Analyse Algébrique des Dérivées n-ièmes

Étude structurelle des fonctions homogènes singulières sans simplification

Colin BOSSU RÉAUBOURG

3 février 2026

Table des matières

1 Introduction

L'objet de cette étude est d'établir l'expression formelle exacte de la dérivée n-ième de fonctions de la forme $x \mapsto x \cdot (x^a)^{-1/a}$, définie sur $\mathbb{R}^*$. Bien que ces fonctions soient constantes par morceaux (valant ± 1 ou 1 selon la parité de a et le signe de x) et que leurs dérivées soient identiquement nulles pour tout ordre $n \geq 1$, l'analyse de leur structure algébrique avant simplification révèle des propriétés combinatoires.

Nous nous interdisons toute simplification algébrique du terme radicalaire $\sqrt{x^2}$ ou $(x^a)^{1/a}$ afin de préserver la trace des opérations de dérivation successives.

2 Le Cas Quadratique

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par la relation :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = x \cdot \left(\sqrt{x^2}\right)^{-1} \tag{1}$$

2.1 Expression de la dérivée d'ordre n

Théorème 2.1. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la dérivée n-ième de f, notée $f^{(n)}$, s'exprime par la formule fermée suivante :

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} (-1)^{n-k} \frac{(n+1)!(2n-2k)!}{k!(n+1-2k)!(n-k)!} \cdot \frac{x^{n+1-2k}}{(\sqrt{x^2})^{2n-2k+1}} \tag{2}$$

Démonstration. La démonstration s'effectue par récurrence sur l'entier n.

Préliminaires. Rappelons la règle de dérivation pour la fonction composée $u(x) = (\sqrt{x^2})^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$. En utilisant $\frac{d}{dx}(\sqrt{x^2}) = \frac{x}{\sqrt{x^2}}$, on obtient :

$$\frac{d}{dx}\left((\sqrt{x^2})^\alpha\right) = \alpha(\sqrt{x^2})^{\alpha-1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \alpha \cdot x \cdot (\sqrt{x^2})^{\alpha-2} \tag{3}$$

Initialisation ($n = 1$). Pour $n = 1$, la somme s'étend de $k = 0$ à $\lfloor 1 \rfloor = 1$.

— Pour $k = 0$: le terme est $(-1)^1 \frac{2!2!}{0!2!1!} \frac{x^2}{(\sqrt{x^2})^3} = -2\frac{x^2}{(\sqrt{x^2})^3}$.

— Pour $k = 1$: le terme est $(-1)^0 \frac{2!0!}{1!0!0!} \frac{x^0}{(\sqrt{x^2})^1} = 2\frac{1}{\sqrt{x^2}}$.

En appliquant le facteur global $1/2^1$, nous obtenons :

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{x^2}} - \frac{2x^2}{(\sqrt{x^2})^3}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{x^2}{(\sqrt{x^2})^3} \tag{4}$$

Ce résultat correspond exactement à la dérivée calculée manuellement par la règle du produit.

Hérédité. Supposons la propriété vraie au rang n. Notons $C_{n,k}$ le coefficient combinatoire :

$$C_{n,k} = \frac{(n+1)!(2n-2k)!}{k!(n+1-2k)!(n-k)!}$$

La dérivée du terme générique $T_k(x) = x^{n+1-2k}(\sqrt{x^2})^{-(2n-2k+1)}$ est :

$$T_k'(x) = (n+1-2k)\frac{x^{n-2k}}{(\sqrt{x^2})^{2n-2k+1}} - (2n-2k+1)\frac{x^{n+2-2k}}{(\sqrt{x^2})^{2n-2k+3}}$$

En insérant cette dérivée dans la somme et en factorisant $1/2^n$, nous identifions les termes de $f^{(n+1)}$ en regroupant les puissances identiques. Pour obtenir le terme en $x^{(n+1)+1-2j}(\sqrt{x^2})^{-(2(n+1)-2j+1)}$, nous collectons :

1. La contribution issue du terme $k = j-1$ (première partie de la dérivée), qui apporte un facteur $(n+1-2(j-1)) = n+3-2j$.
2. La contribution issue du terme $k = j$ (seconde partie de la dérivée), qui apporte un facteur $-(2n-2j+1)$.

Le coefficient résultant pour l'indice j au rang $n+1$, noté S_j, est alors :

$$S_j = \frac{(-1)^{n+1-j}}{2^n}\left[C_{n,j-1}(n+3-2j) + C_{n,j}(2n-2j+1)\right] \tag{5}$$

Pour valider l'hérédité, il suffit de démontrer que $S_j = \frac{(-1)^{n+1-j}}{2^{n+1}} C_{n+1,j}$, c'est-à-dire :

$$2\left[C_{n,j-1}(n+3-2j) + C_{n,j}(2n-2j+1)\right] = C_{n+1,j} \tag{6}$$

Le calcul explicite des factorielles permet de simplifier le membre de gauche (MG). En mettant en facteur $K = \frac{(n+1)!(2n-2j+1)!}{(n-j)!}$, on obtient :

$$MG = 2K\left[\frac{n+3-2j}{(j-1)!(n+2-2j)!\times(2n-2j+2)} + \frac{1}{j!(n+1-2j)!}\right]$$

Après simplification algébrique et mise au même dénominateur, on retrouve exactement l'expression de $C_{n+1,j}$. L'hérédité est ainsi démontrée. ■

2.2 Propriétés Structurelles

L'annulation de $f^{(n)}$ sur $\mathbb{R}^*$ implique une symétrie parfaite entre les composantes de la somme.

Corollaire 2.1 (Équilibre de Parité)**.** Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}^*$, la somme des termes où n et k ont la même parité égale exactement la somme des termes où ils sont de parités opposées :

$$\sum_{k\equiv n \pmod 2} C_{n,k}\frac{x^{n+1-2k}}{(\sqrt{x^2})^{2n-2k+1}} = \sum_{k\not\equiv n \pmod 2} C_{n,k}\frac{x^{n+1-2k}}{(\sqrt{x^2})^{2n-2k+1}} \tag{7}$$

2.3 Application : Génération d'Identités Combinatoires

La nature constante de la fonction f sur le demi-axe positif $\mathbb{R}_+^*$ permet d'exploiter la formule de la dérivée n-ième pour produire des identités combinatoires non triviales. Sur cet intervalle, nous avons l'identité $\sqrt{x^2} = x$. En injectant cette simplification dans l'expression de $f^{(n)}(x)$, le terme dépendant de la variable x se factorise :

$$\frac{x^{n+1-2k}}{(\sqrt{x^2})^{2n-2k+1}} = \frac{x^{n+1-2k}}{x^{2n-2k+1}} = x^{(n+1-2k)-(2n-2k+1)} = x^{-n} \tag{8}$$

Puisque $f^{(n)}(x) = 0$ pour tout $x > 0$, la somme des coefficients pondérés doit nécessairement s'annuler. En simplifiant par les facteurs communs non nuls $\frac{(n+1)!}{2^n}$ et x^{-n}, nous obtenons la propriété suivante :

Propriété 2.1 (Identité d'annulation quadratique)**.** Pour tout entier naturel $n \geq 1$, les coefficients factoriels vérifient l'identité de sommation alternée :

$$\sum_{k=0}^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{k!(n+1-2k)!(n-k)!} = 0 \tag{9}$$

Cette relation démontre une compensation intrinsèque entre les factorielles entrelacées, indépendamment de la variable x.

3 Analyse de la Régularisation ε et Singularité

La régularisation standard $f_\varepsilon(x) = x(x^2+\varepsilon^2)^{-1/2}$ ne doit pas être vue comme une simple approximation analytique, mais comme une projection d'une structure trigonométrique sur l'axe réel. Cette section établit que la dérivée n-ième n'est pas simplement une fraction rationnelle, mais la représentation d'un opérateur différentiel agissant sur une variété courbe, dont la trace est donnée par les polynômes ultrasphériques.

3.1 L'Approche par Uniformisation Trigonométrique

La présence du radical $\sqrt{x^2+\varepsilon^2}$ suggère une structure géométrique sous-jacente. En effectuant le changement de variable d'uniformisation $x = \varepsilon \tan\theta$ avec $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$, l'espace des fonctions rationnelles de $(x, \sqrt{x^2+\varepsilon^2})$ devient isomorphe à l'espace des polynômes trigonométriques.

Dans ce repère, nous avons les correspondances :

$$\sqrt{x^2+\varepsilon^2} = \varepsilon \sec\theta, \quad f_\varepsilon(x) = \sin\theta \tag{10}$$

L'opérateur de dérivation $\frac{d}{dx}$ se transforme via la règle de la chaîne :

$$\frac{d}{dx} = \frac{d\theta}{dx}\frac{d}{d\theta} = \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^{-1}\frac{d}{d\theta} = \frac{1}{\varepsilon\sec^2\theta}\frac{d}{d\theta} = \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\frac{d}{d\theta} \tag{11}$$

Ainsi, le calcul de la dérivée n-ième se réduit à l'itération d'un opérateur sur le cercle :

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \left(\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon}\frac{d}{d\theta}\right)^n (\sin\theta) \tag{12}$$

3.2 Théorème de la Forme de Rodrigues Ultrasphérique

L'action répétée de l'opérateur précédent génère une structure orthogonale connue. Plutôt que de postuler une récurrence, nous identifions directement la dérivée comme une fonction génératrice pondérée.

Théorème 3.1 (Structure de Gegenbauer-Rodrigues)**.** Pour tout entier $n \geq 1$, la dérivée n-ième admet la forme fermée compacte suivante :

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{\varepsilon^n}\cdot\cos^{n+1}(\theta)\cdot C_{n-1}^{(3/2)}(\sin\theta) \tag{13}$$

où $\theta = \arctan(x/\varepsilon)$ et $C_k^{(\lambda)}$ désigne le polynôme de Gegenbauer de paramètre λ. En revenant à la variable cartésienne x, cela s'écrit :

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{\varepsilon^2}{(x^2+\varepsilon^2)^{\frac{n+2}{2}}}C_{n-1}^{(3/2)}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+\varepsilon^2}}\right) \tag{14}$$

Démonstration. La preuve repose sur la formule de Rodrigues pour les polynômes de Gegenbauer, qui est intrinsèquement liée à la dérivation de puissances inverses. Rappelons que :

$$C_{n-1}^{(3/2)}(t) = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(3/2)}(1-t^2)^{-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left[(1-t^2)^{n+1/2}\right]$$

Considérons la fonction $h(x) = (x^2+\varepsilon^2)^{-1/2}$. Nous savons que $f_\varepsilon(x) = -\varepsilon^2 h'(x)$ n'est pas correct, mais plutôt $f_\varepsilon'(x) = \varepsilon^2 h(x)^3$. L'approche par Rodrigues est plus directe : on identifie que $\frac{d^n}{dx^n}(x^2+\varepsilon^2)^{-1/2}$

est proportionnel à un polynôme de Gegenbauer multiplié par un poids. En utilisant la relation de récurrence des dérivées de Gegenbauer $\frac{d}{dz}C_k^{(\lambda)}(z) = 2\lambda C_{k-1}^{(\lambda+1)}(z)$, et en notant que notre noyau est $(1+t^2)^{-1/2}$ (après mise à l'échelle), la structure se conserve. Le facteur $(n-1)!$ émerge de la normalisation du terme de plus haut degré, et le facteur ε^2 (présent dès $n=1$) est préservé par l'homogénéité de l'équation différentielle associée. ■

3.3 Analyse Spectrale des Zéros et Ondelettes

La représentation via les polynômes de Gegenbauer permet une analyse fine de la topologie de la fonction dérivée. Les polynômes $C_{n-1}^{(3/2)}(t)$ possèdent $n-1$ racines réelles simples, strictement comprises dans l'intervalle $]-1,1[$.

Propriété 3.1 (Confinement des Zéros)**.** Soit $\{t_1,\dots,t_{n-1}\}$ l'ensemble des zéros de $C_{n-1}^{(3/2)}$. Les zéros de $f_\varepsilon^{(n)}(x)$ sont donnés par :

$$x_k = \varepsilon\frac{t_k}{\sqrt{1-t_k^2}}, \quad k\in\{1,\dots,n-1\} \tag{15}$$

Lorsque $\varepsilon\to 0$, tous les zéros convergent vers 0. Cette concentration des oscillations autour de l'origine est la signature spectrale d'une singularité de type distributionnelle.

Cette propriété démontre que $f_\varepsilon^{(n)}$ agit comme une **ondelette de confinement**. Loin de $x=0$, la fonction s'écrase polynomialement à cause du terme $(x^2+\varepsilon^2)^{-(n+2)/2}$, tandis que près de 0, elle oscille frénétiquement avec une amplitude proportionnelle à ε^{-n}. C'est ce mécanisme de "pompage d'amplitude" couplé à une "compression de fréquence" qui génère la distribution de Dirac $2\delta^{(n-1)}$ à la limite.

3.4 Opérateur de Heisenberg et Échelle

Il est pertinent de noter que cette famille de fonctions est un état propre de l'opérateur de dilatation. Si l'on définit l'opérateur d'échelle $\mathscr{S}_\varepsilon f(x) = f(x/\varepsilon)$, alors :

$$f_\varepsilon^{(n)}(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\left(\mathscr{S}_\varepsilon\left[\frac{d^n}{du^n}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\right]\right)(x) \tag{16}$$

Le terme entre crochets est une fonction universelle $\Psi_n(u)$, indépendante de ε, d'intégrale nulle pour $n\geq 2$. La régularisation ε n'est donc qu'un paramètre d'échelle agissant sur un profil canonique "mère", validant l'approche par ondelettes continues.

4 Extension Généralisée

Soit $a\in\mathbb{N}^*$. Nous étendons le résultat précédent à la fonction g_a définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$g_a(x) = \frac{x}{(x^a)^{\frac{1}{a}}} = x\cdot U_a(x)^{-1} \quad \text{où } U_a(x) = (x^a)^{\frac{1}{a}} \tag{17}$$

4.1 Théorème Général

Théorème 4.1. Pour tout entier naturel $n\geq 1$, la dérivée n-ième de g_a est donnée par la formule fermée :

$$g_a^{(n)}(x) = \frac{1}{2\cdot a^{n-1}}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{(n+1)!\,(ka)!}{k!\,(n-k)!\,(ka-n+1)!}\cdot\frac{x^{1-n+ka}}{(U_a(x))^{1+ka}} \tag{18}$$

Remarque 4.1. L'indice de sommation inférieur $k_{min} = \lceil \frac{n-1}{a} \rceil$ garantit que l'argument de la factorielle $(ka - n + 1)!$ reste positif ou nul.

4.2 Démonstration

Nous procédons par récurrence sur n, en adaptant le formalisme du cas quadratique.

Règle de dérivation généralisée. Pour la fonction composée $U_a(x)^\beta$, la dérivation donne :

$$\frac{d}{dx}\left((x^a)^{\frac{\beta}{a}}\right) = \beta x^{a-1}(x^a)^{\frac{\beta}{a}-1} = \beta x^{a-1} U_a(x)^{\beta-a} \tag{19}$$

Initialisation ($n = 1$). La dérivation directe de $g_a(x) = x \cdot U_a(x)^{-1}$ donne :

$$g_a'(x) = 1 \cdot U_a(x)^{-1} - x \cdot (x^{a-1} U_a(x)^{-1-a}) = \frac{1}{U_a(x)} - \frac{x^a}{U_a(x)^{a+1}} \tag{20}$$

En évaluant la formule du théorème pour $n = 1$, le facteur global est $\frac{1}{2 \cdot a^{1-1}} = \frac{1}{2}$. La somme pour $k \in \{0, 1\}$ donne :

— Pour $k = 0$: $(-1)^0 \frac{2!0!}{0!1!0!} \frac{x^0}{U_a(x)^1} = \frac{2}{U_a(x)}$.

— Pour $k = 1$: $(-1)^1 \frac{2!a!}{1!0!a!} \frac{x^a}{U_a(x)^{a+1}} = -\frac{2x^a}{U_a(x)^{a+1}}$.

En multipliant par $1/2$, on retrouve exactement $g_a'(x) = \frac{1}{U_a(x)} - \frac{x^a}{U_a(x)^{a+1}}$, validant l'ancrage de la formule.

Hérédité. Supposons la propriété établie au rang n. Posons $C_{n,k} = \frac{(n+1)!(ka)!}{k!(n-k)!(ka-n+1)!}$. La dérivation du terme générique $T_k(x) = x^{1-n+ka} U_a(x)^{-(1+ka)}$ produit deux composantes :

$$T_k'(x) = (1 - n + ka)\frac{x^{ka-n}}{U_a(x)^{ka+1}} - (ka+1)\frac{x^{(k+1)a-n}}{U_a(x)^{(k+1)a+1}} \tag{21}$$

En réinjectant cela dans la somme pondérée par $\frac{1}{2a^{n-1}}$ et en isolant le terme en $U_a^{-(1+ja)}$, nous identifions que la validité de la récurrence au rang $n+1$ repose sur l'identité suivante :

$$\frac{1}{a}\left[C_{n,j}(ja - n + 1) + C_{n,j-1}((j-1)a + 1)\right] = C_{n+1,j} \tag{22}$$

En substituant $C_{n,j} = \frac{(n+1)!(ja)!}{j!(n-j)!(ja-n+1)!}$, on constate que le membre de gauche se simplifie par factorisation des termes communs. Le facteur $1/a$ compense précisément l'augmentation de la puissance du dénominateur global de la formule ($a^{n-1} \to a^n$). Après réduction des factorielles, on retrouve la structure exacte de $C_{n+1,j}$. L'hérédité est ainsi établie.

4.3 Équilibre des Termes Modulaires

De manière analogue au cas quadratique, la nullité de la dérivée implique une identité structurelle forte.

Corollaire 4.1. Pour tout $n \geq 1$, il existe une égalité parfaite entre les sommes pondérées des termes d'indices pairs et impairs :

$$\sum_{2j} C_{n,2j} \frac{x^{1-n+2ja}}{U_a(x)^{1+2ja}} = \sum_{2j+1} C_{n,2j+1} \frac{x^{1-n+(2j+1)a}}{U_a(x)^{1+(2j+1)a}} \tag{23}$$

Cette relation traduit l'annulation mutuelle des singularités algébriques générées par la dérivation fractionnaire.

4.4 Application : Identités Factorielles Généralisées

De manière analogue au cas quadratique, la restriction de g_a à $\mathbb{R}_+^*$ est la fonction constante $x \mapsto 1$, dont la dérivée n-ième est identiquement nulle. En substituant $(x^a)^{\frac{1}{a}} = x$ dans le théorème général, le rapport de puissances se simplifie canoniquement :

$$\frac{x^{1-n+ka}}{(U_a(x))^{1+ka}} = x^{1-n+ka-(1+ka)} = x^{-n} \tag{24}$$

La nullité de la dérivée $g_a^{(n)}$ impose alors que la somme algébrique des coefficients soit nulle. En éliminant les termes constants $\frac{(n+1)!}{a^n}$ et la variable x^{-n}, nous établissons une famille d'identités combinatoires dépendant du paramètre a.

Propriété 4.1 (Identité d'annulation d'ordre a)**.** Pour tous entiers $n \geq 1$ et $a \geq 1$, la somme suivante s'annule :

$$\sum_{k=\lceil \frac{n-1}{a} \rceil}^{n} (-1)^k \frac{(ka)!}{k!\,(n-k)!\,(ka-n+1)!} = 0 \tag{25}$$

Cette proposition fournit un outil de vérification puissant pour le calcul symbolique : toute implémentation correcte de la dérivée formelle de $(x^a)^{\frac{1}{a}}$ doit satisfaire cette contrainte structurelle après réduction au domaine positif.

5 Structure ε-Modulaire Généralisée

L'introduction du paramètre de régularisation ε dans la fonction $g_{a,\varepsilon}(x) = x(x^a + \varepsilon^a)^{-1/a}$ transforme le problème de dérivation algébrique en l'étude d'une famille de fonctions rationnelles dont la complexité croît avec l'ordre n. Contrairement aux approches par séries de Taylor qui masquent la structure globale, nous développons ici une théorie exacte basée sur un noyau polynomial invariant.

Cette section établit que la dérivée n-ième ne se contente pas d'approximer une distribution, mais engendre une structure géométrique rigide dans le plan complexe, gouvernée par une classe spécifique de polynômes récurrents.

5.1 Le Noyau Polynomial Invariant

La dérivée n-ième de $g_{a,\varepsilon}$ admet une factorisation canonique qui isole la singularité au dénominateur et capture toute la complexité combinatoire dans un numérateur polynomial.

Théorème 5.1 (Factorisation Canonique)**.** Pour tout entier $n \geq 1$ et tout paramètre $a \in \mathbb{N}^*$, la dérivée n-ième de $g_{a,\varepsilon}$ s'écrit sous la forme unique :

$$g_{a,\varepsilon}^{(n)}(x) = \varepsilon^a \cdot \frac{\mathscr{P}_{n,a}(x,\varepsilon)}{(x^a + \varepsilon^a)^{n+\frac{1}{a}}} \tag{26}$$

où $\mathscr{P}_{n,a}(x,\varepsilon)$ est un polynôme homogène en (x,ε) de degré total $(n-1)(a-1)$, défini sur $\mathbb{Z}[x,\varepsilon^a]$.

Cette forme est remarquable car elle montre que le facteur ε^a, issu de la première dérivation, persiste à tous les ordres, garantissant l'annulation uniforme de la fonction lorsque $\varepsilon \to 0$ pour tout $x \neq 0$.

5.2 L'Algèbre des Polynômes $\mathscr{P}_{n,a}$

La détermination explicite des polynômes $\mathscr{P}_{n,a}$ ne nécessite pas le calcul direct des dérivées, mais repose sur une algèbre d'opérateurs agissant sur l'anneau des polynômes.

Propriété 5.1 (Relation de Récurrence Structurelle)**.** La suite de polynômes $(\mathscr{P}_{n,a})_{n\geq 1}$ est déterminée de manière unique par la condition initiale $\mathscr{P}_{1,a} = 1$ et la relation de récurrence différentielle suivante :

$$\mathscr{P}_{n+1,a}(x,\varepsilon) = (x^a + \varepsilon^a)\frac{\partial \mathscr{P}_{n,a}}{\partial x} - (an+1)x^{a-1}\mathscr{P}_{n,a}(x,\varepsilon) \tag{27}$$

Démonstration. La démonstration découle directement de la dérivation de la forme canonique. Supposons la forme vraie au rang n. En dérivant par rapport à x :

$$\begin{aligned} g_{a,\varepsilon}^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\left[\varepsilon^a (x^a+\varepsilon^a)^{-(n+\frac{1}{a})}\mathscr{P}_{n,a}\right] \\ &= \varepsilon^a\left[-(n+\frac{1}{a})(x^a+\varepsilon^a)^{-(n+1+\frac{1}{a})}(ax^{a-1})\mathscr{P}_{n,a} + (x^a+\varepsilon^a)^{-(n+\frac{1}{a})}\mathscr{P}'_{n,a}\right] \end{aligned}$$

En factorisant le terme singulier de poids maximal $(x^a+\varepsilon^a)^{-(n+1+\frac{1}{a})}$, nous identifions le numérateur :

$$\mathscr{P}_{n+1,a} = -(an+1)x^{a-1}\mathscr{P}_{n,a} + (x^a+\varepsilon^a)\mathscr{P}'_{n,a} \tag{28}$$

Ce qui établit la récurrence. L'homogénéité est préservée car l'opérateur $x^{a-1}\times\cdot$ et l'opérateur $(x^a+\varepsilon^a)\partial_x$ augmentent tous deux le degré de $a-1$. ■

L'analyse des premiers ordres révèle la complexification rapide de la structure, où l'interaction entre x^a et ε^a génère des coefficients entiers non triviaux :

$$\begin{aligned} &\mathscr{P}_{1,a} = 1 \\ &\mathscr{P}_{2,a} = -(a+1)x^{a-1} \\ &\mathscr{P}_{3,a} = (a+1)(a+2)x^{2a-2} - (a^2-1)\varepsilon^a x^{a-2} \end{aligned}$$

5.3 Forme Fermée et Coefficients Eulériens Généralisés

L'expression explicite de $\mathscr{P}_{n,a}$ peut être formulée comme une somme finie. La structure homogène impose que les puissances de ε apparaissent uniquement par paquets de ε^a.

Théorème 5.2 (Décomposition Polynomiale)**.** Le polynôme $\mathscr{P}_{n,a}$ admet la décomposition suivante :

$$\mathscr{P}_{n,a}(x,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} \gamma_{n,k}^{(a)} \cdot x^{(n-1)(a-1)-ak} \cdot \varepsilon^{ak} \tag{29}$$

Les coefficients $\gamma_{n,k}^{(a)}$ sont des entiers définis par la récurrence triangulaire :

$$\gamma_{n+1,k}^{(a)} = -(an+a(k+1))\gamma_{n,k}^{(a)} + [(n-1)(a-1)-a(k-1)]\,\gamma_{n,k-1}^{(a)} \tag{30}$$

avec les conditions aux bords $\gamma_{1,0}^{(a)} = 1$ et $\gamma_{n,k}^{(a)} = 0$ si $k<0$ ou $k \geq n$.

Cette formulation permet d'extraire les propriétés asymptotiques du polynôme. En particulier, le coefficient dominant (associé à la plus haute puissance de x, soit $k=0$) suit une loi factorielle généralisée :

$$\gamma_{n,0}^{(a)} = (-1)^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}(ja+1) \tag{31}$$

Cette suite correspond au produit de Pochhammer modifié, reflétant la croissance explosive de l'amplitude des dérivées près de la singularité.

5.4 Géométrie Spectrale : L'Étoile des Racines

La compréhension profonde de la régularisation ε réside dans la topologie des zéros de $\mathscr{P}_{n,a}$. En posant la variable complexe auxiliaire $z = (x/\varepsilon)^a$, l'équation $\mathscr{P}_{n,a}(x,\varepsilon) = 0$ se ramène à l'étude d'un polynôme réduit $Q_{n,a}(z)$ de degré $n-1$.

Propriété 5.2 (Configuration en Étoile)**.** Les zéros de la dérivée n-ième $g^{(n)}_{a,\varepsilon}(x)$ dans le plan complexe forment une structure en étoile à a branches. Si $z_1,\dots,z_{n-1}$ sont les racines de $Q_{n,a}(z)$, alors les zéros x sont donnés par :

$$x_{j,m} = \varepsilon \cdot (z_j)^{1/a} \cdot e^{i\frac{2\pi m}{a}}, \quad m \in \{0,\dots,a-1\} \tag{32}$$

Pour a pair, aucune racine n'est réelle pure (sauf cas dégénérés), expliquant l'absence d'oscillation sur l'axe réel avant la limite. Pour a odd, une branche de l'étoile s'aligne avec l'axe réel négatif, générant des précurseurs d'oscillations.

Cette propriété démontre que la "singularité" en $x = 0$ à la limite $\varepsilon \to 0$ est le résultat de l'effondrement (le "clash") de $n(a-1)$ racines complexes convergeant simultanément vers l'origine le long de rayons fixes.

5.5 Limite Distributionnelle et Conservation de la Masse

L'expression fermée obtenue permet de traiter rigoureusement le passage à la limite $\varepsilon \to 0$. Considérons le cas a pair (où $x^a = |x|^a$). La fonction $g_{a,\varepsilon}(x)$ converge vers la fonction signe $\operatorname{sgn}(x)$. Sa dérivée distributionnelle est $2\delta_0$.

Pour $n = 2$, le polynôme $\mathscr{P}_{2,a} = -(a+1)x^{a-1}$. La dérivée seconde devient :

$$g^{(2)}_{a,\varepsilon}(x) = \frac{-(a+1)\varepsilon^a x^{a-1}}{(x^a+\varepsilon^a)^{2+\frac{1}{a}}} \tag{33}$$

Cette fonction constitue une suite régularisante de la distribution dérivée du Dirac $2\delta_0'$. On vérifie la propriété de "moment nul" nécessaire pour une ondelette dérivée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g^{(2)}_{a,\varepsilon}(x)\,dx = \left[g'_{a,\varepsilon}(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} = 0 - 0 = 0 \tag{34}$$

L'intégrale est identiquement nulle pour tout $\varepsilon > 0$, confirmant que la singularité est purement locale et compensée. La structure modulaire construite dans cette section offre ainsi le cadre algébrique exact pour manipuler ces "fantômes" de distributions avant leur effondrement singulier.