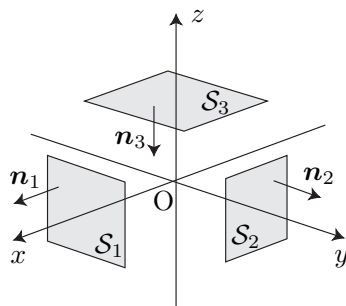


基礎物理学 B 演習解答 3

1. (a) S_1 、 S_2 、 S_3 の外向き単位法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{n}_1 、 \mathbf{n}_2 、 \mathbf{n}_3 とすると、これらはそれぞれ、 x 正の向き、 y 正の向き、 z 負の向きを向いている単位ベクトルだから、

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

と成分表示できる。



よって、 I_1 は、 i_x が定数であることと、 S_1 上での 1 の面積分が S_1 の面積 s_1 であることを用いて、

$$I_1 = \int_{S_1} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_1 dS = \int_{S_1} i_x dS = i_x \int_{S_1} dS = i_x s_1 \quad (2)$$

と計算できる。同様に、 I_2 と I_3 も

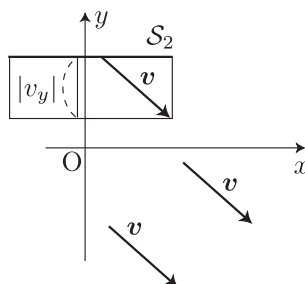
$$I_2 = \int_{S_2} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_2 dS = i_y s_2, \quad I_3 = \int_{S_3} \mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_3 dS = -i_z s_3 \quad (3)$$

と計算される。(式 (1) からわかるように、 $\mathbf{i} \cdot \mathbf{n}_3 = -i_z$ であることに注意。)

- (b) 単位時間あたりに S_1 を通過する荷電流体の体積は $|v_x|s_1$ であり、電荷密度 ρ で電荷が分布しているから、この体積内に含まれる電荷量は $|v_x|s_1\rho$ である。問題文中の図のように $v_x \geq 0$ であれば (速度の成分が負の場合については、 I_2 に対して、以下で考える。) この電荷量が単位時間あたりに S_1 を外向きに通過しているから、 S_1 を貫く電流 I_1 は $I_1 = |v_x|s_1\rho$ と書ける。さらに、 $v_x \geq 0$ ならば、 $|v_x| = v_x$ だから、これらより、

$$I_1 = \rho v_x s_1 \quad (4)$$

同様に、単位時間あたりに S_2 を通過する荷電流体の体積内に含まれる電荷量は $|v_y|s_2\rho$ であるが、下図のように $v_y \leq 0$ であれば ($v_y \geq 0$ の場合については、 I_1 に対して上で考えたのと同様。) この電荷量は単位時間あたりに S_2 を内向きに通過している。



すなわち、単位時間あたりに S_2 の外側から内側へ $|v_y|s_2\rho$ の電荷量が移動しているわけで、電荷が保存することを考えれば、これは、内側から外側へ 正味 $-|v_y|s_2\rho$ の電荷量が移動したと同じである。したがって、 S_2 を貫く電流 I_2 は $I_2 = -|v_y|s_2\rho$ と書ける。 $v_y \leq 0$ ならば、 $|v_y| = -v_y$ だから、

$$I_2 = \rho v_y s_2 \quad (5)$$

以上からわかるように、速度の成分を用いた電流の表式 (I_1 に対しては式 (4)、 I_2 に対しては式 (5)) は、速度の成分が正の場合でも負の場合でも同じなので、 I_3 に対しては、 $v_z \geq 0$ として考える。上と同様、単位時間あたりに S_3 を通過する荷電流体の体積内に含まれる電荷量は $|v_z|s_3\rho$ であるが、 S_3 の外向きは z 負の向きなので、 $v_z \geq 0$ の場合、この電荷量は単位時間あたりに S_3 を内向きに通過している。上と同様の理屈から、これは、単位時間あたりに S_3 を $-|v_z|s_3\rho$ の電荷量が外向きに通過していることと同じなので、 $v_z \geq 0$ のときには $|v_z| = v_z$ であることに注意して、

$$I_3 = -\rho v_z s_3 \quad (6)$$

(c) 式 (2) と (3)、および、(4)、(5)、(6) より、

$$i_x = \rho v_x, \quad i_y = \rho v_y, \quad i_z = \rho v_z$$

よって、電流密度 \mathbf{i} は

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \rho \mathbf{v}$$

2. (a) 自由電子の位置ベクトルを $\mathbf{r}(t)$ とすると、自由電子の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{d^2 \mathbf{r}(t)}{dt^2} &= \mathbf{F}_v + \mathbf{F}_E \\ &= -m\Gamma \mathbf{v} + e\mathbf{E} \end{aligned} \quad (7)$$

自由電子が等速直線運動しているという条件、すなわち、 $d^2 \mathbf{r}(t)/dt^2 = 0$ を式 (7) に代入すると、

$$\mathbf{v} = \frac{e}{m\Gamma} \mathbf{E}$$

を得るが、ここで、 σ を

$$\sigma \equiv \frac{e\rho}{m\Gamma} \quad (8)$$

と定義すると、 $\mathbf{i} = \rho \mathbf{v}$ より

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \quad (9)$$

(b) 導体の断面の外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} と式 (9) との内積を、導体の断面 S 上で面積分し、さらにそれを x で積分することを考える。すなわち、

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \left(\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \right) dx = \int_{x_0}^{x_0+L} \left(\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \right) dx \quad (10)$$

ただし、 x_0 は S_A の x 座標であり、したがって、 $x_0 + L$ は S_B の x 座標である。 ρ も Γ も一様であり、したがって、 σ が定数であること、および、 $d\mathbf{r} = \mathbf{n} dx$ を考慮すると、式 (10) の右辺は、 S 上の面積分と x での積分の順序を交換して、

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \left(\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \right) dx = \sigma \int_S \left(\int_{x_0}^{x_0+L} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dx \right) dS = \sigma \int_S \left(\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \right) dS \quad (11)$$

と書き直せる。 C と S_A の交点の位置ベクトルを \mathbf{r}_A 、 C と S_B の交点の位置ベクトルを \mathbf{r}_B とすると、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ より、式 (11) の最右辺の中の C に沿った線積分は、

$$\int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \nabla\phi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\phi(\mathbf{r}_A)}^{\phi(\mathbf{r}_B)} d\phi = -\phi(\mathbf{r}_B) + \phi(\mathbf{r}_A) = \phi_A - \phi_B = V$$

と計算できる。(資料1参照。) よって、 V が定数であることと、 S 上での 1 の面積分が S の面積 s であることに注意して、式 (10) の右辺は、

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \left(\int_S \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \right) dx = \sigma \int_S V dS = \sigma V \int_S dS = \sigma V s \quad (12)$$

と与えられる。一方、導体の (x 軸に垂直な) 任意の断面 S を貫く電流の値を I とすると、 I は

$$I = \int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS$$

と表されるが、この電流は定常なので、定常電流に対する電荷保存則から、 I は一定であって x に依存しない。(次問参照。) したがって、式 (10) の左辺は

$$\int_{x_0}^{x_0+L} \left(\int_S \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS \right) dx = \int_{x_0}^{x_0+L} I dx = I \int_{x_0}^{x_0+L} dx = IL \quad (13)$$

と書き直される。よって、 R を

$$R \equiv \frac{L}{\sigma s} \quad (14)$$

と定義すると、式 (10)、(12)、および、(13) より、

$$V = RI \quad (15)$$

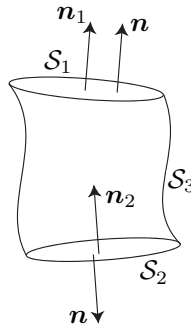
を得る。

注) よく知られているように、式 (15) はオームの法則に他ならず、式 (14) の R は電気抵抗である。この問題で見たように、式 (15) は、式 (9) を積分するという数学的な操作によって得られる。したがって、物理的には、式 (9) も式 (15) と同じ内容を表しており、実際、式 (9) もオームの法則と呼ばれる。すなわち、電流密度 \mathbf{i} と電場 \mathbf{E} を用いて表現したオームの法則が式 (9) であり、その比例係数 σ は電気伝導率と呼ばれる。

3. (a) 電流密度を $\mathbf{i}(\mathbf{r})$ とすると、 S_1 を貫く電流 I_1 と S_2 を貫く電流 I_2 はそれぞれ、

$$I_1 = \int_{S_1} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_1 dS, \quad I_2 = \int_{S_2} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_2 dS \quad (16)$$

と表される。一方、ここで注目している領域を \mathcal{V} とし、 \mathcal{V} の境界を S とすると、 S は閉曲面で、この閉曲面は S_1 、 S_2 、および、 \mathcal{V} の側面 S_3 から構成されている。



また、 S の外向き単位法線ベクトルを n とすると、 n の向きは閉曲面 S が囲んでいる領域 V からそれ以外の領域へ向かう向きなので、 S_1 上では n_1 と同じ向きであるのに対し、 S_2 上では n_2 と逆向きである。すなわち、

$$n = n_1 \quad (S_1 \text{ 上}), \quad n = -n_2 \quad (S_2 \text{ 上}) \quad (17)$$

S は閉曲面なので、定常電流に対する電荷保存則

$$\oint_S i(r) \cdot n \, dS = 0 \quad (18)$$

が成り立っているが、積分範囲を分ければ、式 (18) の左辺を、

$$\oint_S i(r) \cdot n \, dS = \int_{S_1} i(r) \cdot n \, dS + \int_{S_2} i(r) \cdot n \, dS + \int_{S_3} i(r) \cdot n \, dS \quad (19)$$

と書くことができる。ところで、側面 S_3 を貫く電流の値がゼロであるという条件より、

$$\int_{S_3} i(r) \cdot n \, dS = 0 \quad (20)$$

なので、式 (19) は、式 (17) を用いて、

$$\oint_S i(r) \cdot n \, dS = \int_{S_1} i(r) \cdot n_1 \, dS - \int_{S_2} i(r) \cdot n_2 \, dS \quad (21)$$

と書き直せる。よって、式 (16)、(18)、および、(21) より、 $I_1 - I_2 = 0$ 、すなわち、

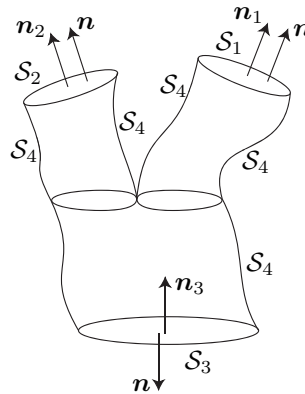
$$I_1 = I_2$$

注) この問題で考えた領域 V にも、断面 S_1 と S_2 にも、それらの形状についての条件はついておらず、したがって、この問題の結論は、定常電流について、側面を貫く電流の値がゼロであるという条件が満たされていれば、(次問のように分岐がない限り) どのような領域のどのような断面についても適用することができる。特に、導線に沿って流れる定常電流について、任意の断面を貫く電流の値は等しい。

- (b) 電流密度を $i(r)$ とすると、 S_1 を貫く電流 I_1 、 S_2 を貫く電流 I_2 、 S_3 を貫く電流 I_3 はそれぞれ、

$$I_1 = \int_{S_1} i(r) \cdot n_1 \, dS, \quad I_2 = \int_{S_2} i(r) \cdot n_2 \, dS, \quad I_3 = \int_{S_3} i(r) \cdot n_3 \, dS \quad (22)$$

と表される。一方、ここで注目している領域を V とし、 V の境界を S とすると、 S は閉曲面で、この閉曲面は S_1 、 S_2 、 S_3 、および、 V の側面 S_4 から構成されている。



また、 S の外向き単位法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、 \mathbf{n} の向きは閉曲面 S が囲んでいる領域 V からそれ以外の領域へ向かう向きなので、 S_1 上では \mathbf{n}_1 と同じ向き、 S_2 上では \mathbf{n}_2 と同じ向きであるのに対し、 S_3 上では \mathbf{n}_3 と逆向きである。すなわち、

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_1 \quad (S_1 \text{ 上}), \quad \mathbf{n} = \mathbf{n}_2 \quad (S_2 \text{ 上}), \quad \mathbf{n} = -\mathbf{n}_3 \quad (S_3 \text{ 上}) \quad (23)$$

S は閉曲面なので、定常電流に対する電荷保存則を用い、前問と同様、積分範囲を分けて書くと、

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_1} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_3} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_4} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned} \quad (24)$$

となる。側面 S_4 を貫く電流の値がゼロであるという条件より、

$$\int_{S_4} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (25)$$

が成り立つので、式 (23)、(24)、および、(25) より、

$$0 = \int_{S_1} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_1 dS + \int_{S_2} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_2 dS - \int_{S_3} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}_3 dS \quad (26)$$

を得る。式 (26) に (22) を代入すれば、 $0 = I_1 + I_2 - I_3$ 、すなわち、

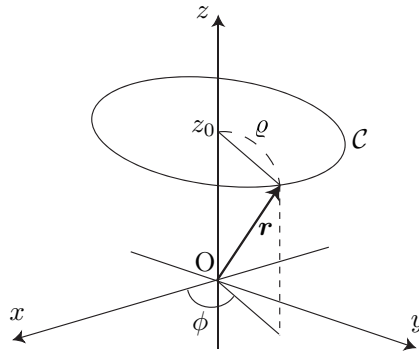
$$I_3 = I_1 + I_2$$

注) 前問と同様、この問題で考えた領域やその断面の形状には条件はついていない。したがって、特に、分岐した導線に沿って流れる定常電流について、分岐の前後で、電流の値の和が等しいという性質が、この問題の結果から直ちに導かれる。これは、いわゆるキルヒホッフの第一法則である。

4. まず、この問題における C_1 や C_2 に限らず、一般に、 z 軸に垂直で、 z 軸上の z 座標 z_0 の点を中心とする、半径 ϱ の円周 C を考え、 C に沿った微小変位ベクトル $d\mathbf{r}$ を求めておく。 C 上の任意の点の位置ベクトルを \mathbf{r} とすると、 \mathbf{r} は

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} \varrho \cos \phi \\ \varrho \sin \phi \\ z_0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

と成分表示できる。



C に沿ってその半径 ϱ は一定であるし、中心の z 座標 z_0 は変化しないから、 C に沿って変化する変数 ϕ のみで r を微分して、

$$\frac{dr}{d\phi} = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \phi \\ \varrho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

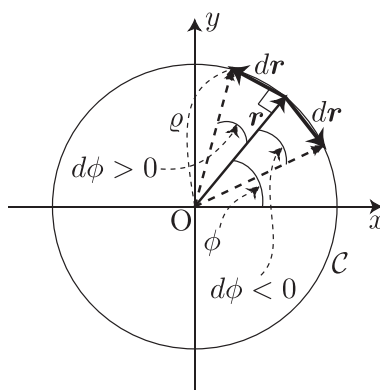
この両辺に $d\phi$ を掛けて、 C に沿った微小変位ベクトル dr は、

$$dr = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \phi d\phi \\ \varrho \cos \phi d\phi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \phi \\ \varrho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \quad (28)$$

と求められる。ただし、

$$dr = \begin{pmatrix} -\varrho \sin \phi \\ \varrho \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = \begin{pmatrix} \varrho \cos(\pi/2 + \phi) \\ \varrho \sin(\pi/2 + \phi) \\ 0 \end{pmatrix} d\phi$$

と変形できることからわかるように、 dr は x 正の向きから y 正の向きへ $\frac{\pi}{2} + \phi$ だけ傾いている。したがって、微小変位ベクトル dr の符号を式 (28) のように取るとすると、 C の向き（すなわち、 dr の向き）が、 z 座標が大きい側から見て反時計回りの向きを向いている場合には $d\phi > 0$ 、時計回りの向きを向いている場合には $d\phi < 0$ である。（下図では、 $d\phi$ を有限の大きさにして描いてあるので、 $d\phi > 0$ のときの dr と $d\phi < 0$ のときの dr が完全に逆向きにはなっていないが、 $d\phi$ を無限小にする極限では、これらの微小変位ベクトルは互いに逆向きになる。）



微小変位ベクトル dr は、幾何学的な考察から求めることも可能である。すなわち、円周 C 上の点の位置ベクトル r が変位する際、その微小変位ベクトル dr の大きさは、（それが十分小さい極限で） r の終点が描く弧の長さに等しい。この際の ϕ の変化量 $d\phi$ と C の半径 ϱ を用いれば、この弧の長さは $\varrho |d\phi|$ と与えられるから、 $|dr| = \varrho |d\phi|$ であることがわかる。一方、 dr の向きは、（ z 軸と r を含む平面に垂直なので） z 方向を向いたベクトルにも式 (27) の r にも垂直である。よって、これらふたつのベクトルとの内積がゼロという条件より、 A を定数として、

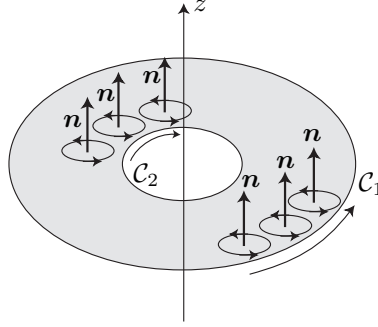
$$dr = A \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

でなければならないことがわかる。また、これより、 $|d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = |A|$ なので、定数 A は、 $|d\mathbf{r}| = \varrho |d\phi|$ という条件より、 $A = \pm \varrho d\phi$ でなければならず、したがって、

$$d\mathbf{r} = \pm \varrho \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi$$

と求めることができる。複号のうちどちらを取るかは、 $d\mathbf{r}$ の向きと $d\phi$ の正負に合わせて上述の通りに決めれば良い。

- (a) この問題で考えている曲面 S の境界 C を構成している曲線 C_1 と C_2 それぞれに沿った微小変位ベクトルを求めるために、まず、 C_1 と C_2 それぞれの向きを考える。 C_1 と C_2 それぞれの近辺における S 上の点数力所で、 S の外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} を考えると、下図のようになる。ただし、 \mathbf{n} の向きに右手の親指を向けた時に残りの4本の指がまわる向きを示すために、それぞれの \mathbf{n} には、向きを付けた小さな円を示してある。このようにしておけば、これらの小さな円が境界と接しているところでの小さな円の向きが、 \mathbf{n} の向きに右手の親指を向けた時に残りの4本の指が境界をたどる向きになっており、すなわち、この向きが境界の向きである。



したがって、 C_1 の向きは、 z 座標が大きい側から見た時に反時計回りの向きであり、 C_2 の向きは、 z 座標が大きい側から見た時に時計回りの向きである。よって、 C_1 の半径が ϱ_1 、 C_2 の半径が ϱ_2 であることを考慮し、 $d\phi$ の正負に注意すると、式 (28) より、 C_1 に沿った微小変位ベクトル $d\mathbf{r}_1$ と C_2 に沿った微小変位ベクトル $d\mathbf{r}_2$ は、それぞれ、

$$d\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} -\varrho_1 \sin \phi \\ \varrho_1 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \quad \text{ただし、} d\phi > 0 \quad (29)$$

$$d\mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} -\varrho_2 \sin \phi \\ \varrho_2 \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \quad \text{ただし、} d\phi < 0 \quad (30)$$

と求められる。

- (b) ここで考えている電流が作る磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi\varrho} \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (31)$$

と与えられることがわかっており、 C_1 上では $\varrho = \varrho_1$ なので、 C_1 上の任意の点の位置ベ

クトルを r_1 とすると、式 (29) を用いて、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1 = \frac{I}{2\pi\varrho_1} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varrho_1 \sin\phi \\ \varrho_1 \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = \frac{I}{2\pi} d\phi$$

を得る。これより、 \mathcal{C}_1 に沿った線積分が ϕ による通常の積分に書き換えられることがわかるが、積分変数を ϕ に変換したことに対応して、積分範囲の下限と上限も ϕ を用いて表さなければならず、また、 \mathcal{C}_1 に沿って $d\phi > 0$ であることから、その積分範囲は ϕ が増加するように選ばなければならない。したがって、電流の値 I が ϕ に依存しないことに注意すると、

$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{H}(\mathbf{r}_1) \cdot d\mathbf{r}_1 = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi} d\phi = \frac{I}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = I \quad (32)$$

(c) \mathcal{C}_2 上では $\varrho = \varrho_2$ なので、 \mathcal{C}_2 上の任意の点の位置ベクトルを r_2 として、式 (30) と (31) を用いると、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 = \frac{I}{2\pi\varrho_2} \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\varrho_2 \sin\phi \\ \varrho_2 \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = \frac{I}{2\pi} d\phi$$

を得る。ここでも、 \mathcal{C}_2 に沿った線積分を ϕ による通常の積分に書き換えられることがわかる。これに対応して、積分範囲の下限と上限も ϕ を用いて表さなければならないが、 $d\mathbf{r}_2$ として用いた式 (30) は、 \mathcal{C}_2 に沿って $d\phi < 0$ としたときに正しい表式なので、その積分範囲は ϕ が減少するように選ばなければならないことに注意する。したがって、 ϕ で積分の下限と上限をそれぞれ 2π と 0 に選び、 I が ϕ に依存しないことを考慮して、

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{H}(\mathbf{r}_2) \cdot d\mathbf{r}_2 = \int_{2\pi}^0 \frac{I}{2\pi} d\phi = \frac{I}{2\pi} \int_{2\pi}^0 d\phi = -I \quad (33)$$

注) 式 (33) において、 $d\phi < 0$ であるにも関わらず、たとえば、積分の下限を -2π 、上限を 0 と、 ϕ が増加するように積分範囲を選んでいたら、

$$\int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{-2\pi}^0 \frac{I}{2\pi} d\phi = I$$

となり、符号が正しくない結果を得ていた。このことから、線積分の計算に際して、微小変位ベクトルの符号の選び方と積分範囲の取り方に注意が必要であることが確認できる。

(d) S の境界 \mathcal{C} に沿った線積分を、その積分範囲を分割することにより、 \mathcal{C}_1 に沿った線積分と \mathcal{C}_2 に沿った線積分に分けて実行すると、式 (32) と (33) を用いて、

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = I + (-I) = 0$$

注 1) この問題の結果から、着目する曲面を電流が貫いていない場合のアンペールの法則を確認することができる。すなわち、この問題で考えた電流は円環の曲面 S を貫いておらず、このとき、 S の境界 \mathcal{C} に沿った磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ の線積分はゼロである。

注 2) ここで、曲面の境界をなしている閉曲線の向きについて、アンペールの法則を用いて、曲面上の面積分との関係から、一般的に考えておく。アンペールの法則

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (34)$$

は、外向き単位法線ベクトル \mathbf{n} を持つ任意の曲面 S の境界 C に沿った磁場の線積分と曲面 S を貫く電流とが等しいことを主張しているが、このとき、電流、すなわち、 S 上での $\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$ の面積分は、本来、曲面 S を無限に細かい微小領域に分割したときの、各微小領域における微小面積 dS と $\mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$ の積を、すべての微小領域について足したものとして定義されている。このように分割した各々の領域についても、当然、アンペールの法則は成り立つ。ここでは、より一般的に、無限に細かく分割する場合に限らず、有限の大きさの領域に分割する場合を含めて、分割した曲面にアンペールの法則を適用し、それを再度足し合わせることを考えてみる。分割した曲面のうち、 i 番目の領域（曲面）を ΔS_i とし、 ΔS_i の境界をなす閉曲線を ΔC_i とすると、アンペールの法則より、

$$\oint_{\Delta C_i} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\Delta S_i} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (35)$$

が成り立つので、これをすべての ΔS_i について足すと、

$$\sum_i \oint_{\Delta C_i} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \int_{\Delta S_i} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (36)$$

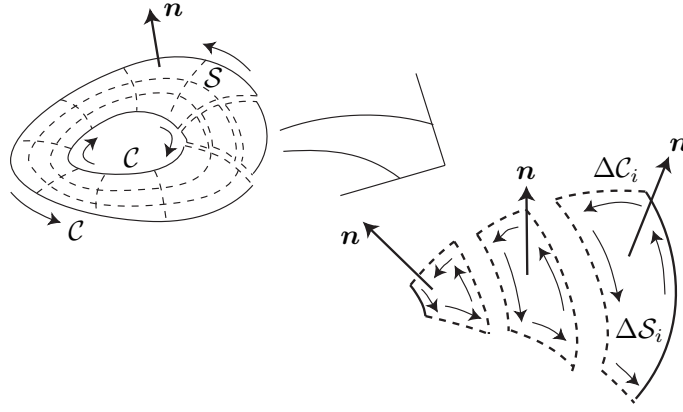
を得る。式 (36) の右辺は、各々の ΔS_i 上での面積分の和という形をしているが、これは、元の（全体の）曲面 S 上の面積分を、積分範囲を分けて書いてあるに過ぎないから、

$$\sum_i \int_{\Delta S_i} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (37)$$

が成り立ち、すなわち、式 (36) の右辺は S を貫く電流に他ならない。よって、式 (34) と (37) より、式 (36) の左辺は S の境界 C に沿った磁場の線積分と等しいはずである。ところで、分割した各々の領域 ΔS_i の境界 ΔC_i は、下図のように、元の曲面 S の境界 C の一部である部分（実線）とそうでない部分（点線）とから構成されている。（下図のうち、左側の図は、 S 全体を示したもので、ただし、分割した領域のうち3つを他と分離させて描いてある。右側の図は、これら3つの領域を拡大して示したものである。）したがって、式 (36) の左辺は、単純に C に沿った線積分の積分範囲を分けた形に書けてはならず、余分な項（ C の一部ではない部分に沿った線積分の項）を含んでいる。しかし、 C の一部ではない部分は、必ず、隣の領域によって共有されており、さらに、その向きは、隣り合う領域どうして互いに逆になっている。（下図参照。）同一の曲線に沿って同じベクトルを互いに逆向きに線積分すれば、微小変位ベクトルの向きのみが互いに逆なので、線積分の値は互いに符号が反対であり、ただし、絶対値は等しい。よって、 ΔC_i を構成している部分のうち、 C の一部ではない部分に沿った線積分は、必ず、隣り合う領域どうして相殺され、結果として、 C の一部である部分に沿った線積分のみが生き残る。さらに、このとき、下図からわかるように、線積分が生き残った部分については、 ΔC_i の向きは C の向きと一致しているので、これらの生き残った項をすべて足したものは C 全体に沿った線積分に他ならず、結局、式 (36) の左辺は

$$\sum_i \oint_{\Delta C_i} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (38)$$

と書き直すことができる。



よって、式 (36)、(37)、および、(38) より、元の (全体の) 曲面 S に対するアンペールの法則 (34) が再現されることがわかる。ここで注意したいのは、式 (35) から (34) が再現されるためには、 ΔC_i を構成する部分のうち、 C の一部ではない部分に沿った線積分が相殺されることが本質的であること、また、これらが相殺されるのは、隣り合う領域どうして共有している境界の向きが逆になるからであるということである。さらに、隣り合う領域どうして境界の向きが逆になるのも、線積分が生き残る部分については ΔC_i の向きが C の向きと一致するのも、境界の向きを曲面の外向き単位法線ベクトルに基づいて定義したことが、その本質的な理由であることにも注意しておく。なお、ここでの議論は、有限の大きさの領域へ分割する場合でも、無限に細かく分割する場合でも、同じように適用することができる。したがって、曲面の境界の向きがわからない場合には、有限の大きさにでも無限に細かくでも、わかりやすいように曲面を分割することによって、境界の向きを調べることができる。

5. (a) まず、電流 A が作る磁場 $H_A(r)$ を、ビオ・サバルの法則を用いて計算する。電流 A が流れている直線 ($x = d, y = 0$ によって与えられる直線) を C_A とし、 C_A 上の任意の点の位置ベクトルを r' とすると、 r' は、その z 座標を z' として、

$$r' = \begin{pmatrix} d \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} \quad (39)$$

と成分表示される。ここで、 d は定数であり、したがって、 C_A に沿って変化する変数は z' のみであるから、 C_A に沿った微小変位ベクトル dr' は、まず、 r' を z' で微分することにより、

$$\frac{dr'}{dz'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

さらに、この両辺に dz' を掛けることによって

$$dr' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz' \end{pmatrix} \quad (40)$$

と求めることができる。(前問の場合と同様、ここでも、幾何学的な考察から dr' を求めることもできるが、今の場合、その導出はほとんど自明なので説明は略す。) C_A に沿った微小変位ベクトル dr' の向きは、直線 C_A に沿った導線 (電流 A が流れている導線) の断面の外向きに選ぶ必要があるので、この導線の断面の外向きを z 正の向きに選ぶと、

式 (40) において $dz' > 0$ としなければならない。また、このように導線の断面の外向きを選んだとき、電流 A の値は I なので、ビオ・サバルの法則より、 $H_A(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{H}_A(\mathbf{r}) = -\frac{I}{4\pi} \int_{C_A} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times d\mathbf{r}' \quad (41)$$

と与えられる。任意の点の位置ベクトル \mathbf{r} を

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (42)$$

と成分表示すると、式 (39)、(40)、および、(42) より、

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \times d\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} x-d \\ y \\ z-z' \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y dz' \\ -(x-d) dz' \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3 = \sqrt{(x-d)^2 + y^2 + (z-z')^2}^3 \quad (44)$$

と計算できるので、これらを式 (41) に代入して、 $\mathbf{H}_A(\mathbf{r})$ の x 成分 $H_{Ax}(\mathbf{r})$ は、

$$H_{Ax}(\mathbf{r}) = -\frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + (z-z')^2}^3} dz' \quad (45)$$

と書ける。ただし、上述したように $dz' > 0$ としたので、 z' での積分の積分範囲は z' が増加するように選んである。ここで、任意の点の位置ベクトル \mathbf{r} と C_A 上の点の位置ベクトル \mathbf{r}' が独立であることに注意すると、式 (45) の積分を実行する際には x 、 y 、 z を定数と見なして z' で積分すれば良いことがわかる。そこで、

$$\tan \psi = \frac{z' - z}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}$$

によって新たな積分変数 ψ へ変数変換すると、式 (45) の積分は、

$$\begin{aligned} H_{Ax}(\mathbf{r}) &= -\frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + (z-z')^2}^3} dz' \\ &= -\frac{I}{4\pi} \frac{y}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}{\sqrt{1 + ((z'-z)/\sqrt{(x-d)^2 + y^2})^2}^3} d\left(\frac{z'-z}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2}}\right) \\ &= -\frac{I}{4\pi} \frac{y}{(x-d)^2 + y^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}^3} \frac{1}{\cos^2 \psi} d\psi \\ &= -\frac{I}{4\pi} \frac{y}{(x-d)^2 + y^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi = -\frac{I}{2\pi} \frac{y}{(x-d)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (46)$$

と実行することができる。同様に、式 (41)、(43)、および、(44) を用いて、 $\mathbf{H}_A(\mathbf{r})$ の y 成分 $H_{Ay}(\mathbf{r})$ は、

$$\begin{aligned} H_{Ay}(\mathbf{r}) &= \frac{I}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x-d}{\sqrt{(x-d)^2 + y^2 + (z-z')^2}^3} dz' \\ &= \frac{I}{4\pi} \frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \psi}^3} \frac{1}{\cos^2 \psi} d\psi \\ &= \frac{I}{4\pi} \frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi = \frac{I}{2\pi} \frac{x-d}{(x-d)^2 + y^2} \end{aligned} \quad (47)$$

と計算され、 $H_A(\mathbf{r})$ の z 成分 $H_{Az}(\mathbf{r})$ は、式 (41) と (43) から直ちに明らかなように、

$$H_{Az}(\mathbf{r}) = 0 \quad (48)$$

と求められる。よって、式 (46)、(47)、および、(48) より、 $H_A(\mathbf{r})$ を

$$\mathbf{H}_A(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{(x-d)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

と成分表示することができる。

次に、電流 B が作る磁場 $\mathbf{H}_B(\mathbf{r})$ を求める。電流 B が流れている直線 ($x = -d$, $y = 0$ によって与えられる直線) を C_B とし、 C_B 上の任意の点の位置ベクトルを \mathbf{r}' とすると (\mathbf{r}' は積分変数であるし、混乱はないと思われるので、 C_A 上の点の位置ベクトルと同じ文字を用いるが、場所自体は C_A 上の点と C_B 上の点は別)、 \mathbf{r}' は、その z 座標を z' とし、

$$\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} -d \\ 0 \\ z' \end{pmatrix} \quad (50)$$

と与えられ、また、上と同様に考えて、 C_B に沿った微小変位ベクトル $d\mathbf{r}'$ は

$$d\mathbf{r}' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dz' \end{pmatrix} \quad (51)$$

と成分表示できる。ここでも、やはり、直線 C_B に沿った導線 (電流 B が流れている導線) の断面の外向きを z 正の向きに選ぶと、 $dz' > 0$ であり、また、このとき、電流 B の値は $-I$ である。電流 B の値が $-I$ であることに注意すると、ビオ・サバールの法則より、 $\mathbf{H}_B(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{H}_B(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \int_{C_B} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times d\mathbf{r}' \quad (52)$$

と与えられるが、ここで、式 (39) と (50)、式 (40) と (51)、式 (41) と (52) をそれぞれ比較すると、 $\mathbf{H}_B(\mathbf{r})$ の表式が、 $\mathbf{H}_A(\mathbf{r})$ における d と I の符号を逆にした表式によって与えられることがわかる。したがって、式 (49) において、 $d \rightarrow -d$ 、 $I \rightarrow -I$ の置き換えを行うことにより、 $\mathbf{H}_B(\mathbf{r})$ が

$$\mathbf{H}_B(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{(x+d)^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -(x+d) \\ 0 \end{pmatrix} \quad (53)$$

と求められる。

2本の電流 A と B が作る磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ は、磁場の線形性より、 $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_A(\mathbf{r}) + \mathbf{H}_B(\mathbf{r})$ によって与えられるので、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{2\pi} \left[\frac{1}{(x-d)^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{(x+d)^2 + y^2} \begin{pmatrix} y \\ -(x+d) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (54)$$

- (b) 微小量 ε に対して成り立つ近似式 $(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$ を適用すると、 d/ϱ の一次までで、

$$\begin{aligned}\{(x \mp d)^2 + y^2\}^{-1} &= \{x^2 \mp 2dx + d^2 + y^2\}^{-1} = \{\varrho^2 \mp 2dx + d^2\}^{-1} \\ &= \varrho^{-2} \left\{ 1 \mp 2\frac{dx}{\varrho^2} + \frac{d^2}{\varrho^2} \right\}^{-1} \simeq \frac{1}{\varrho^2} \left\{ 1 \pm 2\frac{d}{\varrho} \frac{x}{\varrho} \right\}\end{aligned}$$

と近似できるので、式 (54) の磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ は、

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &\simeq \frac{I}{2\pi\varrho^2} \left[\left\{ 1 + 2\frac{dx}{\varrho^2} \right\} \begin{pmatrix} -y \\ x-d \\ 0 \end{pmatrix} + \left\{ 1 - 2\frac{dx}{\varrho^2} \right\} \begin{pmatrix} y \\ -(x+d) \\ 0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{Id}{\pi\varrho^2} \left[2\frac{x}{\varrho^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \frac{Id}{\pi\varrho^2} \left[2\cos\phi \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (55)\end{aligned}$$

と近似できる。ただし、最後の等式において、 \mathbf{r} の $x-y$ 平面への射影の x 正の向きからの偏角 ϕ と ϱ を用いて、 x と y を書き換えた。

- (c) C_1 は原点を中心とする $x-y$ 平面内の円周なので、その半径 $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ と偏角 ϕ を用いると、 C_1 に沿った微小変位ベクトル $d\mathbf{r}$ は、

$$d\mathbf{r} = \begin{pmatrix} -\varrho \sin\phi \\ \varrho \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi \quad (56)$$

と与えられる。ただし、 z 正の側から (z が大きい側から) 見て反時計回りの向きが C_1 の向きなので、 $d\phi > 0$ としなければならない。(問 4(a) の解答を参照。) C_1 の半径 $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ が無限大の極限では前問の近似 $d \ll \varrho$ が成り立つから、 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ の近似式 (55) を使うことができ、よって、これと式 (56) との内積を取ることで、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{Id}{\pi\varrho^2} \left[2\cos\phi \begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} -\varrho \sin\phi \\ \varrho \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = \frac{Id}{\pi\varrho} \cos\phi d\phi \quad (57)$$

これより、 C_1 に沿った $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ の線積分は、 $d\phi > 0$ となるように ϕ での積分範囲の下限と上限を選ぶこと、および、 I 、 d 、 ϱ が C_1 に沿って一定であることに注意して、

$$\oint_{C_1} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} \frac{Id}{\pi\varrho} \cos\phi d\phi = \frac{Id}{\pi\varrho} \int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = 0$$

と計算できる。したがって、(ここでさらに $\varrho \rightarrow \infty$ の極限を取らなくても) C_1 に沿った磁場の線積分がゼロであることがわかる。

注) この問題からもアンペールの法則を確認することができる。 C_1 に囲まれた曲面 (C_1 を境界とする曲面) を貫く電流は、電流 A と B であるが、これらふたつの電流の値 I と $-I$ の和はゼロであり、したがって、 C_1 に囲まれた曲面を貫く電流の総量はゼロである。このことに対応して、アンペールの法則が主張するように、 C_1 に沿った磁場の線積分がゼロであることが上の計算によって確認できた。

- (d) C_0 と C_+ から構成されている閉曲線 C_2 に沿って一周線積分するためには、 C_0 と C_+ の向きが、 C_2 を一周できるように定義されていなければならない。 C_0 に沿って y 負の向きに変位する向きが C_2 の向きなので、このことから、 C_2 の一部である C_+ の向きが、 z 正の

側から見て (z が大きい側から見て) 反時計回りに回る向きであることがわかる。(もし、 C_+ の向きが時計回りの向きだったとしたら、 C_0 と C_+ のつなぎ目において、 C_0 の向きと C_+ の向きが、互いに逆回りに回る向きになり、ひとつの向きに沿って C_2 を一周できなくなっていた。) すなわち、 C_+ の向きは、前問の C_1 の C_+ 上での向きと同じである。また、半径を無限大とするのだから、 C_+ に沿った磁場の線積分は、 $d \ll \varrho$ という近似のもとで導いた式 (57) を用いて計算することができる。よって、 C_1 の場合と同様、 $d\phi > 0$ であることから ϕ での積分範囲を ϕ が増加するように選んで、 $\varrho \rightarrow \infty$ の極限で C_+ に沿った磁場の線積分を計算すると、

$$\int_{C_+} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Id}{\pi\varrho} \cos\phi d\phi = \frac{Id}{\pi\varrho} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\phi d\phi = \frac{2Id}{\pi\varrho} \rightarrow 0 \quad (58)$$

となる。一方、 C_0 上では $d \ll \varrho$ が成り立たない点もあるので、磁場の近似式 (55) を用いることはできないが、 C_0 上では $x = 0$ であるので、近似をしていない磁場の表式 (54) に $x = 0$ を代入して、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) = -\frac{Id}{\pi} \frac{1}{y^2 + d^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (59)$$

ただし、 C_0 上の任意の点の位置ベクトルを \mathbf{r}_0 とし、 C_0 上の任意の点の y 座標、すなわち、 \mathbf{r}_0 の y 成分を y とした。また、 C_0 上では $z = 0$ でもあるので、 C_0 上の点の位置ベクトル \mathbf{r}_0 は

$$\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

と成分表示でき、これを y で微分した式の両辺に dy を掛けることにより、 C_0 に沿った微小変位ベクトル $d\mathbf{r}_0$ が

$$d\mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix} \quad (60)$$

と成分表示できることがわかる。ただし、 C_0 の向きは y 負の向きなので、式 (60) において $dy < 0$ とする必要がある。式 (59) と (60) より

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}_0) \cdot d\mathbf{r}_0 = -\frac{Id}{\pi} \frac{1}{y^2 + d^2} dy$$

を得るので、 $dy < 0$ としていることから、 y での積分範囲を y が減少するように選び、

$$\tan\psi = \frac{y}{d}$$

によって新たな積分変数 ψ を導入して y から ψ へ変数変換すると、

$$\begin{aligned} \int_{C_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} &= \int_{C_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}_0) \cdot d\mathbf{r}_0 = \int_{\infty}^{-\infty} \frac{-Id}{\pi} \frac{1}{y^2 + d^2} dy = \frac{I}{\pi d} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{(y/d)^2 + 1} d\left(\frac{y}{d}\right) \\ &= \frac{I}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\tan^2\psi + 1} \frac{1}{\cos^2\psi} d\psi = \frac{I}{\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi = I \end{aligned} \quad (61)$$

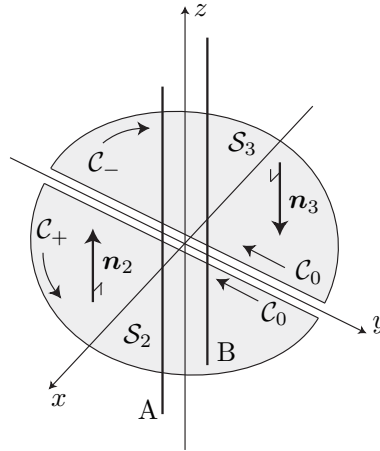
C_2 に沿った線積分は、積分範囲を分割することにより、 C_+ に沿った線積分と C_0 に沿った線積分に分けて実行することができるから、式 (58) と (61) を用いて、

$$\oint_{C_2} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_+} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 + I = I$$

と計算することができる。

注1) この問題からは、着目している曲面を貫いていない電流があるときのアンペールの法則を確認することができる。すなわち、 C_2 によって囲まれた曲面を貫いているのは電流 A のみであり、電流 B はこの曲面を貫いていない。このとき、 C_2 に沿った磁場 $H(r)$ の線積分の値は、曲面を貫いている電流 A のみの値 I と等しくなっており、この電流の値には、曲面を貫いていない電流 B の値 $-I$ は寄与していない。(もし、電流 B の値も寄与していたとしたら、この電流の値は $I + (-I) = 0$ となっていた。) ただし、このとき、線積分される磁場 $H(r)$ は、電流 A と B 両方が作る磁場であることに注意する必要がある。

注2) この問題では、 C_1 の $x > 0$ の部分(半円) C_+ と C_0 からなる閉曲線 C_2 に沿った磁場の線積分を計算した。同様に、 C_1 の $x < 0$ の部分(半円)を C_- とし、 C_0 と C_- からなる閉曲線を C_3 として、 C_3 に沿った磁場の線積分を考えることもできる。



ここでは、これを計算し、その結果とアンペールの法則の内容とを照らし合わせてみる。なお、 C_3 の向きは、(問題中と同様に) C_0 に沿って y 負の向きへ変位する向きであるとする。ただし、ここで、閉曲線によって囲まれた曲面の外向きには注意が必要である。問題中で考えた閉曲線 C_2 によって囲まれた曲面(“半円盤”)を S_2 とし、閉曲線 C_3 によって囲まれた曲面(“半円盤”)を S_3 とすると、 S_2 の境界 C_2 と S_3 の境界 C_3 それぞれの向きとつじつまが合うようにするためには、上図のように、 S_2 の外向き単位法線ベクトル n_2 は z 正の向きに、 S_3 の外向き単位法線ベクトル n_3 は z 負の向きに選ぶ必要がある。アンペールの法則により、 C_3 に沿った磁場の線積分は S_3 を貫く電流 B のみの値に等しいはずであるが、 S_3 の外向きは z 負の向きなので、 S_3 を貫く電流の値は、電流 B が流れる導線の断面の外向きを z 負の向きに選んで計算しなければならない。導線の断面の外向きを z 正の向きに選んだときの電流 B の値が $-I$ であるから、導線の断面の外向きを z 負の向きに選んだときの電流 B の値は(外向き単位法線ベクトルの符号を反転させることにより) I であることがわかる。よって、アンペールの法則からは、 C_3 に沿った磁場の線積分の値が I であることが予見される。これを実際に計算によって確かめてみる。 C_- の向きは、 z 正の側から見て時計回りにまわる向きであり、したがって、 C_+ に沿った積分とは逆に $d\phi < 0$ とすることに注意すると、 C_- に沿った線積分は、式(58)とほぼ同様に、

$$\int_{C_-} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\pi/2}^{-\pi/2} \frac{Id}{\pi \rho} \cos \phi d\phi = -\frac{2Id}{\pi \rho} \rightarrow 0$$

と計算できる。また、 C_0 に沿った線積分は、向きも含めて全く式 (61) と同じで、

$$\int_{C_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = I$$

よって、 C_3 に沿った磁場の線積分が、

$$\oint_{C_3} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_-} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_0} \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = 0 + I = I$$

と求まり、アンペールの法則からの予見と一致することが確認できる。この例からも、曲面、および、曲線の向き付けに注意することが重要であることが認識できるであろう。(もし、曲面 S_3 や 閉曲線 C_3 の向きを好き勝手に設定すると、アンペールの法則とは符号のつじつまが合わなくなる危険性がある。)

6. 電流が流れている円柱の領域を \mathcal{V} とし、 \mathcal{V} 内における電流密度を i_0 とすると、 i_0 は、

$$i_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \quad (62)$$

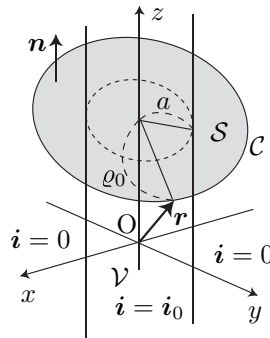
と成分表示でき、 i_0 は一様なので i は定数である。一方、 \mathcal{V} の外側では電流密度はゼロなので、これらをまとめて、任意の位置 \mathbf{r} における電流密度 $i(\mathbf{r})$ を

$$i(\mathbf{r}) = \begin{cases} i_0 & \varrho \leq a \\ 0 & \varrho > a \end{cases} \quad (63)$$

と表すことができる。ここで、 z 軸に垂直で、 z 軸上の点を中心とする半径 ϱ_0 の円盤 S を考え、 S の外向き単位法線ベクトルを \mathbf{n} 、 S の境界を C とする。したがって、 C は円周であり、その半径 ϱ_0 は、 C 上における ϱ の値である。 S の外向き、すなわち、 \mathbf{n} の向きを z 正の向きに選ぶと、 C に沿った微小変位ベクトル $d\mathbf{r}$ と \mathbf{n} はそれぞれ

$$d\mathbf{r} = \varrho_0 \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi, \quad \mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (64)$$

と成分表示され、 C の向きは z が大きい側から見て反時計回りに回る向きなので、 $d\phi > 0$ である。(問 4(a) の解答を参照。)



問題に与えられているように、任意の位置 \mathbf{r} における磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = H(\varrho) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \quad (65)$$

と書けるので、 C 上の磁場は、式 (65) に $\varrho = \varrho_0$ を代入したもので与えられる。これと式 (64) の $d\mathbf{r}$ との内積を取ることににより、 C 上では、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = H(\varrho_0) \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \varrho_0 \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} d\phi = H(\varrho_0) \varrho_0 d\phi$$

であることがわかる。 S 、よって、 C をひとつ決めれば ϱ_0 は定数なので、 $H(\varrho_0)$ も C に沿って一定である。このことと、 C の向きを $d\phi > 0$ であるように選んでいることに注意すると、 C に沿った $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ の線積分が、任意の ϱ_0 に対して、

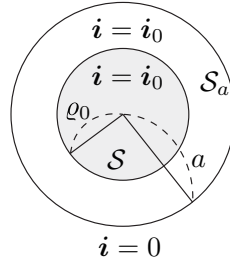
$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} H(\varrho_0) \varrho_0 d\phi = H(\varrho_0) \varrho_0 \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi H(\varrho_0) \varrho_0 \quad (66)$$

と計算される。

一方、 S を貫く電流の値は、 ϱ_0 と a との大小関係によって変わる。 V の断面の円盤 (z 軸に垂直で、 z 軸上の点を中心とする半径 a の円盤) を S_a とすると、 $\varrho_0 \leq a$ の場合には、 S は S_a に含まれてしまうので、 S 上のすべての点で電流密度は i_0 である。したがって、式 (62)、および、式 (64) の n の表式を用い、 i が定数であることと S 上での 1 の面積分が S の面積 $\pi \varrho_0^2$ であることに注意すると、このとき、 S を貫く電流は、

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_S i_0 \cdot \mathbf{n} dS = \int_S i dS = i \int_S dS = \pi \varrho_0^2 i \quad (67)$$

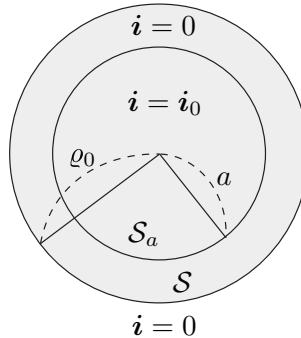
と求められる。



これに対し、 $\varrho_0 > a$ の場合には、 S は S_a を含んでいる。 S から S_a を取り除いた残りの領域 (円環) を S_0 とすると、式 (63) にまとめたように、 S_0 上では電流密度はゼロであり、 S_a 上では電流密度は i_0 である。そこで、積分範囲を分割することにより、 S 上の面積分を S_0 上の面積分と S_a 上の面積分に分けて実行し、また、 S_a 上での 1 の面積分が S_a の面積 πa^2 であることに注意して式 (67) と同じように計算すると、この場合、 S を貫く電流は、

$$\int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_0} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_a} \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 + \int_{S_a} i_0 \cdot \mathbf{n} dS = \pi a^2 i \quad (68)$$

と求められる。



ところで、アンペールの法則から、

$$\oint_C \mathbf{H}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \mathbf{i}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS$$

が成り立っているので、式 (66)、(67)、および、(68) より、 $H(\varrho_0)$ が、

$$H(\varrho_0) = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{2} i & \varrho_0 \leq a \\ \frac{a^2}{2\varrho_0} i & \varrho_0 > a \end{cases} \quad (69)$$

と求められる。これまでの導出から明らかなように、式 (69) を導くにあたって ϱ_0 に対して全く制限は加えておらず、したがって、式 (69) は、 S の半径 ϱ_0 を任意の値に取っても成り立つ。そこで、任意の位置ベクトル \mathbf{r} について、 \mathbf{r} の終点と z 軸との距離 $\varrho \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$ を半径に持つような S を考えれば、式 (69) における ϱ_0 を ϱ で置き換えることができる。それを式 (65) に代入すれば、任意の位置 \mathbf{r} における磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ が、

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \frac{\varrho}{2} i \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} & \varrho \leq a \\ \frac{a^2}{2\varrho} i \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} & \varrho > a \end{cases}$$

と導かれる。

注) ガウスの法則を用いて電場を求めることができたのと同様、この問題のように、考えている状況の対称性の良い場合には、アンペールの法則を用いて磁場を求めることができる。