

Étude expérimentale de la bifurcation supercritique d'un anneau en rotation : effets de géométrie finie et imperfections

Colin Bossu Réaubourg & Ayrton Tavares de Pinho

Licence 3 de Physique, Université Paris Cité

7 décembre 2025

Résumé

Ce rapport présente une analyse expérimentale de la dynamique d'un anneau rigide suspendu par une corde et mis en rotation, système illustrant une brisure spontanée de symétrie. L'objectif principal est de caractériser la transition entre l'état vertical stable et l'état incliné, identifiée comme une bifurcation fourche supercritique. À l'aide d'un dispositif motorisé et d'un traitement vidéo automatisé, l'angle d'inclinaison θ a été mesuré en fonction de la vitesse angulaire Ω pour différentes configurations de rayons et de longueurs de corde. Les résultats expérimentaux valident la loi d'échelle théorique du seuil d'instabilité $\Omega_c \propto R^{-1/2}$. Cependant, des écarts systématiques par rapport au modèle idéal de corde infinie sont mis en évidence, nécessitant l'introduction d'un modèle semi-empirique intégrant les effets de géométrie finie (rapport R/L). De plus, l'étude quantitative des imperfections, notamment le décentrage du point d'attache, a permis de caractériser une bifurcation imparfaite accompagnée de phénomènes d'hystérésis. Enfin, des régimes dynamiques alternatifs, tels que la compétition modale avec un pendule conique, sont discutés.

Table des matières

1	Introduction	3
2	Modélisation Théorique	3
2.1	Le modèle idéal : Corde infinie	3
2.2	Modèle amélioré : Effets de géométrie finie	4
2.3	Modèle réel : Imperfections et asymétries	4
3	Dispositif Expérimental et Méthodologie	4
3.1	Description du montage	4
3.2	Protocole de mesure et calibration	5
3.3	TraITEMENT des données et Analyse d'image	6
4	Résultats I : Caractérisation de la Bifurcation	6
4.1	Validation de la loi de seuil et universalité	7
4.2	Effets de géométrie finie : Validité de l'approximation corde longue	7
4.3	Cohérence géométrique du dispositif	8
5	Résultats II : Imperfections et Hystérésis	8
5.1	Caractérisation de la bifurcation imparfaite	8
5.2	Hystérésis et saut de branche	9
6	Investigations Complémentaires : Régimes Contraints et Limites	10
6.1	Interaction avec un plan et dynamique de Stick-Slip	10
6.2	Anneau lesté et compétition de modes	11
7	Discussion	12
7.1	Synthèse de l'accord théorie-expérience	12
7.2	Analyse des limites et sources d'erreur	13
8	Conclusion	13
	Références	13

1 Introduction

L'étude de la dynamique des corps rigides en rotation révèle fréquemment des comportements complexes où la compétition entre différentes forces conservatrices mène à des instabilités. Un exemple est celui d'un anneau suspendu à une corde et mis en rotation autour d'un axe vertical. À faible vitesse, l'anneau tourne simplement sur lui-même en restant vertical. Lorsque la vitesse de rotation augmente, la force centrifuge finit par l'emporter sur la gravité, provoquant le relèvement de l'anneau vers une position horizontale. Ce phénomène illustre une bifurcation supercritique, analogue mécanique aux transitions de phase du second ordre rencontrées en physique statistique.

Ce système a été formalisé par Frédéric Moisy [1], qui a établi l'équivalence de cette dynamique avec celle d'une perle glissant sur un cerceau en rotation. Le modèle théorique standard prédit une transition abrupte à une vitesse critique Ω_c dépendant uniquement de la gravité g et du rayon R de l'anneau. Toutefois, ce modèle repose sur l'hypothèse d'une corde de longueur infinie ($L \gg R$) et d'un système parfaitement symétrique. Dans les conditions réelles d'expérience, où la longueur de la corde est comparable au rayon de l'anneau, les contraintes géométriques et les défauts d'alignement modifient significativement la réponse du système.

L'objectif de cette étude est de dépasser le cadre du modèle idéal pour analyser quantitativement les effets de géométrie finie et les imperfections expérimentales. Nous cherchons à déterminer dans quelle mesure le rapport d'aspect R/L et les asymétries de montage (décentrage du nœud) influencent le seuil de bifurcation et la nature de la transition.

Ce rapport s'articule autour de la confrontation entre théorie et expérience. La section 2 exposera le modèle idéal avant d'introduire un modèle amélioré prenant en compte la géométrie de la corde et les imperfections. La section 3 décrira le dispositif expérimental et la méthodologie d'analyse vidéo automatisée développée pour minimiser les incertitudes de mesure. Les résultats expérimentaux majeurs, validant la loi de seuil et quantifiant les corrections géométriques, seront présentés dans la section 4. L'analyse des brisures de symétrie et des phénomènes d'hystéresis fera l'objet de la section 5. Enfin, la section 6 abordera brièvement des régimes dynamiques contraints avant de conclure sur la validité des modèles proposés.

2 Modélisation Théorique

Cette section synthétise les résultats théoriques nécessaires à l'interprétation des données expérimentales. Les démonstrations complètes et détaillées des équations présentées ici sont reportées en Annexe A.

2.1 Le modèle idéal : Corde infinie

Le modèle de référence, développé par Moisy, considère un anneau de rayon R et de masse m suspendu par une corde de longueur L supposée infinie devant le rayon ($L \gg R$). Dans cette approximation, le centre de masse de l'anneau reste aligné sur l'axe vertical de rotation. L'unique degré de liberté est l'angle de tangage θ par rapport à la verticale.

L'équation maîtresse du mouvement, obtenue par le formalisme lagrangien, s'écrit :

$$\ddot{\theta}(1 + 2 \sin^2 \theta) - (\Omega^2 - 2\dot{\theta}^2) \sin \theta \cos \theta + \Omega_c^2 \sin \theta = 0 \quad (1)$$

où Ω est la vitesse angulaire imposée et Ω_c est la vitesse critique définie par la compétition entre gravité et inertie géométrique :

$$\Omega_c = \sqrt{\frac{2g}{R}} \quad (2)$$

La recherche des états stationnaires ($\dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$) conduit à deux solutions :

1. La solution triviale $\theta_{eq} = 0$, stable pour $\Omega < \Omega_c$.

2. La solution bifurquée, stable pour $\Omega \geq \Omega_c$, donnée par :

$$\cos \theta_{eq} = \left(\frac{\Omega_c}{\Omega} \right)^2 \iff \Omega^2 = \frac{\Omega_c^2}{\cos \theta_{eq}} \quad (3)$$

Pour faciliter l'ajustement numérique aux petits angles, nous développons cette expression en série. En utilisant l'approximation $\theta \approx \tan \theta$, la loi de bifurcation idéale prend la forme parabolique suivante :

$$\Omega^2 \approx \Omega_c^2 + \frac{\Omega_c^2}{2} \tan^2 \theta \quad (4)$$

2.2 Modèle amélioré : Effets de géométrie finie

Dans notre configuration expérimentale, le rapport d'aspect $\lambda = R/L$ n'est pas négligeable (de l'ordre de 0,1 à 0,5). L'hypothèse de la corde verticale tombe en défaut : pour que le centre de masse reste sur l'axe de rotation, la corde doit s'incliner d'un angle α . La contrainte géométrique impose $L \sin \alpha = R \sin \theta$, soit pour les petits angles :

$$\alpha \approx \frac{R}{L} \theta \quad (5)$$

Cette inclinaison de la corde modifie l'énergie potentielle du système (le point d'attache de l'anneau s'élève) ainsi que l'inertie effective. Comme démontré en Annexe A, ces corrections conduisent à un raidissement de la courbe de bifurcation. Le terme quadratique de la loi de dispersion est modifié par un facteur correctif dépendant linéairement du rapport R/L . Nous définissons le paramètre de courbure amélioré B_{amlr} :

$$B_{amlr} = \frac{\Omega_c^2}{2} \left(1 + k \frac{R}{L} \right) \quad (6)$$

où k est un coefficient sans dimension regroupant les effets géométriques et inertIELS.

2.3 Modèle réel : Imperfections et asymétries

Enfin, les données expérimentales montrent que l'angle θ n'est jamais strictement nul, même à faible vitesse de rotation. Ceci est la signature d'une *bifurcation imparfaite*, causée par des brisures inévitables de la symétrie du système (nœud d'attache décentré, axe moteur non parfaitement vertical, etc.).

Une telle asymétrie statique, équivalente à l'application d'un léger couple constant ou à un décalage vertical z_p du centre de masse, brise l'invariance de l'équation par la transformation $\theta \rightarrow -\theta$. Mathématiquement, cela se traduit par l'ajout d'un terme qui lève la dégénérescence des solutions. La forme normale d'une bifurcation fourche imparfaite inclut un paramètre d'imperfection constant qui "arrondit" la transition [3]. Pour notre système, cet effet introduit un terme singulier en $1/\tan \theta$ dans l'équation d'équilibre. L'équation finale utilisée pour modéliser nos résultats expérimentaux est donc :

$$\Omega^2(\theta) = \Omega_c^2 + B_{amlr} \tan^2 \theta - \frac{H}{\tan \theta} \quad (7)$$

Ici, H est le paramètre d'imperfection, homogène à une accélération angulaire au carré [$\text{rad}^2 \text{s}^{-2}$]. Ce modèle à trois paramètres (Ω_c , B_{amlr} , H) permet de décrire continûment le passage de l'état quasi-vertical à l'état incliné, sans discontinuité abrupte, capturant ainsi la réalité physique du dispositif.

3 Dispositif Expérimental et Méthodologie

3.1 Description du montage

Le dispositif expérimental a été conçu pour permettre une variation précise des paramètres géométriques (R , L) et dynamiques (Ω). Il est constitué des éléments suivants :

- **Motorisation** : Un moteur à courant continu est fixé sur un support rigide en hauteur. Il entraîne l'extrémité supérieure de la corde autour de l'axe vertical.
- **Système anneau-corde** : Nous avons utilisé un jeu d'anneaux rigides de rayons R variés (mesurés au pied à coulisse ou à la règle graduée selon la taille) et de masses m connues. La corde, choisie pour sa faible rigidité en torsion, voit sa longueur L ajustée entre chaque série de mesures.
- **Acquisition** : Une caméra numérique est positionnée latéralement, son axe optique étant perpendiculaire au plan vertical contenant l'axe de rotation. Un écran blanc et un éclairage diffus sont placés en arrière-plan pour maximiser le contraste et faciliter la détection des contours.

Une attention particulière a été portée à l'alignement vertical du moteur et au centrage du point d'attache sur l'anneau afin de minimiser les imperfections statiques initiales.

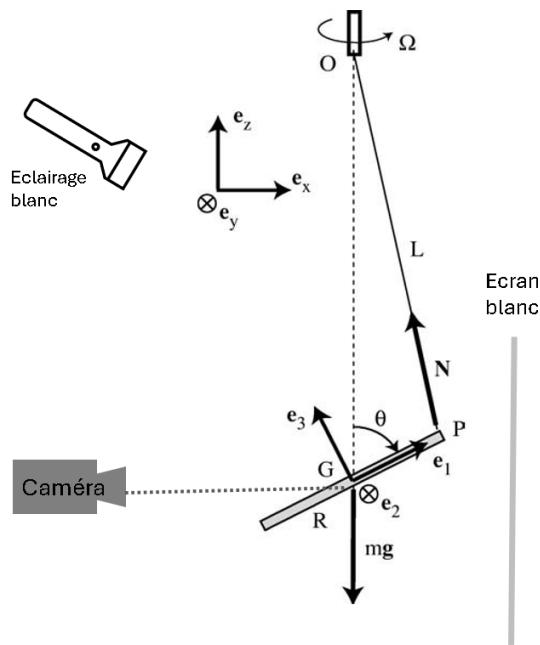


FIGURE 1 – Schéma de principe du dispositif. Le moteur entraîne le point O . L'anneau de rayon R est attaché en P par une corde de longueur L . L'analyse vidéo permet d'extraire l'angle θ par projection géométrique.

3.2 Protocole de mesure et calibration

La variable de contrôle est la vitesse angulaire Ω , pilotée indirectement par la tension électrique U aux bornes du moteur.

Calibration de la vitesse : La relation linéaire $\Omega(U) = aU + b$ a été établie à l'aide d'un stroboscope. Cette méthode a été privilégiée par rapport à l'utilisation d'un tachymètre numérique, car elle offre une meilleure précision (incertitude d'environ $\pm 0,05 \text{ rad s}^{-1}$ contre $\pm 1 \text{ rad s}^{-1}$ pour le tachymètre) et ne perturbe pas la rotation puisqu'elle ne nécessite aucun contact mécanique. Pour chaque tension imposée au générateur, on ajuste la fréquence du stroboscope jusqu'à obtenir visuellement l'immobilité de l'anneau.

Acquisition par paliers : Pour chaque configuration (R, L) , la tension est augmentée par incrément discrets. À chaque palier, un temps d'attente est respecté pour permettre l'amortissement des régimes transitoires et de la torsion du fil. Une séquence vidéo est enregistrée une fois le régime stationnaire atteint.

3.3 Traitement des données et Analyse d'image

L'extraction de l'angle d'inclinaison θ est automatisée via un script Python utilisant la bibliothèque OpenCV.

Détection de l'anneau : L'algorithme applique un filtre de Canny, suivi d'opérations morphologiques, afin d'isoler les contours de l'anneau sur chaque image de la vidéo. La géométrie du système est prise en compte pour améliorer la détection, notamment la présence de la ficelle ainsi que le point d'attache entre l'anneau et celle-ci (voir Fig. 2).

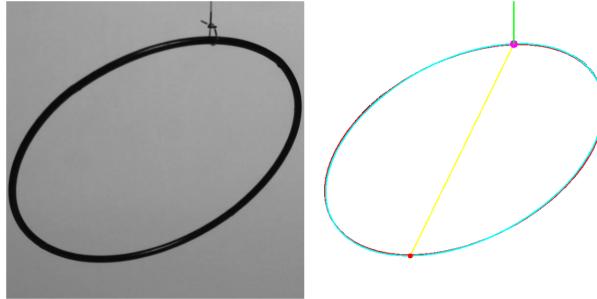


FIGURE 2 – Gauche : prise de vue d'un anneau en rotation. Droite : image traitée par l'algorithme de détection.

Calcul de l'angle : L'anneau incliné apparaît comme une ellipse par projection. L'angle θ est calculé à partir du rapport entre la hauteur verticale projetée de l'anneau (D_{vert}) et son grand axe (A_{maj}) :

$$\theta = \arccos \left(\min \left(\frac{D_{vert}}{A_{maj}}, 1 \right) \right) \quad (8)$$

Cette méthode est plus robuste aux distorsions optiques que l'utilisation du petit axe de l'ellipse. Une correction systématique du "point zéro" ($\theta_{corr} = \theta_{mes} - \theta_{offset}$) est appliquée pour soustraire l'angle résiduel mesuré à très basse vitesse.

Modèle d'incertitude pondérée : Pour les ajustements théoriques ultérieurs, une incertitude u_Ω est associée à chaque point de mesure. Elle ne se limite pas à la précision instrumentale, mais intègre la qualité dynamique de la mesure via la relation quadratique :

$$u_\Omega^2 = u_{calib}^2 + u_{stabilit}^2 + u_{mono}^2 \quad (9)$$

- u_{calib} est l'incertitude instrumentale propagée à partir de la loi de calibration linéaire $\Omega = aU + b$. Elle combine l'incertitude de lecture sur la tension u_U et les incertitudes statistiques sur les coefficients de régression a et b obtenus au stroboscope.
- $u_{stabilit}$ pénalise les vidéos où l'angle oscille fortement autour de sa moyenne (instabilité temporelle ou turbulence).
- u_{mono} pénalise les points incohérents qui violeraient la monotonie attendue de la courbe de réponse (hystérésis ou erreurs de détection).

Cette pondération garantit que l'ajustement des paramètres Ω_c , k et H repose prioritairement sur les états d'équilibre stables et fiables.

4 Résultats I : Caractérisation de la Bifurcation

Cette section présente l'analyse des mesures effectuées sur la branche principale de bifurcation (angles positifs). Nous nous attachons ici à valider les lois d'échelle fondamentales régissant le seuil d'instabilité et à quantifier les déviations par rapport au modèle idéal induites par la géométrie finie de la corde.

4.1 Validation de la loi de seuil et universalité

Pour vérifier la dépendance du seuil d'instabilité vis-à-vis des paramètres physiques, nous avons réalisé une série de mesures en faisant varier le rayon de l'anneau R sur une large gamme (de quelques centimètres à plus de 10 cm), tout en maintenant les autres paramètres constants.

Pour chaque configuration, la courbe expérimentale $\theta = f(\Omega)$ a été ajustée par le modèle théorique complet (incluant l'imperfection H) afin d'extraire précisément la valeur asymptotique de la vitesse critique Ω_c .

La figure 3 (gauche) trace l'évolution de la vitesse critique expérimentale en fonction du rayon de l'anneau. Les données s'alignent remarquablement sur la loi de puissance théorique :

$$\Omega_c(R) \propto R^{-1/2} \quad (10)$$

L'accord quantitatif est acceptable (Khi-deux réduit : 1.1097), validant que le mécanisme fondamental de l'instabilité est bien régi par la compétition entre l'accélération de la pesanteur g et l'accélération centrifuge à l'échelle R .

De plus, en normalisant les axes — l'angle θ en fonction de la vitesse réduite Ω/Ω_c — l'ensemble des jeux de données, malgré leurs rayons différents, se superpose sur une courbe maîtresse unique (figure de droite). Ce collapsus des données confirme l'universalité du phénomène de bifurcation supercritique pour ce système : la dynamique ne dépend plus des dimensions absolues de l'objet une fois rapportée à ses échelles caractéristiques.

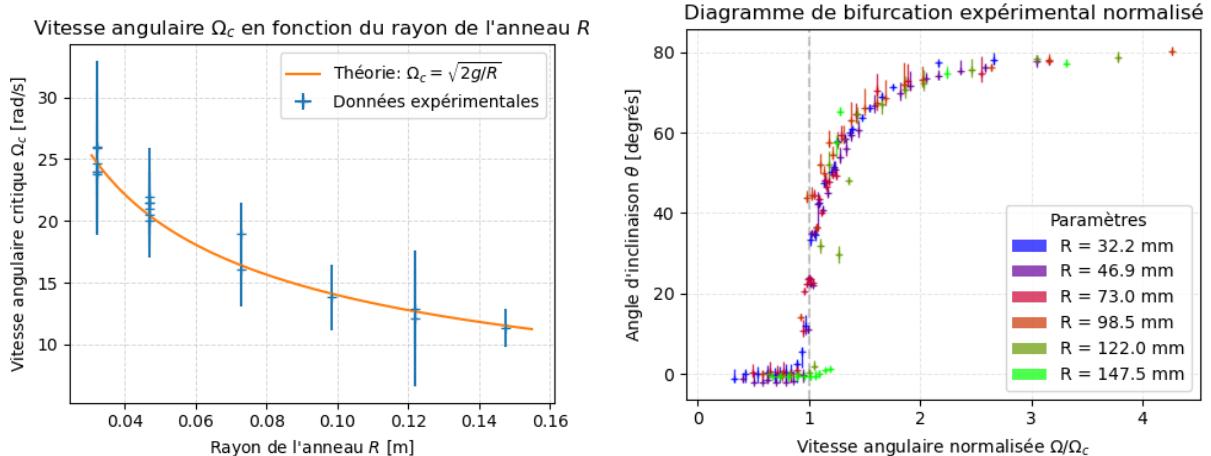


FIGURE 3 – Gauche : Comparaison de la vitesse critique mesurée Ω_c (points) avec la prédiction théorique $\sqrt{2g/R}$ (ligne continue) en fonction du rayon R . Droite : Diagramme de bifurcation normalisé regroupant les mesures pour différents rayons, illustrant l'universalité de la transition.

4.2 Effets de géométrie finie : Validité de l'approximation corde longue

Si la position du seuil Ω_c est conforme au modèle idéal, la "raideur" de la bifurcation (la vitesse à laquelle l'angle augmente une fois le seuil franchi) présente des divergences systématiques. Le modèle de la corde infinie prédit une relation de la forme $\Omega^2 \approx \Omega_c^2 + B_{ideal} \tan^2 \theta$, avec $B_{ideal} = \Omega_c^2/2$.

Or, nos ajustements expérimentaux révèlent systématiquement un coefficient de courbure expérimental B_{exp} supérieur à la valeur théorique idéale. Cela signifie que l'anneau est plus "difficile" à lever que prévu : une vitesse de rotation supérieure est nécessaire pour atteindre un angle donné.

Nous avons testé l'hypothèse selon laquelle cet écart provient du rapport d'aspect fini $\lambda = R/L$. En faisant varier la longueur de la corde L pour un anneau donné, nous avons tracé l'évolution du facteur de correction k défini par :

$$B_{exp} = B_{ideal} \left(1 + k \frac{R}{L} \right) \quad (11)$$

Les résultats montrent une corrélation linéaire positive entre l'excès de raideur et le rapport R/L . Lorsque L devient grand devant R (rapport $R/L \rightarrow 0$), le coefficient expérimental tend bien vers la valeur du modèle idéal. Inversement, pour des cordes courtes, l'inclinaison nécessaire de la corde (angle α) introduit un coût énergétique supplémentaire qui raidit la réponse du système. Ce résultat valide la nécessité du modèle amélioré présenté en section théorique pour décrire quantitativement l'expérience.

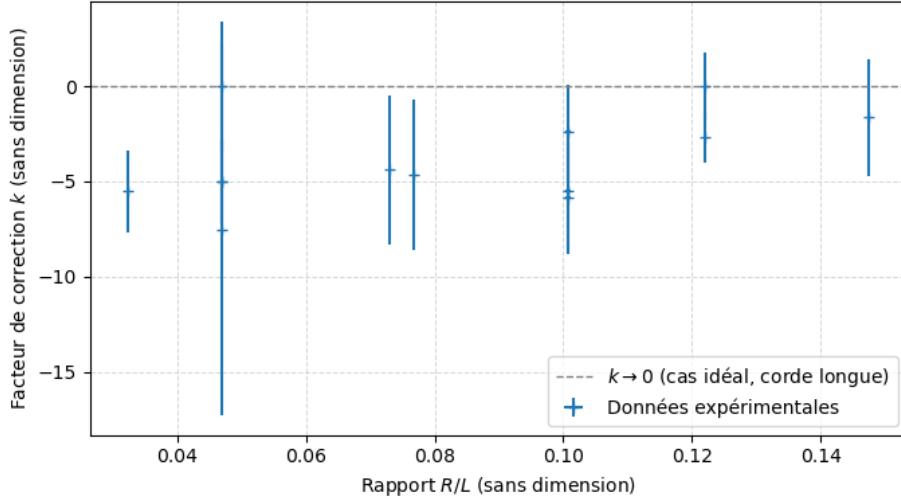


FIGURE 4 – Évolution de l'écart au modèle idéal en fonction du rapport géométrique R/L . La tendance confirme que les effets de taille finie rigidifient le système.

4.3 Cohérence géométrique du dispositif

Enfin, pour valider la robustesse de notre chaîne de traitement d'image, nous avons vérifié la cohérence géométrique interne des mesures. Théoriquement, l'élévation du centre de masse de l'anneau est directement liée à son inclinaison par la relation $z_G \propto -\cos \theta$.

Nous avons corrélé la position verticale du centre de l'ellipse détectée (en pixels) avec le cosinus de l'angle mesuré pour chaque image. La relation obtenue est strictement linéaire avec une faible dispersion. Cette vérification confirme deux points :

1. L'algorithme de détection d'ellipse interprète correctement la forme 2D projetée comme un objet 3D en rotation.
2. Le mouvement parasite de translation verticale du point d'attache (dû à l'élasticité de la corde) est négligeable devant le mouvement géométrique de basculement.

5 Résultats II : Imperfections et Hystérésis

Si la section précédente a validé la structure globale de la bifurcation, les données brutes révèlent que l'angle d'inclinaison n'est jamais strictement nul en deçà du seuil critique. Cette observation motive l'étude approfondie des brisures de symétrie, où nous avons délibérément amplifié les imperfections du système pour en caractériser la signature dynamique.

5.1 Caractérisation de la bifurcation imparfaite

Dans un système idéalement symétrique, l'équation de bifurcation est invariante par la transformation $\theta \rightarrow -\theta$. Cependant, le décentrage inévitable du nœud de fixation ou une légère inclinaison de l'axe moteur introduit un terme de brisure de symétrie.

Pour quantifier cet effet, nous avons ajusté nos données expérimentales avec le modèle complet incluant le terme d'imperfection H (équation 7). La Figure 5 compare les mesures effectuées sur un anneau "naturel" (imperfection minime) et sur un anneau dont le point d'attache a été volontairement décentré.

On observe que la transition n'est plus anguleuse à Ω_c , mais arrondie. L'anneau commence à s'incliner progressivement dès les faibles vitesses de rotation. L'ajustement théorique capture parfaitement ce comportement : le paramètre H permet de reproduire la courbure de la "branche préférentielle" qui relie continûment l'état quasi-vertical à l'état horizontal sans passer par une singularité. Cette analyse confirme que la bifurcation observée est de nature *imparfaite*, le système "choisisant" son sens d'inclinaison dès le démarrage à cause de l'asymétrie statique initiale.

L'ajustement de la figure 5 nous donne que $\Omega_c = (16,07 \pm 0,78) \text{ s}^{-1}$, $H = (3,73 \pm 0,90) \text{ rad}^2/\text{s}^2$ et $k = (-5,74 \pm 0,90)$ pour un anneau de $R = 73 \text{ mm}$ et une ficelle de longueur $L = 1 \text{ m}$.

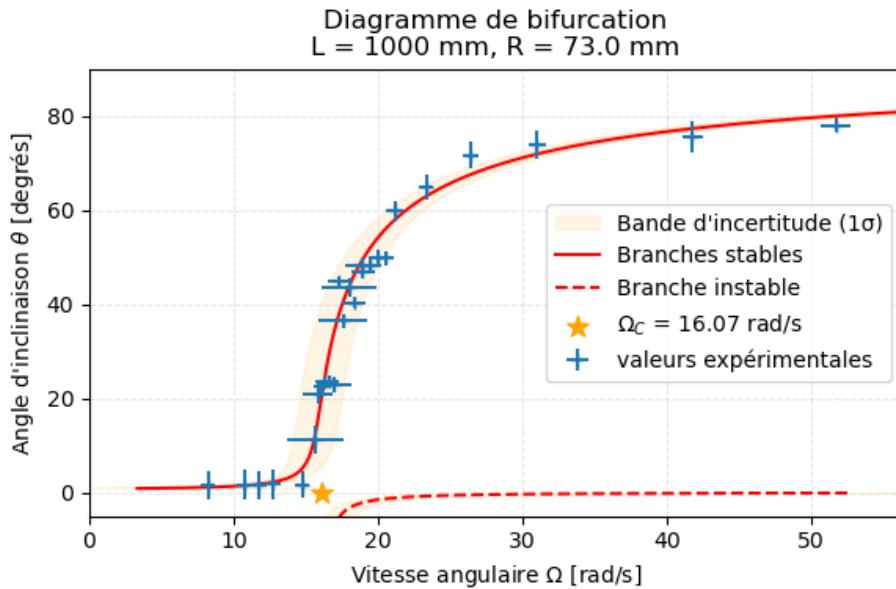


FIGURE 5 – Diagramme de bifurcation expérimental avec ajustement du modèle complet. La courbe rouge (ajustement incluant le terme $H/\tan \theta$) épouse les données expérimentales (points bleus) et montre l'arrondi caractéristique de la transition au voisinage du seuil.

5.2 Hystérésis et saut de branche

La théorie des bifurcations imparfaites prédit l'existence d'une seconde branche de solutions, stable mais séparée de la branche principale par une zone instable. Pour accéder à cette branche « défavorable » (correspondant à une inclinaison opposée au défaut statique), nous avons mis en œuvre un protocole de forçage : l'anneau est d'abord lancé à haute vitesse ($\Omega > \Omega_c$), puis contraint manuellement vers l'angle négatif avant d'être relâché. Pour garantir une imperfection suffisamment marquée, nous avons volontairement décalé l'attache du fil d'environ 2 cm à l'aide d'un morceau de scotch.

Il n'existe pas de modèle théorique établi pour la géométrie particulière de notre dispositif. Cette absence n'est toutefois pas un obstacle majeur : notre objectif principal était avant tout de mettre en évidence l'existence de la seconde branche et du saut entre branches, plutôt que d'effectuer une comparaison quantitative détaillée avec une théorie.

Une fois stabilisé sur cette branche métastable, nous avons progressivement réduit la vitesse de rotation (rampe descendante). Les résultats, présentés en Fig. 6, mettent clairement en évidence un phénomène d'hystérésis marqué :

1. **Phase stable** : À haute vitesse, l'anneau se maintient sur la branche négative.

2. **Point de basculement :** Lorsque la vitesse diminue au-dessous d'une valeur limite (différente de Ω_c), l'anneau décroche brutalement.
3. **Saut :** Il transite violemment vers la branche positive, c'est-à-dire la branche préférentielle.

La Figure 7 détaille la dynamique temporelle de ce basculement. On y observe le passage soudain d'un équilibre à un autre, caractéristique d'une bifurcation col-noeud (saddle-node). Ce cycle d'hystérésis — chemin aller sur la branche positive, chemin retour forcé sur la branche négative avec saut — valide expérimentalement la topologie complète des solutions du modèle réel avec imperfections.

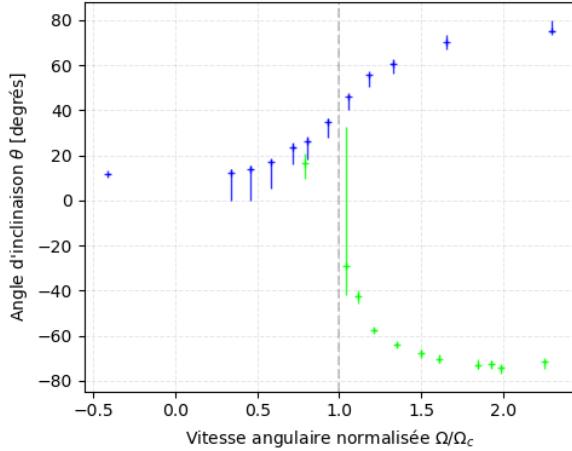


FIGURE 6 – Cycle d'hystérésis. En bleu : montée naturelle sur la branche positive. En vert : descente forcée sur la branche négative. Le point de mesure d'incertitude étendue indique le saut brutal de l'anneau vers la branche positive lorsque la solution négative disparaît.

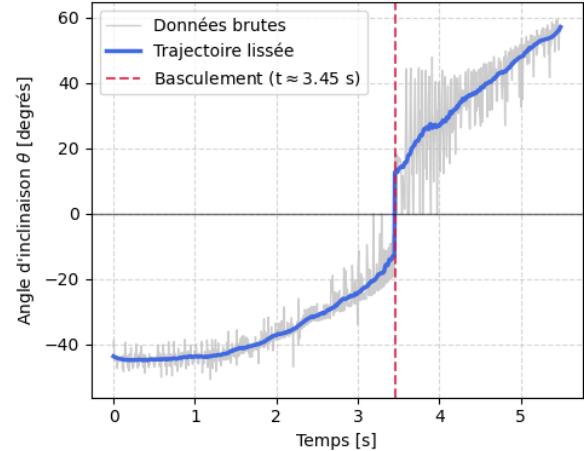


FIGURE 7 – Visualisation temporelle du basculement. L'angle θ (reconstruit avec son signe) passe brutalement d'une valeur négative stable à une valeur positive lors de la décroissance de Ω . Les données ont été lissées à l'aide d'un filtre de Savitzky-Golay. [2]

6 Investigations Complémentaires : Régimes Constraints et Limites

Au-delà de la bifurcation standard, nous avons exploré deux configurations limites mettant en jeu des contraintes mécaniques supplémentaires. Ces expériences permettent d'analyser la réponse du système lorsqu'il est soumis à un frottement solide ou à une modification drastique de la répartition de masse.

6.1 Interaction avec un plan et dynamique de Stick-Slip

Dans cette configuration, un plan horizontal rigide est positionné à une hauteur H_{sol} sous le point de pivot, de sorte que l'anneau ne puisse atteindre sa position d'équilibre verticale ($\theta = 0$). Le système est ainsi contraint à une inclinaison minimale θ_{min} , déterminée par la géométrie du montage. L'anneau ne peut quitter ce support que si la vitesse de rotation dépasse un seuil de décollage, Ω_{lift} , où la force centrifuge devient suffisante pour le soulever.

Pour des vitesses inférieures au seuil de décollage ($\Omega < \Omega_{lift}$), l'anneau frotte contre le support. L'analyse des séries temporelles de l'angle $\theta(t)$ révèle un mouvement non pas fluide, mais saccadé. Ce comportement est la signature d'une dynamique de type "Stick-Slip" (accrochage-glissement), qui résulte de l'interaction entre le frottement solide (décrit par la loi de Coulomb) et l'élasticité de torsion de la ficelle. Le cycle se décompose en deux phases distinctes :

1. **Phase d'accrochage (Stick) :** L'anneau est immobile par rapport au support ($\dot{\phi} = 0$). La rotation imposée par le moteur accumule de l'énergie potentielle élastique dans la ficelle,

augmentant le couple de torsion.

2. **Phase de glissement (Slip) :** Lorsque le couple de torsion excède le seuil de frottement statique, l'anneau se libère brusquement. L'énergie accumulée est violemment restituée, provoquant une brève accélération angulaire (overshoot) durant laquelle l'angle d'inclinaison augmente temporairement. L'anneau se stabilise rapidement à une nouvelle position, où le cycle d'accrochage recommence.

Cette dynamique intermittente a une conséquence directe sur la distribution des angles mesurés. Pour une vitesse angulaire donnée, l'anneau passe la majorité de son temps soit en position statique à l'angle θ_{min} , soit brièvement à des angles supérieurs durant la phase de glissement. La distribution des angles mesurés sur une séquence vidéo est donc attendue comme étant bimodale. Pour visualiser cette caractéristique, les données expérimentales sont représentées à l'aide de diagrammes en violon (Figure 8), qui exposent la densité de probabilité complète des mesures plutôt qu'une simple moyenne. On remarque que les points des deux expériences se rejoignent passé la vitesse de bifurcation, ce qui montre bien que le système tend à aller vers son équilibre.

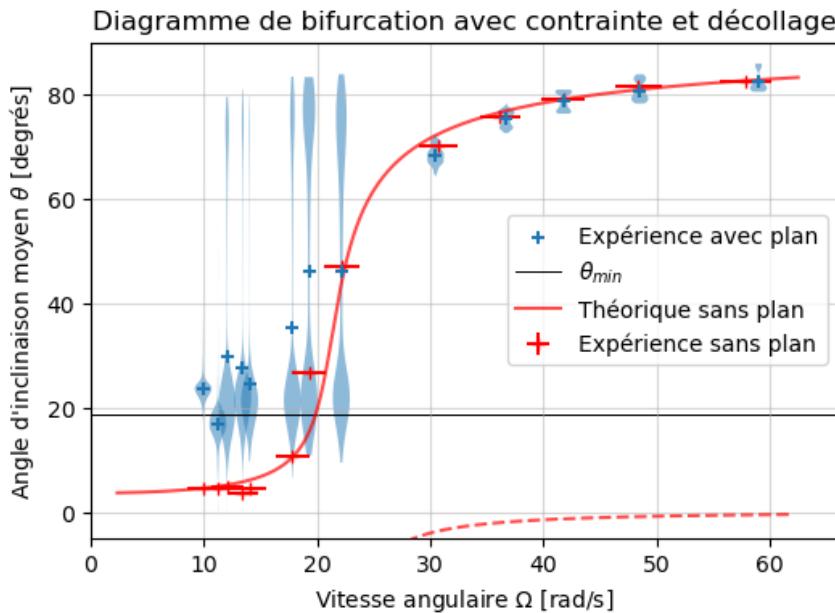


FIGURE 8 – Diagramme de bifurcation pour le système contraint par un plan horizontal. Les données sont représentées par des diagrammes en violon afin de visualiser la distribution des angles mesurés à chaque vitesse angulaire. La forme bimodale des distributions pour $\Omega < \Omega_{lift}$ met en évidence la dynamique de Stick-Slip : le pic principal, à angle faible, correspond à la phase d'accrochage à l'angle minimal θ_{min} , tandis que le pic secondaire, à des angles plus élevés, représente la phase de glissement transitoire. Ces résultats sont comparés à une expérience non contrainte (points bleus) réalisée avec les mêmes paramètres ($L = 1185$ mm, $R = 46,9$ mm).

6.2 Anneau lesté et compétition de modes

Une dernière configuration a été étudiée en lestant l'anneau ($m = 30,027(1)$ g) avec une masse ponctuelle $M = 100,645(1)$ g fixée à son nadir. L'objectif initial était de quantifier le déplacement du seuil de bifurcation dû à la modification de la position du centre de masse global.

Cependant, les observations expérimentales ont révélé une suppression complète de la bifurcation de tangage (mode "hula-hoop"). Au lieu de s'incliner sur lui-même, l'ensemble anneau-masse s'est écarté de la verticale en bloc, décrivant un mouvement orbital caractéristique d'un pendule conique. Comme l'illustre la 9, le système reste vertical bien au-delà du seuil théorique Ω_c^* calculé pour le mode de tangage. L'inclinaison observée à plus haute vitesse suit une dépendance quasi linéaire, en désaccord avec la loi en racine carrée attendue pour la bifurcation supercritique.

Ce comportement s'interprète comme une compétition entre modes d'instabilité. L'ajout d'une masse $M \gg m$ a deux effets concurrents :

1. Il augmente la tension dans la ficelle, ce qui accroît la raideur effective du système contre le tangage et *augmente* le seuil Ω_c^* du mode anneau.
2. Il abaisse significativement le centre de masse global, augmentant la longueur pendulaire effective L_{eq} . Ceci a pour effet de *diminuer* le seuil d'instabilité du mode pendulaire, $\Omega_{pend} \approx \sqrt{g/L_{eq}}$.

Le seuil du mode pendulaire devenant inférieur à celui du mode anneau ($\Omega_{pend} < \Omega_c^*$), le système bifurque prématurément vers le régime pendulaire. Ce dernier devient le mode stable dominant, rendant la bifurcation de tangage expérimentalement inaccessible dans cette configuration.

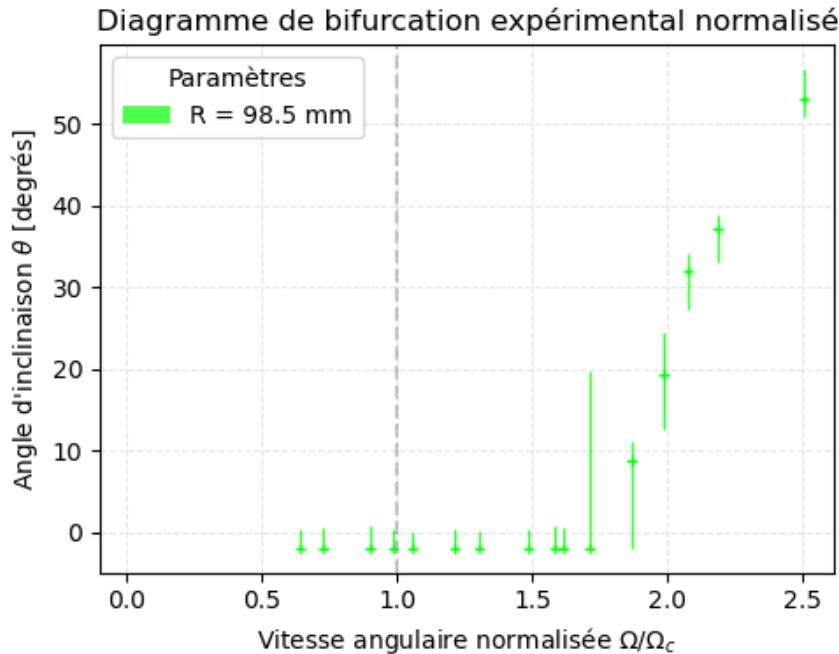


FIGURE 9 – Diagramme de bifurcation pour l'anneau lesté ($m = 30,027(1)$ g, $M = 100,645(1)$ g). La vitesse angulaire Ω est normalisée par le seuil théorique Ω_c^* du mode de tangage. Les données expérimentales (points bleus) montrent que l'anneau reste vertical ($\theta \approx 0$) bien au-delà du seuil attendu ($\Omega/\Omega_c^* = 1$). La branche théorique de la bifurcation supercritique (courbe rouge) n'est pas suivie. La levée observée, de nature pendulaire, est retardée et suit une loi différente.

7 Discussion

L'ensemble des résultats présentés dans ce rapport permet de dresser un bilan critique de la validité des modèles théoriques face à la réalité expérimentale.

7.1 Synthèse de l'accord théorie-expérience

Le résultat le plus robuste de cette étude est la validation de la loi d'échelle du seuil d'instabilité. La relation $\Omega_c \propto R^{-1/2}$ est vérifiée, confirmant que le mécanisme fondamental de la bifurcation est dominé par la compétition inertie/gravité, indépendamment des détails du montage.

Cependant, l'analyse quantitative montre les limites du modèle de la "corde infinie" de Moisy. Nos mesures mettent en évidence une erreur systématique sur la courbure de la bifurcation (le paramètre B) lorsque le rapport R/L n'est pas négligeable. L'introduction du modèle amélioré, intégrant un facteur correctif géométrique $(1 + kR/L)$, s'est avérée nécessaire pour ajuster correctement les

données. Cela souligne l'importance de prendre en compte les contraintes cinématiques de la corde (angle α) qui induisent un raidissement effectif du système.

7.2 Analyse des limites et sources d'erreur

Bien que le modèle statique avec imperfections (H) capture l'essentiel des positions d'équilibre, certains aspects dynamiques ont été négligés :

- **Rôle de la torsion** : L'expérience Stick-Slip a démontré que la corde stocke de l'énergie de torsion. Dans le régime de bifurcation standard, cette torsion introduit un temps de retard (τ_s) entre la commande moteur et la réponse de l'anneau. Cela nous a contraints à respecter des temps de stabilisation longs (plusieurs secondes) entre chaque mesure, limitant la possibilité d'acquérir des diagrammes à résolution temporelle plus élevée.
- **Frottements fluides** : Le modèle conservatif néglige la résistance de l'air. Or, à haute vitesse de rotation, le couple de traînée aérodynamique devient significatif ($\propto \Omega^2$). Bien que cela n'affecte pas la position du seuil Ω_c , les frottements jouent un rôle crucial dans l'amortissement des oscillations transitoires et déterminent la stabilité asymptotique des branches à très haute vitesse.

8 Conclusion

Ce travail expérimental a permis de caractériser en détail la dynamique d'un anneau en rotation suspendu, système paradigmatic de la brisure spontanée de symétrie en mécanique.

Nos résultats valident l'existence d'une bifurcation de type fourche supercritique au-delà d'une vitesse seuil Ω_c . L'apport principal de cette étude réside dans la quantification des écarts au modèle idéal :

1. Nous avons démontré que la géométrie finie du dispositif (rapport R/L) rigidifie le système, déplaçant la réponse angulaire par rapport à la théorie de la corde infinie.
2. Nous avons caractérisé la nature *imparfaite* de la bifurcation réelle. L'introduction du paramètre d'asymétrie H a permis de modéliser l'évolution continue de l'angle et d'expliquer les phénomènes d'hystérésis observés lors des cycles de montée et descente en vitesse.

Au-delà de l'étude statique, les investigations sur les régimes contraints ont révélé la richesse dynamique du système, allant des oscillations de relaxation (Stick-Slip) à la compétition modale avec le pendule conique. Pour des travaux futurs, l'utilisation d'une caméra à haute fréquence permettrait d'étudier la dynamique non-linéaire fine au voisinage du seuil, notamment le phénomène de ralentissement critique (critical slowing down) qui n'a pu être qu'entrepris dans cette étude.

Références

- [1] Frédéric Moisy. Supercritical bifurcation of a spinning hoop. *American Journal of Physics*, 71(10) :999–1004, October 2003.
- [2] Abraham Savitzky and M. J. E. Golay. Smoothing and differentiation of data by simplified least squares procedures. *Analytical Chemistry*, 36(8) :1627–1639, July 1964.
- [3] Steven H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos : With Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering*. Westview Press, 2nd edition, 2015.