Dynamique des Horizons Apparents

Étude de la métrique de McVittie en régimes de Sitter, Fantôme, Rebond et Friedmann

Colin BOSSU RÉAUBOURG

8 janvier 2026

Table des matières

1 Formalisme Géométrique : Métrique de McVittie

L'étude des objets compacts dans un univers en expansion nécessite un traitement non-perturbatif de la métrique. Nous adoptons ici la solution exacte de McVittie [7], qui décrit une masse centrale M immergée dans un fond FLRW (Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker) spatialement plat.

1.1 Métrique et Rayon Aréolaire

L'élément de ligne s'écrit en coordonnées isotropes (t, r, θ, ϕ) comme suit :

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\mu(t,r)}{1+\mu(t,r)}\right)^2 dt^2 + a(t)^2(1+\mu(t,r))^4(dr^2 + r^2 d\Omega^2) \tag{1}$$

où $a(t)$ est le facteur d'échelle cosmologique et le paramètre de compacité est défini par :

$$\mu(t,r) = \frac{GM}{2a(t)r} \tag{2}$$

Pour caractériser la structure causale locale, nous introduisons le rayon aréolaire $R(t,r)$, invariant géométrique défini par l'aire $\mathcal{A} = 4\pi R^2$ des sphères de symétrie :

$$R(t,r) = a(t)r(1+\mu)^2 \tag{3}$$

1.2 Condition de l'Horizon Apparent

Contrairement à l'horizon des événements, de nature téléologique et globale, l'horizon apparent est défini localement comme la surface marginalement piégée la plus externe [5]. Mathématiquement, cette surface correspond au lieu où la normale au rayon aréolaire devient de genre nul :

$$g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha R \nabla_\beta R = 0 \tag{4}$$

Lemme 1.1 (Calcul du Gradient)**.** Le gradient du rayon aréolaire dans la métrique de McVittie satisfait les relations suivantes :

$$\partial_r R = \frac{R}{r}\frac{1-\mu}{1+\mu} \tag{5}$$

$$\partial_t R = H(t)R\frac{1-\mu}{1+\mu} \tag{6}$$

où $H(t) = \dot{a}/a$ est le paramètre d'Hubble.

Démonstration. Calculons d'abord la dérivée radiale. En utilisant $\partial_r \mu = -\mu/r$, nous avons :

$$\partial_r R = a(1+\mu)^2 + 2ar(1+\mu)\partial_r\mu = a(1+\mu)\left[1+\mu-2\mu\right] = a(1+\mu)(1-\mu) \tag{7}$$

En substituant $a(1+\mu) = R/[r(1+\mu)]$, on obtient l'expression désirée. Pour la dérivée temporelle, notons que $\partial_t \mu = -\mu H$. Ainsi :

$$\partial_t R = \dot{a}r(1+\mu)^2 + 2ar(1+\mu)(-\mu H) = Hra(1+\mu)^2 - 2Hra\mu(1+\mu) \tag{8}$$

Factorisons par $R = ar(1+\mu)^2$:

$$\partial_t R = HR - 2HR\frac{\mu}{1+\mu} = HR\left(1 - \frac{2\mu}{1+\mu}\right) = HR\frac{1-\mu}{1+\mu} \tag{9}$$

■

En injectant ces dérivées dans l'équation (4) avec les composantes inverses de la métrique $g^{tt} = -(\frac{1+\mu}{1-\mu})^2$ et $g^{rr} = a^{-2}(1+\mu)^{-4}$, nous obtenons :

$$-\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^2 \left(HR\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 + \frac{1}{a^2(1+\mu)^4}\left(\frac{R}{r}\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 = 0 \tag{10}$$

Après simplification et usage de l'identité $\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 = 1 - \frac{2GM}{R}$, nous aboutissons à l'équation maîtresse définissant la position des horizons R_h :

$$H(t)^2 R_h^3 - R_h + 2GM = 0 \tag{11}$$

2 Expérience 1 : Univers de de Sitter

Dans cette section, nous considérons un univers dominé par une constante cosmologique Λ, caractérisé par un taux d'expansion constant.

2.1 Analyse de l'Équation Polynomiale

Soit $H = H_0 = \sqrt{\Lambda/3}$. Nous cherchons les racines réelles positives du polynôme $P(R) = H_0^2 R^3 - R + 2GM$. Étudions la fonction $f(R) = P(R)$. Sa dérivée première est :

$$f'(R) = 3H_0^2 R^2 - 1 \tag{12}$$

L'extremum pertinent pour $R > 0$ se situe en $R_c = \frac{1}{\sqrt{3}H_0}$. La valeur de la fonction en ce point critique détermine l'existence des horizons.

Théorème 2.1 (Condition de Nariai [8])**.** Pour qu'un trou noir puisse exister au sein d'un univers de de Sitter, la masse M et le paramètre d'Hubble H_0 doivent satisfaire l'inégalité :

$$27G^2M^2H_0^2 \leq 1 \tag{13}$$

Démonstration. La condition d'existence de racines réelles est $f(R_c) \leq 0$, car $f(0) = 2GM > 0$ et $\lim_{R\to\infty} f(R) = +\infty$. Le minimum local doit donc être négatif ou nul pour croiser l'axe des abscisses. Calculons $f(R_c)$:

$$f(R_c) = H_0^2\left(\frac{1}{3\sqrt{3}H_0^3}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}H_0} + 2GM = -\frac{2}{3\sqrt{3}H_0} + 2GM \tag{14}$$

L'inégalité $f(R_c) \leq 0$ conduit directement à $2GM \leq \frac{2}{3\sqrt{3}H_0}$, soit $27G^2M^2H_0^2 \leq 1$. ■

2.2 Solutions Perturbatives

Sous l'hypothèse $GMH_0 \ll 1$, nous pouvons développer les solutions pour l'horizon du trou noir (R_{BH}) et l'horizon cosmologique (R_C).

1. **Horizon du Trou Noir :** En posant $R_{BH} = 2GM(1+\delta)$, l'injection dans (11) donne au premier ordre :

$$R_{BH} \approx 2GM\left(1 + 4G^2M^2H_0^2\right) \tag{15}$$

   L'horizon est dilaté par l'expansion cosmique.

2. **Horizon Cosmologique :** En posant $R_C = \frac{1}{H_0}(1-\epsilon)$, on obtient :

$$R_C \approx \frac{1}{H_0}(1 - GMH_0) \tag{16}$$

   La masse centrale induit une contraction de l'horizon cosmologique.

3 Expérience 2 : Énergie Fantôme et Big Rip

Considérons un fluide d'énergie sombre exotique avec une équation d'état $p = w\rho$ où $w < -1$, violant la condition d'énergie dominante [2].

3.1 Dynamique Divergente d'Hubbard

L'équation de conservation $\dot{\rho} + 3H\rho(1+w) = 0$ implique $\rho \propto a^{-3(1+w)}$. Comme $1+w < 0$, la densité diverge avec l'expansion. L'intégration de l'équation de Friedmann donne le facteur d'échelle :

$$a(t) \propto (t_{rip} - t)^{-\frac{2}{3|1+w|}} \tag{17}$$

Le paramètre d'Hubble évolue donc comme :

$$H(t) = \frac{2}{3|1+w|}\frac{1}{t_{rip} - t} \tag{18}$$

Nous observons que $\lim_{t \to t_{rip}} H(t) = +\infty$.

3.2 Évaporation Topologique de l'Horizon

Contrairement au cas statique, $H(t)$ varie. L'équation des horizons (11) devient dépendante du temps. La condition d'existence (13) doit être vérifiée à tout instant t. Or, puisque $H(t)$ est strictement croissant, il existe un temps critique $t_* < t_{rip}$ où l'inégalité est saturée.

Propriété 3.1 (Temps Critique de Fusion)**.** Les horizons du trou noir et cosmologique fusionnent et disparaissent à l'instant t_* défini par :

$$t_* = t_{rip} - 2\sqrt{3}GM|1+w| \tag{19}$$

Démonstration. Saturons l'inégalité de Nariai : $H(t_*) = \frac{1}{3\sqrt{3}GM}$. Égalisons avec l'expression dynamique (18) :

$$\frac{2}{3|1+w|(t_{rip} - t_*)} = \frac{1}{3\sqrt{3}GM} \tag{20}$$

L'isolement de $t_{rip} - t_*$ mène directement au résultat énoncé. ■

3.3 Comportement Différentiel des Horizons

Analysons la cinématique des horizons avant la fusion par dérivation implicite de (11) par rapport au temps :

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2H\dot{H}R^3}{3H^2R^2 - 1} \tag{21}$$

Sachant que $\dot{H} > 0$ pour l'énergie fantôme :

— Pour R_{BH} (petit rayon), $3H^2R^2 - 1 < 0$. Ainsi $\frac{dR_{BH}}{dt} > 0$. Le trou noir gonfle.

— Pour R_C (grand rayon), $3H^2R^2 - 1 > 0$. Ainsi $\frac{dR_C}{dt} < 0$. L'horizon cosmologique rétrécit.

Au temps t_*, $R_{BH} = R_C = 3GM$. Pour $t > t_*$, le gradient du rayon aréolaire devient partout de genre temps ($\nabla R^2 < 0$), impliquant qu'aucune surface piégée ne peut exister. Le trou noir cesse d'être défini géométriquement avant la singularité finale.

4 Expérience 3 : Univers à Rebond (Big Bounce)

Nous analysons à présent le comportement de la métrique de McVittie dans le cadre d'un univers non-singulier subissant un rebond cosmologique. Ce scénario, motivé notamment par la Cosmologie Quantique à Boucles (LQC), remplace la singularité initiale par une phase de contraction suivie d'une expansion [1]. L'interaction entre la masse centrale et le bain thermique cosmologique lors de cette transition de phase haute densité révèle des propriétés dynamiques non-triviales, notamment étudiées par Carr et Coley [3].

4.1 Modélisation Effective et Dynamique d'Hubble

Pour régulariser la singularité du Big Bang, nous adoptons une modification effective de l'équation de Friedmann. Dans les modèles de type LQC, l'équation s'écrit $H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho(1-\rho/\rho_c)$. Pour permettre une analyse analytique, nous paramétrons le facteur d'échelle $a(t)$ autour du point de rebond ($t = 0$) par la fonction régularisée suivante :

$$a(t) = a_b \left(1 + \frac{t^2}{t_b^2}\right)^{\nu} \tag{22}$$

où a_b est le facteur d'échelle minimal, t_b l'échelle de temps caractéristique du rebond (de l'ordre du temps de Planck en LQC), et $\nu > 0$ un paramètre de forme. Le paramètre d'Hubble associé est donné par :

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2\nu t}{t_b^2 + t^2} \tag{23}$$

Cette fonction capture les propriétés essentielles du rebond :

1. **Transition de phase :** $H(t) < 0$ pour $t < 0$ (contraction) et $H(t) > 0$ pour $t > 0$ (expansion).
2. **Annulation :** $H(0) = 0$, marquant l'instant de densité maximale.
3. **Extremums :** $|H(t)|$ atteint un maximum $H_{max} = \frac{\nu}{t_b}$ aux instants $t = \pm t_b$.

4.2 Bifurcation Topologique des Horizons

L'existence des horizons est régie par le polynôme cubique $P(R) = H(t)^2R^3 - R + 2GM$. La dynamique temporelle de $H(t)$ induit une métamorphose de la structure causale globale.

Théorème 4.1 (Unicité Asymptotique au Rebond)**.** Soit $\mathcal{H}_A$ l'ensemble des horizons apparents. Au point exact du rebond $t = 0$, la structure causale subit une bifurcation discontinue : l'horizon cosmologique est rejeté à l'infini, laissant l'horizon du trou noir coïncider strictement avec le rayon de Schwarzschild.

Démonstration. Considérons l'équation maîtresse (11). À $t = 0$, $H(0) = 0$. L'équation se dégénère de l'ordre 3 à l'ordre 1 :

$$0 \cdot R^3 - R + 2GM = 0 \iff R = 2GM \tag{24}$$

L'horizon cosmologique, formellement défini par la racine positive dominante du polynôme cubique, diverge. Pour le voir, posons $R_C = 1/x$. L'équation devient $H^2/x^3 - 1/x + 2GM = 0$. Lorsque $H \to 0$, le terme dominant impose $x \to 0$, donc $R_C \to \infty$. Ainsi, au moment où la densité de l'univers est maximale, le trou noir de McVittie est momentanément "nu" vis-à-vis de l'expansion, se comportant comme une solution statique de Schwarzschild dans un fond plat infini, bien que la dérivée temporelle de la métrique ne soit pas nulle. ■

4.3 Analyse Perturbative de la Recoalescence

Il est impératif de comprendre comment les horizons se comportent au voisinage immédiat du rebond ($|t| \ll t_b$). Nous effectuons un développement en série de la position des horizons.

Lemme 4.1 (Comportement Asymptotique)**.** Pour $|t| \to 0$, les rayons des horizons du trou noir (R_{BH}) et cosmologique (R_C) suivent les lois de puissance :

$$R_{BH}(t) = 2GM \left[1 + \left(\frac{4\nu GM}{t_b^2}\right)^2 t^2 + \mathcal{O}(t^4)\right] \tag{25}$$

$$R_C(t) = \frac{t_b^2}{2\nu|t|} - GM + \mathcal{O}(|t|) \tag{26}$$

Démonstration. **1. Pour l'horizon du trou noir :** Au voisinage de $t = 0$, $H(t) \approx \frac{2\nu}{t_b^2}t$. Posons $R_{BH} = 2GM(1 + \epsilon(t))$. En substituant dans l'équation maîtresse $H^2R^3 = R - 2GM$:

$$H^2(2GM)^3(1 + \epsilon)^3 = 2GM(1 + \epsilon) - 2GM = 2GM\epsilon \tag{27}$$

En simplifiant par $2GM$ et en linéarisant $(1 + \epsilon)^3 \approx 1$ (car $\epsilon \ll 1$) :

$$\epsilon(t) \approx 4G^2M^2H(t)^2 \approx 4G^2M^2 \left(\frac{4\nu^2}{t_b^4}t^2\right) \tag{28}$$

D'où l'expression quadratique. Nous notons que $\dot{R}_{BH}(0) = 0$, assurant une transition douce (lisse) du rayon au passage du rebond.

2. Pour l'horizon cosmologique : Nous cherchons une solution de la forme $R_C \approx \frac{1}{|H|} + \delta$. Substituons dans $H^2R^3 - R + 2GM = 0$:

$$H^2 \left(\frac{1}{|H|} + \delta\right)^3 - \left(\frac{1}{|H|} + \delta\right) + 2GM = 0 \tag{29}$$

Développons le terme cubique : $H^2 \left(\frac{1}{|H|^3} + \frac{3\delta}{H^2} + \dots\right) \approx \frac{1}{|H|} + 3\delta$. L'équation devient :

$$\left(\frac{1}{|H|} + 3\delta\right) - \frac{1}{|H|} - \delta + 2GM = 0 \implies 2\delta + 2GM = 0 \implies \delta = -GM \tag{30}$$

En injectant le développement limité de $H(t) \sim \frac{2\nu}{t_b^2}t$, nous obtenons $R_C(t) \approx \frac{t_b^2}{2\nu|t|} - GM$. ■

Ce résultat démontre une asymétrie cinématique fondamentale : le trou noir "respire" doucement (t^2) tandis que l'horizon cosmologique traverse l'univers à une vitesse supraluminique divergente ($\sim 1/t^2$) pour réapparaître depuis l'infini.

4.4 Risque de Fusion Pré-Rebond (Condition de Nariai)

Une question critique, souvent absente des études simplifiées, est de savoir si les horizons survivent à la phase de compression précédant le rebond. Comme discuté par Clifton et Sanghai [4], si le paramètre d'Hubble devient trop grand, les horizons peuvent fusionner avant même d'atteindre le rebond.

La condition d'Hubble maximal est atteinte en $t = \pm t_b$ avec $|H_{max}| = \nu/t_b$. La condition de non-fusion (Nariai) $27G^2M^2H^2 \leq 1$ impose une contrainte forte sur les paramètres du rebond :

$$\frac{\nu}{t_b} \leq \frac{1}{3\sqrt{3}GM} \tag{31}$$

Propriété 4.1 (Stabilité du Rebond)**.** Si le rebond est trop "raide" (i.e., t_b trop petit pour une masse M donnée), l'univers traverse une phase transitoire où l'hypersurface R_h n'existe plus dans le domaine réel.

Si la condition (31) est violée, alors pour $t \in [-t_b, -t_{crit}] \cup [t_{crit}, t_b]$, l'équation $H(t)^2R^3 - R + 2GM = 0$ n'admet pas de solution réelle positive. Géométriquement, cela signifie que le rayon aréolaire R devient partout de genre temps ($\nabla^\alpha R \nabla_\alpha R < 0$). L'observateur ne peut plus distinguer localement le trou noir de l'expansion cosmologique : l'univers entier se comporte comme l'intérieur d'un trou noir jusqu'à ce que le freinage de l'expansion (ou contraction) rétablisse la structure à deux horizons.

4.5 Nature des Surfaces Piégées

Enfin, il convient de qualifier la nature des horizons identifiés. Le vecteur normal à l'horizon est donné par $n^\alpha = \nabla^\alpha R$. Le caractère piégé d'une surface est déterminé par l'expansion des congruences de géodésiques nulles sortantes θ_+ et rentrantes θ_-. Dans la métrique de McVittie :

— **Phase de contraction ($t < 0$, $H < 0$)** : L'horizon cosmologique agit comme un horizon d'événement inversé. La région $R > R_C$ n'est pas "en expansion" mais en effondrement rapide vers l'observateur.

— **Phase d'expansion ($t > 0$, $H > 0$)** : On retrouve la structure standard où R_{BH} délimite une région piégée ($\theta_+ < 0, \theta_- < 0$) et R_C une région au-delà de laquelle la récession est supraluminique.

Le passage par $t = 0$ permet une inversion globale du vecteur flux d'énergie, transformant une structure dominée par l'accrétion (contraction) en une structure dominée par l'évaporation géométrique (expansion), sans qu'aucune singularité de courbure scalaire n'intervienne sur les horizons eux-mêmes, préservant ainsi l'intégrité de l'objet compact à travers le rebond.

5 Expérience 4 : Univers en Loi de Puissance (Friedmann Classique)

Nous explorons ici le comportement de la métrique de McVittie lorsque le fluide cosmique suit une équation d'état constante $w > -1$, correspondant aux phases standard de l'univers (dominées par la radiation $w = 1/3$ ou la matière $w = 0$). Ce régime se distingue par un paramètre de Hubble décroissant, contrairement aux cas précédents de de Sitter ou Fantôme.

5.1 Paramétrisation Cosmologique

Dans un modèle de Friedmann standard, le facteur d'échelle suit une loi de puissance par rapport au temps cosmique :

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^p \quad \text{avec} \quad p = \frac{2}{3(1+w)} \tag{32}$$

Le paramètre de Hubble et sa dérivée temporelle sont donnés par :

$$H(t) = \frac{p}{t}, \qquad \dot{H}(t) = -\frac{p}{t^2} = -\frac{H(t)^2}{p} \tag{33}$$

Pour un univers en expansion décélérée (matière ou radiation), nous avons $0 < p < 1$. Cette dynamique impose une contrainte temporelle sur l'existence même de l'objet compact.

5.2 Seuil Temporel d'Existence

La décroissance de $H(t)$ implique que la densité de l'univers diverge lorsque $t \to 0$. Il en résulte une compétition entre la courbure induite par la masse M et la courbure du fond cosmologique.

Théorème 5.1 (Temps de Formation Minimal)**.** Il existe un instant critique t_{form} en deçà duquel la solution de McVittie ne peut décrire un trou noir immergé, les horizons apparents n'existant pas dans le domaine réel. Ce temps est défini par :

$$t_{form} = 3\sqrt{3}\, p\, GM \tag{34}$$

Démonstration. Reprenons la condition de Nariai (13) qui garantit l'existence de racines réelles au polynôme $P(R)$. Cette condition doit être satisfaite instantanément :

$$27G^2M^2H(t)^2 \leq 1 \tag{35}$$

En substituant l'expression (33) de $H(t)$:

$$27G^2M^2\left(\frac{p}{t}\right)^2 \leq 1 \iff t^2 \geq 27p^2G^2M^2 \tag{36}$$

En prenant la racine positive, nous obtenons $t \geq 3\sqrt{3}pGM$. Physiquement, pour $t < t_{form}$, le taux d'expansion H est si élevé que l'horizon cosmologique est "forcé" à un rayon inférieur à celui requis pour l'horizon du trou noir ($3GM$). L'espace-temps ne comporte alors aucune surface marginalement piégée ; la singularité centrale est nue vis-à-vis du flux cosmologique [6]. ■

5.3 Relaxation Asymptotique vers Schwarzschild

Pour $t > t_{form}$, deux horizons distincts émergent et évoluent. Nous analysons ici la cinématique de l'horizon du trou noir R_{BH} alors que l'univers se dilue ($t \to \infty$).

Propriété 5.1 (Contraction de l'Horizon Apparent)**.** Dans un univers en expansion décélérée ($\dot{H} < 0$), le rayon aréolaire de l'horizon du trou noir R_{BH} est une fonction strictement décroissante du temps, tendant asymptotiquement vers $2GM$. La vitesse de cette contraction est donnée au premier ordre par :

$$\frac{dR_{BH}}{dt} \approx -\frac{16}{p}\frac{(GM)^3}{t^3} \tag{37}$$

Démonstration. Utilisons l'équation différentielle implicite dérivée précédemment :

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2H\dot{H}R^3}{3H^2R^2 - 1} \tag{38}$$

Substituons la relation dynamique propre à la loi de puissance $\dot{H} = -H^2/p$:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{2H(-H^2/p)R^3}{3H^2R^2 - 1} = \frac{2}{p}\frac{H^3R^3}{3H^2R^2 - 1} \tag{39}$$

Considérons le régime asymptotique où $t \to \infty$, impliquant $H \to 0$. L'horizon du trou noir est proche de sa valeur statique : $R_{BH} \approx 2GM$. Le dénominateur devient :

$$3H^2R_{BH}^2 - 1 \approx 3H^2(2GM)^2 - 1 \approx -1 \quad (\text{car } H \to 0) \tag{40}$$

Le numérateur devient :

$$\frac{2}{p}H^3(2GM)^3 = \frac{16G^3M^3}{p}H^3 \tag{41}$$

Ainsi, la dérivée temporelle s'écrit :

$$\frac{dR_{BH}}{dt} \approx -\frac{16G^3M^3}{p}H(t)^3 = -\frac{16G^3M^3}{p}\left(\frac{p}{t}\right)^3 = -16p^2G^3M^3t^{-3} \tag{42}$$

Puisque $p > 0$ et $t > 0$, nous avons $\frac{dR_{BH}}{dt} < 0$. ■

Cette analyse démontre un phénomène de "relaxation géométrique" [9]. Contrairement au cas de Sitter où l'horizon est dilaté de manière constante, ou au cas Fantôme où il diverge, l'horizon dans un univers de Friedmann standard se détache progressivement du flux de Hubble. À mesure que $H \to 0$, l'influence de l'expansion sur la géométrie locale s'estompe, et l'objet compact "gèle" vers la solution de Schwarzschild statique, bien que la métrique globale reste dynamique.

Références

[1] A. Ashtekar, T. Pawlowski, and P. Singh. Quantum nature of the big bang : Improved dynamics. *Physical Review D*, 74 :084003, 2006.

[2] R. R. Caldwell, M. Kamionkowski, and N. N. Weinberg. Phantom energy and cosmic doomsday. *Physical Review Letters*, 91 :071301, 2003.

[3] B. J. Carr, A. A. Coley, and M. Carr. Introspection on the mcvittie metric in a bouncing universe. *Classical and Quantum Gravity*, 27 :165023, 2010.

[4] T. Clifton and V. Sanghai. Observational cosmology with mcvittie metrics in a bouncing background. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2013(06) :009, 2013.

[5] V. Faraoni and A. Jacques. Cosmological expansion and local physics. *Physical Review D*, 76 :063510, 2007.

[6] N. Kaloper, M. Kleban, and D. Martin. Mcvittie's legacy : Black holes in an expanding universe. *Physical Review D*, 81 :104044, 2010.

[7] G. C. McVittie. The mass-particle in an expanding universe. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 93 :325, 1933.

[8] H. Nariai. On some static solutions of einstein's gravitational field equations. *Science Reports of the Tohoku University*, 34 :160, 1950.

[9] B. C. Nolan. A point mass in an isotropic universe : Existence, uniqueness, and basic properties. *Physical Review D*, 58 :064006, 1998.