工学系のモデリング 演習問題

第 3 回

2015 年 4 月 22 日

以下の微分方程式を指示に従って、一般解、特殊解の順に求めることによって解け。

問１ 変数分離型の微分方程式として解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} = x(y-1) \qquad$ (初期条件 $(x, y) = (0, 2)$)

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 1 - y^2 \qquad$ (初期条件 $(x, y) = (0, \frac{1}{3})$)

解答 (1) 一般解 $y = 1 + Ce^{\frac{1}{2}x^2} \qquad$ 初期条件より $C = 1$

(2) 一般解 $y = \dfrac{Ce^{2x} - 1}{Ce^{2x} + 1} \qquad$ 初期条件より $C = 2$

問２ 同次型の微分方程式として解け。

(1) $x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 + y^2} \qquad$ (初期条件 $(x, y) = (1, 0)$)

(2) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy} \qquad$ (初期条件 $(x, y) = (1, 2)$)

解答 (1)$y = \frac{1}{2}(Cx^2 - \frac{1}{C}) \qquad$ 初期条件より $C = \pm 1$

(2)$(x + C)^2 - y^2 = C^2 \qquad$ 初期条件より $C = \frac{3}{2}$

問３ 1 階非斉次線形微分方程式として解け。

(1) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = x \qquad$ (初期条件 $y(0) = 0$)

(2) $\dfrac{dx}{dt} + 3x = \dfrac{1}{2}\sin(\pi t) \qquad$ (初期条件 $x(0) = \frac{1}{4}$)

解答 (1)$y = \dfrac{-1 - 2x}{4} + Ce^{2x} \qquad$ 初期条件より $C = \frac{1}{4}$

(2)$x = \dfrac{3\sin(\pi t) - \pi\cos(\pi t)}{2(9 + \pi^2)} + Ce^{-3t} \qquad$ 初期条件より $C = \frac{(3+\pi^2)}{4(9+\pi^2)}$

問４ 次の微分方程式はこのままでは変数分離型ではないが、工夫して変数分離型に変換して微分方程式を解け 。

$$\frac{dy}{dx} = (x+y)^2 \qquad (\text{初期条件 } y(0) = 1)$$

解答 $y = -x + \tan(x + C)$　　初期条件より $C = \dfrac{\pi}{4}$

問５ 以下の微分方程式を適当な方法で解け。

$$(1)\frac{dy}{dx} = 2(x-1)(y+2) \qquad (\text{初期条件 } y(1) = 2)$$

$$(2)\frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x+y} \qquad (\text{初期条件 } y(1) = 0)$$

解答 $(1) y = Ce^{(x-1)^2} - 2$　　初期条件より $C = 4$

$(2) y^2 + 2xy - x^2 = C$　　初期条件より $C = -1$