工学系のモデリングA 演習問題

第10回

2015年6月17日

問1 標本化と量子化の実例として、以下の3例を考える。それぞれが1秒間に発生するビット数を求めなさい。

(a) 標本化周波数が8kHz、量子化ビット数が8bitの場合：

(b) 標本化周波数が44.1kHz、量子化ビット数が16bitの場合：

(c) 1/30秒毎に 1920×1080 個のサンプルを標本化し、量子化ビット数が24bitの場合（概算でも可）:

（注） (a)は電話の音声、(b)は音楽CDの1チャネル、(c)はHDTV解像度のフルカラー動画像（RGB各8ビット）に対応する。

解答）

(a) 8000 * 8 = 64000bit （64kbit）

(b) 44100 * 16 = 705600bit （705.6kbit）

(c) 30 * 1920 * 1080 * 24 = 1492992000bit (1.492992Gbit〜約1.5Gbit)

問2 離散Fourier変換に関する以下の問いに答えなさい。

(a) $W_N = e^{-i\frac{2\pi}{N}}$ とするとき、次式が成立することを証明せよ。

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \begin{cases} 1 & (k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

ヒント： 等比数列の公式 $1 + a + \cdots + a^{N-1} = \dfrac{1-a^N}{1-a}$ を使用する。

(b) 離散関数 $f(n)$ が実数のとき、$F(k) = F(N-k)^* \quad (k = 1, 2, \cdots, N/2-1)$ となることを証明せよ（$*$ は複素共役を示す）。
ヒント： $F(k)$、$F(N-k)$ それぞれを実数部と虚数部に分けて見比べる。

(c) 離散関数 $f(n) = \sin\dfrac{2\pi}{N}n \quad (n = 0, 1, \cdots, N-1)$ の離散Fourier変換を求めなさい。
ヒント： 途中で(a)の結果を活用する。

解答）

(a) 等比数列の公式に従って変形する。

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nk} = \frac{1}{N}\left(1 + e^{-i\frac{2\pi}{N}k} + \cdots + e^{-i\frac{2\pi}{N}(N-1)k}\right) = \begin{cases} \frac{1}{N}\cdot N & (k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots) \\ \frac{1}{N}\cdot\frac{1-e^{-i\frac{2\pi}{N}\cdot N}}{1-e^{-i\frac{2\pi}{N}k}} & (otherwise) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & (k = 0, \pm N, \pm 2N, \cdots) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}$$

(b) $F(k)$、$F(N-k)$ それぞれを実部と虚部に分け、対比を行う。

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\cos\frac{2\pi}{N}nk - i\cdot\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\sin\frac{2\pi}{N}nk \\
F(N-k) &= \sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{-i\frac{2\pi}{N}n(N-k)} = e^{\imath 2\pi n}\cdot\sum_{n=0}^{N-1} f(n) e^{i\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} f(n)\cos\frac{2\pi}{N}nk + i\cdot\sum_{n=0}^{N-1} f(n)\sin\frac{2\pi}{N}nk
\end{aligned}
$$

よって、$F(k) = F(N-k)^*$。

(c) 2 行目で (a) の結果を活用する。

$$
\begin{aligned}
F(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sin\frac{2\pi}{N}n \cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{e^{i\frac{2\pi}{N}n} - e^{-i\frac{2\pi}{N}n}}{2i} e^{-i\frac{2\pi}{N}nk} \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1} e^{i\frac{2\pi}{N}n(1-k)} - \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{N-1} e^{-i\frac{2\pi}{N}n(1+k)} \\
&= \begin{cases} -\dfrac{N}{2}i & (k=1) \\ \dfrac{N}{2}i & (k=N-1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}
\end{aligned}
$$

同様に、$f(n) = \sin\frac{4\pi}{N}n$ のときは $F(2)$ と $F(N-2)$、$f(n) = \sin\frac{6\pi}{N}n$ のときは $F(3)$ と $F(N-3)$ が非ゼロな値を持つ。

問 3 指導書に記載したように、$N=4$ の離散 Fourier 変換は以下の行列演算として表される。

$$
\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}
$$

ここで変換行列の第 2 行と第 3 行を入れ替えると、次式のように $F(1)$ と $F(2)$ が入れ替わる。また、変形した変換行列を T とする。

$$
\begin{bmatrix} F(0) \\ F(2) \\ F(1) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = T \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}
$$

これについて以下の問いに答えよ。

(a) A_2、B_2 を 2×2 の行列とするとき、行列 T は

$$
T = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & A_2 \\ \hline B_2 & -B_2 \end{array}\right]
$$

の形をしている。この行列 A_2 と B_2 を示しなさい。

(b) 行列 T は、

$$T = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & A_2 \\ \hline B_2 & -B_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & O_2 \\ \hline O_2 & B_2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_2 & I_2 \\ \hline I_2 & -I_2 \end{array}\right]$$

と変形できることを示しなさい。ただし、O_2 は 2×2 のゼロ行列、I_2 は 2×2 の単位行列を示す。

(c) 中間出力 $g(n)$ を定義し、次式を考える。

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & I_2 \\ \hline I_2 & -I_2 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix}$$

$g(0)$、$g(1)$、$g(2)$、$g(3)$ を $f(0)$、$f(1)$、$f(2)$、$f(3)$ で表しなさい。

(d) 中間出力 $g(n)$ から $F(n)$ を計算する次式を考える。

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(2) \\ F(1) \\ F(3) \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & O_2 \\ \hline O_2 & B_2 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix}$$

$F(0)$、$F(1)$、$F(2)$、$F(3)$ を $g(0)$、$g(1)$、$g(2)$、$g(3)$ で表しなさい。

(e) 本問のような変形は行なわず、離散 Fourier 変換を直接計算した場合は次式になる。

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(1) \\ F(2) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) + f(1) + f(2) + f(3) \\ f(0) - i \cdot f(1) - f(2) + i \cdot f(3) \\ f(0) - f(1) + f(2) - f(3) \\ f(0) + i \cdot f(1) - f(2) - i \cdot f(3) \end{bmatrix}$$

ここで減算は「負の数の乗算と加算」と考え、加算回数の比較として、上記の直接演算の場合の+と-の符号の個数、および、(c)、(d) で行列分解した場合の+と-の符号の個数を求め、比較してみよ。

(f) 指導書に記載したように、離散 Fourier 変換を直接計算した場合の加算回数と乗算回数は近似的に N^2 回となり、高速 Fourier 変換の工夫を行なった場合の加算回数と乗算回数は $N \log_2 N$ 回となる。具体的に、$N = 1024 (= 2^{10})$ の場合の、N^2 と $N \log_2 N$ の値を求めてみよ。

解答)

(a) 変換行列 T から転記して、

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}$$

(b) 右辺の行列の積を計算すると、

$$\left[\begin{array}{c|c} A_2 & O_2 \\ \hline O_2 & B_2 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} I_2 & I_2 \\ \hline I_2 & -I_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_2 I_2 + O_2 I_2 & A_2 I_2 - O_2 I_2 \\ \hline O_2 I_2 + B_2 I_2 & O_2 I_2 - B_2 I_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A_2 & A_2 \\ \hline B_2 & -B_2 \end{array}\right]$$

(c) 単位行列 I_2 の値を当てはめて、

$$\begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} f(0) \\ f(1) \\ f(2) \\ f(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(0) + f(2) \\ f(1) + f(4) \\ f(0) - f(2) \\ f(1) - f(3) \end{bmatrix}$$

(d) 行列 A_2、B_2 の値を当てはめて、

$$\begin{bmatrix} F(0) \\ F(2) \\ F(1) \\ F(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 1 & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} g(0) \\ g(1) \\ g(2) \\ g(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(0) + g(1) \\ g(0) - g(1) \\ g(2) - i \cdot g(3) \\ g(2) + i \cdot g(3) \end{bmatrix}$$

(e) 直接演算した場合は、$+$と-の符号の個数は 12 個。行列分解した場合は、$+$と-の符号の個数は、(c) が 4 個、(d) が 4 個で計 8 個。よって、行列分解した場合のほうが、加算回数が少なくなっている。

(f) 直接演算を行なった場合、$1024 * 1024 = 1048576$ 回。高速 Fourier 変換の工夫を行なった場合、$1024 * \log_2 1024 = 1024 * 10 * log_2 2 = 10240$ 回。よって、演算回数を約 1/100 に減らすことができる。