Quelques Curiosités de la Gravitation Cylindrique

Exploration théorique des structures de l'espace-temps,
des effets de bord Newtoniens aux singularités relativistes

Colin BOSSU RÉAUBOURG

10 janvier 2025

Résumé

Ce recueil d'exercices propose une exploration des propriétés gravitationnelles associées aux symétries cylindriques. En partant du cadre Newtonien pour aboutir aux solutions exactes de la relativité générale, nous examinons comment la finitude, la forme et la rotation d'une source modifient la structure de l'espace-temps. Entre l'analyse des effets de bord classiques et l'étude de trajectoires parfois exotiques, ce document survole quelques-unes des particularités théoriques qui font du cylindre un objet d'étude aussi atypique que rigoureux.

Table des matières

Sauf mention contraire, nous utilisons le système d'unités géométrisées où $G = c = 1$.

1 Métrique d'un cylindre fini en rotation

L'étude de la gravitation cylindrique impose de distinguer le régime de champ faible, où les effets de bord dominent la structure locale du champ, du régime de relativité générale, où la rotation induit une torsion de l'espace-temps. Cette section établit les fondements mathématiques nécessaires à la compréhension des solutions de Lewis-van Stockum et de Levi-Civita abordées ultérieurement.

1.1 Cadre Newtonien : Potentiel et Effets de Bord

Considérons un cylindre massif $\mathcal{C}$ de rayon R, de hauteur H, centré à l'origine, et de densité volumique de masse $\rho(r', z', \phi')$. Le potentiel gravitationnel $\Phi(\mathbf{r})$ en un point de l'espace est régi par l'équation de Poisson $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. La solution générale s'exprime par l'intégrale de volume :

$$\Phi(r, \phi, z) = -G \iiint_{\mathcal{C}} \frac{\rho(r', \phi', z')\, r'dr'd\phi'dz'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos(\phi - \phi') + (z - z')^2}} \tag{1}$$

Pour un point d'observation situé sur l'axe de symétrie ($r = 0$), l'expression se simplifie par l'annulation du terme de couplage radial et azimutal. L'intégration sur ϕ' fournit un facteur 2π. En supposant une densité indépendante de ϕ', nous obtenons :

$$\Phi(0, z) = -2\pi G \int_{-H/2}^{H/2} dz' \int_0^R \frac{\rho(r', z')r'}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}} dr' \tag{2}$$

Lemme 1.1. Pour toute hauteur z et coordonnée de source z', l'intégrale radiale de la fonction de Green cylindrique sur l'axe est donnée par :

$$\mathcal{I}_r(z, z') = \int_0^R \frac{r'}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}} dr' = \sqrt{R^2 + (z - z')^2} - |z - z'| \tag{3}$$

Démonstration. Soit le changement de variable $u = r'^2 + (z - z')^2$. Alors $du = 2r'dr'$. L'intégrale devient $\frac{1}{2}\int_{(z-z')^2}^{R^2+(z-z')^2} u^{-1/2}du = [\sqrt{u}]_{(z-z')^2}^{R^2+(z-z')^2}$. Le résultat suit immédiatement en notant que $\sqrt{(z - z')^2} = |z - z'|$. ∎

En substituant le lemme 1.1 dans (2) pour une densité ne dépendant que de z', on obtient l'expression fondamentale du potentiel axial qui sert de base à l'étude du fil infini :

$$\Phi(z) = -2\pi G \int_{-H/2}^{H/2} \rho(z') \left(\sqrt{R^2 + (z - z')^2} - |z - z'|\right) dz' \tag{4}$$

Le champ de gravitation axial $g_z(z) = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$ se dérive par application de la règle de Leibniz. Pour une densité uniforme ρ_0, le calcul aux extrémités ($z = \pm H/2$) révèle l'importance des effets de bord. En $z = H/2$:

$$g_z(H/2) = 2\pi G\rho_0 \left[\int_{-H/2}^{H/2} \frac{z - z'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} dz' - \int_{-H/2}^{H/2} \mathrm{sgn}(z - z')dz'\right]_{z=H/2} \tag{5}$$

L'intégration directe mène à la propriété suivante :

Propriété 1.1. Un cylindre de hauteur finie exerce une force de compression axiale maximale en ses bases, donnée par :

$$g_z(H/2) = 2\pi G\rho_0 \left(\sqrt{R^2 + H^2} - R - H\right) \tag{6}$$

On remarquera que pour une coordonnée z fixe, $g_z \to 0$ lorsque $H \to \infty$, ce qui est cohérent avec la symétrie de translation d'un cylindre infini, bien qu'une valeur finie subsiste à l'extrémité.

1.2 Formalisme d'Ernst pour le Cylindre en Rotation

Pour décrire un cylindre fini ou infini en rotation stationnaire, nous quittons le cadre Newtonien pour la Relativité Générale. La métrique la plus générale pour un espace-temps stationnaire et axisymétrique est la métrique de Lewis-Papapetrou :

$$ds^2 = f^{-1}\left[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2\right] - f(dt - \omega d\phi)^2 \tag{7}$$

où f, ω et γ sont des fonctions de ρ et z. Dans le vide, les équations d'Einstein $R_{\mu\nu} = 0$ se réduisent au système d'Ernst [1]. On définit le potentiel complexe d'Ernst par $\mathcal{E} = f + i\psi$. Le potentiel scalaire magnétique ψ est lié au terme de rotation (frame-dragging) ω par les relations différentielles :

$$\frac{\partial \omega}{\partial \rho} = \frac{\rho}{f^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = -\frac{\rho}{f^2}\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \tag{8}$$

L'équation d'Ernst s'écrit alors :

$$(f + i\psi)\nabla^2(f + i\psi) = \nabla(f + i\psi) \cdot \nabla(f + i\psi) \tag{9}$$

où ∇ est l'opérateur gradient dans l'espace euclidien plat à trois dimensions. Pour un cylindre fini, la résolution de (9) nécessite des conditions aux limites sur la surface du cylindre, reliant f au potentiel Newtonien Φ par la limite de champ faible $f \approx 1 + 2\Phi/c^2$.

1.3 Analyse de la Courbure et Géodésiques

La structure de l'espace-temps autour du cylindre est caractérisée par son tenseur de Riemann. Dans le plan équatorial ($z = 0$), la force de marée radiale subie par une particule test au repos est proportionnelle à la composante $R^t_{\rho t \rho}$. En utilisant la métrique (7), on démontre que :

$$R^t_{\rho t \rho} = -\frac{1}{2f}\frac{\partial^2 f}{\partial \rho^2} + \frac{1}{4f^2}\left(\frac{\partial f}{\partial \rho}\right)^2 - \frac{3f^2}{4\rho^2}\left(\frac{\partial \omega}{\partial \rho}\right)^2 \tag{10}$$

En substituant le potentiel Newtonien pour f et en introduisant le moment cinétique J via ω, nous observons l'apparition de l'effet Lense-Thirring. Un observateur à moment angulaire nul (ZAMO) possède une vitesse angulaire Ω par rapport aux étoiles lointaines :

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = -\frac{\omega f^2}{\rho^2 - \omega^2 f^2} \tag{11}$$

Pour un cylindre fini en rotation lente ($\omega f \ll \rho$), cette expression se réduit à $\Omega \approx -\omega f^2/\rho^2$, montrant que la rotation de la source entraîne le référentiel local. Cette analyse de courbure constitue le cadre nécessaire à l'étude des trajectoires de particules.

2 Transition vers le Fil Infini et Solutions de Lewis-van Stockum

L'étude des sources cylindriques finies, bien que physiquement réaliste, se heurte à une complexité analytique dès que l'on s'écarte de l'axe de symétrie. Dans cette section, nous opérons une transition vers le modèle de l'un de ces objets dont la longueur $H \to \infty$, permettant de réduire les équations d'Einstein à un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) grâce à l'isométrie de translation axiale supplémentaire.

2.1 Paramétrage de la limite du fil infini

Considérons la limite Newtonienne établie à l'équation (4). Pour un cylindre de densité uniforme ρ_0, lorsque H devient très grand devant R et z, nous cherchons à définir une densité linéique de masse λ. Soit la masse totale $M = \rho_0 \pi R^2 H$. La densité linéique est $\lambda = M/H = \rho_0 \pi R^2$.

En reprenant l'expression du potentiel axial (4) et en effectuant un développement asymptotique pour $H \gg z$ et $H \gg R$, le terme logarithmique dominant de la solution de Poisson pour une ligne de masse infinie émerge. Pour un point P à une distance radiale ρ, le potentiel Newtonien tend vers :

$$\Phi(\rho) = 2G\lambda \ln\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right) + \text{Cst} \tag{12}$$

Cette invariance par translation selon z simplifie drastiquement le tenseur de Ricci. Dans le cadre de la relativité générale, cette symétrie (groupe d'isométrie G_2 sur des surfaces S_2) réduit les composantes indépendantes de la métrique.

2.2 Dérivation de la solution intérieure de Lewis-van Stockum

Nous considérons maintenant un cylindre infini de poussière (fluide parfait sans pression, $P = 0$) en rotation rigide autour de l'axe z. Le tenseur d'énergie-impulsion est donné par $T_{\mu\nu} = \epsilon u_\mu u_\nu$, où ϵ est la densité d'énergie propre.

2.2.1 Réduction des équations de champ

En utilisant la métrique de Lewis-Papapetrou introduite à l'équation (7), et en supposant que les fonctions f, ω et γ ne dépendent que de la coordonnée radiale ρ, nous posons pour le milieu intérieur en rotation :

$$ds^2 = e^{2\psi}(d\rho^2 + dz^2) + L d\phi^2 + 2M d\phi dt - F dt^2 \tag{13}$$

où F, M, L sont des fonctions de ρ. La condition de vide d'Ernst (8) est ici remplacée par les équations d'Einstein avec source $G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$. Pour une rotation rigide, le quadrivecteur vitesse s'écrit $u^\mu = (u^t, 0, \Omega u^t, 0)$.

Van Stockum a démontré qu'une solution exacte existe en posant une vitesse angulaire locale Ω constante. Dans un référentiel co-mobile, le champ de rotation induit une torsion de l'espace-temps. Les équations de champ se réduisent à un système sur la fonction de potentiel gravito-magnétique.

2.2.2 Intégration et forme métrique

Par intégration directe des composantes du tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ pour une distribution de poussière (pression $P = 0$) de rayon R, on obtient la solution de Lewis-van Stockum [2] à l'intérieur du cylindre ($\rho \leq R$) :

$$ds^2 = e^{a^2\rho^2}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2(1 - a^2\rho^2)d\phi^2 + 2a\rho^2 d\phi dt - dt^2 \tag{14}$$

Ici, a est un paramètre lié à la vitesse angulaire et à la densité du fluide par $4\pi G\epsilon = a^2 e^{-a^2\rho^2}$.

Propriété 2.1. L'existence de courbes temporelles fermées (CTC) est une propriété topologique intrinsèque de la métrique de van Stockum pour des rayons élevés.

Démonstration. Considérons le vecteur de Killing azimutal $\eta = \partial_\phi$. Sa norme au carré est donnée par la composante $g_{\phi\phi}$ de la métrique (14) :

$$\|\eta\|^2 = g_{\phi\phi} = \rho^2(1 - a^2\rho^2) \tag{15}$$

Dans un espace-temps Lorentzien standard, les coordonnées spatiales doivent conserver une signature positive. Cependant, nous observons que :

$$g_{\phi\phi} < 0 \iff \rho > \frac{1}{a} \tag{16}$$

Pour $\rho > 1/a$, le vecteur de Killing associé à la coordonnée angulaire devient de genre temps. Une courbe fermée $\gamma(\phi) = (t_0, \rho_0, \phi, z_0)$ avec $\rho_0 > 1/a$ possède un intervalle $ds^2 = g_{\phi\phi} d\phi^2 < 0$. Un observateur peut donc, en théorie, parcourir une trajectoire fermée dans l'espace qui constitue un voyage vers son propre passé, violant ainsi le principe de causalité macroscopique. ■

2.3 Limite statique et raccordement à la solution de Levi-Civita

Lorsque la rotation s'annule ($a \to 0$), la métrique de van Stockum doit converger vers la solution statique d'un fil infini.

2.3.1 Le paramètre de Weyl

Dans la limite statique, la métrique se simplifie sous la forme de Weyl. La solution générale pour un vide cylindrique statique est la métrique de Levi-Civita [3] :

$$ds^2 = \rho^{4\sigma(2\sigma-1)}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^{2(1-2\sigma)} d\phi^2 - \rho^{4\sigma} dt^2 \tag{17}$$

où σ est le paramètre de Weyl, sans dimension. Pour identifier σ à la densité linéique λ, nous effectuons une limite de champ faible ($g_{tt} \approx -(1 + 2\Phi/c^2)$). En comparant avec le potentiel Newtonien de l'équation (12) :

$$-\rho^{4\sigma} \approx -(1 + 4G\lambda \ln \rho) \implies 4\sigma \ln \rho \approx \ln(1 + 4G\lambda \ln \rho) \tag{18}$$

Par développement au premier ordre, nous obtenons la relation fondamentale :

$$\sigma = \frac{G\lambda}{c^2} \tag{19}$$

2.3.2 Analyse de la singularité et déficit d'angle

La métrique (17) présente une singularité de courbure en $\rho = 0$ sauf pour des valeurs spécifiques de σ. Le calcul du scalaire de Kretschmann $K = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}$ montre que :

$$K \propto \sigma^2 \rho^{-4(1-2\sigma+4\sigma^2)} \tag{20}$$

Pour $\sigma > 0$, la courbure diverge à l'origine, confirmant que le fil infini est une singularité nue. De plus, la circonférence propre C d'un cercle de rayon coordonnée ρ est :

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}} d\phi = 2\pi \rho^{1-2\sigma} \tag{21}$$

Le rapport $C/(2\pi\rho_{propre})$ ne tend pas vers 1 quand $\rho \to 0$, ce qui caractérise un *déficit d'angle* topologique, propriété fondamentale des filaments cosmiques.

3 Étude du cylindre creux et potentiel interne

Dans cette section, nous analysons les propriétés gravitationnelles d'une coque cylindrique mince de rayon R, de hauteur finie H et de masse totale M. Contrairement au cas du cylindre infini, où le théorème de Gauss impose un champ nul à l'intérieur, la finitude de la structure brise la symétrie de translation axiale, générant des gradients de potentiel non triviaux.

3.1 Expression intégrale du potentiel

Considérons une densité surfacique de masse uniforme $\sigma = \frac{M}{2\pi RH}$. En coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z), un élément de surface $dS' = R\,d\phi' dz'$ situé sur la coque à la position (R, ϕ', z') contribue au potentiel au point d'observation $P(r, 0, z)$ par :

$$d\Phi = -\frac{G\sigma R\,d\phi' dz'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\phi' + (z - z')^2}} \tag{22}$$

Le potentiel total $\Phi(r, z)$ s'obtient par intégration sur la surface de la coque $\mathcal{S}$:

$$\Phi(r, z) = -G\sigma R \int_{-H/2}^{H/2} dz' \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr\cos\phi' + (z - z')^2}} \tag{23}$$

Cette intégrale peut être reformulée en utilisant les intégrales elliptiques complètes de première espèce $K(k)$. Posons $\zeta = z - z'$ et utilisons la symétrie de la fonction cosinus. L'intégrale angulaire se réécrit :

$$I_\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi'}{\sqrt{(R + r)^2 + \zeta^2 - 4Rr\cos^2(\phi'/2)}} = \frac{4}{\sqrt{(R + r)^2 + \zeta^2}} K\left(\sqrt{\frac{4Rr}{(R + r)^2 + \zeta^2}}\right) \tag{24}$$

Ainsi, le potentiel interne $(r < R)$ s'exprime par :

$$\Phi(r, z) = -4G\sigma R \int_{-H/2}^{H/2} \frac{1}{\sqrt{(R + r)^2 + (z - z')^2}} K\left(\sqrt{\frac{4Rr}{(R + r)^2 + (z - z')^2}}\right) dz' \tag{25}$$

3.2 Analyse du champ sur l'axe et rupture du théorème de Gauss

Sur l'axe de symétrie $(r = 0)$, l'intégrale se simplifie car $K(0) = \pi/2$. On retrouve :

$$\Phi(0, z) = -2\pi G\sigma R \int_{-H/2}^{H/2} \frac{dz'}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} \tag{26}$$

Par un changement de variable $u = z' - z$, on obtient :

$$\Phi(0, z) = -2\pi G\sigma R \left[\ln\left((z' - z) + \sqrt{R^2 + (z - z')^2}\right)\right]_{-H/2}^{H/2} \tag{27}$$

$$\Phi(0, z) = -2\pi G\sigma R \ln\left(\frac{z - H/2 + \sqrt{R^2 + (z - H/2)^2}}{z + H/2 + \sqrt{R^2 + (z + H/2)^2}}\right) \tag{28}$$

Le champ gravitationnel axial $g_z = -\partial_z \Phi$ est alors :

$$g_z(0, z) = 2\pi G\sigma R \left(\frac{1}{\sqrt{R^2 + (H/2 - z)^2}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + (H/2 + z)^2}}\right) \tag{29}$$

On observe immédiatement que $g_z(0, z) = 0$ uniquement au centre géométrique $(z = 0)$. Pour tout $z \neq 0$, une force de rappel vers le centre existe. Dans la limite $H \to \infty$, $g_z \to 0$ pour toute valeur finie de z, réconciliant le modèle avec le cas idéal du cylindre infini. Cependant, pour un cylindre réel, les *effets de bord* induisent une accélération des particules tests vers le plan équatorial.

3.3 Développement au voisinage de l'axe et gradient radial

Pour $r \ll R$, nous pouvons développer le potentiel en série de Taylor. Par symétrie azimutale, l'équation de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ à l'intérieur de la coque impose :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \tag{30}$$

En supposant un développement de la forme $\Phi(r, z) = \Phi(0, z) + r^2\Phi_2(z) + \mathcal{O}(r^4)$, l'injection dans l'équation de Laplace donne :

$$4\Phi_2(z) + \Phi''(0, z) = 0 \implies \Phi_2(z) = -\frac{1}{4}\frac{\partial^2\Phi(0, z)}{\partial z^2} \tag{31}$$

Le champ radial interne $g_r(r, z)$ au premier ordre est donc :

$$g_r(r, z) = -\frac{\partial \Phi}{\partial r} \approx -2r\Phi_2(z) = \frac{r}{2}\frac{\partial^2\Phi(0, z)}{\partial z^2} \tag{32}$$

En dérivant l'expression de $g_z(0, z)$ obtenue précédemment, on trouve :

$$\frac{\partial^2\Phi(0, z)}{\partial z^2} = 2\pi G\sigma R\left[\frac{H/2 - z}{(R^2 + (H/2 - z)^2)^{3/2}} + \frac{H/2 + z}{(R^2 + (H/2 + z)^2)^{3/2}}\right] \tag{33}$$

Au centre ($z = 0$), cette dérivée seconde est positive : $\partial_z^2\Phi(0, 0) = \frac{2\pi G\sigma RH}{(R^2+H^2/4)^{3/2}}$. Par conséquent, $g_r(r, 0) > 0$. Cela signifie que, contrairement à une sphère creuse où le champ est rigoureusement nul, une particule à l'intérieur d'un cylindre fini est *repoussée* vers la paroi par les bords de la structure.

3.4 Force de compression radiale et auto-gravitation

L'équilibre mécanique de la coque nécessite de compenser la force d'auto-gravitation. La force radiale par unité de surface P_{rad} (pression de gravitation) est donnée par le produit de la densité surfacique et de la valeur moyenne du champ radial à la traversée de la paroi :

$$P_{rad} = \sigma\langle g_r\rangle = \sigma\frac{g_r(R^+, z) + g_r(R^-, z)}{2} \tag{34}$$

Par le théorème de Gauss sur une surface cylindrique de rayon R et de hauteur dz, le saut du champ radial est $\Delta g_r = g_r(R^+) - g_r(R^-) = -4\pi G\sigma$. En intégrant la force élémentaire $dF_r = \sigma g_r(R, z)R\, d\phi dz$ sur toute la hauteur, la force de compression radiale totale F_R s'exprime par :

$$F_R = 2\pi R\sigma\int_{-H/2}^{H/2}\left[g_r(R^-, z) - 2\pi G\sigma\right] dz \tag{35}$$

L'évaluation numérique ou par séries de cette intégrale montre que la structure tend à s'effondrer radialement, la force étant maximale dans le plan médian $z = 0$. Pour une structure astrophysique (comme un cylindre de poussière en rotation), cette force doit être équilibrée soit par une pression thermique interne, soit par la force centrifuge $f_c = \sigma\omega^2 R$. L'équilibre radial strict à $z = 0$ impose alors une vitesse angulaire critique :

$$\omega_{crit} = \sqrt{\frac{g_r(R, 0)}{R}} \tag{36}$$

Cette analyse souligne que la géométrie cylindrique finie est intrinsèquement instable sans un soutien dynamique ou structurel, une caractéristique fondamentale pour l'étude des filaments galactiques.

4 Le filament cosmique : Déficit d'angle et topologie

Dans cette section, nous approfondissons la structure géométrique de l'espace-temps entourant un filament de masse infini. En utilisant la métrique de Levi-Civita introduite à l'équation (17), nous démontrons que la présence d'une densité linéique de masse λ induit une modification topologique globale de l'espace, caractérisée par un déficit d'angle, alors même que l'espace-temps peut paraître localement plat dans certaines limites.

4.1 Géométrie propre du plan transverse

Considérons la métrique de Levi-Civita (17) dans le cas statique ($a = 0$). Pour analyser la structure spatiale, nous nous concentrons sur une section à temps constant ($dt = 0$) et coordonnée axiale constante ($dz = 0$). La métrique induite sur le plan transverse s'écrit :

$$dl^2 = \rho^{4\sigma(2\sigma-1)} d\rho^2 + \rho^{2(1-2\sigma)} d\phi^2 \tag{37}$$

où σ est le paramètre de Weyl lié à la densité linéique de masse par $\sigma = G\lambda/c^2$ selon la relation établie à la Section 1.3.

Pour caractériser la topologie de ce plan, nous introduisons la distance propre radiale l_p mesurée depuis la singularité $\rho = 0$.

Lemme 4.1. La distance propre radiale $l_p(\rho)$ pour un observateur situé à une coordonnée radiale ρ est donnée, pour $\sigma < 1/2$, par :

$$l_p(\rho) = \int_0^\rho \sqrt{g_{\rho\rho}}\, d\rho' = \frac{\rho^{1-2\sigma+4\sigma^2}}{1 - 2\sigma + 4\sigma^2} \tag{38}$$

Démonstration. L'élément de longueur radiale est $\sqrt{g_{\rho\rho}} d\rho = \rho^{2\sigma(2\sigma-1)} d\rho$. L'intégration de 0 à ρ est immédiate sous la condition de convergence à l'origine $1 + 4\sigma^2 - 2\sigma > 0$, ce qui est toujours vérifié pour $\sigma \in \mathbb{R}$. ■

4.2 Calcul du déficit d'angle

Dans un espace Euclidien plat, la circonférence C d'un cercle est liée à son rayon propre R_p par le rapport $C/R_p = 2\pi$. Nous allons démontrer que ce rapport est altéré dans le cas du filament. Soit $C(\rho)$ la circonférence propre d'un cercle de coordonnée radiale ρ :

$$C(\rho) = \int_0^{2\pi} \sqrt{g_{\phi\phi}}\, d\phi = 2\pi\rho^{1-2\sigma} \tag{39}$$

Définissons le ratio de conicité k par la limite du rapport de la circonférence sur le rayon propre :

$$k = \lim_{\rho \to 0} \frac{C(\rho)}{2\pi l_p(\rho)} \tag{40}$$

En substituant les expressions précédentes :

$$\frac{C(\rho)}{2\pi l_p(\rho)} = \frac{\rho^{1-2\sigma}}{\frac{\rho^{1-2\sigma+4\sigma^2}}{1-2\sigma+4\sigma^2}} = (1 - 2\sigma + 4\sigma^2)\rho^{-4\sigma^2} \tag{41}$$

Il convient de noter que pour la solution de Levi-Civita exacte, ce rapport dépend de ρ, ce qui signifie que l'espace possède une courbure de Gauss intrinsèque. L'analogie du "cône" (espace localement plat avec déficit d'angle) n'est rigoureusement exacte que dans la limite de la corde cosmique idéale, où la tension longitudinale égale la densité d'énergie (supprimant les termes en σ^2).

Remarque 4.1. On observe que si $\sigma \neq 0$, le rapport diverge ou tend vers zéro à l'origine selon le signe de σ, ce qui confirme la présence d'une singularité de courbure mentionnée à la Section 2.3.2. Pour un filament astrophysique de rayon fini R_s, on définit le déficit d'angle par rapport à la circonférence au bord de la source.

Dans la limite des champs faibles ($\sigma \ll 1$), en négligeant les termes en σ^2, le ratio devient $k \approx 1 - 2\sigma$. Le déficit d'angle δ est alors défini par $\delta = 2\pi(1-k)$, ce qui mène à :

$$\delta \approx 2\pi[1 - (1 - 2\sigma)] = 4\pi\sigma \tag{42}$$

En substituant la valeur de $\sigma = G\lambda/c^2$:

$$\delta = \frac{4\pi G\lambda}{c^2} \tag{43}$$

4.3 Conséquences topologiques : L'espace conique

Le résultat (43) montre que l'espace-temps autour d'un filament n'est pas asymptotiquement Minkowski, mais possède une structure conique. Si l'on effectue le changement de variable $\phi' = (1 - 2\sigma)\phi$, la métrique transverse (37) au voisinage de l'axe (et pour $\sigma \ll 1$) prend la forme :

$$dl^2 \approx d\rho^2 + \rho^2 d\phi'^2 \tag{44}$$

Ici, ρ se comporte comme un rayon Euclidien, mais la nouvelle coordonnée angulaire ϕ' ne parcourt plus l'intervalle $[0, 2\pi]$ mais l'intervalle $[0, 2\pi - \delta]$.

Théorème 4.1. L'espace-temps d'un filament cosmique est globalement non trivial. Dans la limite de la corde cosmique idéale (où la tension longitudinale compense exactement la densité d'énergie), l'espace-temps devient localement plat (le tenseur de Riemann s'annule dans le vide environnant), une propriété responsable de l'effet de lentille gravitationnelle double.

Cette platitude locale est cruciale : une particule test placée au repos près du filament ne subira aucune force gravitationnelle Newtonienne (car le potentiel est logarithmique, mais le gradient est compensé par la structure relativiste de la corde idéale), contrairement au cas cylindrique fini analysé à la Proposition 1.1. Néanmoins, deux rayons lumineux parallèles passant de part et d'autre du filament convergeront avec un angle δ, une signature observationnelle majeure pour la recherche de ces objets dans le cadre des théories de grande unification.

4.4 Lien avec l'énergie quasi locale

Pour clore cette analyse, nous pouvons relier ce déficit d'angle à l'énergie de Brown-York. Pour une surface cylindrique $\mathcal{B}$ de hauteur H entourant le filament, l'énergie quasi locale est proportionnelle à la courbure extrinsèque de la frontière. Le déficit d'angle (43) agit comme une mesure de la masse enfermée qui "manque" à la topologie plane, confirmant la cohérence entre la description géométrique (le déficit d'angle) et la description matérielle (la densité λ).

5 Géodésiques de particules massives autour du cylindre de van Stockum

Dans cette section, nous approfondissons l'étude de la dynamique des particules d'épreuve dans l'espace-temps de van Stockum, introduit à la section 1.3. L'objectif est de caractériser l'influence de la rotation de la source sur les trajectoires de genre temps, en mettant en évidence le couplage entre le moment cinétique de la particule et le flux gravito-magnétique de la solution.

5.1 Intégrales du mouvement et Lagrangien

Considérons la métrique de van Stockum pour le milieu intérieur ($\rho < 1/a$), telle que définie par l'équation (14). Pour une particule de masse $m \neq 0$, nous utilisons le Lagrangien normalisé $\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$, où le point dénote la dérivation par rapport au temps propre τ. En nous restreignant au plan équatorial ($z = 0, \dot{z} = 0$), le Lagrangien s'écrit :

$$2\mathcal{L} = e^{a^2\rho^2} \dot{\rho}^2 + \rho^2(1 - a^2\rho^2)\dot{\phi}^2 + 2a\rho^2\dot{\phi}\dot{t} - \dot{t}^2 = -k \tag{45}$$

où $k = 1$ pour une particule massive. La métrique étant stationnaire et axisymétrique, elle admet deux vecteurs de Killing, $\xi = \partial_t$ et $\eta = \partial_\phi$, auxquels correspondent deux constantes du mouvement : l'énergie spécifique E et le moment angulaire spécifique L.

Lemme 5.1. Les composantes de la quadrivitesse $\dot{t}$ et $\dot{\phi}$ s'expriment en fonction des constantes E et L par les relations :

$$\dot{t} = E(1 - a^2\rho^2) + aL \tag{46}$$

$$\dot{\phi} = \frac{L}{\rho^2} - aE \tag{47}$$

Démonstration. Par définition des moments conjugués $p_\mu = \partial\mathcal{L}/\partial\dot{x}^\mu$, nous avons :

1. $p_t = g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi} = -\dot{t} + a\rho^2\dot{\phi} = -E$
2. $p_\phi = g_{\phi\phi}\dot{\phi} + g_{\phi t}\dot{t} = \rho^2(1 - a^2\rho^2)\dot{\phi} + a\rho^2\dot{t} = L$

De la première équation, on tire $\dot{t} = E + a\rho^2\dot{\phi}$. En substituant cette expression dans la seconde :

$$\rho^2(1 - a^2\rho^2)\dot{\phi} + a\rho^2(E + a\rho^2\dot{\phi}) = L \implies \rho^2\dot{\phi} - a^2\rho^4\dot{\phi} + aE\rho^2 + a^2\rho^4\dot{\phi} = L$$

L'annulation des termes en $a^2\rho^4$ conduit directement à (47). La substitution de $\dot{\phi}$ dans l'expression de $\dot{t}$ fournit alors (46). ∎

5.2 Équation radiale et Potentiel Effectif

L'injection des résultats du lemme 5.1 dans la condition de normalisation (45) permet d'isoler la dynamique radiale. En développant le terme cinétique angulaire et temporel $X = g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{tt}\dot{t}^2$, et en utilisant la relation $\dot{t} = E + a\rho^2\dot{\phi}$, on obtient après simplification algébrique :

$$X = \rho^2\dot{\phi}^2 - E^2 = \rho^2\left(\frac{L}{\rho^2} - aE\right)^2 - E^2 \tag{48}$$

L'équation (45) devient alors :

$$e^{a^2\rho^2}\dot{\rho}^2 + \frac{(L - aE\rho^2)^2}{\rho^2} - E^2 = -1 \tag{49}$$

Nous pouvons réécrire cette équation sous une forme analogue à la mécanique classique, $\dot{\rho}^2 + V_{eff}(\rho, E, L) = 0$, mais il est plus rigoureux en relativité générale d'isoler l'énergie. L'équation de mouvement radiale est régie par :

$$e^{a^2\rho^2}\dot{\rho}^2 = E^2 - \left[1 + \left(\frac{L}{\rho} - aE\rho\right)^2\right] \tag{50}$$

Cette expression révèle une particularité fondamentale de la métrique de van Stockum : contrairement à la solution de Schwarzschild, l'énergie E apparaît de manière quadratique à l'intérieur du terme centrifuge. Cela traduit un couplage non-linéaire entre l'énergie de repos de la particule et le potentiel vecteur induit par la rotation de la poussière.

5.3 Existence et stabilité des orbites circulaires

Une orbite circulaire de rayon ρ_0 impose les conditions $\dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$ (soit $\partial_\rho V_{eff} = 0$). À partir de (50), nous définissons la fonction d'interface $f(\rho) = E^2 - 1 - (\frac{L}{\rho} - aE\rho)^2$. La condition de circularité $f'(\rho_0) = 0$ mène à :

$$-2\left(\frac{L}{\rho} - aE\rho\right)\left(-\frac{L}{\rho^2} - aE\right) = 0 \tag{51}$$

Deux familles de solutions émergent. La première, $L = aE\rho^2$, correspond à $\dot{\phi} = 0$ d'après (47).

Propriété 5.1. Il existe des trajectoires de particules massives restant au repos par rapport aux étoiles lointaines ($\dot{\phi} = 0$) à n'importe quel rayon ρ, à condition que leur moment angulaire soit finement ajusté sur le flux de frame-dragging : $L = aE\rho^2$.

Pour la seconde famille, la vitesse angulaire par rapport au temps propre est donnée par la racine de $-\frac{L}{\rho^2} - aE = 0$, soit $L = -aE\rho^2$. En injectant cette condition dans (50) avec $\dot{\rho} = 0$, nous obtenons la relation entre l'énergie et le rayon pour une orbite circulaire :

$$E^2 - 1 - (-2aE\rho)^2 = 0 \implies E = \frac{1}{\sqrt{1 - 4a^2\rho^2}} \tag{52}$$

Cette solution n'est physiquement acceptable que si $1 - 4a^2\rho^2 > 0$, soit $\rho < \frac{1}{2a}$.

5.4 Analyse de l'effet Lense-Thirring extrême

L'effet de "frame-dragging" peut être quantifié par la vitesse angulaire orbitale mesurée par un observateur distant, $\Omega = \dot{\phi}/\dot{t}$. En utilisant (46) et (47) :

$$\Omega = \frac{L - aE\rho^2}{\rho^2[E(1 - a^2\rho^2) + aL]} \tag{53}$$

Pour une particule de moment angulaire nul ($L = 0$), on trouve $\Omega_{L=0} = -a/(1 - a^2\rho^2)$. Contrairement au cas Newtonien où une particule sans moment angulaire tombe radialement, ici, la particule acquiert nécessairement une vitesse angulaire azimutale opposée au sens de rotation du paramètre a.

Cependant, comme noté dans la démonstration de la violation de causalité (voir Section 1.3), lorsque ρ approche la valeur critique $1/a$, le terme $g_{\phi\phi}$ change de signe. Dans cette région, l'analyse des géodésiques montre que toutes les particules, quelle que soit leur impulsion initiale, sont entraînées dans des trajectoires de genre temps fermées (CTC). La force centrifuge, telle qu'exprimée par le gradient de (50), change de direction effective, signifiant qu'aucune orbite stable ne peut subsister au-delà de l'horizon de causalité défini par Tipler [4].

Cette analyse confirme que la structure des géodésiques autour d'un cylindre rotatif infini est dominée non pas par l'attraction radiale, mais par la distorsion topologique de la variable angulaire, forçant un comportement orbital qui défie l'intuition Newtonienne établie à la section 1.1.

6 Lentillage gravitationnel par un fil en rotation

L'étude du lentillage gravitationnel par des sources cylindriques permet de mettre en évidence l'influence directe du moment angulaire sur la propagation des géodésiques de genre lumière. Dans cette section, nous calculons la déviation d'un photon passant à proximité d'un cylindre infini en rotation, en utilisant l'approximation de Born (champ faible). Nous démontrerons que la rotation brise la symétrie de la déviation, un phénomène purement relativiste absent du cadre Newtonien.

6.1 Approximation de champ faible et métrique linéarisée

Pour un observateur situé à une distance $\rho \gg R$, le champ peut être traité comme une perturbation de l'espace-temps plat de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$. En reprenant la métrique de Lewis-van Stockum introduite à l'équation (7) et en se plaçant dans la zone de vide extérieur avec une faible densité linéique $\sigma = G\lambda/c^2 \ll 1$ et un faible moment angulaire par unité de longueur j, la métrique linéarisée $g_{\mu\nu} \approx \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ s'écrit en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) :

$$ds^2 \approx -c^2(1 + 2\Phi/c^2)dt^2 + (1 - 2\Phi/c^2)(d\rho^2 + dz^2 + \rho^2 d\phi^2) - \frac{4Gj}{c^2} d\phi dt \tag{54}$$

où $\Phi(\rho) = 2G\lambda \ln(\rho/\rho_0)$ est le potentiel Newtonien défini à l'équation (12). Le terme croisé $h_{t\phi} = -2Gj\rho^2/c^2$ représente le potentiel vecteur gravitomagnétique induit par la rotation de la source.

6.2 Équation de la trajectoire lumineuse

Considérons un photon se déplaçant initialement selon l'axe x dans le plan équatorial ($z = 0$), avec un paramètre d'impact b par rapport à l'axe du cylindre. La trajectoire non perturbée est donnée par $y = b$ et $x = ct$. La déviation angulaire $\vec{\alpha}$ subie par le photon est régie par l'intégrale de l'équation des géodésiques nulles. Dans l'approximation de Born, l'angle de déviation total est donné par :

$$\alpha_i = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_i(h_{\mu\nu}) \frac{k^\mu k^\nu}{(k^0)^2} c\, dt \tag{55}$$

où $k^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ est le vecteur tangent à la géodésique non perturbée. Pour une propagation selon l'axe x, nous avons $k^\mu = (k^0, k^0, 0, 0)$ en coordonnées cartésiennes. Toutefois, la métrique (54) utilise des coordonnées cylindriques. Exprimons le vecteur tangent et la perturbation dans la base cartésienne (x, y) :

$$\rho^2 = x^2 + y^2 \tag{56}$$

$$d\phi = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = -\frac{b}{x^2 + b^2} dx \quad (\text{car } y = b, dy = 0) \tag{57}$$

La composante de la déviation selon l'axe y (direction transverse) est :

$$\alpha_y = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial h_{00}}{\partial y} + \frac{\partial h_{xx}}{\partial y} + 2 \frac{\partial h_{0\phi}}{\partial y} \frac{d\phi}{cdt} \right] dx \tag{58}$$

6.3 Calcul des composantes de déviation

6.3.1 Contribution scalaire (Masse)

Les termes $h_{00} = 2\Phi/c^2$ et $h_{xx} = -2\Phi/c^2$ (en négligeant les termes d'ordre supérieur en σ) contribuent à la déviation standard. En utilisant $\Phi = 2G\lambda \ln \sqrt{x^2 + y^2}$, nous avons :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \frac{2G\lambda y}{x^2 + y^2} \tag{59}$$

La contribution de la masse α_M à la déviation totale est :

$$\alpha_M = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{4}{c^2}\left(\frac{2G\lambda b}{x^2+b^2}\right)dx = \frac{4G\lambda b}{c^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+b^2} \tag{60}$$

Par intégration, on obtient $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+b^2} = \frac{\pi}{b}$. Ainsi :

$$\alpha_M = \frac{4\pi G\lambda}{c^2} = \delta \tag{61}$$

On retrouve ici exactement la valeur du déficit d'angle δ calculée à l'équation (43). Ce résultat est remarquable : dans l'approximation de champ faible, la déviation d'un rayon lumineux par un fil infini est indépendante du paramètre d'impact b.

6.3.2 Contribution gravitomagnétique (Rotation)

Le terme de rotation $h_{0\phi}$ induit une déviation supplémentaire α_J. À partir de (54), le terme de couplage est $h_{t\phi}d\phi = -\frac{4Gj}{c^2}\rho^2 d\phi$. En substituant $d\phi = -\frac{b}{x^2+b^2}dx$, on obtient :

$$h_{t\phi}d\phi = \frac{4Gj}{c^2}(x^2+b^2)\frac{b}{x^2+b^2}dx = \frac{4Gjb}{c^2}dx \tag{62}$$

La contribution à l'intégrale de Born (55) provenant du terme croisé $2h_{0i}k^0k^i$ s'écrit formellement comme l'intégrale du gradient du potentiel vecteur. Pour un fil infini, l'intégrale brute diverge logarithmiquement ; il faut considérer le champ gravitomagnétique décroissant en $1/\rho$ à l'extérieur de la source. Le calcul via le tenseur de Riemann montre que la déviation supplémentaire due au moment angulaire j pour un photon passant à une distance b est :

$$\alpha_J = \pm\frac{8Gj}{c^3 b} \tag{63}$$

où le signe dépend du sens de rotation du cylindre par rapport au vecteur de propagation du photon (effet de "frame-dragging" asymétrique).

6.4 Asymétrie et rupture de symétrie de lentillage

La déviation totale α_{tot} est la somme algébrique des deux contributions :

$$\alpha_{tot} = \frac{4\pi G\lambda}{c^2} \pm \frac{8Gj}{c^3 b} \tag{64}$$

Théorème 6.1. Un fil massif en rotation n'agit pas comme une lentille cylindrique parfaite. Il existe une asymétrie de déviation $\Delta\alpha$ entre deux rayons passant de part et d'autre du fil (paramètres d'impact $+b$ et $-b$) :

$$\Delta\alpha = \alpha_{tot}(+b) - \alpha_{tot}(-b) = \frac{16Gj}{c^3 b} \tag{65}$$

Démonstration. Considérons deux photons P_1 et P_2 passant à $y = b$ et $y = -b$.

— Pour P_1, le moment angulaire du photon $\vec{L}_P = \vec{r}\times\vec{p}$ est parallèle au moment angulaire du cylindre $\vec{j}$. Le "frame-dragging" (Section 2.3.2) agit dans le sens du mouvement, diminuant le temps de transit effectif et modifiant la courbure de la trajectoire.

— Pour P_2, les moments sont antiparallèles.

L'application de la règle de Leibniz sur l'intégrale de la composante R^i_{0j0} du tenseur de Riemann, qui inclut les termes $\partial_\rho\omega$ de l'équation (8), confirme que le gradient du potentiel de rotation j s'ajoute ou se retranche au déficit d'angle statique selon l'orientation relative. ■

Cette asymétrie est l'analogue gravitationnel de l'effet Aharonov-Bohm pour des particules classiques. Elle implique que si une source lumineuse ponctuelle est située derrière un tel cylindre, les deux images produites par l'espace conique (voir Section 4) ne seront pas symétriques par rapport à la source : l'une sera plus déviée que l'autre. Ce résultat constitue une signature observationnelle cruciale pour distinguer une corde cosmique statique d'un filament en rotation.

7 La Machine de Tipler et les courbes temporelles fermées (CTC)

L'un des aspects les plus fascinants de la solution de Lewis-van Stockum réside dans sa structure causale non triviale. Comme suggéré à la section 1.3, la rotation d'un cylindre infini de poussière ne se contente pas de courber l'espace-temps, elle en modifie la topologie temporelle. Frank Tipler a démontré en 1974 [4] qu'un tel cylindre, s'il est de longueur finie mais suffisamment grand, peut agir comme une "machine à remonter le temps". Nous formalisons ici les conditions mathématiques d'existence de ces courbes temporelles fermées (CTC).

7.1 Analyse de la signature locale et basculement des cônes de lumière

Reprenons la métrique intérieure de van Stockum donnée par l'équation (14). Pour étudier la causalité, nous nous concentrons sur les intervalles de genre temps ($ds^2 < 0$ avec la signature $(+---)$ ou $ds^2 > 0$ avec notre convention $(-+++)$ utilisée en (14)). Considérons un déplacement purement azimutal à coordonnée radiale ρ et axiale z constantes ($d\rho = dz = 0$). L'élément de ligne se réduit à :

$$ds^2 = \rho^2(1 - a^2\rho^2)d\phi^2 + 2a\rho^2 d\phi dt - dt^2 \tag{66}$$

La structure causale est déterminée par les directions nulles ($ds^2 = 0$), qui définissent les limites du cône de lumière local. En divisant (66) par dt^2 et en posant $\Omega = d\phi/dt$, nous obtenons l'équation quadratique pour les vitesses angulaires des photons :

$$\rho^2(1 - a^2\rho^2)\Omega^2 + 2a\rho^2\Omega - 1 = 0 \tag{67}$$

Lemme 7.1. Les vitesses angulaires limites $\Omega_\pm$ des signaux lumineux dans le plan transverse sont données par :

$$\Omega_\pm = \frac{-a\rho^2 \pm \rho}{\rho^2(1 - a^2\rho^2)} = \frac{1}{\rho(\pm 1 - a\rho)} \tag{68}$$

Démonstration. Le discriminant de l'équation quadratique est $\Delta = (2a\rho^2)^2 - 4(\rho^2(1-a^2\rho^2))(-1) = 4a^2\rho^4 + 4\rho^2 - 4a^2\rho^4 = 4\rho^2$. Les racines sont donc :

$$\Omega_\pm = \frac{-2a\rho^2 \pm 2\rho}{2\rho^2(1 - a^2\rho^2)} = \frac{\rho(-a\rho \pm 1)}{\rho^2(1 - a\rho)(1 + a\rho)}$$

En simplifiant par $(1 - a\rho)$ pour Ω_+ et par $(1 + a\rho)$ pour Ω_-, on obtient :

$$\Omega_+ = \frac{1}{\rho(1 + a\rho)}, \quad \Omega_- = \frac{-1}{\rho(1 - a\rho)}$$

Ce qui correspond exactement à l'expression énoncée. ■

L'analyse de ces racines montre que lorsque $\rho \to 1/a$, la vitesse Ω_- tend vers l'infini. Ce phénomène indique que le cône de lumière "bascule" (tip over) de telle sorte qu'une direction initialement spatiale (∂_ϕ) devient contenue à l'intérieur du cône de lumière futur.

7.2 Démonstration de l'existence des CTC

Une courbe temporelle fermée est une trajectoire $\gamma(\lambda)$ telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$ et dont le vecteur tangent est partout de genre temps ($ds^2 < 0$ dans notre convention de métrique physique, ou ici $ds^2 > 0$ selon la forme (14) si l'on considère le temps propre).

Théorème 7.1. Pour tout rayon $\rho > \rho_c = 1/a$, il existe des courbes fermées de genre temps dans l'espace-temps de van Stockum.

Démonstration. Considérons une courbe fermée circulaire $\mathcal{C}$ définie par $t = t_0$, $z = z_0$, $\rho = \rho_0$ et $\phi \in [0, 2\pi]$. Le vecteur tangent est $\dot{\gamma} = \partial_\phi$. L'intervalle propre le long de cette courbe est :

$$\Delta s^2 = \int_0^{2\pi} g_{\phi\phi} d\phi = 2\pi\rho_0^2(1 - a^2\rho_0^2) \tag{69}$$

Si $\rho_0 > 1/a$, alors $(1-a^2\rho_0^2) < 0$, donc $\Delta s^2 < 0$. Dans la signature de la métrique de van Stockum (14), cela signifie que le vecteur ∂_ϕ est de genre temps (puisque le terme en dt^2 est -1).

Cependant, pour qu'un observateur physique parcoure cette courbe, il faut s'assurer qu'il peut se déplacer le long de $\mathcal{C}$ tout en progressant "vers le futur" local. Vérifions l'orientation temporelle. Un vecteur V est futur si $V^\mu(\partial_t)_\mu < 0$. Ici, $g_{t\phi} = a\rho^2$. Pour la courbe $\mathcal{C}$, le vecteur tangent est $U = (0, 0, 1, 0)$. Son produit scalaire avec le vecteur de Killing temporel est $U^\mu\xi_\mu = g_{\phi t} = a\rho^2 > 0$.

Pour construire une CTC physiquement réalisable par une particule massive, considérons une trajectoire avec une légère variation temporelle $\frac{dt}{d\phi} = \epsilon$. L'intervalle est :

$$\frac{ds^2}{d\phi^2} = g_{\phi\phi} + 2g_{t\phi}\epsilon + g_{tt}\epsilon^2 = \rho^2(1 - a^2\rho^2) + 2a\rho^2\epsilon - \epsilon^2 \tag{70}$$

Pour $\rho > 1/a$, le premier terme est négatif. Nous pouvons choisir ϵ tel que la trajectoire soit de genre temps et que le temps global t recule à chaque révolution ($\epsilon < 0$). Par exemple, posons $\rho = \sqrt{2}/a$. Alors $g_{\phi\phi} = \frac{2}{a^2}(1-2) = -2/a^2$. L'intervalle devient $-2/a^2 + (4/a)\epsilon - \epsilon^2$. En choisissant ϵ suffisamment petit, l'observateur revient à son point de départ spatial avec $t_{final} < t_{initial}$, prouvant la violation de causalité. ■

7.3 Le cylindre de Tipler et la condition de finitude

Le résultat précédent s'applique rigoureusement au cylindre infini. Tipler [4] a étendu cette analyse en montrant que pour un cylindre de hauteur finie H, les CTC apparaissent si la rotation a est telle que la vitesse tangentielle à la surface $v = aR$ approche la vitesse de la lumière.

Propriété 7.1. La violation de la causalité par un cylindre de rotation rigide nécessite que la densité d'énergie ϵ et le rayon R satisfassent la condition de compacité de rotation :

$$4\pi G\epsilon R^2 \geq 1 \tag{71}$$

Cette condition est dérivée du fait que le paramètre a dans la solution de van Stockum est relié à la densité de poussière par $a^2 = 4\pi G\epsilon$ (voir Section 1.2). Ainsi, $\rho_c = (4\pi G\epsilon)^{-1/2}$. Pour que des CTC existent à l'intérieur du cylindre (où la solution est valide), on doit avoir $R > \rho_c$, ce qui conduit directement à la proposition 7.1.

Remarque 7.1. Contrairement au trou noir de Kerr, où la singularité est protégée par un horizon d'événements (censure cosmique), la solution de van Stockum pour $\rho > \rho_c$ présente des CTC dans une région potentiellement accessible, qualifiant cet espace-temps de "singularité nue de causalité". Comme l'a noté Stephen Hawking, cela suggère que de telles configurations de matière (cylindres infinis de poussière) sont probablement instables ou physiquement irréalisables dans un univers respectant la conjecture de protection chronologique.

7.4 Lien avec les géodésiques de moment angulaire nul

Il est instructif de relier ce basculement des cônes de lumière à la dynamique des particules étudiée à la Section 5. Pour un ZAMO (Zero Angular Momentum Observer), la vitesse angulaire Ω donnée par (11) devient, dans la métrique (14) :

$$\Omega_{ZAMO} = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} = -\frac{a\rho^2}{\rho^2(1-a^2\rho^2)} = \frac{a}{a^2\rho^2-1} \tag{72}$$

On remarque que $\Omega_{ZAMO} \to \infty$ quand $\rho \to 1/a$. Cela signifie qu'à l'approche du rayon critique, l'entraînement du référentiel (frame-dragging) devient si puissant qu'aucune force physique ne peut empêcher une particule d'être entraînée dans la direction de rotation, forçant ainsi sa trajectoire à devenir azimutale et, ultimement, à boucler dans le temps.

8 Conditions de raccordement d'Israel à la surface du cylindre

L'étude des solutions exactes en relativité générale exige souvent de recoudre une solution intérieure avec source (le cylindre de poussière) à une solution de vide extérieure. Ce processus est régi par les conditions de jonction de Darmois-Israel. Dans cette section, nous établissons les conditions mathématiques nécessaires pour qu'une surface cylindrique Σ de rayon R ne comporte pas de nappe de matière singulière (couche de tension superficielle), assurant ainsi une transition physiquement régulière entre l'espace-temps de van Stockum et le vide de Lewis.

8.1 Formalisme des formes fondamentales

Soit Σ la hypersurface de genre temps définie par l'équation $\Phi(\rho) = \rho - R = 0$. Nous notons $\mathcal{M}^-$ la région intérieure ($\rho < R$) régie par la métrique (14) et $\mathcal{M}^+$ la région extérieure ($\rho > R$) régie par une métrique de vide stationnaire axisymétrique de la forme (7). Les coordonnées intrinsèques sur Σ sont notées $y^a = (t, \phi, z)$.

La première condition de jonction impose la continuité de la métrique induite (première forme fondamentale) h_{ab} à travers Σ :

$$[h_{ab}] = h^+_{ab} - h^-_{ab} = 0 \tag{73}$$

La seconde condition de jonction relie le saut de la courbure extrinsèque K_{ab} (seconde forme fondamentale) au tenseur d'énergie-impulsion de surface S_{ab} :

$$S_{ab} = -\frac{1}{8\pi G}\left([K_{ab}] - h_{ab}[K]\right) \tag{74}$$

où $[K_{ab}] = K^+_{ab} - K^-_{ab}$ et $K = h^{ab}K_{ab}$ est la trace de la courbure extrinsèque. Une jonction "lisse" (sans coque matérielle) impose $S_{ab} = 0$, soit $[K_{ab}] = 0$.

8.2 Calcul de la courbure extrinsèque intérieure

Le vecteur normal unitaire n^μ à la surface Σ, dirigé vers l'extérieur ($\mathcal{M}^-$ vers $\mathcal{M}^+$), est défini par $n_\mu = N\partial_\mu\Phi$ avec $g^{\mu\nu}n_\mu n_\nu = 1$. Pour la métrique intérieure (14), nous avons $g^{\rho\rho} = e^{-a^2\rho^2}$. Par conséquent :

$$n_\mu = (0, e^{a^2R^2/2}, 0, 0) \implies n^\mu = (0, e^{-a^2R^2/2}, 0, 0) \tag{75}$$

La courbure extrinsèque est définie par $K_{ab} = e^\mu_a e^\nu_b \nabla_\mu n_\nu$, où $e^\mu_a = \partial x^\mu / \partial y^a$. Pour une hypersurface à coordonnée constante dans une métrique dont les composantes ne dépendent que de cette coordonnée, elle se simplifie en :

$$K_{ab} = \frac{1}{2} n^\rho \frac{\partial g_{ab}}{\partial \rho} = \frac{e^{-a^2R^2/2}}{2} \left. \frac{\partial g_{ab}}{\partial \rho} \right|_{\rho=R} \tag{76}$$

Calculons explicitement les composantes de K^-_{ab} à partir de (14) :
- **Composante** zz **:** $g_{zz} = e^{a^2\rho^2}$. $\partial_\rho g_{zz} = 2a^2\rho e^{a^2\rho^2}$. Ainsi, $K^-_{zz} = a^2 R e^{a^2R^2/2}$.
- **Composante** tt **:** $g_{tt} = -1$. $\partial_\rho g_{tt} = 0$. Ainsi, $K^-_{tt} = 0$.
- **Composante** $t\phi$ **:** $g_{t\phi} = a\rho^2$. $\partial_\rho g_{t\phi} = 2a\rho$. Ainsi, $K^-_{t\phi} = aRe^{-a^2R^2/2}$.
- **Composante** $\phi\phi$ **:** $g_{\phi\phi} = \rho^2(1 - a^2\rho^2)$. $\partial_\rho g_{\phi\phi} = 2\rho - 4a^2\rho^3$. Ainsi, $K^-_{\phi\phi} = R(1 - 2a^2R^2)e^{-a^2R^2/2}$.

8.3 Jonction avec la solution de vide de Lewis

La solution de vide la plus générale possédant les mêmes symétries est la métrique de Lewis. Pour satisfaire (73) et $[K_{ab}] = 0$, les composantes de la métrique extérieure et leurs dérivées radiales doivent correspondre aux valeurs calculées ci-dessus en $\rho = R$.

Posons la métrique extérieure sous la forme simplifiée de Weyl-Lewis :

$$ds^2_+ = e^{2(\gamma-\psi)}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 e^{-2\psi} d\phi^2 - e^{2\psi}(dt - \omega d\phi)^2 \tag{77}$$

Les conditions de continuité sur h_{ab} imposent quatre équations sur les paramètres de Lewis au bord. En particulier, $g^+_{tt} = -e^{2\psi} = -1 \implies \psi(R) = 0$. De même, $g^+_{zz} = e^{2\gamma} = e^{a^2R^2} \implies \gamma(R) = a^2R^2/2$.

Propriété 8.1. Le raccordement sans nappe singulière impose une contrainte sur la dérivée du potentiel gravito-magnétique extérieur ω.

Démonstration. Considérons la composante croisée de la courbure extrinsèque. Pour la métrique extérieure, au bord où $\psi = 0$ et ω est ajusté par continuité :

$$g^+_{t\phi} = \omega e^{2\psi} \implies \left. \frac{\partial g^+_{t\phi}}{\partial \rho} \right|_R = \omega'(R) + 2\omega(R)\psi'(R) \tag{78}$$

Pour l'intérieur, nous avons trouvé $\partial_\rho g^-_{t\phi} = 2aR$. Par continuité de $g_{t\phi}$, on sait que $\omega(R) = aR^2$. L'égalité des courbures extrinsèques $K^+_{t\phi} = K^-_{t\phi}$ impose alors :

$$\omega'(R) + 2aR^2\psi'(R) = 2aR \tag{79}$$

Parallèlement, la composante K_{tt} exige $\partial_\rho g^+_{tt} = 0 \implies -2e^{2\psi}\psi'(R) = 0$, soit $\psi'(R) = 0$. En injectant ce résultat dans (79), nous obtenons la condition nécessaire sur le gradient de rotation extérieur :

$$\omega'(R) = 2aR \tag{80}$$

Cela signifie que le flux gravito-magnétique à la surface est entièrement déterminé par le paramètre de rotation rigide a de la poussière intérieure. ∎

8.4 Détermination de la masse linéique et du déficit d'angle

Pour interpréter physiquement ce raccordement, nous utilisons la relation entre le paramètre σ de la Section 4 et les gradients de la métrique en champ faible. La masse de Komar par unité de longueur M_L est liée à la courbure extrinsèque par l'intégrale sur la frontière :

$$M_L = \frac{1}{4\pi G} \int_0^{2\pi} K_{zz} \sqrt{h_{\phi\phi}} d\phi \tag{81}$$

En substituant K_{zz}^- et $h_{\phi\phi}$ de (14) au bord $\rho = R$:

$$M_L = \frac{1}{4\pi G}(2\pi) \left(a^2 R e^{a^2 R^2/2}\right) \left(R\sqrt{1 - a^2 R^2} e^{-a^2 R^2/2}\right) \frac{1}{\sqrt{g_{zz}}} \tag{82}$$

Après simplifications, nous obtenons l'expression de la densité linéique de la source cylindrique en rotation :

$$\lambda = \frac{a^2 R^2}{2G\sqrt{1 - a^2 R^2}} \tag{83}$$

Remarque 8.1. On observe que λ devient imaginaire si $aR > 1$. Cela confirme physiquement la limite de validité de la jonction : le cylindre ne peut pas tourner plus vite que la vitesse de la lumière à sa surface ($aR = 1$). Cependant, comme démontré à la Section 7, les violations de causalité (CTC) apparaissent bien avant, dès que $aR > 1/2$. La jonction d'Israel reste mathématiquement possible jusqu'à $aR = 1$, mais l'espace-temps extérieur de Lewis devient alors non-causal.

8.5 Analyse de la tension superficielle résiduelle

Si les paramètres de la solution de Lewis ne sont pas précisément ajustés aux conditions (79), une nappe de matière apparaît. Le tenseur d'énergie-impulsion de surface S_{ab} décrit alors une coque cylindrique. À l'équilibre, la tension azimutale $\tau_\phi = S_\phi^\phi$ doit compenser la différence de pression de gravitation (calculée en Section 1.3).

En utilisant (74), la pression de surface nécessaire pour maintenir un cylindre de van Stockum avec un extérieur arbitraire est :

$$P_{surf} = \frac{e^{-a^2 R^2/2}}{8\pi G} \left(\frac{1}{R} - \frac{K_{\phi\phi}^+}{R\sqrt{1 - a^2 R^2}} \right) \tag{84}$$

Ce résultat montre que sans un ajustement fin de la métrique de Lewis (spécifiquement sa structure de déficit d'angle σ), le cylindre de poussière tendrait soit à exploser radialement sous l'effet de la rotation, soit à s'effondrer, confirmant que le raccordement d'Israel est la clé de la stabilité des solutions cylindriques stationnaires.

9 Analogie électromagnétique du formalisme d'Ernst

L'étude des espaces-temps stationnaires et axisymétriques, introduite à la Section 1.2, permet d'établir une correspondance structurelle profonde entre les équations d'Einstein dans le vide et les équations de l'électromagnétisme classique. Cette analogie, souvent désignée sous le terme de *Gravito-Électromagnétisme* (GEM), permet d'interpréter les composantes de la métrique non plus comme de simples coefficients géométriques, mais comme des potentiels vecteurs et scalaires couplés.

Nous nous proposons ici de démontrer comment le système d'Ernst [1] émerge d'une réduction des équations de champ et en quoi sa structure mathématique mime celle de l'électrostatique non-linéaire.

9.1 Décomposition du champ de gravitation en potentiels GEM

Reprenons la métrique de Lewis-Papapetrou définie à l'équation (7). Pour un observateur au repos par rapport aux coordonnées de Weyl (ρ, z, ϕ), le champ gravitationnel peut être décomposé en deux entités vectorielles. En posant $c = 1$, nous définissons :

1. Le potentiel scalaire gravito-électrique Φ_g, lié à la composante temporelle de la métrique : $f = e^{2\Phi_g}$.
2. Le potentiel vecteur gravito-magnétique $\mathbf{A}_g$, lié au terme de rotation (frame-dragging) ω.

Dans le cadre stationnaire, le champ gravito-électrique $\mathbf{E}_g$ et le champ gravito-magnétique $\mathbf{B}_g$ sont définis dans l'espace euclidien plat à trois dimensions par :

$$\mathbf{E}_g = \nabla \Phi_g = \frac{1}{2f} \nabla f, \quad \mathbf{B}_g = \nabla \times \mathbf{A}_g \tag{85}$$

où ∇ est l'opérateur gradient dans les coordonnées (ρ, z, ϕ). Contrairement à l'électromagnétisme de Maxwell, ces champs sont ici intrinsèquement couplés par la structure de l'espace-temps.

9.2 Démonstration de l'équation de twist et potentiel scalaire magnétique

Pour démontrer la correspondance, nous partons des équations d'Einstein dans le vide $R_{\mu\nu} = 0$. La composante mixte $R_{t\phi} = 0$ joue un rôle central. Pour la métrique (7), cette équation se réduit à :

$$\nabla \cdot \left(\frac{f^2}{\rho^2} \nabla \omega \right) = 0 \tag{86}$$

Cette forme est mathématiquement identique à une équation de conservation d'un flux. Par conséquent, il existe un potentiel scalaire ψ, appelé potentiel de twist (ou potentiel magnétique de Weyl), tel que son gradient soit orthogonal au flux de rotation. Les relations différentielles, déjà introduites aux équations (8), peuvent s'écrire vectoriellement comme :

$$\nabla \psi = -\frac{f^2}{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\phi \times \nabla \omega \tag{87}$$

où $\hat{\mathbf{e}}_\phi$ est le vecteur unitaire azimutal.

Lemme 9.1. L'existence de ψ est garantie par la condition d'intégrabilité de (86). En prenant le rotationnel de (87), on vérifie que $\nabla \times (f^{-2} \rho \nabla \psi) = 0$ est équivalent à l'équation de champ pour ω.

9.3 Réduction à l'équation d'Ernst : La non-linéarité gravitationnelle

Le génie de Frederick Ernst [1] fut de combiner le potentiel gravito-électrique f et le potentiel gravito-magnétique ψ en une unique fonction complexe $\mathcal{E} = f + i\psi$.

Reprenons l'équation d'Einstein pour la composante $R_{tt} = 0$. Elle s'exprime par :

$$f \nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \frac{f^4}{\rho^2} \nabla \omega \cdot \nabla \omega \tag{88}$$

En utilisant la relation entre ψ et ω donnée par la norme de l'équation (87), nous avons $|\nabla \psi|^2 = \frac{f^4}{\rho^2} |\nabla \omega|^2$. L'équation pour f devient alors :

$$f \nabla^2 f = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla \psi \cdot \nabla \psi \tag{89}$$

De même, en prenant la divergence de (87) et en utilisant l'identité $\nabla \cdot (\nabla\psi) = \nabla^2\psi$, nous obtenons après substitution des composantes de Ricci :

$$f\nabla^2\psi = 2\nabla f \cdot \nabla\psi \tag{90}$$

En multipliant (90) par l'unité imaginaire i et en l'additionnant à (89), nous obtenons :

$$f\nabla^2(f + i\psi) = \nabla f \cdot \nabla f - \nabla\psi \cdot \nabla\psi + 2i\nabla f \cdot \nabla\psi = (\nabla f + i\nabla\psi) \cdot (\nabla f + i\nabla\psi) \tag{91}$$

En reconnaissant le carré du gradient de la fonction complexe $\mathcal{E}$, nous aboutissons à l'équation d'Ernst (9) :

$$\mathrm{Re}(\mathcal{E})\nabla^2\mathcal{E} = \nabla\mathcal{E} \cdot \nabla\mathcal{E} \tag{9}$$

9.4 Interprétation physique et limites de l'analogie

Cette démonstration révèle que la gravitation cylindrique en rotation se comporte comme une théorie de jauge où :

- La partie réelle f agit comme une "permittivité" effective pour le champ magnétique ψ.
- La non-linéarité (terme de droite de l'équation) exprime que le champ gravitationnel est lui-même une source de gravitation (auto-couplage), contrairement aux équations de Maxwell linéaires dans le vide.

Propriété 9.1. Dans la limite statique ($\omega \to 0, \psi \to 0$), l'équation d'Ernst se réduit à $\nabla^2 f = f^{-1}(\nabla f)^2$. En posant $f = e^{2\Phi}$, on retrouve l'équation de Laplace $\nabla^2\Phi = 0$ de l'électrostatique ou de la gravitation Newtonienne (Section 1.1).

Cette analogie est particulièrement fertile pour l'étude des solutions de Levi-Civita [3]. Le déficit d'angle δ calculé à la Section 4 (voir aussi [5]) peut être vu comme l'équivalent topologique d'une ligne de flux magnétique infinie dans l'effet Aharonov-Bohm, où la courbure de l'espace-temps joue le rôle du potentiel vecteur. Ainsi, le formalisme d'Ernst ne simplifie pas seulement les calculs ; il unifie la vision géométrique de la relativité générale avec l'intuition vectorielle de la physique des champs classique.

10 Effet Lense-Thirring au centre d'une coque cylindrique rotative

L'effet Lense-Thirring, ou entraînement des référentiels (*frame-dragging*), est une conséquence directe des composantes non-diagonales du tenseur métrique induites par le moment cinétique d'une source. Dans cette section, nous calculons la vitesse de précession d'un gyroscope placé au centre d'une coque cylindrique de masse M, de rayon R et de hauteur finie H, animée d'une vitesse angulaire constante ω. Nous utiliserons l'analogie gravito-électromagnétique (GEM) développée à la section 9 pour traiter ce problème de champ faible.

10.1 Formalisme de Biot-Savart Gravitationnel

Pour une distribution de masse stationnaire en champ faible, la métrique linéarisée (54) permet de définir un champ gravito-magnétique $\mathbf{B}_g$. Un gyroscope au repos au centre de coordonnées subit une précession dont la vitesse angulaire $\mathbf{\Omega}_p$ est reliée à ce champ par :

$$\mathbf{\Omega}_p = -\frac{1}{2}\mathbf{B}_g = -\frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{A}_g) \tag{92}$$

où $\mathbf{A}_g$ est le potentiel vecteur gravito-magnétique. En analogie avec l'électromagnétisme classique, et en tenant compte du facteur 4 spécifique aux équations d'Einstein linéarisées (voir Section 9), le champ $\mathbf{B}_g$ au point d'observation $\mathbf{r}$ est donné par l'intégrale de type Biot-Savart :

$$\mathbf{B}_g(\mathbf{r}) = \frac{4G}{c^2} \int \frac{\mathbf{j}_m(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} d^3\mathbf{r}' \tag{93}$$

où $\mathbf{j}_m = \rho \mathbf{v}$ est la densité de courant de masse.

10.2 Configuration de la source et intégration

Considérons la coque cylindrique $\mathcal{S}$ de densité surfacique $\sigma = \frac{M}{2\pi RH}$. Pour un élément de surface $dS' = Rd\phi' dz'$, le courant de masse est purement azimutal :

$$d\mathbf{j}_m = \sigma \mathbf{v} dS' = \sigma(\omega R \hat{\mathbf{e}}_{\phi'}) R d\phi' dz' \tag{94}$$

Nous cherchons le champ au centre géométrique $O(0, 0, 0)$. Le vecteur position de la source est $\mathbf{r}' = R\hat{\mathbf{e}}_r(\phi') + z'\hat{\mathbf{e}}_z$. Le numérateur du produit vectoriel dans (93) devient :

$$\mathbf{v} \times (-\mathbf{r}') = (\omega R \hat{\mathbf{e}}_{\phi'}) \times (-R\hat{\mathbf{e}}_r - z'\hat{\mathbf{e}}_z) = \omega R^2 \hat{\mathbf{e}}_z - \omega R z' \hat{\mathbf{e}}_r \tag{95}$$

Par symétrie azimutale, lors de l'intégration sur $\phi' \in [0, 2\pi]$, la composante radiale $\hat{\mathbf{e}}_r$ s'annule ($\int_0^{2\pi} \hat{\mathbf{e}}_r d\phi' = \mathbf{0}$). Seule la composante axiale z subsiste. Le champ gravito-magnétique au centre est donc :

$$B_{g,z} = \frac{4G}{c^2} \int_{-H/2}^{H/2} \int_0^{2\pi} \frac{\sigma \omega R^2}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} R d\phi' dz' \tag{96}$$

En remplaçant σ par sa définition et en effectuant l'intégration angulaire (2π), nous obtenons :

$$B_{g,z} = \frac{4G}{c^2} \frac{M\omega R^2}{H} \int_{-H/2}^{H/2} \frac{dz'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} \tag{97}$$

10.3 Calcul de la précession centrale

L'intégrale axiale se résout par le changement de variable $z' = R \tan\theta$:

$$\int \frac{dz'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{1}{R^2} \frac{z'}{\sqrt{R^2 + z'^2}} \tag{98}$$

En évaluant entre $-H/2$ et $H/2$, nous trouvons :

$$\mathcal{I}_z = \frac{1}{R^2} \left[\frac{H/2}{\sqrt{R^2 + (H/2)^2}} - \frac{-H/2}{\sqrt{R^2 + (-H/2)^2}} \right] = \frac{H}{R^2 \sqrt{R^2 + H^2/4}} \tag{99}$$

En substituant ce résultat dans l'expression du champ $B_{g,z}$:

$$B_{g,z} = \frac{4GM\omega}{c^2 \sqrt{R^2 + H^2/4}} = \frac{8GM\omega}{c^2 \sqrt{4R^2 + H^2}} \tag{100}$$

D'après (92), la fréquence de précession de Lense-Thirring au centre est :

$$\Omega_p = -\frac{4GM\omega}{c^2 \sqrt{4R^2 + H^2}} \tag{101}$$

10.4 Analyse comparative et limites physiques

Le résultat (101) permet de discuter l'influence de la géométrie sur l'entraînement du référentiel local.

Propriété 10.1. Pour un cylindre de hauteur infinie ($H \gg R$), la précession centrale converge vers une valeur finie proportionnelle à la densité linéique.

Démonstration. En prenant la limite $H \to \infty$ dans (101) :

$$\Omega_p \approx -\frac{4GM\omega}{c^2 H} = -\frac{4G\lambda\omega}{c^2} \tag{102}$$

où $\lambda = M/H$ est la densité linéique de masse. Cependant, pour une densité λ constante et finie, le champ au centre reste fini, ce qui est cohérent avec la solution de Lewis-van Stockum (14) où le paramètre de rotation a est global. ■

10.4.1 Comparaison avec la coque sphérique (Effet Thirring)

Historiquement, Thirring a calculé la précession au centre d'une coque sphérique de masse M et rayon R. Le résultat classique est $\Omega_{sph} = -\frac{4GM\omega}{3Rc^2}$. Comparons avec notre cylindre dans le cas "compact" où $H = 2R$ (hauteur égale au diamètre) :

$$\Omega_{cyl} = -\frac{4GM\omega}{c^2\sqrt{4R^2 + 4R^2}} = -\frac{4GM\omega}{2\sqrt{2}Rc^2} = -\frac{\sqrt{2}GM\omega}{Rc^2} \tag{103}$$

On remarque que $\Omega_{cyl} > \Omega_{sph}$ pour une masse et un rayon identiques. Cela s'explique par la distribution de la masse : dans un cylindre, une fraction plus importante de la matière est située à une distance plus proche de l'axe de rotation pour un rayon équatorial donné, augmentant ainsi l'efficacité de l'entraînement gravito-magnétique par rapport à la géométrie sphérique où la masse se répartit vers les pôles (où le bras de levier de la vitesse $\mathbf{v}$ diminue).

10.4.2 Lien avec le déficit d'angle

Il est intéressant de noter que ce champ gravito-magnétique est le pendant dynamique du déficit d'angle statique δ analysé à la section 4. Alors que δ caractérise la courbure spatiale due à λ via (43), Ω_p caractérise la torsion temporelle due au flux $j = \lambda\omega R^2$. La mesure de cette précession au centre d'une structure cylindrique permettrait, en principe, de distinguer la masse "statique" de la source de son moment angulaire intrinsèque, même dans des régions où le tenseur de Riemann local est faible.

11 Stabilité radiale d'un cylindre de poussière en rotation

L'existence des solutions stationnaires de Lewis-van Stockum, bien que mathématiquement exactes, ne garantit pas la viabilité physique d'un filament de poussière sur des échelles de temps séculaires. Dans cette section, nous étudions la stabilité d'un cylindre de poussière en rotation rigide face à de petites perturbations radiales. Nous cherchons à déterminer si une fluctuation de la coordonnée radiale d'un élément de fluide conduit à une oscillation stable ou à un effondrement (ou une dispersion) irréversible.

11.1 Équilibre de référence et potentiel effectif

Considérons un élément de poussière (fluide sans pression, $P = 0$) situé à la périphérie d'un cylindre de rayon R. En utilisant le formalisme des géodésiques développé à la Section 5, le mouvement radial d'une particule d'épreuve est dicté par l'équation (50). Pour un élément du fluide lui-même, l'équilibre est maintenu par l'égalité entre l'attraction gravitationnelle et la force centrifuge induite par le paramètre de rotation a.

Le potentiel effectif régissant la dynamique radiale, extrait de (50), est défini par :

$$\mathcal{V}(\rho) = 1 + \left(\frac{L}{\rho} - aE\rho\right)^2 \tag{104}$$

où E est l'énergie spécifique et L le moment angulaire spécifique de l'élément de poussière. Pour un cylindre en rotation rigide, la condition de stationnarité impose que chaque élément de fluide suive une orbite circulaire stable à $\rho = \rho_e$. Comme démontré à la Proposition 5.1, cela nécessite $\dot{\rho} = 0$ et $\ddot{\rho} = 0$, soit $\mathcal{V}'(\rho_e) = 0$.

11.2 Analyse des perturbations linéaires

Soit une perturbation radiale $\eta(\tau)$ telle que $\rho(\tau) = \rho_e + \eta(\tau)$, avec $|\eta| \ll \rho_e$. Nous développons l'équation du mouvement (50) au premier ordre en η. En dérivant (50) par rapport au temps propre τ, nous obtenons l'équation de la force radiale :

$$2e^{a^2\rho^2}\dot{\rho}\ddot{\rho} + 2a^2\rho e^{a^2\rho^2}\dot{\rho}^3 = -\frac{d\mathcal{V}}{d\rho}\dot{\rho} \tag{105}$$

Pour des vitesses radiales faibles ($\dot{\rho}^2 \approx 0$), cette expression se simplifie en :

$$\ddot{\rho} \approx -\frac{1}{2}e^{-a^2\rho^2}\frac{d\mathcal{V}}{d\rho} \tag{106}$$

En substituant $\rho = \rho_e + \eta$ et en effectuant un développement de Taylor de la force au voisinage de ρ_e :

$$\ddot{\eta} = -\frac{1}{2}e^{-a^2\rho_e^2}\left[\mathcal{V}'(\rho_e) + \eta\mathcal{V}''(\rho_e) + \mathcal{O}(\eta^2)\right] \tag{107}$$

Puisque $\mathcal{V}'(\rho_e) = 0$ par condition d'équilibre, la dynamique de la perturbation est régie par l'équation de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\eta} + \omega_0^2\eta = 0, \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{2}e^{-a^2\rho_e^2}\mathcal{V}''(\rho_e) \tag{108}$$

11.3 Calcul de la fréquence épicyclique cylindrique

Pour déterminer la stabilité, nous devons évaluer la dérivée seconde du potentiel (104). La dérivée première est :

$$\mathcal{V}'(\rho) = 2\left(\frac{L}{\rho} - aE\rho\right)\left(-\frac{L}{\rho^2} - aE\right) \tag{109}$$

La dérivée seconde s'exprime par :

$$\mathcal{V}''(\rho) = 2\left(-\frac{L}{\rho^2} - aE\right)^2 + 2\left(\frac{L}{\rho} - aE\rho\right)\left(\frac{2L}{\rho^3}\right) \tag{110}$$

En utilisant la condition d'équilibre circulaire pour la seconde famille de trajectoires discutée à la Section 5, à savoir $L = -aE\rho_e^2$ (ce qui correspond à une rotation opposée au sens de torsion pour compenser l'attraction gravitationnelle), nous simplifions les termes :

1. $\left(\frac{L}{\rho_e} - aE\rho_e\right) = (-aE\rho_e - aE\rho_e) = -2aE\rho_e$
2. $\left(-\frac{L}{\rho_e^2} - aE\right) = (aE - aE) = 0$

En substituant ces valeurs dans l'expression de $\mathcal{V}''(\rho_e)$:

$$\mathcal{V}''(\rho_e) = 2(0)^2 + 2(-2aE\rho_e)\left(\frac{2(-aE\rho_e^2)}{\rho_e^3}\right) = 2(-2aE\rho_e)\left(-\frac{2aE}{\rho_e}\right) = 8a^2E^2 \tag{111}$$

En réinjectant ce résultat dans (108), la fréquence d'oscillation radiale est :

$$\omega_0^2 = 4a^2E^2e^{-a^2\rho_e^2} \tag{112}$$

11.4 Détermination de la vitesse angulaire critique

La stabilité est assurée si $\omega_0^2 > 0$, ce qui est toujours le cas pour des valeurs réelles de a et E. Cependant, la viabilité physique de cet équilibre est limitée par la vitesse de rotation à la surface.

Lemme 11.1. La vitesse tangentielle physique v_ϕ d'un élément de poussière par rapport à un observateur localement au repos (ZAMO) est liée à l'énergie E par $E = (1 - v_\phi^2)^{-1/2}e^{-a^2\rho^2/2}$ (en négligeant le potentiel gravitationnel de bord).

Comme établi à la Remarque 8.1, le raccordement d'Israel devient impossible au-delà de $aR = 1$. Mais l'analyse de stabilité montre un seuil plus restrictif. Pour que le cylindre de poussière ne subisse pas d'effondrement gravitationnel vers une singularité ou ne devienne pas causalement pathologique (CTC), la force centrifuge doit équilibrer exactement l'auto-gravitation définie par la densité ϵ.

En combinant la relation $a^2 = 4\pi G\epsilon$ de la Section 1.2 avec la condition de circularité, nous définissons la vitesse angulaire critique ω_{crit} au bord du cylindre ($\rho = R$) :

$$\omega_{crit} = \frac{v_\phi}{R} = \sqrt{\frac{G\lambda}{R^2}}(1 - 4a^2R^2)^{1/4} \tag{113}$$

Cette expression montre que si $aR > 1/2$, le terme sous la racine devient négatif, indiquant que la rotation nécessaire pour maintenir l'équilibre requerrait une vitesse super-luminique, rendant la structure intrinsèquement instable face à l'effondrement radial.

11.5 Conclusion sur l'instabilité de Tipler

La démonstration précédente établit que la stabilité radiale du cylindre de van Stockum est indissociable de sa structure causale. Bien que $\omega_0^2 > 0$ suggère une stabilité locale (oscillations épicycliques), l'augmentation de la densité linéique λ ou du rayon R pousse le système vers le régime $aR \to 1/2$. À ce point critique, le potentiel effectif $\mathcal{V}(\rho)$ s'aplatit, et les forces de marée gravitomagnétiques dominent la dynamique. Un cylindre de poussière dont la rotation dépasse cette limite ne peut plus maintenir sa cohésion radiale et s'effondre vers une singularité ou se disloque, confirmant que les "machines de Tipler" (Section 7) ne peuvent être formées par des processus d'accrétion de matière ordinaire sans violer les conditions de stabilité hydrostatique.

12 Thermodynamique et énergie quasi locale de Brown-York

L'une des difficultés majeures de la gravitation cylindrique réside dans la définition de la masse totale. Contrairement aux systèmes à symétrie sphérique, l'espace-temps de Levi-Civita, décrit par la métrique (17), n'est pas asymptotiquement plat en raison du potentiel logarithmique (12). Par conséquent, la masse ADM (*Arnowitt-Deser-Misner*) n'est pas définie. Pour pallier cette limitation, nous utilisons le formalisme de Brown-York, qui définit une énergie quasi locale associée à une frontière spatiale finie.

12.1 Hamiltonien de Brown-York et définition de l'énergie

Considérons une région spatiale Σ délimitée par une surface frontière $\mathcal{B}$ de topologie cylindrique (rayon R, hauteur H). L'énergie quasi locale de Brown-York, notée E_{BY}, est dérivée de l'action de Hilbert-Einstein complétée par les termes de bord de Gibbons-Hawking-York. Elle s'exprime par la différence des traces de la courbure extrinsèque de la frontière dans l'espace-temps physique et dans un espace-temps de référence :

$$E_{BY} = \frac{1}{8\pi G} \int_{\mathcal{B}} (k_0 - k)\sqrt{\sigma}\, d^2x \tag{114}$$

où :

- k est la trace de la courbure extrinsèque de la surface $\mathcal{B}$ immergée dans la tranche spatiale Σ.
- k_0 est la trace de la courbure extrinsèque de la même surface immergée dans un espace de référence plat (Minkowski).
- σ est le déterminant de la métrique induite sur la frontière $\mathcal{B}$.

12.2 Calcul de la courbure extrinsèque sur la frontière cylindrique

Reprenons la métrique de Levi-Civita statique (17) pour une section à t constant. La métrique spatiale γ_{ij} est donnée par :

$$dl^2 = \rho^{4\sigma(2\sigma-1)}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^{2(1-2\sigma)}d\phi^2 \tag{115}$$

La frontière $\mathcal{B}$ est définie par la condition $\rho = R$. Le vecteur normal unitaire n^μ à cette surface est :

$$n^\mu = \left(R^{-2\sigma(2\sigma-1)}, 0, 0\right) \implies n_\mu = \left(R^{2\sigma(2\sigma-1)}, 0, 0\right) \tag{116}$$

La métrique induite σ_{ab} sur $\mathcal{B}$ (coordonnées z, ϕ) possède les composantes :

$$\sigma_{zz} = R^{4\sigma(2\sigma-1)}, \quad \sigma_{\phi\phi} = R^{2(1-2\sigma)} \tag{117}$$

Le déterminant de la métrique induite est $\sqrt{\sigma} = \sqrt{\sigma_{zz}\sigma_{\phi\phi}} = R^{2\sigma(2\sigma-1)+1-2\sigma} = R^{4\sigma^2-4\sigma+1} = R^{(2\sigma-1)^2}$.

La courbure extrinsèque est définie par $k_{ab} = \sigma^i_a \sigma^j_b \nabla_i n_j$. Pour une surface $\rho = \text{Cst}$, la trace k s'exprime par :

$$k = \sigma^{ab}k_{ab} = \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\partial_\rho\left(\sqrt{\sigma}\right) \cdot n^\rho = \frac{1}{\rho^{4\sigma(2\sigma-1)}} \frac{\partial_\rho(\sqrt{\sigma})}{\sqrt{g_{\rho\rho}}} \tag{118}$$

En utilisant $\sqrt{\sigma} = \rho^{(1-2\sigma)^2}$, nous dérivons :

$$\partial_\rho(\sqrt{\sigma}) = (1-2\sigma)^2 \rho^{(1-2\sigma)^2-1} \tag{119}$$

D'où l'expression de la trace physique au rayon R :

$$k = R^{-2\sigma(2\sigma-1)}\left[(1-2\sigma)^2 R^{(1-2\sigma)^2-1}\right] = (1-2\sigma)^2 R^{(1-2\sigma)^2-1-2\sigma(2\sigma-1)} \tag{120}$$

En simplifiant l'exposant : $1 - 4\sigma + 4\sigma^2 - 1 - 4\sigma^2 + 2\sigma = -2\sigma$. On obtient finalement :

$$k = \frac{(1-2\sigma)^2}{R^{2\sigma}} \tag{121}$$

12.3 Soustraction de référence et Énergie de Brown-York

Pour calculer k_0, nous devons immerger la frontière $\mathcal{B}$ dans un espace plat. La circonférence propre de la frontière est $C = 2\pi R^{1-2\sigma}$ et sa hauteur propre est $L = HR^{2\sigma(2\sigma-1)}$. Dans un espace plat, une surface cylindrique de même circonférence et hauteur possède une courbure extrinsèque $k_0 = 1/R_{eff}$, où R_{eff} est le rayon équivalent. Cependant, le choix du plongement de référence est crucial. Le plongement standard de Brown-York impose que la métrique induite sur $\mathcal{B}$ soit identique dans les deux espaces.

Pour l'espace plat de référence $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2 + dz^2$, la trace est $k_0 = 1/r$. Pour faire correspondre les métriques induites, nous devons tenir compte du déficit d'angle δ calculé à la Section 4. L'analyse détaillée du plongement isométrique mène à :

$$k_0 = \frac{1-2\sigma}{R^{2\sigma(2\sigma-1)+1}} \tag{122}$$

En substituant (121) et (122) dans l'intégrale (114) :

$$E_{BY} = \frac{1}{8\pi G}\int_0^H dz \int_0^{2\pi} d\phi\sqrt{\sigma}\left(\frac{1-2\sigma}{R^{2\sigma(2\sigma-1)+1}} - \frac{(1-2\sigma)^2}{R}\right) \tag{123}$$

Après intégration sur ϕ et z (fournissant un facteur $2\pi H$) et simplification des puissances de R en utilisant $\sqrt{\sigma} = R^{(2\sigma-1)^2}$, nous obtenons :

$$E_{BY} = \frac{H}{4G}R^{(2\sigma-1)^2}\left[(1-2\sigma)R^{-(2\sigma-1)^2} - (1-2\sigma)^2 R^{-(2\sigma-1)^2}\right] \tag{124}$$

Les termes en R se simplifient mutuellement (ce qui est une propriété remarquable de la solution de Levi-Civita), laissant :

$$E_{BY} = \frac{H}{4G}[(1-2\sigma) - (1-2\sigma)^2] = \frac{H}{4G}[1-2\sigma-(1-4\sigma+4\sigma^2)] \tag{125}$$

$$E_{BY} = \frac{H}{4G}(2\sigma-4\sigma^2) = \frac{H\sigma(1-2\sigma)}{2G} \tag{126}$$

12.4 Interprétation thermodynamique et Masse de Komar

En utilisant la relation entre σ et la densité linéique $\lambda = \sigma c^2/G$ établie à la Section 2.3.2, nous pouvons exprimer l'énergie quasi locale sous la forme :

$$E_{BY} = \frac{1}{2}\lambda H(1-2\sigma) \tag{127}$$

Propriété 12.1. L'énergie de Brown-York d'un segment de filament cylindrique est inférieure à sa masse au repos Newtonienne $M = \lambda H$ dès que $\sigma > 0$.

Cette différence représente l'énergie de liaison gravitationnelle du cylindre. Dans la limite des champs faibles ($\sigma \ll 1$), $E_{BY} \approx \frac{1}{2}\lambda H$. Ce facteur $1/2$ est une signature de la structure de l'équation de Poisson en géométrie cylindrique.

Du point de vue thermodynamique, si l'on considère une variation de la frontière (variation de R), on peut définir une tension de surface quasi locale τ_{ab} par :

$$\tau_{ab} = \frac{2}{\sqrt{\sigma}}\frac{\delta S_{cl}}{\delta\sigma^{ab}} = \frac{1}{8\pi G}(k_{ab} - k\sigma_{ab} - (k_{0,ab} - k_0\sigma_{ab})) \tag{128}$$

Le travail fourni par cette tension lors d'une expansion du cylindre vérifie la première loi de la thermodynamique quasi locale :

$$dE_{BY} = T_{loc} dS - \mathcal{P} dA + \dots \tag{129}$$

où A est l'aire latérale. Pour le filament statique, la "température" locale est nulle, mais la pression de surface $\mathcal{P}$ est directement liée à la force de compression radiale analysée à la Proposition 1.1. L'énergie de Brown-York capture donc non seulement la masse de la source, mais aussi l'énergie stockée dans le déficit d'angle de l'espace-temps environnant, confirmant que la géométrie conique (Section 4) est un réservoir d'énergie gravitationnelle.

13 Ondes gravitationnelles cylindriques : La solution d'Einstein-Rosen

L'étude des ondes gravitationnelles cylindriques, initiée par Einstein et Rosen en 1937 [5], constitue l'un des rares exemples où les équations d'Einstein dans le vide peuvent être réduites à un système d'équations linéaires régissant la propagation d'ondes de courbure. Contrairement aux ondes sphériques, les ondes cylindriques ne subissent pas de dispersion géométrique en $1/r^2$, ce qui en fait un laboratoire idéal pour l'étude de l'énergie du champ gravitationnel.

13.1 La métrique d'Einstein-Rosen et réduction des équations de champ

Pour décrire un espace-temps cylindrique dépendant du temps, nous adoptons une métrique de type Weyl-Lewis (comparable à l'expression (7) de la section 1.2), mais où les fonctions dépendent explicitement du temps t et de la coordonnée radiale ρ. La métrique d'Einstein-Rosen s'écrit :

$$ds^2 = e^{2(\gamma-\psi)}(d\rho^2 - dt^2) + \rho^2 e^{-2\psi} d\phi^2 + e^{2\psi} dz^2 \tag{130}$$

où ψ et γ sont des fonctions de (ρ, t). Ici, l'invariance par translation selon z et la symétrie azimutale selon ϕ sont maintenues, mais la stationnarité est brisée.

Pour un espace-temps vide, les équations d'Einstein se réduisent à $R_{\mu\nu} = 0$. Le calcul des composantes du tenseur de Ricci pour la métrique (130) mène aux résultats suivants :

1. La composante $R_{\phi\phi} + R_{zz}$ fournit l'équation d'évolution pour le potentiel ψ :

$$\psi_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\psi_\rho - \psi_{tt} = 0 \tag{131}$$

   où l'indice dénote la dérivée partielle (ex : $\psi_\rho = \frac{\partial\psi}{\partial\rho}$).

2. Les composantes $R_{\rho\rho}$ et R_{tt} fournissent les gradients du potentiel de structure γ :

$$\gamma_\rho = \rho(\psi_\rho^2 + \psi_t^2) \tag{132a}$$
$$\gamma_t = 2\rho\psi_\rho\psi_t \tag{132b}$$

Lemme 13.1. La condition de compatibilité $\gamma_{\rho t} = \gamma_{t\rho}$ pour le système (132a)-(132b) est rigoureusement équivalente à l'équation d'onde (131).

Démonstration. Calculons les dérivées croisées :

$$\gamma_{\rho t} = \frac{\partial}{\partial t}[\rho(\psi_\rho^2 + \psi_t^2)] = 2\rho(\psi_\rho\psi_{\rho t} + \psi_t\psi_{tt})$$

$$\gamma_{t\rho} = \frac{\partial}{\partial \rho}[2\rho\psi_\rho\psi_t] = 2\psi_\rho\psi_t + 2\rho(\psi_{\rho\rho}\psi_t + \psi_\rho\psi_{t\rho})$$

En égalisant les deux expressions et en simplifiant par $2\psi_t$ (pour $\psi_t \neq 0$), on obtient :

$$\rho\psi_{tt} = \psi_\rho + \rho\psi_{\rho\rho} \implies \psi_{tt} - \psi_{\rho\rho} - \frac{1}{\rho}\psi_\rho = 0$$

Ce qui correspond exactement à l'équation (131). ■

13.2 Excitation par une source oscillante et fonctions de Bessel

Considérons un cylindre massif dont le rayon oscille de manière harmonique à une fréquence ω. En champ faible, cela induit une perturbation du potentiel ψ à l'extérieur. L'équation (131) est une équation de d'Alembert en coordonnées cylindriques (2D). Nous cherchons des solutions monochromatiques de la forme $\psi(\rho, t) = A\mathrm{Re}[F(\rho)e^{-i\omega t}]$.

En injectant cette forme dans (131), nous obtenons l'équation de Bessel :

$$F''(\rho) + \frac{1}{\rho}F'(\rho) + \omega^2 F(\rho) = 0 \tag{133}$$

La solution générale pour des ondes sortantes (condition de radiation de Sommerfeld) s'exprime par la fonction d'Hankel de première espèce $H_0^{(1)}(k\rho)$:

$$\psi(\rho, t) = A[J_0(\omega\rho)\cos(\omega t) + Y_0(\omega\rho)\sin(\omega t)] \tag{134}$$

où J_0 et Y_0 sont les fonctions de Bessel de première et seconde espèce.

13.3 Analyse de la courbure et énergie de Thorne (C-energy)

L'onde gravitationnelle transporte de l'énergie, ce qui se traduit par une évolution de la fonction métrique γ. Thorne a démontré que dans ce système, la quantité γ joue le rôle d'une énergie cylindrique cumulative (C-energy). Le flux d'énergie sortant à travers une surface cylindrique est directement relié à la dérivée temporelle γ_t.

Le flux d'énergie est caractérisé par le pseudotenseur d'Isaacson, mais en symétrie cylindrique, on utilise préférentiellement la *C-energy* (énergie cylindrique) définie par Thorne. Le vecteur flux d'énergie P^a est lié à γ. Pour la solution d'Einstein-Rosen, l'énergie contenue à l'intérieur d'un rayon ρ est :

$$U(\rho, t) = \frac{1}{8G}(1 - e^{-\gamma}) \tag{135}$$

Le taux de variation de cette énergie s'obtient via (132b) :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{e^{-\gamma}}{8G}\gamma_t = \frac{\rho e^{-\gamma}}{4G}\psi_\rho\psi_t \tag{136}$$

Propriété 13.1. L'émission d'ondes gravitationnelles par un cylindre oscillant entraîne une diminution de sa masse propre effective, perçue comme un déficit de courbure asymptotique.

Démonstration. Considérons le flux à travers une surface de grand rayon $\rho \to \infty$. En utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Bessel :

$$\psi(\rho, t) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\omega\rho}} A\cos(\omega\rho - \omega t - \pi/4)$$

Les dérivées sont $\psi_\rho \approx -\omega\psi\tan(\dots)$ et $\psi_t \approx \omega\psi\tan(\dots)$. Le produit $\psi_\rho\psi_t$ est proportionnel à $1/\rho$. Ainsi, $\gamma_t = 2\rho\psi_\rho\psi_t$ tend vers une valeur finie positive. L'intégration de (132b) sur une période $T = 2\pi/\omega$ montre que $\Delta\gamma > 0$. Puisque g_{zz} et $g_{\phi\phi}$ sont liés à ψ et γ, l'augmentation séculaire de γ modifie la structure conique globale de l'espace-temps, augmentant le déficit d'angle δ défini à l'équation (43). ■

13.4 Le pulse de Weber-Wheeler et l'effet de mémoire

Un cas particulier d'intérêt est le pulse de Weber-Wheeler, une solution impulsionnelle de (131) sans singularité initiale :

$$\psi_{WW}(\rho, t) = \mathrm{Re}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho^2 + (d+it)^2}}\right] \tag{137}$$

où d est la largeur de l'impulsion. Cette solution décrit une onde convergente vers l'axe, puis divergente. Le calcul de γ par intégration des équations (132a)-(132b) montre qu'après le passage du pulse, l'espace-temps ne revient pas à son état initial. La fonction γ subit un décalage permanent :

$$\Delta\gamma = \gamma(\rho, +\infty) - \gamma(\rho, -\infty) > 0 \tag{138}$$

Cet effet est la manifestation cylindrique de l'effet de mémoire gravitationnelle. En comparant avec le potentiel de bord calculé à la Proposition 1.1, on comprend que l'onde modifie de façon irréversible la tension longitudinale du filament cosmique. Cela suggère que les filaments galactiques, soumis à des oscillations mécaniques, rayonnent leur énergie gravitationnelle en augmentant leur compacité relativiste, un processus fondamental pour la stabilité des grandes structures à l'échelle cosmologique.

14 Transition vers la solution de Kerr (Limite sphéroïdale)

L'étude des solutions cylindriques, qu'elles soient statiques (17) ou stationnaires (14), repose sur une symétrie de translation axiale qui simplifie radicalement les équations d'Einstein. Cependant, pour modéliser des objets astrophysiques compacts et isolés, il est nécessaire de rompre cette invariance par translation pour aboutir à des sources de dimensions finies. Cette section démontre comment le formalisme d'Ernst, introduit à la section 1.2, permet de passer continûment de la gravitation cylindrique à la métrique de Kerr en utilisant le système de coordonnées sphéroïdales prolatées.

14.1 Transformation des coordonnées de Weyl vers le système prolaté

Le point de départ est la métrique de Lewis-Papapetrou (7) dans le vide. Pour une source de longueur finie $2k$ répartie sur l'axe z, les coordonnées cylindriques de Weyl (ρ, z) ne sont plus les plus adaptées pour décrire l'horizon des événements ou l'ergosphère. Nous introduisons les coordonnées sphéroïdales prolatées (ξ, η), définies par la transformation suivante :

$$\rho = k\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}, \quad z = k\xi\eta \tag{139}$$

où $\xi \geq 1$ joue le rôle d'une coordonnée radiale et $-1 \leq \eta \leq 1$ celui d'une coordonnée angulaire ($\eta = \cos\theta$). Dans cette géométrie, les surfaces à ξ constant sont des ellipsoïdes de révolution de foyers $z = \pm k$ sur l'axe $\rho = 0$.

Le gradient dans l'espace euclidien plat, intervenant dans l'équation d'Ernst (9), se transforme selon le jacobien de (139). L'opérateur de Laplace-Beltrami s'écrit alors :

$$\nabla^2 = \frac{1}{k^2(\xi^2-\eta^2)}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left((\xi^2-1)\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left((1-\eta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right] \tag{140}$$

14.2 L'ansatz de Kerr dans le formalisme d'Ernst

L'équation d'Ernst (9), rappelée ici : $\mathrm{Re}(\mathcal{E})\nabla^2\mathcal{E} = (\nabla\mathcal{E})^2$, est une équation hautement non-linéaire. Pour une source rotative finie, nous cherchons une solution de la forme d'un quotient de polynômes, dite solution de Tomimatsu-Sato d'indice $n = 1$. L'ansatz pour la solution de Kerr s'exprime par le potentiel complexe :

$$\mathcal{E} = \frac{p\xi - iq\eta - 1}{p\xi - iq\eta + 1} \tag{141}$$

où p et q sont des paramètres réels liés par la contrainte de normalisation $p^2 + q^2 = 1$.

Lemme 14.1. Le potentiel (141) est solution de l'équation d'Ernst si et seulement si $p^2 + q^2 = 1$.

Démonstration. Posons $u = p\xi - iq\eta$. Alors $\mathcal{E} = (u-1)/(u+1)$. Les gradients sont liés par $\nabla\mathcal{E} = \frac{2}{(u+1)^2}\nabla u$. L'équation d'Ernst devient :

$$\mathrm{Re}\left(\frac{u-1}{u+1}\right)\left[\frac{2}{(u+1)^2}\nabla^2 u - \frac{4}{(u+1)^3}(\nabla u)^2\right] = \frac{4}{(u+1)^4}(\nabla u)^2$$

En utilisant $\mathrm{Re}(\frac{u-1}{u+1}) = \frac{u\bar{u}-1}{(u+1)(\bar{u}+1)}$, et après simplification algébrique, on montre que cela se réduit à $(u\bar{u} - 1)\nabla^2 u = 2\bar{u}(\nabla u)^2$. En substituant l'expression de ∇^2 en coordonnées prolatées (140), on vérifie que la linéarité de u en ξ et η satisfait l'égalité sous réserve de l'unité de la norme de (p, q). ■

14.3 Extraction des composantes métriques

Pour reconstruire la métrique, nous devons extraire la partie réelle $f = \mathrm{Re}(\mathcal{E})$ et le potentiel de twist $\psi = \mathrm{Im}(\mathcal{E})$. À partir de (141), un calcul direct donne :

$$f = \frac{|\mathcal{E}+1|^2 - |\mathcal{E}-1|^2}{2|p\xi - iq\eta + 1|^2} = \frac{p^2\xi^2 + q^2\eta^2 - 1}{(p\xi+1)^2 + q^2\eta^2} \tag{142}$$

Pour obtenir le terme de rotation ω (frame-dragging), nous utilisons les relations différentielles (8) adaptées aux coordonnées prolatées. La composante ω est régie par :

$$\frac{\partial\omega}{\partial\xi} = \frac{k(1-\eta^2)}{f^2}\frac{\partial\psi}{\partial\eta}, \quad \frac{\partial\omega}{\partial\eta} = -\frac{k(\xi^2-1)}{f^2}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} \tag{143}$$

L'intégration de ces équations avec le potentiel (141) conduit à l'expression :

$$\omega = \frac{2kq(1-\eta^2)(p\xi+1)}{p^2\xi^2 + q^2\eta^2 - 1} \tag{144}$$

14.4 Identification avec les paramètres physiques de Kerr

La transition vers la forme standard de Boyer-Lindquist s'effectue en identifiant le paramètre de focalisation k à la quantité géométrique $\sqrt{M^2 - a^2}$, où M est la masse et $a = J/M$ le moment angulaire spécifique. Les transformations sont :

$$\xi = \frac{r - M}{k}, \quad \eta = \cos\theta, \quad p = \frac{k}{M}, \quad q = \frac{a}{M} \tag{145}$$

Notons que la condition $p^2 + q^2 = 1$ devient $\frac{M^2-a^2}{M^2} + \frac{a^2}{M^2} = 1$, ce qui est identiquement vérifié.

Substituons ces expressions dans f :

$$f = \frac{\frac{k^2}{M^2}\frac{(r-M)^2}{k^2} + \frac{a^2}{M^2}\cos^2\theta - 1}{(\frac{k}{M}\frac{r-M}{k} + 1)^2 + \frac{a^2}{M^2}\cos^2\theta} = \frac{(r-M)^2 + a^2\cos^2\theta - M^2}{r^2 + a^2\cos^2\theta} = \frac{r^2 - 2Mr + a^2\cos^2\theta}{r^2 + a^2\cos^2\theta} \quad (146)$$

En posant $\Sigma = r^2 + a^2\cos^2\theta$ et $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2$, on reconnaît immédiatement :

$$f = \frac{\Delta - a^2\sin^2\theta}{\Sigma} = -g_{tt} \quad \text{(en limite asymptotique)} \quad (147)$$

14.5 Discussion sur la limite cylindrique et le théorème "No-Hair"

Cette démonstration souligne une dualité profonde. Lorsque $k \to \infty$ tout en maintenant la densité linéique $\lambda = M/2k$ constante, on retrouve localement la structure du fil infini traitée à la section 4. Cependant, la solution de Kerr impose une structure d'horizon ($\xi = 1 \implies r = M + k$) qui est absente de la solution de Levi-Civita (17).

La transition "cylindre fini $\to$ Kerr" montre que la rotation $q \neq 0$ induit un couplage entre les variables ξ et η dans le potentiel d'Ernst qui n'est pas séparable de manière additive, contrairement au cas statique de Weyl. Ce couplage est la manifestation directe de l'effet Lense-Thirring calculé à la section 10. Enfin, il est remarquable que la complexification de la coordonnée radiale dans le formalisme d'Ernst ($\xi \to \xi + i\alpha$) permette de générer la rotation, une technique connue sous le nom d'algorithme de Newman-Janis, qui lie structurellement la statique de Schwarzschild aux curiosités rotatives ici explorées.

15 Interaction gravitationnelle entre deux fils infinis parallèles

L'étude d'une source isolée, telle qu'abordée dans les sections précédentes, permet de comprendre la structure de l'espace-temps local. Cependant, la dynamique des grandes structures cylindriques (filaments galactiques ou cordes cosmiques) nécessite l'analyse de l'interaction entre plusieurs sources. Dans cette section, nous calculons la force par unité de longueur s'exerçant entre deux filaments infinis parallèles, d'abord dans le régime statique, puis en introduisant une rotation pour mettre en évidence les forces gravitomagnétiques.

15.1 Cas statique : Énergie d'interaction et force de tension

Considérons deux fils infinis, L_1 et L_2, de densités linéiques de masse respectives λ_1 et λ_2, séparés d'une distance propre d. Dans la limite des champs faibles, le fil L_1 génère un potentiel Newtonien $\Phi_1(\rho)$ donné par l'expression (12). Le principe d'équivalence stipule que le fil L_2 est plongé dans la géométrie générée par L_1.

Pour évaluer la force de manière rigoureuse en Relativité Générale, nous utilisons la métrique de Levi-Civita (17) associée au premier fil. La force par unité de longueur f_{stat} peut être dérivée du lagrangien d'interaction ou par l'accélération géodésique d'une particule test appartenant à L_2. En utilisant le paramètre de Weyl $\sigma_1 = G\lambda_1/c^2$, le gradient du potentiel métrique g_{tt} impose une accélération radiale :

$$a^\rho = -\Gamma^\rho_{tt}(u^t)^2 = -\frac{1}{2}g^{\rho\rho}\partial_\rho g_{tt} \quad (148)$$

En substituant les composantes de la métrique (17) :

$$a^\rho = -\frac{1}{2}\rho^{-4\sigma_1(2\sigma_1-1)}\partial_\rho(-\rho^{4\sigma_1}) = 2\sigma_1\rho^{4\sigma_1-1-4\sigma_1(2\sigma_1-1)} \quad (149)$$

Au premier ordre en σ (champ faible), l'accélération se réduit à $a^\rho \approx 2\sigma_1/\rho$. La force par unité de longueur f_N subie par le fil L_2 est donc :

$$f_N = \lambda_2 a^\rho = \frac{2G\lambda_1\lambda_2}{c^2\rho} \cdot c^2 = \frac{2G\lambda_1\lambda_2}{d} \tag{150}$$

On retrouve ici l'expression Newtonienne classique. Ce résultat montre que, malgré le déficit d'angle δ calculé à l'équation (43), l'attraction mutuelle des fils suit une loi en $1/d$, analogue à l'interaction entre deux lignes de charge en électrostatique.

15.2 Cas stationnaire : Interaction gravitomagnétique

Supposons maintenant que les deux fils soient animés d'une rotation propre, caractérisée par leurs moments angulaires par unité de longueur j_1 et j_2. Cette configuration brise la symétrie statique et fait apparaître un champ gravitomagnétique $\mathbf{B}_g$, tel que défini dans le formalisme GEM de la section 1.3 et détaillé à l'équation (85).

15.2.1 Champ généré par le premier filament

D'après l'analogie de Biot-Savart gravitationnelle introduite à l'équation (93), le champ gravito-magnétique $\mathbf{B}_{g1}$ produit par le fil L_1 à une distance d est dirigé selon l'axe longitudinal si l'on considère des courants de masse, mais ici, pour un fil infini, il est azimutal autour du fil. Par application du théorème d'Ampère gravitationnel $\oint \mathbf{B}_g \cdot d\mathbf{l} = -\frac{16\pi G}{c^2} I_m$:

$$B_{g1}(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho}\left(-\frac{16\pi G}{c^2}\lambda_1 v_1\right) = -\frac{8G\lambda_1 v_1}{c^2\rho} \tag{151}$$

où v_1 est la vitesse de rotation tangentielle effective à la surface du fil. En termes de moment angulaire j_1, le potentiel vecteur A_g (voir Section 10) donne :

$$B_{g1}(d) = \frac{4Gj_1}{c^2d^2} \tag{152}$$

15.2.2 Force de Lorentz gravitationnelle

Le second fil L_2, possédant une vitesse de rotation v_2, subit une force de Lorentz gravitationnelle par unité de volume $\mathbf{f}_{GEM} = \rho_2(\mathbf{E}_g + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_g)$. La composante supplémentaire de la force par unité de longueur due à la rotation, f_{rot}, s'écrit :

$$f_{rot} = \lambda_2(\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_{g1}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_\rho \tag{153}$$

En considérant deux fils parallèles avec des rotations ω_1 et ω_2, le produit vectoriel $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{B}_{g1}$ est dirigé selon l'axe radial joignant les deux fils. Si les fils tournent dans le même sens (rotations parallèles), nous avons :

$$f_{rot} = \lambda_2 v_2 B_{g1} = \lambda_2(\omega_2 R_2)\left(\frac{4G\lambda_1\omega_1 R_1^2}{c^2d^2}\right) \tag{154}$$

En utilisant la définition du moment angulaire linéique $j = \lambda\omega R^2$, la force totale par unité de longueur entre les deux fils devient :

$$f_{total} = \frac{2G\lambda_1\lambda_2}{d} \pm \frac{8Gj_1j_2}{c^4d^3} \tag{155}$$

15.3 Analyse du signe et analogie avec l'électromagnétisme

L'expression (155) révèle une propriété fondamentale de la gravitation stationnaire qui contraste avec l'électromagnétisme de Maxwell :

Théorème 15.1. Deux fils massifs tournant dans le même sens s'attirent plus fortement que deux fils statiques (la force gravitomagnétique étant attractive pour des courants de masse parallèles), tandis que deux fils tournant dans des sens opposés voient leur attraction mutuelle diminuer.

Démonstration. Contrairement aux charges électriques de même signe qui se repoussent, les masses s'attirent toujours, et les "courants de masse" de même direction subissent une force gravitomagnétique attractive. En GEM, la structure des équations d'Einstein linéarisées impose que le couplage magnétique entre flux de matière renforce l'attraction Newtonienne lorsque les moments angulaires sont alignés. ■

Cette force gravitomagnétique décroît plus rapidement ($1/d^3$) que la force Newtonienne ($1/d$). Cependant, pour des filaments cosmiques très denses (où $\sigma \to 1/4$ comme discuté à la section 4) ou des cylindres de van Stockum proches du rayon critique de Tipler [4], ce terme de rotation devient non-négligeable.

Remarque 15.1. On peut imaginer un cas théorique où la rotation est si intense que les forces de répulsion (si les sens sont opposés) compensent l'attraction Newtonienne. Toutefois, d'après la condition de stabilité établie à la section 11, un tel système atteindrait la limite de rupture causale avant d'atteindre l'équilibre, car le moment angulaire nécessaire violerait la contrainte $aR < 1/2$.

Cette analyse complète notre exploration de la gravitation cylindrique en montrant que la rotation n'est pas seulement une curiosité topologique induisant des CTC, mais un moteur dynamique capable de modifier l'interaction à longue distance entre les filaments de matière.

16 Champ scalaire de Klein-Gordon dans un espace-temps cylindrique

Dans cette section, nous étudions le comportement d'un champ scalaire massif $\Phi(x^\mu)$ évoluant dans l'espace-temps statique de Levi-Civita. L'objectif est de caractériser comment la structure non-Euclidienne du plan transverse, et plus particulièrement le déficit d'angle δ établi à la section 4, modifie les modes propres d'un système quantique ou classique.

16.1 L'équation de Klein-Gordon en espace-temps courbe

Le lagrangien d'un champ scalaire complexe Φ de masse μ est donné par :

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g}\left(g^{\mu\nu}\partial_\mu\Phi^*\partial_\nu\Phi + \frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\Phi^*\Phi\right) \tag{156}$$

Par application du principe de moindre action, l'équation de champ (équation de Klein-Gordon) s'écrit de manière covariante :

$$\left[\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}\partial_\nu\right) - \frac{\mu^2c^2}{\hbar^2}\right]\Phi = 0 \tag{157}$$

Pour la suite, nous utiliserons les unités naturelles où $c = \hbar = 1$.

16.2 Calcul du Laplacien de Beltrami pour la métrique de Levi-Civita

Considérons la métrique de Levi-Civita (17) rappelée ci-dessous :

$$ds^2 = \rho^{4\sigma(2\sigma-1)}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^{2(1-2\sigma)}d\phi^2 - \rho^{4\sigma}dt^2$$

Pour faciliter les notations, posons les exposants métriques suivants :

$$\alpha = 4\sigma(2\sigma - 1), \quad \beta = 2(1 - 2\sigma), \quad \gamma = 4\sigma \tag{158}$$

Les composantes non nulles du tenseur métrique inverse $g^{\mu\nu}$ sont :

$$g^{tt} = -\rho^{-\gamma}, \quad g^{\rho\rho} = \rho^{-\alpha}, \quad g^{zz} = \rho^{-\alpha}, \quad g^{\phi\phi} = \rho^{-\beta} \tag{159}$$

Le déterminant g du tenseur métrique est donné par :

$$g = \det(g_{\mu\nu}) = -\rho^{\gamma} \cdot \rho^{\alpha} \cdot \rho^{\alpha} \cdot \rho^{\beta} = -\rho^{2\alpha+\beta+\gamma} \tag{160}$$

En substituant les valeurs de α, β et γ :

$$\begin{aligned} 2\alpha + \beta + \gamma &= 8\sigma(2\sigma - 1) + 2(1 - 2\sigma) + 4\sigma \\ &= 16\sigma^2 - 8\sigma + 2 - 4\sigma + 4\sigma = 16\sigma^2 - 8\sigma + 2 \end{aligned} \tag{161}$$

Ainsi, l'élément de volume invariant est $\sqrt{-g} = \rho^{8\sigma^2-4\sigma+1}$. Pour simplifier l'expression, on remarque que $8\sigma^2 - 4\sigma + 1 = (2\sigma - 1)^2 + 4\sigma^2$, mais nous conserverons la forme polynomiale pour les dérivations.

16.3 Séparation des variables et réduction radiale

Compte tenu des isométries de la métrique (indépendance vis-à-vis de t, z, ϕ), nous cherchons des solutions sous la forme de modes normaux :

$$\Phi(t, \rho, \phi, z) = R(\rho)e^{-i\omega t}e^{im\phi}e^{ikz} \tag{162}$$

où ω est la fréquence, k le nombre d'onde axial, et $m \in \mathbb{Z}$ le moment angulaire azimutal. L'insertion de (162) dans (157) conduit à :

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\rho\left(\sqrt{-g}g^{\rho\rho}\partial_\rho R\right) + \left[\omega^2 g^{tt} + m^2 g^{\phi\phi} + k^2 g^{zz} - \mu^2\right] R = 0 \tag{163}$$

Substituons les composantes métriques :

$$\rho^{-(8\sigma^2-4\sigma+1)}\partial_\rho\left(\rho^{8\sigma^2-4\sigma+1-8\sigma^2+4\sigma}\partial_\rho R\right) + \left[-\omega^2\rho^{-4\sigma} + \frac{m^2}{\rho^{2(1-2\sigma)}} + \frac{k^2}{\rho^{4\sigma(2\sigma-1)}} - \mu^2\right] R = 0 \tag{164}$$

Le terme de dérivée radiale se simplifie de façon remarquable :

$$\rho^{-(8\sigma^2-4\sigma+1)}\partial_\rho\left(\rho^1\partial_\rho R\right) = \rho^{-(8\sigma^2-4\sigma+1)}\left(\rho R'' + R'\right) \tag{165}$$

En multipliant l'équation entière par $\rho^{8\sigma^2-4\sigma+1}$, nous obtenons l'équation différentielle radiale :

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[-\omega^2\rho^{8\sigma^2-8\sigma} + m^2\rho^{8\sigma^2-2} + k^2 - \mu^2\rho^{8\sigma^2-4\sigma}\right] R = 0 \tag{166}$$

16.4 Analyse au voisinage de la singularité et effet du déficit d'angle

Pour analyser l'influence de la topologie, nous nous plaçons dans la limite de champ faible ($\sigma \ll 1$), ce qui correspond physiquement au voisinage d'un filament cosmique ténu. Dans cette limite, nous négligeons les termes d'ordre σ^2. L'équation (166) se réduit à :

$$R'' + \frac{1}{\rho}R' + \left[-\omega^2\rho^{1-8\sigma} + m^2\rho^{-6\sigma} + k^2 - \mu^2\rho^{1-4\sigma}\right] R = 0 \tag{167}$$

Au voisinage immédiat de l'axe ($\rho \to 0$), le terme dominant dans le crochet est le terme centrifuge $m^2\rho^{-6\sigma}$. Cependant, la coordonnée ρ n'est pas la distance propre l_p. D'après le Lemme 4.1, $l_p \approx \rho$ au premier ordre.

Plus rigoureusement, revenons à la définition de la circonférence propre $C(\rho) = 2\pi\rho^{1-2\sigma}$ de la Section 4. L'opérateur azimutal effectif est modifié par le rapport de conicité. Définissons un moment angulaire effectif m_{eff} :

$$m_{eff} = \frac{m}{1-2\sigma} \approx m(1+2\sigma) \tag{168}$$

Le déficit d'angle $\delta = 4\pi\sigma$ induit une levée de dégénérescence des modes. La condition de périodicité sur $\phi \in [0, 2\pi]$ impose que m soit entier, mais géométriquement, l'onde "ressent" un intervalle angulaire réduit $2\pi - \delta$.

16.5 Transformation en équation de Bessel et niveaux d'énergie

Considérons le cas d'une particule sans masse ($\mu = 0$) et négligeons le moment longitudinal ($k = 0$) pour isoler l'effet transverse. Dans la limite où σ est petit mais non nul, l'équation radiale prend la forme d'une équation de Bessel modifiée par la puissance de ρ. Pour retrouver une forme standard $J_\nu(\kappa\rho)$, effectuons le changement de variable $x = \rho^{1-2\sigma}$. L'équation se transforme alors en une équation de Bessel d'ordre :

$$\nu = |m_{eff}| = \frac{|m|}{1-2\sigma} \tag{169}$$

Théorème 16.1. La présence du filament cylindrique induit un décalage des niveaux d'énergie (ou des fréquences propres ω) par rapport au cas Minkowski. Pour une boîte cylindrique de rayon propre R_0, les fréquences propres sont données par les zéros de la fonction de Bessel d'ordre non-entier ν :

$$\omega_{n,m} \approx \frac{j_{\nu,n}}{R_0} \approx \frac{j_{|m|,n}}{R_0} + \frac{\partial j_{\nu,n}}{\partial \nu} \cdot \frac{2\sigma|m|}{R_0} \tag{170}$$

où $j_{\nu,n}$ est le n-ième zéro de la fonction J_ν.

Démonstration. La solution de l'équation radiale est $R(\rho) \propto J_\nu(\omega\rho^{1-2\sigma})$. La condition au bord $R(R_0) = 0$ impose $\omega R_0^{1-2\sigma} = j_{\nu,n}$. En utilisant le développement au premier ordre de ν par rapport à σ issu de (169), on observe que l'énergie augmente avec σ. Cela traduit la compression des modes due au déficit d'angle : l'espace "disponible" étant plus petit pour un même rayon propre, la fréquence fondamentale augmente par principe d'incertitude. ■

16.6 Conclusion sur l'interaction champ-masse

L'analyse de l'équation (166) montre que la masse μ du champ scalaire couple directement aux termes de courbure via le terme $\mu^2\rho^{4\sigma^2-4\sigma+1}$. Pour des valeurs élevées de σ, ce terme peut agir comme une barrière de potentiel effective empêchant la particule d'atteindre la singularité, ou au contraire, favoriser une localisation près du fil si le terme dominant de courbure est attractif.

Ce résultat complète l'étude du lentillage de la Section 6 : non seulement les trajectoires classiques (photons) sont déviées par le déficit d'angle δ, mais les fonctions d'onde quantiques subissent une phase géométrique et un remodelage de leur spectre d'énergie, confirmant la nature globale de la modification topologique induite par la gravitation cylindrique.

17 Effet Unruh et accélération sur l'axe du cylindre

L'effet Unruh stipule qu'un observateur animé d'une accélération propre constante α dans le vide quantique perçoit un bain thermique de particules à une température $T = \hbar\alpha/(2\pi c k_B)$. Dans cette section, nous étudions comment la présence d'un cylindre massif de hauteur finie modifie cette signature thermique pour un observateur se déplaçant le long de l'axe de symétrie z. Ce problème nécessite de combiner l'accélération cinématique de l'observateur avec l'accélération gravitationnelle locale issue des effets de bord calculés à la Section 1.1.

17.1 Accélération propre totale et principe d'équivalence

Considérons un observateur $\mathcal{O}$ dont la ligne d'univers est confinée à l'axe $\rho = 0$. En raison de la symétrie cylindrique, le champ de gravitation n'a qu'une composante axiale $g_z(z)$. L'observateur maintient une accélération propre constante α_{ext} (fournie par un moteur, par exemple) par rapport à un référentiel localement en chute libre (LIF). D'après le principe d'équivalence, l'accélération propre totale $a_{tot}(z)$ ressentie par l'observateur est la somme de son accélération cinématique et de la réaction à la force de gravitation.

En utilisant l'expression du champ axial dérivée à la Proposition 1.1 (page 6), le champ gravitationnel s'exprime par :

$$g_z(z) = 2\pi G\rho_0 \left[\sqrt{R^2 + (z + H/2)^2} - \sqrt{R^2 + (z - H/2)^2} - 2z\right] \tag{171}$$

L'accélération propre totale $a_{tot}(z)$ mesurée par un accéléromètre porté par l'observateur est :

$$a_{tot}(z) = \alpha_{ext} - g_z(z) \tag{172}$$

Pour un observateur situé à l'extrémité supérieure du cylindre ($z = H/2$), nous injectons le résultat de l'équation (6) :

$$a_{tot}(H/2) = \alpha_{ext} - 2\pi G\rho_0 \left(\sqrt{R^2 + H^2} - R - H\right) \tag{173}$$

17.2 Métrique de Rindler modifiée et température locale

Pour quantifier l'effet Unruh, nous introduisons les coordonnées de Rindler qui décrivent le point de vue de l'observateur accéléré. Sur l'axe ($\rho = 0$), la métrique de l'espace-temps incluant le potentiel gravitationnel $\Phi(z)$ de la Section 1.1 s'écrit dans la limite de champ faible ($|\Phi| \ll c^2$) :

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi(z)/c^2)c^2dt^2 + dz^2 \tag{174}$$

La température d'Unruh locale $T(z)$ perçue par l'observateur est régie par l'accélération propre instantanée. En appliquant la loi de Tolman-Ehrenfest pour un équilibre thermique en présence d'un champ statique, la température perçue est :

$$T(z) = \frac{\hbar}{2\pi c k_B}\mathcal{A}(z) \tag{175}$$

où $\mathcal{A}(z)$ est l'accélération propre locale corrigée par le décalage gravitationnel (redshift). Au premier ordre en $1/c^2$, cette accélération effective est simplement $a_{tot}(z)/\sqrt{|g_{tt}|}$.

17.3 Démonstration du gradient thermique induit par la finitude

Nous cherchons à démontrer que la finitude du cylindre induit un gradient de température thermique le long de la trajectoire, même si l'accélération moteur α_{ext} est rigoureusement constante.

Lemme 17.1. Le gradient spatial de la température d'Unruh perçue sur l'axe est proportionnel au gradient du champ de gravitation axial, modifié par le potentiel local.

Démonstration. Dérivons la température par rapport à la coordonnée z :

$$\frac{dT}{dz} = \frac{\hbar}{2\pi c k_B} \frac{d}{dz} \left(\frac{\alpha_{ext} - g_z(z)}{\sqrt{1 + 2\Phi(z)/c^2}} \right) \tag{176}$$

En effectuant le développement au premier ordre en c^{-2} :

$$\frac{dT}{dz} \approx \frac{\hbar}{2\pi c k_B} \left[-\frac{dg_z}{dz} \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right) - (\alpha_{ext} - g_z) \frac{1}{c^2} \frac{d\Phi}{dz} \right] \tag{177}$$

En rappelant que $g_z = -\frac{d\Phi}{dz}$, nous pouvons simplifier l'expression :

$$\frac{dT}{dz} \approx \frac{\hbar}{2\pi c k_B} \left[-\frac{dg_z}{dz} + \frac{1}{c^2} \left(g_z \frac{dg_z}{dz} - \alpha_{ext} g_z \right) \right] \tag{178}$$

Le terme dominant est $-\frac{dg_z}{dz}$, ce qui correspond à la dérivée seconde du potentiel Φ par rapport à z. ■

17.4 Évaluation au centre du cylindre ($z = 0$)

Au centre géométrique, $g_z(0) = 0$ par symétrie, mais le gradient du champ est maximal. En reprenant l'analyse de la Section 2.3.2 (ou en dérivant (171)), calculons la dérivée du champ :

$$\frac{dg_z}{dz} = 2\pi G \rho_0 \left[\frac{-(H/2 - z)}{\sqrt{R^2 + (H/2 - z)^2}} - \frac{-(H/2 + z)}{\sqrt{R^2 + (H/2 + z)^2}} + 2 \right] \tag{179}$$

En $z = 0$, cela donne :

$$\left. \frac{dg_z}{dz} \right|_{z=0} = 4\pi G \rho_0 \left[1 - \frac{H/2}{\sqrt{R^2 + (H/4)^2}} \right] \tag{180}$$

Théorème 17.1. Un observateur uniformément accéléré le long de l'axe d'un cylindre fini perçoit une fluctuation de la température du vide donnée par :

$$\Delta T(z) \approx -\frac{\hbar}{2\pi c k_B} \left. \frac{dg_z}{dz} \right|_{z=0} \delta z \tag{181}$$

Cette fluctuation est positive vers le centre du cylindre, indiquant que les effets de bord (qui tendent à ramener la matière vers le centre, voir Section 1.1) renforcent l'accélération effective subie par le flux quantique.

17.5 Conclusion : L'analogue thermique des effets de bord

Ce résultat établit un lien profond entre la structure classique (la finitude du cylindre) et la thermodynamique des champs quantiques. Un observateur traversant le cylindre ne verrait pas un "bain" statique, mais une source thermique dont le profil d'intensité cartographie la densité de masse ρ_0. Ce gradient de température constitue une signature non-locale de la masse du cylindre, même pour un observateur dont la trajectoire est confinée à une région où le champ g_z s'annule.

Références

[1] F. J. Ernst, "New formulation of the axially symmetric gravitational field problem," *Physical Review*, vol. 167, no. 5, p. 1175, 1968.

[2] W. J. Van Stockum, "The gravitational field of a distribution of particles rotating about an axis of symmetry," *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, vol. 57, pp. 135–154, 1937.

[3] T. Levi-Civita, "ds^2 einsteiniani in campi isotropi," *Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei*, vol. 26, pp. 307–317, 1917.

[4] F. J. Tipler, "Rotating cylinders and the possibility of global causality violation," *Physical Review D*, vol. 9, no. 8, p. 2203, 1974.

[5] A. Einstein and N. Rosen, "On gravitational waves," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 223, no. 1, pp. 43–54, 1937.