

---

# **Modélisation Analytique de l'Impact d'un Jet et du Ressaut Hydraulique**

*Étude des régimes stationnaires et de la dynamique transitoire d'expansion*

---

**Colin BOSSU RÉAUBOURG**

17 janvier 2026

## Résumé

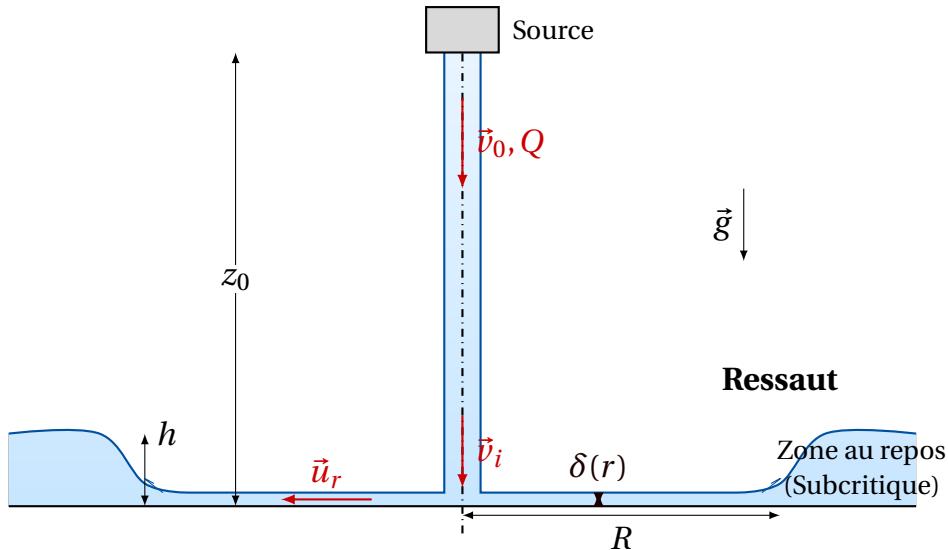
Ce document présente une étude théorique de la dynamique des fluides incompressibles lors de l'impact d'un jet vertical sur un plan horizontal. La première partie se concentre sur l'établissement du rayon d'équilibre d'un ressaut hydraulique circulaire en régime permanent, en appliquant les lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement. La seconde partie étend cette analyse au régime instationnaire, modélisant l'expansion temporelle du cratère formé par un jet dont les propriétés d'injection varient, mettant en évidence les effets inertIELS et les retards temporels inhérents au transport du fluide.

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Régime Stationnaire : Le Ressaut Hydraulique Circulaire</b>	<b>3</b>
2.1	Définition et Hypothèses . . . . .	3
2.2	Cinématique et Épaisseur du Film . . . . .	4
2.3	Détermination du Rayon du Cratère . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Régime Instationnaire : Expansion Dynamique</b>	<b>5</b>
3.1	Modélisation Temporelle . . . . .	5
3.2	Bilan de Quantité de Mouvement sur Front Mobile . . . . .	5
3.3	Dynamique de l'Expansion . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Conclusion</b>	<b>6</b>

## 1 Introduction

L'étude des jets liquides impactant une surface solide et la formation subséquente de ressauts hydrauliques constituent un problème classique de la mécanique des fluides, avec des applications allant du refroidissement industriel aux processus de nettoyage. Lorsque le fluide s'étale radialement à haute vitesse, il transitionne brutalement d'un régime supercritique à un régime subcritique, formant une discontinuité connue sous le nom de ressaut hydraulique [1].



**FIGURE 1** – Représentation schématique de l'impact du jet vertical et de la formation du ressaut hydraulique circulaire de rayon  $R$ .

Les sections suivantes détaillent la résolution analytique de ce phénomène, d'abord dans une configuration stabilisée, puis dans une approche dynamique prenant en compte l'évolution temporelle des paramètres d'injection.

## 2 Régime Stationnaire : Le Ressaut Hydraulique Circulaire

### 2.1 Définition et Hypothèses

Nous considérons un écoulement généré par une source ponctuelle à l'altitude  $z_0$ , éjectant un fluide de masse volumique  $\rho$  avec un débit volumique  $Q$  et une vitesse initiale  $v_0$ . Le fluide impacte un plan horizontal et s'étale radialement jusqu'à rencontrer une couche d'eau stagnante d'épaisseur  $h$ .

Pour mener la résolution analytique, les hypothèses suivantes sont adoptées, conformément aux théories des écoulements potentiels et des couches minces [2] :

1. Le fluide est parfait (viscosité négligée,  $\mu = 0$ ) et incompressible.
2. L'écoulement est stationnaire et à symétrie axiale.
3. La vitesse est conservée lors de la déviation du jet à l'impact.
4. L'approximation de Saint-Venant est valide pour le film liquide ( $\delta \ll r$ ).
5. Les effets de tension de surface sont négligés (Nombre de Weber élevé).

## 2.2 Cinématique et Épaisseur du Film

L'application du théorème de Bernoulli entre la source et le point d'impact permet de déterminer la vitesse d'impact  $v_i$ . En négligeant les pertes de charge dans l'air, la conservation de l'énergie mécanique par unité de volume s'écrit :

$$\frac{1}{2}\rho v_0^2 + \rho g z_0 = \frac{1}{2}\rho v_i^2 \quad (1)$$

Ce qui conduit à l'expression de la vitesse à l'impact :

$$v_i = \sqrt{v_0^2 + 2gz_0} \quad (2)$$

Dans le film radial, la vitesse  $u_r(r)$  est supposée égale à  $v_i$ . La conservation du débit volumique  $Q$  à travers une section cylindrique de rayon  $r$  et d'épaisseur  $\delta(r)$  impose :

$$Q = 2\pi r \delta(r) v_i \quad (3)$$

L'épaisseur du film évolue donc selon une loi hyperbolique :

$$\delta(r) = \frac{Q}{2\pi r \sqrt{v_0^2 + 2gz_0}} \quad (4)$$

## 2.3 Détermination du Rayon du Cratère

Le rayon  $R$  du cratère est déterminé par le bilan macroscopique de quantité de mouvement au niveau du ressaut. En traitant le ressaut comme une discontinuité, nous égalons le flux de quantité de mouvement entrant à la force de pression hydrostatique exercée par la couche d'eau environnante [3].

Le flux de quantité de mouvement radial entrant est donné par  $M_{in} = \rho Q v_i$ . La force résistante, issue de la pression hydrostatique de la couche d'eau de hauteur  $h$ , s'exprime par  $F_{ext} = \pi R \rho g h^2$ . L'équilibre des forces en régime permanent implique :

$$\rho Q v_i = \pi R \rho g h^2 \quad (5)$$

En isolant  $R$  et en substituant l'expression de  $v_i$  issue de l'équation (2), nous obtenons le rayon du cratère à l'équilibre :

$$R = \frac{Q \sqrt{v_0^2 + 2gz_0}}{\pi g h^2} \quad (6)$$

La figure 2 illustre la dépendance de ce rayon vis-à-vis du débit incident.

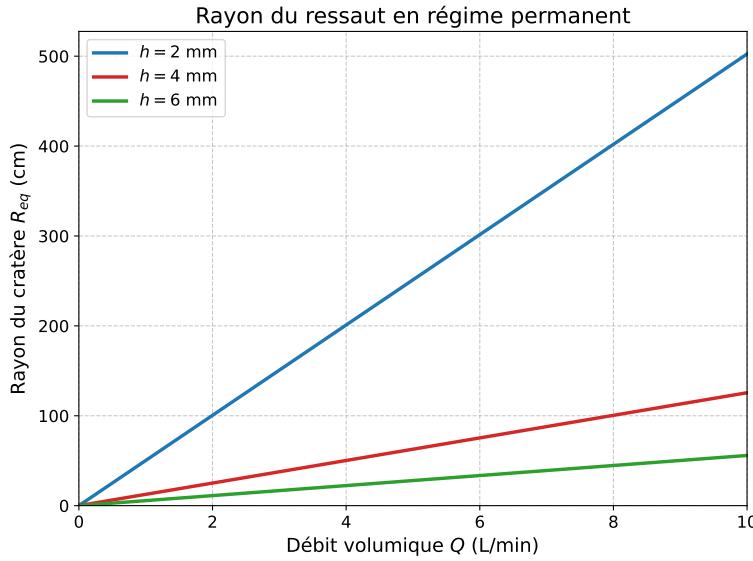


FIGURE 2 – Évolution théorique du rayon  $R$  en fonction du débit  $Q$  pour différentes hauteurs de fluide  $h$  (Résolution numérique de l'équation 6).

### 3 Régime Instationnaire : Expansion Dynamique

#### 3.1 Modélisation Temporelle

Dans cette section, nous étudions la réponse du système à des conditions d'injection variables  $Q(t)$  et  $v_e(t)$ . La résolution nécessite d'intégrer les temps de retard dus au transport du fluide. Soit  $\tau$  le temps de chute libre. Les propriétés du fluide atteignant le plan à l'instant  $t$  dépendent des conditions à la source à l'instant  $t - \tau$ . La vitesse d'impact instantanée est :

$$v_i(t) = \sqrt{v_e(t - \tau)^2 + 2g z_0} \quad (7)$$

De plus, le transport radial introduit un délai supplémentaire. La vitesse du fluide incident contre la paroi du cratère en expansion, notée  $v_f$ , est approximée par la vitesse d'impact retardée du temps de parcours radial.

#### 3.2 Bilan de Quantité de Mouvement sur Front Mobile

Nous considérons un volume de contrôle se déplaçant avec le ressaut à la vitesse radiale  $\dot{R}(t)$ . Dans le référentiel lié au front, le bilan de quantité de mouvement fait intervenir les vitesses relatives.

Le flux de quantité de mouvement entrant depuis le film est proportionnel au carré de la vitesse relative ( $v_f - \dot{R}$ ). La résistance inertielle de la couche d'eau statique, qui est "avalée" par le volume de contrôle mobile, génère un flux proportionnel à  $\dot{R}^2$ . L'équation d'équilibre généralisée s'écrit :

$$2\pi R\rho\delta(v_f - \dot{R})^2 = 2\pi R\rho h\dot{R}^2 + \pi R\rho g h^2 \quad (8)$$

En utilisant la relation de conservation de la masse  $\delta = \frac{Q_f}{2\pi R v_f}$ , l'équation (8) se transforme en une équation différentielle ordinaire non-linéaire régissant l'évolution du rayon :

$$\frac{Q_f}{\pi R v_f} (v_f - \dot{R})^2 = 2h\dot{R}^2 + gh^2 \quad (9)$$

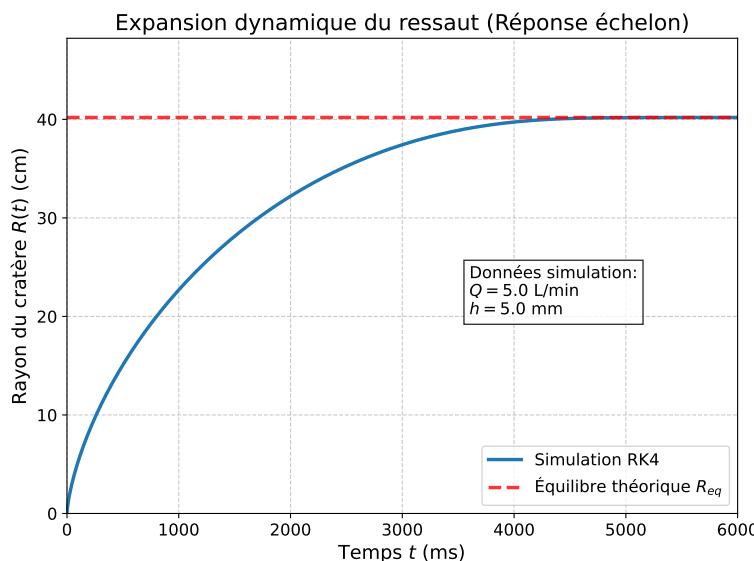
### 3.3 Dynamique de l'Expansion

Le développement de l'équation (9) conduit à une équation quadratique pour la vitesse d'expansion  $\dot{R}$ . En posant les coefficients dépendant de l'état instantané du système, la solution physique pour un cratère en expansion est donnée par :

$$\dot{R}(t) = \frac{-\frac{Q_f}{\pi R} + \sqrt{\left(\frac{Q_f}{\pi R}\right)^2 - \left(2h - \frac{Q_f}{\pi R v_f}\right)\left(g h^2 - \frac{Q_f v_f}{\pi R}\right)}}{2h - \frac{Q_f}{\pi R v_f}} \quad (10)$$

Cette expression décrit la transition depuis l'impact initial violent, dominé par l'impulsion du jet, vers l'état quasi-stationnaire où  $\dot{R}$  tend vers zéro. À la limite  $t \rightarrow \infty$  et  $\dot{R} \rightarrow 0$ , le terme sous la racine s'annule, ce qui permet de retrouver la condition d'équilibre statique établie dans l'équation (6).

La figure 3 présente la trajectoire temporelle du front calculée à partir de ce modèle.



**FIGURE 3 –** Simulation de la dynamique d'expansion  $R(t)$  pour une injection échelon, montrant la convergence vers le rayon d'équilibre.

## 4 Conclusion

L'analyse théorique menée dans ce document a permis de caractériser la dynamique d'un film liquide généré par l'impact d'un jet vertical. En régime stationnaire, l'application des lois de conservation a abouti à une expression analytique du rayon du ressaut hydraulique (équation 6), démontrant une dépendance linéaire vis-à-vis du débit incident et une sensibilité inversement proportionnelle au carré de la hauteur du fluide environnant.

L'extension de l'étude au régime transitoire a nécessité la prise en compte des effets inertIELS et des retards de transport. Le modèle développé, reposant sur un bilan de quantité de mouvement appliqué à un volume de contrôle mobile, fournit une équation différentielle décrivant l'évolution temporelle  $\dot{R}(t)$ . La robustesse de cette approche est corroborée par le comportement asymptotique de la solution dynamique, qui converge rigoureusement vers la solution statique lorsque la vitesse d'expansion s'annule.

Toutefois, ce modèle repose sur l'hypothèse d'un fluide parfait. Si cette approximation est valide pour les nombres de Reynolds élevés typiques de ces écoulements, elle néglige la dissipation visqueuse

au sein de la couche limite pariétale, qui joue un rôle croissant à mesure que le rayon augmente et que l'épaisseur du film diminue. De même, les effets de tension de surface, ici ignorés, pourraient influencer la stabilité du front lors des phases initiales de l'expansion. Une confrontation de ces résultats analytiques avec des données expérimentales ou des simulations numériques prenant en compte la viscosité constituerait la suite logique de ce travail pour affiner la prédiction du rayon d'équilibre.

## Références

- [1] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 2nd ed., 1987.
- [2] G. K. Batchelor, *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 1967.
- [3] E. J. Watson, “The radial spread of a liquid jet over a horizontal plane,” *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 20, no. 3, pp. 481–499, 1964.