工学系のモデリングA 演習問題

第1回

2015年4月8日

問1 多項式 $f(x) = 4 - 7x + 5x^2 + 2x^3$ を $x = 0$ および $x = 1$ の回りで Taylor 展開せよ。

解答 $f(x) = 4 - 7x + 5x^2 + 2x^3 \quad (x = 0), \quad f(x) = 4 + 9(x-1) + 11(x-1)^2 + 2(x-1)^3 \quad (x = 1)$

問2 以下の式を $y = 0$ の回りで Taylor 展開し、y^3 の項まで求めよ。

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-y}}$

(2) $\tan y$

(3) $\cos^{-1} y$ （$0 \leq \cos^{-1} y \leq \pi$）

解答 (1) $1 + \dfrac{y}{2} + \dfrac{3y^2}{8} + \dfrac{5y^3}{16} + O(y^4)$

(2) $y + \dfrac{1}{3}y^3 + O(y^5)$

(3) $\dfrac{\pi}{2} - y - \dfrac{y^3}{6} + O(y^5)$

問3 以下の式を $x = 0$ の回りで Taylor 展開し、すべての次数を求めよ。（$\sum$ 記号を使って書き下せ。）

(1) $\dfrac{1}{1+x}$

(2) e^{ix} （i：虚数単位）

(3) $\cos(\pi x)$

解答 (1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n (|x|<1)$

(2) $\displaystyle e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\pi^{2n}x^{2n}(|x|<\infty)$

問 4 導関数と差分式の関係を表す以下の式を、Taylor 展開を用いて導出せよ。ただし関数 $f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ でなめらかであるとする。

(1) $\displaystyle\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + O(\Delta x)$

(2) $\displaystyle\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} + O((\Delta x)^2)$

解答 (1) $f(x+\Delta x)$ を $\Delta x = 0$ のまわりで Δx について Taylor 展開した結果を Δx で割って,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{1}{2!}\frac{d^2 f}{dx^2}(x)(\Delta x^2) - \frac{1}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(x)(\Delta x^2) - \cdots$$

(2) $f(x-\Delta x)$ を $\Delta x = 0$ のまわりで Δx について Taylor 展開した結果と (1) の Taylor 展開の結果を用いて,

$$\frac{df}{dx}(x) = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x} - \frac{2}{3!}\frac{d^3 f}{dx^3}(x)(\Delta x^2) - \cdots$$