disparaissent à l'instant t_* défini par :

$$t_* = t_{rip} - 2\sqrt{3}GM|1 + w| \tag{19}$$

Démonstration. Saturons l'inégalité de Nariai : $H(t_*) = \frac{1}{3\sqrt{3}GM}$. Égalisons avec l'expression dynamique (18) :

$$\frac{2}{3|1 + w|(t_{rip} - t_*)} = \frac{1}{3\sqrt{3}GM} \tag{20}$$

L'isolement de $t_{rip} - t_*$ mène directement au résultat énoncé. ∎

3.3 Comportement Différentiel des Horizons

Analysons la cinématique des horizons avant la fusion par dérivation implicite de (11) par rapport au temps :

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2H\dot{H}R^3}{3H^2R^2 - 1} \tag{21}$$

Sachant que $\dot{H} > 0$ pour l'énergie fantôme :

— Pour R_{BH} (petit rayon), $3H^2R^2 - 1 < 0$. Ainsi $\frac{dR_{BH}}{dt} > 0$. Le trou noir gonfle.

— Pour R_C (grand rayon), $3H^2R^2 - 1 > 0$. Ainsi $\frac{dR_C}{dt} < 0$. L'horizon cosmologique rétrécit.

Au temps t_*, $R_{BH} = R_C = 3GM$. Pour $t > t_*$, le gradient du rayon aréolaire devient partout de genre temps ($\nabla R^2 < 0$), impliquant qu'aucune surface piégée ne peut exister. Le trou noir cesse d'être défini géométriquement avant la singularité finale.

Références

[1] McVittie, G. C., "The mass-particle in an expanding universe", *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 93, 325, 1933.

[2] Nariai, H., "On some static solutions of Einstein's gravitational field equations", *Science Reports of the Tohoku University*, 34, 160, 1950.

[3] Caldwell, R. R., Kamionkowski, M., & Weinberg, N. N., "Phantom Energy and Cosmic Doomsday", *Physical Review Letters*, 91, 071301, 2003.

[4] Faraoni, V., & Jacques, A., "Cosmological expansion and local physics", *Physical Review D*, 76, 063510, 2007.