

Théorie Algébrique des Unités, Constantes et Normalisation Physique

Formalisme mathématique, métrologie et
implémentation numérique

Colin Bossu Réaubourg

Table des matières

1 Structures Algébriques des Grandes Physiques	1
1.1 Introduction au formalisme	1
1.1.1 De l'empirisme à l'abstraction mathématique	1
1.1.2 Définition de l'espace des grandeurs physiques comme produit direct	1
1.1.3 Distinction entre valeur numérique et dimension	2
1.2 L'Espace Vectoriel Dimensionnel	2
1.2.1 Le groupe abélien multiplicatif des dimensions	3
1.2.2 Isomorphisme logarithmique et structure d'espace vectoriel sur le corps des rationnels	3
1.2.3 Base canonique et dimensionnalité finie	3
1.2.4 Raffinement de la base : Analyse dimensionnelle orientée	4
1.3 Algèbre des opérateurs physiques	4
1.3.1 Opérations internes admissibles	4
1.3.2 Le statut particulier des angles : radian, stéradian et analyse de l'algèbre vectorielle	5
1.3.3 Typage fort et validation formelle : parallèle avec la théorie des types	5
2 Analyse Dimensionnelle et Invariances	7
2.1 Théorèmes fondamentaux	7
2.1.1 Le théorème de Buckingham (Théorème Pi) : formulation matricielle et noyau	7
2.1.2 Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et conséquences thermodynamiques	8
2.1.3 Matroïdes et algorithmes de sélection automatique des variables sans dimension	9
2.2 Symétries et Transformations	10
2.2.1 Transformations passives et actives	10
2.2.2 Invariance d'échelle et groupes de Lie	11
2.2.3 Le théorème de Noether et la conservation associée à la symétrie de dilatation	12
2.3 Au-delà de l'analyse classique	14
2.3.1 Dimensionnalité anomale et groupe de renormalisation	14
2.3.2 Régularisation dimensionnelle en théorie des champs	15
3 Métrologie Fondamentale et le Système International (SI)	17
3.1 Historique et nécessité de la réforme	17
3.1.1 Les limites des artefacts matériels (le Grand K)	17
3.1.2 Évolution de la définition de la seconde et de la vitesse de la lumière	18
3.1.3 Philosophie de la réforme de 2019 : fixer les invariants de la nature .	18

3.2	La redéfinition de 2019	19
3.2.1	L'ensemble des sept constantes explicites	20
3.2.2	Réalisations quantiques et topologiques : Effet Hall quantique et effet Josephson	21
3.2.3	La constante de Boltzmann et la thermodynamique de l'information	22
3.3	Propagation des incertitudes et covariance	23
3.3.1	Inversion de la hiérarchie des erreurs : des constantes vers les unités	23
3.3.2	Algèbre linéaire de la propagation des erreurs lors d'un changement de base	23
3.3.3	Matrice de covariance des unités dérivées et constantes dépendantes	24
4	Systèmes d'Unités et Constantes Fondamentales	26
4.1	Changements de base dimensionnelle	26
4.1.1	Matrices de transition et calcul logarithmique	26
4.1.2	Systèmes cohérents et rationalisation (Heaviside-Lorentz versus SI)	27
4.1.3	Impact des facteurs 4π sur les équations de champ	29
4.2	Systèmes d'unités naturelles	30
4.2.1	Unités de Planck : limite de la gravité quantique	30
4.2.2	Unités atomiques (Hartree) : physique atomique et chimie quantique	31
4.2.3	Unités géométriques : réduction de la masse et du temps à la longueur	32
4.3	Le débat sur les constantes	33
4.3.1	Constantes dimensionnées versus nombres purs	33
4.3.2	Discussion sur la variation temporelle des constantes (Duff versus Okun)	34
4.3.3	Signification physique de la fixation des constantes	35
5	Normalisation et Adimensionnement en Physique Mathématique	37
5.1	Procédure d'adimensionnement	37
5.1.1	Choix des échelles caractéristiques et variables réduites	37
5.1.2	Exemple détaillé : Adimensionnement des équations de Navier-Stokes	38
5.1.3	Apparition naturelle des nombres sans dimension	39
5.2	Lien avec la théorie des perturbations	40
5.2.1	Normalisation et ordre de grandeur unitaire	41
5.2.2	Petits paramètres et perturbations singulières	41
5.2.3	Couches limites et développements asymptotiques	42
6	Implémentation Numérique et Calcul Scientifique	44
6.1	Arithmétique des ordinateurs	44
6.1.1	Représentation en virgule flottante (IEEE 754) et limites de précision	44
6.1.2	Conditionnement numérique et prévention des erreurs d'annulation catastrophique	45
6.1.3	Importance de la normalisation pour la convergence des solveurs itératifs	46
6.2	Architecture logicielle pour la gestion des unités	47
6.2.1	Structures de données pour la conversion dynamique (Code Units vs Physical Units)	47
6.2.2	Exemple d'implémentation robuste en C++	48
6.2.3	Utilisation des templates et métaprogrammation pour la vérification dimensionnelle à la compilation	49

Chapitre 1

Structures Algébriques des Grandeurs Physiques

1.1 Introduction au formalisme

La physique quantitative repose sur la capacité à comparer des observations expérimentales à des étalons de référence. Si cette pratique est initialement empirique, son expression formelle nécessite une structure mathématique rigoureuse permettant de manipuler les grandeurs physiques au sein d'équations algébriques et différentielles. Ce chapitre établit les fondements algébriques nécessaires à la description des grandeurs physiques, en passant d'une vision historique de la mesure à une formalisation vectorielle des dimensions.

1.1.1 De l'empirisme à l'abstraction mathématique

Historiquement, la mesure d'une grandeur physique consistait en la comparaison directe avec un artefact matériel ou un phénomène naturel récurrent. Les premiers systèmes d'unités étaient anthropométriques ou locaux, ce qui limitait l'universalité des communications scientifiques. L'évolution vers une physique théorique a imposé la nécessité de dissocier la grandeur physique de son unité de mesure particulière.

L'analyse dimensionnelle, telle que formalisée par Bridgman dans son ouvrage fondateur [5], propose de traiter les équations physiques non plus seulement comme des relations entre des nombres, mais comme des relations entre des quantités possédant une nature qualitative propre. Cette abstraction permet de vérifier la cohérence structurelle des théories physiques avant toute application numérique.

Le passage à l'abstraction mathématique implique de considérer les dimensions non comme de simples étiquettes, mais comme des éléments susceptibles d'opérations algébriques. Cette approche permet de déduire des relations fonctionnelles entre variables sans résoudre explicitement les équations régissant le système, principe qui est au cœur de l'étude de la similitude et des lois d'échelle [2]. La formalisation mathématique transforme ainsi l'analyse dimensionnelle en un outil prédictif, capable de réduire la complexité des problèmes physiques par la mise en évidence d'invariants.

1.1.2 Définition de l'espace des grandeurs physiques comme produit direct

Pour formaliser la notion de grandeur physique, il convient de distinguer la valeur scalaire de la nature dimensionnelle. Nous définissons l'espace des grandeurs physiques \mathcal{P}

comme le produit direct d'un corps de scalaires et d'un espace de dimensions.

Soit \mathbb{F} un corps commutatif (généralement \mathbb{R} pour les mesures classiques ou \mathbb{C} en mécanique quantique) représentant les valeurs numériques. Soit \mathfrak{D} l'ensemble des dimensions physiques (dont la structure algébrique précise sera détaillée dans la section suivante). L'espace des grandeurs physiques est défini par :

$$\mathcal{P} = \mathbb{F} \times \mathfrak{D} \quad (1.1)$$

Un élément $g \in \mathcal{P}$ est un couple ordonné (x, D) où $x \in \mathbb{F}$ est la mesure et $D \in \mathfrak{D}$ est la dimension associée. Cette définition structurelle permet de séparer les opérations agissant sur les valeurs numériques de celles agissant sur les dimensions.

Cette structure de produit direct impose des règles de compatibilité pour les opérations algébriques. Par exemple, l'addition de deux grandeurs $g_1 = (x_1, D_1)$ et $g_2 = (x_2, D_2)$ n'est définie que si la condition d'homogénéité $D_1 = D_2$ est satisfaite. En revanche, la multiplication est une opération interne partout définie sur \mathcal{P} , induisant une structure de groupe sur la composante dimensionnelle.

1.1.3 Distinction entre valeur numérique et dimension

Une grandeur physique Q est une entité invariante, indépendante du choix du système d'unités utilisé pour la représenter. Cependant, sa représentation numérique dépend intrinsèquement de la base de mesure choisie. On adopte la notation standard suivante pour décomposer une grandeur physique :

$$Q = \{Q\}_U \cdot [Q]_U \quad (1.2)$$

où $\{Q\}_U \in \mathbb{F}$ représente la valeur numérique de la grandeur dans le système d'unités U , et $[Q]_U \in \mathfrak{D}$ représente l'unité de mesure correspondante.

Il est fondamental de noter que l'égalité entre deux grandeurs physiques est une égalité entre les éléments de \mathcal{P} , et non simplement entre leurs valeurs numériques. Lors d'un changement de système d'unités, par exemple d'un système A vers un système B , la grandeur Q reste invariante :

$$\{Q\}_A \cdot [Q]_A = \{Q\}_B \cdot [Q]_B \quad (1.3)$$

Cette relation implique que la valeur numérique et l'unité varient de manière inversement proportionnelle. Si l'unité est multipliée par un facteur λ , la valeur numérique est multipliée par λ^{-1} .

Cette distinction est cruciale en métrologie et en calcul numérique. Les équations de la physique relient des grandeurs Q , tandis que les algorithmes numériques manipulent des valeurs $\{Q\}$. L'absence de gestion explicite de la composante dimensionnelle $[Q]$ dans les codes de calcul est une source fréquente d'erreurs, justifiant l'approche de normalisation et d'adimensionnement traitée ultérieurement dans cet ouvrage. La rigueur mathématique exige de traiter l'unité non comme un suffixe textuel, mais comme un opérateur algébrique participant à la transformation des équations.

1.2 L'Espace Vectoriel Dimensionnel

La manipulation formelle des unités requiert l'établissement d'une structure algébrique stable. Si l'intuition physique suggère que les dimensions se multiplient et se divisent, l'analyse approfondie révèle que cet ensemble peut être traité comme un espace vectoriel, permettant l'application des puissants outils de l'algèbre linéaire à l'analyse dimensionnelle.

1.2.1 Le groupe abélien multiplicatif des dimensions

Soit \mathfrak{D} l'ensemble des dimensions physiques. On munit cet ensemble d'une loi de composition interne, la multiplication, notée \cdot . Pour tout couple de dimensions $(A, B) \in \mathfrak{D}^2$, le produit $A \cdot B$ est une dimension bien définie.

Propriété 1.1 (Structure de Groupe). *L'ensemble (\mathfrak{D}, \cdot) possède une structure de groupe abélien caractérisée par les propriétés suivantes :*

1. **Associativité** : $\forall A, B, C \in \mathfrak{D}, (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
2. **Élément neutre** : Il existe un élément unique, noté **1** (dimension sans unité), tel que $\forall A \in \mathfrak{D}, A \cdot \mathbf{1} = A$. Cet élément correspond aux scalaires adimensionnels.
3. **Inverse** : Pour tout $A \in \mathfrak{D}$, il existe un unique inverse A^{-1} tel que $A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}$.
4. **Commutativité** : $\forall A, B \in \mathfrak{D}, A \cdot B = B \cdot A$.

Il est important de noter que l'addition n'est pas une loi de composition interne définie sur \mathfrak{D} . L'expression $L + T$ (longueur plus temps) n'a pas de sens physique. L'addition n'est définie que dans l'espace des grandeurs \mathcal{P} et est conditionnée par l'égalité des dimensions des opérandes.

1.2.2 Isomorphisme logarithmique et structure d'espace vectoriel sur le corps des rationnels

La structure multiplicative de groupe abélien est isomorphe à une structure additive d'espace vectoriel. Cette transformation est fondamentale car elle légitime l'utilisation du calcul matriciel dans le théorème de Buckingham.

Considérons l'application logarithme formel qui transforme le produit en somme. Pour étendre cette structure, nous introduisons l'exponentiation par un scalaire rationnel. En effet, les lois physiques font fréquemment apparaître des exposants rationnels (par exemple, la troisième loi de Kepler où $T \propto R^{3/2}$, ou les dimensions fractionnaires en mécanique de la turbulence).

Définition 1.1 (Espace Vectoriel Dimensionnel). L'ensemble \mathfrak{D} est muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des nombres rationnels \mathbb{Q} .

- L'addition vectorielle correspond à la multiplication des dimensions : $\vec{A} + \vec{B} \longleftrightarrow A \cdot B$.
- La multiplication par un scalaire $q \in \mathbb{Q}$ correspond à l'exponentiation : $q \cdot \vec{A} \longleftrightarrow A^q$.
- Le vecteur nul $\vec{0}$ correspond à la dimension adimensionnelle **1**.

Le choix du corps \mathbb{Q} est dicté par la nature des lois physiques classiques et quantiques connues. Bien que l'on puisse mathématiquement étendre ce corps à \mathbb{R} , l'interprétation physique d'une dimension irrationnelle (par exemple L^π) reste absente des théories physiques standard, à l'exception de certains modèles de géométrie fractale où la dimension de Hausdorff est un réel.

1.2.3 Base canonique et dimensionnalité finie

L'espace vectoriel \mathfrak{D} étant de dimension finie, il admet une base. Un système d'unités cohérent repose sur le choix d'une telle base, appelée ensemble des grandeurs fondamentales.

Dans le Système International (SI), la dimension de l'espace est $N = 7$. La base canonique \mathcal{B}_{SI} est définie par les vecteurs linéairement indépendants suivants :

$$\mathcal{B}_{SI} = \{L, M, T, I, \Theta, N, J\} \tag{1.4}$$

où L est la longueur, M la masse, T le temps, I le courant électrique, Θ la température thermodynamique, N la quantité de matière et J l'intensité lumineuse.

Tout élément $D \in \mathfrak{D}$ s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire de ces vecteurs de base :

$$D = L^{\alpha_L} M^{\alpha_M} T^{\alpha_T} I^{\alpha_I} \Theta^{\alpha_\Theta} N^{\alpha_N} J^{\alpha_J} \quad (1.5)$$

où les exposants $(\alpha_k) \in \mathbb{Q}^7$ sont les coordonnées du vecteur dimension dans la base \mathcal{B}_{SI} . Cette représentation permet d'associer à toute grandeur physique un vecteur colonne dans \mathbb{Q}^7 . Par exemple, la dimension de la force, $[F] = MLT^{-2}$, est représentée par le vecteur $(1, 1, -2, 0, 0, 0, 0)^T$.

1.2.4 Raffinement de la base : Analyse dimensionnelle orientée

La base canonique à 7 dimensions s'avère parfois insuffisante pour distinguer des grandeurs physiquement distinctes mais dimensionnellement identiques dans le formalisme standard. L'exemple classique est la confusion dimensionnelle entre l'énergie (Travail) et le moment d'une force (Couple), tous deux de dimension ML^2T^{-2} .

Pour lever ces dégénérescences, il est possible d'étendre la base par une analyse dimensionnelle orientée, telle que proposée par Siano et Huntley. Cette approche consiste à vectoriser la dimension de longueur L en trois composantes orthogonales L_x, L_y, L_z .

Exemple 1.1 (Distinction Énergie-Couple). Dans un repère cartésien :

- Le travail W est le produit scalaire d'une force et d'un déplacement. Si la force est selon x et le déplacement selon x , la dimension est $ML_x T^{-2} \cdot L_x = ML_x^2 T^{-2}$.
- Le couple τ est le produit vectoriel d'un rayon et d'une force. Pour un bras de levier selon x et une force selon y , la dimension est $L_x \cdot (ML_y T^{-2}) = ML_x L_y T^{-2}$.

Dans cet espace vectoriel raffiné, les vecteurs dimensionnels de l'énergie et du couple sont linéairement indépendants, ce qui permet de détecter des incohérences d'orientation dans les équations physiques que l'analyse dimensionnelle scalaire standard ne pourrait révéler. Cette extension démontre que la dimensionnalité de l'espace \mathfrak{D} n'est pas un absolu physique, mais dépend du degré de raffinement de la modélisation géométrique sous-jacente.

1.3 Algèbre des opérateurs physiques

L'espace des grandeurs physiques \mathcal{P} n'est pas simplement un ensemble de stockage ; il est le support d'opérations mathématiques qui reflètent les interactions physiques. Cependant, contrairement aux scalaires purs, les grandeurs physiques sont soumises à des règles de composition strictes. Cette section formalise les opérateurs admissibles sur \mathcal{P} , définissant ce qui constitue une équation physiquement sensée (physically meaningful).

1.3.1 Opérations internes admissibles

Soit f une fonction mathématique définie sur le corps des scalaires \mathbb{F} . L'extension de f à l'espace des grandeurs physiques \mathcal{P} n'est pas triviale. L'analyse par séries de Taylor permet de discriminer les opérations valides.

Considérons une fonction analytique $f(x)$ développable en série entière au voisinage de 0 :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (1.6)$$

Si l'argument x est une grandeur physique de dimension $D \neq \mathbf{1}$, alors le terme x^n possède la dimension D^n . L'addition de termes ayant des dimensions différentes (D^0, D^1, D^2, \dots) est indéfinie dans l'algèbre des grandeurs physiques (violation de l'homogénéité).

Propriété 1.2 (Principe de l'Argument Adimensionnel). *Les fonctions transcendantes (exponentielle, logarithme, fonctions trigonométriques, hyperboliques, etc.) ne sont définies sur \mathcal{P} que si leur argument est de dimension $\mathbf{1}$ (adimensionnel).*

Par conséquent, les opérations admissibles se classent en deux catégories :

— **Opérations linéaires et multiplicatives :**

- *Addition/Soustraction* : Définie sur le sous-espace diagonal $\{(A, B) \in \mathcal{P}^2 \mid [A] = [B]\}$. La dimension du résultat est conservée.
- *Multiplication/Division* : Définie sur \mathcal{P}^2 . Si $Z = X \cdot Y$, alors $[Z] = [X] + [Y]$ (en notation vectorielle additive).

— **Opérations de puissance :**

- L'élévation à une puissance λ est valide si $\lambda \in \mathbb{Q}$. Si $Y = X^\lambda$, alors $[Y] = \lambda[X]$.

Remarque 1.1. Il existe des relations empiriques en ingénierie (dites "formules de techniciens") qui semblent violer ces règles (ex : $P = 0.5 \cdot V^2 \cdot A$). Ces formules contiennent en réalité des constantes cachées portant les dimensions nécessaires pour rétablir l'homogénéité, rendant l'équation dépendante d'un système d'unités spécifique.

1.3.2 Le statut particulier des angles : radian, stéradian et analyse de l'algèbre vectorielle

Dans le Système International, les unités d'angle plan (radian) et d'angle solide (stéradian) sont définies comme des unités dérivées sans dimension.

$$1 \text{ rad} = 1 \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1, \quad 1 \text{ sr} = 1 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^2} = 1 \quad (1.7)$$

Cette définition, bien que cohérente géométriquement, pose des problèmes d'ambiguïté en physique dynamique. Par exemple, la pulsation ω (rad/s) et la fréquence f (Hz ou cycle/s) partagent la dimension T^{-1} , bien qu'elles diffèrent physiquement d'un facteur 2π .

Une approche rigoureuse consiste à traiter les angles non comme des scalaires purs, mais comme des grandeurs orientées ou auxiliaires. On peut introduire une dimension angulaire \mathcal{A} dans l'espace \mathfrak{D} , orthogonale aux dimensions de base.

- Longueur d'arc s : dimension L .
- Rayon r : dimension L .
- Angle $\theta = s/r$: dimension $LL^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ (au lieu de $\mathbf{1}$).

Cette distinction permet de différencier le couple (Force \times distance \perp , dimension $ML^2T^{-2}\mathcal{A}^{-1}$) du travail (Force \cdot distance \parallel , dimension ML^2T^{-2}).

En algèbre vectorielle, le produit vectoriel induit une dimension angulaire implicite. La norme du produit vectoriel $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = uv \sin(\theta)$ fait intervenir le sinus, qui nécessite un argument angulaire. Le maintien explicite du radian dans les calculs intermédiaires permet de prévenir les erreurs de facteur 2π fréquentes en électromagnétisme et en mécanique vibratoire.

1.3.3 Typage fort et validation formelle : parallèle avec la théorie des types

La structure algébrique des grandeurs physiques présente une analogie directe avec la théorie des types en informatique théorique. Dans ce cadre, une dimension physique agit comme un type de données abstrait.

Définition 1.2 (Système de Types Dimensionnel). Un système de grandeurs physiques peut être modélisé comme un système de typage fort où :

- Chaque vecteur de la base dimensionnelle correspond à un type primitif.
- Les opérations de multiplication et de division correspondent à des constructeurs de types produits.
- L'opération d'addition exige une équivalence stricte des types.

L'analyse dimensionnelle devient alors une forme de vérification statique de type (static type checking). Une équation physiquement incorrecte correspond à une erreur de compilation dans un langage typé.

Soit l'expression $E = a + b$.

- En programmation non typée ou faiblement typée, si a et b sont des réels (float), l'opération réussit numériquement, quel que soit le sens physique.
- Dans un formalisme typé dimensionnellement, le compilateur (ou le vérificateur formel) infère les types $\tau(a)$ et $\tau(b)$. L'expression est valide si et seulement si $\tau(a) \equiv \tau(b)$.

Cette approche est implémentée dans les bibliothèques modernes de calcul scientifique (telles que `Boost.Units` ou `mp-units` en C++), qui utilisent la métaprogrammation pour encoder les vecteurs de l'espace \mathfrak{D} dans le système de types du langage. Cela garantit l'invariance dimensionnelle des algorithmes sans surcoût à l'exécution, car la vérification est effectuée intégralement lors de la compilation. L'algèbre des opérateurs physiques devient ainsi non seulement un outil théorique de dérivation, mais un mécanisme de robustesse logicielle.

Chapitre 2

Analyse Dimensionnelle et Invariances

2.1 Théorèmes fondamentaux

L'analyse dimensionnelle, loin de se limiter à une simple vérification de cohérence, constitue une branche de la physique mathématique régie par des théorèmes d'invariance et de symétrie. Ces théorèmes permettent d'extraire la structure fonctionnelle des lois physiques à partir de la seule connaissance des symétries du problème, réduisant ainsi drastiquement l'espace des phases à explorer. Cette section détaille les fondements théoriques de cette réduction, en s'appuyant sur l'algèbre linéaire et l'analyse multivariée.

2.1.1 Le théorème de Buckingham (Théorème Pi) : formulation matricielle et noyau

Le théorème π , énoncé par Edgar Buckingham en 1914 [6], formalise la réduction du nombre de variables indépendantes dans un problème physique invariant par changement d'échelle. Bien que souvent présenté de manière empirique, ce théorème est une conséquence directe du théorème du rang en algèbre linéaire appliqué à l'espace vectoriel des dimensions \mathfrak{D} .

Considérons un système physique décrit par n grandeurs q_1, \dots, q_n , dont les dimensions s'expriment dans une base de k dimensions fondamentales $\{e_1, \dots, e_k\}$. Soit A la matrice dimensionnelle de taille $k \times n$, définie sur le corps \mathbb{Q} , telle que l'élément a_{ij} correspond à l'exposant de la i -ème dimension fondamentale dans la dimension de la grandeur q_j .

$$[q_j] = \prod_{i=1}^k e_i^{a_{ij}}$$

Un monôme formé par ces grandeurs s'écrit $\pi = q_1^{\lambda_1} q_2^{\lambda_2} \dots q_n^{\lambda_n}$. La dimension de ce monôme est donnée par :

$$[\pi] = \prod_{j=1}^n [q_j]^{\lambda_j} = \prod_{j=1}^n \left(\prod_{i=1}^k e_i^{a_{ij}} \right)^{\lambda_j} = \prod_{i=1}^k e_i^{\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} \lambda_j \right)}$$

Pour que π soit sans dimension (un nombre pur), il faut que l'exposant de chaque dimension fondamentale soit nul. Cela se traduit par le système linéaire homogène :

$$A\lambda = \mathbf{0}$$

où $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)^T$ est le vecteur des exposants.

L'espace des solutions est le noyau de la matrice A , noté $\ker(A)$. D'après le théorème du rang, la dimension de ce sous-espace vectoriel est donnée par :

$$p = \dim(\ker(A)) = n - \text{rang}(A)$$

Le nombre p correspond au nombre de groupements adimensionnels indépendants que l'on peut former. Le rang de la matrice dimensionnelle, noté $r = \text{rang}(A)$, est au plus égal à k (nombre de dimensions de base). Cependant, il arrive que $r < k$ si les dimensions fondamentales n'interviennent que par des combinaisons fixes.

Théorème 2.1 (Théorème π de Buckingham). *Soit une relation physique physiquement complète $f(q_1, \dots, q_n) = 0$. Si la matrice dimensionnelle associée est de rang r , alors il existe une base de $p = n - r$ invariants adimensionnels $\{\pi_1, \dots, \pi_p\}$ telle que la relation physique peut s'écrire sous la forme :*

$$F(\pi_1, \dots, \pi_p) = 0$$

La construction des invariants π_j correspond au choix d'une base pour $\ker(A)$. Ce choix n'est pas unique : toute combinaison linéaire des vecteurs de base du noyau génère un nouvel ensemble d'invariants valides. Du point de vue physique, cela signifie que si π_1 et π_2 sont des nombres sans dimension caractéristiques du système (par exemple le nombre de Reynolds et le nombre de Mach), alors $\pi_3 = \pi_1 \pi_2^{-1}$ l'est tout autant. La sélection des "meilleurs" invariants dépend de considérations physiques (séparation d'échelles, conditions aux limites) et non plus purement algébriques.

2.1.2 Théorème d'Euler sur les fonctions homogènes et conséquences thermodynamiques

L'analyse dimensionnelle est intimement liée à la notion d'homogénéité des fonctions. Une fonction physique est dite homogène si un changement d'échelle de ses arguments entraîne un changement d'échelle prédictible de sa valeur.

Définition 2.1 (Fonction homogène généralisée). Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite homogène de degré k par rapport à un ensemble de facteurs d'échelle $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ si :

$$f(\lambda^{\alpha_1} x_1, \dots, \lambda^{\alpha_n} x_n) = \lambda^k f(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout $\lambda > 0$.

Le théorème d'Euler fournit une relation différentielle pour ces fonctions, essentielle en thermodynamique.

Théorème 2.2 (Théorème d'Euler). *Si f est une fonction différentiable et homogène de degré k (avec $\alpha_i = 1$), alors elle satisfait l'identité :*

$$\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = k f(x_1, \dots, x_n)$$

Application à la Thermodynamique : Relation de Gibbs-Duhem

La thermodynamique classique distingue les grandeurs extensives (qui dépendent de la taille du système) et les grandeurs intensives (indépendantes de la taille). L'énergie interne U est une grandeur extensive. Elle dépend de l'entropie S , du volume V et du nombre de

particules N_j , qui sont toutes des grandeurs extensives. Mathématiquement, $U(S, V, N_j)$ est une fonction homogène de degré 1 :

$$U(\lambda S, \lambda V, \lambda N_j) = \lambda U(S, V, N_j)$$

En appliquant le théorème d'Euler avec $k = 1$, on obtient :

$$S \left(\frac{\partial U}{\partial S} \right)_{V,N} + V \left(\frac{\partial U}{\partial V} \right)_{S,N} + \sum_j N_j \left(\frac{\partial U}{\partial N_j} \right)_{S,V} = U$$

En identifiant les dérivées partielles aux grandeurs intensives thermodynamiques (Température T , Pression $-P$, Potentiel chimique μ_j), on retrouve la forme intégrée de l'énergie interne :

$$TS - PV + \sum_j \mu_j N_j = U$$

En différenciant cette expression et en la comparant à la différentielle fondamentale $dU = TdS - PdV + \sum \mu_j dN_j$, on aboutit à la relation de Gibbs-Duhem :

$$SdT - VdP + \sum_j N_j d\mu_j = 0$$

Cette relation, pure conséquence de l'invariance d'échelle (homogénéité dimensionnelle), impose une contrainte forte sur les variations des grandeurs intensives. Elle démontre que les degrés de liberté intensifs d'un système thermodynamique ne sont pas indépendants, un résultat fondamental déduit sans hypothèse sur la nature microscopique de la matière.

2.1.3 Matroïdes et algorithmes de sélection automatique des variables sans dimension

La mise en œuvre algorithmique du théorème π nécessite de sélectionner un ensemble de "variables de répétition" qui formeront la base de la réduction dimensionnelle. Ce problème de sélection correspond à l'identification d'une base dans l'espace colonnes de la matrice dimensionnelle A . La théorie des matroïdes offre le cadre mathématique abstrait pour traiter cette question de dépendance linéaire, particulièrement utile pour l'automatisation du calcul scientifique symbolique.

Un matroïde \mathcal{M} est un couple (E, \mathcal{I}) , où E est un ensemble fini (ici l'ensemble des grandeurs physiques $\{q_1, \dots, q_n\}$) et \mathcal{I} est une famille de sous-ensembles de E appelés "indépendants". Dans le contexte dimensionnel, un sous-ensemble de grandeurs est indépendant si les colonnes correspondantes dans la matrice A sont linéairement indépendantes sur \mathbb{Q} .

Définition 2.2 (Matroïde Dimensionnel). Soit A la matrice dimensionnelle $k \times n$. Le matroïde vectoriel associé $\mathcal{M}(A)$ est défini sur l'ensemble des colonnes de A .

- Une *base* du matroïde est un sous-ensemble maximal de colonnes linéairement indépendantes. Sa cardinalité est égale au rang r de la matrice.
- Un *circuit* du matroïde est un sous-ensemble dépendant minimal.

La notion de circuit est ici cruciale : un circuit correspond à un produit adimensionnel minimal π . Si l'on retire un élément quelconque d'un circuit, l'ensemble devient dimensionnellement indépendant (il n'est plus sans dimension).

L'algorithme de sélection automatique pour construire les groupes π procède généralement comme suit : 1. Calcul du rang r de la matrice A (par décomposition en valeurs

singulières ou élimination de Gauss-Jordan). 2. Identification d'une base $B \subset \{q_1, \dots, q_n\}$ de cardinalité r . Les éléments de B sont les "variables de répétition". 3. Pour chaque variable restante $q_j \notin B$, il existe un circuit unique dans $B \cup \{q_j\}$. Ce circuit définit l'invariant π_j .

Cependant, toutes les bases ne se valent pas numériquement ou physiquement. Par exemple, en mécanique des fluides, on préfère souvent choisir $\{\rho, v, L\}$ (densité, vitesse, longueur) comme variables de répétition plutôt que $\{\mu, v, L\}$, car ρ est une propriété intrinsèque plus fondamentale dans les écoulements inertiels. L'approche par matroïdes permet d'implémenter des algorithmes gloutons ("greedy algorithms") pondérés. En assignant un "coût" à chaque grandeur (par exemple, sa précision de mesure, ou sa complexité conceptuelle), on peut rechercher la base de coût minimal, garantissant ainsi que les nombres adimensionnels générés soient construits à partir des grandeurs les plus robustes ou les plus pertinentes. Cette formalisation permet de passer d'une application artisanale du théorème de Buckingham à une dérivation systématique et optimisée, indispensable dans les logiciels de modélisation physique modernes.

2.2 Symétries et Transformations

L'analyse dimensionnelle peut être interprétée géométriquement comme l'étude des invariances d'un système physique sous l'action de groupes de transformations spécifiques. La distinction fondamentale entre la nature de l'observateur (le système de mesure) et la nature de l'objet observé (le phénomène physique) conduit à définir deux classes de transformations : passives et actives. Cette dichotomie, centrale en théorie des champs et en relativité, trouve ici une application directe dans la formalisation des lois d'échelle.

2.2.1 Transformations passives et actives

La mesure d'une grandeur physique est une projection de l'état d'un système sur une base de référence. La modification de cette mesure peut provenir soit d'un changement de la base (transformation passive), soit d'une modification de l'état du système lui-même (transformation active).

Transformations passives : Changement de base dimensionnelle

Une transformation passive correspond à un changement de système d'unités. Le phénomène physique reste inchangé ; seule sa description numérique est altérée. Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ une base de l'espace vectoriel des dimensions \mathfrak{D} . Une nouvelle base $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_N\}$ est définie par la matrice de transition $P \in GL_N(\mathbb{Q})$ telle que :

$$\ln(e'_j) = \sum_{i=1}^N P_{ij} \ln(e_i) \quad (2.1)$$

Considérons une grandeur physique $Q = \{Q\}_{\mathcal{B}}[Q]_{\mathcal{B}}$. L'invariance de la grandeur physique sous le changement de base s'écrit :

$$\{Q\}_{\mathcal{B}} \prod_{i=1}^N e_i^{\alpha_i} = \{Q\}_{\mathcal{B}'} \prod_{j=1}^N (e'_j)^{\alpha'_j} \quad (2.2)$$

Les exposants dimensionnels (α_i) se transforment de manière contravariante, tandis que les valeurs numériques se transforment de manière covariante (ou inversement, selon la

convention). Si l'on effectue une dilatation des unités fondamentales telle que $e'_i = \lambda_i e_i$, alors la valeur numérique de toute grandeur Q de dimension $D = \prod e_i^{\alpha_i}$ devient :

$$\{Q\}' = \{Q\} \cdot \prod_{i=1}^N \lambda_i^{-\alpha_i} \quad (2.3)$$

Le principe de covariance dimensionnelle stipule que *toute équation physique valide doit conserver sa forme fonctionnelle sous une transformation passive des unités*. Ce principe est équivalent à la condition d'homogénéité dimensionnelle. Si une équation physique $f(q_1, \dots, q_n) = 0$ change de forme lors d'un changement d'unités (par exemple par l'apparition de facteurs numériques dépendant des λ_i), alors cette équation n'est pas fondamentale mais empirique, dépendant d'un choix arbitraire d'étaulons.

Transformations actives : Similitude physique

Une transformation active modifie le système physique lui-même, tout en conservant le système d'unités fixe. Cela correspond à un changement d'échelle (scaling) de l'objet d'étude : on compare par exemple l'écoulement de l'air autour d'une maquette en soufflerie à celui autour d'un avion réel.

Soit un système décrit par un champ $u(\mathbf{x}, t)$. Une transformation de dilatation (ou homothétie) est définie par :

$$\mathbf{x} \rightarrow \lambda_L \mathbf{x}, \quad t \rightarrow \lambda_T t, \quad u \rightarrow \lambda_u u \quad (2.4)$$

Deux systèmes sont dits *semblables* s'il existe un ensemble de facteurs d'échelle (λ_k) tel que l'équation régissant le système reste invariante. Pour un phénomène régi par une loi $F(q_1, \dots, q_n) = 0$, la similitude implique que si le vecteur d'état (q_1, \dots, q_n) est une solution, alors le vecteur transformé (q'_1, \dots, q'_n) est également solution.

Le lien entre les transformations passives et actives réside dans le fait que les lois physiques fondamentales ne possèdent pas d'échelle absolue intrinsèque (à l'exception notable des échelles de Planck en gravité quantique). Par conséquent, dilater l'objet d'un facteur λ (actif) est formellement équivalent à contracter l'unité de longueur d'un facteur $1/\lambda$ (passif), du point de vue des nombres adimensionnels π_j . C'est cette dualité qui justifie l'utilisation de modèles réduits en ingénierie : l'égalité des nombres de Reynolds, Froude ou Mach entre le modèle et le prototype garantit que la transformation active (changement de taille) est compensée par une modification des paramètres dynamiques (vitesse, viscosité), préservant ainsi la physique du phénomène.

2.2.2 Invariance d'échelle et groupes de Lie

L'ensemble des transformations de dilatation forme un groupe de Lie continu. L'analyse de ce groupe permet de systematiser la recherche de solutions autosimilaires (self-similar solutions), qui jouent un rôle prépondérant dans l'étude des phénomènes non linéaires et des comportements asymptotiques intermédiaires [2].

Groupe des dilatations à un paramètre

Considérons un groupe de transformations T_λ dépendant d'un paramètre réel continu $\lambda > 0$, agissant sur l'espace des variables (x, y, u) :

$$T_\lambda : \begin{cases} x' = e^{\alpha\lambda} x \\ y' = e^{\beta\lambda} y \\ u' = e^{\gamma\lambda} u \end{cases} \quad (2.5)$$

Les exposants α, β, γ sont les poids conformes de la transformation. Une équation différentielle $\mathcal{E}(x, y, u, \partial u, \dots) = 0$ est dite invariante par ce groupe si T_λ transforme toute solution en une autre solution.

L'infinitésimal de cette transformation (pour $\lambda \rightarrow 0$, ou équivalement au voisinage de l'identité $\epsilon \ll 1$) est généré par le champ de vecteurs tangent (générateur infinitésimal) :

$$X = \alpha x \frac{\partial}{\partial x} + \beta y \frac{\partial}{\partial y} + \gamma u \frac{\partial}{\partial u} \quad (2.6)$$

L'invariance de la fonction $u(x, y)$ sous ce groupe implique que la solution ne dépend pas arbitrairement des variables, mais s'organise selon les caractéristiques du groupe.

Solutions autosimilaires et réduction de variables

Si un problème aux limites est invariant sous le groupe T_λ , alors on peut rechercher des solutions qui sont elles-mêmes invariantes (points fixes du groupe modulo une renormalisation). Ces solutions, dites autosimilaires, prennent la forme :

$$u(x, y) = x^{\gamma/\alpha} F\left(\frac{y}{x^{\beta/\alpha}}\right) \quad (2.7)$$

On pose la variable de similitude $\eta = y/x^{\beta/\alpha}$. La fonction $u(x, y)$, initialement fonction de deux variables, est réduite à une fonction $F(\eta)$ d'une seule variable.

Cette technique est fondamentale en physique mathématique. Elle transforme des équations aux dérivées partielles (EDP) en équations différentielles ordinaires (EDO), beaucoup plus simples à résoudre.

Exemple 2.1 (Équation de la chaleur). L'équation de diffusion $\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ est invariante sous la transformation $x \rightarrow \lambda x$, $t \rightarrow \lambda^2 t$, $u \rightarrow u$. La variable de similitude est $\eta = x/\sqrt{t}$. On retrouve la solution fondamentale gaussienne (noyau de la chaleur) $u(x, t) \propto \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4Dt}$.

L'analyse par groupe de Lie démontre que l'analyse dimensionnelle classique n'est qu'un cas particulier où les groupes de transformation sont évidents. Dans des cas plus complexes (similitude de seconde espèce décrite par Barenblatt), les exposants de similitude α, β ne sont pas déterminés par les simples dimensions physiques (analyse dimensionnelle naïve), mais par la résolution d'un problème aux valeurs propres non linéaire associé à la structure asymptotique de la solution. Ces exposants sont alors appelés *dimensions anomalies*.

2.2.3 Le théorème de Noether et la conservation associée à la symétrie de dilatation

Le théorème de Noether établit une correspondance biunivoque entre les symétries continues d'une action physique et les lois de conservation. Si l'invariance par translation spatiale implique la conservation de la quantité de mouvement, et l'invariance temporelle celle de l'énergie, quelle est la grandeur conservée associée à l'invariance d'échelle (dilatation) ?

Action et transformation infinitésimale

Soit un système de champs $\phi(x)$ décrit par une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$. L'action est $S = \int d^4x \mathcal{L}$. Considérons la transformation infinitésimale de dilatation (ou transformation conforme globale) :

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = (1 + \epsilon)x^\mu \quad (2.8)$$

Sous cette transformation, le champ ϕ se transforme selon sa dimension d'échelle (ou dimension conforme) Δ :

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = (1 - \epsilon\Delta)\phi(x) \quad (2.9)$$

La variation fonctionnelle du champ est $\delta\phi = \phi'(x) - \phi(x) = -\epsilon(\Delta + x^\nu\partial_\nu)\phi$.

Le courant de dilatation

D'après le premier théorème de Noether, le courant conservé associé J_D^μ (courant de dilatation) est construit à partir du tenseur énergie-impulsion canonique $T^{\mu\nu}$. L'expression explicite de ce courant est :

$$J_D^\mu = T^{\mu\nu}x_\nu + V^\mu \quad (2.10)$$

où V^μ est un terme viriel dépendant de la structure interne du champ (souvent nul pour les théories scalaires simples). La conservation de ce courant ($\partial_\mu J_D^\mu = 0$) implique :

$$\partial_\mu(T^{\mu\nu}x_\nu) = (\partial_\mu T^{\mu\nu})x_\nu + T^{\mu\nu}(\partial_\mu x_\nu) = 0 \quad (2.11)$$

En supposant la conservation de l'énergie-impulsion ($\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$) et en utilisant le fait que $\partial_\mu x_\nu = \delta_{\mu\nu}$ (dans un espace plat euclidien ou minkowskien), la condition de conservation devient :

$$T_\mu^\mu = 0 \quad (2.12)$$

Ainsi, l'invariance d'échelle d'une théorie physique classique implique que la trace de son tenseur énergie-impulsion est nulle.

Signification physique et rupture de symétrie

Cette condition de trace nulle est extrêmement restrictive. En électromagnétisme classique (équations de Maxwell dans le vide), le tenseur énergie-impulsion est effectivement de trace nulle, ce qui reflète l'absence d'échelle de longueur intrinsèque (le photon est sans masse).

Cependant, dans la plupart des systèmes physiques, l'invariance d'échelle est brisée.

1. **Brisure explicite** : L'introduction d'une masse m dans le Lagrangien introduit une longueur caractéristique (longueur d'onde de Compton $\lambda_c = h/mc$). Dans ce cas, $T_\mu^\mu \propto m^2\phi^2 \neq 0$. L'analyse dimensionnelle reste valide, mais la similitude simple disparaît : le système dépend du rapport L/λ_c .
2. **Brisure quantique (Anomalie de trace)** : Même pour une théorie classiquement invariante d'échelle (masse nulle), la quantification peut introduire une échelle via la procédure de régularisation et renormalisation (échelle μ de renormalisation). La trace du tenseur énergie-impulsion n'est plus nulle mais proportionnelle à la fonction bêta du groupe de renormalisation :

$$\langle T_\mu^\mu \rangle \propto \beta(g)\mathcal{O} \quad (2.13)$$

Le théorème de Noether appliqué aux symétries de dilatation révèle ainsi une connexion profonde : l'analyse dimensionnelle n'est pas seulement un outil de vérification d'unités, mais une sonde de la structure conforme de la théorie. Un système parfaitement invariant d'échelle se comporte comme un fluide sans masse, critique, situé à une transition de phase continue.

2.3 Au-delà de l'analyse classique

L'analyse dimensionnelle standard, fondée sur le théorème de Buckingham, repose sur une hypothèse implicite de régularité : on suppose que lorsque les paramètres adimensionnels tendent vers zéro ou l'infini, la fonction physique atteint une limite finie ou suit un comportement de loi de puissance dont l'exposant est déterminé par de simples considérations géométriques. Cependant, la physique moderne, notamment la théorie quantique des champs et la physique statistique des transitions de phase, a mis en évidence des situations où cette "analyse dimensionnelle naïve" échoue. C'est le domaine des dimensions anomalies et de la régularisation dimensionnelle, où la dimension devient une variable continue, voire complexe.

2.3.1 Dimensionnalité anomale et groupe de renormalisation

En analyse dimensionnelle classique, les dimensions (exposants critiques) sont des nombres rationnels simples (ex : 1/2, 3/4) déduits de l'algèbre linéaire des unités. On parle de "dimensions canoniques" ou "d'ingénierie". Cependant, au voisinage d'un point critique (transition de phase du second ordre) ou dans les régimes de turbulence développée, les lois d'échelle observées expérimentalement dévient de ces prédictions.

Autosimilitude de seconde espèce

Barenblatt [2] a formalisé cette distinction en classifiant les types de similitude. Soit une relation physique de la forme $y = F(x, \epsilon)$, où y est la grandeur d'intérêt, x la variable principale et ϵ un paramètre adimensionnel petit.

1. **Similitude de première espèce (complète)** : La limite $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(x, \epsilon)$ existe et est non nulle. La fonction ne dépend plus de ϵ . L'analyse dimensionnelle classique s'applique.
2. **Similitude de seconde espèce (incomplète)** : La fonction n'admet pas de limite finie mais suit un comportement asymptotique de la forme :

$$F(x, \epsilon) \sim \epsilon^\alpha \Phi(x) \quad \text{quand } \epsilon \rightarrow 0 \tag{2.14}$$

Le paramètre α est appelé *exposant anomal*. Contrairement aux exposants canoniques, α ne peut pas être déterminé par l'analyse dimensionnelle seule car il dépend des détails microscopiques ou non linéaires du système qui disparaissent dans l'approximation macroscopique, mais dont la trace subsiste via cet exposant. L'exposant α est souvent irrationnel.

L'approche du Groupe de Renormalisation (RG)

L'origine physique des dimensions anomalies a été élucidée par les travaux de Kenneth Wilson sur le groupe de renormalisation [32]. Dans les systèmes critiques, les fluctuations se produisent à toutes les échelles de longueur, rendant impossible la séparation des échelles sur laquelle repose l'analyse dimensionnelle simple.

Considérons une fonction de corrélation à deux points $G(r)$ en physique statistique. L'analyse dimensionnelle naïve prédit $G(r) \sim r^{-(d-2+\eta_{canon})}$. La théorie du RG montre que le comportement réel est :

$$G(r) \sim r^{-(d-2+\eta)} \tag{2.15}$$

où η est la dimension anomale du champ. Le formalisme du RG traite le changement d'échelle comme une transformation dynamique dans l'espace des paramètres du Hamiltonien (les constantes de couplage).

$$\frac{dg(\mu)}{d \ln \mu} = \beta(g) \quad (2.16)$$

Ici, μ est une échelle d'énergie arbitraire introduite pour définir la théorie (point de renormalisation). La dimension anomale $\gamma(g)$ apparaît comme une correction à la dimension d'échelle canonique D_0 :

$$D_{\text{scaling}} = D_0 + \gamma(g^*) \quad (2.17)$$

où g^* est un point fixe du flux de renormalisation ($\beta(g^*) = 0$). L'existence de dimensions anomalies signifie que les grandeurs physiques acquièrent une dépendance d'échelle non triviale due aux interactions quantiques ou statistiques (nuage de particules virtuelles, cascades turbulentes).

2.3.2 Régularisation dimensionnelle en théorie des champs

L'une des applications les plus abstraites et puissantes de l'algèbre des unités est la régularisation dimensionnelle ("DimReg"), introduite par 't Hooft et Veltman [1]. Face aux intégrales divergentes (infinies) qui apparaissent dans les calculs de boucles en théorie quantique des champs, la régularisation dimensionnelle propose de modifier la dimension de l'espace-temps lui-même pour rendre les intégrales finies.

Prolongement analytique de la dimension

Au lieu de travailler dans l'espace-temps physique de dimension $D = 4$, on considère l'intégrale de Feynman générique comme une fonction de D , vue comme une variable complexe. L'intégrale type à une boucle (euclidienne) s'écrit :

$$I(D) = \int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{1}{(k^2 + m^2)^2} \quad (2.18)$$

Cette intégrale diverge logarithmiquement pour $D = 4$. En utilisant les coordonnées hypersphériques en D dimensions et les propriétés de la fonction Euler Gamma $\Gamma(z)$, on obtient un résultat analytique exact pour D quelconque :

$$I(D) = \frac{1}{(4\pi)^{D/2}} \frac{\Gamma(2 - D/2)}{\Gamma(2)} (m^2)^{D/2 - 2} \quad (2.19)$$

La fonction $\Gamma(z)$ possède des pôles simples pour $z = 0, -1, -2, \dots$. Ici, le pôle apparaît pour $2 - D/2 = 0 \Rightarrow D = 4$.

Le paramètre ϵ et la transmutation dimensionnelle

On pose $D = 4 - 2\epsilon$, où ϵ est un petit paramètre complexe. Le développement de la solution autour de $\epsilon = 0$ donne :

$$I(4 - 2\epsilon) \propto \frac{1}{\epsilon} - \gamma_E + \ln(4\pi) - \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (2.20)$$

Trois observations fondamentales émergent de ce résultat :

- Isolation des divergences** : L'infini est isolé sous la forme du pôle $1/\epsilon$. Lors de la renormalisation, ce terme sera soustrait par un contre-terme dans le Lagrangien.

2. **Maintien des symétries :** Contrairement à l'introduction d'une coupure brutale (cutoff Λ) qui viole souvent l'invariance de jauge, la modification de la dimension D préserve les identités de Ward et l'invariance de Lorentz, car l'opération est effectuée sur l'algèbre des vecteurs et non sur les bornes d'intégration.
3. **Nécessité d'une échelle arbitraire μ :** Pour maintenir l'homogénéité dimensionnelle de la constante de couplage dans l'espace à D dimensions, on doit introduire une échelle de masse arbitraire μ (mass scale).

$$g_D = \mu^\epsilon g_{\text{sans_dim}}$$

La présence de ce μ dans le terme logarithmique final $\ln(m^2/\mu^2)$ est la trace mathématique de l'anomalie d'échelle (trace anomaly) discutée dans la section précédente. C'est le phénomène de *transmutation dimensionnelle* : une théorie sans échelle de masse (invariante conforme classique) génère une échelle de masse par le processus de quantification.

La régularisation dimensionnelle démontre que la dimensionnalité de l'espace peut être traitée comme un pur paramètre algébrique. Ce concept a ouvert la voie aux théories de la gravité quantique (théorie des cordes) où la dimension de l'espace-temps (10, 11 ou 26) devient une prédiction dynamique de la théorie plutôt qu'un cadre préétabli.

Chapitre 3

Métrologie Fondamentale et le Système International (SI)

3.1 Historique et nécessité de la réforme

La métrologie, science de la mesure, a longtemps reposé sur une dualité entre la définition conceptuelle d'une unité et sa réalisation matérielle. Pendant plus d'un siècle, le Système International d'unités (SI) a été ancré dans le monde physique par des artefacts manufacturés, dont la stabilité et l'universalité étaient par nature imparfaites. La réforme de 2019 ne constitue pas une simple mise à jour des valeurs numériques, mais une rupture épistémologique majeure : le passage d'un système défini par des objets à un système défini par les lois de la physique.

3.1.1 Les limites des artefacts matériels (le Grand K)

Depuis la première Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM) en 1889, l'unité de masse, le kilogramme, était définie par la masse d'un cylindre en alliage de platine (90%) et d'iridium (10%), conservé au pavillon de Breteuil à Sèvres, en France. Cet objet, surnommé le « Grand K » ou Prototype International du Kilogramme (IPK), constituait l'unique point de référence mondial. Par définition, sa masse était exactement de 1 kg, et son incertitude était nulle.

Cette définition artefactuelle présentait une vulnérabilité critique : toute variation de la masse du prototype entraînait *de facto* une variation de la masse de l'unité elle-même. Or, la matière interagit inévitablement avec son environnement. Malgré des conditions de conservation strictes (sous triple cloche de verre, atmosphère contrôlée), le prototype était sujet à des processus physico-chimiques complexes :

- **Adsorption de surface** : Accumulation de couches d'hydrocarbures et de molécules d'eau à la surface du métal.
- **Dégazage** : Libération lente de gaz occlus dans la matrice métallique lors de la coulée initiale au XIX^e siècle.
- **Abrasion** : Perte de matière microscopique lors des rares procédures de nettoyage et de comparaison.

Les campagnes de vérification périodiques (environ tous les 40 ans) ont révélé une dérive systématique entre le Prototype International et ses copies officielles (les témoins). Les mesures effectuées lors de la troisième vérification périodique (1988-1992) et confirmées ultérieurement ont montré une divergence moyenne de l'ordre de 50 microgrammes (μg) sur un siècle entre le Grand K et l'ensemble des témoins [26].

Du point de vue de la physique fondamentale, cette situation était insoutenable. Si l'IPK avait perdu de la matière (ou si les témoins en avaient gagné), cela signifiait que le kilogramme « théorique » devenait plus léger. Par conséquent, toute grandeur dépendante de la masse voyait sa valeur numérique augmenter artificiellement. Cela affectait non seulement les mesures de masse, mais également, via les relations dimensionnelles, les unités de force (Newton, MLT^{-2}), d'énergie (Joule, ML^2T^{-2}) et, de manière critique, les unités électriques (Ampère, Volt) dont les définitions antérieures dépendaient de la force mécanique. La stabilité des constantes fondamentales ne pouvait être garantie par un étalon instable.

3.1.2 Évolution de la définition de la seconde et de la vitesse de la lumière

La réforme de 2019 s'inscrit dans la continuité d'un processus de « dématérialisation » des unités entamé au milieu du XXe siècle, dont l'unité de temps fut la première bénéficiaire.

Initialement définie comme une fraction du jour solaire moyen ($1/86\,400$), la seconde souffrait des irrégularités de la rotation terrestre (ralentissement séculaire dû aux marées, variations saisonnières). En 1960, la CGPM a transitoirement adopté une définition basée sur l'année tropique 1900 (Temps des Éphémérides), figeant la seconde sur une observation astronomique passée, non reproductible en temps réel.

La véritable révolution survint en 1967 avec l'avènement des horloges atomiques. La seconde fut redéfinie comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césum 133 [7]. Cette transition lie l'unité de temps à une propriété quantique invariant de la matière, indépendante des mouvements macroscopiques célestes.

Cette redéfinition de la seconde a ouvert la voie à la redéfinition du mètre en 1983. Jusqu'alors défini par un trait sur une barre de platine-iridium (puis par une longueur d'onde du Krypton 86), le mètre était une grandeur indépendante. Cependant, la précision de la mesure de la vitesse de la lumière c devenait limitée par l'incertitude sur la réalisation du mètre lui-même. La 17e CGPM a donc opéré une inversion logique fondamentale : au lieu de mesurer c à partir du mètre et de la seconde, on a fixé la valeur numérique exacte de c (299 792 458 m/s) et défini le mètre comme la distance parcourue par la lumière dans le vide en $1/299\,792\,458$ de seconde.

Cette opération a réduit le nombre de degrés de liberté du système : le mètre a perdu son statut d'unité primaire indépendante pour devenir, structurellement, une unité dérivée de la seconde via une constante fondamentale ($L = c \cdot T$). La précision de la longueur est devenue directement dépendante de la précision de la mesure du temps, qui est de plusieurs ordres de grandeur supérieure à toute autre mesure physique (incertitude relative actuelle de l'ordre de 10^{-16} pour les meilleures horloges à réseau optique).

3.1.3 Philosophie de la réforme de 2019 : fixer les invariants de la nature

La réforme entrée en vigueur le 20 mai 2019 généralise la logique appliquée au mètre en 1983 à l'ensemble des unités de base (kilogramme, ampère, kelvin, mole). L'objectif est de s'affranchir définitivement de tout artefact matériel pour fonder le système de mesure sur des constantes universelles. Cette approche réalise la vision prophétique de James Clerk Maxwell qui, dès 1870, préconisait d'utiliser les propriétés des atomes comme étalons impérissables [19].

Le principe central est celui de la *définition par constante explicite*. Dans ce formalisme, on ne décrit plus comment réaliser l'unité (mise en pratique), mais on fixe la valeur

numérique d'une constante fondamentale de la nature lorsqu'elle est exprimée dans cette unité.

1. **Lien Masse-Action (Planck)** : Pour redéfinir le kilogramme, il fallait connecter la masse macroscopique à une invariant quantique. La relation $E = h\nu$ (énergie du photon) et $E = mc^2$ (équivalence masse-énergie) permet d'établir un lien dimensionnel :

$$[h] = E \cdot T = (ML^2T^{-2}) \cdot T = ML^2T^{-1}$$

Puisque la seconde (T) et le mètre (L , via c) sont déjà définis par des invariants, fixer la valeur de la constante de Planck h revient à fixer l'unité de masse M . La réalisation pratique s'effectue alors via la balance de Kibble (ou balance du watt), qui égalise une puissance mécanique virtuelle (mgv) et une puissance électrique (UI), cette dernière étant mesurée précisément grâce aux effets quantiques (Hall et Josephson) qui dépendent de h et e .

2. **Lien Charge-Comptage (Élémentaire)** : L'ancienne définition de l'ampère, basée sur la force entre deux conducteurs infinis, était irréalisable expérimentalement avec une haute précision. La nouvelle définition fixe la charge élémentaire e . L'ampère devient simplement un flux de $1/(1.602176634 \times 10^{-19})$ charges élémentaires par seconde. Cela permet de réaliser l'ampère via des dispositifs de pompage d'électrons uniques (Single Electron Transport), découplant l'unité électrique de l'unité mécanique.
3. **Lien Température-Énergie (Boltzmann)** : Le kelvin était défini par un point particulier de phase de l'eau (le point triple). Cette définition dépendait de la pureté isotopique de l'eau. En fixant la constante de Boltzmann k_B , qui est le facteur de conversion entre température et énergie thermique ($E = k_B T$), on lie le kelvin directement au joule (et donc à h , c et $\Delta\nu_{Cs}$). La température devient une mesure de l'énergie microscopique moyenne, mesurable par thermométrie acoustique ou diélectrique primaire.

Cette réforme abolit la distinction entre les constantes fondamentales et les facteurs de conversion d'unités. Dans le SI révisé, ces constantes ne sont plus des quantités mesurables avec une incertitude expérimentale ; elles sont des nombres exacts qui définissent la géométrie de l'espace des unités. L'incertitude est transférée des constantes vers les anciens étalons : la masse du Grand K n'est plus de 1 kg exactement, mais est devenue une grandeur expérimentale à déterminer, entachée d'une incertitude de mesure de l'ordre de $10\mu\text{g}$. Le système a gagné en cohérence, en universalité et en pérennité, assurant que les mesures effectuées dans des siècles ou sur d'autres planètes resteront parfaitement comparables aux nôtres, pourvu que les lois de la physique demeurent invariantes.

3.2 La redéfinition de 2019

La révision du Système International d'unités, adoptée par la 26e Conférence Générale des Poids et Mesures (CGPM), constitue l'aboutissement d'un demi-siècle de progrès en métrologie quantique. Elle remplace la définition des unités de base par la fixation des valeurs numériques d'un ensemble de sept constantes fondamentales. Cette section analyse la structure algébrique de ce nouvel ensemble et détaille les mécanismes physiques, notamment topologiques, qui permettent de réaliser les unités avec une précision inégalée.

3.2.1 L'ensemble des sept constantes explicites

Dans le formalisme antérieur à 2019, le système était construit de manière hiérarchique : les unités de base (mètre, kilogramme, seconde...) étaient définies en premier, et les constantes fondamentales étaient des quantités mesurées expérimentalement avec une incertitude associée. Le nouveau SI inverse cette logique : les constantes sont les fondements absolus, et les unités sont déduites comme des facteurs d'échelle permettant d'exprimer ces constantes avec les valeurs exactes fixées par convention.

L'ensemble \mathcal{C}_{SI} des sept constantes de définition est choisi pour former une base génératrice de l'espace des dimensions physiques \mathfrak{D} . Les valeurs exactes sont fixées comme suit [7] :

- La fréquence de transition hyperfine du césium 133 :

$$\Delta\nu_{Cs} = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz}$$

Cette constante fixe l'échelle de temps et, par extension, l'échelle de fréquence. Dimensionnellement, $[\Delta\nu_{Cs}] = T^{-1}$.

- La vitesse de la lumière dans le vide :

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}$$

Cette constante relativiste relie l'espace et le temps. Elle fixe l'unité de longueur dès lors que la seconde est établie. Dimensionnellement, $[c] = LT^{-1}$.

- La constante de Planck :

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ J s}$$

Cette constante quantique fondamentale connecte l'énergie à la fréquence ($E = h\nu$) et la masse à l'énergie ($E = mc^2$). Elle est le pivot de la définition du kilogramme. Dimensionnellement, $[h] = ML^2T^{-1}$.

- La charge élémentaire :

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C}$$

Elle quantifie le flux électrique et définit l'ampère. Dimensionnellement, $[e] = IT$.

- La constante de Boltzmann :

$$k_B = 1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ J/K}$$

Elle agit comme un facteur de conversion entre la température thermodynamique et l'énergie microscopique. Dimensionnellement, $[k_B] = ML^2T^{-2}\Theta^{-1}$.

- La constante d'Avogadro :

$$N_A = 6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Elle définit la mole comme un nombre d'entités, découpant la quantité de matière de la masse du carbone 12. Dimensionnellement, $[N_A] = N^{-1}$.

- L'efficacité lumineuse d'un rayonnement monochromatique de fréquence 540 THz :

$$K_{cd} = 683 \text{ lm/W}$$

C'est la seule constante de nature physiologique, liant la puissance radiométrique objective à la perception visuelle humaine. Dimensionnellement, $[K_{cd}] = J(ML^2T^{-3})^{-1}$.

D'un point de vue algébrique, la cohérence du système repose sur le fait que la matrice de transition entre la base des dimensions $\{L, M, T, I, \Theta, N, J\}$ et la base des constantes $\{c, h, \Delta\nu_{Cs}, e, k_B, N_A, K_{cd}\}$ est inversible. Tout étalon primaire peut ainsi être réalisé par une expérience mettant en jeu une combinaison de ces constantes.

3.2.2 Réalisations quantiques et topologiques : Effet Hall quantique et effet Josephson

La robustesse de la redéfinition de 2019 repose sur l'existence de phénomènes quantiques macroscopiques permettant de relier les constantes h et e aux grandeurs électriques (tension et résistance) avec une exactitude absolue. Ces phénomènes exploitent des invariants topologiques de la matière condensée, rendant les mesures indépendantes des imperfections des matériaux utilisés.

L'effet Josephson et l'étalon de tension

L'effet Josephson, prédit théoriquement en 1962 [16], se manifeste lorsqu'une jonction supraconducteur-isolant-supraconducteur est soumise à une irradiation micro-onde de fréquence f . La tension continue V aux bornes de la jonction est quantifiée selon la loi :

$$V_n = n \frac{h}{2e} f \quad (3.1)$$

où n est un entier relatif représentant l'ordre de l'échelon de Shapiro. La constante de proportionnalité est l'inverse de la constante de Josephson K_J :

$$K_J = \frac{2e}{h} \approx 483\,597.9 \text{ GHz/V} \quad (3.2)$$

Avant 2019, K_J possédait une incertitude. Désormais, e et h étant fixés, K_J est une constante exacte. Cela permet de définir le Volt non plus par des piles étalons chimiques (piles Weston), mais comme la différence de potentiel générée par un effet Josephson pour une fréquence donnée. La mesure de tension se réduit à une mesure de fréquence, grandeur contrôlée avec la plus haute précision.

L'effet Hall quantique et l'étalon de résistance

L'effet Hall quantique (QHE), découvert par Klaus von Klitzing en 1980 [30], apparaît dans les gaz d'électrons bidimensionnels à basse température et sous fort champ magnétique. La résistance de Hall R_H présente des plateaux quantifiés donnés par :

$$R_H = \frac{1}{i} \frac{h}{e^2} \quad (3.3)$$

où i est un nombre entier (effet Hall quantique entier). La grandeur $R_K = h/e^2$ est la constante de von Klitzing.

$$R_K \approx 25\,812.8 \Omega \quad (3.4)$$

La quantification de R_H est d'origine topologique : elle est liée au nombre de Chern, un invariant mathématique caractérisant la structure de bande du système. Cette propriété confère à l'étalon une robustesse exceptionnelle : la valeur de résistance est indépendante de la géométrie de l'échantillon ou des impuretés du semi-conducteur, à une précision relative supérieure à 10^{-9} .

La fixation de h et e fixe exactement R_K . Ainsi, l'Ohm est réalisé directement à partir de constantes fondamentales.

La fermeture de la boucle métrologique : La balance de Kibble

La réalisation du kilogramme utilise ces deux effets quantiques via la balance de Kibble (anciennement balance du watt) [17]. Cet instrument compare une puissance mécanique $P_m = mgv$ à une puissance électrique $P_e = UI$. L'expérience se déroule en deux phases (pesée et vitesse) pour éliminer le facteur géométrique du champ magnétique. Au final, la masse m est déterminée par :

$$m = \frac{C \cdot f_1 f_2}{gv} h \quad (3.5)$$

où C est une constante dépendant des nombres entiers quantiques expérimentaux, et f_1, f_2 sont des fréquences mesurées. En fixant h , on fixe l'échelle de masse. L'incertitude sur la masse provient désormais uniquement des incertitudes expérimentales (principalement l'alignement mécanique et la mesure de l'accélération de la pesanteur locale g), et non plus de la définition elle-même.

3.2.3 La constante de Boltzmann et la thermodynamique de l'information

La redéfinition du Kelvin en fixant la constante de Boltzmann k_B éclaire d'un jour nouveau le lien profond entre la thermodynamique statistique et la théorie de l'information.

Historiquement, la température était une grandeur empirique définie par des points fixes de changement d'état (eau, métaux). La thermodynamique statistique a révélé que la température T est le paramètre régissant la distribution canonique des états d'énergie E_i d'un système à l'équilibre : $p(E_i) \propto \exp(-E_i/k_B T)$. Ici, $k_B T$ représente l'énergie thermique caractéristique.

En fixant k_B , on postule que l'entropie statistique de Boltzmann :

$$S = k_B \ln \Omega \quad (3.6)$$

(où Ω est le nombre de micro-états accessibles) est la véritable définition de l'entropie thermodynamique. Or, cette expression est formellement identique à l'entropie de Shannon H utilisée en théorie de l'information [25], à un facteur multiplicatif près :

$$S = k_B (\ln 2) H_{bit} \quad (3.7)$$

La fixation de k_B établit une équivalence rigoureuse entre l'information (sans dimension, en bits ou nats) et l'entropie physique (en J/K). Cela valide le principe de Landauer [18], qui stipule qu'il existe un coût énergétique minimal pour l'effacement d'un bit d'information :

$$E_{min} = k_B T \ln 2 \quad (3.8)$$

Avant 2019, k_B étant une grandeur mesurée, ce lien théorique était sujet à une incertitude métrologique. Désormais, la valeur exacte de k_B cristallise l'identité entre l'information manquante sur l'état microscopique d'un système et son entropie thermodynamique. Le Kelvin devient ainsi une mesure de l'agitation thermique mise à l'échelle de l'énergie par bit d'information, unifiant la physique de la chaleur et la théorie du calcul dans un même cadre normatif.

Cette perspective a des implications pratiques pour la thermométrie primaire. La mesure de la température ne nécessite plus de thermomètres calibrés sur des points fixes, mais peut être réalisée en mesurant l'énergie thermique via le bruit de Johnson-Nyquist dans une résistance ($\langle V^2 \rangle = 4k_B T R \Delta f$) ou par la spectroscopie Doppler des gaz. La mesure de la température devient une mesure d'énergie spectroscopique ou électronique, libérée des contraintes matérielles de l'eau.

3.3 Propagation des incertitudes et covariance

La redéfinition du Système International d'unités impose une révision fondamentale des protocoles de traitement des incertitudes de mesure. L'approche déterministe, où les unités de base étaient considérées comme des absous physiques, laisse place à une approche stochastique où la réalisation de l'unité elle-même est une variable aléatoire. Cette section formalise le calcul d'erreur dans ce nouveau paradigme, en utilisant l'algèbre matricielle pour traiter les corrélations induites par la structure des constantes fondamentales.

3.3.1 Inversion de la hiérarchie des erreurs : des constantes vers les unités

Dans le SI antérieur à 2019, l'incertitude théorique sur les unités de base était nulle par définition. Le mètre *était* la barre de platine, le kilogramme *était* le cylindre IPK. L'incertitude résidait dans la mesure des constantes fondamentales en fonction de ces artefacts. Par exemple, la constante de Planck h était déterminée expérimentalement avec une incertitude relative de l'ordre de 10^{-8} .

Le nouveau SI inverse cette hiérarchie. Les constantes définissantes $\mathcal{C}_{SI} = \{c, h, e, k_B, N_A, \dots\}$ possèdent désormais une incertitude nulle : $u(k) = 0, \forall k \in \mathcal{C}_{SI}$. En conséquence, l'incertitude est transférée vers la *mise en pratique* (réalisation) des unités.

Soit U une unité (par exemple, le kilogramme). Sa réalisation expérimentale, notée U_{real} , est une variable aléatoire distribuée autour de la valeur de définition théorique. L'équation de mesure s'écrit :

$$U_{real} = U_{def} \cdot (1 + \epsilon_{mise_en_pratique}) \quad (3.9)$$

où ϵ est une variable aléatoire de moyenne nulle et d'écart-type $u_r(U)$. Cette inversion a des conséquences profondes sur la métrologie de haute précision. Auparavant, l'étalonnage consistait à comparer un instrument à un étalon primaire supposé parfait. Aujourd'hui, l'étalonnage consiste à réaliser l'unité localement à partir des constantes, un processus qui intègre intrinsèquement des sources d'incertitudes quantiques et statistiques (bruit de comptage, alignement optique, stabilité thermique).

L'incertitude standard relative de réalisation n'est plus négligeable. Pour le kilogramme réalisé par balance de Kibble, elle est de l'ordre de 2×10^{-8} . Pour le Kelvin, elle dépend de la méthode thermométrique (acoustique ou diélectrique) et avoisine 10^{-6} . Le métrologue doit donc propager non seulement l'incertitude de son instrument, mais également l'incertitude de la réalisation locale de l'unité [15].

3.3.2 Algèbre linéaire de la propagation des erreurs lors d'un changement de base

La propagation des incertitudes dans les systèmes d'unités peut être traitée rigoureusement par le formalisme matriciel, généralisant la loi de propagation des variances.

Considérons un vecteur de grandeurs d'entrée $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_N)^T$ (par exemple, les constantes fondamentales ou des mesures brutes) et un vecteur de grandeurs de sortie $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_M)^T$ (les unités ou grandeurs dérivées). La relation fonctionnelle est $\mathbf{Y} = f(\mathbf{X})$. Dans le cadre de l'analyse dimensionnelle, cette relation est monomiale :

$$Y_i = A_i \prod_{j=1}^N X_j^{p_{ij}} \quad (3.10)$$

En passant aux logarithmes, la relation devient linéaire, ce qui simplifie le calcul des dérivées partielles (sensibilités). Soit $y_i = \ln(Y_i)$ et $x_j = \ln(X_j)$. Alors :

$$y_i = \ln(A_i) + \sum_{j=1}^N p_{ij} x_j \quad (3.11)$$

La matrice $P = (p_{ij})$ est la matrice dimensionnelle de transition. D'après le Guide pour l'expression de l'incertitude de mesure (GUM), la matrice de covariance des grandeurs de sortie \mathbf{V}_Y est donnée par transformation de la matrice de covariance d'entrée \mathbf{V}_X via la matrice Jacobienne \mathbf{J} :

$$\mathbf{V}_Y = \mathbf{J} \mathbf{V}_X \mathbf{J}^T \quad (3.12)$$

Dans le cas log-linéaire des lois de puissance, si l'on travaille avec les incertitudes relatives $u_r(X) \approx u(\ln X)$, la Jacobienne s'identifie exactement à la matrice des exposants P .

$$[\text{Cov}_{rel}(Y_i, Y_k)] = P[\text{Cov}_{rel}(X_j, X_l)]P^T \quad (3.13)$$

Cette formulation met en évidence que l'incertitude sur une unité dérivée est une combinaison linéaire quadratique des incertitudes des constantes fondamentales, pondérée par les carrés des exposants dimensionnels, augmentée des termes de covariance croisée.

3.3.3 Matrice de covariance des unités dérivées et constantes dépendantes

Un aspect subtil et souvent négligé de la réforme du SI est l'apparition de corrélations et d'incertitudes sur des constantes qui étaient auparavant exactes.

Le cas de la perméabilité du vide μ_0

Avant 2019, la perméabilité magnétique du vide était fixée par définition : $\mu_0 \equiv 4\pi \times 10^{-7}$ H/m. Dans le SI révisé, μ_0 est déterminée par la constante de structure fine α :

$$\mu_0 = \frac{2h}{ce^2}\alpha \quad (3.14)$$

Les constantes h, c, e sont exactes (incertitude nulle). En revanche, α est une grandeur sans dimension mesurée expérimentalement (notamment par interférométrie atomique ou via l'anomalie magnétique de l'électron). Par conséquent, μ_0 acquiert l'incertitude relative de α :

$$u_r(\mu_0) = u_r(\alpha) \approx 1.5 \times 10^{-10} \quad (3.15)$$

De même pour la permittivité du vide $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2)$, qui devient une grandeur expérimentale. Bien que cette incertitude soit extrêmement faible, elle brise l'invariance théorique des équations de Maxwell dans le vide lorsqu'elles sont exprimées en unités SI : les coefficients du vide ne sont plus des constantes mathématiques mais des paramètres physiques sujets à révision.

Corrélations induites par les ajustements CODATA

Les valeurs des constantes fondamentales non fixées (comme G , α , m_e) sont déterminées par un ajustement global des moindres carrés sur l'ensemble des données métrologiques mondiales, réalisé par le groupe CODATA [20]. Cet ajustement induit inévitablement des corrélations statistiques entre les grandeurs.

La matrice de corrélation R , dérivée de la matrice de covariance par $r_{ij} = v_{ij}/(u_i u_j)$, révèle des liens forts. Par exemple, la constante de Rydberg R_∞ et le rayon de charge du proton r_p sont fortement corrélés via les mesures de spectroscopie de l'hydrogène.

Pour le physicien numéricien ou l'ingénieur de précision, ignorer ces covariances (termes hors diagonale) conduit à une surestimation ou une sous-estimation de l'incertitude finale. Pour une grandeur Z dépendant de deux constantes A et B (par exemple $Z = A/B$), l'incertitude relative carrée est :

$$u_r^2(Z) = u_r^2(A) + u_r^2(B) - 2r_{AB}u_r(A)u_r(B) \quad (3.16)$$

Si A et B sont positivement corrélés ($r_{AB} > 0$), l'incertitude sur le rapport est inférieure à la somme quadratique des incertitudes individuelles. Dans le SI actuel, la structure algébrique des dépendances est telle que les unités électriques (Volt, Ohm) sont parfaitement cohérentes ($r = 1$) avec les constantes h et e , tandis que les unités de masse et de longueur conservent une structure de covariance plus complexe dépendant de la réalisation de la seconde. La maîtrise de cette algèbre des erreurs est indispensable pour garantir la traçabilité métrologique dans les codes de simulation traitant de physique fondamentale.

Chapitre 4

Systèmes d'Unités et Constantes Fondamentales

4.1 Changements de base dimensionnelle

La sélection d'un système d'unités correspond, dans le langage de l'algèbre linéaire, au choix d'une base pour l'espace vectoriel des dimensions \mathfrak{D} . Si le Système International (SI) constitue le standard de la métrologie légale et industrielle, la physique théorique exploite fréquemment des bases alternatives (CGS, Gaussien, Heaviside-Lorentz, Planck) mieux adaptées à la symétrie intrinsèque des problèmes étudiés. Le passage d'un système à un autre n'est pas une simple conversion scalaire, mais une transformation structurelle qui peut modifier la dimensionnalité même des grandeurs physiques. Cette section formalise ces transformations via l'algèbre matricielle et analyse les implications topologiques des conventions de rationalisation.

4.1.1 Matrices de transition et calcul logarithmique

Soit \mathfrak{D} l'espace vectoriel des dimensions physiques de dimension N sur le corps \mathbb{Q} . Considérons deux bases de cet espace :

1. Une base de départ $\mathcal{B} = \{e_1, \dots, e_N\}$ (par exemple les unités SI : L, M, T, I, Θ, N, J).
2. Une base d'arrivée $\mathcal{B}' = \{e'_1, \dots, e'_N\}$ (par exemple un système d'unités naturelles ou CGS).

Tout vecteur de la nouvelle base s'exprime comme une combinaison linéaire des vecteurs de l'ancienne base. En notation multiplicative, cela s'écrit :

$$e'_j = \prod_{i=1}^N e_i^{P_{ij}} \quad \text{pour } j = 1, \dots, N \tag{4.1}$$

Les exposants $P_{ij} \in \mathbb{Q}$ forment la matrice de transition (ou matrice de passage) P de taille $N \times N$. Pour linéariser cette relation, nous utilisons l'isomorphisme logarithmique $\mathcal{L} : (\mathfrak{D}, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Q}^N, +)$ défini par la projection sur la base \mathcal{B} . En notant $\mathbf{v}_k = \ln(e_k)$ et $\mathbf{v}'_j = \ln(e'_j)$, la relation devient :

$$\mathbf{v}'_j = \sum_{i=1}^N P_{ij} \mathbf{v}_i \tag{4.2}$$

La matrice P contient les dimensions des nouvelles unités de base exprimées dans l'ancien système.

Loi de transformation des grandeurs physiques

Une grandeur physique Q est un invariant tensoriel de rang 0 dans l'espace des grandeurs \mathcal{P} . Elle s'exprime dans les deux bases par :

$$Q = \{Q\}_{\mathcal{B}}[Q]_{\mathcal{B}} = \{Q\}_{\mathcal{B}'}[Q]_{\mathcal{B}'} \quad (4.3)$$

Soit D la dimension de Q . Dans la base \mathcal{B} , D est représenté par le vecteur colonne de coordonnées $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$. Dans la base \mathcal{B}' , il est représenté par α' . La loi de changement de base pour les composantes du vecteur dimension (les exposants dimensionnels) est contravariante :

$$\alpha = P\alpha' \implies \alpha' = P^{-1}\alpha \quad (4.4)$$

Cette relation est fondamentale : elle permet de déterminer la dimension d'une grandeur connue dans un nouveau système. Parallèlement, la valeur numérique $\{Q\}$ se transforme de manière covariante (inverse à l'unité). Si l'on note les facteurs d'échelle scalaires entre les réalisations des unités par $e'_j = k_j \prod e_i^{P_{ij}}$, alors la valeur numérique se transforme selon :

$$\ln(\{Q'\}) = \ln(\{Q\}) - \sum_{j=1}^N \alpha'_j \ln(k_j) \quad (4.5)$$

où les k_j agrègent les facteurs de conversion des constantes fondamentales impliquées.

Exemple : Réduction CGS de la charge électrique

Le système CGS (Centimètre-Gramme-Seconde) se distingue du SI par le fait que la charge électrique n'est pas une dimension fondamentale indépendante. L'espace dimensionnel est contracté de $N = 7$ (ou 4 en mécanique+électromagnétisme) à $N' = 3$. La loi de Coulomb dans le vide s'écrit :

- SI : $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2}$
- CGS-Gaussien : $F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$

En CGS, la dimension de la charge Q_{CGS} est déduite de la force (MLT^{-2}) et de la distance (L) :

$$[Q^2]_{CGS} = [F][r^2] = (MLT^{-2}) \cdot L^2 = ML^3T^{-2} \implies [Q]_{CGS} = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1} \quad (4.6)$$

La matrice de transition P reliant la base SI $\{L, M, T, I\}$ à la base CGS $\{L, M, T\}$ est singulière si l'on tente de conserver I . En réalité, il s'agit d'une projection. La dimension courant électrique I du SI s'exprime dans le CGS comme $M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$. Les exposants rationnels ($1/2, 3/2$) indiquent que le système CGS n'est pas "rationnel" au sens algébrique sur \mathbb{Z} , mais bien sur \mathbb{Q} . Cette structure fractionnaire complique l'analyse dimensionnelle intuitive mais simplifie les équations de champ en éliminant les constantes de couplage dimensionnées (ϵ_0, μ_0).

4.1.2 Systèmes cohérents et rationalisation (Heaviside-Lorentz versus SI)

La construction d'un système d'unités en électromagnétisme confronte le physicien à un choix arbitraire concernant la géométrie des sources de champ : où placer le facteur 4π inhérent à la symétrie sphérique de l'opérateur Laplacien en trois dimensions ? Ce choix définit la "rationalisation" du système.

Origine géométrique du facteur 4π

Le théorème de flux-divergence (Gauss) relie le flux du champ électrique \mathbf{E} à travers une surface fermée à la charge totale Q incluse :

$$\oint_{\partial V} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \propto Q \quad (4.7)$$

Pour une charge ponctuelle, la symétrie sphérique impose que l'aire de la sphère $4\pi r^2$ apparaisse. Deux conventions s'opposent :

1. Systèmes non-rationalisés (ex : Gaussien) : On choisit de simplifier la loi de force (Coulomb) pour faire disparaître les facteurs géométriques dans les interactions particule-particule.

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

En conséquence, le facteur 4π réapparaît nécessairement dans les équations de champ (Maxwell). Puisque le flux est $E \times 4\pi r^2$, et que la force est qE , on a $E = q/r^2$. Le flux devient $4\pi q$. D'où l'équation locale :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \rho$$

2. Systèmes rationalisés (ex : Heaviside-Lorentz, SI) : On choisit de simplifier les équations de champ, considérant que les champs sont les entités fondamentales. On absorbe le facteur 4π dans la définition de la charge ou de la constante de couplage.

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (\text{ou } \rho/\epsilon_0)$$

En conséquence, la loi de force hérite du facteur géométrique :

$$F = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2} \quad (\text{avec } \epsilon_0 = 1)$$

Oliver Heaviside a vigoureusement défendu la rationalisation, arguant qu'il est "irrationnel" de voir apparaître un facteur propre à la symétrie sphérique (4π) dans des équations cartésiennes planes (comme celles de la propagation des ondes ou des condensateurs plans), et inversement de ne pas l'avoir là où la symétrie sphérique est explicite.

Le système de Heaviside-Lorentz

Très prisé en physique théorique des hautes énergies et en théorie quantique des champs (QFT), le système Heaviside-Lorentz (HL) est à la fois rationalisé et unitaire ($c = 1, \hbar = 1$). Les équations de Maxwell y prennent leur forme la plus symétrique et épurée :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (4.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{j} \quad (4.9)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (4.10)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (4.11)$$

La différence fondamentale entre le système Gaussien et le système HL réside dans la définition de la charge électrique.

$$q_{HL} = \sqrt{4\pi} q_{Gauss} \quad (4.12)$$

De même pour le champ magnétique : $B_{HL} = B_{Gauss}/\sqrt{4\pi}$. Cette redéfinition permet d'éliminer les facteurs 4π des densités lagrangiennes. Par exemple, le terme cinétique du champ de jauge s'écrit simplement $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ en HL, contre $-\frac{1}{16\pi}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ en Gaussien.

Le Système International (SI) est un hybride : il est rationalisé (pas de 4π dans les équations de Maxwell), mais il réintroduit deux constantes dimensionnées, la permittivité ϵ_0 et la perméabilité μ_0 , pour conserver les dimensions mécaniques indépendantes des dimensions électriques. Cela conduit à la relation structurelle :

$$\epsilon_0\mu_0c^2 = 1 \quad (4.13)$$

Jackson [14] fournit une analyse exhaustive des correspondances entre ces systèmes, soulignant que le choix du système d'unités modifie la forme explicite des tenseurs de champ et des vecteurs de Poynting.

4.1.3 Impact des facteurs 4π sur les équations de champ

L'emplacement des facteurs 4π a des conséquences profondes sur l'interprétation physique des équations aux dérivées partielles et sur l'analyse dimensionnelle des solutions.

Normalisation de la fonction de Green

Mathématiquement, le facteur 4π provient de la solution fondamentale de l'équation de Poisson dans \mathbb{R}^3 . Soit l'équation :

$$\Delta\phi = -S(\mathbf{x}) \quad (4.14)$$

La fonction de Green $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ satisfaisant $\Delta G = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ est :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (4.15)$$

Dans un système non-rationalisé, on définit la source S telle que $\Delta\phi = -4\pi\rho$. La solution est alors la convolution directe $\phi = \rho * (1/r)$, sans préfacteur. Le potentiel est simplement la somme des contributions q/r . Dans un système rationalisé, on pose $\Delta\phi = -\rho$. La solution devient $\phi = \rho * (1/4\pi r)$. Le potentiel coulombien traîne le facteur $1/4\pi$.

Cette distinction est cruciale lors de l'adimensionnement des équations de champ. Si l'on normalise les distances par une échelle L_0 et les charges par Q_0 , le coefficient adimensionnel qui apparaît devant le terme de source dépend du système choisi.

Brisure de symétrie dimensionnelle E-B

Dans les systèmes relativistes (Gaussien et HL), les champs électrique \mathbf{E} et magnétique \mathbf{B} ont exactement la même dimension physique :

$$[E] = [B] = M^{1/2}L^{-1/2}T^{-1} \quad (4.16)$$

Cela reflète la structure du tenseur électromagnétique $F^{\mu\nu}$ où E et B sont des composantes mixées par les transformations de Lorentz. En revanche, dans le système SI, les dimensions sont distinctes :

$$[E] = MLT^{-3}I^{-1}(\text{V/m}), \quad [B] = MT^{-2}I^{-1}(\text{T}) \quad (4.17)$$

Le rapport des dimensions est $[E]/[B] = LT^{-1} = [v]$. Dans ce système, E et cB sont comparables. Cette distinction dimensionnelle dans le SI masque partiellement la symétrie de Lorentz sous-jacente, obligeant à insérer des facteurs c explicites dans les transformations de champs.

Pour le physicien numérique, le choix de la base dimensionnelle impacte le conditionnement des matrices. Utiliser des unités SI pour simuler des plasmas astrophysiques ou de la QED (Électrodynamique Quantique) introduit des facteurs 10^{-7} (μ_0) et 10^{-12} (ϵ_0) qui nuisent à la précision flottante. Il est impératif d'effectuer un changement de base vers un système "naturel" au problème (souvent proche de Heaviside-Lorentz) où les coefficients de couplage sont d'ordre $O(1)$ ou $O(\alpha \approx 1/137)$, garantissant ainsi que la matrice de transition numérique reste bien conditionnée et que les termes de source 4π soient traités de manière cohérente avec la discrétisation spatiale.

4.2 Systèmes d'unités naturelles

L'existence de constantes fondamentales dimensionnées (c, \hbar, G, k_B, e) suggère que la nature possède ses propres échelles intrinsèques, indépendantes de tout artefact anthropocentrique. La construction d'un système d'unités naturelles consiste à normaliser ces constantes à l'unité (valeur numérique 1). Algébriquement, cela revient à diagonaliser la matrice des dimensions physiques en choisissant les constantes universelles comme vecteurs de base. Cette procédure simplifie non seulement l'écriture des équations, mais révèle également la hiérarchie des forces et les régimes asymptotiques des théories physiques.

4.2.1 Unités de Planck : limite de la gravité quantique

Introduit par Max Planck dès 1899 [22] avant même le développement complet de la mécanique quantique, ce système est considéré comme le plus fondamental. Il repose sur la normalisation des constantes régissant la relativité restreinte, la mécanique quantique, la gravitation et la thermodynamique.

Définition algébrique

Le système de Planck est défini par la condition :

$$c = \hbar = G = k_B = k_e = 1 \quad (4.18)$$

où $k_e = 1/(4\pi\epsilon_0)$ est la constante de Coulomb (parfois omise ou remplacée par $\epsilon_0 = 1$ selon les conventions de rationalisation). Pour déterminer les valeurs des unités de base (Longueur L_P , Masse M_P , Temps T_P), nous résolvons le système dimensionnel. Les dimensions des constantes dans la base $\{L, M, T\}$ sont :

$$\begin{aligned} [c] &= LT^{-1} \\ [\hbar] &= ML^2T^{-1} \\ [G] &= L^3M^{-1}T^{-2} \end{aligned}$$

En passant aux logarithmes, on obtient un système linéaire 3×3 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ln L \\ \ln M \\ \ln T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln c \\ \ln \hbar \\ \ln G \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

L'inversion de la matrice dimensionnelle permet d'exprimer les unités de Planck en fonction des unités SI :

$$L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}}, \quad M_P = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}}, \quad T_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \quad (4.20)$$

Les valeurs numériques sont extrêmes par rapport à l'expérience humaine :

- Longueur de Planck : $l_P \approx 1.616 \times 10^{-35}$ m
- Masse de Planck : $m_P \approx 2.176 \times 10^{-8}$ kg ($\approx 1.2 \times 10^{19}$ GeV)
- Temps de Planck : $t_P \approx 5.391 \times 10^{-44}$ s
- Température de Planck : $T_P \approx 1.417 \times 10^{32}$ K

Signification physique et rationalisation

Le système de Planck définit l'échelle naturelle de la gravité quantique. À l'échelle l_P , la longueur d'onde de Compton d'une particule ($\lambda_c \sim \hbar/mc$) devient comparable à son rayon de Schwarzschild ($R_s \sim Gm/c^2$). L'espace-temps ne peut plus être traité comme un continuum lisse ; les fluctuations quantiques de la métrique deviennent de l'ordre de l'unité.

Une subtilité réside dans le choix de la constante de Planck. Le système original utilisait \hbar . La physique moderne privilégie $\hbar = h/2\pi$. De plus, en Relativité Générale, le couplage naturel est $8\pi G$ (apparaissant dans l'équation d'Einstein). Certains auteurs préfèrent donc les *unités de Planck réduites* où $8\pi G = 1$. Dans ce système réduit, l'équation d'Einstein s'écrit simplement $G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}$, et l'entropie d'un trou noir est égale au quart de l'aire de son horizon ($S = A/4$), simplifiant la formule de Bekenstein-Hawking ($S = k_B c^3 A / 4G\hbar$).

4.2.2 Unités atomiques (Hartree) : physique atomique et chimie quantique

Si les unités de Planck sont adaptées à la cosmologie primordiale, elles sont inopérantes pour la physique de la matière ordinaire en raison de leurs ordres de grandeur. Pour la physique atomique et la chimie quantique, il est naturel de normaliser les propriétés de l'électron.

Le système de Hartree

Le système d'unités atomiques (a.u.) est construit en posant :

$$m_e = e = \hbar = k_e = 1 \quad (4.21)$$

Contrairement aux unités de Planck, la vitesse de la lumière c **n'est pas** égale à 1. Les unités dérivées fondamentales sont :

- **Unité de Longueur** : Le rayon de Bohr a_0 .

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e k_e e^2} \approx 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$$

Cela correspond à la distance la plus probable électron-noyau dans l'état fondamental de l'hydrogène.

- **Unité d'Énergie** : L'énergie de Hartree E_h .

$$E_h = \frac{m_e k_e^2 e^4}{\hbar^2} = \frac{e^2}{k_e a_0} \approx 27.21 \text{ eV}$$

C'est le double de l'énergie d'ionisation de l'atome d'hydrogène (1 Ry ≈ 13.6 eV).

L'énergie potentielle coulombienne est donnée par $V(r) = -Z/r$ en unités atomiques.

- **Unité de Temps** : $\tau_0 = \hbar/E_h \approx 2.419 \times 10^{-17}$ s.

Le statut de la vitesse de la lumière et la constante de structure fine

Dans ce système, la vitesse de la lumière devient une constante sans dimension déterminée par la force de l'interaction électromagnétique. Sa valeur est l'inverse de la constante de structure fine α :

$$c_{a.u.} = \frac{1}{\alpha} \approx 137.036 \quad (4.22)$$

Cette valeur possède une interprétation physique profonde : dans l'état fondamental de l'hydrogène, la vitesse moyenne de l'électron est $v \approx 1$ a.u. Le rapport $v/c \approx \alpha \approx 1/137$ indique le caractère "non-relativiste" de l'atome. L'utilisation des unités de Hartree permet d'effectuer des développements perturbatifs en puissances de $1/c$ (ou α). L'hamiltonien de Schrödinger correspond à l'ordre 0. Les corrections relativistes (structure fine, interaction spin-orbite) apparaissent naturellement aux ordres α^2 . Le choix de $c \neq 1$ est ici crucial : il permet de séparer les échelles d'énergie de masse ($mc^2 \sim \alpha^{-2}$) des échelles d'énergie de liaison (~ 1).

4.2.3 Unités géométriques : réduction de la masse et du temps à la longueur

En Relativité Générale, la structure de l'espace-temps suggère de traiter le temps et l'espace sur un pied d'égalité, tandis que le principe d'équivalence lie l'énergie (et donc la masse) à la courbure de la géométrie. Le système d'unités géométriques, standardisé par des auteurs comme Wald [31] ou Misner, Thorne et Wheeler, pousse cette logique à son terme.

Réduction dimensionnelle

Ce système est défini par :

$$c = G = 1 \quad (4.23)$$

Les autres constantes (comme \hbar ou e) ne sont généralement pas fixées, car ce système est purement classique et gravitationnel. Cette normalisation réduit toutes les dimensions mécaniques (L, M, T) à une seule dimension, usuellement la Longueur L .

— **Temps → Longueur** : Le temps est mesuré en mètres de temps-lumière.

$$1 \text{ seconde} \equiv 299\,792\,458 \text{ mètres}$$

La conversion est $T_{geom} = c \cdot T_{SI}$.

— **Masse → Longueur** : La masse est mesurée par son rayon gravitationnel équivalent (la moitié du rayon de Schwarzschild).

$$M_{geom} = \frac{G}{c^2} M_{SI}$$

Le facteur de conversion est $\frac{G}{c^2} \approx 7.42 \times 10^{-28} \text{ m/kg}$.

Exemple 4.1 (La masse solaire géométrisée). Pour le Soleil ($M_\odot \approx 1.989 \times 10^{30} \text{ kg}$), la masse géométrique est :

$$M_{\odot,geom} \approx 1.477 \text{ km}$$

Cela signifie que la courbure de l'espace-temps induite par le Soleil est de l'ordre de l'unité à une distance de 1.5 km du centre. Cette unité permet d'estimer instantanément la force des effets relativistes : à la surface du Soleil ($R \approx 700\,000 \text{ km}$), le potentiel adimensionnel est $M/R \approx 1.5/700\,000 \approx 2 \times 10^{-6}$, ce qui est très faible. Pour un trou noir, $M/R = 1/2$ à l'horizon.

Simplification des tenseurs

L'avantage majeur des unités géométriques réside dans l'homogénéisation des tenseurs physiques. Le tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ a la même dimension que le tenseur de courbure de Ricci $R_{\mu\nu}$ (dimension L^{-2}). L'équation d'Einstein :

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (4.24)$$

devient une relation purement géométrique reliant une courbure (L^{-2}) à une densité de masse-énergie géométrisée ($L/L^3 = L^{-2}$). Cette simplification élimine les facteurs parasites G/c^4 qui alourdissent les équations et obscurcissent la structure causale des solutions. De plus, elle permet de traiter les ondes gravitationnelles et la courbure de fond avec les mêmes outils dimensionnels.

4.3 Le débat sur les constantes

La nature et le nombre exact des constantes fondamentales nécessaires pour décrire l'univers constituent l'un des débats les plus subtils de la physique théorique. Au-delà de leur utilité pratique pour le calcul, ces constantes interrogent la structure même de nos théories : sont-elles de simples artefacts de nos systèmes d'unités ou des paramètres irréductibles de la nature ? Cette section examine la distinction épistémologique entre constantes dimensionnées et nombres purs, et analyse la controverse célèbre concernant la possibilité de leur variation temporelle.

4.3.1 Constantes dimensionnées versus nombres purs

Une distinction fondamentale doit être opérée entre les constantes possédant une dimension physique (telles que c , G , h , e) et les constantes sans dimension (telles que la constante de structure fine α ou le rapport de masse proton/électron μ).

L'argument de l'indépendance d'unité

La valeur numérique d'une constante dimensionnée n'a pas de signification intrinsèque absolue, car elle dépend entièrement du choix arbitraire des étalons de mesure. Par exemple, la vitesse de la lumière c vaut 299 792 458 m/s dans le SI, mais vaut 1 en unités de Planck et environ 137 en unités atomiques. Un changement de la valeur numérique de c peut être interprété de deux manières indiscernables :

1. La vitesse physique de la lumière a changé.
2. La définition du mètre ou de la seconde a changé.

À l'inverse, une constante sans dimension (un nombre pur) est un invariant scalaire, indépendant du système d'unités utilisé par l'observateur. La constante de structure fine :

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx \frac{1}{137.035999} \quad (4.25)$$

prendra la même valeur numérique pour un physicien terrestre, un habitant de la galaxie d'Andromède, ou une intelligence artificielle utilisant des unités binaires, pourvu qu'ils décrivent la même physique (QED).

Le nombre minimal de paramètres

Le Modèle Standard de la physique des particules, couplé à la Relativité Générale, contient un certain nombre de paramètres libres (masses des leptons et quarks, angles de mélange CKM, constantes de couplage). L'opinion majoritaire parmi les théoriciens des champs, soutenue notamment par Michael Duff [9], est que les *seuls* paramètres fondamentaux sont les constantes sans dimension. Les constantes dimensionnées ne sont que des facteurs de conversion permettant de relier des quantités physiquement distinctes (espace et temps pour c , énergie et fréquence pour \hbar).

Selon ce point de vue, il est possible de construire un système d'unités où toutes les constantes dimensionnées (c, \hbar, G, \dots) sont fixées à 1. La physique de l'univers est alors entièrement contenue dans la liste des rapports de masse et des constantes de couplage adimensionnelles. Si l'univers changeait de telle sorte que c soit doublé, mais que tous les autres paramètres s'ajustent pour garder α et les autres nombres purs constants, aucune expérience physique ne pourrait détecter ce changement. L'univers serait physiquement isomorphe au précédent.

4.3.2 Discussion sur la variation temporelle des constantes (Duff versus Okun)

La question de savoir si les constantes fondamentales peuvent varier au cours de l'histoire cosmique a été soulevée initialement par Dirac avec son hypothèse des grands nombres [8], suggérant que G diminuait proportionnellement à l'âge de l'univers ($G \propto t^{-1}$). Un débat célèbre, souvent appelé le "Trialogue", a opposé au début des années 2000 trois physiciens éminents : Michael Duff, Lev Okun et Gabriele Veneziano, sur le sens opérationnel d'une telle variation [21].

Le point de vue d'Okun : Le cube de la physique

Lev Okun défend une vision traditionnelle et réaliste où il existe trois constantes dimensionnées absolues (c, G, \hbar) qui forment la base de la physique théorique. Ces constantes définissent le "Cube de la Physique" (ou cube de Gamow-Ivanenko-Landau) :

- $c^{-1} \rightarrow 0$: Physique Newtonienne (non relativiste).
- $\hbar \rightarrow 0$: Mécanique Classique.
- $G \rightarrow 0$: Absence de gravité.

Pour Okun, ces constantes sont des propriétés fondamentales de la nature. Il est donc sensé de se demander si c ou G varient dans le temps. Il soutient que nier la possibilité de variation de c revient à nier la richesse phénoménologique potentielle de l'univers.

Le point de vue de Duff : L'indiscernabilité opérationnelle

Michael Duff adopte une position opérationnaliste stricte. Il soutient que parler de la variation d'une constante dimensionnée est, au mieux, une convention de langage, et au pire, une source de confusion majeure. Son argument central repose sur l'expérience de pensée suivante : supposons que la vitesse de la lumière c diminue de moitié. Pour mesurer cette diminution, il faut une horloge et une règle.

- Si la règle est définie par le rayon de Bohr $a_0 \propto (\alpha m_e c)^{-1}$ (ce qui est le cas pour toute matière solide maintenue par des forces électromagnétiques), alors la règle change de longueur lorsque c change.
- Si l'horloge est définie par une période atomique (Rydberg) $T \propto (\alpha^2 m_e c^2)^{-1}$, alors la cadence de l'horloge change également.

Duff démontre que si les constantes sans dimension ($\alpha, m_p/m_e$) restent fixes, alors la modification de c est parfaitement inobservable car les instruments de mesure varient exactement de la même manière que la grandeur mesurée. Il conclut que les seules affirmations physiquement significatives concernent la variation des constantes sans dimension. Dire " c a varié" est en réalité une façon maladroite de dire "la structure fine α a varié", mais cela introduit une ambiguïté car $\alpha \propto 1/c$. On pourrait tout aussi bien attribuer la variation de α à une variation de e ou de \hbar .

Synthèse et consensus métrologique

Gabriele Veneziano a proposé une position intermédiaire, issue de la théorie des cordes [29], où il existe deux échelles fondamentales (la longueur de la corde λ_s et c). Cependant, du point de vue de la métrologie et de l'analyse dimensionnelle formelle, l'argument de Duff a prévalu dans la conception du nouveau SI. Puisque nous ne pouvons mesurer que des rapports adimensionnels, toute dérive temporelle observée expérimentalement (par exemple dans les spectres d'absorption des quasars lointains analysés par Webb et al.) doit être interprétée comme une variation des paramètres adimensionnels ($\Delta\alpha/\alpha \approx 10^{-5}$). Attribuer cette variation à c , e ou \hbar est un choix de jauge (un choix d'unités) sans conséquence sur les prédictions physiques, mais crucial pour la définition des étalons.

4.3.3 Signification physique de la fixation des constantes

La réforme du SI de 2019, en fixant les valeurs exactes de c, h, e, k_B , acte institutionnellement le point de vue selon lequel les constantes dimensionnées sont avant tout des facteurs d'échelle de nos unités.

Cristallisation des unités

En fixant c , le BIPM a déclaré implicitement : "Nous ne mesurerons plus jamais la vitesse de la lumière ; nous utiliserons la lumière pour mesurer les distances". Cela transforme une équation physique ($d = c \times t$, sujette à vérification) en une équation de définition ($1 \text{ m} \equiv c_{exact} \times (1/299792458) \text{ s}$). Si, par une expérience de très haute précision future, on découvrait que la constante de structure fine α changeait lentement, comment cela se traduirait-il dans le SI actuel ? Puisque :

$$\alpha = \frac{e^2}{2\epsilon_0 hc} \quad \text{et} \quad \mu_0 = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \quad (4.26)$$

Dans le SI révisé, e, h, c sont fixes. Par conséquent, toute variation physique de α serait mathématiquement reportée sur la permittivité du vide ϵ_0 (et la perméabilité μ_0).

$$\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} = -\frac{\dot{\epsilon}_0}{\epsilon_0} \quad (\text{dans le SI}) \quad (4.27)$$

Cela illustre parfaitement l'arbitraire du choix : la nature dit que le couplage change (α), le système d'unités décide arbitrairement que c'est le "vide" (ϵ_0) qui change pour préserver la constance des quanta (h) et de la lumière (c).

L'indépendance du prototype

La fixation des constantes a une autre signification profonde : elle rend le système de mesure localement réalisable en tout point de l'espace-temps, sans transport d'artefact.

C'est le principe d'universalité. Cependant, Uzan [27] rappelle que cette universalité repose sur l'hypothèse forte du Principe d'Équivalence d'Einstein (invariance locale de Lorentz et invariance de position). Si ce principe était violé (si la physique dépendait de l'endroit où l'on se trouve), alors la réalisation du kilogramme via la balance de Kibble à Paris donnerait une masse différente de celle réalisée à New York, même en utilisant les mêmes constantes définitoires fixes. La métrologie moderne, en s'appuyant sur l'algèbre des constantes, devient ainsi un test de haute précision de la Relativité Générale. La cohérence des constantes mesurées à différents potentiels gravitationnels ou vitesses vérifie la structure riemannienne de l'espace des unités.

Chapitre 5

Normalisation et Adimensionnement en Physique Mathématique

5.1 Procédure d'adimensionnement

L'adimensionnement, ou normalisation, est une transformation algébrique appliquée aux équations mathématiques régissant un système physique. Cette procédure consiste à substituer aux variables dimensionnées (portant des unités physiques) des variables réduites sans dimension, définies par rapport à des échelles caractéristiques du problème.

Bien plus qu'une simple commodité notationnelle visant à éliminer les unités, l'adimensionnement est une étape fondamentale de l'analyse physique. Elle réalise une projection de l'espace des paramètres dimensionnels (souvent infini ou très vaste) vers un espace compact de paramètres de similitude. C'est par cette opération que la structure hiérarchique des phénomènes physiques est révélée, permettant de distinguer les mécanismes dominants des perturbations négligeables.

5.1.1 Choix des échelles caractéristiques et variables réduites

Soit un système physique décrit par un vecteur d'état $u(\mathbf{x}, t)$ dépendant de coordonnées spatiales \mathbf{x} et temporelles t . Ce système est régi par une équation (algébrique, différentielle ou intégrale) notée symboliquement $\mathcal{L}(u, \partial u, p) = 0$, où p représente l'ensemble des paramètres physiques (coefficients de diffusion, vitesses imposées, géométrie).

Définition de la transformation

La procédure débute par la sélection d'un ensemble de grandeurs de référence, appelées échelles caractéristiques. Pour chaque variable dimensionnée q , on choisit une échelle constante Q_0 de même dimension. La variable réduite (ou adimensionnée) q^* est définie par la transformation linéaire :

$$q^* = \frac{q}{Q_0} \tag{5.1}$$

Par construction, q^* est un nombre pur. L'objectif est de choisir Q_0 de telle sorte que l'ordre de grandeur de q^* soit unitaire, c'est-à-dire $q^* \sim \mathcal{O}(1)$, sur le domaine d'étude.

Les échelles caractéristiques se classent en deux catégories :

1. **Échelles imposées (extrinsèques)** : Elles sont dictées par les conditions aux limites ou la géométrie du problème. Par exemple, le diamètre D d'une conduite, la vitesse U_∞ d'un écoulement incident, ou la température T_w d'une paroi.

2. **Échelles construites (intrinsèques)** : Lorsque le problème ne fournit pas explicitement d'échelle pour une dimension donnée (par exemple dans un problème de demi-espace infini), l'échelle doit être construite à partir des paramètres physiques p . Par exemple, dans un problème de diffusion pure avec un coefficient D (dimension $L^2 T^{-1}$) et un temps t , l'échelle de longueur intrinsèque est la longueur de diffusion $L_{diff} = \sqrt{Dt}$.

Indépendance et degrés de liberté

Le nombre d'échelles caractéristiques indépendantes que l'on peut choisir est strictement limité par le théorème de Buckingham. Si le système implique k dimensions fondamentales indépendantes (au sens de l'algèbre linéaire sur \mathfrak{D}), alors on doit choisir exactement k échelles de base pour normaliser l'ensemble des grandeurs.

Soit $\mathcal{S} = \{L_0, M_0, T_0, \dots\}$ cet ensemble d'échelles de base. Toute autre grandeur de référence doit être dérivée de cet ensemble pour garantir la cohérence du système réduit. Par exemple, si l'on choisit une échelle de longueur L_0 et une échelle de temps T_0 , l'échelle de vitesse est contrainte : $U_0 = L_0/T_0$. Si le problème impose physiquement une vitesse V_{imp} , le rapport $\Pi = V_{imp}/U_0$ devient un paramètre adimensionnel du système, et non une nouvelle échelle libre.

Le choix des échelles n'est pas unique. Différents choix correspondent à différents régimes asymptotiques. Par exemple, pour adimensionner une équation de mouvement fluide, on peut choisir l'échelle de temps advective $T_{adv} = L_0/U_0$ ou l'échelle de temps diffusive $T_{diff} = L_0^2/\nu$. Le rapport de ces deux choix est précisément le nombre de Reynolds. Un "bon" adimensionnement est celui qui capture la physique dominante, reléguant les complexités dans des termes de perturbation petits devant l'unité.

5.1.2 Exemple détaillé : Adimensionnement des équations de Navier-Stokes

L'application la plus illustrative de cette procédure concerne les équations de Navier-Stokes pour un fluide newtonien incompressible. Ces équations expriment la conservation de la masse et de la quantité de mouvement :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.2)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (5.3)$$

Les variables sont la vitesse \mathbf{u} et la pression p . Les paramètres sont la masse volumique ρ , la viscosité dynamique μ et l'accélération de la pesanteur \mathbf{g} .

Introduction des variables réduites

Supposons un écoulement caractérisé par une longueur géométrique L (ex : taille de l'obstacle) et une vitesse caractéristique U (ex : vitesse en amont). Nous définissons les variables adimensionnées (marquées par un astérisque) :

- Coordonnées spatiales : $\mathbf{x} = L \mathbf{x}^*$
- Vitesse : $\mathbf{u} = U \mathbf{u}^*$
- Temps : $t = \frac{L}{U} t^*$ (échelle convective)
- Pression : $p = p_0 + \rho U^2 p^*$ (échelle dynamique ou inertie)
- Gravité : $\mathbf{g} = g \mathbf{e}_g$

Notons que le choix de l'échelle de pression $P_0 = \rho U^2$ est spécifique aux écoulements dominés par l'inertie. Pour des écoulements très visqueux (microfluidique, lubrification), un choix pertinent serait $P_0 = \mu U/L$. Ce choix *a priori* oriente l'analyse vers un régime physique particulier.

Substitution et manipulation algébrique

Substituons ces définitions dans l'équation de quantité de mouvement (5.3). Les opérateurs différentiels se transforment selon la règle de la chaîne :

$$\nabla = \frac{1}{L} \nabla^*, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{U}{L} \frac{\partial}{\partial t^*}, \quad \Delta = \frac{1}{L^2} \Delta^*$$

L'équation devient :

$$\rho \left(\frac{U}{L/U} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + \left(U \mathbf{u}^* \cdot \frac{1}{L} \nabla^* \right) U \mathbf{u}^* \right) = -\frac{1}{L} \nabla^* (\rho U^2 p^*) + \mu \frac{1}{L^2} \Delta^* (U \mathbf{u}^*) + \rho g \mathbf{e}_g$$

En factorisant les termes scalaires :

$$\frac{\rho U^2}{L} \left(\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* \right) = -\frac{\rho U^2}{L} \nabla^* p^* + \frac{\mu U}{L^2} \Delta^* \mathbf{u}^* + \rho g \mathbf{e}_g$$

Pour obtenir la forme canonique adimensionnée, nous divisons l'intégralité de l'équation par le coefficient du terme convectif (inertiel), soit $\frac{\rho U^2}{L}$. Ce terme représente la force d'inertie par unité de volume.

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \left(\frac{\mu}{\rho U L} \right) \Delta^* \mathbf{u}^* + \left(\frac{gL}{U^2} \right) \mathbf{e}_g$$

5.1.3 Apparition naturelle des nombres sans dimension

L'équation normalisée obtenue ne dépend plus des paramètres physiques individuels (ρ, μ, L, U, g) mais uniquement de groupements adimensionnels qui apparaissent comme coefficients devant les opérateurs différentiels.

$$\frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*} + (\mathbf{u}^* \cdot \nabla^*) \mathbf{u}^* = -\nabla^* p^* + \frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^* + \frac{1}{Fr^2} \mathbf{e}_g \quad (5.4)$$

Cette formulation mathématique isole la structure qualitative de l'écoulement. Deux écoulements physiques différents (par exemple de l'air autour d'une voiture et de l'eau autour d'un sous-marin) qui partagent la même géométrie réduite et les mêmes nombres adimensionnels (Re, Fr) auront la même solution $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}^*, t^*)$. C'est le principe de similitude dynamique [24].

Le nombre de Reynolds (Re)

Le coefficient devant le terme visqueux (laplacien) est l'inverse du nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{\rho U L}{\mu} = \frac{U L}{\nu}$$

Ce nombre représente le rapport des forces d'inertie aux forces visqueuses.

- Si $Re \gg 1$, le terme $\frac{1}{Re} \Delta^* \mathbf{u}^*$ devient négligeable dans la majeure partie de l'écoulement. L'équation se rapproche de l'équation d'Euler (fluide parfait). Cependant, comme le terme négligé contient la dérivée spatiale d'ordre le plus élevé (Δ^*), il s'agit d'une perturbation singulière. La viscosité ne peut être négligée près des parois, donnant lieu à la théorie de la couche limite développée par Prandtl.
- Si $Re \ll 1$ (écoulement de Stokes), l'adimensionnement inertiel choisi ci-dessus est invalide car les termes de gauche tendent vers zéro. Il faut reprendre la procédure avec l'échelle de pression visqueuse $P_0 = \mu U / L$, ce qui ferait apparaître le nombre de Reynolds devant le terme inertiel, confirmant sa nature négligeable dans ce régime.

Le nombre de Froude (Fr)

Le coefficient devant le vecteur gravité est lié au nombre de Froude :

$$Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}}$$

Il représente le rapport entre la force d'inertie et la force gravitationnelle. Ce nombre est crucial dans les problèmes à surface libre (vagues, hydrologie) où la gravité est la force de rappel dominante.

Autres nombres issus de conditions aux limites instationnaires

Si la condition aux limites impose une fréquence d'oscillation f indépendante de la vitesse d'écoulement, une échelle de temps externe $T_{ext} = 1/f$ entre en compétition avec l'échelle convective L/U . En choisissant $t^* = ft$, le terme de dérivée temporelle devient :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = U f \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t^*}$$

Après division par $\rho U^2 / L$, le coefficient devant la dérivée temporelle est :

$$St = \frac{fL}{U}$$

C'est le nombre de Strouhal, caractérisant les phénomènes instationnaires (allées de tourbillons de von Kármán).

Cette analyse démontre que l'adimensionnement n'est pas une procédure unique, mais un outil d'exploration des régimes physiques. La forme finale de l'équation adimensionnée encode les hypothèses du modélisateur sur les forces prépondérantes via le choix des échelles Q_0 . Une mauvaise estimation des échelles caractéristiques conduit à des termes adimensionnels faussement grands ou petits, pouvant induire des erreurs dans les méthodes de résolution numérique ou les développements asymptotiques.

5.2 Lien avec la théorie des perturbations

L'adimensionnement correct d'un système d'équations n'est pas une fin en soi, mais le préambule indispensable à l'analyse asymptotique. En transformant les paramètres physiques en nombres sans dimension, la procédure de normalisation permet d'identifier rigoureusement les termes dominants et les termes négligeables. C'est ici que l'analyse dimensionnelle rencontre la théorie des perturbations : la détermination des échelles caractéristiques fournit le "petit paramètre" ϵ qui servira de base au développement en série de la solution.

5.2.1 Normalisation et ordre de grandeur unitaire

L'efficacité des méthodes perturbatives repose sur une hypothèse fondamentale, souvent implicite, connue sous le nom d'hypothèse d'ordre unitaire. Une fois le système normalisé par les échelles L_0, T_0, U_0 , les variables réduites u^*, x^*, t^* et leurs dérivées normalisées doivent être d'ordre de grandeur 1 dans le domaine considéré :

$$u^* \sim \mathcal{O}(1), \quad \frac{\partial u^*}{\partial x^*} \sim \mathcal{O}(1), \quad \text{lorsque } \epsilon \rightarrow 0 \quad (5.5)$$

Si cette condition est remplie, alors la grandeur relative des termes de l'équation est entièrement dictée par les coefficients adimensionnels (nombres de Reynolds, Mach, Péclet, etc.) qui les précèdent.

Le principe de la balance dominante

La sélection des échelles caractéristiques discutée à la section précédente est en réalité un exercice de recherche de la "balance dominante" (dominant balance) [4]. Si un choix d'échelles conduit à une variable réduite qui devient infiniment grande ou infiniment petite lorsque le paramètre de perturbation tend vers zéro, cela signifie que le choix d'échelles est incorrect ou localement invalide (par exemple, à l'intérieur d'une couche limite).

Considérons une équation physique générique de la forme $A + B + C = 0$. Après adimensionnement, elle devient :

$$\pi_1 A^* + \pi_2 B^* + C^* = 0$$

Supposons que nous souhaitions étudier le régime où le phénomène physique représenté par C est prépondérant. Nous choisissons les échelles telles que le coefficient devant C^* soit 1. Si, dans ce régime, $\pi_1 \ll 1$ et $\pi_2 \sim 1$, alors le terme A^* peut être traité comme une perturbation. La normalisation valide l'approximation $B^* + C^* \approx 0$ comme l'ordre zéro de la solution. Sans cette normalisation préalable, l'affirmation "le terme A est petit" est physiquement vide de sens, car la valeur numérique de A dépend du système d'unités arbitraire (SI, impérial, etc.). Seul un nombre sans dimension peut être déclaré "petit" de manière absolue.

5.2.2 Petits paramètres et perturbations singulières

La théorie des perturbations distingue deux classes de problèmes selon la nature de la dépendance de la solution au petit paramètre ϵ issu de l'adimensionnement.

Perturbations régulières

Un problème de perturbation est dit régulier si la solution $u(x, \epsilon)$ converge uniformément vers la solution du problème non perturbé ($\epsilon = 0$) sur tout le domaine de définition. Dans ce cas, la solution peut être représentée par une série de puissances (expansion de Poincaré) :

$$u(x, \epsilon) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) + \epsilon^2 u_2(x) + \mathcal{O}(\epsilon^3) \quad (5.6)$$

L'injection de cet ansatz dans l'équation adimensionnée permet de résoudre hiérarchiquement une suite de problèmes plus simples pour déterminer les fonctions $u_n(x)$. Un exemple typique est le mouvement d'un projectile avec une très faible résistance de l'air : la trajectoire réelle reste très proche de la parabole idéale partout.

Perturbations singulières

Une perturbation est dite singulière lorsque le développement régulier échoue. Cet échec se manifeste souvent par la disparition du terme de plus haut degré de dérivation lorsque $\epsilon \rightarrow 0$. Soit l'équation différentielle adimensionnée modèle :

$$\epsilon \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad \text{avec } 0 < x < 1 \quad (5.7)$$

Si l'on pose brutalement $\epsilon = 0$, l'équation devient du premier ordre : $y' + y = 0$. Or, l'équation originale, étant du second ordre, nécessite deux conditions aux limites (par exemple en $x = 0$ et $x = 1$). L'équation réduite ne peut satisfaire qu'une seule condition. Il y a une perte de degré de liberté.

Physiquement, cela signifie que la solution limite $\epsilon \rightarrow 0$ est qualitativement différente de la solution pour $\epsilon \neq 0$, aussi petit soit-il. La convergence n'est pas uniforme : il existe des régions étroites du domaine (couches limites) où les gradients de la solution deviennent immenses ($\sim 1/\epsilon$), violant l'hypothèse d'ordre unitaire initiale. C'est le cas des équations de Navier-Stokes à grand nombre de Reynolds ($\epsilon = 1/Re$), où la condition d'adhérence à la paroi ne peut être satisfaite par la solution fluide parfait (Euler).

5.2.3 Couches limites et développements asymptotiques

Le traitement des perturbations singulières nécessite la méthode des développements asymptotiques raccordés (Matched Asymptotic Expansions), formalisée par Van Dyke [28]. Cette méthode repose sur une double normalisation locale.

Redéfinition locale des échelles

L'échec de la solution régulière (dite solution extérieure, y_{out}) indique que l'échelle de longueur caractéristique choisie pour l'adimensionnement global L_{out} est inappropriée dans la zone de singularité (par exemple près d'une paroi $x = 0$). Il faut introduire une nouvelle échelle caractéristique locale $L_{in} = \delta(\epsilon)L_{out}$, où $\delta(\epsilon)$ est l'épaisseur de la couche limite, inconnue a priori.

On définit une variable intérieure étirée (stretched variable) :

$$X = \frac{x}{\delta(\epsilon)} = \frac{x^*}{\epsilon^\alpha} \quad (5.8)$$

L'objectif est de trouver l'exposant α (ou la fonction δ) tel que, dans la nouvelle équation exprimée en fonction de X , le terme de plus haut degré (celui qui avait disparu) soit conservé et équilibre le terme prépondérant de la solution extérieure. C'est le principe de la dégénérescence significative (least degeneracy principle).

Reprenons l'exemple $\epsilon y'' + y' + y = 0$. Avec le changement de variable $x = \delta X$, les dérivées deviennent $y' \sim \delta^{-1}$ et $y'' \sim \delta^{-2}$. L'équation devient :

$$\frac{\epsilon}{\delta^2} \frac{d^2Y}{dX^2} + \frac{1}{\delta} \frac{dY}{dX} + Y = 0$$

Pour sauver le terme de dérivée seconde, il faut que son coefficient soit du même ordre que le plus grand des autres coefficients. Ici, la balance dominante se fait entre ϵ/δ^2 et $1/\delta$ (terme de friction), ce qui impose $\delta = \epsilon$. L'équation de couche limite devient (après multiplication par ϵ) :

$$\frac{d^2Y}{dX^2} + \frac{dY}{dX} + \epsilon Y = 0$$

À la limite $\epsilon \rightarrow 0$, le terme Y disparaît, mais le terme de dérivée seconde reste : la nature de l'équation est préservée localement, permettant de satisfaire la condition aux limites manquante.

Le raccordement asymptotique (Matching)

Nous disposons alors de deux solutions adimensionnées distinctes :

- Une solution extérieure $y_{out}(x^*)$, valide loin de la paroi, basée sur l'échelle macroscopique L_{out} .
- Une solution intérieure $Y_{in}(X)$, valide dans la couche limite, basée sur l'échelle microscopique $L_{in} = \epsilon L_{out}$.

La reconstruction de la solution globale et physique repose sur le principe de raccordement asymptotique de Van Dyke : "La limite intérieure de la solution extérieure doit être égale à la limite extérieure de la solution intérieure".

$$\lim_{X \rightarrow \infty} Y_{in}(X) = \lim_{x^* \rightarrow 0} y_{out}(x^*) \quad (5.9)$$

Ce raccordement assure la continuité topologique de la grandeur physique à travers les échelles.

L'analyse dimensionnelle se révèle ici être un outil à géométrie variable. Elle montre qu'un système physique complexe ne possède pas une unique longueur caractéristique, mais plusieurs. L'adimensionnement n'est pas une opération statique effectuée au début du calcul, mais un processus dynamique qui doit s'adapter localement à la physique de la solution. Dans les codes de calcul adaptatifs (AMR - Adaptive Mesh Refinement), ce concept est implémenté numériquement : la taille de la maille Δx est ajustée pour que le nombre de Péclet de maille $Pe_{\Delta x} = u\Delta x/D$ reste d'ordre 1, mimant algorithmiquement la procédure théorique de redéfinition des échelles [13].

Chapitre 6

Implémentation Numérique et Calcul Scientifique

6.1 Arithmétique des ordinateurs

La traduction des modèles physiques continus en algorithmes discrets confronte le physicien à la réalité matérielle du calcul : les ordinateurs ne manipulent pas l'ensemble des réels \mathbb{R} , mais un sous-ensemble fini et discontinu noté \mathbb{F} , celui des nombres en virgule flottante. Cette distinction, souvent négligée lors de la modélisation théorique, devient critique lors de l'implémentation. L'absence de normalisation dimensionnelle, en conduisant à la manipulation de grandeurs aux ordres de grandeur disparates (des échelles atomiques aux échelles cosmologiques), exacerbe les limitations intrinsèques de l'arithmétique binaire, pouvant mener à des instabilités numériques sévères et à des résultats physiquement aberrants.

6.1.1 Représentation en virgule flottante (IEEE 754) et limites de précision

La norme IEEE 754, adoptée universellement pour le calcul scientifique, définit la représentation binaire des nombres réels. Un nombre flottant $x \in \mathbb{F}$ est représenté par un triplet (s, m, e) correspondant au signe, à la mantisse (ou significande) et à l'exposant :

$$x = (-1)^s \times (1.m)_2 \times 2^{e-B} \quad (6.1)$$

où B est le biais de l'exposant. En double précision (format *binary64*, standard en simulation numérique), la mantisse dispose de 52 bits (+1 bit implicite) et l'exposant de 11 bits.

Cette représentation induit deux limitations fondamentales pour la physique numérique : la dynamique (range) et la précision (gap).

Dynamique et Underflow/Overflow

L'exposant borné limite l'intervalle des valeurs représentables. En double précision, le plus grand nombre normalisé est de l'ordre de 10^{308} , et le plus petit nombre normalisé positif est de l'ordre de 10^{-308} . Si l'on utilise directement les unités SI pour simuler des phénomènes quantiques ou astrophysiques, on risque de heurter ces limites.

- **Underflow** : La constante de Planck $h \approx 6.6 \times 10^{-34}$ J.s est proche de la limite inférieure. Le carré de cette constante, fréquent dans les calculs de probabilités de transition, est de l'ordre de 10^{-67} . Bien que représentable, il s'approche de la zone

- des nombres dénormalisés (subnormaux), dont le traitement entraîne une perte drastique de précision et une pénalité de performance processeur importante.
- **Overflow** : En relativité générale ou en physique des plasmas, des densités d'énergie peuvent atteindre numériquement l'infini machine si les unités ne sont pas adaptées (ex : densité de Planck en unités SI $\approx 10^{96}$ kg/m³).

L'adimensionnement permet de recentrer toutes les variables physiques pertinentes dans un intervalle "sûr", typiquement $[10^{-5}, 10^5]$, loin des singularités de la représentation binaire.

Précision relative et Epsilon Machine

La densité des nombres flottants n'est pas uniforme : elle diminue à mesure que l'on s'éloigne de zéro. L'écart entre deux nombres flottants consécutifs au voisinage de x est proportionnel à x . Cette granularité est caractérisée par l'epsilon machine, ϵ_{mach} . Pour la double précision, $\epsilon_{mach} = 2^{-52} \approx 2.22 \times 10^{-16}$. Cela signifie que pour tout réel x , son approximation flottante $fl(x)$ satisfait :

$$fl(x) = x(1 + \delta) \quad \text{avec } |\delta| \leq \frac{1}{2}\epsilon_{mach} \quad (6.2)$$

Toute opération physique impliquant l'addition d'une grandeur très petite v à une grandeur très grande u est soumise à un seuil d'effacement. Si $|v| < |u| \cdot \epsilon_{mach}$, alors numériquement $u + v = u$. L'information physique portée par v est irrémédiablement perdue car la mantisse de u n'a pas assez de bits pour aligner celle de v . En utilisant les unités SI, additionner une perturbation gravitationnelle (accélération $\sim 10^{-5}$ m/s²) au champ de gravité de surface d'une étoile à neutrons ($\sim 10^{12}$ m/s²) sans précaution mathématique conduit à une disparition pure et simple de la perturbation, rendant la simulation inopérante.

6.1.2 Conditionnement numérique et prévention des erreurs d'annulation catastrophique

Au-delà de l'erreur d'arrondi élémentaire, le danger majeur en calcul scientifique réside dans la propagation et l'amplification de ces erreurs, quantifiées par le conditionnement des algorithmes.

Annulation catastrophique

L'annulation catastrophique se produit lors de la soustraction de deux nombres flottants très proches, a et b . Si a et b sont connus avec une erreur relative ϵ , et que $a \approx b$, le résultat $a - b$ peut ne contenir aucun chiffre significatif correct.

Exemple 6.1 (Calcul de dérivée numérique). Pour approximer une dérivée $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, si h est choisi trop petit (pour se rapprocher de la définition mathématique), les valeurs $f(x+h)$ et $f(x)$ seront identiques dans les premiers bits de leur mantisse. Leur soustraction ne laissera que le "bruit" des derniers bits.

L'utilisation d'unités inappropriées aggrave ce phénomène. Si les coordonnées spatiales sont exprimées en nanomètres pour un objet macroscopique, les valeurs x sont très grandes (10^9). Le calcul de distances locales Δx implique la soustraction de grands nombres pour obtenir un petit résultat, maximisant l'erreur relative. Un système d'unités normalisé par la taille caractéristique du maillage local permet de maintenir x et Δx dans des ordres de grandeur comparables, minimisant la perte de significativité [11].

Conditionnement des systèmes linéaires

La résolution de systèmes linéaires $Ax = b$ est au cœur des codes de simulation (éléments finis, volumes finis). La sensibilité de la solution x aux erreurs sur b (ou A) est donnée par le nombre de conditionnement $\kappa(A)$:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \kappa(A) \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}, \quad \text{avec } \kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \quad (6.3)$$

Pour une matrice symétrique définie positive, $\kappa(A) = |\lambda_{max}|/|\lambda_{min}|$, le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur propre. L'hétérogénéité dimensionnelle est une source primaire de mauvais conditionnement. Considérons une matrice de raideur en mécanique des structures mêlant des termes de flexion et de traction. Si les unités sont le mètre et le Newton, les termes peuvent varier de 10^6 à 10^{11} . Si l'on passe au millimètre, les termes d'ordre 4 (flexion) sont multipliés par 10^{12} tandis que les termes d'ordre 2 sont multipliés par 10^6 . Le spectre des valeurs propres s'étale (stiffness), faisant exploser $\kappa(A)$ et rendant la matrice numériquement singulière [12].

6.1.3 Importance de la normalisation pour la convergence des solveurs itératifs

Les grands systèmes linéaires creux issus de la discrétisation des équations aux dérivées partielles (EDP) sont résolus par des méthodes itératives (Gradient Conjugué, GMRES, Multigrid). La vitesse de convergence de ces méthodes dépend directement de la distribution des valeurs propres de la matrice du système.

Effet de l'adimensionnement sur le spectre

Une matrice bien conditionnée possède des valeurs propres regroupées (clustered), idéalement au voisinage de 1. L'adimensionnement des équations physiques agit comme un préconditionneur diagonal naturel à gauche et à droite. En substituant les variables physiques u par leurs homologues réduits $u^* = u/U_0$, on effectue implicitement un changement de base qui homogénéise les coefficients de la matrice.

- Sans normalisation : Les termes diagonaux de la matrice peuvent représenter des grandeurs physiquement différentes (masse, quantité de mouvement, énergie) avec des unités SI disparates (kg , $kg \cdot m/s$, J). Leurs valeurs numériques peuvent différer de facteurs 10^{20} , conduisant à des matrices extrêmement rigides (stiff). Les solveurs itératifs stagnent ou divergent, car les directions de recherche (vecteurs de Krylov) sont dominées par les composantes de grande amplitude numérique, négligeant les autres variables physiques pourtant couplées.
- Avec normalisation : Tous les termes de la diagonale deviennent des nombres sans dimension d'ordre $\mathcal{O}(1)$. Le spectre est resserré. Le solveur traite toutes les variables physiques avec un "poids" numérique équivalent, assurant une convergence rapide et robuste.

Préconditionnement et sens physique

Le préconditionnement est une technique algébrique consistant à résoudre $M^{-1}Ax = M^{-1}b$ où M est une approximation de A facile à inverser. La théorie de l'analyse dimensionnelle fournit la "meilleure" matrice diagonale M possible *a priori*, basée sur la physique du problème. Ignorer l'analyse dimensionnelle et espérer qu'un préconditionneur algébrique générique (comme Jacobi ou ILU) rattrapera les erreurs d'échelle est une pratique dangereuse.

Dans les problèmes non linéaires couplés (thermo-mécanique, magnéto-hydrodynamique), les échelles varient dynamiquement. Une normalisation statique basée sur les constantes fondamentales ou les conditions aux limites garantit que le point de départ de l'algorithme numérique reste dans le domaine de stabilité de l'arithmétique flottante, condition nécessaire pour que les théorèmes de convergence mathématique s'appliquent.

6.2 Architecture logicielle pour la gestion des unités

L'intégration de la rigueur dimensionnelle dans les logiciels de simulation scientifique ne se limite pas à une simple convention de nommage des variables. Elle exige une architecture logicielle capable de mapper l'espace vectoriel abstrait des dimensions \mathfrak{D} sur le système de types du langage de programmation. Deux paradigmes principaux s'opposent et se complètent : la gestion dynamique (à l'exécution), nécessaire pour les entrées/sorties et la configuration utilisateur, et la gestion statique (à la compilation), indispensable pour la performance et la vérification formelle des équations au sein du noyau de calcul (kernel).

6.2.1 Structures de données pour la conversion dynamique (Code Units vs Physical Units)

Dans un code de calcul multiphysique, il est impératif de séparer la représentation interne des données (optimisée pour la stabilité numérique) de leur représentation externe (compréhensible par l'utilisateur). Cette séparation repose sur le modèle de conception « Quantity », théorisé par Fowler [10], qui encapsule une valeur et son unité.

Cependant, pour le calcul intensif (HPC), l'encapsulation de chaque scalaire dans un objet complexe est trop coûteuse en mémoire et en temps processeur. L'architecture privilégiée est celle du « Système d'Unités Global ».

Le concept de Système d'Unités Interne

Le solveur numérique manipule des grandeurs adimensionnées ou normalisées, appelées *Code Units*. L'interface utilisateur manipule des grandeurs physiques réelles, appelées *Physical Units* (souvent SI ou CGS). La classe de gestion, que nous nommerons *UnitRegistry*, agit comme un médiateur. Elle stocke les facteurs d'échelle scalaires $\{L_0, M_0, T_0, \dots\}$ définissant la base de conversion.

Pour toute grandeur q , la relation entre la valeur stockée v_{code} et la valeur physique v_{phys} est linéaire :

$$v_{phys} = \mathcal{C}(D) \cdot v_{code} \quad (6.4)$$

Le coefficient de conversion $\mathcal{C}(D)$ dépend uniquement de la dimension D de la grandeur. Si D est représenté par le vecteur d'exposants $\alpha = (\alpha_L, \alpha_M, \alpha_T, \dots)$, alors :

$$\mathcal{C}(D) = L_0^{\alpha_L} M_0^{\alpha_M} T_0^{\alpha_T} \dots \quad (6.5)$$

Cette architecture permet de changer de système de normalisation (par exemple passer d'une normalisation basée sur la taille de boîte à une normalisation basée sur la densité critique de l'univers) sans modifier une seule ligne du cœur de calcul, simplement en réinitialisant les valeurs de base du *UnitRegistry* au démarrage.

6.2.2 Exemple d'implémentation robuste en C++

L'implémentation suivante illustre une classe C++ moderne permettant de définir un système d'unités arbitraire et de convertir n'importe quelle constante physique ou grandeur d'entrée vers le système interne du code. Elle gère également la cohérence des dimensions fractionnaires nécessaires pour certains systèmes naturels.

```

49     return value_si * factor;
50 }
51
52 // Conversion inverse pour les sorties (Output)
53 double to_physical(double value_code, const Dimension& dim) const {
54     double factor = std::pow(length_scale_si, -dim.L) *
55                     std::pow(mass_scale_si, -dim.M) *
56                     std::pow(time_scale_si, -dim.T);
57     return value_code * factor;
58 }
59 };
60
61 // Usage illustratif
62 void configure_simulation() {
63     // Définition d'un système d'unités galactiques
64     double kpc_in_m = 3.086e19;
65     double sun_mass_in_kg = 1.989e30;
66     double gyr_in_s = 3.154e16;
67
68     UnitSystem galactic_units(kpc_in_m, sun_mass_in_kg, gyr_in_s);
69
70     Dimension dim_G = {3.0, -1.0, -2.0, 0.0, 0.0}; // [L^3 M^-1 T^-2]
71     double G_SI = 6.67430e-11;
72
73     // Calcul de G dans le code. Si le système est cohérent, G_code approx
74     // 1.0
75     double G_code = galactic_units.to_code(G_SI, dim_G);
76 }
```

Listing 6.1 – Implémentation d'un convertisseur d'unités dynamique

Cet exemple démontre l'application de l'isomorphisme logarithmique décrit au chapitre 4 : la multiplication des unités physiques se traduit par une combinaison linéaire des logarithmes des facteurs d'échelle (implémentée ici via `std::pow` qui gère cette linéarisation dans l'espace des exposants).

6.2.3 Utilisation des templates et métaprogrammation pour la vérification dimensionnelle à la compilation

Si la gestion dynamique est nécessaire pour les I/O, elle n'offre aucune garantie de cohérence dimensionnelle au sein des algorithmes. Une erreur classique, telle que l'addition d'une vitesse et d'une position ($x_{new} = x_{old} + v$), est syntaxiquement valide pour des types `double` mais physiquement aberrante (inhomogène).

La métaprogrammation par templates en C++ permet de transférer la charge de l'analyse dimensionnelle du programmeur vers le compilateur. Cette technique, initiée par Barton et Nackman [3], repose sur le codage des dimensions dans le type même des variables.

Encodage des dimensions dans le système de types

On définit une structure template générique `Quantity<T, L, M, T_exp, ...>`, où T est le type scalaire sous-jacent (float, double) et les paramètres entiers (ou rationnels via `std::ratio`) représentent les exposants dimensionnels du vecteur $\text{dim} \in \mathbb{Z}^7$.

L'algèbre des dimensions est implémentée par surcharge des opérateurs.

- **Addition** : L'opérateur `+` n'est défini que pour deux opérandes ayant *exactement* les mêmes paramètres template. `Quantity<double, 1, 0, 0> + Quantity<double,`

- $1, 0, 0 \rightarrow \text{valide. Quantity<}double, 1, 0, 0\text{>} + \text{Quantity<}double, 0, 1, 0\text{>}$
 $\rightarrow \text{erreur de compilation.}$
- **Multiplication** : L’opérateur $*$ génère un nouveau type dont les paramètres sont la somme des paramètres des opérandes. $\text{Quantity<}double, L1, M1, T1\text{>} * \text{Quantity<}double, L2, M2, T2\text{>} \rightarrow \text{Quantity<}double, L1+L2, M1+M2, T1+T2\text{>}.$

Abstraction à coût nul (Zero-overhead abstraction)

L’avantage majeur de cette approche est l’absence de surcoût à l’exécution. Puisque les types sont résolus à la compilation, le compilateur génère un code binaire strictement identique à celui qui manipulerait des `double` nus. Les objets `Quantity` disparaissent, ne laissant que les instructions processeur arithmétiques. Cette propriété est essentielle pour le calcul haute performance où chaque cycle CPU compte.

```

1 template<int L, int M, int T>
2 struct Quantity {
3     double value;
4
5     explicit constexpr Quantity(double v) : value(v) {}
6
7     // Addition : exige stricte égalité des types (dimensions)
8     constexpr Quantity operator+(const Quantity& other) const {
9         return Quantity(value + other.value);
10    }
11
12    // Multiplication : le type de retour est déduit à la compilation
13    template<int L2, int M2, int T2>
14    constexpr auto operator*(const Quantity<L2, M2, T2>& other) const {
15        return Quantity<L + L2, M + M2, T + T2>(value * other.value);
16    }
17 };
18
19 // Définitions des types pour l'utilisateur
20 using Length = Quantity<1, 0, 0>;
21 using Time = Quantity<0, 0, 1>;
22 using Speed = Quantity<1, 0, -1>;
23
24 void physics_kernel() {
25     Length x(10.0);
26     Time t(2.0);
27
28     // auto v = x + t; // Erreur de compilation : pas d'opérateur +
29     // correspondant
30
31     auto v = x * Quantity<0, 0, -1>(1.0/t.value); // Calcul de vitesse
32     // Le type déduit de v est Quantity<1, 0, -1>, soit Speed.
33 }
```

Listing 6.2 – Métaprogrammation dimensionnelle (style C++ moderne)

Les bibliothèques modernes comme `mp-units` (proposée pour standardisation C++29) ou `Boost.Units` [23] poussent ce concept plus loin en intégrant les systèmes affines (températures en Celsius vs Kelvin) et les conversions rationnelles exactes à la compilation. Cela constitue la transposition informatique directe de l'espace vectoriel \mathfrak{D} défini formellement au chapitre 1, garantissant que l'invariance dimensionnelle des lois physiques est respectée par construction logicielle.

Bibliographie

- [1] Gerard 'T HOOFT et Martinus J. G. VELTMAN. « Regularization and renormalization of gauge fields ». In : *Nuclear Physics B* 44.1 (1972), p. 189-213.
- [2] Grigory I. BARENBLATT. *Scaling, Self-similarity, and Intermediate Asymptotics*. Cambridge : Cambridge University Press, 1996. ISBN : 978-0521435222.
- [3] John J. BARTON et Lee R. NACKMAN. « Scientific and Engineering C++ : An Introduction with Advanced Techniques and Examples ». In : *Computers in Physics* 9.1 (1995). Seminal work on dimensional analysis via templates, p. 1-6.
- [4] Carl M. BENDER et Steven A. ORSZAG. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers I : Asymptotic Methods and Perturbation Theory*. New York : Springer, 1999. ISBN : 978-0387989310.
- [5] Percy Williams BRIDGMAN. *Dimensional Analysis*. New Haven : Yale University Press, 1922.
- [6] Edgar BUCKINGHAM. « On Physically Similar Systems ; Illustrations of the Use of Dimensional Equations ». In : *Physical Review* 4.4 (1914), p. 345-376.
- [7] BUREAU INTERNATIONAL DES POIDS ET MESURES. *Le Système international d'unités (SI)*. Rapp. tech. Sèvres : BIPM, 2019. URL : <https://www.bipm.org/fr/publications/si-brochure/>.
- [8] Paul A. M. DIRAC. « The Cosmological Constants ». In : *Nature* 139 (1937), p. 323.
- [9] Michael J. DUFF. « Comment on time-variation of fundamental constants ». In : *arXiv preprint hep-th/0208093* (2002). CERN-TH/2002-176.
- [10] Martin FOWLER. *Patterns of Enterprise Application Architecture*. See pattern 'Quantity'. Boston : Addison-Wesley Professional, 2002.
- [11] David GOLDBERG. « What every computer scientist should know about floating-point arithmetic ». In : *ACM Computing Surveys (CSUR)* 23.1 (1991), p. 5-48.
- [12] Nicholas J. HIGHAM. *Accuracy and Stability of Numerical Algorithms*. 2^e éd. Philadelphia : SIAM, 2002.
- [13] E. J. HINCH. *Perturbation Methods*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge : Cambridge University Press, 1991.
- [14] John David JACKSON. *Classical Electrodynamics*. 3^e éd. New York : John Wiley & Sons, 1998.
- [15] JCGM. *Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)*. Rapp. tech. JCGM 100 :2008. Sèvres : Joint Committee for Guides in Metrology, 2008.
- [16] Brian D. JOSEPHSON. « Possible new effects in superconductive tunnelling ». In : *Physics Letters* 1.7 (1962), p. 251-253.

- [17] B. P. KIBBLE et G. J. HUNT. « A measurement of the gyromagnetic ratio of the proton by the strong field method ». In : *Metrologia* 15 (1976), p. 5.
- [18] Rolf LANDAUER. « Irreversibility and heat generation in the computing process ». In : *IBM Journal of Research and Development* 5.3 (1961), p. 183-191.
- [19] James Clerk MAXWELL. « Address to the Mathematical and Physical Sections of the British Association ». In : *Report of the British Association for the Advancement of Science*. Liverpool, 1870, p. 1-9.
- [20] David B. NEWELL et al. « CODATA 2017 recommended values of the fundamental physical constants ». In : *Metrologia* 55.1 (2018), p. L13.
- [21] Lev B. OKUN. « Fundamental Constants : Physics, Numerology and Metrology ». In : *arXiv preprint physics/0110060* (2002). Also in M.J. Duff, L.B. Okun, G. Veneziano, *JHEP* 0203 (2002) 023.
- [22] Max PLANCK. « On Irreversible Radiation Processes ». In : *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* 5 (1899). Original German title : Über irreversible Strahlungsvorgänge. Foundation of Planck Units., p. 440-480.
- [23] Matthias C. SCHABEL et Steven WATANABE. « Boost.Units : A C++ library for zero-overhead dimensional analysis ». In : *Proceedings of the BoostCon*. Aspen, Colorado, 2010.
- [24] Hermann SCHLICHTING et Klaus GERSTEN. *Boundary-Layer Theory*. 9^e éd. Berlin, Heidelberg : Springer, 2016.
- [25] Claude E. SHANNON. « A mathematical theory of communication ». In : *The Bell System Technical Journal* 27.3 (1948), p. 379-423.
- [26] Michael STOCK. « The Watt Balance : Determination of the Planck Constant and Redefinition of the Kilogram ». In : *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 369.1953 (2011), p. 3936-3953.
- [27] Jean-Philippe UZAN. « The fundamental constants and their variation : observational status and theoretical motivations ». In : *Reviews of Modern Physics* 75 (2003), p. 403.
- [28] Milton VAN DYKE. *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*. Annotated Edition. Stanford : Parabolic Press, 1975.
- [29] Gabriele VENEZIANO. « A stringy nature needs just two constants ». In : *Europhysics Letters* 167 (2002).
- [30] Klaus VON KLITZING, Gerhard DORDA et Michael PEPPER. « New method for high-accuracy determination of the fine-structure constant based on quantized Hall resistance ». In : *Physical Review Letters* 45.6 (1980), p. 494.
- [31] Robert M. WALD. *General Relativity*. Chicago : University of Chicago Press, 1984.
- [32] Kenneth G. WILSON. « The renormalization group : Critical phenomena and the Kondo problem ». In : *Reviews of Modern Physics* 47.4 (1975), p. 773.