
Mathématiques 5 - Cours

Écriture tensorielle, Analyse complexe, Séries de Fourier et
Équations différentielles

Colin Bossu Réaubourg

Université Paris Cité
Troisième année de licence de physique
13 décembre 2025

Table des matières

1 Écriture et calcul tensoriel	4
1.1 Introduction et motivation	4
1.2 Indices covariants et contravariants	4
1.3 Convention de sommation d'Einstein	4
1.4 Le tenseur métrique	5
1.4.1 Produit scalaire généralisé	6
1.5 Outils et symboles tensoriels	6
1.5.1 Symbole de Kronecker	6
1.5.2 Symbole de Levi-Civita	6
1.6 Algèbre tensorielle et transformations	7
1.7 Analyse tensorielle et applications physiques	7
1.7.1 Dérivées	7
1.7.2 Position, Vitesse et Accélération	8
1.7.3 Force dérivant d'un potentiel	8
2 Analyse complexe	9
2.1 Rappels et définitions topologiques	9
2.2 Dérivation complexe et Holomorphie	9
2.2.1 Les opérateurs de Wirtinger	9
2.2.2 Fonctions holomorphes	9
2.2.3 Conditions de Cauchy-Riemann	10
2.3 Fonctions multivalentes et Coupures	10
2.3.1 Le Logarithme complexe	10
2.4 Théorèmes fondamentaux d'intégration	11
2.5 Formule intégrale de Cauchy et Applications	11
2.6 Séries de Taylor et de Laurent	12
2.6.1 Série de Taylor	12
2.6.2 Série de Laurent	12
2.6.3 Classification des singularités isolées	12
2.7 Le calcul des Résidus	12
2.7.1 Calcul pratique des résidus	13
2.7.2 Résidu à l'infini	13
2.8 Applications au calcul d'intégrales réelles	13
2.8.1 Lemmes de Jordan	13
2.8.2 Types d'intégrales calculables	13
3 Séries de Fourier	15
3.1 Espace fonctionnel et structure géométrique	15
3.1.1 Analogie vectorielle	15
3.1.2 Meilleure approximation et orthogonalité	15
3.1.3 Origine des bases : Opérateurs Hermitiens	15
3.2 Décomposition en Séries de Fourier	16
3.2.1 Forme complexe	16
3.2.2 Forme trigonométrique (réelle)	16

3.2.3	Propriétés de parité	16
3.3	Théorèmes de convergence et Parseval	17
3.3.1	Théorème de Dirichlet (Convergence ponctuelle)	17
3.3.2	Théorème de Parseval (Conservation de l'énergie)	17
3.3.3	Inégalité de Bessel	17
3.4	Exemple complet : Fonction parabolique et sommes numériques	18
3.5	Transformée de Fourier	19
3.5.1	Définition et inversion	19
3.5.2	La base des ondes planes et le Dirac	19
3.5.3	Propriétés fondamentales	19
3.6	Algèbre de convolution	20
3.7	Exemple d'application : Équation de la chaleur	20
4	Équations différentielles	21
4.1	Rappels sur les EDO et méthodes de résolution	21
4.1.1	EDO du premier ordre	21
4.1.2	EDO du second ordre à coefficients constants	21
4.1.3	EDO du second ordre à coefficients non constants : Méthode de Frobenius	22
4.2	Opérateurs Hermitiens et bases orthogonales	22
4.3	Méthode de la fonction de Green	23
4.4	Équations aux dérivées partielles (EDP)	23
4.4.1	Classification des EDP linéaires du second ordre	23
4.4.2	Conditions aux limites (CL)	23
4.4.3	Stratégie de résolution : Décomposition Statique-Dynamique	24
4.5	Problème aux valeurs propres du Laplacien	24
4.5.1	Le Laplacien en coordonnées sphériques	24
4.5.2	Séparation des variables	24
4.5.3	Partie angulaire : Harmoniques Sphériques	24
4.5.4	Partie radiale : Fonctions de Bessel sphériques	25
4.5.5	Solution générale	25

1 Écriture et calcul tensoriel

1.1 Introduction et motivation

En physique, les lois fondamentales doivent être indépendantes du référentiel choisi pour les décrire. Cette propriété est appelée covariance. Pour formaliser cette indépendance, nous utilisons le calcul tensoriel. Considérons un vecteur déplacement élémentaire $d\vec{r}$. Dans un espace vectoriel de dimension N , ce vecteur possède N composantes. Pour calculer la norme au carré de ce vecteur, l'approche matricielle classique (vecteur colonne transposé multiplié par vecteur colonne) ne suffit plus dès que l'on travaille dans des bases non orthonormées ou des espaces courbes.

Il est nécessaire de distinguer l'espace vectoriel V de son espace dual V^* . Les éléments de V sont des vecteurs (indices en haut), et les éléments de V^* sont des formes linéaires (indices en bas). La contraction d'un vecteur et d'une forme linéaire donne un scalaire invariant.

1.2 Indices covariants et contravariants

La position des indices indique comment les composantes d'un objet se transforment lors d'un changement de base.

Définition 1.1 (Types de composantes). — *Composantes contravariantes (indices en haut) : Ce sont les composantes des vecteurs usuels, comme le déplacement infinitésimal, la vitesse ou l'accélération. On note :*

$$x^i = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^N \end{pmatrix}$$

— *Composantes covariantes (indices en bas) : Ce sont les composantes des formes linéaires (covecteurs), comme le gradient d'une fonction scalaire. On note :*

$$x_i = (x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Remarque 1.1. Les indices covariants ne sont généralement pas des grandeurs directement mesurables (observables) au sens des longueurs physiques, contrairement aux composantes contravariantes. Le lien entre les deux nécessite l'introduction d'une métrique.

1.3 Convention de sommation d'Einstein

Pour simplifier les écritures, nous adoptons la convention suivante :

Définition 1.2 (Convention d'Einstein). *Dans une expression algébrique, tout indice apparaissant deux fois dans un même monôme, une fois en position haute (contravariante) et une fois en position basse (covariante), implique une sommation implicite sur toutes les valeurs possibles de cet indice (de 1 à la dimension de l'espace).*

Exemple 1.1. Le produit scalaire s'écrit :

$$S = \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^N A_i B^i \equiv A_i B^i$$

Attention : On ne peut jamais avoir plus de deux fois le même indice dans un monôme.

1.4 Le tenseur métrique

Le lien entre les composantes covariantes et contravariantes est assuré par le tenseur métrique g_{ij} . Cet objet contient toute l'information sur la géométrie de l'espace (distances et angles).

Propriété 1.1 (Opérations sur les indices). Le tenseur métrique permet de "monter" ou "descendre" les indices :

- Descente d'indice : $x_i = g_{ij}x^j$
- Montée d'indice : $x^i = g^{ij}x_j$

où g^{ij} sont les composantes du tenseur métrique inverse, tel que $g_{ik}g^{kj} = \delta_i^j$.

L'élément de longueur au carré (métrique) s'écrit alors :

$$ds^2 = ||d\vec{r}||^2 = g_{ij}dx^i dx^j$$

Exemple 1.2 (Métrique en coordonnées cartésiennes 2D). Pour $x^1 = x, x^2 = y$, on a $ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. La matrice métrique est l'identité :

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, $x_i = x^i$. C'est pourquoi la distinction n'est pas nécessaire dans les espaces euclidiens orthonormés.

Exemple 1.3 (Métrique en coordonnées polaires 2D). Soit le changement de variables $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$. On a $dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta$ et $dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta$. Le carré de la distance est :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$$

En posant $x^1 = r$ et $x^2 = \theta$, on identifie les coefficients de $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$:

$$[g] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

Ici, les composantes covariantes diffèrent des contravariantes :

$$\begin{cases} dx_1 = g_{11}dx^1 + g_{12}dx^2 = 1 \cdot dr + 0 = dr \\ dx_2 = g_{21}dx^1 + g_{22}dx^2 = 0 + r^2 \cdot d\theta = r^2 d\theta \end{cases}$$

1.4.1 Produit scalaire généralisé

Le produit scalaire de deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} est défini par :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = x_i y^i = g_{ij} x^j y^j$$

L'angle θ entre deux vecteurs peut alors être calculé par la formule générale :

$$\cos \theta = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|} = \frac{g_{ij} x^i y^j}{\sqrt{g_{lm} x^l x^m} \sqrt{g_{pq} y^p y^q}}$$

1.5 Outils et symboles tensoriels

1.5.1 Symbole de Kronecker

Le symbole de Kronecker δ_j^i (ou δ_{ij}) est défini par :

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

C'est un tenseur invariant (le même dans tous les référentiels). Sa propriété fondamentale est la substitution d'indice :

$$A^i \delta_i^j = A^j$$

1.5.2 Symbole de Levi-Civita

Dans un espace de dimension 3, le symbole ε_{ijk} est défini par :

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{si au moins deux indices sont identiques} \end{cases}$$

Il permet d'exprimer le produit vectoriel. La i -ème composante de $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ est :

$$[\vec{A} \wedge \vec{B}]_i = \varepsilon_{ijk} A^j B^k$$

Théorème 1.1 (Identité de contraction). Le produit de deux symboles de Levi-Civita contractés sur un indice s'exprime en fonction des symboles de Kronecker :

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}$$

Exemple 1.4 (Démonstration du double produit vectoriel). Soit $\vec{D} = \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$. Calculons sa composante i . On note $\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{C}$, donc $E_k = \varepsilon_{klm} B^l C^m$.

$$\begin{aligned} D_i &= [\vec{A} \wedge \vec{E}]_i = \varepsilon_{ijk} A^j E^k \\ &= \varepsilon_{ijk} A^j (\varepsilon_{klm} B^l C^m) \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} A^j B^l C^m \end{aligned}$$

Par invariance cyclique, $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$. Donc $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \varepsilon_{kij}\varepsilon_{klm}$. En utilisant l'identité de contraction sur l'indice k :

$$\begin{aligned} D_i &= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})A^jB^lC^m \\ &= \delta_{il}\delta_{jm}A^jB^lC^m - \delta_{im}\delta_{jl}A^jB^lC^m \\ &= A^jB^iC_j - A^jB_jC^i \quad (\text{car } B^l\delta_{il} = B^i \text{ etc.}) \\ &= B^i(A^jC_j) - C^i(A^jB_j) \end{aligned}$$

On reconnaît les produits scalaires $A^jC_j = \vec{A} \cdot \vec{C}$ et $A^jB_j = \vec{A} \cdot \vec{B}$. Ainsi, nous avons démontré la formule :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})\vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B})\vec{C}$$

1.6 Algèbre tensorielle et transformations

Un tenseur est un objet géométrique défini par la loi de transformation de ses composantes lors d'un changement de coordonnées $x^i \rightarrow x'^i$. On définit la matrice de passage (Jacobienne) : $\Lambda_j^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$.

Définition 1.3 (Lois de transformation). — **Scalaire (tenseur de rang 0)** : $S' = S$. Invariant.

— **Vecteur (tenseur contravariant de rang 1)** :

$$V'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} V^j = \Lambda_j^i V^j$$

— **Covecteur (tenseur covariant de rang 1)** :

$$V'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} V_j$$

— **Tenseur de rang n** :

$$T_{j_1 \dots j_q}^{i_1 \dots i_p} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \dots T_{l_1 \dots l_q}^{k_1 \dots k_p}$$

Propriété 1.2 (Orthogonalité de la transformation). Les matrices de transformation directe et inverse sont inverses l'une de l'autre :

$$\frac{\partial x'^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^k}{\partial x'^j} = \delta_j^i$$

1.7 Analyse tensorielle et applications physiques

Les opérateurs différentiels doivent être traités avec soin pour préserver la covariance.

1.7.1 Dérivées

La dérivation partielle par rapport aux coordonnées agit comme une composante covariante :

$$\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$$

Inversement, $\partial^i = \frac{\partial}{\partial x_i} = g^{ij}\partial_j$.

1.7.2 Position, Vitesse et Accélération

1. **Position :** Le vecteur position \vec{r} (de composantes x^i) n'est pas un tenseur au sens strict car ses composantes ne se transforment pas linéairement lors d'un changement d'origine (translation). En revanche, le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ (composantes dx^i) est le prototype du tenseur contravariant de rang 1.
2. **Vitesse :** La vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ est un tenseur contravariant.

$$v'^i = \frac{dx'^i}{dt} = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{dx^j}{dt} = \Lambda_j^i v^j$$

3. **Accélération :** L'accélération nécessite une attention particulière. Dérivons la loi de transformation de la vitesse :

$$\gamma'^i = \frac{dv'^i}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} v^j \right)$$

En appliquant la règle de Leibniz :

$$\gamma'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \frac{dv^j}{dt} + v^j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x'^i}{\partial x^j} \right)$$

$$\gamma'^i = \Lambda_j^i \gamma^j + v^j v^k \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^j}$$

Le second terme ($v^j v^k \frac{\partial^2 x'^i}{\partial x^k \partial x^j}$) ne s'annule que si la transformation est linéaire (matrice de passage constante).

- Si la transformation est linéaire, l'accélération est un tenseur.
- Si la transformation est non-linéaire (ex : cartésien vers polaire), la simple dérivée temporelle des composantes ne forme pas un tenseur. Il faut introduire la **dérivée covariante** pour corriger ce terme et obtenir une grandeur intrinsèque.

1.7.3 Force dérivant d'un potentiel

L'expression de la force \vec{F} dérivant d'un potentiel scalaire U est donnée par le gradient. Puisque U est un scalaire (invariant), son gradient est un vecteur covariant :

$$F_i = -\partial_i U = -\frac{\partial U}{\partial x^i}$$

L'équation de Newton sous forme covariante (si la force est un tenseur) nécessite l'utilisation de l'accélération covariante $mD_t v^i = F^i$. Si le potentiel est central et isotrope, la formulation tensorielle permet de passer aisément d'un système de coordonnées à l'autre.

2 Analyse complexe

L'analyse complexe étend le calcul infinitésimal au corps \mathbb{C} . Contrairement à l'analyse réelle où la dérivabilité est une propriété locale "souple", la dérivabilité complexe (holomorphie) impose des contraintes structurelles très fortes (fonctions analytiques, propriétés intégrales globales).

2.1 Rappels et définitions topologiques

- Définition 2.1** (Topologie élémentaire).
- **Ouvert** : Un domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}$ est ouvert si pour tout point $z_0 \in \mathcal{D}$, il existe un disque centré en z_0 entièrement inclus dans \mathcal{D} .
 - **Connexité** : Un domaine est connexe s'il est "d'un seul tenant".
 - **Simplement connexe** : Un domaine \mathcal{D} est simplement connexe si tout lacet (courbe fermée) tracé dans \mathcal{D} peut être continûment déformé en un point sans sortir de \mathcal{D} (pas de "trous").
 - **Courbe de Jordan** : Une courbe continue, fermée et sans point double (qui ne se recoupe pas). Elle sépare le plan en deux composantes : l'intérieur (borné) et l'extérieur.

2.2 Dérivation complexe et Holomorphie

2.2.1 Les opérateurs de Wirtinger

Soit $z = x + iy$ et son conjugué $\bar{z} = x - iy$. On peut exprimer les différentielles réelles en fonction de dz et $d\bar{z}$:

$$dx = \frac{dz + d\bar{z}}{2}, \quad dy = \frac{dz - d\bar{z}}{2i}$$

Pour une fonction $f(z, \bar{z}) = U(x, y) + iV(x, y)$, la différentielle totale s'écrit :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - i \frac{\partial f}{\partial y} \right) dz + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} \right) d\bar{z}$$

On définit formellement les opérateurs de dérivation :

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

2.2.2 Fonctions holomorphes

Définition 2.2 (Holomorphie). Une fonction f définie sur un ouvert Ω est dite **holomorphe** si elle est dérivable par rapport à la variable complexe z en tout point de Ω . Cela équivaut à dire que f ne dépend pas explicitement de \bar{z} :

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

2.2.3 Conditions de Cauchy-Riemann

En séparant les parties réelle et imaginaire dans l'équation $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} \right) + i \left(\frac{\partial U}{\partial y} + i \frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] = 0$$

Soit $\left(\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{\partial V}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} \right) = 0$.

Théorème 2.1 (Conditions de Cauchy-Riemann). Une fonction $f = U+iV$ est holomorphe si et seulement si U et V sont différentiables et vérifient :

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

Propriété 2.1 (Fonctions harmoniques). Si f est holomorphe, alors U et V sont des fonctions harmoniques, c'est-à-dire qu'elles vérifient l'équation de Laplace :

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta V = 0$$

Exemple 2.1 (Reconstruction d'une fonction). Soit $U(x, y) = x^2 - y^2 + 2x$. Cherchons V tel que $f = U + iV$ soit holomorphe.

1. $\partial_x U = 2x + 2 = \partial_y V \implies V(x, y) = 2xy + 2y + g(x)$.
2. $\partial_y U = -2y = -\partial_x V \implies \partial_x V = 2y$.
3. En dérivant l'expression trouvée en 1 : $\partial_x(2xy + 2y + g(x)) = 2y + g'(x)$.
4. On identifie : $2y + g'(x) = 2y \implies g'(x) = 0 \implies g(x) = C$.

Donc $V(x, y) = 2xy + 2y + C$. On reconstitue $f(z) = (x^2 - y^2 + 2x) + i(2xy + 2y + C) = (x + iy)^2 + 2(x + iy) + iC = z^2 + 2z + iC$.

2.3 Fonctions multivalentes et Coupures

Certaines fonctions inverses, comme le logarithme ou les puissances non entières, ne sont pas définies de manière unique sur tout le plan complexe.

2.3.1 Le Logarithme complexe

On définit $\log(z) = \ln|z| + i\arg(z)$. Or, l'argument est défini modulo 2π . Pour rendre la fonction univalente (et donc holomorphe), il faut restreindre le domaine de définition.

- **Détermination principale** : On choisit souvent $\arg(z) \in]-\pi, \pi]$.
- **Coupe** : On interdit le franchissement d'une demi-droite partant de l'origine (point de branchement), généralement l'axe réel négatif \mathbb{R}^- .

La discontinuité au travers de la coupure est de $2i\pi$. Pour une puissance $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, la coupure est nécessaire si $\alpha \notin \mathbb{Z}$.

2.4 Théorèmes fondamentaux d'intégration

L'intégrale curviligne le long d'un chemin paramétré $\gamma(t)$ pour $t \in [a, b]$ est $\int_{\gamma} f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$.

Théorème 2.2 (Théorème de Cauchy). Soit f une fonction holomorphe sur un domaine simplement connexe \mathcal{D} . Pour tout lacet (courbe fermée) \mathcal{C} inclus dans \mathcal{D} :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 0$$

Démonstration. En posant $z = x + iy$, $\oint f dz = \oint (Udx - Vdy) + i \oint (Vdx + Udy)$. D'après le théorème de Green-Riemann, $\oint Pdx + Qdy = \iint (\partial_x Q - \partial_y P) dx dy$. Pour la partie réelle : $\iint (-\partial_x V - \partial_y U) dx dy$. Or Cauchy-Riemann donne $\partial_x V = -\partial_y U$, donc l'intégrale est nulle. De même pour la partie imaginaire. ■

Corollaire 2.1 (Déformation de contour). Si f est holomorphe dans la région comprise entre deux lacets \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , alors :

$$\oint_{\mathcal{C}_1} f(z)dz = \oint_{\mathcal{C}_2} f(z)dz$$

Cela permet de "rétrécir" les contours autour des singularités.

Propriété 2.2 (Primitive). Si f est holomorphe sur un simplement connexe, l'intégrale $\int_{z_0}^z f(\xi)d\xi$ est indépendante du chemin. On peut définir une primitive $F(z)$ telle que $F'(z) = f(z)$. Alors, pour tout chemin ouvert de A à B : $\int_A^B f(z)dz = F(B) - F(A)$.

2.5 Formule intégrale de Cauchy et Applications

Cette formule exprime le fait que la valeur d'une fonction holomorphe en un point est entièrement déterminée par ses valeurs sur un contour entourant ce point.

Théorème 2.3 (Formule de Cauchy). Soit f holomorphe sur un ouvert contenant un disque fermé \bar{D} . Soit \mathcal{C} le cercle frontière de ce disque, orienté positivement. Pour tout z à l'intérieur de \mathcal{C} :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

Par dérivation sous le signe somme, on obtient la formule pour la dérivée n -ième :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{\mathcal{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Théorème 2.4 (Théorème de Liouville). Toute fonction entière (holomorphe sur tout \mathbb{C}) et bornée est constante.

Démonstration. Soit $|f(z)| \leq M$ pour tout z . Appliquons l'inégalité de Cauchy pour la dérivée sur un cercle de rayon R :

$$|f'(z)| \leq \frac{1!}{2\pi} \oint \frac{|f(\xi)|}{|\xi - z|^2} |d\xi| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{R^2} (2\pi R) = \frac{M}{R}$$

Quand $R \rightarrow \infty$, $|f'(z)| \rightarrow 0$. Donc $f'(z) = 0$ partout, donc f est constante. ■

2.6 Séries de Taylor et de Laurent

2.6.1 Série de Taylor

Si f est holomorphe dans un disque $|z - z_0| < R$, elle y est développable en série entière (partie régulière) :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{avec } a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$$

Le rayon de convergence R est la distance à la singularité la plus proche.

2.6.2 Série de Laurent

Si f est holomorphe dans une couronne (anneau) $r < |z - z_0| < R$, elle admet un développement unique :

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$$

Les coefficients sont donnés par $c_n = \frac{1}{2i\pi} \oint_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi$. On décompose souvent la série en :

- **Partie régulière** : $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ (analytique à l'intérieur).
- **Partie principale (singulième)** : $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ (contient les singularités).

2.6.3 Classification des singularités isolées

Soit z_0 une singularité isolée. On regarde la partie principale de la série de Laurent :

- **Singularité apparente (effaçable)** : Tous les $c_n = 0$ pour $n < 0$. La fonction est prolongeable par continuité (ex : $\frac{\sin z}{z}$ en 0).
- **Pôle d'ordre k** : La partie principale est finie et s'arrête à $n = -k$ ($c_{-k} \neq 0$).

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \cdots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

- **Singularité essentielle** : La partie principale a une infinité de termes non nuls (ex : $e^{1/z}$ en 0).

2.7 Le calcul des Résidus

Définition 2.3 (Résidu). Le résidu d'une fonction f en une singularité isolée z_0 , noté $\text{Res}(f, z_0)$, est le coefficient c_{-1} de son développement en série de Laurent centré en z_0 .

L'intérêt majeur réside dans le fait que c_{-1} est le seul terme dont l'intégrale sur un cercle fermé n'est pas nulle (elle vaut $2i\pi$).

Théorème 2.5 (Théorème des Résidus). Soit \mathcal{D} un domaine simplement connexe et \mathcal{C} un lacet orienté positivement dans \mathcal{D} . Si f est holomorphe sur \mathcal{D} sauf en un nombre fini de singularités isolées z_1, \dots, z_n situées à l'intérieur de \mathcal{C} , alors :

$$\oint_{\mathcal{C}} f(z) dz = 2i\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}(f, z_k)$$

2.7.1 Calcul pratique des résidus

— Pôle simple ($k = 1$) :

$$\text{Res}(f, z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z)$$

Si $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0$, alors $\text{Res}(f, z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$.

— Pôle multiple (ordre k) :

$$\text{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]$$

2.7.2 Résidu à l'infini

Si f a un nombre fini de singularités dans le plan, on peut définir le résidu à l'infini par le changement de variable $z = 1/w$. La somme totale des résidus (incluant celui à l'infini) est nulle.

$$\sum_{\text{fini}} \text{Res}(f, z_k) + \text{Res}(f, \infty) = 0 \quad \text{avec} \quad \text{Res}(f, \infty) = -\text{Res}\left(\frac{1}{w^2} f\left(\frac{1}{w}\right), 0\right)$$

2.8 Applications au calcul d'intégrales réelles

2.8.1 Lemmes de Jordan

Ces lemmes permettent de négliger les intégrales sur des arcs de cercle (souvent de rayon $R \rightarrow \infty$ ou $\epsilon \rightarrow 0$).

Lemme 2.1 (Premier lemme (Estimation standard)). Si $|f(z)| \leq \frac{M}{R^\alpha}$ avec $\alpha > 1$ sur un demi-cercle C_R , alors $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0$.

Lemme 2.2 (Second lemme de Jordan). Soit f continue sur le demi-plan supérieur telle que $\lim_{R \rightarrow \infty} \max_{\theta \in [0, \pi]} |f(Re^{i\theta})| = 0$. Alors pour tout $a > 0$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0$$

Ce lemme est crucial pour les transformées de Fourier.

2.8.2 Types d'intégrales calculables

Type 1 : Intégrales rationnelles $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$. Conditions : Q ne s'annule pas sur \mathbb{R} et $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. Méthode : On ferme le contour par un demi-cercle dans le demi-plan supérieur (ou inférieur).

$$I = 2i\pi \sum_{z_k \in \text{demi-plan sup}} \text{Res}(f, z_k)$$

Type 2 : Intégrales de Fourier $I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ikx} dx$ ($k > 0$). Méthode : On ferme le contour dans le demi-plan supérieur (là où $e^{ikz} = e^{ikx} e^{-ky}$ décroît exponentiellement). On utilise le lemme de Jordan. Attention : si la fonction a un pôle sur l'axe réel (ex : $\frac{\sin x}{x}$),

on contourne la singularité par un petit demi-cercle de rayon ϵ et on utilise la formule du demi-résidu ($i\pi \text{Res}$).

Type 3 : Intégrales trigonométriques $I = \int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$. Méthode : Changement de variable $z = e^{i\theta}$, donc $d\theta = \frac{dz}{iz}$. On utilise les formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{z + 1/z}{2}, \quad \sin \theta = \frac{z - 1/z}{2i}$$

L'intégrale devient une intégrale sur le cercle unité $|z| = 1$ d'une fraction rationnelle en z .

$$I = \oint_{|z|=1} g(z) dz = 2i\pi \sum_{|z_k|<1} \text{Res}(g, z_k)$$

Exemple 2.2 (Exemple complet Type 3). Calculons $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos \theta}$. Posons $z = e^{i\theta}$.

$$2 + \cos \theta = 2 + \frac{z + z^{-1}}{2} = \frac{z^2 + 4z + 1}{2z}$$

L'intégrale devient :

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\frac{z^2+4z+1}{2z}} \frac{dz}{iz} = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 4z + 1}$$

Les pôles sont les racines de $z^2 + 4z + 1 = 0$: $\Delta = 16 - 4 = 12$. $z_1 = \frac{-4 + \sqrt{12}}{2} = -2 + \sqrt{3} \approx -0.268$ (à l'intérieur du cercle unité). $z_2 = \frac{-4 - \sqrt{12}}{2} = -2 - \sqrt{3} \approx -3.732$ (à l'extérieur). Seul z_1 contribue.

$$\text{Res}\left(\frac{1}{z^2 + 4z + 1}, z_1\right) = \frac{1}{2z_1 + 4} = \frac{1}{2(-2 + \sqrt{3}) + 4} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

Finalement :

$$I = \frac{2}{i} \times 2i\pi \times \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

3 Séries de Fourier

Les séries de Fourier constituent un outil fondamental en physique théorique et expérimentale, permettant de décomposer un signal périodique en une somme infinie de fonctions oscillantes élémentaires (sinus et cosinus, ou exponentielles complexes). Cette approche généralise l'analyse vectorielle euclidienne à des espaces de fonctions de dimension infinie.

3.1 Espace fonctionnel et structure géométrique

3.1.1 Analogie vectorielle

Considérons l'espace $L^2([a, b])$ des fonctions de carré intégrable sur un intervalle $[a, b]$. Cet espace peut être muni d'une structure d'espace de Hilbert via le produit scalaire hermitien. Pour deux fonctions f et g (potentiellement à valeurs complexes), on définit :

$$\langle g | f \rangle = (g, f) = \int_a^b g^*(x)f(x)dx$$

La norme induite est $\|f\|^2 = (f, f) = \int_a^b |f(x)|^2 dx$.

L'objectif est d'approximer une fonction f par une combinaison linéaire de fonctions de base $\{e_n\}_n$, de la même manière qu'on décompose un vecteur \vec{V} sur une base $\{\vec{u}_i\}$.

3.1.2 Meilleure approximation et orthogonalité

Cherchons à approximer f par une somme partielle $S_N = \sum_{n=-N}^N c_n e_n(x)$. Nous cherchons les coefficients c_n qui minimisent l'erreur quadratique moyenne (MSD - Mean Square Deviation) :

$$\Delta = \left\| f - \sum_n c_n e_n \right\|^2$$

Si la base $\{e_n\}$ est **orthogonale**, c'est-à-dire si $(e_n, e_m) = \lambda_n \delta_{nm}$, alors le minimum est atteint lorsque les coefficients sont les projections orthogonales :

$$c_n = \frac{(e_n, f)}{\|e_n\|^2}$$

C'est le principe de la projection orthogonale : le vecteur erreur $f - S_N$ est orthogonal au sous-espace engendré par la base.

3.1.3 Origine des bases : Opérateurs Hermitiens

Comment choisir une bonne base orthogonale ? En physique, ces bases émergent souvent comme les fonctions propres d'opérateurs différentiels hermitiens.

Définition 3.1 (Opérateur Hermitien). *Un opérateur linéaire \mathcal{L} est hermitien sur un domaine \mathcal{D} (avec des conditions aux limites spécifiées) si :*

$$(f, \mathcal{L}g) = (\mathcal{L}f, g) \iff \int_{\mathcal{D}} f^*(x)(\mathcal{L}g(x))dx = \int_{\mathcal{D}} (\mathcal{L}f(x))^*g(x)dx$$

Théorème 3.1 (Théorème spectral). Les fonctions propres d'un opérateur hermitien correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonales. Elles forment une base complète de l'espace de Hilbert.

Exemple 3.1 (Base de Fourier). L'opérateur $\mathcal{L} = -i \frac{d}{dx}$ sur l'intervalle $[0, T]$ avec conditions aux limites périodiques ($f(0) = f(T)$) est hermitien. Ses fonctions propres sont $e_n(x) = e^{i\omega_n x}$ avec $\omega_n = \frac{2\pi n}{T}$, associées aux valeurs propres ω_n . C'est l'origine de la base de Fourier complexe.

3.2 Décomposition en Séries de Fourier

Soit $f(x)$ une fonction T -périodique. On pose $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

3.2.1 Forme complexe

C'est la forme la plus algébrique. La famille $\{e^{in\omega x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthogonale sur $[0, T]$.

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{in\omega x}$$

Les coefficients de Fourier c_n sont donnés par :

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-in\omega x} dx$$

Note : On peut intégrer sur n'importe quel intervalle de longueur T , par exemple $[0, T]$.

3.2.2 Forme trigonométrique (réelle)

Si f est à valeurs réelles, on peut regrouper les termes n et $-n$:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x))$$

Les coefficients sont :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) dx \quad (n \geq 0) \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin(n\omega x) dx \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Relations entre coefficients :

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad c_{-n} = c_n^* = \frac{a_n + ib_n}{2} \quad (\text{pour } n > 0)$$

3.2.3 Propriétés de parité

- Si f est **paire** ($f(-x) = f(x)$) : $b_n = 0$, le développement ne contient que des cosinus.
- Si f est **impaire** ($f(-x) = -f(x)$) : $a_n = 0$, le développement ne contient que des sinus.

3.3 Théorèmes de convergence et Parseval

3.3.1 Théorème de Dirichlet (Convergence ponctuelle)

Si f est T -périodique et de classe C^1 par morceaux sur une période, alors la série de Fourier converge en tout point x vers la moyenne de la limite à gauche et à droite :

$$S_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$$

En particulier, si f est continue en x , $S_f(x) = f(x)$.

Remarque 3.1 (Phénomène de Gibbs). Au voisinage d'une discontinuité de première espèce (saut), la somme partielle de la série de Fourier présente un dépassement (overshoot) d'environ 9% de la hauteur du saut, qui ne disparaît pas lorsque le nombre de termes tend vers l'infini (la largeur de l'oscillation tend vers 0, mais pas son amplitude). Cela illustre que la convergence n'est pas uniforme.

3.3.2 Théorème de Parseval (Conservation de l'énergie)

Pour une fonction $f \in L^2$, l'énergie moyenne du signal est égale à la somme des carrés des modules des coefficients de Fourier.

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

Démonstration. Calculons le produit scalaire (f, f) en utilisant le développement en série :

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int |f(x)|^2 dx &= \frac{1}{T} \int f^*(x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{T} \int \left(\sum_n c_n^* e^{-inx} \right) \left(\sum_m c_m e^{imx} \right) dx \\ &= \sum_n \sum_m c_n^* c_m \left(\frac{1}{T} \int e^{i(m-n)x} dx \right) \end{aligned}$$

L'intégrale vaut δ_{nm} (orthonormalité de la base exponentielle normalisée par $1/\sqrt{T}$ ou propriété de la moyenne). Il ne reste que les termes $n = m$:

$$= \sum_n c_n^* c_n = \sum_n |c_n|^2$$

■

3.3.3 Inégalité de Bessel

Si l'on ne somme que sur un sous-ensemble fini de coefficients (somme partielle S_N), l'énergie reconstruite est inférieure ou égale à l'énergie totale :

$$\sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(x)|^2 dx$$

L'égalité est atteinte à la limite $N \rightarrow \infty$ si la famille est complète.

3.4 Exemple complet : Fonction parabolique et sommes numériques

Considérons la fonction 2π -périodique définie par $f(x) = x^2$ sur $[-\pi, \pi]$. Ici $T = 2\pi$, donc $\omega = 1$. La fonction est paire, donc $b_n = 0$.

1. Calcul de a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3}$$

2. Calcul de a_n ($n \geq 1$) : On intègre par parties deux fois :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\left[x^2 \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \frac{\sin(nx)}{n} dx \right) \quad (\text{le crochet est nul}) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(\left[-x \frac{\cos(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{\cos(nx)}{n} dx \right) \\ &= -\frac{4}{n\pi} \left(-\pi \frac{(-1)^n}{n} \right) = \frac{4(-1)^n}{n^2} \end{aligned}$$

3. Série de Fourier :

$$f(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$$

4. Applications aux séries numériques :

— En prenant $x = \pi$ (où f est continue, $f(\pi) = \pi^2$) :

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(n\pi) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

On en déduit la célèbre somme de Bâle :

$$\frac{2\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

— En prenant $x = 0$:

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

— En utilisant l'égalité de Parseval :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (x^2)^2 dx &= \left(\frac{\pi^2}{3} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^n}{n^2} \right)^2 \\ \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^5}{5} \right]_{-\pi}^{\pi} &= \frac{\pi^4}{9} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{n^4} \\ \frac{\pi^4}{5} &= \frac{\pi^4}{9} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \implies 8S_4 = \pi^4 \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) = \frac{4\pi^4}{45} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} &= \frac{\pi^4}{90} \end{aligned}$$

3.5 Transformée de Fourier

Lorsque la période $T \rightarrow \infty$, le spectre discret devient continu. La série devient une intégrale. Nous adoptons ici la convention unitaire (symétrique) utilisée en mécanique quantique.

3.5.1 Définition et inversion

Pour une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ (intégrable) et/ou $L^2(\mathbb{R})$ (de carré intégrable), on définit la Transformée de Fourier (TF) par :

$$\hat{f}(k) = \mathcal{F}[f](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx}dx$$

La transformée inverse est donnée par :

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k)e^{ikx}dk$$

La variable k est le nombre d'onde (ou pulsation spatiale). Si la variable est le temps t , la variable conjuguée est la pulsation ω .

3.5.2 La base des ondes planes et le Dirac

Les fonctions $e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$ jouent le rôle de base orthonormée continue. Cependant, elles ne sont pas dans L^2 car de norme infinie. L'orthogonalité s'exprime au sens des distributions via la fonction δ de Dirac.

Définition 3.2 (Fonction δ de Dirac). *La distribution δ est définie par son action sur une fonction test ϕ :*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-a)\phi(x)dx = \phi(a)$$

La relation de fermeture (complétude) de la base s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e_k(x)e_k^*(x')dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(x-x')}dk = \delta(x-x')$$

La TF du Dirac est une constante (spectre blanc) :

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \delta(x-a)e^{-ikx}dx = \frac{e^{-ika}}{\sqrt{2\pi}}$$

3.5.3 Propriétés fondamentales

Soient $f, g \in L^2(\mathbb{R})$.

1. **Linéarité** : $\mathcal{F}[\alpha f + \beta g] = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$.
2. **Translation** : $\mathcal{F}[f(x - x_0)](k) = e^{-ikx_0} \hat{f}(k)$.
3. **Dilatation** : $\mathcal{F}[f(ax)](k) = \frac{1}{|a|} \hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)$.

4. **Déivation** : La dérivation devient une multiplication.

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)](k) = (ik)^n \hat{f}(k)$$

Inversement $\mathcal{F}[x^n f(x)](k) = i^n \frac{d^n}{dk^n} \hat{f}(k)$.

5. **Théorème de Plancherel (Isométrie)** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk$$

6. **Égalité de Parseval (Produit scalaire)** :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^*(x)g(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}^*(k)\hat{g}(k)dk$$

3.6 Algèbre de convolution

La convolution est une opération centrale en traitement du signal et pour la résolution d'équations différentielles avec terme source (fonction de Green).

Définition 3.3 (Produit de convolution).

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(x-y)dy$$

Propriétés : commutatif, associatif, distributif. L'élément neutre est δ .

Théorème 3.2 (Théorème de convolution). La transformée de Fourier transforme un produit de convolution en produit simple (avec un facteur dépendant de la convention) :

$$\mathcal{F}[f * g](k) = \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \cdot \hat{g}(k)$$

Inversement :

$$\mathcal{F}[f \cdot g](k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\hat{f} * \hat{g})(k)$$

3.7 Exemple d'application : Équation de la chaleur

Résolvons l'équation de diffusion $\partial_t u - D \partial_x^2 u = 0$ avec la condition initiale $u(x, 0) = f(x)$. Appliquons la TF spatiale $\hat{u}(k, t)$:

$$\partial_t \hat{u} - D(ik)^2 \hat{u} = 0 \implies \partial_t \hat{u} = -Dk^2 \hat{u}$$

C'est une EDO du premier ordre en temps. Solution :

$$\hat{u}(k, t) = \hat{u}(k, 0) e^{-Dk^2 t} = \hat{f}(k) e^{-Dk^2 t}$$

Pour trouver $u(x, t)$, on utilise le théorème de convolution inverse. On sait que $\mathcal{F}^{-1}[e^{-Dk^2 t}] = \frac{1}{\sqrt{2Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ (gaussienne). Donc :

$$u(x, t) = f(x) * \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}} \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4Dt}} dy$$

La solution est la convolution de la condition initiale avec le noyau de la chaleur (fonction de Green de la diffusion).

4 Équations différentielles

Cette section traite des équations différentielles ordinaires (EDO) et des équations aux dérivées partielles (EDP), qui constituent le langage naturel de la physique. Nous aborderons les méthodes de résolution analytique, la théorie des opérateurs hermitiens et la fonction de Green.

4.1 Rappels sur les EDO et méthodes de résolution

Une équation différentielle ordinaire lie une fonction d'une seule variable $x(t)$ à ses dérivées. Soit D_t un opérateur différentiel linéaire d'ordre n . L'équation s'écrit $D_t[x(t)] = f(t)$, où $f(t)$ est le terme source (ou inhomogène).

4.1.1 EDO du premier ordre

Considérons l'équation linéaire :

$$\frac{dx}{dt} + \gamma(t)x(t) = g(t)$$

La résolution s'effectue en deux étapes :

1. **Solution homogène ($g = 0$)** : On sépare les variables.

$$\frac{dx_h}{x_h} = -\gamma(t)dt \implies x_h(t) = A e^{-\int^t \gamma(u)du}$$

où A est une constante d'intégration.

2. **Solution particulière (Méthode de la variation de la constante)** : On cherche une solution de la forme $x_p(t) = A(t)e^{-\int^t \gamma(u)du}$. En injectant dans l'équation complète :

$$A'(t)e^{-\int^t \gamma} - A(t)\gamma(t)e^{-\int^t \gamma} + \gamma(t)A(t)e^{-\int^t \gamma} = g(t)$$

Les termes en $A(t)$ s'annulent, il reste $A'(t) = g(t)e^{\int^t \gamma}$. On intègre $A'(t)$ pour trouver $A(t)$.

La solution générale est la somme $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$.

4.1.2 EDO du second ordre à coefficients constants

Un cas typique en physique est l'oscillateur harmonique amorti et forcé :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f(t)$$

L'opérateur est ici $D_t = \partial_t^2 + 2\lambda\partial_t + \omega_0^2$. La solution homogène est une combinaison linéaire d'exponentielles e^{rt} où r sont les racines du polynôme caractéristique $r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0$.

4.1.3 EDO du second ordre à coefficients non constants : Méthode de Frobenius

Lorsque les coefficients dépendent du temps, comme dans l'équation de Bessel ou de Legendre, on cherche la solution sous forme de série entière généralisée au voisinage d'un point régulier ou singulier régulier.

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+r}, \quad a_0 \neq 0$$

On injecte cette forme dans l'équation, on identifie les puissances de t pour obtenir :

- L'équation indicelle déterminant r (le comportement asymptotique en 0).
- Une relation de récurrence liant les coefficients a_n .

Exemple 4.1 (Équation d'Euler-Cauchy). Soit l'équation $t^2\ddot{x} - 3t\dot{x} + 4x = 0$. On cherche $x(t) = t^r$.

$$t^2(r(r-1)t^{r-2}) - 3t(rt^{r-1}) + 4t^r = 0 \implies [r(r-1) - 3r + 4]t^r = 0$$

Le polynôme indiciel est $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2 = 0$. Il y a une racine double $r = 2$. Une solution est $x_1(t) = t^2$. La seconde solution linéairement indépendante s'obtient par réduction d'ordre : $x_2(t) = t^2 \ln t$.

4.2 Opérateurs Hermitiens et bases orthogonales

La résolution des équations différentielles par décomposition sur une base de fonctions repose sur la théorie de Sturm-Liouville.

Définition 4.1 (Opérateur Hermitien). Soit \mathcal{L} un opérateur différentiel défini sur un domaine \mathcal{D} muni d'un produit scalaire $\langle f|g \rangle = \int_{\mathcal{D}} f^* g dx$. L'opérateur est dit hermitien (ou auto-adjoint) si pour toutes fonctions f, g satisfaisant des conditions aux limites spécifiées :

$$\langle f|\mathcal{L}g \rangle = \langle \mathcal{L}f|g \rangle \iff \int_{\mathcal{D}} f^*(\mathcal{L}g) dx = \int_{\mathcal{D}} (\mathcal{L}f)^* g dx$$

L'intérêt majeur réside dans le théorème spectral :

Théorème 4.1. Si \mathcal{L} est un opérateur hermitien :

1. Ses valeurs propres λ_n sont réelles.
2. Ses fonctions propres ϕ_n correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonales : $\langle \phi_n | \phi_m \rangle = 0$ si $n \neq m$.
3. L'ensemble des fonctions propres forme une base complète de l'espace de Hilbert $L^2(\mathcal{D})$.

Exemple 4.2 (Opérateur de Legendre). Sur le domaine $[-1, 1]$, l'opérateur $\mathcal{L} = -\frac{d}{dx} \left((1-x^2) \frac{d}{dx} \right)$ est hermitien pour des fonctions finies aux bornes. Ses fonctions propres sont les polynômes de Legendre $P_n(x)$ avec $\mathcal{L}P_n = n(n+1)P_n$.

4.3 Méthode de la fonction de Green

Cette méthode permet de résoudre une équation différentielle linéaire inhomogène avec conditions aux limites et conditions initiales.

Définition 4.2 (Fonction de Green). *Pour un opérateur différentiel linéaire D_t , la fonction de Green causale $G(t, t')$ est la réponse du système à une impulsion de Dirac en t' :*

$$D_t[G(t, t')] = \delta(t - t')$$

Pour un système invariant par translation temporelle (coefficients constants), $G(t, t') = G(t - t')$.

La solution générale de $D_t x(t) = f(t)$ est donnée par le produit de convolution :

$$x(t) = (G * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t, t') f(t') dt'$$

Démonstration. Appliquons l'opérateur D_t à $x(t)$:

$$\begin{aligned} D_t[x(t)] &= D_t \left[\int G(t, t') f(t') dt' \right] = \int D_t[G(t, t')] f(t') dt' \\ &= \int \delta(t - t') f(t') dt' = f(t) \end{aligned}$$

■

Si l'opérateur est $D_t = \frac{d}{dt} + \gamma$, la fonction de Green est $G(t - t') = \Theta(t - t') e^{-\gamma(t-t')}$, où Θ est la fonction de Heaviside (échelon), garantissant la causalité (l'effet ne précède pas la cause).

4.4 Équations aux dérivées partielles (EDP)

Une EDP lie une fonction de plusieurs variables (espace \vec{r} , temps t) à ses dérivées partielles. On s'intéresse principalement aux opérateurs linéaires du second ordre.

4.4.1 Classification des EDP linéaires du second ordre

Soit l'équation générale $A\partial_{xx}\phi + 2B\partial_{xy}\phi + C\partial_{yy}\phi + \dots = 0$. Par analogie avec les coniques ($B^2 - AC$), on distingue :

- **Hyperbolique** ($\partial_t^2\phi - c^2\Delta\phi = 0$) : Équation d'onde. Propagation de signaux sans atténuation majeure. Nécessite deux conditions initiales (ϕ et $\partial_t\phi$).
- **Parabolique** ($\partial_t\phi - D\Delta\phi = 0$) : Équation de diffusion/chaleur. Lissage et irréversibilité. Nécessite une condition initiale.
- **Elliptique** ($\Delta\phi = 0$) : Équation de Laplace/Poisson. État stationnaire ou d'équilibre. Problème aux limites purement spatial.

4.4.2 Conditions aux limites (CL)

Pour un domaine Ω de bord $\partial\Omega$, on impose :

- **Dirichlet** : On fixe la valeur de la fonction sur le bord : $\phi(\vec{r})|_{\partial\Omega} = f(\vec{r})$.
- **Neumann** : On fixe la dérivée normale sur le bord : $\frac{\partial\phi}{\partial n}|_{\partial\Omega} = \vec{\nabla}\phi \cdot \vec{n} = g(\vec{r})$.

4.4.3 Stratégie de résolution : Décomposition Statique-Dynamique

Lorsqu'on cherche à résoudre une EDP dépendant du temps (hyperbolique ou parabolique) avec des conditions aux limites inhomogènes (non nulles), une stratégie efficace est de décomposer la solution $\phi(\vec{r}, t)$ en deux parties :

$$\phi(\vec{r}, t) = \phi^{(s)}(\vec{r}) + \psi(\vec{r}, t)$$

1. **Partie statique** $\phi^{(s)}(\vec{r})$: C'est la solution de l'équation stationnaire (elliptique $\Delta\phi^{(s)} = 0$) qui satisfait les conditions aux limites inhomogènes du problème.
2. **Partie dynamique** $\psi(\vec{r}, t)$: Elle satisfait l'EDP homogène avec des **conditions aux limites homogènes** (nulles).

La fonction ψ est ensuite résolue par la méthode de séparation des variables, conduisant à un problème aux valeurs propres pour le Laplacien.

4.5 Problème aux valeurs propres du Laplacien

On cherche les solutions de $\Delta\psi = \lambda\psi$ sur un domaine \mathcal{D} avec conditions aux limites homogènes. Comme Δ est un opérateur hermitien (sous ces conditions), les fonctions propres forment une base orthogonale.

4.5.1 Le Laplacien en coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques (r, θ, φ) , le Laplacien s'écrit :

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

On peut l'écrire à l'aide de l'opérateur Laplacien angulaire Δ_{S^2} sur la sphère unité :

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta_{S^2}$$

4.5.2 Séparation des variables

On cherche une solution sous la forme $\Psi(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$. L'équation aux valeurs propres $\Delta\Psi = -k^2\Psi$ (pour une équation d'onde $\omega = ck$) devient :

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + r^2 k^2 = -\frac{1}{Y} \Delta_{S^2} Y$$

Le membre de gauche ne dépend que de r et celui de droite que des angles. Ils sont donc égaux à une constante de séparation, notée $\ell(\ell+1)$ où ℓ est un entier naturel pour garantir la régularité des solutions angulaires.

4.5.3 Partie angulaire : Harmoniques Sphériques

L'équation angulaire est $\Delta_{S^2} Y_\ell^m(\theta, \varphi) = -\ell(\ell+1)Y_\ell^m(\theta, \varphi)$. En séparant θ et φ , on obtient :

$$Y_\ell^m(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\varphi}$$

où $P_\ell^m(x)$ sont les **polynômes de Legendre associés**. Dans le cas azimutalement symétrique ($m = 0$), ce sont les polynômes de Legendre usuels $P_\ell(\cos \theta)$, solutions de :

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP_\ell}{d\theta} \right) + \ell(\ell + 1)P_\ell = 0$$

Ces fonctions forment une base orthonormée sur la sphère $L^2(S^2)$.

4.5.4 Partie radiale : Fonctions de Bessel sphériques

L'équation radiale devient :

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right) R = 0$$

En posant $z = kr$, les solutions régulières en $r = 0$ sont les **fonctions de Bessel sphériques** $j_\ell(z)$:

$$j_\ell(z) = (-z)^\ell \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^\ell \frac{\sin z}{z}$$

Par exemple, pour $\ell = 0$, $j_0(z) = \frac{\sin z}{z}$. Pour $\ell = 1$, $j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z}$.

4.5.5 Solution générale

La solution générale de l'équation des ondes ou de la chaleur dans une géométrie sphérique s'écrit donc comme une superposition :

$$\Psi(r, \theta, \varphi, t) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \sum_n A_{n\ell m}(t) j_\ell(k_{n\ell} r) Y_\ell^m(\theta, \varphi)$$

Les valeurs discrètes $k_{n\ell}$ sont déterminées par les conditions aux limites radiales (ex : Dirichlet $j_\ell(kR) = 0$ impose que kR soit un zéro de la fonction de Bessel).