基礎物理学 B 演習問題 1

1. 積分範囲に注意して、以下の問に答えよ。ただし、ξ での積分において、ℓ を一定であるとして扱って良い場合、

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sqrt{\ell^2 - \xi^2}\, d\xi = \frac{\pi \ell^2}{2}$$

が成り立つことを用いて良い。

   (a) 面積分を行うことによって、半径 a の円盤（円周のみでなく、内部を含めた円）の面積を求めよ。

   (b) 体積積分を行うことによって、半径 a の球の体積を求めよ。

2. 波動の問題を考えるときに役立つ三角関数の性質に関して、以下の問に答えよ。

   (a) オイラーの公式を用いて和積公式

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right), \\
\cos A - \cos B &= -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right), \\
\sin A - \sin B &= 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right), \\
\sin A + \sin B &= 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)
\end{aligned}$$

   を導け。
   ヒント）オイラーの公式を用いて、まず、積和公式を導いてみよ。

   (b) オイラーの公式を用いて加法定理

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \qquad \sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

   を導け。

3. 平衡状態では x 軸に沿って大きさ T の張力で張られているひもを考え、これを $x-z$ 平面内で微小振動させる。ひもの線密度 σ は一様で、ひもの各点は z 方向のみに運動するものとし、張力の大きさ T は振動に際して一定であると近似できるとする。また、任意の時刻 t において、x 座標が x であるひもの点の z 座標を $\zeta(t,x)$ とするとし、ひもに働く力は張力だけであるとする。平衡状態において中心の x 座標が x であり長さが微小量 Δx であった微小領域をひとつの質点系とみなすことにより、ひもの運動量保存則に関して以下の問に答えよ。

   (a) 微小領域の運動量 $\boldsymbol{P}(t,x)$ を求め、$\zeta(t,x)$ を用いて成分表示せよ。

   (b) 微小領域に働く外力の和を計算し、Δx の一次までの近似で答えよ。

   (c) 微小領域について運動量保存則を適用し、それが $\Delta x \to 0$ の極限でどのような方程式になるか答えよ。

4. A、k、ω を任意の定数として、$\zeta_2(t,x) \equiv A\cos(k\,x + \omega\,t)$ について以下の問に答えよ。

   (a) 分散関係が、定数 v を用いて $\omega = v\,k$ と与えられているとき、$\zeta_2(t,x)$ が波動方程式

$$\frac{\partial^2 \zeta(t,x)}{\partial t^2} = v^2\,\frac{\partial^2 \zeta(t,x)}{\partial x^2}$$

   を満たすことを示せ。

(b) $\zeta_2(t,x)$ の波の位相速度と伝搬の向きを答えよ。

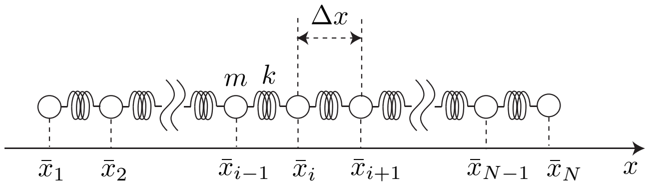
(c) $\zeta_2(t,x)$ の波の波長と周期を、それぞれ、k と ω を用いて表せ。

5. ダランベールの解 $\phi(t,x) = f(x-vt) + g(x+vt)$ が、位相速度 v の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \phi(t,x)}{\partial x^2}$$

を満たすことを示せ。ただし、$f(u)$ と $g(w)$ は、それぞれ、u と w の任意関数である。

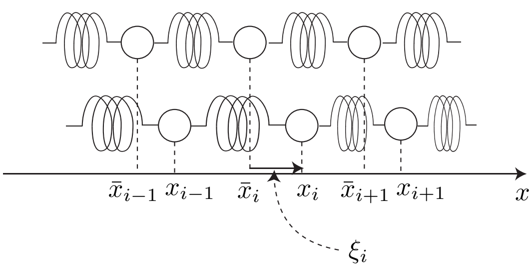
6. 棒が伸び縮みする運動を、質量を無視できるばねでつながれた、多数の質点からなる質点系の運動によってモデル化し、その連続極限（質量が連続的に分布している極限）を取ることによって考える。棒に沿って x 軸を選び、質点の数を N 個、質点の質量はすべて等しく m、ばねのばね定数はすべて等しく k であるとし、x 座標が小さい位置にある質点から順に、1 番目、2 番目、... N 番目、と質点を番号付けする。ただし、すべての質点は x 方向のみに運動するものとし、棒に働く外力はその両側の端点のみに及ぼされるものとする。



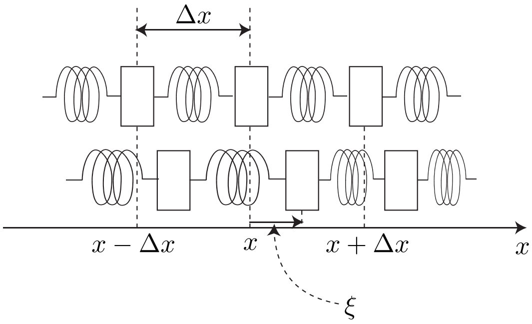
すべての質点がつり合いの状態（平衡状態）にあるときの i 番目の質点の x 座標を $\bar{x}_i$、平衡状態からずれたときの i 番目の質点の x 座標を $x_i(t)$ とすると、i 番目の質点の平衡状態からの変位 $\xi_i(t)$ は $\xi_i(t) = x_i(t) - \bar{x}_i$ と与えられる。平衡状態における質点どうしの間隔を Δx とすれば、平衡状態ではすべての質点は等間隔で並んでいるので、$\Delta x = \bar{x}_{i+1} - \bar{x}_i$ であり（ただし、$\bar{x}_{N+1}$ は存在しないので、ここに限っては $i \leq N-1$）、棒全体の長さ L は

$$L = \Delta x\,(N-1) \tag{1}$$

と書ける。（下図において、上は平衡状態、下は平衡状態からずれた状態を表している。）



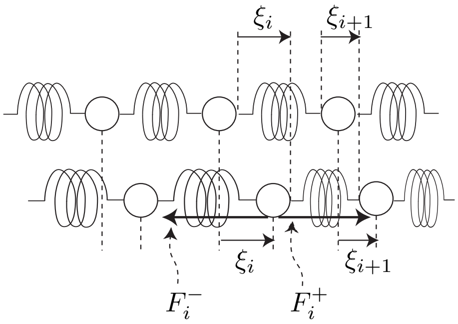
連続極限 $N \to \infty$ を取る際には、質点の代わりに微小領域を考える必要があるので、i の代わりに、平衡状態における微小領域の位置座標 x を用いて、その変位は t と x の関数 $\xi(t,x)$ によって表される。このとき、位置 x にある微小領域の両隣にある微小領域は x 座標が $x - \Delta x$ と $x + \Delta x$ の位置にあるので、これらの変位はそれぞれ $\xi(t, x-\Delta x)$ と $\xi(t, x+\Delta x)$ と表される。



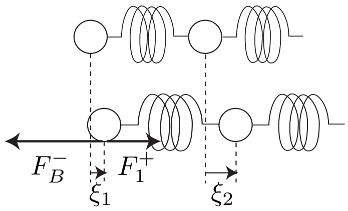
ただし、棒の長さ L は連続極限を取っても変わらないので、式 (1) より、連続極限 $N \to \infty$ では $\Delta x \to 0$ となる。以下の問に答えよ。

(a) 連続極限を考える前に、まず、各質点の運動を考える。ただし、平衡状態におけるばねの自然長からの伸びを ξ_0 とする。

i. $2 \leq i \leq N-1$ に対して（両端の質点以外の質点に対して）、i 番目の質点に、x が大きい側から働く力の x 成分 F_i^+ と、x が小さい側から働く力の x 成分 F_i^- を、ξ_0、$\xi_i(t)$、$\xi_{i+1}(t)$、$\xi_{i-1}(t)$ のうち必要なものを用いて表せ。また、i 番目の質点の運動方程式の x 成分を、$\xi_i(t)$ の微分を含む方程式として書け。



ii. 棒の端点を固定する場合などは、端点に外力を加える必要がある。x 座標が小さい側の端点に（1 番目の質点に）働く外力の x 成分を F_B^- と、x 座標が大きい側の端点に（N 番目の質点に）働く外力の x 成分を F_B^+ として、1 番目の質点と N 番目の質点の運動方程式の x 成分を、それぞれ $\xi_1(t)$ と $\xi_N(t)$ の微分を含む方程式として書け。また、端点に外力を加えないとき、すなわち、F_B^- か F_B^+（もしくは、その両方）が平衡状態においてもゼロであるとき、ξ_0 がどのような値でなければならないか答えよ。



(b) 次に、$N \to \infty$、すなわち、$\xi_i(t) \to \xi(t,x)$、および、$\Delta x \to 0$ として、連続極限を考える。

i. 平衡状態における棒の線密度が、ゼロでない有限な値 σ であるとすると、σ は一様で、式 (1) より、

$$\sigma = \frac{Nm}{L} = \frac{m}{\Delta x}\frac{N}{N-1} \to \frac{m}{\Delta x} \tag{2}$$

と与えられる。棒の両端以外の位置における微小領域の運動方程式を、σ と $\xi(t,x)$ を用いて書き、$\Delta x \to 0$ の極限を取ることによって波動方程式を導け。ただし、連続極限 において、$T \equiv k\,\Delta x$ がゼロでない値であるとして良い。また、微小領域の変位による線密度の変化は高次の微小量なので、線密度 σ は定数であるとして良い。

ヒント）連続極限では、

$$\xi_i(t) \to \xi(t,x), \qquad \xi_{i+1}(t) \to \xi(t,x+\Delta x), \qquad \xi_{i-1}(t) \to \xi(t,x-\Delta x)$$

となるが、このとき、$\xi(t,x+\Delta x)$ と $\xi(t,x-\Delta x)$ を x のまわりで Δx の二次までテイラー展開してみよ。

ii. 棒の一方の端点が固定されているとする。この端点の平衡状態における x 座標を x_T とするとき、$x = x_T$ において $\xi(t,x)$ が満たす条件を書け。

iii. 棒の一方の端点に働く外力が常にゼロであるとする。この端点の平衡状態における x 座標を x_T とするとき、$x = x_T$ において $\xi(t,x)$ が満たす条件を導け。

(c) 棒の端点のうち、x 座標が小さい側の端点を原点に固定したときに生じる定在波について、$\xi(t,x)$ を

$$\xi(t,x) = A\sin[kx-\omega t] + B\cos[kx-\omega t] + C\sin[kx+\omega t] + D\cos[kx+\omega t]$$

とおくことによって、以下の問に答えよ。ただし、A、B、C、D は定数であり、角振動数 ω は、角波数 k と位相速度 $v \equiv \sqrt{T/\sigma}$ を用いて $\omega \equiv kv$ と与えられている。

i. 棒の他端（$x = L$）も固定したとき、定在波の角波数 k としてどのような値が許されるか答えよ。ただし、k は正であるとする。

ii. 棒の他端（$x = L$）に働く外力が常にゼロであるとき、定在波の角波数 k としてどのような値が許されるか答えよ。ただし、k は正であるとする。

7. A、k、Δk、ω、および、$\Delta\omega$ を定数として、$\phi_1(t,x)$ と $\phi_2(t,x)$ が

$$\phi_1(t,x) = \frac{A}{2}\cos[(k-\Delta k)x - (\omega-\Delta\omega)t], \qquad \phi_2(t,x) = \frac{A}{2}\cos[(k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t]$$

と与えられているとき、これらふたつの波の重ね合わせ $\phi(t,x) = \phi_1(t,x) + \phi_2(t,x)$ を

$$\phi(t,x) = \Phi(t,x)\cos(kx-\omega t)$$

の形に変形せよ。また、$t = 0$ における $\Phi(t,x)$ と $\phi(t,x)$ のグラフの概形を重ねて描け。ただし、$\Phi(t,x)$ には Δk と $\Delta\omega$ は含まれるが、k も ω も含まれてはならないものとする。

8. 重力と表面張力を受けて一定の水深 h の水を伝搬する波の分散関係は

$$\omega(k) = \sqrt{\left(g\,k + \frac{\gamma}{\rho}\,k^3\right)\tanh(kh)}$$

と与えられる。ただし、g は重力加速度の大きさで、ρ は水の密度、γ は表面張力係数で、いずれも定数である。この水の波の位相速度 v_p と群速度 v_g を求めよ。

9. 以下のふたつの波動型の方程式に単色進行波

$$\phi(t,x) = A\sin(kx-\omega t)$$

を代入することによって、分散関係 $\omega(k)$（角波数 k の関数としての角振動数 ω）、位相速度 v_p、群速度 v_g を求めよ。ただし、A は任意の定数であり、ω と k は正であるとして良い。

(a) 波動方程式：

$$\frac{\partial^2\phi(t,x)}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\phi(t,x)}{\partial x^2}$$

ただし、v は正の定数。

(b) クライン・ゴルドン方程式：

$$\frac{\partial^2\phi(t,x)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\phi(t,x)}{\partial x^2} - \mu^2\phi(t,x)$$

ただし、c は光速度で定数、μ も定数である。