Dynamique des Systèmes de Particules en Milieu Confiné

Du cas unidimensionnel à la diffusion dans un carré

Colin BOSSU RÉAUBOURG

15 janvier 2026

Table des matières

1 Introduction : Le Cas Unidimensionnel **2**
1.1 Énoncé du problème 1D 2
1.2 Résolution par symétrie d'échange 2

2 Le Problème 2D : Fourmis sur un Carré **3**
2.1 Énoncé Général 3

3 Analyse par Physique Statistique **3**
3.1 Libre Parcours Moyen et Régime Diffusif 3
3.2 Temps Moyen de Sortie 4
3.3 Statistiques des Extrêmes 4

4 Résultat Final et Discussion **5**
4.1 Comparaison 1D vs 2D 5
4.2 Limites du modèle 5

1 Introduction : Le Cas Unidimensionnel

L'étude des systèmes de particules en interaction dans des domaines bornés est un classique de la physique statistique. Avant d'aborder la complexité du mouvement en deux dimensions, il est instructif d'analyser le problème célèbre des fourmis sur une règle, qui met en lumière l'importance des invariants du mouvement.

1.1 Énoncé du problème 1D

Considérons une règle étroite de longueur $L = 1$ mètre. On y place $n = 15$ fourmis : une à chaque extrémité, et les 13 autres réparties arbitrairement entre les deux bornes.

- Chaque fourmi se déplace à une vitesse constante $v = 1$ m/s.
- **Interaction :** Lorsque deux fourmis se rencontrent, elles ne peuvent se croiser ; elles subissent une collision parfaitement élastique et font immédiatement demi-tour.
- **Condition aux bords :** Lorsqu'une fourmi atteint une extrémité de la règle, elle "tombe" et quitte le système.

La question posée est la suivante : *Quel est le temps maximal $T_{\max}$ pouvant s'écouler avant que la dernière fourmi ne tombe ?*

1.2 Résolution par symétrie d'échange

L'analyse directe de ce système semble complexe car chaque collision modifie les trajectoires de deux particules. Cependant, une astuce de raisonnement permet de trivialiser le problème.

Propriété 1.1 (Principe de transparence)**.** Dans un système 1D de particules identiques subissant des collisions élastiques, la trajectoire de l'ensemble des particules est indiscernable de celle d'un système de particules "fantômes" qui se traverseraient sans interaction.

Démonstration. Considérons deux fourmis A et B identiques se dirigeant l'une vers l'autre.

- **Scénario réel :** Elles se heurtent et rebondissent. A repart vers la gauche, B vers la droite.
- **Scénario fictif :** Elles se traversent. A continue vers la droite, B continue vers la gauche.

Puisque les fourmis sont identiques (même masse, même aspect, même vitesse $|v|$), l'état du système après l'instant de collision est identique dans les deux scénarios. On peut donc imaginer que les fourmis "échangent leur identité" lors du choc. ∎

Dans le modèle équivalent sans collision, chaque fourmi parcourt une ligne droite jusqu'à une extrémité. La fourmi qui reste le plus longtemps sur la règle est celle qui doit parcourir la plus grande distance possible sans sortir.

La distance maximale possible sur une règle de longueur L est L (par exemple, une fourmi placée en $x = \epsilon$ se dirigeant vers L). Le temps maximal est donc :

$$T_{\max}^{1D} = \frac{L}{v} = \frac{1\,\mathrm{m}}{1\,\mathrm{m/s}} = 1\,\mathrm{s}. \tag{1}$$

Ce résultat, bien que simple, repose fondamentalement sur la dimensionnalité du problème : en 1D, une collision ne change que le sens du vecteur vitesse, pas sa direction. En 2D, cette propriété disparaît, changeant radicalement la nature du problème.

2 Le Problème 2D : Fourmis sur un Carré

Nous étendons maintenant le problème à deux dimensions. La complexité augmente drastiquement car les collisions peuvent dévier les particules selon un angle quelconque, permettant potentiellement un confinement par chocs successifs.

2.1 Énoncé Général

Considérons un carré $\mathcal{D} = [0, L] \times [0, L]$. On y place n fourmis, modélisées comme des disques rigides de rayon a.

Définition 2.1 (Règles du système)**.** *Les règles dynamiques sont les suivantes :*

1. ***Mouvement libre :*** *Entre les chocs, chaque fourmi suit un mouvement rectiligne uniforme à vitesse v.*
2. ***Collisions :*** *Le contact se produit à une distance $2a$. La collision est élastique (sphères dures), conservant l'énergie cinétique et l'impulsion.*
3. ***Bords absorbants :*** *Si le centre d'une fourmi atteint le bord du carré, elle est retirée du système.*

Nous cherchons à estimer le temps maximal de vidange du système $T_{\max}$ dans la limite thermodynamique où n est grand.

3 Analyse par Physique Statistique

Contrairement au cas 1D, le système 2D est chaotique. L'astuce de l'échange d'identité ne fonctionne plus car les trajectoires ne sont pas rectilignes. Nous adoptons une approche probabiliste basée sur la théorie cinétique des gaz [1].

3.1 Libre Parcours Moyen et Régime Diffusif

Supposons une distribution spatiale initialement uniforme des fourmis. La densité surfacique est donnée par :

$$\rho = \frac{n}{L^2} \tag{2}$$

Nous devons déterminer le libre parcours moyen ℓ, c'est-à-dire la distance moyenne parcourue par une fourmi entre deux collisions.

Lemme 3.1 (Libre parcours moyen en 2D)**.** Pour un gaz de disques durs de rayon a et de densité ρ, le libre parcours moyen est :

$$\ell = \frac{1}{\sqrt{2}\rho\sigma} \tag{3}$$

où σ est la section efficace de collision (largeur d'interaction).

Démonstration. Une fourmi balaye une surface d'interaction de largeur $2a$ (son diamètre). La section efficace est donc $\sigma = 2a$. Le facteur $\sqrt{2}$ provient de la distribution des vitesses relatives. Si toutes les particules ont une vitesse v, la vitesse relative moyenne est $\langle|\vec{v}_1 - \vec{v}_2|\rangle$. Pour des vecteurs vitesses décorrélés uniformément distribués en angle :

$$\langle v_{\text{rel}}^2\rangle = \langle v_1^2 + v_2^2 - 2\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2\rangle = 2v^2 \implies v_{\text{rel}} \approx \sqrt{2}v \tag{4}$$

La fréquence de collision est $\nu = \rho\sigma v_{\text{rel}} \approx \rho(2a)\sqrt{2}v$. Le libre parcours moyen est alors $\ell = v/\nu$. ∎

En substituant les termes :

$$\ell = \frac{L^2}{2\sqrt{2}\, n\, a} \tag{5}$$

Lorsque $\ell \ll L$ (régime dense ou grand n), la trajectoire d'une fourmi devient une marche aléatoire. Le système entre dans un régime diffusif caractérisé par le coefficient de diffusion D. En dimension $d = 2$:

$$D = \frac{v\ell}{d} = \frac{v\ell}{2} = \frac{vL^2}{4\sqrt{2}\, n\, a} \tag{6}$$

3.2 Temps Moyen de Sortie

Le problème de la durée de vie d'une fourmi dans le carré se ramène à un problème de "First Passage Time" (premier temps de sortie) pour un processus de diffusion avec conditions de Dirichlet nulles aux bords (absorption).

Soit $P(x, y, t)$ la probabilité de présence. Elle obéit à l'équation de la chaleur :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\nabla^2 P \tag{7}$$

Pour des temps longs, la solution est dominée par le mode propre fondamental du Laplacien sur le carré $[0, L]^2$. Les fonctions propres sont de la forme $\sin(k_x x)\sin(k_y y)$ avec $k_{x,y} = m\pi/L$. Le mode le plus lent correspond à $m = 1$, donnant la valeur propre :

$$\lambda_1 = D\left[\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{L}\right)^2\right] = \frac{2\pi^2 D}{L^2} \tag{8}$$

Le temps caractéristique de décroissance (ou temps moyen de résidence $\langle T\rangle$) est l'inverse de cette valeur propre [2] :

$$\langle T\rangle \approx \frac{1}{\lambda_1} = \frac{L^2}{2\pi^2 D} \tag{9}$$

En utilisant l'expression du coefficient de diffusion (6) :

$$\langle T\rangle \approx \frac{L^2}{2\pi^2} \cdot \frac{4\sqrt{2}\, n\, a}{vL^2} = \frac{2\sqrt{2}\, n\, a}{\pi^2 v} \tag{10}$$

Remarque 3.1. On constate que le temps moyen croît linéairement avec le nombre de fourmis n. Plus il y a de fourmis, plus le coefficient de diffusion est faible (encombrement), et plus elles mettent de temps à atteindre les bords.

3.3 Statistiques des Extrêmes

Nous cherchons $T_{\max}$, le temps de sortie de la *dernière* fourmi. Si nous supposons que, grâce au chaos moléculaire, les temps de sortie des n fourmis $T_1, \ldots, T_n$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), nous pouvons appliquer la théorie des valeurs extrêmes [3].

La distribution des temps de sortie pour un processus diffusif est asymptotiquement exponentielle :

$$P(T > t) \sim e^{-t/\langle T\rangle} \tag{11}$$

Soit X_i des variables exponentielles de moyenne $\mu = \langle T\rangle$. L'espérance du maximum $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$ est donnée par :

$$\mathbb{E}[M_n] = \mu \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \mu H_n \tag{12}$$

où H_n est le n-ième nombre harmonique.

Pour n grand, nous utilisons le développement asymptotique :

$$H_n \approx \ln n + \gamma \tag{13}$$

où $\gamma \approx 0.577$ est la constante d'Euler-Mascheroni.

4 Résultat Final et Discussion

En combinant l'expression du temps moyen (10) et le facteur logarithmique issu des statistiques extrêmes, nous obtenons l'expression finale du temps maximal.

Théorème 4.1 (Temps de vidange maximal)**.** Dans la limite d'un grand nombre de fourmis n, le temps moyen pour que le système se vide entièrement est donné par :

$$T_{\max} \approx \frac{2\sqrt{2}\, n\, a}{\pi^2 v} (\ln n + \gamma) \tag{14}$$

Soit, en ne gardant que le terme dominant :

$$T_{\max} \sim \frac{2\sqrt{2}\, a}{\pi^2 v}\, n \ln n \tag{15}$$

4.1 Comparaison 1D vs 2D

Il est frappant de comparer ce résultat avec le cas de la règle 1D.

Paramètre	**Cas 1D (Règle)**	**Cas 2D (Carré)**
Mécanisme	Transport balistique	Transport diffusif
Dépendance en L	$\propto L$	Indépendant (si ρ fixe) ou implicite
Dépendance en n	Indépendant ($T = L/v$)	$\propto n \ln n$
Effet des collisions	Nul (transparence)	Confinement (marche au hasard)

Table 1 – Comparaison des dynamiques de vidange.

4.2 Limites du modèle

Notre dérivation repose sur plusieurs hypothèses fortes :

— **Chaos moléculaire :** Nous supposons que les vitesses restent décorrélées, ce qui est généralement vrai pour des sphères dures, mais des corrélations peuvent apparaître à très haute densité (cristallisation).

— **Indépendance :** L'hypothèse que les temps de sortie sont i.i.d est une approximation. En réalité, le départ d'une fourmi diminue la densité, augmentant le coefficient de diffusion pour les restantes. Le processus est donc auto-accéléré. Le calcul présenté ici fournit une borne supérieure basée sur la densité initiale.

— **Dilution :** Le calcul du libre parcours moyen suppose que le volume exclu total est faible devant L^2.

Ce résultat démontre comment l'augmentation de la dimensionnalité transforme un problème de transport simple en un processus diffusif complexe où les interactions inter-particulaires dictent l'échelle de temps macroscopique.

Références

[1] L. Landau and E. Lifshitz, *Physique Statistique*. Moscou : Éditions Mir, 1967.

[2] S. Redner, *A Guide to First-Passage Processes*. Cambridge University Press, 2001.

[3] E. J. Gumbel, *Statistics of Extremes*. Columbia University Press, 1958.