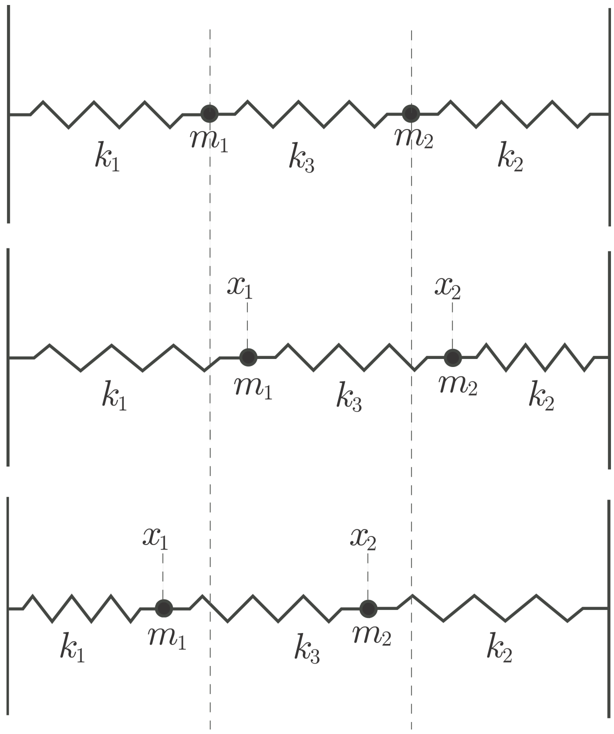
工学系のモデリングA演習問題

第6回 2015年5月20日

電子物理システム学科 谷井孝至



問1 右図のように，ばね定数 k_1, k_2, k_3 の3つのばねで結ばれた質量 m_1, m_2 の2質点の振動を考える．上段の図は，黒丸で示した2質点が平衡点にあり，すべてのばねは自然長にあるものとする．中段の図は2質点がそれぞれ平衡点から $x_1\,(>0), x_2\,(>0)$ だけずれた位置にある瞬間を示している (図の右方向を正にとる)．下段の図は逆に，2質点がそれぞれ平衡点から $x_1\,(<0), x_2\,(<0)$ だけずれた位置にある瞬間を示している．

(a) 中段の図で $0 < x_1 < x_2$ のとき，2質点は3つのばねのそれぞれからどちら向きに力を受けるか? 右方向を正，左方向を負として下表を埋めよ．また，$0 < x_2 < x_1$ の場合についても答えよ．

	$0 < x_1 < x_2$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	負	−	
m_2 の質点	−		

	$0 < x_2 < x_1$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	負	−	
m_2 の質点	−		

(b) 下段の図で $x_2 < x_1 < 0$ のとき，または，$x_1 < x_2 < 0$ のとき，2質点は3つのばねのそれぞれからどちら向きに力を受けるか? (a) と同様にして下表を埋めよ．

	$x_2 < x_1 < 0$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	正	−	
m_2 の質点	−		

	$x_1 < x_2 < 0$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	正	−	
m_2 の質点	−		

(c) (a) または (b) と同様にして，$x_1 > 0$ かつ $x_2 < 0$，または，$x_1 < 0$ かつ $x_2 > 0$ のとき，2質点は3つのばねのそれぞれからどちら向きに力を受けるか? 下表を埋めよ．

	$x_1 > 0$ かつ $x_2 < 0$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	負	−	
m_2 の質点	−		

	$x_1 < 0$ かつ $x_2 > 0$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	正	−	
m_2 の質点	−		

(d) (a)∼(c) の結果を参考にしながら，2質点がそれぞれのばねから受ける力を，ばねの伸縮の大きさも勘案しながら求め，下表を埋めよ ((a)∼(c) の6通りのいずれの場合においても，同じ式で表せることがわかるだろう)．

	$0 < x_1 < x_2$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	$-k_1x_1$	−	
m_2 の質点	−		

(e) (d) の結果を踏まえて，x_1, x_2 に対する連立運動方程式を示せ．

(f) この連立運動方程式を行列形式

$$\ddot{X} = -AX \qquad X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

で書いたとき，行列 A を求めよ．ただし，$m_1 = m_2 = m$，$k_1 = k_2 = 2k$，$k_3 = k$ とする．

(g) (f) で求めた A の固有値問題を解け (指導書 p.61 例題 5.2.1 を参考に，A の固有値 (λ_1，λ_2) と固有ベクトル (X_1，X_2) を求めよ．その際，固有ベクトルについて任意定数 (C_1，C_2) を含んだ形で解答せよ)．

(h) (f) で求めた A を対角化する直交行列 U を求めよ (指導書 p.64 例題 5.2.2 を参考にせよ)．

(i) (f)∼(h) の結果を用いて，基準座標 $Q(t) = \begin{pmatrix} a_1\cos(\sqrt{\lambda_1}t + \epsilon_1) \\ a_2\cos(\sqrt{\lambda_2}t + \epsilon_2) \end{pmatrix}$ と一般解 $X(t) = UQ(t)$ を示せ．ただし，a_1，a_2，ϵ_1，ϵ_2 は任意定数とする．

解答

(a) $0 < x_1 < x_2$ の場合 k_3 のばねが伸びている，$0 < x_2 < x_1$ の場合 k_3 のばねが縮んでいることに注意して，

	$0 < x_1 < x_2$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	負	–	正
m_2 の質点	–	負	負

	$0 < x_2 < x_1$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	負	–	負
m_2 の質点	–	負	正

(b) $x_2 < x_1 < 0$ の場合 k_3 のばねが縮んでいる，$x_1 < x_2 < 0$ の場合 k_3 のばねが伸びていることに注意して，

	$x_2 < x_1 < 0$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	正	–	負
m_2 の質点	–	正	正

	$x_1 < x_2 < 0$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	正	–	正
m_2 の質点	–	正	負

(c) $x_1 > 0$ かつ $x_2 < 0$ の場合 k_3 のばねが縮んでいる，$x_1 < 0$ かつ $x_2 > 0$ の場合 k_3 のばねが伸びていることに注意して，

	$x_1 > 0$ かつ $x_2 < 0$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	負	–	負
m_2 の質点	–	正	正

	$x_1 < 0$ かつ $x_2 > 0$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	正	–	正
m_2 の質点	–	負	負

(d) k_3 のばねの伸縮は $|x_2 - x_1|$ なので，力の大きさは $k_3|x_2 - x_1|$．(a) の正負，および $x_2 - x_1$ の正負から判断すると，

	$0 < x_1 < x_2$ の場合		
	k_1 のばねの力	k_2 のばねの力	k_3 のばねの力
m_1 の質点	$-k_1x_1$	–	$k_3(x_2 - x_1)$
m_2 の質点	–	$-k_2x_2$	$-k_3(x_2 - x_1)$

(e) (d) の結果より，

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k_1x_1 + k_3(x_2 - x_1) = -(k_1 + k_3)x_1 + k_3x_2 \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k_2x_2 + k_3(x_1 - x_2) = k_3x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \end{aligned}$$

(f)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{k_1+k_3}{m_1} & -\frac{k_3}{m_1} \\ -\frac{k_3}{m_2} & \frac{k_2+k_3}{m_2} \end{pmatrix}$$

$m_1 = m_2 = m$，$k_1 = k_2 = 2k$，$k_3 = k$ のとき，

$$A = \omega^2 \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(g) (f) で求めた A を用いて，固有値と固有ベクトルを求める．

$$\lambda_1 = (2\omega)^2, \qquad X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = (\sqrt{2}\omega)^2, \qquad X_2 = C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(h) (g) の結果より，X_1 と X_2 を規格化して，それぞれ u_1 および u_2 とすると，

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

したがって直交行列は，

$$U = (u_1 \ u_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

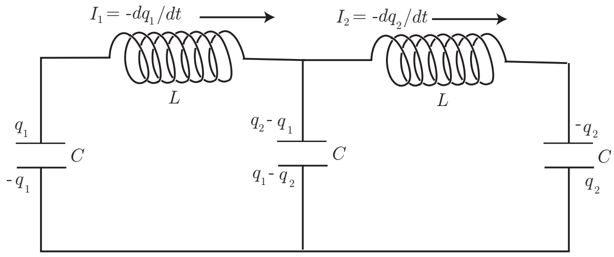
U をつかって A を対角化してみる．

$$\begin{aligned} U^T A U &= \frac{\omega^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2\omega)^2 & 0 \\ 0 & (\sqrt{2}\omega)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(i) 基準振動が $Q(t) = \begin{pmatrix} a_1 \cos(2\omega t + \epsilon_1) \\ a_2 \cos(\sqrt{2}\omega t + \epsilon_2) \end{pmatrix}$ とすると，

$$\begin{aligned} X(t) &= UQ(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \cos(2\omega t + \epsilon_1) \\ a_2 \cos(\sqrt{2}\omega t + \epsilon_2) \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{a_1}{\sqrt{2}} \cos(2\omega t + \epsilon_1) + \frac{a_2}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}\omega t + \epsilon_2) \\ -\frac{a_1}{\sqrt{2}} \cos(2\omega t + \epsilon_1) + \frac{a_2}{\sqrt{2}} \cos(\sqrt{2}\omega t + \epsilon_2) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問 2 右図のようなLC回路において，コンデンサ C_1 に蓄えられる電荷 q_1，コンデンサ C_2 に蓄えられる電荷 q_2 と表す．また，回路全体では電気的に中性であるとし，コンデンサ C_3 には $q_2 - q_1$ (向きのよっては $q_1 - q_2$) が蓄えられることになる．Kirchhoff の法則より，次の連立微分方程式が導かれる．



$$
\begin{aligned}
L_1 \frac{d^2 q_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} q_1 + \frac{1}{C_3}(q_1 - q_2) &= 0 \\
L_2 \frac{d^2 q_2}{dt^2} + \frac{1}{C_2} q_2 + \frac{1}{C_3}(q_2 - q_1) &= 0
\end{aligned}
$$

(a) $L_1 = L_2 = L$，$3C_1 = C_2 = 2C_3 = C$ とするとき，上の連立微分方程式が次のような行列表示で書けることを示せ．

$$
\ddot{Q} = -AQ, \qquad Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}, \qquad A = \omega^2 \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad \omega^2 = \frac{1}{LC}
$$

(b) 行列対角化を用いて，q_1，q_2 の一般解を求めよ．

解答

(a)

$$
\begin{aligned}
\frac{d^2 q_1}{dt^2} &= -\frac{1}{LC}(5q_1 - 2q_2) \\
\frac{d^2 q_1}{dt^2} &= -\frac{1}{LC}(-2q_1 + 3q_2)
\end{aligned}
$$

を行列表示すればよい．

(b) 固有値と固有ベクトルを求めると，

$$
\lambda_1 = 4 + \sqrt{5}, \qquad X_1 = C_1 \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}
$$

$$
\lambda_2 = 4 - \sqrt{5}, \qquad X_2 = C_2 \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}
$$

規格化して，

$$
u_1 = \frac{1}{\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{5} \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{5} \\ 2 \end{pmatrix}
$$

直交行列は，

$$
U = (u_1 \ u_2) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \\ \frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} & \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \end{pmatrix}
$$

U を用いて A を対角化すると，

$$U^T A U = \omega^2 \begin{pmatrix} 4+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 4-\sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\omega\right)^2 & 0 \\ 0 & \left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\omega\right)^2 \end{pmatrix}$$

したがって，基準座標: $Q(t) = \begin{pmatrix} a_1 \cos\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\omega t + \epsilon_1\right) \\ a_2 \cos\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\omega t + \epsilon_2\right) \end{pmatrix}$.

一般解は，

$$X(t) = UQ(t) = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} a_1 \cos\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\omega t + \epsilon_1\right) + \frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} a_2 \cos\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\omega t + \epsilon_2\right) \\ \frac{-2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} a_1 \cos\left(\sqrt{4+\sqrt{5}}\omega t + \epsilon_1\right) + \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} a_2 \cos\left(\sqrt{4-\sqrt{5}}\omega t + \epsilon_2\right) \end{pmatrix}$$

以上.