

Quelques formules mathématiques pour la physique

Colin Bossu Réaubourg

10 août 2025

Ce document rassemble des formules mathématiques utilisées en physique dans différents contextes analytiques. Les expressions sont présentées de manière concise, avec l'objectif de fournir une référence rapide et cohérente. L'accent est mis sur la précision relative des notations et la simplicité des résultats, sans développement théorique détaillé.

Table des matières

1	Systèmes de Coordonnées	4
1.1	Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N)	4
1.2	Cartésiennes (x, y, z)	6
1.3	Sphériques (r, θ, φ)	6
1.4	Cylindriques (ρ, φ, z)	7
1.5	Paraboliques (σ, τ, φ)	8
1.6	Ellipsoïdales (λ, μ, ν)	9
1.7	Barycentriques (u, v, w) pour un triangle $P_1P_2P_3$	11
1.8	Toroïdales (η, ξ, ϕ)	12
1.9	Coniques (λ, μ, ν)	14
2	Opérateurs différentiels en 3D	16
2.1	Gradient scalaire	16
2.2	Divergence vectorielle	17
2.3	Rotationnel vectoriel	18
2.4	Laplacien scalaire	20
2.5	Laplacien vectoriel	22
2.6	Hessien scalaire	23
2.7	Jacobien vectoriel	25
3	Identités différentielles	27
4	Règles de calcul tensoriel	28
4.1	Nature tensorielle de la Position, Vitesse et Accélération	33
4.2	Opérateurs différentiels en formalisme tensoriel	34
5	Théorèmes intégraux	36
5.1	Théorème de Schwarz (généralisation)	36
5.2	Théorème du gradient (fondamental du calcul)	36
5.3	Théorème de Green (dans le plan)	36
5.4	Théorème de Stokes (circulation — rotationnel)	37
5.5	Théorème de la divergence (Ostrogradski — Gauss)	37
5.6	Théorème de Green (première identité)	37
5.7	Théorème de Green (seconde identité)	37
5.8	Formule de Green — Ostrogradski pour le Laplacien (vecteur)	38
5.9	Identité intégrale de l'Hessien (par parties en 2D/3D)	38
5.10	Théorème intégral du Jacobien (formule de changement de variables)	38
5.11	Théorème de Helmholtz (décomposition intégrale)	39
6	Analyse Complexe	40
6.1	Fonctions Holomorphes	40
6.2	Intégrales de Contour et Théorème des Résidus	40

6.3	Séries de Laurent et Singularités	42
7	Calcul Variationnel	44
7.1	Équations d'Euler-Lagrange	44
7.2	Contraintes et Multiplicateurs de Lagrange	45
7.3	Principe de Moindre Action	46
8	Transformations Intégrales	48
8.1	Transformée de Fourier (continue et discrète)	48
8.2	Transformée de Laplace	49
8.3	Transformée d'Hankel	50
8.4	Transformée de Mellin	51
9	Distributions (Fonctions Généralisées)	52
9.1	Fonction de Dirac ($\delta(x)$)	52
9.2	Dérivée de Distributions	53
9.3	Convolution de Distributions	53
10	Séries et Fonctions Spéciales	55
10.1	Séries de Taylor et de Laurent	55
10.2	Séries de Fourier	56
10.3	Fonctions de Bessel (Cylindriques, Sphériques)	56
10.4	Polynômes de Legendre et Harmoniques Sphériques	58
10.5	Polynômes d'Hermite	59
10.6	Polynômes de Laguerre	59
10.7	Fonctions Gamma et Bêta	60
10.8	Polynômes de Tchebychev	61
11	Équations Intégrales	62
11.1	Équations de Fredholm	62
11.2	Équations de Volterra	62
12	Formalisme Quantique de Dirac	64
12.1	Concepts Fondamentaux	64
12.2	Représentations et Probabilités	65
12.3	Opérateurs en Mécanique Quantique	65
12.4	Opérateurs Spécifiques	66
12.5	Relations de Commutation	67
12.6	Dynamique Quantique	67
12.7	Principe d'Incertainitude d'Heisenberg	68
13	Théorie des Groupes	69
13.1	Groupes de Symétrie (Rotation, Translation)	69
13.2	Représentations de Groupes	70
13.3	Groupes de Lie et Algèbres de Lie	71

1 Systèmes de Coordonnées

1.1 Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N)

Dans un espace de dimension N , un point P est spécifié par un ensemble de N coordonnées généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N) . Ces coordonnées peuvent être des distances, des angles, ou des paramètres plus complexes, permettant de localiser de manière unique un point dans l'espace. Les relations avec les coordonnées cartésiennes standard (x_1, x_2, \dots, x_N) sont données par des fonctions de transformation :

$$x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_N) \quad \text{pour } k = 1, \dots, N$$

Les plages de variation des q_i sont intrinsèques à la définition du système et peuvent présenter des singularités aux limites ou à certains points où la transformation n'est pas biunivoque (par exemple, les pôles en coordonnées sphériques).

Le déplacement infinitésimal \vec{dl} dans un tel système est exprimé comme la somme des contributions de chaque variation de coordonnée. Les vecteurs de base naturels (non normalisés) sont $\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$. Le déplacement infinitésimal est alors :

$$\vec{dl} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} dq_i = \sum_{i=1}^N \vec{g}_i dq_i$$

Pour les systèmes de coordonnées orthogonaux, on introduit les vecteurs de base unitaires $\vec{e}_i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}$. Dans ce cas, le déplacement infinitésimal s'écrit :

$$\vec{dl} = \sum_{i=1}^N h_i dq_i \vec{e}_i$$

où h_i sont les facteurs d'échelle correspondants.

Le volume infinitésimal dV dans cet espace est obtenu en multipliant les éléments de longueur infinitésimaux orthogonaux, ou plus généralement par le Jacobien de la transformation :

$$dV = \sqrt{\det(g_{ij})} dq_1 dq_2 \dots dq_N$$

Pour les systèmes de coordonnées orthogonaux, où g_{ij} est diagonale, ceci se simplifie en :

$$dV = \left(\prod_{i=1}^N h_i \right) dq_1 dq_2 \dots dq_N$$

La métrique, ou tenseur métrique g_{ij} , caractérise la géométrie de l'espace et est définie par le produit scalaire des vecteurs de base naturels : $g_{ij} = \vec{g}_i \cdot \vec{g}_j = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_j}$. Il permet de

calculer le carré de la longueur infinitésimale : $dl^2 = \sum_{i,j=1}^N g_{ij} dq_i dq_j$. Pour un système de coordonnées orthogonal, la métrique est diagonale et ses composantes sont les carrés des facteurs d'échelle :

$$g_{ij} = \text{diag}(h_1^2, h_2^2, \dots, h_N^2)$$

Pour un système non orthogonal, g_{ij} est une matrice symétrique où les éléments hors-diagonaux ne sont pas nuls. Le déterminant du tenseur métrique, $\det(g_{ij})$, est un invariant scalaire important.

Les facteurs d'échelle h_i sont les normes des vecteurs de base naturels \vec{g}_i dans un système orthogonal, et mesurent la relation entre une variation infinitésimale d'une coordonnée dq_i et la longueur euclidienne correspondante :

$$h_i = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^N \left(\frac{\partial x_k}{\partial q_i} \right)^2}$$

où $\vec{r} = (x_1, \dots, x_N)$ est le vecteur position en coordonnées cartésiennes.

La matrice Jacobienne J de la transformation des coordonnées généralisées (q_1, \dots, q_N) aux coordonnées cartésiennes (x_1, \dots, x_N) est une matrice $N \times N$ dont les éléments sont les dérivées partielles :

$$J_{ki} = \frac{\partial x_k}{\partial q_i}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial x_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial q_N} \\ \frac{\partial x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial x_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial q_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_N}{\partial q_1} & \frac{\partial x_N}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial x_N}{\partial q_N} \end{pmatrix}$$

Le déterminant de cette matrice Jacobienne, noté $\det(J)$, relie les éléments de volume dans les deux systèmes de coordonnées : $dV_{cart} = |\det(J)| dV_q$. Notez que la relation entre le déterminant du Jacobien et le déterminant du tenseur métrique est $(\det(J))^2 = \det(g_{ij})$. La matrice Jacobienne inverse J^{-1} , si elle existe, permet de transformer les variations infinitésimales cartésiennes en variations généralisées, avec des éléments $(\partial_{x_k} q_i)$.

Les symboles de Christoffel de seconde espèce Γ_{ij}^k sont essentiels pour la géométrie différentielle et la mécanique en coordonnées généralisées. Ils décrivent comment les vecteurs de base changent lors d'un déplacement et sont calculés à partir du tenseur métrique et de ses dérivées :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial q_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial q_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial q_l} \right)$$

où g^{kl} est l'élément de la matrice inverse du tenseur métrique. Ces symboles sont fondamentaux pour définir les dérivées covariantes des vecteurs et des tenseurs, ainsi que les équations de géodésiques, dans des espaces courbes ou des systèmes de coordonnées non euclidiens.

1.2 Cartésiennes (x, y, z)

Le système de coordonnées cartésiennes est le plus fondamental, définissant un point P par ses distances orientées par rapport à trois plans mutuellement orthogonaux.

$$x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad z \in \mathbb{R}$$

Les vecteurs de base sont constants et orthogonaux.

Les coordonnées cartésiennes sont, par définition, la base de conversion pour de nombreux autres systèmes.

Le déplacement infinitésimal est :

$$d\vec{l} = dx \vec{e}_x + dy \vec{e}_y + dz \vec{e}_z$$

Le volume infinitésimal est :

$$dV = dx dy dz$$

La métrique euclidienne en coordonnées cartésiennes est l'identité :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les facteurs d'échelle sont $h_x = 1, h_y = 1, h_z = 1$. La matrice Jacobienne de la transformation des coordonnées cartésiennes vers elles-mêmes est l'identité :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_x x & \partial_y x & \partial_z x \\ \partial_x y & \partial_y y & \partial_z y \\ \partial_x z & \partial_y z & \partial_z z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les coordonnées cartésiennes étant un système de coordonnées euclidien et orthogonal où les vecteurs de base sont constants et unitaires, la métrique est l'identité et toutes ses dérivées sont nulles. Par conséquent, tous les symboles de Christoffel de seconde espèce sont nuls :

$$\Gamma_{ij}^k = 0 \quad \text{pour tous } i, j, k \in \{x, y, z\}$$

Ceci reflète l'absence de courbure et la constance des vecteurs de base dans cet espace plat.

1.3 Sphériques (r, θ, φ)

Un point P est défini par sa distance r à l'origine, l'angle polaire θ (colatitute) avec l'axe z , et l'angle azimutal φ (longitude) avec l'axe x dans le plan xOy .

$$r \in [0, +\infty[, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

Les relations avec les coordonnées cartésiennes sont :

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

Le déplacement infinitésimal est :

$$d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + r \sin \theta d\varphi \vec{e}_\varphi$$

Le volume infinitésimal est :

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

La métrique pour les coordonnées sphériques se présente comme suit :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

Les facteurs d'échelle sont $h_r = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta$.

La matrice Jacobienne de la transformation des coordonnées sphériques vers cartésiennes est donnée par :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_r x & \partial_\theta x & \partial_\varphi x \\ \partial_r y & \partial_\theta y & \partial_\varphi y \\ \partial_r z & \partial_\theta z & \partial_\varphi z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

Pour les coordonnées sphériques, les symboles de Christoffel non nuls sont les suivants :

$$\begin{aligned} \Gamma_{r\theta}^\theta &= \Gamma_{\theta r}^\theta = \frac{1}{r}, & \Gamma_{\theta\theta}^r &= -r \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2 \theta, & \Gamma_{r\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{\theta\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = \cot \theta, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\theta &= -\sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Ces symboles montrent comment les vecteurs de base changent d'orientation et de magnitude en fonction de la position dans l'espace sphérique.

1.4 Cylindriques (ρ, φ, z)

Un point P est spécifié par sa distance ρ à l'axe z , l'angle azimutal φ avec l'axe x dans le plan xy , et sa hauteur z le long de l'axe z .

$$\rho \in [0, +\infty[, \quad \varphi \in [0, 2\pi[, \quad z \in \mathbb{R}$$

Les relations avec les coordonnées cartésiennes sont :

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

Le déplacement infinitésimal est :

$$\vec{dl} = d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z$$

Le volume infinitésimal est :

$$dV = \rho d\rho d\varphi dz$$

La métrique associée aux coordonnées cylindriques est :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Les facteurs d'échelle sont $h_\rho = 1, h_\varphi = \rho, h_z = 1$.

La matrice Jacobienne pour passer des coordonnées cylindriques aux cartésiennes est :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\rho x & \partial_\varphi x & \partial_z x \\ \partial_\rho y & \partial_\varphi y & \partial_z y \\ \partial_\rho z & \partial_\varphi z & \partial_z z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \rho \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En coordonnées cylindriques, les symboles de Christoffel de seconde espèce non nuls sont relativement simples et se résument à :

$$\Gamma_{\varphi\varphi}^\rho = -\rho$$

$$\Gamma_{\rho\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\rho}^\varphi = \frac{1}{\rho}$$

Tous les autres symboles de Christoffel sont nuls. Cela reflète la symétrie cylindrique du système et la constance des vecteurs de base le long de l'axe z .

1.5 Paraboliques (σ, τ, φ)

Ces coordonnées sont obtenues par rotation de paraboloïdes autour d'un axe. Elles sont définies par deux familles de paraboloïdes confocaux et un angle azimutal.

$$\sigma \in [0, +\infty[, \quad \tau \in [0, +\infty[, \quad \varphi \in [0, 2\pi[$$

Les relations avec les coordonnées cartésiennes sont :

$$x = \sigma\tau \cos \varphi, \quad y = \sigma\tau \sin \varphi, \quad z = \frac{1}{2}(\sigma^2 - \tau^2)$$

Le déplacement infinitésimal est :

$$\vec{dl} = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} d\sigma \vec{e}_\sigma + \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} d\tau \vec{e}_\tau + \sigma\tau d\varphi \vec{e}_\varphi$$

Le volume infinitésimal est :

$$dV = \sigma\tau(\sigma^2 + \tau^2) d\sigma d\tau d\varphi$$

La métrique de ce système est diagonale :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2\tau^2 \end{pmatrix}$$

Les facteurs d'échelle sont $h_\sigma = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, $h_\tau = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$, $h_\varphi = \sigma\tau$. La matrice Jacobienne pour la conversion paraboliques vers cartésiennes est :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\sigma x & \partial_\tau x & \partial_\varphi x \\ \partial_\sigma y & \partial_\tau y & \partial_\varphi y \\ \partial_\sigma z & \partial_\tau z & \partial_\varphi z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \cos \varphi & \sigma \cos \varphi & -\sigma\tau \sin \varphi \\ \tau \sin \varphi & \sigma \sin \varphi & \sigma\tau \cos \varphi \\ \sigma & -\tau & 0 \end{pmatrix}$$

Pour les coordonnées paraboliques, les symboles de Christoffel non nuls sont donnés par :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma &= \frac{\sigma}{\sigma^2 + \tau^2}, & \Gamma_{\tau\tau}^\sigma &= -\frac{\sigma}{\sigma^2 + \tau^2} \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\sigma &= -\frac{\sigma\tau^2}{\sigma^2 + \tau^2}, & \Gamma_{\sigma\sigma}^\tau &= -\frac{\tau}{\sigma^2 + \tau^2} \\ \Gamma_{\tau\tau}^\tau &= \frac{\tau}{\sigma^2 + \tau^2}, & \Gamma_{\varphi\varphi}^\tau &= -\frac{\tau\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} \\ \Gamma_{\sigma\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\sigma}^\varphi = \frac{1}{\sigma}, & \Gamma_{\tau\varphi}^\varphi &= \Gamma_{\varphi\tau}^\varphi = \frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

Ces expressions décrivent la variation des vecteurs de base dans ce système curviligne.

1.6 Ellipsoïdales (λ, μ, ν)

Ces coordonnées généralisent les coordonnées sphériques et cylindriques. Elles sont basées sur des familles d'ellipsoïdes, d'hyperboloïdes à une nappe et d'hyperboloïdes à deux nappes, toutes confocales. Les plages des variables dépendent des constantes focales h_1, h_2, h_3 (semi-axes de l'ellipsoïde de référence) avec $h_3 < h_2 < h_1$. Typiquement :

$$\lambda \in [h_1^2, \infty[, \quad \mu \in [h_2^2, h_1^2], \quad \nu \in [h_3^2, h_2^2]$$

Les relations avec les coordonnées cartésiennes sont données par les racines de l'équation cubique suivante en k :

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} + \frac{z^2}{c^2 + k} = 1$$

où a, b, c sont les semi-axes de l'ellipsoïde de référence. Les trois racines $k_1 = \lambda, k_2 = \mu, k_3 = \nu$ correspondent aux trois coordonnées.

Explicitée, la conversion est :

$$x^2 = \frac{(\lambda - a^2)(\mu - a^2)(\nu - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - a^2)}$$

$$y^2 = \frac{(\lambda - b^2)(\mu - b^2)(\nu - b^2)}{(a^2 - b^2)(c^2 - b^2)}$$

$$z^2 = \frac{(\lambda - c^2)(\mu - c^2)(\nu - c^2)}{(a^2 - c^2)(b^2 - c^2)}$$

Le déplacement infinitésimal est donné par :

$$\vec{dl} = h_\lambda d\lambda \vec{e}_\lambda + h_\mu d\mu \vec{e}_\mu + h_\nu d\nu \vec{e}_\nu$$

où les facteurs d'échelle h_i sont :

$$h_\lambda^2 = \frac{(\lambda - a^2)(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)}{4\lambda(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}$$

$$h_\mu^2 = \frac{(\mu - a^2)(\mu - b^2)(\mu - c^2)}{4\mu(\mu - \lambda)(\mu - \nu)}$$

$$h_\nu^2 = \frac{(\nu - a^2)(\nu - b^2)(\nu - c^2)}{4\nu(\nu - \lambda)(\nu - \mu)}$$

Le volume infinitésimal est :

$$dV = h_\lambda h_\mu h_\nu d\lambda d\mu d\nu$$

La métrique pour les coordonnées ellipsoïdales est une matrice diagonale :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_\nu^2 \end{pmatrix}$$

Les facteurs d'échelle sont h_λ, h_μ, h_ν tels que définis ci-dessus.

La matrice Jacobienne pour la transformation des coordonnées ellipsoïdales vers cartésiennes est complexe et ses éléments ne sont pas simples à exprimer explicitement, compte tenu des relations quadratiques entre les coordonnées. Néanmoins, elle aurait la forme générale :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\lambda x & \partial_\mu x & \partial_\nu x \\ \partial_\lambda y & \partial_\mu y & \partial_\nu y \\ \partial_\lambda z & \partial_\mu z & \partial_\nu z \end{pmatrix}$$

Avec des termes tels que :

$$\partial_\lambda x = \frac{x}{2(\lambda - a^2)} + \frac{x}{2(\lambda - b^2)} + \frac{x}{2(\lambda - c^2)} - \frac{x}{2(\lambda - \mu)} - \frac{x}{2(\lambda - \nu)}$$

Et des expressions similaires pour les autres dérivées, issues de la différenciation implicite des relations de conversion.

En raison de la complexité des facteurs d'échelle et des relations de conversion, les symboles de Christoffel pour les coordonnées ellipsoïdales sont extrêmement élaborés. On les exprime généralement en termes de facteurs d'échelle h_λ, h_μ, h_ν et de leurs dérivées. Les symboles non nuls sont de la forme :

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial h_j}{\partial q_k} \quad \text{si } i = j \neq k, \quad \Gamma_{jj}^i = -\frac{h_j}{h_i^2} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \quad \text{si } i \neq j$$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_i}$$

Pour ce système, les expressions explicites des dérivées des facteurs d'échelle sont très longues, rendant les symboles de Christoffel particulièrement denses. Pour simplifier, les non-nuls sont ceux où les indices sont tous différents, ou deux indices sont identiques.

$$\Gamma_{\mu\mu}^\lambda = -\frac{\lambda}{2(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)}$$

Et de manière cyclique pour les autres. Les expressions complètes sont très détaillées et dépendent des constantes a, b, c .

1.7 Barycentriques (u, v, w) pour un triangle $P_1P_2P_3$

Pour un point P dans le plan d'un triangle, les coordonnées barycentriques représentent les poids u, v, w (tels que $u + v + w = 1$) qui, appliqués aux sommets du triangle, donnent la position de P .

$$P = uP_1 + vP_2 + wP_3$$

Avec $u, v, w \in [0, 1]$ pour les points à l'intérieur du triangle. Ces coordonnées sont souvent utilisées en infographie et en éléments finis.

Pour convertir un point $P = (x, y, z)$ en coordonnées cartésiennes à partir de ses coordonnées barycentriques (u, v, w) et des sommets du triangle $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, $P_3 = (x_3, y_3, z_3)$:

$$\begin{aligned} x &= ux_1 + vx_2 + wx_3 \\ y &= uy_1 + vy_2 + wy_3 \\ z &= uz_1 + vz_2 + wz_3 \end{aligned}$$

Les coordonnées barycentriques ne sont pas un système de coordonnées orthogonal euclidien standard, et le concept de "déplacement infinitésimal" ou de "volume infinitésimal" dans le sens habituel des systèmes de coordonnées tridimensionnels ne s'applique pas directement de la même manière. Elles sont intrinsèques à la géométrie du triangle. Pour un déplacement infinitésimal dans le plan du triangle, en considérant $w = 1 - u - v$, on peut avoir :

$$\vec{dl} = (P_1 - P_3) du + (P_2 - P_3) dv$$

Le "volume infinitésimal" (ou plutôt l'aire infinitésimale) dans le plan du triangle est lié à l'aire du triangle de référence $A_{P_1P_2P_3}$:

$$dA = 2A_{P_1P_2P_3} du dv$$

Ceci est valide dans le plan du triangle.

En coordonnées barycentriques, la notion de métrique et de facteurs d'échelle est moins directe car il s'agit d'un système non orthogonal et intrinsèque à un domaine polygonal (triangle). On utilise plutôt une métrique intrinsèque au plan où réside le triangle.

Les facteurs d'échelle, tels que définis pour les systèmes orthogonaux, n'ont pas d'analogue simple.

La matrice Jacobienne pour la transformation des coordonnées barycentriques (u, v) (avec $w = 1 - u - v$) vers les coordonnées cartésiennes (x, y, z) est :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_u x & \partial_v x \\ \partial_u y & \partial_v y \\ \partial_u z & \partial_v z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \\ z_1 - z_3 & z_2 - z_3 \end{pmatrix}$$

Notez que cette matrice est 3x2, car le système barycentrique est naturellement 2D (avec la contrainte $u + v + w = 1$) dans un espace 3D.

Les coordonnées barycentriques ne constituent pas un système de coordonnées curviligne orthogonal standard dans un espace euclidien, mais plutôt un système intrinsèque à la géométrie d'un triangle (ou d'un simplexe). La notion de symboles de Christoffel, qui est dérivée du tenseur métrique euclidien d'un espace courbe, ne s'applique pas directement aux coordonnées barycentriques de la même manière qu'aux systèmes métriques 3D habituels. Il n'y a pas de "courbure" de l'espace induite par les coordonnées barycentriques elles-mêmes, mais la géométrie du triangle sous-jacent définit le cadre.

1.8 Toroïdales (η, ξ, ϕ)

Ce système est adapté aux problèmes avec une symétrie toroïdale. Il est généré par la rotation de cercles d'Apollonius autour d'un axe.

$$\eta \in [0, +\infty[, \quad \xi \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi[$$

Les relations avec les coordonnées cartésiennes sont, avec a une constante (rayon du cercle de référence) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{a \sinh \eta \cos \phi}{\cosh \eta - \cos \xi} \\ y &= \frac{a \sinh \eta \sin \phi}{\cosh \eta - \cos \xi} \\ z &= \frac{a \sin \xi}{\cosh \eta - \cos \xi} \end{aligned}$$

Le déplacement infinitésimal est :

$$\vec{dl} = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi} d\eta \vec{e}_\eta + \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi} d\xi \vec{e}_\xi + \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} d\phi \vec{e}_\phi$$

Le volume infinitésimal est :

$$dV = \frac{a^3 \sinh \eta}{(\cosh \eta - \cos \xi)^3} d\eta d\xi d\phi$$

La métrique pour les coordonnées toroïdales s'exprime par une matrice diagonale :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a^2}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2 \sinh^2 \eta}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2} \end{pmatrix}$$

Les facteurs d'échelle sont $h_\eta = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi}$, $h_\xi = \frac{a}{\cosh \eta - \cos \xi}$, et $h_\phi = \frac{a \sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi}$.

La matrice Jacobienne des coordonnées toroïdales aux cartésiennes est :

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\eta x & \partial_\xi x & \partial_\phi x \\ \partial_\eta y & \partial_\xi y & \partial_\phi y \\ \partial_\eta z & \partial_\xi z & \partial_\phi z \end{pmatrix}$$

Chaque élément est une dérivée partielle. Par exemple :

$$\partial_\eta x = \frac{a \cos \phi (\cosh \eta (\cosh \eta - \cos \xi) - \sinh^2 \eta)}{(\cosh \eta - \cos \xi)^2}$$

Les symboles de Christoffel pour les coordonnées toroïdales sont complexes en raison de la nature des facteurs d'échelle. Soit $K = (\cosh \eta - \cos \xi)$. Les facteurs d'échelle sont $h_\eta = a/K$, $h_\xi = a/K$, $h_\phi = a \sinh \eta / K$. Les symboles non nuls incluent :

$$\begin{aligned} \Gamma_{\eta\eta}^\eta &= -\frac{\sinh \eta}{K}, & \Gamma_{\xi\xi}^\eta &= \frac{\sinh \eta}{K} \\ \Gamma_{\phi\phi}^\eta &= -\frac{\sinh \eta}{K} \left(\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \right)^2, & \Gamma_{\eta\eta}^\xi &= \frac{\sin \xi}{K} \\ \Gamma_{\xi\xi}^\xi &= -\frac{\sin \xi}{K}, & \Gamma_{\phi\phi}^\xi &= -\frac{\sin \xi}{K} \left(\frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \right)^2 \\ \Gamma_{\eta\xi}^\eta &= \Gamma_{\xi\eta}^\eta = \frac{\sin \xi}{K}, & \Gamma_{\eta\xi}^\xi &= \Gamma_{\xi\eta}^\xi = \frac{\sinh \eta}{K} \\ \Gamma_{\eta\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\eta}^\phi = \frac{\cosh \eta}{K} - \frac{\sinh^2 \eta}{K^2}, & \Gamma_{\xi\phi}^\phi &= \Gamma_{\phi\xi}^\phi = \frac{\sin \xi}{K} \frac{\sinh \eta}{\cosh \eta - \cos \xi} \end{aligned}$$

1.9 Coniques (λ, μ, ν)

Ces coordonnées sont définies par une famille de sphères et deux familles de cônes confocaux, partageant un foyer commun à l'origine.

Les plages des variables dépendent des constantes focales a, b, c (semi-axes de l'ellipsoïde de référence) avec $0 < c^2 < b^2 < a^2$. Typiquement :

$$\lambda \in [0, c^2], \quad \mu \in [c^2, b^2], \quad \nu \in [b^2, a^2]$$

Les relations avec les coordonnées cartésiennes sont données par les racines de l'équation cubique suivante en k :

$$\frac{x^2}{a^2 - k} + \frac{y^2}{b^2 - k} + \frac{z^2}{c^2 - k} = 0$$

Les trois racines $k_1 = \lambda, k_2 = \mu, k_3 = \nu$ correspondent aux trois coordonnées. Explicitement, la conversion est :

$$\begin{aligned} x^2 &= \frac{(a^2 - \lambda)(a^2 - \mu)(a^2 - \nu)}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \\ y^2 &= \frac{(b^2 - \lambda)(b^2 - \mu)(b^2 - \nu)}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} \\ z^2 &= \frac{(c^2 - \lambda)(c^2 - \mu)(c^2 - \nu)}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \end{aligned}$$

Le déplacement infinitésimal est donné par :

$$d\vec{l} = h_\lambda d\lambda \vec{e}_\lambda + h_\mu d\mu \vec{e}_\mu + h_\nu d\nu \vec{e}_\nu$$

où les facteurs d'échelle h_i sont :

$$\begin{aligned} h_\lambda^2 &= \frac{\lambda(\lambda - b^2)(\lambda - c^2)}{(\lambda - \mu)(\lambda - \nu)(a^2 - \lambda)(b^2 - \lambda)(c^2 - \lambda)} \\ h_\mu^2 &= \frac{\mu(\mu - b^2)(\mu - c^2)}{(\mu - \lambda)(\mu - \nu)(a^2 - \mu)(b^2 - \mu)(c^2 - \mu)} \\ h_\nu^2 &= \frac{\nu(\nu - b^2)(\nu - c^2)}{(\nu - \lambda)(\nu - \mu)(a^2 - \nu)(b^2 - \nu)(c^2 - \nu)} \end{aligned}$$

Le volume infinitésimal est :

$$dV = h_\lambda h_\mu h_\nu d\lambda d\mu d\nu$$

La métrique pour les coordonnées coniques est une matrice diagonale :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} h_\lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & h_\mu^2 & 0 \\ 0 & 0 & h_\nu^2 \end{pmatrix}$$

Les facteurs d'échelle h_λ, h_μ, h_ν sont ceux donnés précédemment.

La matrice Jacobienne pour la conversion des coordonnées coniques vers cartésiennes, similaire aux coordonnées ellipsoïdales, a des éléments complexes. Pour x , par exemple :

$$\partial_\lambda x = \frac{x}{2(a^2 - \lambda)} - \frac{x}{2(a^2 - b^2)} - \frac{x}{2(a^2 - c^2)} + \frac{x}{2(\lambda - \mu)} + \frac{x}{2(\lambda - \nu)}$$

Et ainsi de suite pour les autres dérivées partielles.

$$J = \begin{pmatrix} \partial_\lambda x & \partial_\mu x & \partial_\nu x \\ \partial_\lambda y & \partial_\mu y & \partial_\nu y \\ \partial_\lambda z & \partial_\mu z & \partial_\nu z \end{pmatrix}$$

Comme pour les coordonnées ellipsoïdales, les symboles de Christoffel pour les coordonnées coniques sont des expressions complexes, généralement exprimées en termes des facteurs d'échelle h_λ, h_μ, h_ν et de leurs dérivées. Les formes générales sont similaires, et les symboles non nuls sont ceux où les indices sont distincts ou répétés.

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{h_i^2} \frac{\partial h_j}{\partial q_k} \quad \text{si } i = j \neq k, \quad \Gamma_{jj}^i = -\frac{h_j}{h_i^2} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} \quad \text{si } i \neq j$$

$$\Gamma_{ii}^i = \frac{1}{h_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_i}$$

Les expressions exactes dépendent des constantes a, b, c et des dérivées partielles des facteurs d'échelle, qui sont elles-mêmes des fonctions complexes des coordonnées λ, μ, ν . Les formules complètes sont longues et se trouvent généralement dans des tables de référence spécialisées.

2 Opérateurs différentiels en 3D

2.1 Gradient scalaire

Le gradient d'une fonction scalaire ϕ est un champ vectoriel qui indique la direction de la plus forte croissance de ϕ et l'intensité de cette croissance. Il est couramment utilisé pour définir des forces conservatives ou des champs de potentiel.

Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N) :

$$\vec{\nabla}\phi = \sum_{i=1}^N \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \hat{e}_i$$

Cartésien (x, y, z) :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} \hat{e}_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} \hat{e}_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{e}_z$$

Cylindrique (ρ, φ, z) :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} \hat{e}_z$$

Sphérique (r, θ, φ) :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi$$

Parabolique (σ, τ, ϕ) :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \hat{e}_\sigma + \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \hat{e}_\tau + \frac{1}{\sigma \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

Ellipsoïdales (λ, μ, ν) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\phi = & \frac{\sqrt{(\lambda^2 - h_1^2)(\lambda^2 - h_2^2)}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \hat{e}_\lambda \\ & + \frac{\sqrt{(h_1^2 - \mu^2)(h_2^2 - \mu^2)}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \hat{e}_\mu \\ & + \frac{\sqrt{(h_1^2 - \nu^2)(h_2^2 - \nu^2)}}{(\lambda^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \hat{e}_\nu \end{aligned}$$

Barycentriques (L_1, L_2, L_3) dans un triangle :

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{1}{2A} \sum_{i=1}^3 \left((\vec{x}_j - \vec{x}_k) \cdot \vec{\nabla}_{xy}\phi \right) \vec{n}_i$$

Toroïdales (σ, τ, ϕ) :

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{1}{a(\cosh \sigma - \cos \tau)} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \hat{e}_\sigma + \frac{1}{a(\cosh \sigma - \cos \tau)} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \hat{e}_\tau + \frac{1}{a} \frac{\sinh \sigma}{\cosh \sigma - \cos \tau} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \hat{e}_\phi$$

Coniques (r, μ, ν) :

$$\vec{\nabla} \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} \hat{e}_r + \frac{1}{r\sqrt{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)}} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \hat{e}_\mu + \frac{1}{r\sqrt{(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)}} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \hat{e}_\nu$$

2.2 Divergence vectorielle

La divergence d'un champ vectoriel \vec{F} est une fonction scalaire qui mesure la "source" ou le "puits" du champ en un point donné. Elle est fondamentale dans l'étude des flux et des densités de sources.

Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N) :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\prod_{j=1}^N h_j} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\vec{F} \cdot \hat{e}_i \prod_{j \neq i}^N h_j \right)$$

Si le système est orthogonal et $\vec{F} = \sum_{k=1}^N F_k \hat{e}_k$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\prod_{j=1}^N h_j} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \left(F_i \prod_{j \neq i}^N h_j \right)$$

Cartésien :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Cylindrique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Sphérique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

Parabolique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial (\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} F_\sigma)}{\partial \sigma} + \frac{\partial (\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} F_\tau)}{\partial \tau} \right) + \frac{1}{\sigma \tau} \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

Ellipsoïdales (λ, μ, ν) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left(\sqrt{(\lambda^2 - h_1^2)(\lambda^2 - h_2^2)(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} F_\lambda \right) \\ &+ \frac{1}{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{(h_1^2 - \mu^2)(h_2^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} F_\mu \right) \\ &+ \frac{1}{(\lambda^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sqrt{(h_1^2 - \nu^2)(h_2^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)} F_\nu \right)\end{aligned}$$

Barycentriques (L_1, L_2, L_3) dans un triangle :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_1}{\partial L_1} + \frac{\partial F_2}{\partial L_2} + \frac{\partial F_3}{\partial L_3}$$

Toroïdales (σ, τ, ϕ) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{a^3(\cosh \sigma - \cos \tau)^3} \left[\frac{\partial}{\partial \sigma} (a^2 \sinh \sigma (\cosh \sigma - \cos \tau) F_\sigma) \right] \\ &+ \frac{1}{a^3(\cosh \sigma - \cos \tau)^3} \left[\frac{\partial}{\partial \tau} (a^2 \sinh \sigma (\cosh \sigma - \cos \tau) F_\tau) \right] \\ &+ \frac{1}{a^3(\cosh \sigma - \cos \tau)^3} \left[\frac{\partial}{\partial \phi} (a^2 (\cosh \sigma - \cos \tau)^2 F_\phi) \right]\end{aligned}$$

Coniques (r, μ, ν) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{F} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r \sqrt{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)} F_\mu \right) \\ &+ \frac{1}{r \sqrt{(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sqrt{(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)} F_\nu \right)\end{aligned}$$

2.3 Rotationnel vectoriel

Le rotationnel d'un champ vectoriel \vec{F} est un autre champ vectoriel qui quantifie la "rotation" ou la "circulation" du champ en un point. Il est crucial en électromagnétisme et en mécanique des fluides pour décrire les tourbillons.

Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N) :

Le concept de rotationnel est défini pour un espace à 3 dimensions. Pour un espace à N dimensions, il est généralisé par le "rotationnel extérieur" d'une k -forme, qui est une $(k+1)$ -forme. Le rotationnel d'un champ vectoriel (1-forme) dans N dimensions est un tenseur anti-symétrique d'ordre 2. Pour un espace à N dimensions avec un champ vectoriel $\vec{F} = \sum_{i=1}^N F_i \hat{e}_i$, le rotationnel généralisé peut être défini par l'opérateur "curlor", qui est un tenseur :

$$(\vec{\nabla} \times \vec{F})_{ij} = \frac{1}{h_i h_j} \left(\frac{\partial (h_j F_j)}{\partial q_i} - \frac{\partial (h_i F_i)}{\partial q_j} \right)$$

Ceci est un tenseur, pas un vecteur, dans N dimensions. Si $N = 3$, il se réduit au rotationnel vectoriel.

Cartésien :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{e}_z$$

Cylindrique :

$$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial F_\varphi}{\partial z} \right) \hat{e}_\rho + \left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \right) \hat{e}_\varphi + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial (\rho F_\varphi)}{\partial \rho} - \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_z$$

Sphérique :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} = & \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial (\sin \theta F_\varphi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_r \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r F_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta} \right) \hat{e}_\varphi \end{aligned}$$

Parabolique :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} = & \left(\frac{1}{\sigma \tau} \left(\frac{\partial F_\phi}{\partial \tau} - \frac{\partial (\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} F_\tau)}{\partial \phi} \right) \right) \hat{e}_\sigma \\ & + \left(\frac{1}{\sigma \tau} \left(\frac{\partial (\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} F_\sigma)}{\partial \phi} - \frac{\partial F_\phi}{\partial \sigma} \right) \right) \hat{e}_\tau \\ & + \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{\partial (\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} F_\tau)}{\partial \sigma} - \frac{\partial (\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} F_\sigma)}{\partial \tau} \right) \right) \hat{e}_\phi \end{aligned}$$

Ellipsoïdales (λ, μ, ν) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{F} = & \frac{(\lambda^2 - h_2^2)^{-1/2}}{\sqrt{(\lambda^2 - h_1^2)}} \left(\partial_\mu \left(\frac{\sqrt{(h_1^2 - \nu^2)(h_2^2 - \nu^2)}}{(\lambda^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)} F_\nu \right) - \partial_\nu \left(\frac{\sqrt{(h_1^2 - \mu^2)(h_2^2 - \mu^2)}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} F_\mu \right) \right) \hat{e}_\lambda \\ & + \frac{(h_2^2 - \mu^2)^{-1/2}}{\sqrt{(h_1^2 - \mu^2)}} \left(\partial_\nu \left(\frac{\sqrt{(\lambda^2 - h_1^2)(\lambda^2 - h_2^2)}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} F_\lambda \right) - \partial_\lambda \left(\frac{\sqrt{(h_1^2 - \nu^2)(h_2^2 - \nu^2)}}{(\lambda^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)} F_\nu \right) \right) \hat{e}_\mu \\ & + \frac{(h_2^2 - \nu^2)^{-1/2}}{\sqrt{(h_1^2 - \nu^2)}} \left(\partial_\lambda \left(\frac{\sqrt{(h_1^2 - \mu^2)(h_2^2 - \mu^2)}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} F_\mu \right) - \partial_\mu \left(\frac{\sqrt{(\lambda^2 - h_1^2)(\lambda^2 - h_2^2)}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} F_\lambda \right) \right) \hat{e}_\nu \end{aligned}$$

Toroïdales (σ, τ, ϕ) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} = & \frac{1}{a(\cosh \sigma - \cos \tau)} \left(\frac{1}{\sinh \sigma} \frac{\partial (a \sinh \sigma F_\phi)}{\partial \tau} - \frac{\partial F_\tau}{\partial \phi} \right) \hat{e}_\sigma \\ & + \frac{1}{a(\cosh \sigma - \cos \tau)} \left(\frac{\partial F_\sigma}{\partial \phi} - \frac{1}{\sinh \sigma} \frac{\partial (a \sinh \sigma F_\phi)}{\partial \sigma} \right) \hat{e}_\tau \\ & + \frac{1}{a(\cosh \sigma - \cos \tau)} \left(\frac{\partial (a(\cosh \sigma - \cos \tau) F_\tau)}{\partial \sigma} - \frac{\partial (a(\cosh \sigma - \cos \tau) F_\sigma)}{\partial \tau} \right) \hat{e}_\phi\end{aligned}$$

Coniques (r, μ, ν) :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{F} = & \frac{1}{r \sqrt{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)}} \\ & \times \left(\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)} F_\nu \right) - \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sqrt{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)} F_\mu \right) \right) \hat{e}_r \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)}} \frac{\partial F_r}{\partial \nu} - \frac{\partial (r F_\nu)}{\partial r} \right) \hat{e}_\mu \\ & + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r F_\mu)}{\partial r} - \frac{1}{\sqrt{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)}} \frac{\partial F_r}{\partial \mu} \right) \hat{e}_\nu\end{aligned}$$

2.4 Laplacien scalaire

Le Laplacien d'une fonction scalaire ϕ , souvent noté $\Delta \phi$ ou $\vec{\nabla}^2 \phi$, est un opérateur scalaire qui représente la divergence du gradient. Il apparaît dans de nombreuses équations fondamentales de la physique, comme l'équation de Laplace, l'équation de Poisson et l'équation de la chaleur.

Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N) :

$$\Delta \phi = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) = \frac{1}{\prod_{j=1}^N h_j} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\prod_{j=1}^N h_j}{h_i^2} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right)$$

Pour un système orthogonal :

$$\Delta \phi = \frac{1}{\prod_{k=1}^N h_k} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{h_i} \left(\prod_{k=1}^N h_k \right) \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right) = \frac{1}{\prod_{k=1}^N h_k} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\left(\prod_{k \neq i}^N h_k \right) \frac{1}{h_i} \frac{\partial \phi}{\partial q_i} \right)$$

Cartésien :

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Cylindrique :

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

Sphérique :

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2}$$

Parabolique :

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} \right) \right) + \frac{1}{\sigma^2 \tau^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2}$$

Ellipsoïdales (λ, μ, ν) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \phi = & \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 - h_1^2)(\lambda^2 - h_2^2)(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}} \partial_\lambda \left(\frac{\sqrt{(\lambda^2 - h_1^2)(\lambda^2 - h_2^2)(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\lambda^2 - \nu^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)(h_1^2 - \mu^2)(h_2^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}} \partial_\mu \left(\frac{\sqrt{(\lambda^2 - \mu^2)(h_1^2 - \mu^2)(h_2^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)}}{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right) \\ & + \frac{1}{\sqrt{(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)(h_1^2 - \nu^2)(h_2^2 - \nu^2)}} \partial_\nu \left(\frac{\sqrt{(\lambda^2 - \nu^2)(\mu^2 - \nu^2)(h_1^2 - \nu^2)(h_2^2 - \nu^2)}}{(\lambda^2 - \nu^2)(\nu^2 - \mu^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) \end{aligned}$$

(Cette expression est simplifiée. Pour un Laplacien plus général, il faut considérer les facteurs d'échelle.)

Barycentriques (L_1, L_2, L_3) dans un triangle :

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i^2} + 2 \sum_{i < j} \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_i \partial L_j}$$

(Le Laplacien en coordonnées barycentriques est généralement non trivial car les coordonnées barycentriques sont dépendantes (somme égale à 1) et le concept de "dérivée seconde" doit être traité avec soin pour rester dans l'espace 2D du triangle.)

Toroïdales (σ, τ, ϕ) :

$$\vec{\nabla}^2 \phi = \frac{1}{a^2 (\cosh \sigma - \cos \tau)^2} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} + \frac{(\cosh \sigma - \cos \tau)}{\sinh \sigma} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} - \frac{\sinh \sigma}{(\cosh \sigma - \cos \tau)} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{1}{\sinh^2 \sigma} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \right]$$

Coniques (r, μ, ν) :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 \phi = & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sqrt{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\sqrt{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \mu} \right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sqrt{(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)}} \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\sqrt{(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)} \frac{\partial \phi}{\partial \nu} \right) \end{aligned}$$

2.5 Laplacien vectoriel

Le Laplacien d'un champ vectoriel \vec{F} est défini par l'identité $\vec{\nabla}^2 \vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F})$. Il est utile pour les équations de diffusion de champs vectoriels et en électrodynamique.

Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N) :

Le Laplacien vectoriel est défini pour un champ vectoriel $\vec{A} = \sum_{i=1}^N A_i \hat{e}_i$. Sa forme générale est complexe et dépend des symboles de Christoffel. Pour un espace euclidien plat avec des coordonnées curvilignes orthogonales, on a :

$$\Delta \vec{A} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$$

Chaque composante k du Laplacien vectoriel $(\Delta \vec{A})_k$ est donnée par la formule suivante, qui inclut les symboles de Christoffel de seconde espèce Γ_{ij}^k et les facteurs d'échelle h_i :

$$\begin{aligned} [\Delta \vec{A}]_k &= \frac{1}{h_k} \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{1}{h_i} \frac{\partial (h_k A_k)}{\partial q_i} \right) + \frac{A_k}{h_k^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial h_k}{\partial q_i} \frac{\partial h_i}{\partial q_k} - h_i \frac{\partial^2 h_k}{\partial q_i \partial q_k} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{A_i}{h_k h_j} \left(h_j \frac{\partial \Gamma_{ij}^k}{\partial q_j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial h_j}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{A_i}{h_k h_j} \left(\Gamma_{ki}^j \frac{\partial h_k}{\partial q_j} + \Gamma_{jk}^i \frac{\partial h_i}{\partial q_j} \right) \end{aligned}$$

Alternativement, pour les systèmes de coordonnées orthogonales, le Laplacien vectoriel peut être exprimé de manière plus compacte en utilisant le Laplacien scalaire de chaque composante du champ vectoriel, mais avec des termes correctifs supplémentaires qui tiennent compte des variations des vecteurs unitaires :

$$\begin{aligned} [\Delta \vec{A}]_k &= (\nabla^2 A_k) + \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{A_i}{h_i^2 h_k} \left(h_k \frac{\partial^2 h_i}{\partial q_k \partial q_i} - \frac{\partial h_i}{\partial q_k} \frac{\partial h_k}{\partial q_i} \right) \\ &- \sum_{i=1}^N \frac{A_i}{h_i h_k} \frac{\partial h_i}{\partial q_k} \frac{\partial h_k}{\partial q_i} + \frac{2}{h_k} \sum_{i=1, i \neq k}^N \frac{1}{h_i} \frac{\partial A_i}{\partial q_k} \frac{\partial h_k}{\partial q_i} \end{aligned}$$

Cartésien :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{F} = (\vec{\nabla}^2 F_x) \hat{e}_x + (\vec{\nabla}^2 F_y) \hat{e}_y + (\vec{\nabla}^2 F_z) \hat{e}_z$$

Cylindrique :

$$\vec{\nabla}^2 \vec{F} = \left(\vec{\nabla}^2 F_\rho - \frac{F_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_\rho + \left(\vec{\nabla}^2 F_\varphi - \frac{F_\varphi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial F_\rho}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_\varphi + (\vec{\nabla}^2 F_z) \hat{e}_z$$

Sphérique :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{F} = & \left(\vec{\nabla}^2 F_r - \frac{2F_r}{r^2} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta F_\theta)}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_r \\ & + \left(\vec{\nabla}^2 F_\theta - \frac{F_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_\theta \\ & + \left(\vec{\nabla}^2 F_\varphi - \frac{F_\varphi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial F_r}{\partial \varphi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial F_\theta}{\partial \varphi} \right) \hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

Parabolique :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}^2 \vec{F} = & \left(\vec{\nabla}^2 F_\sigma - \frac{2}{\sigma^2 + \tau^2} F_\sigma - \frac{2}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\partial (\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} F_\tau)}{\partial \tau} \right) \hat{e}_\sigma \\ & + \left(\vec{\nabla}^2 F_\tau - \frac{2}{\sigma^2 + \tau^2} F_\tau + \frac{2}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\partial (\sqrt{\sigma^2 + \tau^2} F_\sigma)}{\partial \sigma} \right) \hat{e}_\tau \\ & + \left(\vec{\nabla}^2 F_\phi - \frac{F_\phi}{\sigma^2 \tau^2} \right) \hat{e}_\phi\end{aligned}$$

2.6 Hessien scalaire

Le Hessien d'une fonction scalaire ϕ est une matrice carrée de dérivées partielles secondes. Il est utilisé pour les tests de points critiques (maxima, minima, points selle) dans les fonctions à plusieurs variables et en mécanique des milieux continus.

Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N) :

Le Hessien d'une fonction scalaire $\phi(q_1, \dots, q_N)$ est un tenseur symétrique d'ordre 2, dont les éléments sont les dérivées partielles secondes :

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_i \partial q_j}$$

Pour un système de coordonnées généralisées, il est plus correct de parler de la Hessienne covariante ou contravariante, qui inclut les facteurs d'échelle et les symboles de Christoffel si on veut la relier au Laplacien. La forme directe est la suivante :

$$[H(\phi)]_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_i \partial q_j} - \sum_{k=1}^N \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi}{\partial q_k}$$

où Γ_{ij}^k sont les symboles de Christoffel.

Cartésien :

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Cylindrique :

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} & \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho \partial z} \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) & \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial \rho} & \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) & \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Sphérique :

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) & \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} & \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial r} \right) & \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \end{pmatrix}$$

Parabolique :

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\partial \phi}{\partial \sigma} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma \partial \tau} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \sigma \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau^2} - \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\partial \phi}{\partial \tau} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \tau \partial \phi} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi \partial \tau} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial \phi^2} \end{pmatrix}$$

Barycentriques (L_1, L_2, L_3) dans un triangle :

$$H(\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_1^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_1 \partial L_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_1 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_2 \partial L_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_2^2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_2 \partial L_3} \\ \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_3 \partial L_1} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_3 \partial L_2} & \frac{\partial^2 \phi}{\partial L_3^2} \end{pmatrix}$$

Cependant, étant donné la dépendance, les dérivées ne sont pas indépendantes. Pour obtenir un Hessien intrinsèque, il est courant de le projeter sur l'espace tangent du triangle, ou d'utiliser une des coordonnées comme dépendante (par exemple, $L_3 = 1 - L_1 - L_2$) et de calculer un Hessien 2×2 .

Coniques (r, μ, ν) : Les composantes de l'Hessien covariant pour une fonction scalaire $\phi(r, \mu, \nu)$ sont données par :

$$H_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial q_i \partial q_j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial \phi}{\partial q_k}$$

où $q_1 = r, q_2 = \mu, q_3 = \nu$. Les symboles de Christoffel pour les coordonnées coniques sont également non triviaux. Par exemple, $\Gamma_{\mu\mu}^r = -r \frac{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)}{\mu^2 - \nu^2}$, etc. La matrice Hessienne complète serait 3×3 , avec des éléments très détaillés.

2.7 Jacobien vectoriel

Le Jacobien d'une transformation vectorielle (ou d'une fonction vectorielle) est une matrice de toutes les dérivées partielles premières. Il décrit la déformation locale d'un espace sous l'effet de la transformation et est fondamental pour les changements de variables dans les intégrales.

Coordonnées Généralisées (q_1, q_2, \dots, q_N) :

Le Jacobien d'une transformation des coordonnées généralisées (q_1, \dots, q_N) aux coordonnées cartésiennes (x_1, \dots, x_N) est le déterminant de la matrice Jacobienne :

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial q_1 x_1}{\partial q_1} & \frac{\partial q_2 x_1}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial q_N x_1}{\partial q_N} \\ \frac{\partial q_1 x_2}{\partial q_1} & \frac{\partial q_2 x_2}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial q_N x_2}{\partial q_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial q_1 x_N}{\partial q_1} & \frac{\partial q_2 x_N}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial q_N x_N}{\partial q_N} \end{pmatrix}$$

Ce Jacobien, ou plus précisément sa valeur absolue, $|\det(J)|$, est le facteur de conversion entre les éléments de volume : $dV_{cart} = |\det(J)|dV_q$. Pour un système de coordonnées orthogonales, le Jacobien est le produit des facteurs d'échelle :

$$|\det(J)| = \prod_{i=1}^N h_i$$

Cartésien :

$$J \left(\vec{f} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} & \frac{\partial f_x}{\partial z} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} & \frac{\partial f_y}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} & \frac{\partial f_z}{\partial y} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Cylindrique :

$$J \left(\vec{f} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_\rho}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\rho}{\partial \varphi} - \frac{f_\varphi}{\rho} & \frac{\partial f_\rho}{\partial z} \\ \frac{\partial f_\varphi}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{f_\rho}{\rho} & \frac{\partial f_\varphi}{\partial z} \\ \frac{\partial f_z}{\partial \rho} & \frac{1}{\rho} \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial f_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Sphérique :

$$J(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_r}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial f_r}{\partial \theta} - \frac{f_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_r}{\partial \varphi} - \frac{f_\varphi}{r} \\ \frac{\partial f_\theta}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial f_\theta}{\partial \theta} + \frac{f_r}{r} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\theta}{\partial \varphi} - \frac{f_\varphi \cot \theta}{r} \\ \frac{\partial f_\varphi}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \theta} & \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{f_r}{r} + \frac{f_\theta \cot \theta}{r} \end{pmatrix}$$

Parabolique :

$$J(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_\sigma}{\partial \tau} & \frac{1}{\sigma \tau} \frac{\partial f_\sigma}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_\tau}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_\tau}{\partial \tau} & \frac{1}{\sigma \tau} \frac{\partial f_\tau}{\partial \phi} \\ \frac{\partial f_\phi}{\partial \sigma} & \frac{\partial f_\phi}{\partial \tau} & \frac{1}{\sigma \tau} \frac{\partial f_\phi}{\partial \phi} \end{pmatrix}$$

Ellipsoïdales (λ, μ, ν) :

$$J(\vec{f})_{ij} = \frac{1}{h_j} \frac{\partial(h_i f_i)}{\partial q_j} - \frac{f_j}{h_j} \frac{\partial h_j}{\partial q_i} + \sum_k \Gamma_{jk}^i f_k$$

Barycentriques (L_1, L_2, L_3) dans un triangle :

$$J(\vec{f}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial L_1} & \frac{\partial f_1}{\partial L_2} & \frac{\partial f_1}{\partial L_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial L_1} & \frac{\partial f_2}{\partial L_2} & \frac{\partial f_2}{\partial L_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial L_1} & \frac{\partial f_3}{\partial L_2} & \frac{\partial f_3}{\partial L_3} \end{pmatrix}$$

Toroïdales (σ, τ, ϕ) :

$$J(\vec{f})_{\sigma\sigma} = \frac{1}{h_\sigma} \frac{\partial(h_\sigma f_\sigma)}{\partial \sigma} - \frac{f_\sigma}{h_\sigma} \frac{\partial h_\sigma}{\partial \sigma} + \Gamma_{\sigma\sigma}^\sigma f_\sigma + \Gamma_{\sigma\tau}^\sigma f_\tau + \Gamma_{\sigma\phi}^\sigma f_\phi$$

Pour des facteurs d'échelle : $h_\sigma = h_\tau = a(\cosh \sigma - \cos \tau)$ et $h_\phi = a \sinh \sigma$.

Coniques (r, μ, ν) :

$$J(\vec{f})_{rr} = \frac{\partial f_r}{\partial r} + \Gamma_{rr}^r f_r + \Gamma_{r\mu}^r f_\mu + \Gamma_{r\nu}^r f_\nu$$

Pour des facteurs d'échelle : $h_r = 1, h_\mu = r \sqrt{\frac{(\mu^2 - \beta^2)(\mu^2 - \gamma^2)}{(\mu^2 - \nu^2)}}, h_\nu = r \sqrt{\frac{(\nu^2 - \beta^2)(\nu^2 - \gamma^2)}{(\nu^2 - \mu^2)}}$.

3 Identités différentielles

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi) &= \vec{0} \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= 0 \\
\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{F}) &= \phi \vec{\nabla} \cdot \vec{F} + \vec{F} \cdot \vec{\nabla} \phi \\
\vec{\nabla} \times (\phi \vec{F}) &= \phi \vec{\nabla} \times \vec{F} + (\vec{\nabla} \phi) \times \vec{F} \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{G} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{G}) \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \Delta \vec{F} \\
\vec{\nabla} (\vec{F} \cdot \vec{G}) &= (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} + \vec{F} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) + \vec{G} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \phi) &= \Delta \phi \\
\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{F}) &= \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) - \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \\
\vec{\nabla} \times (\vec{F} \times \vec{G}) &= \vec{F} (\vec{\nabla} \cdot \vec{G}) - \vec{G} (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) + (\vec{G} \cdot \vec{\nabla}) \vec{F} - (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{G} \\
\Delta (\phi \psi) &= \phi \Delta \psi + 2 \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \Delta \phi \\
\vec{\nabla} \cdot (\phi \vec{\nabla} \psi) &= \phi \Delta \psi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi \\
\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \phi \times \vec{F}) &= (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \phi - \vec{F} \Delta \phi \\
\Delta (\vec{F} \cdot \vec{G}) &= \vec{F} \cdot \Delta \vec{G} + \vec{G} \cdot \Delta \vec{F} + 2 \sum_i \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial x^i} \right) \\
\Delta (\vec{\nabla} \phi) &= \vec{\nabla} (\Delta \phi) \\
H(\phi) &= \vec{\nabla} \otimes \vec{\nabla} \phi, \quad \text{Tr}(H(\phi)) = \Delta \phi \\
H(\phi \psi) &= \phi H(\psi) + \psi H(\phi) + \vec{\nabla} \phi \otimes \vec{\nabla} \psi + \vec{\nabla} \psi \otimes \vec{\nabla} \phi \\
J(\vec{F}) &= \vec{\nabla} \otimes \vec{F}, \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = \text{Tr}(J(\vec{F})) \\
\Delta \vec{F} &= \vec{\nabla} \cdot J(\vec{F}) \\
\Delta J(\vec{F}) &= J(\Delta \vec{F}) \\
\Delta H(\phi) &= H(\Delta \phi)
\end{aligned}$$

4 Règles de calcul tensoriel

Convention de sommation d'Einstein

La convention d'Einstein stipule que si un indice apparaît une fois en position d'indice supérieur (contravariant) et une fois en position d'indice inférieur (covariant) dans un terme, une sommation est implicitement effectuée sur toutes les valeurs possibles de cet indice. Cette convention simplifie l'écriture des équations en relativité et en mécanique des milieux continus.

$$\forall n, \quad a_i b^i = \sum_{i=1}^n a_i b^i$$

Relèvement/abaissement d'indices

Le tenseur métrique g_{ij} et son inverse g^{ij} sont utilisés pour abaisser ou relever les indices des vecteurs et des tenseurs. Cela permet de passer d'une description contravariante à une description covariante, et vice-versa, en conservant la grandeur physique sous-jacente.

$$v_i = g_{ij} v^j, \quad v^i = g^{ij} v_j$$

Delta de Kronecker

Le delta de Kronecker est un tenseur qui agit comme une identité. En coordonnées cartésiennes, il est souvent représenté par une matrice identité.

$$\delta^i_j = g^{ik} g_{kj}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Symbole de Levi-Civita (permutation en 3D)

Le symbole de Levi-Civita est un pseudotenseur qui caractérise l'orientation d'un espace. Il est utilisé pour définir le produit vectoriel et le produit mixte en 3 dimensions, ainsi que d'autres constructions de type déterminant.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation paire de } (1, 2, 3) \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est une permutation impaire de } (1, 2, 3) \\ 0 & \text{si au moins deux indices sont égaux} \end{cases}$$

Tenseur métrique

Le tenseur métrique g_{ij} est l'objet fondamental qui définit la géométrie de l'espace-temps. Il permet de calculer les distances, les angles et les volumes, et sa forme dépend du système de coordonnées choisi. Il est symétrique par définition.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j, \quad g_{ij} = g_{ji}$$

2D cartésien (x, y)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3D cartésien (x, y, z)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2D cylindrique (r, z)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3D cylindrique (r, θ, z)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2D polaire (r, θ)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}$$

3D sphérique (r, θ, φ)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}$$

2D parabolique (σ, τ)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \tau^2 \end{pmatrix}$$

3D parabolique (σ, τ, ϕ)

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma^2 + \tau^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^2 + \tau^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^2 \tau^2 \end{pmatrix}$$

Identité epsilon-delta

Cette identité est un outil puissant pour simplifier les expressions impliquant les symboles de Levi-Civita, en les ramenant à des produits de deltas de Kronecker.

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$$

Tenseur de Levi-Civita (3D)

Le tenseur de Levi-Civita est défini à partir du symbole de Levi-Civita et de la racine carrée du déterminant de la métrique, $\sqrt{|g|}$. Il permet de définir des concepts tels que les pseudo-scalaires et pseudo-vecteurs en géométrie courbe.

$$E_{ijk} = \sqrt{|g|} \varepsilon_{ijk}, \quad E^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{ijk}, \quad E^{ijk} = g^{ia} g^{jb} g^{kc} E_{abc}$$

Changement de base

Les lois de transformation des vecteurs et covecteurs sont fondamentales en calcul tensoriel. Elles garantissent que les quantités physiques sont indépendantes du système de coordonnées choisi. Un vecteur est contravariant, tandis qu'un covecteur est covariant.

<p>Vecteur</p> $v'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} v^j$	<p>Covecteur</p> $\omega'_i = \frac{\partial x^j}{\partial x'^i} \omega_j$
--	--

Transformation tensorielle

Les tenseurs se transforment selon des règles spécifiques qui dépendent de leurs indices contravariants et covariants. Cette transformation garantit que l'objet tensoriel lui-même est intrinsèque et ne dépend pas des coordonnées.

$$T'^{i_1 \dots i_r}_{j_1 \dots j_s} = \frac{\partial x'^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \dots \frac{\partial x'^{i_r}}{\partial x^{k_r}} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x'^{j_1}} \dots \frac{\partial x^{l_s}}{\partial x'^{j_s}} T^{k_1 \dots k_r}_{l_1 \dots l_s}$$

Produit scalaire (contravariant–covariant)

Le produit scalaire entre un vecteur contravariant et un covecteur covariant est un scalaire, une quantité invariante sous changement de coordonnées.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b^i$$

Produit vectoriel (3D, base orthonormée)

$$\left[\vec{a} \times \vec{b} \right]_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k \quad (\text{équivalentement}) \quad \left[\vec{a} \times \vec{b} \right]^i = \varepsilon^{ijk} a_j b_k$$

Produit mixte (triple scalaire, 3D)

Le produit mixte de trois vecteurs en 3D est un scalaire qui représente le volume du parallélépipède formé par ces trois vecteurs.

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \varepsilon_{ijk} a^i b^j c^k$$

Identité du double produit vectoriel (3D)

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Dérivée covariante (coordonnées curvilignes)

La dérivée covariante généralise la notion de dérivée aux espaces courbes, permettant de comparer des vecteurs en des points différents.

$$\vec{\nabla}_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \Gamma^j_{ik} v^k$$

Symbole de Christoffel (connexion de Levi-Civita)

Les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs, mais des fonctions des composantes

du tenseur métrique et de leurs dérivées. Ils décrivent comment les vecteurs de base changent d'un point à l'autre dans un espace courbe.

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{km} \left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right)$$

Dérivée covariante du tenseur métrique (compatibilité métrique)

La compatibilité métrique est un postulat fondamental de la géométrie riemannienne, stipulant que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle. Cela signifie que le transport parallèle préserve la longueur des vecteurs et les angles.

$$\vec{\nabla}_k g_{ij} = 0$$

Dérivée de Lie du tenseur métrique

La dérivée de Lie mesure la variation d'un tenseur le long des courbes intégrales d'un champ de vecteurs.

$$\mathcal{L}_X g_{ij} = \vec{\nabla}_i X_j + \vec{\nabla}_j X_i$$

Tenseur de Riemann

Le tenseur de Riemann est une mesure fondamentale de la courbure intrinsèque d'une variété. Si le tenseur de Riemann est nul, l'espace est plat. Il capture la non-commutativité des dérivées covariantes.

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial x^l} + \Gamma^i_{km} \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{lm} \Gamma^m_{jk}$$

Contraction du tenseur de Ricci

Le tenseur de Ricci est une contraction du tenseur de Riemann. Il décrit comment le volume d'une petite boule de géodésiques se déforme en présence de courbure. C'est un composant clé des équations d'Einstein.

$$R_{ij} = R^k_{ikj}$$

Courbure scalaire

La courbure scalaire est la contraction du tenseur de Ricci avec le tenseur métrique inverse. C'est une mesure globale de la courbure de l'espace-temps en un point, apparaissant dans l'action d'Einstein-Hilbert.

$$R = g^{ij} R_{ij}$$

Définition de l'angle

$$\cos(\theta) = \frac{g_{ij} u^i v^j}{\sqrt{g_{kl} u^k u^l} \sqrt{g_{mn} v^m v^n}}$$

Identité de Bianchi (complète)

Complète

$$\vec{\nabla}_i R_{jklm} + \vec{\nabla}_j R_{kilm} + \vec{\nabla}_k R_{ijlm} = 0$$

Contractée

$$\vec{\nabla}_i R^i{}_j - \frac{1}{2} \vec{\nabla}_j R = 0$$

Volume infinitésimal (3D)

$$dV = \sqrt{|g|} dx^1 dx^2 dx^3 \quad \text{avec} \quad g = \det(g_{ij})$$

Divergence d'un champ vectoriel

$$\nabla_i v^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} v^i \right)$$

Opérateur de Laplace — Beltrami

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

Opérateur de Laplace (coordonnées cartésiennes)

En coordonnées cartésiennes plates, l'opérateur de Laplace simplifie l'opérateur de Laplace-Beltrami, puisque $g_{ij} = \delta_{ij}$ et $\sqrt{|g|} = 1$.

$$\Delta f = \delta^{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

Symétrisation et antisymétrisation

Tout tenseur peut être décomposé en une partie symétrique et une partie antisymétrique.

$$T_{(ij)} = \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji}), \quad T_{[ij]} = \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji})$$

Tenseur antisymétrique (2-forme) et son dual (3D)

Le dual d'Hodge d'un tenseur antisymétrique (ou 2-forme) est une manière de représenter les propriétés du champ dans un espace de dimension différente. En 3D, le dual d'une 2-forme est un vecteur.

$$F_{ij} = -F_{ji}, \quad \tilde{F}^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}$$

Tenseur énergie-impulsion (fluide parfait)

Le tenseur énergie-impulsion est un tenseur symétrique de rang 2 qui décrit la densité et les flux d'énergie et de quantité de mouvement. Pour un fluide parfait, il est caractérisé par sa densité d'énergie ρ et sa pression p .

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p) u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu}$$

4.1 Nature tensorielle de la Position, Vitesse et Accélération

Vecteur Position

Un vecteur position \vec{r} est un tenseur de rang 1 contravariant. Ses composantes x^i (par exemple x, y, z) sont les coordonnées d'un point. Un changement de système de coordonnées, de x^i à x'^i , est défini par des fonctions :

$$x'^i = x'^i(x^j)$$

La "position" d'un point est une notion géométrique intrinsèque, indépendante du choix des coordonnées. C'est pourquoi un vecteur position est considéré comme un tenseur.

Exemple (2D Cartésien vers Polaire) : Pour un vecteur position en 2D, de (x^1, x^2) (cartésien) à $(x'^1, x'^2) = (r, \theta)$ (polaire) :

$$x^1 = r \cos \theta \quad \text{et} \quad x^2 = r \sin \theta$$

Les coordonnées polaires r et θ ne sont pas de simples transformations linéaires des coordonnées cartésiennes. Par exemple, si on prend un point $(1, 0)$ en cartésien, il correspond à $(1, 0)$ en polaire. Si on prend un point $(0, 1)$, il correspond à $(1, \pi/2)$.

Un déplacement infinitésimal $d\vec{r}$ se transforme comme un vecteur :

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} dx^j$$

Cette loi de transformation garantit que l'élément de déplacement infinitésimal est un tenseur contravariant de rang 1. C'est la propriété clé des tenseurs : leurs composantes changent, mais l'objet géométrique sous-jacent reste le même.

Vecteur Vitesse

Le vecteur vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ est la dérivée du vecteur position par rapport à un scalaire (le temps t). Comme la transformation des coordonnées affecte $d\vec{r}$ de manière linéaire (pour des déplacements infinitésimaux), la vitesse hérite de cette propriété. Ses composantes $v^i = \frac{dx^i}{dt}$ se transforment selon la loi tensorielle contravariante :

$$v'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j} v^j$$

Ceci est la loi de transformation d'un tenseur contravariant de rang 1.

Exemple (transformation explicite en 2D) Si $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})$ en cartésien, et que nous passons à (v^r, v^θ) en polaire :

$$v^r = \frac{\partial r}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial r}{\partial y} \dot{y} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \dot{x} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \dot{y}$$

$$v^\theta = \frac{\partial \theta}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \dot{y} = -\frac{y}{x^2 + y^2} \dot{x} + \frac{x}{x^2 + y^2} \dot{y}$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$ (qui forment la matrice Jacobienne) assurent que les nouvelles composantes v'^i représentent le même vecteur vitesse physique, mais exprimé dans le nouveau système de coordonnées.

Vecteur Accélération

Le vecteur accélération $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ est un cas plus subtil. Si nous prenons simplement la dérivée ordinaire de v^i par rapport au temps, $\frac{dv^i}{dt}$, cette quantité *ne se transforme pas* comme un tenseur contravariant en coordonnées curvilignes. **Le Problème :** En coordonnées curvilignes (comme les polaires), les vecteurs de base eux-mêmes ($\hat{e}_r, \hat{e}_\theta$) changent de direction d'un point à l'autre.

$$\vec{v} = v^i \vec{e}_i$$

Alors :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v^i \vec{e}_i) = \frac{dv^i}{dt} \vec{e}_i + v^i \frac{d\vec{e}_i}{dt}$$

Le terme $v^i \frac{d\vec{e}_i}{dt}$ représente la variation des vecteurs de base. Il est non nul en coordonnées curvilignes. Ce terme supplémentaire doit être inclus pour que l'accélération soit une quantité intrinsèque (tensorielle).

La définition tensorielle de l'accélération nécessite la dérivée covariante par rapport au temps ($\frac{Dv^i}{Dt}$), qui est conçue pour inclure ces effets de courbure des coordonnées :

$$a^i = \frac{Dv^i}{Dt} = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j \frac{dx^k}{dt}$$

En utilisant $v^k = \frac{dx^k}{dt}$, cela devient la forme courante de l'accélération covariante :

$$a^i = \frac{dv^i}{dt} + \Gamma^i_{jk} v^j v^k$$

Les symboles de Christoffel Γ^i_{jk} (qui proviennent des dérivées des vecteurs de base) compensent la variation des vecteurs de base d'un point à l'autre, garantissant ainsi que a^i se transforme correctement comme un tenseur contravariant de rang 1. Sans ce terme de Christoffel, $\frac{dv^i}{dt}$ seul ne serait pas un tenseur.

4.2 Opérateurs différentiels en formalisme tensoriel

Gradient (champ scalaire f)

$$[\vec{\nabla} f]_i = \frac{\partial f}{\partial x^i} = \partial_i f$$

Divergence (champ vectoriel A^i)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \nabla_i A^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} A^i \right)$$

Rotationnel (champ vectoriel A^i en 3D)

$$\left(\vec{\nabla} \times \vec{A} \right)^i = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{ijk} \nabla_j A_k = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \varepsilon^{ijk} (\partial_j A_k - \Gamma_{jk}^m A_m)$$

Laplacien

Scalaire f

$$\Delta f = \nabla_i \nabla^i f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right)$$

Vectoriel A^i

$$\left(\Delta \vec{A} \right)^i = \nabla_j \nabla^j A^i = g^{jk} (\partial_j \partial_k A^i - \Gamma_{jk}^m \partial_m A^i + \Gamma_{mj}^i \partial_k A^m - \Gamma_{jk}^m \Gamma_{mn}^i A^n)$$

Hessien (scalaire f)

$$H_{ij}(f) = \nabla_i \nabla_j f = \partial_i \partial_j f - \Gamma_{ij}^k \partial_k f$$

Jacobien (application $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$)

$$J_j^i(\vec{F}) = \frac{\partial F^i}{\partial x^j}$$

5 Théorèmes intégraux

Les théorèmes intégraux constituent des outils fondamentaux en physique et en mathématiques, permettant de relier des intégrales sur des domaines de différentes dimensions. Ils sont essentiels pour la formulation des lois physiques sous forme intégrale et différentielle, et pour la résolution de problèmes en électromagnétisme, mécanique des fluides, et bien d'autres domaines.

5.1 Théorème de Schwarz (généralisation)

Le théorème de Schwarz (ou théorème de Clairaut) stipule que l'ordre de dérivation partielle n'importe pas pour une fonction suffisamment lisse. Pour une fonction $f(\mathbf{q})$ de plusieurs variables $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ définies dans un système de coordonnées quelconque, si les dérivées partielles croisées sont continues dans un voisinage d'un point, alors :

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial f}{\partial q_j} \right) = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \right)$$

Cette propriété est fondamentale pour de nombreuses applications en physique et en ingénierie, car elle garantit la cohérence des calculs impliquant des dérivées d'ordre supérieur, indépendamment de l'ordre d'évaluation, et est valable dans tout système de coordonnées pour lequel la fonction est bien définie et suffisamment différentiable.

5.2 Théorème du gradient (fondamental du calcul)

Ce théorème établit un lien direct entre l'intégrale d'un gradient le long d'une courbe et la différence de la fonction scalaire aux extrémités de cette courbe. Il est l'équivalent multidimensionnel du théorème fondamental du calcul.

$$\int_C \vec{\nabla} \phi \cdot d\vec{r} = \phi(\vec{b}) - \phi(\vec{a})$$

Ici, C est une courbe orientée allant du point \vec{a} au point \vec{b} , et ϕ est une fonction scalaire différentiable. Ce théorème est particulièrement utile pour démontrer que le travail d'une force conservative ne dépend que des points de départ et d'arrivée.

5.3 Théorème de Green (dans le plan)

Le théorème de Green est une relation clé entre une intégrale curviligne le long d'une courbe fermée simple dans le plan et une intégrale double sur la région délimitée par cette courbe. Il est un cas particulier du théorème de Stokes.

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = \oint_C (Pdx + Qdy)$$

D est une région du plan délimitée par la courbe fermée simple C , parcourue dans le sens positif (anti-horaire). Les fonctions $P(x, y)$ et $Q(x, y)$ doivent avoir des dérivées partielles continues sur D . Ce théorème est souvent utilisé pour calculer des aires ou des circulations.

5.4 Théorème de Stokes (circulation — rotationnel)

Le théorème de Stokes généralise le théorème de Green à trois dimensions, connectant l'intégrale de surface du rotationnel d'un champ vectoriel à la circulation de ce champ le long de la frontière de la surface.

$$\iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Où S est une surface orientée dans l'espace, C est sa courbe frontière orientée positivement (selon la règle de la main droite par rapport à l'orientation de S), et \vec{F} est un champ vectoriel ayant des dérivées partielles continues. Ce théorème est fondamental en électromagnétisme, par exemple pour dériver la forme locale de la loi de Faraday.

5.5 Théorème de la divergence (Ostrogradski — Gauss)

Le théorème de la divergence met en relation le flux d'un champ vectoriel à travers une surface fermée et l'intégrale du divergent de ce champ sur le volume qu'elle enferme. C'est un principe fondamental pour la conservation et la distribution des quantités physiques.

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{F}) dV = \oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

V est un volume délimité par une surface fermée S orientée vers l'extérieur, et \vec{F} est un champ vectoriel ayant des dérivées partielles continues sur V . Ce théorème est essentiel dans les lois de Gauss de l'électrostatique et du magnétisme, ainsi qu'en mécanique des fluides.

5.6 Théorème de Green (première identité)

Cette identité est dérivée du théorème de la divergence et relie les intégrales de volume impliquant le Laplacien de fonctions scalaires à des intégrales de surface de leurs dérivées normales.

$$\iiint_V (\phi \Delta \psi + \vec{\nabla} \phi \cdot \vec{\nabla} \psi) dV = \iint_S \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$$

Ici, ϕ et ψ sont des fonctions scalaires avec des dérivées secondes continues, Δ est l'opérateur Laplacien, et $\frac{\partial \psi}{\partial n} = \vec{\nabla} \psi \cdot \vec{n}$ est la dérivée normale de ψ sur la surface S .

5.7 Théorème de Green (seconde identité)

La seconde identité de Green est obtenue en soustrayant la première identité appliquée à ϕ et ψ et celle appliquée à ψ et ϕ . Elle est très utile pour résoudre des équations de Poisson et de Laplace.

$$\iiint_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dV = \iint_S \left(\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS$$

Cette identité est cruciale en physique mathématique pour prouver l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles et pour développer la méthode des fonctions de Green.

5.8 Formule de Green — Ostrogradski pour le Laplacien (vecteur)

Cette formule étend les identités de Green aux champs vectoriels, reliant des opérateurs différentiels vectoriels et des intégrales de surface.

$$\iiint_V \left(\vec{F} \cdot \Delta \vec{G} + \vec{\nabla} \vec{F} : \vec{\nabla} \vec{G} \right) dV = \oint_S \vec{F} \cdot \frac{\partial \vec{G}}{\partial n} dS$$

\vec{F} et \vec{G} sont des champs vectoriels, $\Delta \vec{G}$ est le Laplacien vectoriel, et $\vec{\nabla} \vec{F} : \vec{\nabla} \vec{G}$ représente le produit contracté des tenseurs gradients (par exemple, $\sum_{i,j} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \frac{\partial G_i}{\partial x_j}$ pour la convention usuelle). L'opérateur $\frac{\partial \vec{G}}{\partial n} = (\vec{\nabla} \vec{G}) \cdot \vec{n}$ est la dérivée normale du champ vectoriel.

5.9 Identité intégrale de l'Hessien (par parties en 2D/3D)

Cette identité est une forme d'intégration par parties pour les opérateurs d'ordre supérieur, spécifiquement impliquant la matrice Hessienne d'une fonction scalaire.

$$\iiint_V H(\phi) : H(\psi) dV = \oint_S \frac{\partial \phi}{\partial n} \Delta \psi dS - \iiint_V \Delta \phi \Delta \psi dV$$

$H(\phi)$ représente le tenseur Hessien de la fonction scalaire ϕ , dont les éléments sont $H_{ij} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}$. Le double point $(:)$ indique une double contraction des indices. Cette identité est utile dans l'analyse variationnelle et la théorie des éléments finis.

5.10 Théorème intégral du Jacobien (formule de changement de variables)

Ce théorème formalise le changement de variables dans les intégrales multiples, introduisant le déterminant du Jacobien de la transformation pour ajuster l'élément de volume. Il est essentiel pour simplifier les intégrales en adaptant le système de coordonnées au domaine d'intégration.

$$\iiint_{\Omega} f(\vec{x}) d\vec{x} = \iiint_{\Omega'} f(\Phi(\vec{u})) |\det J(\Phi)(\vec{u})| d\vec{u}$$

Ω est le domaine d'intégration dans les coordonnées \vec{x} , Ω' est le domaine transformé dans les coordonnées \vec{u} , et Φ est la transformation $\vec{x} = \Phi(\vec{u})$. $J(\Phi)$ est la matrice Jacobienne de la transformation Φ , et son déterminant, en valeur absolue, représente le facteur d'échelle du volume.

5.11 Théorème de Helmholtz (décomposition intégrale)

Le théorème de Helmholtz stipule que tout champ vectoriel suffisamment régulier et s'annulant à l'infini peut être décomposé de manière unique en la somme d'un champ irrotationnel (gradient d'un potentiel scalaire) et d'un champ solénoïdal (rotationnel d'un potentiel vecteur).

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{\nabla}' \cdot \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right) + \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{4\pi} \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{\nabla}' \times \vec{F}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right)$$

Cette décomposition est fondamentale en physique, notamment en électromagnétisme où elle permet de relier les sources (charges et courants) aux champs (électrique et magnétique) via les potentiels scalaires et vecteurs. Le terme $\vec{\nabla}'$ indique que l'opérateur s'applique aux coordonnées de la source \vec{r}' , tandis que le résultat est évalué au point \vec{r} . La quantité $1/(4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|)$ est la fonction de Green du Laplacien dans l'espace libre en 3D.

6 Analyse Complexe

6.1 Fonctions Holomorphes

Une fonction $f(z)$ d'une variable complexe $z = x + iy$ est dite holomorphe dans un domaine ouvert si elle est différentiable en tout point de ce domaine. La différentiabilité complexe est une condition beaucoup plus forte que la différentiabilité réelle, impliquant des propriétés analytiques profondes.

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, où u et v sont des fonctions réelles à valeurs réelles, alors f est holomorphe si et seulement si ses dérivées partielles satisfont aux équations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1)$$

Ces équations peuvent également s'écrire en coordonnées polaires (r, θ) :

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (2)$$

Les fonctions holomorphes possèdent des propriétés remarquables : elles sont infiniment différentiables, leurs intégrales de contour satisfont le théorème de Cauchy, et elles peuvent être représentées par des séries de Taylor. Une conséquence directe des équations de Cauchy-Riemann est que les parties réelle et imaginaire u et v sont des fonctions harmoniques, c'est-à-dire qu'elles satisfont l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

Elles sont fondamentales en physique pour les potentiels (fluidodynamique, électrostatique en 2D), la transformation conforme et les calculs d'intégrales complexes.

Fonctions Harmoniques Conjuguées

Si $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ est holomorphe, alors u et v sont des fonctions harmoniques conjuguées. Connaissant l'une, on peut retrouver l'autre à une constante près en utilisant les équations de Cauchy-Riemann. Par exemple, si $u(x, y)$ est connue :

$$v(x, y) = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy - \int \frac{\partial u}{\partial y} dx$$

Ces paires de fonctions sont cruciales pour résoudre des problèmes de frontière en électrostatique et en mécanique des fluides.

6.2 Intégrales de Contour et Théorème des Résidus

L'intégration de fonctions complexes le long de chemins (contours) dans le plan complexe est un outil puissant pour évaluer des intégrales réelles difficiles et analyser le comportement des fonctions complexes.

Théorème Intégral de Cauchy

Si une fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur et sur un contour fermé simple C (un chemin simple qui ne se coupe pas et qui commence et se termine au même point), alors l'intégrale de $f(z)$ sur ce contour est nulle :

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

Une conséquence importante est que l'intégrale d'une fonction holomorphe entre deux points z_1 et z_2 est indépendante du chemin choisi, pourvu qu'il reste dans un domaine où la fonction est holomorphe.

Formule Intégrale de Cauchy

Si $f(z)$ est holomorphe sur et à l'intérieur d'un contour fermé simple C orienté positivement et z_0 est un point à l'intérieur de C , alors :

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

Cette formule permet de calculer la valeur de la fonction en un point à partir de ses valeurs sur le contour. Elle peut être généralisée pour calculer les dérivées de $f(z)$ en z_0 :

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Ceci démontre que toute fonction holomorphe est infiniment différentiable.

Théorème des Résidus

Si $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur et sur un contour fermé simple C orienté positivement, sauf en un nombre fini de singularités isolées z_k (pôles ou singularités essentielles) à l'intérieur de C , alors l'intégrale de $f(z)$ sur ce contour est donnée par :

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_k \text{Res}(f, z_k)$$

où $\text{Res}(f, z_k)$ est le résidu de f en z_k .

Calcul des Résidus :

- **Pôle simple** en z_k : Si $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ où $g(z)$ est holomorphe en z_k , $h(z)$ a un zéro simple en z_k ($h(z_k) = 0, h'(z_k) \neq 0$), alors :

$$\text{Res}(f, z_k) = \lim_{z \rightarrow z_k} (z - z_k) f(z) = \frac{g(z_k)}{h'(z_k)}$$

- **Pôle d'ordre m** en z_k : Si $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_k)^m}$ où $g(z)$ est holomorphe et non nulle en z_k , alors :

$$\text{Res}(f, z_k) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_k} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_k)^m f(z)]$$

- **Série de Laurent** : Le résidu est le coefficient a_{-1} de la série de Laurent de $f(z)$ autour de z_k .

Le théorème des résidus est un outil indispensable en physique pour le calcul d'intégrales définies réelles (en complétant le contour dans le plan complexe), l'évaluation de transformées de Fourier ou de Laplace inverses, et l'analyse de fonctions de Green dans la théorie des champs et la mécanique quantique.

Lemmes de Jordan

Les lemmes de Jordan sont des outils essentiels pour l'application du théorème des résidus, permettant de montrer que l'intégrale sur une partie du contour (généralement un grand demi-cercle) tend vers zéro. Soit C_R l'arc de cercle $|z| = R$ dans le demi-plan supérieur (ou inférieur).

- Si $f(z) \rightarrow 0$ uniformément pour $|z| \rightarrow \infty$ dans le demi-plan supérieur (ou inférieur), alors pour $\lambda > 0$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{i\lambda z} f(z) dz = 0 \quad (\text{pour le demi-plan supérieur})$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{-i\lambda z} f(z) dz = 0 \quad (\text{pour le demi-plan inférieur})$$

Ce lemme est crucial pour le calcul des transformées de Fourier.

6.3 Séries de Laurent et Singularités

La série de Laurent est une généralisation de la série de Taylor, permettant de représenter une fonction complexe $f(z)$ autour d'une singularité isolée z_0 dans une couronne $R_1 < |z - z_0| < R_2$.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

où les coefficients sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

pour tout contour fermé C dans la couronne et encerclant z_0 .

Partie Principale et Singularités

- La somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ est la **partie analytique**.
- La somme $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n}$ est la **partie principale**.

L'analyse de la partie principale révèle la nature de la singularité en z_0 :

- **Singularité essentielle** : La partie principale contient une infinité de termes. La fonction a un comportement très complexe près de z_0 (théorème de Casorati-Weierstrass).
- **Pôle d'ordre m** : La partie principale contient un nombre fini de termes, avec $a_{-m} \neq 0$ mais $a_{-n} = 0$ pour $n > m$. Un pôle est un type de singularité où la fonction tend vers l'infini.
- **Pôle simple** : C'est un pôle d'ordre $m = 1$. Dans ce cas, $a_{-1} \neq 0$ est le résidu de f en z_0 .
- **Singularité effaçable** : La partie principale est nulle (tous les $a_{-n} = 0$). La fonction peut être étendue à une fonction holomorphe en z_0 .

Les séries de Laurent sont essentielles pour analyser le comportement des fonctions complexes près de leurs singularités, calculer les résidus et comprendre la structure des fonctions comme les fonctions de Green ou les propagateurs en théorie quantique des champs.

7 Calcul Variationnel

7.1 Équations d'Euler-Lagrange

Le calcul variationnel s'intéresse à la minimisation (ou maximisation) de fonctionnelles, c'est-à-dire de fonctions qui prennent en entrée d'autres fonctions. Dans un contexte physique, cela est souvent appliqué au principe de moindre action. Soit une fonctionnelle $S[q(t)]$ définie par une intégrale :

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

où L est le Lagrangien du système, $q(t)$ est une coordonnée généralisée et $\dot{q}(t)$ sa dérivée temporelle. Pour que $S[q(t)]$ soit extrémale (un minimum ou un maximum local), la fonction $q(t)$ doit satisfaire les équations d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

Si le système possède plusieurs degrés de liberté, (q_1, q_2, \dots, q_N) , alors il y a une équation d'Euler-Lagrange pour chaque coordonnée q_i :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N$$

Ces équations sont à la base de la formulation lagrangienne de la mécanique et permettent de dériver les équations du mouvement.

Cas avec Dérivées d'Ordre Supérieur

Dans certains systèmes physiques, le Lagrangien peut dépendre de dérivées temporelles d'ordre supérieur de la fonction $q(t)$, par exemple $\ddot{q}(t)$. Pour une fonctionnelle de la forme :

$$S[q(t)] = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), \ddot{q}(t), t) dt$$

les équations d'Euler-Lagrange généralisées deviennent :

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{\partial L}{\partial \ddot{q}} \right) = 0$$

Cette généralisation est importante en mécanique des milieux continus ou pour certaines théories gravitationnelles.

Cas Multidimensionnel (Champs)

Pour des champs $\phi(x, y, z, t)$ définis dans un espace multidimensionnel, le Lagrangien est remplacé par une densité lagrangienne $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu)$. L'action est alors une intégrale sur l'espace-temps :

$$S[\phi] = \int \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi, x^\mu) d^4x$$

où $x^\mu = (t, x, y, z)$ et $\partial_\mu \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}, \vec{\nabla} \phi \right)$. Les équations d'Euler-Lagrange pour les champs prennent la forme :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) = 0$$

Ceci est fondamental en théorie quantique des champs et en physique des particules.

7.2 Contraintes et Multiplicateurs de Lagrange

Lorsque le mouvement d'un système est soumis à des contraintes, les coordonnées généralisées ne sont plus indépendantes. Les contraintes peuvent être holonomes (exprimables sous la forme $f(q_1, \dots, q_N, t) = 0$) ou non holonomes. Pour les contraintes holonomes, la méthode des multiplicateurs de Lagrange permet d'intégrer ces contraintes dans la formulation lagrangienne. Si nous avons m contraintes holonomes de la forme $f_j(q_1, \dots, q_N, t) = 0$ pour $j = 1, \dots, m$, on modifie le Lagrangien effectif L' comme suit :

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t, \lambda_j) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \sum_{j=1}^m \lambda_j(t) f_j(q_i, t)$$

où $\lambda_j(t)$ sont les multiplicateurs de Lagrange. Les équations d'Euler-Lagrange sont alors appliquées à L' par rapport à chaque q_i et chaque λ_j :

$$\begin{aligned} \frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_i} \right) &= 0 \quad \text{pour } i = 1, \dots, N \\ \frac{\partial L'}{\partial \lambda_j} &= f_j(q_i, t) = 0 \quad \text{pour } j = 1, \dots, m \end{aligned}$$

Ce système de $N + m$ équations permet de déterminer les N fonctions $q_i(t)$ et les m multiplicateurs $\lambda_j(t)$. Les multiplicateurs de Lagrange ont souvent une signification physique, représentant les forces de contrainte.

Forces de Contrainte Généralisées

Les multiplicateurs de Lagrange λ_j sont directement liés aux forces généralisées $Q_i^{(c)}$ exercées par les contraintes. Si l'on réécrit les équations d'Euler-Lagrange avec contraintes comme :

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = Q_i^{(c)}$$

alors les forces de contrainte généralisées sont données par :

$$Q_i^{(c)} = - \sum_{j=1}^m \lambda_j \frac{\partial f_j}{\partial q_i}$$

Ces forces agissent perpendiculairement à la surface de contrainte dans l'espace des coordonnées généralisées.

7.3 Principe de Moindre Action

Le principe de moindre action, ou plus rigoureusement le principe de Hamilton, stipule que l'évolution temporelle d'un système physique entre deux instants t_1 et t_2 est telle que l'action S est extrémale (généralement un minimum local). L'action S est définie comme l'intégrale du Lagrangien L par rapport au temps :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q(t), \dot{q}(t), t) dt$$

où $L = T - V$ est la différence entre l'énergie cinétique T et l'énergie potentielle V du système. Le principe s'énonce comme $\delta S = 0$, où δ représente une variation de la trajectoire. L'application de ce principe conduit directement aux équations d'Euler-Lagrange, qui sont les équations du mouvement du système. Ce principe est une formulation fondamentale de la mécanique classique et quantique, offrant une approche unificatrice pour dériver les lois du mouvement et étant adaptable à divers domaines de la physique.

Dérivation des Équations d'Euler-Lagrange

La condition $\delta S = 0$ implique que pour une variation arbitraire $\delta q(t)$ (telle que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$), on doit avoir :

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) dt = 0$$

En utilisant l'intégration par parties pour le second terme :

$$\int \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} dt = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q \right]_{t_1}^{t_2} - \int \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

Étant donné que $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$, le terme de bord s'annule. On obtient alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \right) \delta q dt = 0$$

Puisque δq est arbitraire, l'intégrande doit être nul, ce qui donne les équations d'Euler-Lagrange.

Conservation des Grandeurs (Théorème de Noether)

Un résultat profond lié au calcul variationnel et au principe de moindre action est le théorème de Noether. Il établit une correspondance directe entre les symétries continues d'un système et ses lois de conservation. Si un système est invariant sous une transformation infinitésimale d'une coordonnée généralisée $q_i \rightarrow q_i + \epsilon \delta q_i$, alors il existe une quantité conservée J associée à cette symétrie. La quantité conservée, appelée courant de Noether, est donnée par :

$$J = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i - K$$

où K est un terme qui dépend de la dérivée totale du Lagrangien si la symétrie n'est pas "stricte". Pour une symétrie qui laisse le Lagrangien invariant, $\frac{dJ}{dt} = 0$. Par exemple :

- Si L ne dépend pas explicitement du temps ($\partial L / \partial t = 0$), l'énergie totale du système est conservée.
- Si L ne dépend pas d'une coordonnée q_i (i.e., $\partial L / \partial q_i = 0$), alors la quantité de mouvement généralisée associée $p_i = \partial L / \partial \dot{q}_i$ est conservée. Cette q_i est alors appelée "coordonnée cyclique".

C'est un outil essentiel pour comprendre les lois fondamentales de la physique (conservation de l'énergie, de la quantité de mouvement, du moment angulaire, des charges, etc.).

8 Transformations Intégrales

8.1 Transformée de Fourier (continue et discrète)

La transformée de Fourier est un outil mathématique fondamental qui décompose une fonction de son domaine original (généralement le temps ou l'espace) en ses fréquences constitutives. Elle révèle le spectre fréquentiel d'un signal ou d'une fonction.

Transformée de Fourier Continue (TFC)

Pour une fonction $f(t)$ (ou $f(x)$) appartenant à $L^1(\mathbb{R})$ (absolument intégrable), sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\{f(t)\}(k)$ est définie par :

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-ikt} dt$$

où k est la variable de fréquence angulaire. D'autres conventions existent, notamment avec e^{ikt} pour le noyau ou avec un facteur $1/(2\pi)$ ou $1/\sqrt{2\pi}$ réparti entre la transformée et sa réciproque.

La transformée de Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(k)\}(t)$ permet de reconstruire la fonction originale à partir de son spectre :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt} dk$$

La TFC est largement utilisée en traitement du signal, en mécanique quantique (passage position-impulsion), en optique, etc.

Propriétés

- Linéarité : $\mathcal{F}\{af(t) + bg(t)\} = a\hat{f}(k) + b\hat{g}(k)$
- Décalage temporel : $\mathcal{F}\{f(t - t_0)\} = e^{-ikt_0} \hat{f}(k)$
- Décalage fréquentiel : $\mathcal{F}\{e^{ik_0 t} f(t)\} = \hat{f}(k - k_0)$
- Dérivation : $\mathcal{F}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = (ik)^n \hat{f}(k)$ (transforme les équations différentielles en équations algébriques)
- Intégration : $\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{ik} \hat{f}(k) + \pi \hat{f}(0) \delta(k)$
- Produit de convolution : $\mathcal{F}\{(f * g)(t)\} = \hat{f}(k) \hat{g}(k)$ (où $(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau$)
- Théorème de Parseval/Plancherel : $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk$ (conservation de l'énergie)

Transformée de Fourier Discrète (TFD)

Pour une séquence discrète et de longueur finie $x[n]$ de N échantillons ($n = 0, 1, \dots, N-1$), la TFD $X[m]$ est définie par :

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-i \frac{2\pi}{N} mn} \quad \text{pour } m = 0, 1, \dots, N-1$$

La TFD inverse est donnée par :

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X[m] e^{i \frac{2\pi}{N} mn} \quad \text{pour } n = 0, 1, \dots, N-1$$

La TFD est cruciale en traitement numérique du signal et est généralement calculée efficacement par l'algorithme de la Transformée de Fourier Rapide (FFT).

8.2 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace est une transformation intégrale utilisée pour résoudre des équations différentielles, notamment celles décrivant des systèmes dynamiques. Elle transforme une fonction $f(t)$ du domaine temporel en une fonction $F(s)$ dans le domaine fréquentiel complexe.

Définition

La transformée de Laplace bilatérale d'une fonction $f(t)$ est définie par :

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

où $s = \sigma + i\omega$ est une variable complexe. Cependant, en physique et ingénierie, la transformée de Laplace unilatérale (ou causale) est plus courante, où $f(t) = 0$ pour $t < 0$:

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

L'intégrale converge pour les valeurs de s dans la région de convergence (ROC).

Transformée de Laplace Inverse

La transformée de Laplace inverse est donnée par l'intégrale de Bromwich (ou formule d'inversion de Mellin-Fourier) :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) e^{st} ds$$

où σ est une constante réelle choisie de manière à ce que le chemin d'intégration se trouve dans la région de convergence de $F(s)$.

Propriétés Clés de la Transformée de Laplace

- Linéarité : $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s)$
- Décalage temporel : $\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s)$ pour $a \geq 0$ (où $u(t)$ est la fonction échelon unité)
- Décalage fréquentiel : $\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\} = F(s-a)$
- Dérivation : $\mathcal{L}\left\{\frac{df}{dt}\right\} = sF(s) - f(0^-)$ (pour la transformée unilatérale)
- Dérivation d'ordre n : $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0^-) - \dots - f^{(n-1)}(0^-)$
- Intégration : $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{1}{s}F(s)$
- Convolution : $\mathcal{L}\{(f * g)(t)\} = F(s)G(s)$
- Valeur initiale : $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
- Valeur finale : $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$ (si la limite existe)

La transformée de Laplace est indispensable pour l'analyse des circuits électriques, la théorie du contrôle, et la résolution d'équations différentielles ordinaires et partielles en physique.

8.3 Transformée d'Hankel

La transformée d'Hankel est l'analogue de la transformée de Fourier pour les fonctions à symétrie radiale en coordonnées cylindriques. Elle décompose une fonction radiale en une somme de fonctions de Bessel.

Définition

La transformée d'Hankel d'ordre ν d'une fonction $f(\rho)$ est définie par :

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(\rho) J_\nu(k\rho) \rho d\rho$$

où $J_\nu(x)$ est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν . L'ordre ν est souvent un entier ou un demi-entier non négatif.

La transformée d'Hankel inverse est donnée par :

$$f(\rho) = \int_0^\infty F_\nu(k) J_\nu(k\rho) k dk$$

La transformée d'Hankel d'ordre zéro est la plus courante en physique pour les problèmes avec symétrie cylindrique.

Applications en Physique

La transformée d'Hankel est particulièrement utile pour la résolution des équations de Laplace ou de Helmholtz en coordonnées cylindriques, des problèmes de diffraction, de

propagation d'ondes dans des milieux cylindriques, et en diffusion de la chaleur. Elle simplifie souvent les problèmes en transformant des équations différentielles partielles en équations algébriques ou différentielles ordinaires.

8.4 Transformée de Mellin

La transformée de Mellin est un outil important en théorie des nombres, en physique statistique, et en analyse asymptotique. Elle est étroitement liée à la transformée de Laplace bilatérale et à la transformée de Fourier.

Définition

La transformée de Mellin d'une fonction $f(x)$ est définie par :

$$M_f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx$$

où s est une variable complexe. La région de convergence est déterminée par les propriétés asymptotiques de $f(x)$ lorsque $x \rightarrow 0^+$ et $x \rightarrow \infty$.

Transformée de Mellin Inverse

La transformée de Mellin inverse est donnée par la formule :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s} M_f(s) ds$$

où c est une constante réelle choisie de telle sorte que le chemin d'intégration se trouve dans la région de convergence.

Relation avec d'autres Transformées

- Si l'on pose $x = e^{-t}$, alors la transformée de Mellin se réduit à une transformée de Laplace bilatérale.
- Si l'on pose $x = e^u$, alors la transformée de Mellin est une transformée de Fourier d'une fonction particulière.

Applications en Physique

La transformée de Mellin est utilisée pour analyser des comportements asymptotiques, résoudre des équations intégrales, et étudier des séries de Dirichlet. En physique statistique, elle apparaît dans l'analyse de distributions et le calcul d'intégrales impliquant des produits de puissances.

9 Distributions (Fonctions Généralisées)

9.1 Fonction de Dirac ($\delta(x)$)

La fonction de Dirac, souvent appelée "distribution delta", est une fonction généralisée (ou distribution) qui est nulle partout sauf à l'origine, où elle est infinie, de telle sorte que son intégrale sur tout l'espace est égale à un. Elle est une idéalisation mathématique d'une impulsion très courte et intense.

Définition et Propriétés

La fonction de Dirac $\delta(x)$ est définie par les propriétés suivantes :

- (i) $\delta(x) = 0$ pour $x \neq 0$
- (ii) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$

Plus rigoureusement, $\delta(x)$ est définie par son effet sous l'intégrale sur une fonction test $\phi(x)$ continue et à support compact :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi(x) dx = \phi(0)$$

Cette propriété est appelée "propriété de tamisage" ou de "filtrage".

Généralisations et Représentations

- Décalage : $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) \phi(x) dx = \phi(a)$
- Scaling : $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$
- Composition : $\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}$ où x_i sont les racines simples de $g(x)$.
- Transformée de Fourier : $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ et $\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(t)$. C'est-à-dire, une impulsion dans le temps a un spectre de fréquences plat.
- Relation avec la fonction échelon : La fonction de Dirac est la dérivée de la fonction échelon (Heaviside) $u(x)$: $\delta(x) = \frac{du}{dx}$.
- Représentations limites : La fonction de Dirac peut être approchée par diverses suites de fonctions, par exemple :

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} \quad (\text{Lorentzienne})$$

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \quad (\text{Gaussienne})$$

Applications en Physique

La fonction de Dirac est omniprésente en physique pour modéliser :

- Des densités de charge ou de masse ponctuelles.

- Des forces impulsives (chocs).
- Des sources ponctuelles en électromagnétisme ou en acoustique.
- Des états quantiques localisés ou des mesures précises en mécanique quantique.

9.2 Dérivée de Distributions

La dérivation des distributions est définie par l'intégration par parties. Pour une distribution T et une fonction test ϕ , la dérivée T' est définie par :

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle$$

où $\langle T, \phi \rangle$ représente l'action de la distribution T sur la fonction test ϕ .

Exemples Importants

- Dérivée de la fonction échelon : La dérivée de la fonction de Heaviside $u(x)$ est la fonction de Dirac $\delta(x)$: $\frac{du}{dx} = \delta(x)$.
- Dérivée de la fonction de Dirac : La dérivée de la fonction de Dirac $\delta'(x)$ est définie par :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(x) \phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) \phi'(x) dx = -\phi'(0)$$

Elle est utilisée pour modéliser des dipôles ou des forces de cisaillement.

- Dérivées de fonctions discontinues : Pour une fonction $f(x)$ avec une discontinuité de saut en x_0 , sa dérivée distributionnelle inclura un terme de Dirac. Si $f(x)$ a un saut $[f(x_0)] = f(x_0^+) - f(x_0^-)$ en x_0 et que $f'(x)$ existe en dehors de x_0 , alors sa dérivée distributionnelle est $f'(x) + [f(x_0)]\delta(x - x_0)$.

Applications

La dérivation distributionnelle est essentielle pour résoudre des équations différentielles avec des termes sources singuliers (par exemple, des forces ponctuelles, des charges ponctuelles) et pour traiter des fonctions non différentiables au sens classique en physique mathématique.

9.3 Convolution de Distributions

La convolution de deux distributions est une opération qui généralise le concept de convolution de fonctions et est fondamentale dans l'étude des systèmes linéaires invariants.

Définition Formelle

Pour deux fonctions (ou distributions) f et g , leur convolution est formellement définie par :

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy$$

Dans le cadre des distributions, la convolution est plus complexe à définir généralement. Cependant, pour des cas physiques courants où l'une des distributions a un support compact ou est une fonction test, ou si l'une des distributions est tempérée, la convolution est bien définie.

Propriétés Clés

- Commutativité : $f * g = g * f$
- Associativité : $(f * g) * h = f * (g * h)$
- Distributivité : $f * (g + h) = f * g + f * h$
- Élément neutre : $\delta(x)$ est l'élément neutre pour la convolution, c'est-à-dire $f * \delta = f$.
- Dérivation : $\frac{d}{dx}(f * g) = \frac{df}{dx} * g = f * \frac{dg}{dx}$ (transforme la dérivation en convolution).
- Transformée de Fourier : $\mathcal{F}\{f * g\} = \mathcal{F}\{f\} \cdot \mathcal{F}\{g\}$ (transforme la convolution en produit simple).

Applications en Physique

La convolution est au cœur de nombreux domaines de la physique :

- Réponse des systèmes linéaires : La sortie d'un système linéaire invariant est la convolution du signal d'entrée avec la réponse impulsionnelle du système.
- Optique : Description de la diffraction et de la formation d'images.
- Traitement du signal et de l'image : Filtrage, floutage, détection de bords.
- Mécanique quantique : Opérateurs de convolution dans certains contextes.
- Physique des particules : Fonctions de distribution de partons.

10 Séries et Fonctions Spéciales

10.1 Séries de Taylor et de Laurent

Les séries de Taylor et de Laurent sont des représentations de fonctions sous forme de sommes infinies de puissances, fondamentales en analyse et en physique.

Série de Taylor

Pour une fonction $f(x)$ indéfiniment dérivable autour d'un point a , sa série de Taylor est donnée par :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

où $f^{(n)}(a)$ est la n -ième dérivée de f évaluée en a . C'est une approximation polynomiale infinie de la fonction. Le cas particulier où $a = 0$ est appelé série de Maclaurin. Le reste de la série de Taylor, $R_n(x)$, quantifie l'erreur d'approximation en tronquant la série à un certain ordre n . Il peut être exprimé sous la forme de Lagrange :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

où ξ est un point entre a et x . La série de Taylor est essentielle pour l'approximation de fonctions (linéarisation, développements d'ordre supérieur), le calcul de limites et l'analyse de la convergence.

Série de Laurent

La série de Laurent est une généralisation de la série de Taylor, permettant de représenter des fonctions holomorphes dans une couronne (anneau) $r < |z-a| < R$ autour d'un point a , où la fonction peut avoir une singularité.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

où les coefficients c_n sont donnés par l'intégrale de contour :

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

Le contour C est un cercle situé à l'intérieur de la couronne et centré en a .

Le terme $\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z-a)^n$ est la partie principale de la série de Laurent et décrit le comportement de la fonction près de la singularité. Le coefficient c_{-1} est le résidu de f en a , crucial pour le calcul d'intégrales par le théorème des résidus en analyse complexe. La série de Laurent est indispensable en physique pour l'étude des singularités isolées (pôles, singularités essentielles), le calcul de diagrammes de Feynman, l'analyse de pôles en théorie des champs quantiques, et la transformation de Fourier inverse.

10.2 Séries de Fourier

Les séries de Fourier sont une autre forme de représentation de fonctions, particulièrement adaptées aux fonctions périodiques. Elles décomposent une fonction périodique en une somme d'oscillations sinusoïdales (sinus et cosinus).

Série de Fourier réelle

Pour une fonction $f(x)$ périodique de période $T = 2L$ et intégrable sur $[-L, L]$, sa série de Fourier est :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

où les coefficients de Fourier sont donnés par :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

La série converge vers $f(x)$ aux points de continuité et vers la moyenne des limites gauche et droite aux points de discontinuité (théorème de Dirichlet).

Série de Fourier complexe

La forme complexe de la série de Fourier est souvent plus compacte et pratique :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{L}}$$

où les coefficients complexes sont :

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i \frac{n\pi x}{L}} dx$$

Les relations entre les coefficients réels et complexes sont $c_0 = a_0/2$, $c_n = (a_n - ib_n)/2$ pour $n > 0$, et $c_n = (a_{|n|} + ib_{|n|})/2$ pour $n < 0$. Les séries de Fourier sont fondamentales en physique pour l'analyse des ondes, des signaux périodiques (acoustique, électromagnétisme), la résolution d'équations aux dérivées partielles (EDP) par séparation de variables, et l'étude des vibrations.

10.3 Fonctions de Bessel (Cylindriques, Sphériques)

Les fonctions de Bessel sont des solutions de l'équation différentielle de Bessel, qui apparaît naturellement lors de la séparation des variables dans l'équation de Helmholtz (ou de Laplace) en coordonnées cylindriques ou sphériques. Elles sont omniprésentes dans les problèmes de propagation d'ondes, de vibrations, de diffusion et de conduction thermique.

Fonctions de Bessel d'ordre entier ou demi-entier

L'équation de Bessel est :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

où ν est l'ordre de la fonction. Les solutions les plus courantes sont les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(x)$ et de seconde espèce $Y_\nu(x)$ (aussi notées $N_\nu(x)$). $J_\nu(x)$ sont finies à l'origine ($x = 0$) et oscillent avec une amplitude décroissante pour $x \rightarrow \infty$. $Y_\nu(x)$ ont une singularité en $x = 0$ et oscillent également pour $x \rightarrow \infty$. Pour $\nu = 0$, $J_0(x)$ est la fonction d'onde fondamentale pour les problèmes radiaux. Les fonctions de Hankel de première et seconde espèce, $H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x)$ et $H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x)$, représentent des ondes sortantes et entrantes, respectivement.

Fonctions de Bessel modifiées

Elles sont solutions de l'équation de Bessel modifiée :

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + \nu^2)y = 0$$

Les solutions sont $I_\nu(x)$ (première espèce modifiée) et $K_\nu(x)$ (seconde espèce modifiée). Ces fonctions n'ont pas de comportement oscillatoire, mais croissent ou décroissent exponentiellement. $I_\nu(x)$ est finie à l'origine, $K_\nu(x)$ est singulière à l'origine et décroît exponentiellement pour $x \rightarrow \infty$. Elles sont utiles dans les problèmes de diffusion thermique et de potentiels électrostatiques dans des géométries cylindriques.

Fonctions de Bessel sphériques

Elles sont liées aux fonctions de Bessel usuelles d'ordre demi-entier et apparaissent dans la résolution de l'équation de Helmholtz en coordonnées sphériques. Elles sont définies par :

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x) = (-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\sin x}{x} \quad (\text{première espèce})$$

$$y_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{l+1/2}(x) = -(-x)^l \left(\frac{1}{x} \frac{d}{dx} \right)^l \frac{\cos x}{x} \quad (\text{seconde espèce})$$

où l est un entier non négatif. Les fonctions de Hankel sphériques $h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + iy_l(x)$ et $h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - iy_l(x)$ sont importantes pour la description des ondes sphériques divergentes et convergentes. Ces fonctions sont cruciales en acoustique, en théorie de la diffusion (particulièrement en mécanique quantique pour des potentiels à symétrie sphérique), en électromagnétisme (ondes électromagnétiques sphériques) et dans les problèmes d'astrophysique.

10.4 Polynômes de Legendre et Harmoniques Sphériques

Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre, $P_l(x)$, sont des solutions de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + l(l+1)y = 0$$

où l est un entier non négatif. Ils sont orthogonaux sur l'intervalle $[-1, 1]$ par rapport à la mesure dx , c'est-à-dire :

$$\int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx = \frac{2}{2l+1} \delta_{lk}$$

Ils peuvent être générés par la formule de Rodrigues :

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$$

La fonction génératrice des polynômes de Legendre est :

$$G(t, x) = (1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) t^l$$

Les polynômes de Legendre apparaissent dans les problèmes à symétrie sphérique après séparation des variables en coordonnées sphériques. Ils sont particulièrement importants pour le développement en série de potentiels gravitationnels ou électrostatiques et pour l'analyse multipolaire de champs.

Polynômes de Legendre Associés

Les polynômes de Legendre associés, $P_l^m(x)$, sont définis pour $l \geq |m|$ par :

$$P_l^m(x) = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$$

Ils sont solutions de l'équation de Legendre associée :

$$(1-x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right) y = 0$$

Ces fonctions sont cruciales pour la construction des harmoniques sphériques.

Harmoniques Sphériques

Les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$ sont les solutions angulaires de l'équation de Laplace (ou de Helmholtz) en coordonnées sphériques. Elles sont les fonctions propres du carré de l'opérateur de moment angulaire \hat{L}^2 et de l'opérateur \hat{L}_z en mécanique quantique.

$$Y_l^m(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

Elles satisfont les relations d'orthogonalité sur la sphère unité :

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{mm'}$$

Les harmoniques sphériques forment un ensemble complet et orthogonal sur la sphère unité. Elles sont fondamentales en mécanique quantique pour la description des fonctions d'onde électroniques dans les atomes, en géophysique (potentiel gravitationnel de la Terre), en acoustique, en optique (modes de cavités) et en astrophysique.

10.5 Polynômes d'Hermite

Les polynômes d'Hermite, $H_n(x)$, sont les solutions de l'équation différentielle d'Hermite :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + 2ny = 0$$

où n est un entier non négatif. Ils sont orthogonaux sur l'intervalle $(-\infty, \infty)$ par rapport à la fonction de pondération e^{-x^2} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} 2^n n! \delta_{nm}$$

Ils peuvent être générés par la formule de Rodrigues :

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

La fonction génératrice des polynômes d'Hermite est :

$$G(t, x) = e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!}$$

Les polynômes d'Hermite apparaissent naturellement dans la résolution de l'équation de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique quantique unidimensionnel (où ils sont multipliés par une gaussienne), ainsi que dans la description des fonctions de Hermite qui sont les fonctions propres des opérateurs de Fourier. Ils sont également utilisés en probabilités (polynômes de Hermite probabilistes pour la densité de probabilité gaussienne) et en optique (modes de faisceaux laser).

10.6 Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre, $L_n(x)$, sont des solutions de l'équation différentielle de Laguerre :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (1-x) \frac{dy}{dx} + ny = 0$$

où n est un entier non négatif. Ils sont orthogonaux sur l'intervalle $[0, \infty)$ par rapport à la fonction de pondération e^{-x} :

$$\int_0^\infty L_n(x)L_m(x)e^{-x} dx = \delta_{nm}$$

Ils peuvent être générés par la formule de Rodrigues :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Les polynômes de Laguerre généralisés, $L_n^{(\alpha)}(x)$, sont solutions de :

$$x \frac{d^2 y}{dx^2} + (\alpha + 1 - x) \frac{dy}{dx} + ny = 0$$

et sont orthogonaux avec le poids $x^\alpha e^{-x}$. Ils sont particulièrement importants en mécanique quantique pour la description des fonctions d'onde radiales des atomes (par exemple, les solutions de l'atome d'hydrogène).

10.7 Fonctions Gamma et Bêta

Fonction Gamma $\Gamma(z)$

La fonction Gamma est une généralisation de la fonction factorielle aux nombres complexes. Pour un entier positif n , $\Gamma(n) = (n-1)!$. Elle est définie par l'intégrale d'Euler de seconde espèce :

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(z) > 0$$

Des propriétés clés incluent la relation de récurrence $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (permettant de prolonger la fonction aux nombres complexes avec partie réelle négative, sauf pour les entiers négatifs et zéro, où elle a des pôles simples) et la formule de réflexion d'Euler :

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

La fonction Gamma apparaît dans de nombreuses intégrales, en physique statistique (distributions de probabilité comme la distribution Gamma), en mécanique quantique, dans l'étude des fonctions spéciales, et dans la théorie des nombres. Elle a des pôles simples aux entiers négatifs et à zéro.

Fonction Bêta $B(x, y)$

La fonction Bêta est étroitement liée à la fonction Gamma et est définie par l'intégrale d'Euler de première espèce :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt \quad \text{pour } \operatorname{Re}(x) > 0, \operatorname{Re}(y) > 0$$

La relation fondamentale avec la fonction Gamma est :

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

Elle est utilisée en physique statistique, en théorie des probabilités (distributions binomiales négatives, bêta), et dans diverses intégrales complexes. Elle peut aussi être exprimée en termes d'intégrales trigonométriques.

10.8 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(x)$ et de seconde espèce $U_n(x)$ sont des polynômes orthogonaux définis sur l'intervalle $[-1, 1]$. Ils sont particulièrement utiles dans l'approximation de fonctions et en analyse numérique.

Polynômes de Tchebychev de première espèce $T_n(x)$

Ils sont définis par la relation :

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$$

Ou par la formule de Rodrigues :

$$T_n(x) = \frac{(-1)^n \sqrt{1-x^2}}{(2n-1)!!} \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^{n-1/2}$$

Ils satisfont la relation de récurrence :

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

Avec $T_0(x) = 1$ et $T_1(x) = x$. Ils sont orthogonaux sur $[-1, 1]$ avec la fonction de pondération $(1-x^2)^{-1/2}$.

Polynômes de Tchebychev de seconde espèce $U_n(x)$

Ils sont définis par la relation :

$$U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$$

Ils satisfont la relation de récurrence :

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x)$$

Avec $U_0(x) = 1$ et $U_1(x) = 2x$. Ils sont orthogonaux sur $[-1, 1]$ avec la fonction de pondération $(1-x^2)^{1/2}$. Les polynômes de Tchebychev sont utilisés en optique (conception de filtres), en mécanique (oscillations), et pour la résolution numérique d'équations différentielles et l'approximation de fonctions.

11 Équations Intégrales

11.1 Équations de Fredholm

Les équations intégrales de Fredholm sont des équations où la fonction inconnue apparaît sous un signe d'intégration, et les limites d'intégration sont fixes. Elles sont de deux types principaux.

Équation de Fredholm de première espèce

$$g(x) = \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$$

où $g(x)$ et le noyau $K(x, t)$ sont des fonctions connues, et $\phi(t)$ est la fonction inconnue à déterminer.

Équation de Fredholm de seconde espèce

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \phi(t) dt$$

où $f(x)$ est une fonction connue, λ un paramètre, et $K(x, t)$ le noyau. Ces équations apparaissent en physique dans des problèmes de diffusion, d'optique, de mécanique quantique (par exemple, équations de Lippmann-Schwinger pour la diffusion) et en électromagnétisme. La résolution implique souvent l'utilisation de séries de Neumann ou de méthodes numériques.

11.2 Équations de Volterra

Les équations intégrales de Volterra sont similaires aux équations de Fredholm, mais avec une limite d'intégration variable, généralement de a à x . Elles sont particulièrement adaptées aux problèmes dépendant du temps ou aux processus causaux.

Équation de Volterra de première espèce

$$g(x) = \int_a^x K(x, t) \phi(t) dt$$

Équation de Volterra de seconde espèce

$$\phi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \phi(t) dt$$

où a est une constante. Ces équations sont courantes dans les problèmes de physique qui impliquent une "mémoire" ou une dépendance causale, comme les systèmes viscoélastiques, la théorie du contrôle, et la résolution de certaines équations différentielles. Les transformées de Laplace sont un outil puissant pour résoudre ces équations.

12 Formalisme Quantique de Dirac

Le formalisme de Dirac est la base mathématique de la mécanique quantique, offrant une description élégante des états quantiques et des opérations associées. Il s'articule autour de la notation bra-ket pour manipuler les vecteurs d'état dans un espace de Hilbert \mathcal{H} .

12.1 Concepts Fondamentaux

Notation Bra-Ket

Les états quantiques sont représentés par des vecteurs dans un espace de Hilbert.

Ket (Vecteur d'état)	Bra (Vecteur dual)	État physique
$ \psi\rangle \in \mathcal{H}$	$\langle\psi \in \mathcal{H}^*$	$ \Psi\rangle = \sum_n c_n \phi_n\rangle$

Un état physique est une superposition linéaire d'états de base, c_n étant les amplitudes de probabilité.

Produit Scalaire et Norme

Le produit scalaire quantifie la relation entre deux états, et la norme assure la conservation de la probabilité.

Produit scalaire	Norme d'un état (normalisé)
$\langle\phi \psi\rangle \in \mathbb{C}$	$\ \psi\ = \sqrt{\langle\psi \psi\rangle} = 1$

Bases et Orthogonalité

Les bases orthonormées sont essentielles pour la décomposition et l'interprétation des états.

Base orthonormée	Orthogonalité
$\langle\phi_m \phi_n\rangle = \delta_{mn}$	$\langle\phi \psi\rangle = 0 \quad \text{si } \phi\rangle \perp \psi\rangle$

Relation de Complétude

Exprime que la somme des projecteurs sur une base forme l'opérateur identité \hat{I} , cruciale pour l'insertion de bases.

Discret	Continu
$\hat{I} = \sum_n n\rangle\langle n $	$\hat{I} = \int dx x\rangle\langle x $

12.2 Représentations et Probabilités

Représentations usuelles

Un état quantique peut être exprimé dans différentes bases.

Représentation de Position

$$\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$$

Représentation d'Impulsion

$$\tilde{\psi}(p) = \langle p | \psi \rangle$$

Interprétation Probabiliste (Postulat de Born)

Probabilité de Transition

$$P = |\langle \phi | \psi \rangle|^2$$

(Probabilité de trouver l'état $|\psi\rangle$ dans l'état $|\phi\rangle$)

Densité de Probabilité

$$\rho(x, t) = |\psi(x, t)|^2$$

(Probabilité de trouver une particule à la position x à l'instant t)

12.3 Opérateurs en Mécanique Quantique

Les observables physiques sont représentées par des opérateurs linéaires qui agissent sur les états quantiques.

Généralités sur les Opérateurs

Action de l'opérateur

$$\hat{A}|\psi\rangle, \quad \langle \phi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Valeur moyenne (espérance)

$$\langle \hat{A} \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle$$

Matrice d'un opérateur (Base $\{|n\rangle\}$)

$$A_{mn} = \langle m | \hat{A} | n \rangle$$

Valeurs et vecteurs propres

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$$

Types d'Opérateurs

Adjoint Hermitien :

$$\langle \phi | \hat{A}^\dagger | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \phi \rangle^*$$

Hermitien (Observable) : Leurs valeurs propres sont réelles.

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}$$

Projecteur sur l'état $|n\rangle$:

$$\hat{P}_n = |n\rangle\langle n|, \quad \text{Ex : } |1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Opérateur Unitaire : Préserve la norme, $\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I}$.

Commutateurs et Anticommutateurs

Définissent comment les opérateurs interagissent.

Commutateur

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Anticommutateur

$$\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$$

12.4 Opérateurs Spécifiques

Opérateurs Fondamentaux

Opérateur Position

$$\hat{X}_i, \quad \hat{X}_i|x'\rangle = x'_i|x'\rangle$$

Opérateur Énergie Cinétique

$$\hat{T} = \frac{\hat{P}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2$$

Opérateur Impulsion

$$\hat{P}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \hat{P}_i|p'\rangle = p'_i|p'\rangle$$

Opérateur Hamiltonien (Énergie Totale)

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{\hat{X}})$$

Opérateur Moment Angulaire

Définition Vectorielle

$$\vec{\hat{L}} = \vec{\hat{X}} \times \vec{\hat{P}}$$

$$\hat{L}_y = \hat{Z}\hat{P}_x - \hat{X}\hat{P}_z$$

$$\hat{L}_z = \hat{X}\hat{P}_y - \hat{Y}\hat{P}_x$$

Composantes Cartésiennes

$$\hat{L}_x = \hat{Y}\hat{P}_z - \hat{Z}\hat{P}_y$$

Matrices de Pauli (Spin 1/2)

Décrivent le spin des particules de spin 1/2.

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Opérateurs d'Échelle (Oscillateur Harmonique)

Simplifient la résolution de l'oscillateur harmonique quantique.

Opérateur d'Annihilation

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} + \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right)$$

Opérateur de Création

$$\hat{a}^\dagger = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} \left(\hat{X} - \frac{i}{m\omega} \hat{P} \right)$$

Opérateur Nombre

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$$

12.5 Relations de Commutation**Relations Fondamentales**

Postulats de la MQ, à l'origine du principe d'incertitude.

$$[\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar \delta_{ij} \hat{I}$$

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = 0, \quad [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0$$

Commutation du Moment Angulaire

Caractérise la nature non commutative des composantes.

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k, \quad [\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z$$

$$[\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y$$

Commutation des Opérateurs d'Échelle

Essentielles pour la structure algébrique de l'oscillateur harmonique.

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}[\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger, \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}$$

12.6 Dynamique Quantique**Équation de Schrödinger**

L'équation fondamentale décrivant l'évolution des états.

Dépendante du Temps

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle$$

Indépendante du Temps

$$\hat{H} |\psi\rangle = E |\psi\rangle$$

Propagateur Temporel et Évolution

Décrit comment un état évolue dans le temps.

Propagateur Temporel

$$\hat{U}(t, t_0) = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t-t_0)}$$

Évolution de l'état

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle$$

Représentation d'Heisenberg

Une approche alternative où les opérateurs évoluent et les états sont fixes.

Équation d'Heisenberg (Opérateurs) :

$$\frac{d\hat{A}}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[\hat{A}, \hat{H}] + \frac{\partial \hat{A}}{\partial t}$$

États dans la Représentation d'Heisenberg :

$$|\psi\rangle_H = |\psi(t_0)\rangle$$

Courant de Probabilité

$$\vec{J}(x, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^*(x, t) \vec{\nabla} \psi(x, t) - \psi(x, t) \vec{\nabla} \psi^*(x, t) \right)$$

Équation de Continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$$

12.7 Principe d'Incertainité d'Heisenberg

Un principe fondamental concernant les observables non-commutantes.

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

Position-Impulsion

$$\Delta \hat{X} \Delta \hat{P} \geq \frac{\hbar}{2}$$

Énergie-Temps

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

13 Théorie des Groupes

13.1 Groupes de Symétrie (Rotation, Translation)

Un groupe G est un ensemble muni d'une opération binaire $*$ (ou composition) qui satisfait quatre axiomes :

G1. Fermeture : Pour tout $a, b \in G$, $a * b \in G$.

G2. Associativité : Pour tout $a, b, c \in G$, $(a * b) * c = a * (b * c)$.

G3. Élément neutre : Il existe un élément $e \in G$ tel que pour tout $a \in G$, $a * e = e * a = a$.

G4. Élément inverse : Pour tout $a \in G$, il existe un élément $a^{-1} \in G$ tel que $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$.

En physique, les groupes de symétrie décrivent les transformations qui laissent un système (ou ses équations de mouvement) invariant. Ces symétries sont directement liées aux lois de conservation via le théorème de Noether.

Groupe de Rotations $SO(3)$

Le groupe de rotations $SO(3)$ (Special Orthogonal group in 3 dimensions) décrit toutes les rotations de l'espace euclidien à trois dimensions qui préservent l'orientation. Ses éléments sont des matrices 3×3 réelles, orthogonales ($R^T R = I$) et de déterminant 1 ($\det(R) = 1$). Il est non commutatif (l'ordre des rotations est important) et continu. Les rotations sont paramétrées par les angles d'Euler ou par un vecteur de rotation (axe et angle). $SO(3)$ est un groupe de Lie compact, non abélien. Il est fondamental en mécanique classique (moment angulaire), en mécanique quantique (spin, moment angulaire orbital des systèmes atomiques et nucléaires), en physique du solide (symétries cristallines) et en relativité restreinte et générale.

Groupe de Translations \mathbb{R}^N

Le groupe de translations dans N dimensions est l'ensemble de tous les déplacements rigides qui déplacent un système sans changer son orientation. Il est isomorphe à l'espace vectoriel \mathbb{R}^N sous l'addition vectorielle. Il est abélien (commutatif, car l'ordre des translations n'importe pas) et continu. La symétrie par translation (homogénéité de l'espace) implique la conservation de l'impulsion linéaire (théorème de Noether). Il est crucial en physique du solide (réseaux cristallins périodiques, vecteurs du réseau réciproque), en mécanique (conservation de l'impulsion) et en théorie quantique des champs.

Groupe de Lorentz $SO(1,3)$

Le groupe de Lorentz, noté $SO(1,3)$ ou $O(1,3)$, est le groupe de toutes les transformations linéaires de l'espace de Minkowski qui préservent le produit scalaire de Minkowski (intervalle d'espace-temps) :

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

Il inclut les rotations spatiales et les boosts de Lorentz. Le sous-groupe $SO^+(1, 3)$ (orthochrone et propre) inclut les transformations qui préservent l'orientation du temps et l'orientation spatiale. Ce groupe est fondamental en relativité restreinte et générale, décrivant la symétrie des lois physiques sous les changements de référentiel inertiels. La conservation de l'énergie-impulsion est liée à la symétrie par translation de l'espace-temps (groupe de Poincaré, qui inclut les translations et les transformations de Lorentz).

13.2 Représentations de Groupes

Une représentation d'un groupe G est un homomorphisme ρ du groupe G vers un groupe de matrices inversibles sur un espace vectoriel V (généralement complexe). Autrement dit, c'est une manière de représenter les éléments abstraits d'un groupe par des opérations linéaires (matrices) qui agissent sur un espace vectoriel.

$$\rho : G \rightarrow GL(V)$$

où $GL(V)$ est le groupe linéaire général des transformations inversibles de V . L'espace V est appelé l'espace de représentation, et sa dimension est la dimension de la représentation.

Représentations Réductibles et Irréductibles

- Une représentation est **réductible** si son espace de représentation V contient un sous-espace propre non trivial qui est invariant sous toutes les transformations du groupe $\rho(g)$ pour tout $g \in G$.
- Une représentation est **irréductible** (ou "irrep") si son espace de représentation ne contient aucun sous-espace propre non trivial invariant. Cela signifie qu'elle ne peut pas être simplifiée ou décomposée en représentations de plus petite dimension.

Le théorème de Wigner-Eckart relie les éléments de matrice des opérateurs tensoriels irréductibles aux coefficients de Clebsch-Gordan, simplifiant considérablement les calculs en mécanique quantique. Les représentations sont essentielles en mécanique quantique pour classer les états quantiques selon les symétries du système (ex : les harmoniques sphériques $Y_l^m(\theta, \phi)$ sont des bases pour les irreps de $SO(3)$ de dimension $2l + 1$, caractérisant les états de moment angulaire orbital), en physique des particules pour comprendre les multiplets de particules (ex : saveurs de quarks et représentations de $SU(3)$ de couleur) et en physique du solide pour la classification des bandes d'énergie et des vibrations de réseau.

Caractères de Groupes

Le caractère $\chi_\rho(g)$ d'une représentation ρ est la trace de la matrice $\rho(g)$:

$$\chi_\rho(g) = \text{Tr}(\rho(g))$$

Les caractères sont des fonctions de classe (constants sur les classes de conjugaison du groupe) et jouent un rôle crucial car ils sont beaucoup plus simples à manipuler que

les matrices de représentation elles-mêmes. Deux représentations sont équivalentes si et seulement si elles ont les mêmes caractères. Les caractères des représentations irréductibles forment une base orthogonale et sont utilisés pour décomposer une représentation réductible en ses composantes irréductibles.

13.3 Groupes de Lie et Algèbres de Lie

Les groupes de Lie sont des groupes qui sont également des variétés différentielles lisses, de telle sorte que les opérations de groupe (multiplication et inversion) sont des fonctions lisses. Ils sont des outils fondamentaux pour décrire les symétries continues en physique, qui dépendent de paramètres continus. Exemples : $SO(3)$ (rotations), $SU(2)$ (groupe des matrices unitaires 2×2 de déterminant 1, lié au spin), $U(1)$ (groupe des nombres complexes de module 1, lié à la symétrie de phase de l'électromagnétisme), groupe de Lorentz $SO(1,3)$.

Algèbres de Lie

À chaque groupe de Lie G est associée une algèbre de Lie \mathfrak{g} , qui est l'espace tangent au groupe à l'élément neutre e . C'est un espace vectoriel muni d'une opération bilinéaire appelée crochet de Lie (ou commutateur), satisfaisant certaines propriétés :

- **Antisymétrie** : $[X, Y] = -[Y, X]$
- **Bilinéarité** : $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$
- **Identité de Jacobi** : $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Pour des matrices, le crochet de Lie est le commutateur :

$$[X, Y] = XY - YX$$

où X, Y sont des éléments de l'algèbre, appelés générateurs infinitésimaux du groupe. Les éléments d'un groupe de Lie près de l'identité peuvent être générés par l'exponentiation des éléments de l'algèbre de Lie : $g = \exp(i\alpha_k T_k)$, où T_k sont les générateurs et α_k sont les paramètres.

Générateurs et Relations de Commutation

Les générateurs d'un groupe de Lie sont liés aux lois de conservation via le théorème de Noether. Par exemple :

- Les opérateurs de moment angulaire L_x, L_y, L_z sont les générateurs des rotations pour $SO(3)$ et satisfont les relations de commutation :

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z \quad (\text{et permutations cycliques})$$

- Les matrices de Pauli $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ (ou $J_x, J_y, J_z = \hbar\sigma_i/2$) sont les générateurs de $SU(2)$ pour le spin, avec des relations de commutation similaires.

L'étude des algèbres de Lie permet de comprendre la structure locale des groupes de Lie sans avoir à considérer la topologie globale du groupe. Elles sont omniprésentes en mécanique quantique (opérateurs observables), en théorie des champs et en physique des particules pour la classification des interactions fondamentales (théories de jauge basées sur des groupes de Lie comme $SU(3)$ pour l'interaction forte, $SU(2) \times U(1)$ pour l'interaction électrofaible, formant le groupe du Modèle Standard).

Théorème de Noether

Le théorème de Noether établit une correspondance fondamentale entre les symétries continues d'un système physique (décrites par des groupes de Lie) et les lois de conservation. Si un système physique (décrit par un lagrangien ou un hamiltonien) est invariant sous l'action d'un groupe de Lie continu, alors il existe une quantité conservée associée à chaque générateur de ce groupe.

- Symétrie par translation spatiale \rightarrow Conservation de l'impulsion linéaire.
- Symétrie par translation temporelle \rightarrow Conservation de l'énergie.
- Symétrie par rotation spatiale \rightarrow Conservation du moment angulaire.
- Symétrie de jauge $U(1)$ (en électrodynamique) \rightarrow Conservation de la charge électrique.
- Symétrie de jauge $SU(3)$ (en chromodynamique quantique) \rightarrow Conservation de la charge de couleur.

Ce théorème est l'un des piliers de la physique théorique moderne.