
Analyse d'un Système Granulaire Discret

Dynamique, Sédimentation et Stabilité

Colin BOSSU RÉAUBOURG

17 janvier 2024

Résumé

Ce rapport présente une analyse multi-échelle d'un système granulaire discret, depuis la dynamique d'une particule unique jusqu'au comportement collectif de l'empilement final. L'étude débute par la modélisation de la dynamique d'un grain isolé en chute libre. En utilisant le formalisme de Lagrange et en considérant les forces de pesanteur ainsi qu'une traînée aérodynamique quadratique, nous établissons les équations du mouvement. La résolution analytique de ces équations permet de déterminer la vitesse de chute en fonction du temps, la vitesse limite asymptotique, et l'énergie cinétique à l'impact.

La seconde partie se concentre sur la transition vers l'échelle macroscopique, où la sédimentation séquentielle de N grains conduit à la formation d'un empilement conique. En s'appuyant sur les concepts fondamentaux d'angle de repos et de compacité, des relations analytiques sont dérivées pour prédire les caractéristiques géométriques de l'état final, notamment la hauteur maximale et le rayon de la base du cône, en fonction du nombre de grains et de leur volume.

Enfin, la stabilité de l'empilement est analysée face à diverses sollicitations. L'impact d'un grain supplémentaire est étudié, mettant en évidence le déclenchement d'avalanches comme un mécanisme de retour à l'état critique, caractéristique de la criticité auto-organisée. L'influence de perturbations externes est également examinée, incluant l'effet déstabilisateur des vibrations verticales et le double rôle d'un fluide interstitiel : facteur de cohésion par ponts capillaires en régime non saturé, ou agent de liquéfaction potentiellement catastrophique en régime saturé sous l'effet de surpressions interstitielles.

Table des matières

1	Introduction et Définition du Problème	3
1.1	Description du Système Physique	3
1.1.1	Le Référentiel et l'Environnement	3
1.1.2	Les Grains Granulaires	3
1.2	Description du Processus Étudié	3
1.3	Hypothèses de Modélisation	4
1.4	Objectifs de l'Étude	4
2	Dynamique Lagrangienne du Grain Isolé G_i	5
2.1	Formalisme Lagrangien	5
2.2	Équations du mouvement	5
2.3	Résolution temporelle de la vitesse verticale	6
2.4	Résolution de la position verticale	7
2.5	État du grain à l'impact	7
3	Géométrie de l'Empilement Final	8
3.1	Transition du Microscopique au Macroscopique : l'Angle de Repos	8
3.2	Modélisation Géométrique du Cône de Sédimentation	8
3.3	Analyse Dimensionnelle et Détermination des Paramètres du Tas	8
3.3.1	Volume total du tas	8
3.3.2	Détermination de la Hauteur Maximale H_{max}	8
3.3.3	Détermination du Rayon de la Base R_{base}	9
4	Analyse de la Stabilité de l'Empilement	9
4.1	Impact d'un Grain Supplémentaire et Transfert d'Énergie	9
4.2	Scénarios Post-Impact et Déclenchement d'une Avalanche	9
4.3	Analyse d'Autres Modes de Déstabilisation	10
4.3.1	Vibrations Externes (Sollicitation Sismique)	10
4.3.2	Effet d'un Fluide Interstitiel : de la Cohésion Capillaire à la Liquéfaction	10
5	Conclusion	13

1 Introduction et Définition du Problème

Le présent document a pour objet l'analyse multi-échelle d'un système granulaire discret. L'étude s'étend de la dynamique d'une particule unique en chute libre à la caractérisation géométrique et à l'analyse de la stabilité de l'empilement macroscopique résultant de la sédimentation de N particules. Cette section vise à définir de manière formelle et exhaustive le cadre physique, les processus impliqués et les objectifs de la modélisation.

1.1 Description du Système Physique

1.1.1 Le Référentiel et l'Environnement

Nous considérons un espace physique affine euclidien tridimensionnel, muni d'un repère ortho-normé direct $\mathcal{R}(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$. L'axe (O, \mathbf{e}_z) représente la verticale ascendante. Le système est plongé dans un champ de pesanteur uniforme et constant, décrit par le vecteur accélération $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$, où g est l'accélération de la pesanteur. Une surface de sédimentation, plane, horizontale et rigide, est définie par le plan $z = 0$.

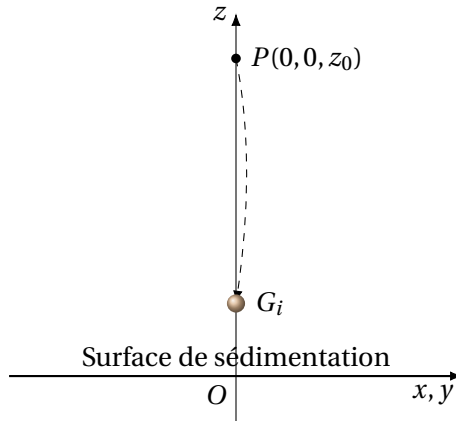


FIGURE 1 – Schéma du cadre de l'étude : lâcher d'un grain G_i depuis le point P vers la surface de sédimentation dans le référentiel \mathcal{R} .

1.1.2 Les Grains Granulaires

Le système, noté Σ , est un ensemble de N particules solides $\{G_1, \dots, G_N\}$. Ces grains sont supposés indéformables et possèdent les caractéristiques suivantes :

- **Géométrie** : Les grains ont des formes arbitraires et ne sont pas nécessairement sphériques.
- **Propriétés Massiques** : Leurs masses et volumes respectifs suivent des distributions statistiques. Pour simplifier l'analyse, nous considérons que ces distributions sont étroites et centrées sur des valeurs moyennes caractéristiques : une masse moyenne m et un volume moyen V . La masse volumique du matériau constituant les grains est donc $\rho_s = m/V$.

1.2 Description du Processus Étudié

Le problème peut être décomposé en trois phases séquentielles :

1. **Phase 1 : Chute séquentielle.** Les N grains sont libérés un par un, à des intervalles de temps réguliers Δt , depuis un point fixe P de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . Chaque grain est lâché avec une vitesse initiale \mathbf{v}_0 . Durant sa trajectoire dans l'air (de masse volumique ρ_{air}), chaque grain est soumis à son poids et à une force de résistance aérodynamique.

2. **Phase 2 : Formation de l'empilement.** En atteignant la surface de sédimentation ($z = 0$) ou le sommet de l'empilement déjà formé, le grain subit un impact inélastique. Son énergie cinétique est dissipée par collisions et frottements avec les autres grains. Le grain se réarrange jusqu'à trouver une position d'équilibre mécanique. La répétition de ce processus pour les N grains conduit à la formation d'une structure macroscopique stable, communément appelée "tas de sable".
3. **Phase 3 : Analyse de la stabilité.** Une fois l'empilement de N grains formé et à l'équilibre, sa stabilité est étudiée. Cette analyse consiste à examiner la réponse du tas à diverses perturbations, telles que l'ajout de grains supplémentaires ou l'application de sollicitations externes (vibrations, présence d'un fluide interstitiel, etc.).

1.3 Hypothèses de Modélisation

Afin de rendre le problème mathématiquement tractable, nous posons les hypothèses suivantes :

1. **Modèle du Grain Isolé :** Pour l'étude de la dynamique de chute, chaque grain G_i est modélisé par son centre de masse. Toutes les grandeurs physiques (masse m , volume V , surface frontale effective S) sont supposées identiques pour tous les grains et égales aux valeurs moyennes de leurs distributions.
2. **Découplage Temporel de la Chute :** L'intervalle de temps Δt entre deux lâchers successifs est supposé suffisamment grand pour qu'un grain ait terminé sa chute et se soit immobilisé avant que le suivant ne soit libéré. Cette hypothèse permet de négliger toute interaction inter-grains en phase de vol.
3. **Interactions dans l'Empilement :** Les interactions entre les grains au sein de l'empilement sont régies par des forces de contact (réaction normale) et des forces de frottement solide, caractérisées par un coefficient de frottement statique μ_s . Les collisions sont considérées comme parfaitement inélastiques à l'échelle macroscopique.
4. **Symétrie du Problème :** Pour simplifier l'analyse géométrique, le point de lâcher P est situé sur l'axe vertical (O, \mathbf{e}_z) , c'est-à-dire $x_0 = 0$ et $y_0 = 0$. Cette condition initiale assure que l'empilement final possèdera une symétrie de révolution autour de cet axe.

1.4 Objectifs de l'Étude

L'analyse de ce système granulaire est structurée autour de trois objectifs principaux :

1. **Dynamique du Grain Isolé :** Établir et résoudre les équations différentielles du mouvement pour un grain unique. L'objectif est de déterminer sa trajectoire, sa vitesse en fonction du temps, sa vitesse limite de chute, et son énergie cinétique à l'impact.
2. **Caractérisation de l'État Final :** Analyser l'état macroscopique de l'empilement après la sédimentation des N grains. Il s'agit de déterminer les grandeurs géométriques du tas (forme, hauteur maximale H_{max} , rayon de la base R_{base}) en fonction des paramètres du système (N , V) et des propriétés émergentes du milieu granulaire (angle de repos α_r , compacité ϕ).
3. **Analyse de la Stabilité :** Étudier la réponse de l'empilement à l'équilibre face à des perturbations. Cela inclut l'analyse du déclenchement d'avalanches lors de l'ajout de nouveaux grains et l'étude des conditions de déstabilisation sous l'effet de sollicitations externes, comme des vibrations mécaniques ou la présence d'un fluide interstitiel.

2 Dynamique Lagrangienne du Grain Isolé G_i

Étudions le mouvement d'un grain unique de masse m dans le référentiel galiléen \mathcal{R} . Notons $\mathbf{r} = (x, y, z)$ les coordonnées généralisées du système à 3 degrés de liberté de translation.

2.1 Formalisme Lagrangien

L'énergie cinétique T du grain est donnée par :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \quad (1)$$

La force de pesanteur est compensée en partie par la poussée d'Archimède de l'air, $\mathbf{F}_A = \rho_{\text{air}} V g \mathbf{e}_z$. La force motrice résultante est donc $\mathbf{P}_{\text{eff}} = (m - \rho_{\text{air}} V) \mathbf{g}$. L'énergie potentielle U associée à cette force effective, définie par rapport au niveau $z = 0$, est :

$$U = (m - \rho_{\text{air}} V) g z = m \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s} \right) g z \quad (2)$$

où $\rho_s = m/V$ est la masse volumique du grain. Cette modification propage un facteur $(1 - \rho_{\text{air}}/\rho_s)$ dans toutes les expressions dépendant de g , notamment pour la vitesse limite et l'énergie d'impact. En tenant compte de la poussée d'Archimède, le Lagrangien \mathcal{L} du système s'écrit avec un poids effectif $m'g = (m - \rho_{\text{air}} V)g$:

$$\mathcal{L}(q_k, \dot{q}_k) = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (m - \rho_{\text{air}} V) g z \quad (3)$$

Le système étant soumis à une force non-conservative (la traînée), nous utilisons les équations d'Euler-Lagrange avec termes dissipatifs [1] :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = Q_k \quad (4)$$

où Q_k représente la force généralisée associée à la coordonnée q_k . La force de traînée aérodynamique, pour des nombres de Reynolds élevés, est de type quadratique : $\mathbf{F}_a = -\frac{1}{2} C_D \rho_{\text{air}} S \|\mathbf{v}\| \mathbf{v}$, où C_D est le coefficient de traînée, ρ_{air} la masse volumique de l'air, S la surface frontale effective du grain et \mathbf{v} son vecteur vitesse. En posant $k = \frac{1}{2} C_D \rho_{\text{air}} S$, la force s'écrit $\mathbf{F}_a = -k \|\mathbf{v}\| \mathbf{v} = -k \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} (\dot{x} \mathbf{e}_x + \dot{y} \mathbf{e}_y + \dot{z} \mathbf{e}_z)$. Les forces généralisées sont donc :

$$\begin{aligned} Q_x &= \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{e}_x = -k \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ Q_y &= \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{e}_y = -k \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \\ Q_z &= \mathbf{F}_a \cdot \mathbf{e}_z = -k \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \end{aligned}$$

2.2 Équations du mouvement

La figure ci-dessous représente le bilan des forces s'exerçant sur le grain durant sa chute.

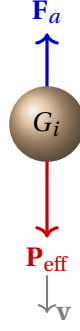


FIGURE 2 – Bilan des forces sur un grain en chute verticale : poids effectif \mathbf{P}_{eff} (incluant la poussée d'Archimède) et force de traînée aérodynamique \mathbf{F}_a .

Appliquons les équations d'Euler-Lagrange (4) pour chaque coordonnée.

— Pour x et y :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \implies m\ddot{x} = -k\dot{x}\|\mathbf{v}\|$$

De même pour y : $m\ddot{y} = -k\dot{y}\|\mathbf{v}\|$.

— Pour z :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -(m - \rho_{\text{air}}V)g \implies m\ddot{z} - (-(m - \rho_{\text{air}}V)g) = -k\dot{z}\|\mathbf{v}\|$$

$$m\ddot{z} = -(m - \rho_{\text{air}}V)g - k\dot{z}\|\mathbf{v}\|$$

Hypothèse de résolution analytique : Si le grain est lâché avec une vitesse horizontale non nulle, le système d'équations est couplé par le terme $\|\mathbf{v}\|$. Cependant, pour une étude de sédimentation (chute), la dynamique verticale prédomine rapidement. Supposons le mouvement purement vertical. Alors $\|\mathbf{v}\| = |\dot{z}|$. Comme le grain chute, $\dot{z} < 0$. Posons la vitesse scalaire de descente $v(t) = -\dot{z}(t) > 0$. L'accélération verticale est $\ddot{z} = -\dot{v}$. L'équation selon \mathbf{e}_z devient :

$$m\ddot{z} = -(m - \rho_{\text{air}}V)g + k\dot{z}^2 \quad (5)$$

En posant la vitesse de descente $v(t) = -\dot{z}(t)$, qui est positive, on a $\dot{z} = -v$ et $\ddot{z} = -\dot{v}$. En substituant dans l'équation du mouvement, on obtient :

$$\begin{aligned} m(-\dot{v}) &= -(m - \rho_{\text{air}}V)g + k(-v)^2 \\ -m\dot{v} &= -(m - \rho_{\text{air}}V)g + kv^2 \\ m\dot{v} &= (m - \rho_{\text{air}}V)g - kv^2 \end{aligned} \quad (6)$$

2.3 Résolution temporelle de la vitesse verticale

Nous avons une équation différentielle ordinaire non linéaire du premier ordre à variables séparables :

$$\dot{v} = \frac{(m - \rho_{\text{air}}V)g}{m} - \frac{k}{m}v^2 = g\left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s}\right) - \frac{k}{m}v^2 \quad (7)$$

Définissons la **vitesse limite** v_{∞} telle que $\dot{v} = 0$.

$$g\left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s}\right) - \frac{k}{m}v_{\infty}^2 = 0 \implies v_{\infty} = \sqrt{\frac{mg}{k}\left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s}\right)} \quad (8)$$

L'équation se réécrit en utilisant la vitesse limite : $\frac{dv}{dt} = g \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s}\right) \left(1 - \left(\frac{v}{v_\infty}\right)^2\right)$. En séparant les variables et en intégrant entre $t = 0$ (où $v(0) = v_{z0} = 0$) et t :

$$\begin{aligned} \int_0^{v(t)} \frac{dv}{1 - (v/v_\infty)^2} &= \int_0^t g \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s}\right) dt' \\ v_\infty \left[\operatorname{artanh} \left(\frac{v}{v_\infty} \right) \right]_0^{v(t)} &= g \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s}\right) t \\ \operatorname{artanh} \left(\frac{v(t)}{v_\infty} \right) &= \frac{g(1 - \rho_{\text{air}}/\rho_s)}{v_\infty} t \end{aligned}$$

En inversant la fonction, la vitesse instantanée de chute est donc :

$$v(t) = v_\infty \tanh \left(\frac{g(1 - \rho_{\text{air}}/\rho_s)t}{v_\infty} \right) = v_\infty \tanh \left(\frac{t}{\tau} \right) \quad (9)$$

Avec la constante de temps caractéristique $\tau = \frac{v_\infty}{g(1 - \rho_{\text{air}}/\rho_s)} = \sqrt{\frac{m}{kg(1 - \rho_{\text{air}}/\rho_s)}}$.

2.4 Résolution de la position verticale

La position verticale est $z(t)$. On sait que $v(t) = -\frac{dz}{dt}$. En intégrant l'équation (9) entre 0 et t , sachant que $z(0) = z_0$:

$$\begin{aligned} z(t) - z_0 &= -v_\infty \int_0^t \tanh \left(\frac{t'}{\tau} \right) dt' \\ z(t) &= z_0 - v_\infty \left[\tau \ln \left(\cosh \left(\frac{t'}{\tau} \right) \right) \right]_0^t \end{aligned}$$

On obtient l'équation horaire de la chute :

$$z(t) = z_0 - \frac{v_\infty^2}{g(1 - \rho_{\text{air}}/\rho_s)} \ln \left(\cosh \left(\frac{g(1 - \rho_{\text{air}}/\rho_s)t}{v_\infty} \right) \right) = z_0 - \frac{m}{k} \ln \left(\cosh \left(\frac{t}{\tau} \right) \right) \quad (10)$$

2.5 État du grain à l'impact

Le grain atteint la surface (ou le sommet du tas) à l'instant t_{imp} tel que $z(t_{\text{imp}}) = z_{\text{sol}}$. Si la hauteur de chute est grande ($z_0 \gg m/k$), alors $t_{\text{imp}} \gg \tau$, et la vitesse d'impact est alors maximale et constante :

$$v_{\text{impact}} \approx v_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k} \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s}\right)} \quad (11)$$

L'énergie cinétique à l'impact, qui sera dissipée dans le tas, est :

$$E_c = \frac{1}{2} m v_{\text{impact}}^2 \approx \frac{1}{2} m v_\infty^2 = \frac{m^2 g}{2k} \left(1 - \frac{\rho_{\text{air}}}{\rho_s}\right) \quad (12)$$

Ce résultat fixe l'énergie disponible pour les réarrangements microscopiques lors de la formation du tas.

3 Géométrie de l'Empilement Final

3.1 Transition du Microscopique au Macroscopique : l'Angle de Repos

Lorsqu'un grain G_i impacte le tas déjà formé, son énergie cinétique est dissipée par collisions et frottements. Le grain roule ou glisse jusqu'à trouver une position d'équilibre. La répétition de ce processus conduit à une structure macroscopique dont la géométrie est gouvernée par un paramètre fondamental : l'**angle de repos**, noté α_r . Cet angle représente la pente maximale stable et résulte de l'équilibre statistique entre la gravité et les forces de frottement inter-granulaires [2].

3.2 Modélisation Géométrique du Cône de Sédimentation

Étant donné que les grains sont lâchés depuis un point fixe sur l'axe de symétrie vertical, l'empilement résultant est un cône de révolution droit. Définissons les paramètres géométriques : H_{max} (hauteur), R_{base} (rayon de la base), et α (angle du cône). À l'équilibre, l'angle du cône est égal à l'angle de repos : $\alpha = \alpha_r$. La géométrie du cône impose la relation :

$$\tan(\alpha_r) = \frac{H_{max}}{R_{base}} \quad (13)$$

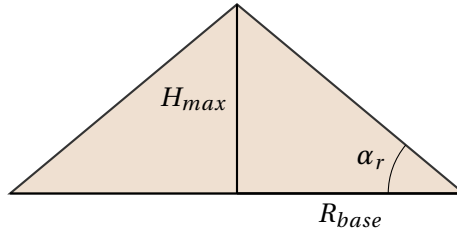


FIGURE 3 – Paramètres géométriques du cône de sédimentation à l'état final.

Remarque 3.1. Ce modèle géométrique est valable dès que l'empilement contient un nombre suffisant de grains pour définir une pente macroscopique. Pour un dépôt ponctuel, le tas croît de manière auto-similaire : il prend la forme d'un cône d'angle α_r très tôt, puis sa hauteur H et son rayon de base R augmentent simultanément tout en maintenant constamment la relation $H/R = \tan(\alpha_r)$. Il n'y a pas de phase où le rayon est fixé pendant que la hauteur augmente.

3.3 Analyse Dimensionnelle et Détermination des Paramètres du Tas

3.3.1 Volume total du tas

Le volume total occupé par le tas, V_{tas} , est lié au volume des solides ($N \times V$) par la **compacité** ϕ :

$$\phi = \frac{V_{solides}}{V_{total}} = \frac{N \times V}{V_{tas}} \implies V_{tas} = \frac{NV}{\phi} \quad (14)$$

La compacité ϕ est une constante matérielle (typ. 0.58-0.64 pour des sphères).

3.3.2 Détermination de la Hauteur Maximale H_{max}

Le volume d'un cône est $V_{tas} = \frac{1}{3}\pi R_{base}^2 H_{max}$. En utilisant la relation (13) pour substituer R_{base} , on a :

$$V_{tas} = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{H_{max}}{\tan(\alpha_r)} \right)^2 H_{max} = \frac{\pi H_{max}^3}{3 \tan^2(\alpha_r)}$$

En égalant avec l'expression (14) :

$$\frac{\pi H_{max}^3}{3 \tan^2(\alpha_r)} = \frac{NV}{\phi}$$

On isole H_{max} pour obtenir sa dépendance en fonction des paramètres du problème :

$$H_{max} = \left(\frac{3NV \tan^2(\alpha_r)}{\pi \phi} \right)^{1/3} \quad (15)$$

3.3.3 Détermination du Rayon de la Base R_{base}

De manière analogue, en exprimant $H_{max} = R_{base} \tan(\alpha_r)$:

$$V_{tas} = \frac{1}{3} \pi R_{base}^2 (R_{base} \tan(\alpha_r)) = \frac{1}{3} \pi R_{base}^3 \tan(\alpha_r)$$

En égalant avec l'expression (14) :

$$\frac{1}{3} \pi R_{base}^3 \tan(\alpha_r) = \frac{NV}{\phi}$$

On isole R_{base} :

$$R_{base} = \left(\frac{3NV}{\pi \phi \tan(\alpha_r)} \right)^{1/3} \quad (16)$$

Nous avons ainsi déterminé l'ensemble des caractéristiques géométriques de l'empilement final.

4 Analyse de la Stabilité de l'Empilement

4.1 Impact d'un Grain Supplémentaire et Transfert d'Énergie

Considérons l'arrivée d'un grain G_{N+1} sur le sommet du cône, supposé à l'état critique ($\alpha = \alpha_r$). Le grain incident possède une énergie cinétique $E_{c,inc}$ donnée par (12). Cet impact inélastique transfère de l'énergie au tas, qui est dissipée (chaleur, son) ou convertie en travail mécanique pour réarranger les grains. L'arrivée d'un grain au sommet augmente localement la pente $\alpha_{loc} > \alpha_r$. Cette condition de sur-pente est l'élément déclencheur d'une réorganisation macroscopique.

L'énergie cinétique E_c apportée par le grain incident est convertie en énergie potentielle gravitationnelle lors de la réorganisation des grains de l'avalanche. Une partie de cette énergie est également dissipée par frottement. En première approximation, l'énergie disponible E_c est égale au travail nécessaire pour déplacer la masse de l'avalanche, ce qui permettrait d'estimer la taille (le nombre de grains) de cette dernière. La taille de l'avalanche est donc directement liée aux caractéristiques de la chute (hauteur, propriétés du grain et du fluide).

4.2 Scénarios Post-Impact et Déclenchement d'une Avalanche

Propriété 4.1 (Condition de Stabilité Statique). Pour un grain de masse m sur une pente d'angle θ , la stabilité est assurée tant que la composante tangentielle du poids est inférieure à la force de frottement statique maximale : $mg \sin \theta \leq \mu_s mg \cos \theta$, où μ_s est le coefficient de frottement statique. Cela conduit à la condition :

$$\tan \theta \leq \mu_s \quad (17)$$

L'angle de repos macroscopique est donc directement lié au coefficient de frottement microscopique : $\tan(\alpha_r) \approx \mu_s$.

Lorsque le grain G_{N+1} se dépose au sommet, la pente locale θ_{loc} devient supérieure à α_r , violant la condition (17). Un écoulement (avalanche) est initié. Cette avalanche se propage jusqu'à ce que la pente revienne à la valeur stable α_r . Le système, perturbé hors de son état critique, y retourne en dissipant l'excès de matière. La taille de l'avalanche est une fonction de la taille du système N . Ce phénomène, où une petite perturbation locale déclenche une réponse globale, est une caractéristique des systèmes en état de criticité auto-organisée (SOC) [3].

4.3 Analyse d'Autres Modes de Déstabilisation

4.3.1 Vibrations Externes (Sollicitation Sismique)

Considérons une vibration verticale du support, $a(t) = a_0 \sin(\omega t)$. Dans le référentiel du support, l'accélération effective ressentie par un grain est $\mathbf{g}_{eff}(t) = \mathbf{g} - \mathbf{a}(t)$. La force normale exercée par un grain sur la pente d'angle α_r devient :

$$N(t) = m g_{eff,z}(t) \cos(\alpha_r) = m(g + a_0 \sin(\omega t)) \cos(\alpha_r)$$

La force tangentielle motrice reste $F_t = mg \sin(\alpha_r)$. Le glissement se produit si $F_t > \mu_s N(t)$.

$$mg \sin(\alpha_r) > \mu_s m(g + a_0 \sin(\omega t)) \cos(\alpha_r)$$

En utilisant la condition de stabilité à la limite $\mu_s = \tan(\alpha_r) = \frac{\sin(\alpha_r)}{\cos(\alpha_r)}$:

$$mg \sin(\alpha_r) > \frac{\sin(\alpha_r)}{\cos(\alpha_r)} m(g + a_0 \sin(\omega t)) \cos(\alpha_r)$$

En simplifiant par $m \sin(\alpha_r)$ (terme non nul) :

$$\begin{aligned} g &> g + a_0 \sin(\omega t) \\ 0 &> a_0 \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Cette condition est satisfaite lorsque $\sin(\omega t) < 0$, c'est-à-dire lors des phases d'accélération descendante du support. Le tas est "soulevé", la force normale diminue et la friction n'est plus suffisante. Une vibration suffisamment intense peut fluidiser le tas.

4.3.2 Effet d'un Fluide Interstitiel : de la Cohésion Capillaire à la Liquéfaction

La présence d'un fluide dans l'espace poreux du tas granulaire modifie de manière fondamentale les forces inter-particulaires et, par conséquent, la réponse mécanique globale de l'empilement. Nous distinguons deux régimes principaux : le régime non saturé (humide) et le régime saturé (submergé).

Régime non saturé (faible saturation) : Cohésion par ponts capillaires. Lorsque la teneur en fluide est faible, le liquide ne remplit pas entièrement les pores mais forme des ponts capillaires (ménisques) aux points de contact entre les grains. La tension de surface γ du fluide (en N/m) est à l'origine de ce phénomène.

Propriété 4.2 (Force de cohésion capillaire). Considérons deux grains sphériques de même rayon R en contact. La présence d'un pont capillaire génère une force d'attraction F_c entre eux. Cette force résulte de deux contributions :

1. Une pression négative (suction) Δp à l'intérieur du pont, due à la courbure du ménisque et décrite par l'équation de Young-Laplace.

2. Une force de tension de surface agissant le long de la ligne de contact triple (solide-liquide-gaz).
Ce pont capillaire est schématisé ci-dessous.

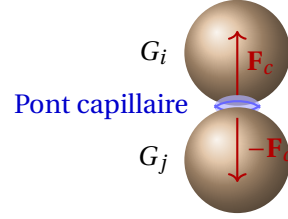


FIGURE 4 – Illustration d'un pont capillaire entre deux grains, créant une force de cohésion attractive F_c .

Pour un faible volume de liquide, la force de cohésion peut être approximée par [4] :

$$F_c \approx 2\pi R\gamma \cos(\theta_{contact}) \quad (18)$$

où $\theta_{contact}$ est l'angle de contact du fluide sur le matériau du grain. Pour un fluide mouillant (comme l'eau sur du sable), $\cos(\theta_{contact}) \approx 1$.

Cette force F_c est une force d'attraction qui s'ajoute à la force de contact normale entre les grains. Analysons son impact sur la condition de stabilité. La force normale N sur la pente devient $N = mg \cos(\alpha) + F_c$. La force de frottement maximale disponible est donc $F_{f,max} = \mu_s (mg \cos(\alpha) + F_c)$. La condition de non-glissement $mg \sin(\alpha) \leq F_{f,max}$ s'écrit :

$$mg \sin(\alpha) \leq \mu_s (mg \cos(\alpha) + F_c) \quad (19)$$

$$\tan(\alpha) \leq \mu_s \left(1 + \frac{F_c}{mg \cos(\alpha)} \right) \quad (20)$$

L'angle de repos effectif, $\alpha_{r,humide}$, est donc supérieur à l'angle de repos du matériau sec $\alpha_r = \arctan(\mu_s)$. Le terme $F_c / (mg \cos(\alpha))$ agit comme une cohésion effective.

Remarque 4.1. La cohésion capillaire augmente significativement la stabilité du tas. C'est ce qui permet de construire des châteaux de sable avec du sable humide mais pas avec du sable sec ou complètement submergé.

Régime saturé (submergé) : Poussée d'Archimède et pressions interstitielles. Lorsque les pores sont entièrement remplis de fluide (de masse volumique ρ_f), le comportement du système est régi par le principe de la contrainte effective de Terzaghi.

1. Conditions hydrostatiques (fluide au repos). Dans un fluide statique, chaque grain est soumis à la poussée d'Archimède, $F_A = -\rho_f V \mathbf{g}$. Le poids effectif d'un grain (poids déjaugé) devient :

$$\mathbf{P}' = \mathbf{P} - \mathbf{F}_A = (m - \rho_f V) \mathbf{g} = (\rho_s - \rho_f) V \mathbf{g} \quad (21)$$

où $\rho_s = m/V$ est la masse volumique du matériau constituant le grain. Toutes les forces de contact sont proportionnelles à ce poids déjaugé. La force motrice tangentielle devient $P' \sin(\alpha)$ et la force normale devient $N' = P' \cos(\alpha)$. La condition de stabilité s'écrit :

$$P' \sin(\alpha) \leq \mu_s (P' \cos(\alpha)) \implies \tan(\alpha) \leq \mu_s \quad (22)$$

Remarque 4.2. En conditions purement hydrostatiques, l'angle de repos théorique d'un matériau granulaire submergé est identique à celui du matériau sec. La poussée d'Archimède réduit à la fois la force motrice et la force de frottement dans la même proportion.

2. Conditions hydrodynamiques et liquéfaction. La situation change radicalement si le fluide interstitiel n'est pas au repos. Un écoulement de fluide à travers le milieu poreux génère des forces de traînée sur les grains, qui se traduisent par un gradient de pression interstitielle.

Propriété 4.3 (Principe de la contrainte effective). La résistance au cisaillement τ_f d'un milieu granulaire ne dépend pas de la contrainte totale σ mais de la contrainte effective σ' , qui représente la contrainte réellement transmise par le squelette solide. Selon le principe de Terzaghi :

$$\sigma' = \sigma - u \quad (23)$$

où u est la pression du fluide interstitiel (pression de pore). La résistance au cisaillement est alors $\tau_f = \sigma' \tan(\alpha_r)$.

Considérons un écoulement ascendant du fluide, créant une surpression interstitielle u_e (excès par rapport à la pression hydrostatique). Cette surpression exerce une force de soulèvement sur les grains, réduisant la contrainte effective. La force normale effective entre les grains devient $N_{eff} = N' - F_{soulèvement}$, où N' est la force normale due au poids déjaugé. Un écoulement ascendant, caractérisé par un gradient hydraulique $i = -\frac{\partial h}{\partial z}$ (où h est la charge hydraulique), exerce une force de filtration (seepage force) volumique $\mathbf{f}_s = \rho_f g i \mathbf{e}_z$. Cette force s'oppose au poids déjaugé des grains. La condition de stabilité est modifiée : la force motrice $P' \sin(\alpha)$ reste la même, mais la force de frottement est réduite car la force normale effective diminue.

Le cas le plus critique est celui de la **liquéfaction**. Cet état est atteint lorsque la contrainte effective devient nulle, $\sigma' \rightarrow 0$. L'assemblage de grains perd toute sa résistance au cisaillement ($\tau_f \rightarrow 0$) et se comporte comme un fluide lourd. Ceci se produit lorsque la surpression interstitielle compense le poids déjaugé des grains.

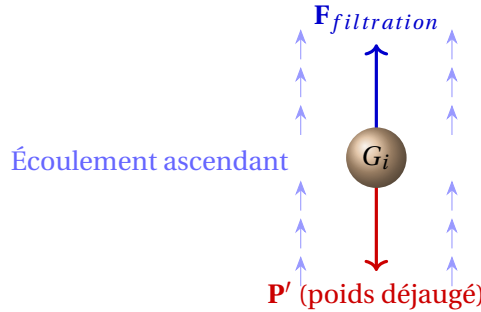


FIGURE 5 – Bilan des forces volumiques sur un grain dans un milieu saturé soumis à un écoulement ascendant. La liquéfaction se produit lorsque la force de filtration compense le poids déjaugé.

La condition de liquéfaction est atteinte pour un gradient hydraulique critique i_c tel que la force de filtration compense le poids volumique déjaugé γ' :

$$f_s = \gamma' \quad (24)$$

où $f_s = i_c \rho_f g$ est la force de filtration volumique ascendante et γ' est le poids volumique déjaugé de l'assemblage. Le poids volumique déjaugé γ' est le poids des grains solides diminué de la poussée d'Archimède, le tout rapporté au volume total de l'assemblage. Conformément à la définition de la compacité $\phi = V_{solides} / V_{total}$, le volume des solides dans un volume unitaire d'assemblage est ϕ . Le poids de ces solides est $\phi \rho_s g$ et la poussée d'Archimède qu'ils subissent est $\phi \rho_f g$. Le poids volumique déjaugé est donc :

$$\gamma' = (1 - \phi) \rho_s g - (1 - \phi) \rho_f g = (1 - \phi) (\rho_s - \rho_f) g \quad (25)$$

La liquéfaction survient lorsque la force de filtration ascendante par unité de volume, f_s , compense exactement ce poids déjàugé. L'égalité s'écrit donc :

$$i_c \rho_f g = \phi(\rho_s - \rho_f) g \quad (26)$$

On obtient le gradient critique :

$$i_c = \phi \frac{\rho_s - \rho_f}{\rho_f} \quad (27)$$

Une surpression interstitielle, même faible, diminue l'angle de repos effectif. À l'approche du gradient critique, $\alpha_{r,eff} \rightarrow 0$, ce qui peut provoquer un effondrement catastrophique et soudain de l'empilement. De telles surpressions peuvent être générées par des sollicitations sismiques (qui compactent le squelette granulaire et mettent en pression le fluide interstitiel incompressible) ou par un apport rapide de fluide par la base du tas.

Remarque 4.3 (Rupture interne). Notre analyse s'est concentrée sur la stabilité de surface, où les grains glissent le long de la pente du cône. En mécanique des sols, il est également crucial d'analyser la stabilité interne. L'empilement pourrait en effet se rompre le long d'une surface de glissement courbe ou plane traversant l'intérieur du massif (rupture de type Coulomb). Une telle analyse, plus complexe, ferait intervenir des critères de résistance au cisaillement sur l'ensemble du volume et non plus seulement sur sa surface.

5 Conclusion

Cette étude a permis de modéliser un système granulaire à plusieurs échelles, en partant de la dynamique d'un grain unique pour aboutir à la stabilité de l'empilement collectif. L'application du formalisme Lagrangien a fourni une description analytique complète de la chute d'un grain, incluant sa vitesse limite et son énergie à l'impact.

À l'échelle macroscopique, nous avons établi que la géométrie du tas conique est entièrement déterminée par des paramètres fondamentaux comme le nombre de grains, leur volume, ainsi que par les propriétés émergentes que sont l'angle de repos et la compacité. Les relations dérivées pour la hauteur maximale et le rayon de la base montrent que ces dimensions croissent comme la racine cubique du nombre de grains.

Enfin, l'analyse de stabilité a mis en lumière la nature critique de l'empilement, où l'ajout d'un seul grain suffit à déclencher une avalanche, un mécanisme caractéristique de la criticité auto-organisée. L'étude a également quantifié les effets déstabilisateurs des vibrations externes et le rôle ambivalent d'un fluide interstitiel, agissant comme un agent cohésif en régime non saturé et comme un facteur de liquéfaction potentiellement catastrophique en régime saturé.

Références

- [1] H. Goldstein, C. Poole, and J. Safko, *Classical Mechanics*. Addison-Wesley, 3rd ed., 2002.
- [2] J. Duran, *Sands, Powders, and Grains : An Introduction to the Physics of Granular Materials*. Springer-Verlag New York, 2000.
- [3] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, “Self-organized criticality : An explanation of the $1/f$ noise,” *Physical Review Letters*, vol. 59, no. 4, pp. 381–384, 1987.
- [4] L. Fischer, N. Loubet, and Y. L. T. S. d’Yvoire, “Capillary forces between spheres with a fixed contact angle,” *Journal of Colloid and Interface Science*, vol. 250, no. 2, pp. 414–420, 2002.