# 工学系のモデリングA 演習問題　解答

第7回　2015年5月27日実施

担当：電子物理システム学科　山中　由也

**問1**　次の $t$ の関数 $f(t)$ を偶関数 $g(t)$ と奇関数 $h(t)$ の和 $g(t)+h(t)$ で表すとき、$g(t)$ と $h(t)$ を求めよ。ただし、結果はできる限り簡略化して解答せよ。(c) については、$f(t)$ , $g(t)$ , $h(t)$ のグラフも描いてみよ。

(a)　$f(t)=\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)$,　　(b)　$f(t)=e^{i\omega t}$　　($\omega$:実定数）,　　(c)　$f(t)=\dfrac{1}{t-2}$

**解答**）

(a)　$\sin\left(t+\dfrac{\pi}{6}\right)=\sin t\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos t\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin t+\dfrac{1}{2}\cos t$ と式変形し、

$\cos t$ が偶関数、$\sin t$ が奇関数であることから、

$$g(t)=\frac{1}{2}\cos t\,,\qquad h(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$$

あるいは一般論通り

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)+f(-t)\right)=\frac{1}{2}\cos t\,,\qquad h(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)-f(-t)\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin t$$

(b)　$e^{i\omega t}=\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)$ で、$\cos t$ が偶関数、$\sin t$ が奇関数であることから、

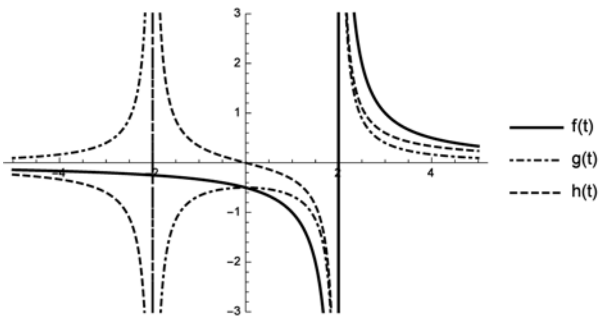
$$g(t)=\cos(\omega t)\,,\qquad h(t)=i\sin(\omega t)\,,$$

あるいは一般論通り

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)+f(-t)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}\right)=\cos(\omega t)\,,$$
$$h(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)-f(-t)\right)=\frac{1}{2}\left(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}\right)=i\sin(\omega t)$$

(c)

$$g(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)+f(-t)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}+\frac{1}{-t-2}\right)=\frac{2}{(t-2)(t+2)}=\frac{2}{t^2-4}$$
$$h(t)=\frac{1}{2}\left(f(t)-f(-t)\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{-t-2}\right)=\frac{t}{(t-2)(t+2)}=\frac{t}{t^2-4}$$




**問2**

(a) 関数 $e^{i\pi x}$ の周期を求めよ。

(b) $e^{in\pi}$　($n$ は整数）を簡単にせよ。

(c) 関数 $e^{ikx}$ （$k$ : 実定数）が周期 $L$ の周期関数になるためには $k$ はどのような値になるか。（ヒント : $e^{ikL}=1$）

**解答**）　(a) 先ずオイラーの公式から

$$e^{i\pi x}=\cos(\pi x)+i\sin(\pi x)$$

実部も虚部も周期 2 であることから、全体としても周期 2 である。
　別法として、周期を $L$ と置いて

$$e^{i\pi x}=e^{i\pi(x+L)}=e^{i\pi x}\,e^{i\pi L}\qquad\therefore\quad e^{i\pi L}=1$$

この最後の式を満たす 0 でない最小の $L$ は 2 で、従って周期は 2 である。

(b) オイラーの公式から

$$e^{in\pi}=\cos(n\pi)+i\sin(n\pi)=(-1)^n+i\times 0=(-1)^n$$

(c) 条件から

$$e^{ikx}=e^{ik(x+L)}=e^{ikx}\,e^{ikL}\qquad\therefore\quad e^{ikL}=1$$

この式を満たすには

$$kL=2\pi n\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)\qquad\therefore\quad k=\frac{2\pi n}{L}$$

**問 3**　$L$ を正の定数、$n$ を 0 でない整数（$n=\pm1,\pm2,\cdots$）としたとき、次の定積分を求めよ。

$$\text{(a)}\quad\int_0^{L/2}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\,dx\,,\qquad\text{(b)}\quad\int_{-L/2}^{L/2}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\,dx\;,\qquad\text{(c)}\quad\int_{-L/2}^{L/2}x\,e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\,dx$$

**解答**）

$$\begin{aligned}\text{(a)}\quad\int_0^{L/2}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\,dx&=\frac{1}{i\frac{2\pi n}{L}}\int_0^{L/2}\left(e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right)'dx\\&=\frac{L}{2i\pi n}\left[e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right]_0^{L/2}=\frac{L}{2in\pi}\left\{e^{in\pi}-1\right\}=\frac{iL}{2n\pi}\left\{1-(-1)^n\right\}\end{aligned}$$

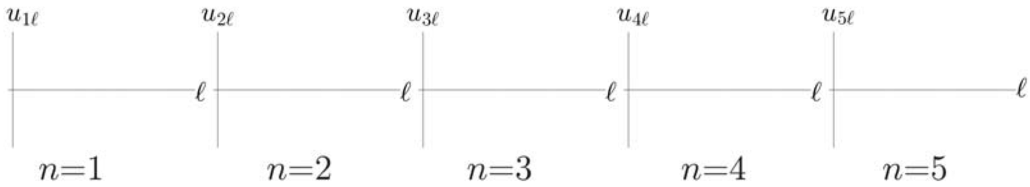
最後の結果を次のようにまとめてもよい。

$$\frac{iL}{2\pi n}\left\{1-(-1)^n\right\}=\begin{cases}0&(n=\text{偶数})\\\frac{iL}{\pi n}&(n=\text{奇数})\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad\int_{-L/2}^{L/2}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\,dx=\frac{1}{i\frac{2\pi n}{L}}\int_{-L/2}^{L/2}\left(e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right)'dx=\frac{L}{2i\pi n}\left[e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right]_{-L/2}^{L/2}=\frac{L}{2in\pi}\left\{e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right\}=0$$

$$\begin{aligned}\text{(c)}\quad\int_{-L/2}^{L/2}x\,e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\,dx&=\frac{1}{i\frac{2\pi n}{L}}\int_{-L/2}^{L/2}x\,\left(e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right)'dx=\frac{L}{2i\pi n}\left[x\,e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right]_{-L/2}^{L/2}\\&-\frac{L}{2i\pi n}\int_{-L/2}^{L/2}e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\,dx=\frac{L}{2i\pi n}\left(\frac{L}{2}e^{in\pi}+\frac{L}{2}e^{-in\pi}\right)+\frac{L^2}{4\pi^2n^2}\int_{-L/2}^{L/2}\left(e^{i\frac{2\pi n}{L}x}\right)'dx\\&=-\frac{iL^2}{2\pi n}(-1)^n+\frac{L^2}{4\pi^2n^2}\left(e^{in\pi}-e^{-in\pi}\right)=-\frac{iL^2}{2\pi n}(-1)^n\end{aligned}$$

**問 4**　指導書 p.70 の図のように、同じ質量の $N$ 個の質点が同じばね定数のばね $N+1$ 本に結びつけられている連成振動系を考える。指導書 p.70 から p.73 の内容を踏まえ、$N=5$ の場合、分散関係（$p_n$–$\omega_n$ のグラフ、$p_n$ 軸に目盛を入れて）と基準振動のグラフ（$\ell$–$u_{n\ell}$ のグラフ、グラフに描きこむ点の数に注意して）を描け。（ヒント：指導書 p.73 **問 5.5.1**）

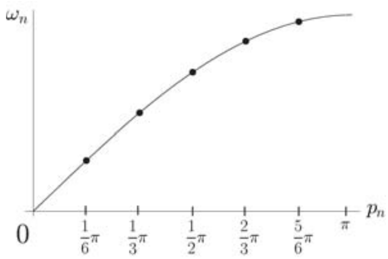




**解答**）

　分散関係：一般的な $N$ に対する指導書 p.72 の式 (5.125) と式 (5.127) で、$N=5$ とすればよい。

$$\omega_n = 2\omega \sin\left(\frac{n}{12}\pi\right) \qquad (n = 1, 2, 3, 4, 5)$$

右図のように、目盛は 5 個、点も 5 個描き込まれなければならない。滑らかな曲線は sin 曲線。




　基準振動のグラフ：同様に p.72 の式 (5.123) と式 (5.127) で、$N=5$ とする。

$$u_{n\ell} = C_n \sin\left(\frac{n}{6}\pi\ell\right) \qquad (n, \ell = 1, 2, 3, 4, 5)$$

下図では、各グラフ $\ell = 0, 6$ で $u_{n\ell} = 0$ となる 2 点の他に、5 個の点が描き込まれている。滑らかな曲線は sin 曲線。