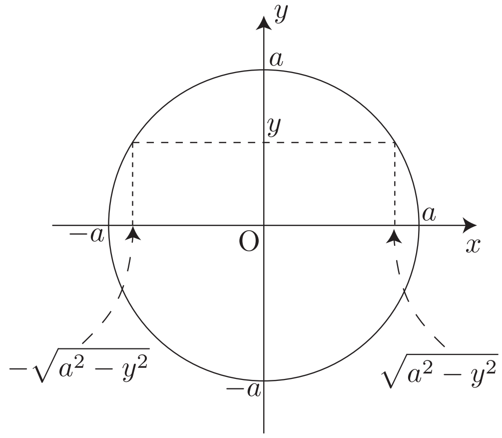
基礎物理学 B 演習解答 1

1. (a) 円盤が $x-y$ 平面に含まれ、円盤の中心が原点と一致する座標系を選ぶことにする。円盤を $\mathcal{S}$、$\mathcal{S}$ の面積を S とすると、S は $\mathcal{S}$ 上での 1 の面積分で与えられるから、

$$S = \int_{\mathcal{S}} dS$$

$\mathcal{S}$ は $x-y$ 平面に含まれるから、微小面積素 dS は $dS = dxdy$ によって与えられる。また、$\mathcal{S}$ 内の任意の点の y 座標は $-a \le y \le a$ の範囲内の値を取り、この範囲内の y 座標をひとつ固定すると、x 座標は $-\sqrt{a^2-y^2} \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$ の範囲内の値を取る。



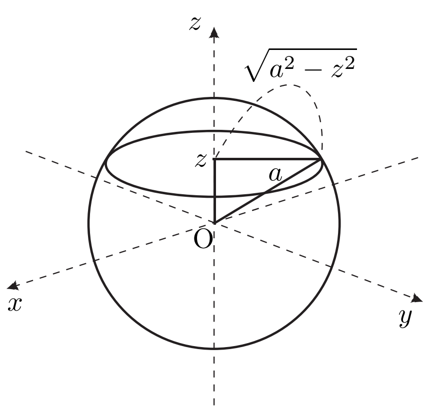
よって、面積分を行う際には、まず、x で 1 を $-\sqrt{a^2-y^2} \le x \le \sqrt{a^2-y^2}$ の積分範囲で積分し、次に、それを y で $-a \le y \le a$ の積分範囲で積分すれば良い。したがって、$y = a\sin\phi$ によって、y を新しい積分変数 ϕ に変数変換すれば、

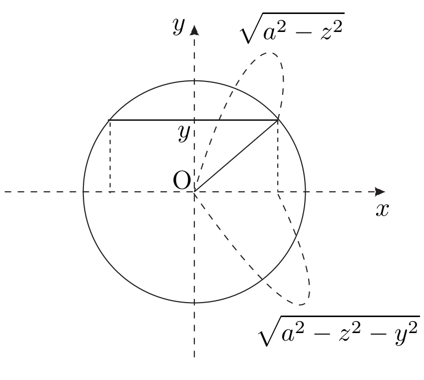
$$\begin{aligned} S &= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} dx \right) dy = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{a^2-y^2} dy = \int_{-a}^{a} 2a\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2} dy \\ &= a^2 \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-\left(\frac{y}{a}\right)^2}\, d\left(\frac{y}{a}\right) = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\phi\, d\phi = a^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos 2\phi + 1)\ d\phi = \pi a^2 \end{aligned}$$

(b) 球の中心が原点と一致する座標系を選ぶことにする。球の領域を $\mathcal{V}$、$\mathcal{V}$ の体積を V とすると、V は $\mathcal{V}$ 上での 1 の体積積分で与えられるから、

$$V = \int_{\mathcal{V}} dV$$

微小体積素 dV は $dV = dxdydz$ によって与えられる。





また、$\mathcal{V}$ 内の任意の点の z 座標は $-a \le z \le a$ の範囲内の値を取り、この範囲内の z 座標をひとつ固定すると、y 座標は $-\sqrt{a^2-z^2} \le y \le \sqrt{a^2-z^2}$ の範囲内の値を取る。さらに、この範囲内の y 座標をひと

つ固定すると、x 座標は $-\sqrt{a^2-z^2-y^2} \le x \le \sqrt{a^2-z^2-y^2}$ の範囲内の値を取るので、体積積分を行う際には、まず、x で 1 を $-\sqrt{a^2-z^2-y^2} \le x \le \sqrt{a^2-z^2-y^2}$ の積分範囲で積分し、次に、それを y で $-\sqrt{a^2-z^2} \le y \le \sqrt{a^2-z^2}$ の積分範囲で積分し、最後に、それを z で $-a \le z \le a$ の積分範囲で積分すれば良い。したがって、$y = \sqrt{a^2-z^2}\sin\phi$ によって、y から新しい積分変数 ϕ に変数変換すれば、

$$\begin{aligned}
V = \int_{\mathcal{V}} dV &= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{a^2-z^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-z^2-y^2}} dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_{-a}^{a} \left(\int_{-\sqrt{a^2-z^2}}^{\sqrt{a^2-z^2}} 2\sqrt{a^2-z^2-y^2}\, dy \right) dz \\
&= \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-z^2}^2 \left(\int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-\frac{y^2}{\sqrt{a^2-z^2}^2}}\, d\left(\frac{y}{\sqrt{a^2-z^2}}\right) \right) dz \\
&= \int_{-a}^{a} (a^2-z^2) \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2\cos^2\phi\, d\phi \right) dz = \pi \int_{-a}^{a} (a^2-z^2)\, dz = \frac{4}{3}\pi a^3
\end{aligned} \tag{1}$$

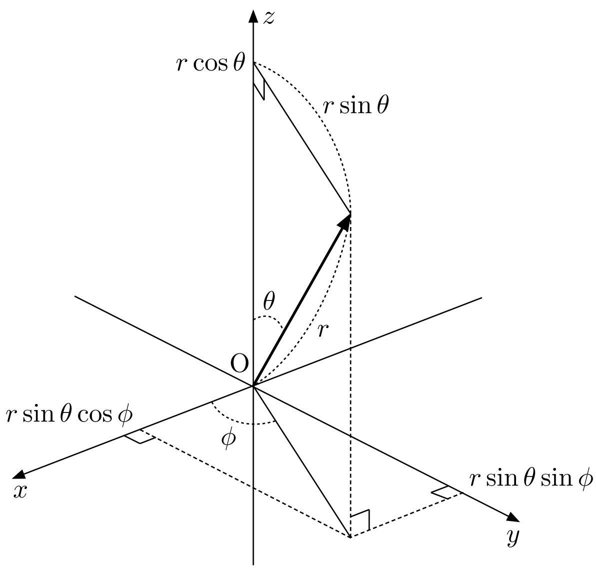
注１）一般に、積分範囲の形状に合わせた座標系を用いると積分範囲の煩わしさを回避することができる。例えばこの問題の場合、球座標系（三次元極座標系）を用いると、積分範囲は座標変数によらない定数になる。球座標系では、動径座標 r、方位角座標 θ、偏角座標 ϕ を用い、これらはデカルト座標（通常の直交座標）x、y、z とは

$$x = r\,\sin\theta\,\cos\phi, \qquad y = r\,\sin\theta\,\sin\phi, \qquad z = r\,\cos\theta$$

の関係にあり、それぞれの座標変数が取る得る範囲は

$$0 \le r < \infty, \qquad 0 \le \theta \le \pi, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi$$

である。地表面上の位置の表し方と比較すると、θ が北緯、南緯に対応し、ϕ が東経、西経に対応する。（北緯、南緯の範囲がそれぞれ 90°、合わせて 180° であるのに対して、東経、西経の範囲がそれぞれ 180°、合わせて 360° であることが θ と ϕ が取り得る範囲の違いに対応している。）



球座標系においては、微小体積素 dV は

$$dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

と与えられるので、半径 a の球（積分範囲 $\mathcal{V}$ は $0 \le r \le a$、$0 \le \theta \le \pi$、$0 \le \phi \le 2\pi$）の体積 V は、

$$V = \int_{\mathcal{V}} dV = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{a} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi = \frac{4}{3}\pi a^3$$

と計算できる。

他に良く用いられる座標系としては、円柱座標系（円筒座標系）が挙げられる。円柱座標系では、二次元極座標変数（動径座標 ϱ と偏角座標 ϕ)、および、デカルト座標系と同じ z 座標が用いられる。すなわち、デカルト座標 x、y、z とは

$$x = \varrho\cos\phi, \qquad y = \varrho\sin\phi, \qquad z = z$$

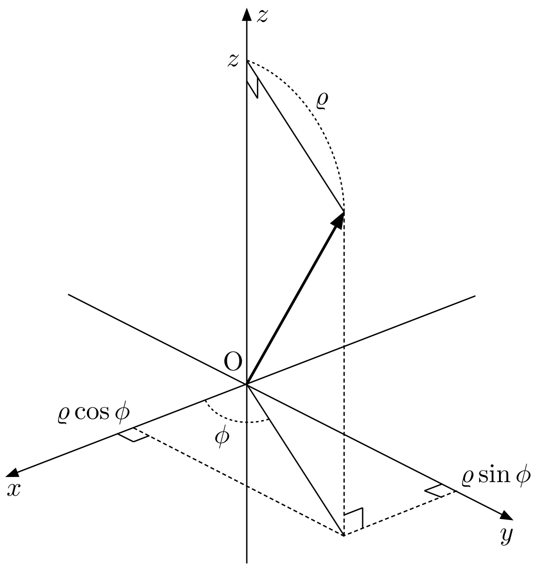
の関係にあり、それぞれの座標変数の取り得る範囲は

$$0 \le \varrho < \infty, \qquad 0 \le \phi \le 2\pi, \qquad -\infty < z < \infty$$

である。円柱座標系においては、微小体積素 dV は

$$dV = \varrho\, d\varrho\, d\phi\, dz$$

と与えられる。これを用いて体積積分することにより、円柱の体積を正しく導けるかどうか試してみよ。（円柱座標系の動径座標変数を表す記号としては r が用いられることが多いが、この授業では、球座標系の動径座標変数と区別するために ϱ を用いることとする。）



注２）この問題では、1 の面積分が積分範囲の面積を、1 の体積積分が積分範囲の体積をそれぞれ与えることを確認することが重要である。円盤の面積や球の体積を求めるために、いちいち、この問題でやったような積分を実行する必要は、当然ない。むしろ、これらは常識として、その公式を覚えておくのが実用的である。これらと合わせ、半径 a の円周の長さが $2\pi a$ であることと、半径 a の球面の面積（球の表面積）が $4\pi a^2$ であることは、常識として、電磁気学で用いる。（例年、期末試験において、これらの “常識” が正しく理解されていない答案を多く見かける。）なお、球の体積の表式 (1) を、その半径 a で微分すれば、球面の面積 $4\pi a^2$ を得る。覚えておくと便利であろう。

2. オイラーの公式 $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$ より、$\cos\theta$ と $\sin\theta$ は、

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{2}$$

と表されるので、式 (2) を用いれば、

$$\begin{aligned}
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2} = \frac{1}{4}\left[e^{i(\alpha+\beta)}+e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}}{2}+\frac{e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right], \qquad (3) \\
\sin\alpha\sin\beta &= \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i} = -\frac{1}{4}\left[e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\alpha+\beta)}+e^{-i(\alpha+\beta)}}{2}-\frac{e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}}{2}\right] \\
&= -\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\right], \qquad (4) \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i} = \frac{1}{4i}\left[e^{i(\alpha+\beta)}-e^{i(\alpha-\beta)}+e^{-i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i}-\frac{e^{i(\alpha-\beta)}-e^{-i(\alpha-\beta)}}{2i}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\right] \qquad (5)
\end{aligned}$$

ただし、式 (3)、(4)、(5) それぞれの最後の変形において、再び式 (2) を用いた。また、式 (5) の α と β を入れ替えた式を作れば、

$$\cos\beta\sin\alpha = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right] \qquad (6)$$

を得る。式 (3)、(4)、(5)、(6) は、積和公式に他ならず、したがって、オイラーの公式さえ覚えておけば、上のような簡単な計算によって積和公式を導けることがわかる。和積公式は積和公式の書き直しにすぎないので、和積公式において特に覚えにくい符号の確認などは、オイラーの公式さえ覚えておけばできる。また、積和公式は加法定理から導けるので、これを逆にたどれば、オイラーの公式から加法定理を導くこともできるわけである。実用的には、オイラーの公式に加え、加法定理も正しく覚えておくのが有効であろう。

(a) 式 (3) より、

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$$

ここで、

$$A = \alpha+\beta, \qquad B = \alpha-\beta$$

によって A と B を導入すると、すなわち、これを逆に解いて、

$$\alpha = \frac{A+B}{2}, \qquad \beta = \frac{A-B}{2} \qquad (7)$$

とすると、

$$\cos A+\cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad (8)$$

同様に、式 (4) と (7) より、

$$\cos A-\cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad (9)$$

式 (5) と (7) より、

$$\sin A-\sin B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right) \qquad (10)$$

式 (6) と (7) より、

$$\sin A+\sin B = 2\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) \qquad (11)$$

式 (8)、(9)、(10)、(11) は和積公式に他ならない。

(b) 式 (3) と (4) の和と差を考えることにより、

$$\cos\alpha\cos\beta \pm \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha \mp \beta) \tag{12}$$

また、式 (5) と (6) の和と差を考えることにより、

$$\sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha \pm \beta) \tag{13}$$

式 (12) と (13) は加法定理に他ならない。

注）加法定理を確実に覚えておけば、オイラーの公式を用いなくても和積公式を導くことができる。たとえば、式 (13) より、

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$$

を得るが、ここで式 (7) を用いれば、式 (11) が導かれる。

3. (a) 平衡状態において長さが Δx であった微小領域に含まれる質量は $\sigma\Delta x$ である。また、Δx は微小量、すなわち、最終的にゼロの極限を取る量であるから、微小領域の速度は一点 x での値で代表できる。ひもは z 方向にしか振動せず、その z 座標は $\zeta(t,x)$ だから、

$$\boldsymbol{P}(t,x) = \sigma\Delta x \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{\partial\zeta(t,x)}{\partial t} \end{pmatrix} \tag{14}$$

(b) 微小領域が x 軸から傾いた角度を $\theta(t,x)$ とすると、微小振動であることから $|\theta(t,x)| \ll 1$ なので、

$$\cos\theta(t,x) = 1 + \mathcal{O}(\Delta x^2), \qquad \frac{\partial\zeta(t,x)}{\partial x} = \tan\theta(t,x) = \sin\theta(t,x) + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

微小領域の左端と右端はそれぞれ $x - \Delta x/2$ と $x + \Delta x/2$ の位置にあるが、x が小さい側から左端に及ぼされる外力 $\boldsymbol{F}_-(t, x-\Delta x/2)$ と、x が大きい側から右端に及ぼされる外力 $\boldsymbol{F}_+(t, x+\Delta x)$ は、上の近似を適用して、それぞれ

$$\boldsymbol{F}_-(t,x-\Delta x/2) = \begin{pmatrix} -T\cos\theta(t,x-\Delta x/2) \\ 0 \\ -T\sin\theta(t,x-\Delta x/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ -T\,\zeta'(t,x-\Delta x/2) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2),$$

$$\boldsymbol{F}_+(t,x+\Delta x/2) = \begin{pmatrix} T\cos\theta(t,x+\Delta x/2) \\ 0 \\ T\sin\theta(t,x+\Delta x/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ 0 \\ T\,\zeta'(t,x+\Delta x/2) \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

ただし、$\zeta'(t,x) = \partial\zeta(t,x)/\partial x$。したがって、テイラー展開することにより、外力の和は

$$\boldsymbol{F}_-(t,x-\Delta x/2) + \boldsymbol{F}_+(t,x+\Delta x/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T\left[\zeta'(t,x+\Delta x/2) - \zeta'(t,x-\Delta x/2)\right] \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T\left[\left(\zeta'(t,x) + \dfrac{\Delta x}{2}\dfrac{\partial\zeta'(t,x)}{\partial x}\right) - \left(\zeta'(t,x) - \dfrac{\Delta x}{2}\dfrac{\partial\zeta'(t,x)}{\partial x}\right)\right] \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T\Delta x\dfrac{\partial\zeta'(t,x)}{\partial x} \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\Delta x^2)$$

したがって、Δx の一次までで

$$\boldsymbol{F}_-(t,x-\Delta x/2) + \boldsymbol{F}_+(t,x+\Delta x/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ T\Delta x\dfrac{\partial^2\zeta(t,x)}{\partial x^2} \end{pmatrix} \tag{15}$$

(c) 微小領域に対して質点系の運動量保存則を適用して、

$$\frac{\partial \boldsymbol{P}(t,x)}{\partial t} = \boldsymbol{F}_-(t, x-\Delta x/2) + \boldsymbol{F}_+(t, x+\Delta x/2) \tag{16}$$

（$\boldsymbol{P}(t,x)$ が t と x のふたつの変数に依存しており、ひとつの微小領域に注目していることから x は固定して考えていることになるので、時間微分は偏微分。）式 (14) と (15) より、非自明な z 成分を Δx で割って、Δx の一次までで

$$\sigma \frac{\partial^2 \zeta(t,x)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 \zeta(t,x)}{\partial x^2}$$

両辺を σ で割って $v \equiv \sqrt{T/\sigma}$ とおくと、

$$\frac{\partial^2 \zeta(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \, \frac{\partial^2 \zeta(t,x)}{\partial x^2}$$

となり、波動方程式が得られる。これは、運動方程式と運動量保存則が同値な物理法則であることを考えれば当然である。

注）ひもの単位長さあたりの運動量（運動量線密度）を $\boldsymbol{p}(t,x)$ とすれば、$\boldsymbol{P}(t,x) = \boldsymbol{p}(t,x)\Delta x$。また、位置 x におけるひもの断面に x が小さい側から及ぼされる力を $\boldsymbol{f}(t,x)$ とすると、$\boldsymbol{F}_-(t,x) = \boldsymbol{f}(t,x)$ であり、ひとつの断面に着目すると、断面に含まれる質量はゼロだからその断面の両側から及ぼされる張力どうしはつりあっていなければならず、$\boldsymbol{F}_+(t,x) = -\boldsymbol{f}(t,x)$。よって、式 (16) を Δx で割って右辺をテイラー展開した後、$\Delta x \to 0$ の極限を取ると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}(t,x)}{\partial t} = -\frac{\partial \boldsymbol{f}(t,x)}{\partial x} \tag{17}$$

を得るし、これを有限区間 $x_1 \le x \le x_2$ で積分すると、

$$\frac{d}{dt}\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{p}(t,x)\, dx = -\boldsymbol{f}(t,x_2) + \boldsymbol{f}(t,x_1) \tag{18}$$

を得る。式 (18) は、この有限区間に含まれる運動量が $\boldsymbol{f}(t,x_2)$ だけ右端から流出し、$\boldsymbol{f}(t,x_1)$ だけ左端から流入していることを示しているし、このことから、$\boldsymbol{f}(t,x)$ が x 正の向きに位置 x の断面を単位時間あたりに通過する運動量（運動量流束）であることがわかる。すなわち、式 (18) は連続体の運動量保存則の積分形になっており、したがって、式 (17) がその微分形になっている。エネルギー保存則と同様、連続体の保存則が、（密度の一階時間微分）+（流れ（流束）の一階空間微分）= 0 という形になっていることに注意せよ。この形は、後で、電磁気学における電荷保存則においても現れる。

4. (a) $\zeta_2(t,x)$ を t で偏微分するには x を定数と見なして t で微分すれば良いし、x で偏微分するには t を定数と見なして x で微分すれば良いので、$\omega = k\,v$ を代入して、

$$\frac{\partial \zeta_2(t,x)}{\partial t} = -kvA\sin\left[kx+kvt\right], \qquad \frac{\partial \zeta_2(t,x)}{\partial x} = -kA\sin\left[kx+kvt)\right]$$

これらをさらに、t と x でそれぞれ偏微分して、

$$\frac{\partial^2 \zeta_2(t,x)}{\partial t^2} = -k^2v^2A\cos\left[kx+kvt\right], \qquad \frac{\partial^2 \zeta_2(t,x)}{\partial x^2} = -k^2A\cos\left[kx+kvt\right]$$

よって、これらより、

$$\frac{\partial^2 \zeta_2(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \, \frac{\partial^2 \zeta_2(t,x)}{\partial x^2}$$

が成り立つ、すなわち、$\zeta_2(t,x)$ が波動方程式を満たすことが示される。

(b) 時刻 t_0 において、$\zeta_2(t,x)$ の位相 $k\,x + \omega\,t$ がある定数 ϕ_0 になっている位置 x_0 を考えると、

$$k\,x_0 + \omega\,t_0 = \phi_0 \tag{19}$$

が成り立っている。時刻が δt だけ経ったときに位相の値が ϕ_0 の点が δx だけ変位したとすると、

$$k\,(x_0+\delta x) + \omega\,(t_0+\delta t) = \phi_0 \tag{20}$$

も成り立つ。式 (19) と (20) から ϕ_0 を消去すると、

$$0 = k\,\delta x + \omega\,\delta t$$

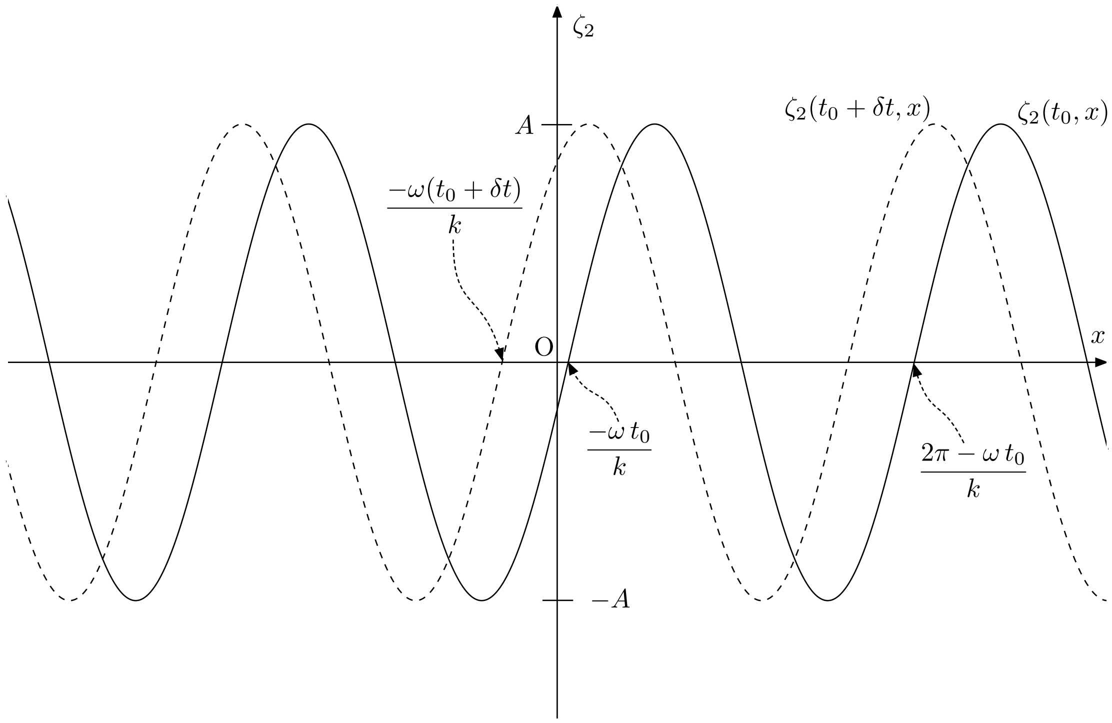
したがって、位相が ϕ_0 である点の単位時間あたりの変位 $\delta x/\delta t$ は

$$\frac{\delta x}{\delta t} = -\frac{\omega}{k} \tag{21}$$

よって、位相速度 $v_p\,(\geq 0)$ は、

$$v_p = \frac{\omega}{k}$$

式 (21) の右辺に負号がついているのは、$\zeta_2(t,x)$ の波が x 負の向きに伝搬していることを表している。実際、時刻 t_0 と $t_0+\delta t$ において、$\zeta_2(t,x)$ の x に対するふるまいを図示、すなわち、x に対して $\zeta_2(t_0,x)$（実線）と $\zeta_2(t_0+\delta t,x)$（破線）のグラフの概形を書いてみると、δt が正の場合、下図のようになる。ただし、図中においては、t_0 と δt の値は適当に選んである。δt が正のとき、すなわち、時刻が進むとき、波形は x 負の向きに平行移動するから、$\zeta_2(t,x)$ の波は x 負の向きに伝搬する。



(c) $\zeta_2(t,x)$ は三角関数だから、位相 $k\,x+\omega\,t$ が 2π だけ変化する最小の空間的長さ λ を求めれば良い。すなわち、λ が正になるように 2π だけ位相をずらして、

$$k(x+\lambda) + \omega\,t = k\,x + \omega\,t + 2\pi$$

より、波長 λ は、

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

同様に、位相 $k\,x+\omega\,t$ が 2π だけ変化する最小の時間間隔 T を知るには、T が正になるように 2π だけ位相をずらして、

$$k\,x + \omega(t+T) = k\,x + \omega\,t + 2\pi$$

を満たす T を求めれば良い。したがって、周期 T は、

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

5. まず、$f(x-vt)$ を t で偏微分することを考える。そのためには、合成関数の微分の演算規則より、$f(x-vt)$ を $x-vt$ で微分したものに、$x-vt$ を t で偏微分したものを掛ければよい。$u=x-vt$ とおけば、$f(x-vt)=f(u)$ は u のみの関数だから、$f(u)$ を u で微分する際には常微分（通常の微分）を行えば良いことに注意して、

$$\frac{\partial f(x-vt)}{\partial t} = \left.\frac{df(u)}{du}\right|_{u=x-vt} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x-vt) = -vf'(x-vt)$$

ただし、ここで、$f'(u) \equiv df(u)/du$ のように、常微分を $'$（プライム）で表した。これをさらに t で偏微分すると、再び合成関数の微分の演算規則を用いて、

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f(x-vt)}{\partial t^2} &= -v\frac{\partial f'(x-vt)}{\partial t} = -v\left.\frac{df'(u)}{du}\right|_{u=x-vt} \cdot \frac{\partial}{\partial t}(x-vt) = v^2 \left.\frac{d^2 f(u)}{du^2}\right|_{u=x-vt} \\ &= v^2 f''(x-vt)\end{aligned}$$

同様に、$w=x+vt$ とおき、$g(w)$ の常微分も $'$ で表せば、

$$\frac{\partial^2 g(x+vt)}{\partial t^2} = v^2 g''(x+vt)$$

と書ける。したがって、$\phi(t,x)=f(x-vt)+g(x+vt)$ の t での二階偏微分は、

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial t^2} = v^2\left[f''(x-vt)+g''(x+vt)\right] \tag{22}$$

$\phi(t,x)=f(x-vt)+g(x+vt)$ の x での二階偏微分も同様に計算して、

$$\frac{\partial^2 \phi(x,t)}{\partial x^2} = f''(x-vt)+g''(x+vt) \tag{23}$$

を得る。よって、式 (22) と (23) より、$\phi(t,x)=f(x-vt)+g(x+vt)$ が波動方程式を満たすことが示される。

6. (a) i. i 番目の質点につながっているばねのうち、x が大きい側にあるばねは、平衡状態から、$i+1$ 番目の質点の変位 $\xi_{i+1}(t)$ だけ伸び、i 番目の質点の変位 $\xi_i(t)$ だけ縮んでいる。（問題文中の図を参照。）平衡状態においては、ばねは自然長から ξ_0 だけ伸びているから、x が大きい側にあるばねは、自然長から正味 $\xi_0+\xi_{i+1}(t)-\xi_i(t)$ だけ伸びている。$\xi_0+\xi_{i+1}(t)-\xi_i(t)>0$ のときは、ばねは自然長から伸びているので、i 番目の質点は、このばねが縮むように、すなわち、 x 正の向きに力を受ける。$\xi_0+\xi_{i+1}(t)-\xi_i(t)<0$ のときは、ばねは縮んでいるので、i 番目の質点は、このばねが伸びるように、すなわち、x 負の向きに力を受ける。いずれの場合も、i 番目の質点が、x が大きい側にあるばねから受ける力の x 成分 F_i^+ は、

$$F_i^+ = k\left[\xi_0+\xi_{i+1}(t)-\xi_i(t)\right] \tag{24}$$

と与えられる。同様に、x が小さい側にあるばねは、自然長から正味 $\xi_0+\xi_i(t)-\xi_{i-1}(t)$ だけ伸びている。$\xi_0+\xi_i(t)-\xi_{i-1}(t)>0$ のときには、ばねは自然長から伸びているので、i 番目の質点は、このばねが縮むように力を受けるが、この場合、力の向きは x 負の向きになっている。$\xi_0+\xi_i(t)-\xi_{i-1}(t)<0$ のときには、ばねは縮んでいるので、i 番目の質点は、このばねが伸びるように、すなわち、x 正の向きに力を受ける。いずれの場合も、i 番目の質点が、x が小さい側にあるばねから受ける力の x 成分 F_i^- は、

$$F_i^- = -k\left[\xi_0+\xi_i(t)-\xi_{i-1}(t)\right] \tag{25}$$

と与えられる。よって、i 番目の質点に働く合力の x 成分は、

$$F_i^+ + F_i^- = k\left[\xi_{i+1}(t)-2\xi_i(t)+\xi_{i-1}(t)\right]$$

さらに、i 番目の質点の x 座標 $x_i(t)$ は $x_i(t)=\bar{x}_i+\xi_i(t)$ と書けるが、$\bar{x}_i$ は t に依存しないので、

$$\frac{d^2 x_i(t)}{dt^2} = \frac{d^2 \xi_i(t)}{dt^2}$$

これらより、i 番目の質点の運動方程式は

$$m\frac{d^2\xi_i(t)}{dt^2} = k\left[\xi_{i+1}(t) - 2\xi_i(t) + \xi_{i-1}(t)\right] \tag{26}$$

注）ここでは暗黙のうちに、すべてのばねについて、平衡状態における自然長からの伸び ξ_0 が同じ値であるとした。その結果、両側のばねからの寄与が相殺されて、運動方程式 (26) の右辺には ξ_0 が含まれていない。逆に、もし、それぞれのばねの ξ_0 が異なる値であったとしたら、運動方程式 (26) の右辺には両側のばねの ξ_0 の差が現れていたはずである。しかし、そのような項は存在してはならない。なぜなら、平衡状態においては $\xi_i(t) = 0$ であり（$\xi_i(t)$ は平衡状態からの変位）、このとき、式 (26) に含まれるすべての項はゼロである。もし、両側のばねの ξ_0 の差が運動方程式 (26) の中に入っていたとしたら、これがゼロでなければ、平衡状態において運動方程式が成り立たなくなってしまっていたのである。平衡状態においては、両側のばねから働く力はつりあっていなければならないので、これは当然である。したがって、どの質点についても、その両側のばねの ξ_0 の差はゼロでなければならず、よって、すべてのばねについて ξ_0 は等しくなければならない。

ii. 1 番目の質点に働く合力の x 成分は、x が大きい側のばねからの力の x 成分 F_1^+ （式 (24) に $i = 1$ を代入したもの）と、1 番目の質点に外側から働く外力の x 成分 F_B^- の和である。したがって、その運動方程式の x 成分は、

$$m\frac{d^2\xi_1(t)}{dt^2} = k\left[\xi_0 + \xi_2(t) - \xi_1(t)\right] + F_B^- \tag{27}$$

N 番目の質点に働く合力の x 成分は、x が小さい側のばねからの力の x 成分 F_N^-（式 (25) に $i = N$ を代入したもの）と、N 番目の質点に外側から働く外力の x 成分 F_B^+ の和である。したがって、その運動方程式の x 成分は、

$$m\frac{d^2\xi_N(t)}{dt^2} = -k\left[\xi_0 + \xi_N(t) - \xi_{N-1}(t)\right] + F_B^+ \tag{28}$$

ξ_0 は、平衡状態におけるばねの自然長からの伸びだから、その値を知るには、平衡状態、すなわち、すべての i に対して $\xi_i(t) = 0$ のときを考えれば良い。このとき、式 (27) と (28) より、それぞれ

$$0 = k\xi_0 + F_B^-, \qquad 0 = -k\xi_0 + F_B^+ \tag{29}$$

を得る。これより、端点に外力を加えないとき、すなわち、F_B^- と F_B^+ のうち少なくとも一方が平衡状態においてもゼロであれば、

$$\xi_0 = 0$$

でなければならない。

注）この結果は当然で、 端点にある質点（たとえば N 番目の質点）に外力が働いていない（たとえば $F_B^+ = 0$）なら、平衡状態においては、その質点につながっているばねからの力もゼロ（たとえば $F_N^- = 0$）でなければならず、したがって、そのばねの自然長からの伸び ξ_0 もゼロでなければならない。さらに、F_B^- と F_B^+ のどちらか一方がゼロであるときに $\xi_0 = 0$ であることを考慮すれば、このとき、式 (29) から、平衡状態においては F_B^- と F_B^+ の他方もゼロでなければならないことがわかる。これも当然で、平衡状態においてはすべての質点が静止しているのだから、この質点系の重心も静止しており、したがって、質点系の運動量保存則（重心の運動方程式）より、外力の和はゼロでなければならない。ただし、平衡状態からずれていれば（たとえば、重心が振動していれば）、F_B^- と F_B^+ のどちらかがゼロだからといって他方もゼロである必要性はない。

(b) i. 棒の両端以外の位置における微小領域の運動方程式を考えるには、式 (26) の連続極限を考えれば良い。まず、式 (26) の左辺の m を、線密度 σ を用いて書きかえると、$m = \sigma\Delta x$。また、連続極限 $\xi_i(t) \to \xi(t,x)$ を取ることによって、ξ が t と x のふたつの独立変数に依存する関数となるから、式 (26) の左辺における加速度を t での偏微分を用いて

$$\frac{d^2\xi_i(t)}{dt^2} \to \frac{\partial^2\xi(t,x)}{\partial t^2}$$

と書きかえる必要がある。

次に、式 (26) の右辺は、連続極限 $\xi_i(t) \to \xi(t,x)$ を取ることによって

$$k\left[\xi_{i+1}(t) - 2\xi_i(t) + \xi_{i-1}(t)\right] \to k\left[\xi(t,x+\Delta x) - 2\xi(t,x) + \xi(t,x-\Delta x)\right] \tag{30}$$

となるが、連続極限 $\Delta x \to 0$ においては、$\xi(t,x+\Delta x)$ と $\xi(t,x-\Delta x)$ は $\xi(t,x)$ から微小量しかずれていないはずなので、この微小なずれをテイラー展開を用いて調べてみる。このとき、時刻 t は各項共通だから、同時刻において、すなわち、t を固定して x を微小量 Δx だけ動かしたときの $\xi(t,x)$ の変化量を考えれば良く、したがって、$\xi(t,x)$ の x での偏微分を用いてテイラー展開して、

$$\xi(t,x+\Delta x) = \xi(t,x) + \Delta x \frac{\partial \xi(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial x^2} + \cdots, \tag{31}$$

$$\xi(t,x-\Delta x) = \xi(t,x) - \Delta x \frac{\partial \xi(t,x)}{\partial x} + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial x^2} + \cdots, \tag{32}$$

式 (31) と (32) を式 (30) に代入すると、Δx の一次以下の項は相殺されて、

$$k\left[\xi(t,x+\Delta x) - 2\xi(t,x) + \xi(t,x-\Delta x)\right] = k(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial x^2}$$

ただし、$\Delta x \to 0$ の極限を考えるので、ここで Δx の高次の項を無視した。
以上より、式 (26) の連続極限は、

$$\sigma \Delta x \frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial t^2} = k(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial x^2}$$

となり、両辺を Δx で割って、

$$\sigma \frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial t^2} = k\Delta x \frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial x^2}$$

を得る。
ここで、右辺は Δx に比例しているので、$\Delta x \to 0$ の極限で k が有限な値であるとすると、右辺が常にゼロになってしまう。これに対して、線密度 σ はゼロでない有限な値なので、このとき、加速度が常にゼロになってしまい、波動現象が起こらない。すなわち、連続極限で k が有限な値であると、波動現象が起こるに十分な復元力が働かなくなってしまうのである。実際に波動現象が起こるためには、$\Delta x \to 0$ の極限で

$$T \equiv k\Delta x \tag{33}$$

がゼロでない有限の値を持たなければならない。このとき、$v \equiv \sqrt{T/\sigma}$ とおけば、$\xi(t,x)$ が波動方程式

$$\frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi(t,x)}{\partial x^2}$$

にしたがうことがわかる。
注1）仮に、$\Delta x \to 0$ の極限で k が有限であったとしたら、$T \to 0$ となり、したがって、位相速度 v がゼロ、すなわち、変位 $\xi(t,x)$ が波動として伝搬できない状況になってしまっていた。
注2）$\Delta x \to 0$ における式 (26) の右辺を評価するために、上では、式 (31) と (32) のようにテイラー展開を用いた。もしここで、$\xi(t,x+\Delta x)$ と $\xi(t,x-\Delta x)$ それぞれにおいて $\Delta x \to 0$ としていたとすると、$\xi(t,x+\Delta x) \to \xi(t,x)$、および、$\xi(t,x-\Delta x) \to \xi(t,x)$ となり、この結果を 式 (26) の右辺に代入すると、ゼロという意味のない自明な結果になってしまう。このように、近似によって自明な結果しか得られない場合には、近似が荒すぎる可能性がある。その場合には、式 (31) と (32) のように、高次の項まで含めた、より精度の高い近似を行う必要がある。（精度の高い近似を行ってもゼロであれば本当にゼロ。）
注3）この問題では、棒を、ばねでつながれた質点系によってモデル化したが、金属のような固い棒をイメージすると、ばねでつないだモデル化は奇異に感じられるかもしれない。しかし、どんなに固くても、まったく変形を起こさない物体は存在しない。たとえば、金属のような物体については、変形が十分小さい限り、力（正確には**応力**で、単位面積あたりに働く力）と変形（正確には**歪み**で、単位長さあたりの変位の変化量）の間に比例関係が存在することが知られている。これは、フックの法則に他ならない。こ

のように、力と変形の間にフックの法則が成り立つ物体を**弾性体**、弾性体に生じる波動を**弾性波**と呼ぶ。したがって、上で考えた棒の伸び縮みの問題は、弾性波をモデル化したものである。

注４）この問題で考えた弾性波のモデルにおいては、媒質の振動方向（x 方向）と波動の伝搬方向（x 方向）が平行になっている。このような波動を**縦波**と呼ぶ。これに対し、ひもを、それが張っている方向と垂直に振ったときに起きる波動現象においては、媒質の振動方向と波動の伝搬方向は垂直になっており、このような波動を**横波**と呼ぶ。（ただし、実際の弾性波の場合、縦波があればこれにともなって横波も発生する。）縦波の典型的な例として、**音波**が挙げられる。音波は、気体（もしくは、液体）の密度の濃淡が波動として伝搬する現象である。これに対し、横波の最も典型的な例は**電磁波**である。

ii. 端点が固定されている場合、端点の位置にある微小領域は変位しない。したがって、端点の x 座標 x_T を用いて、$\xi(t,x_T)=0$。

注）この境界条件は、いわゆる、固定端の条件である。

iii. 端点における変位 $\xi(t,x)$ のふるまいは、その端点が x 座標の小さい側の端点ならば式 (27) の、x 座標の大きい側の端点ならば式 (28) の連続極限を考えることによって調べられる。ただし、端点に働く外力は常にゼロであるので、それぞれ F_B^- と F_B^+ はゼロであり、また、特に平衡状態においてもこれらはゼロなので、問 (a)ii の結果より、$\xi_0=0$ である。

たとえば、x 座標の小さい側の端点の場合、平衡状態におけるその端点の x 座標を x_T としていることを考慮して、連続極限を取るには、式 (27) において $\xi_1(t)$ を $\xi(t,x_T)$ と、$\xi_2(t)$ を $\xi(t,x_T+\Delta x)$ と置き換えれば良いので、

$$\sigma\Delta x\,\frac{\partial^2\xi(t,x_T)}{\partial t^2}=k\left[\xi(t,x_T+\Delta x)-\xi(t,x_T)\right]$$

ここで、式 (31) と同様に、$\xi(t,x_T+\Delta x)$ をテイラー展開して 2 次以上（高次）の項を無視すると、

$$\sigma\Delta x\,\frac{\partial^2\xi(t,x_T)}{\partial t^2}=k\Delta x\,\left.\frac{\partial\xi(t,x)}{\partial x}\right|_{x=x_T}$$

となるが、線密度 σ と加速度 $\partial^2\xi(t,x_T)/\partial t^2$ が有限であれば、左辺は連続極限 $\Delta x\to 0$ でゼロになるので、右辺も当然ゼロにならなければならない。一方、式 (33) のところで考察したように、$k\Delta x=T$ はゼロではないので、右辺がゼロになるためには

$$\xi'(t,x_T)=\left.\frac{\partial\xi(t,x)}{\partial x}\right|_{x=x_T}=0$$

が成り立っていなければならない。ただし、ここで、$'$ は x での偏微分を表している。

同様に、x 座標の大きい側の端点の場合、式 (28) の連続極限をとることによって、

$$\sigma\Delta x\,\frac{\partial^2\xi(t,x_T)}{\partial t^2}=-k\Delta x\,\left.\frac{\partial\xi(t,x)}{\partial x}\right|_{x=x_T}$$

を得るが、$\Delta x\to 0$ において左辺がゼロになることから、$\xi'(t,x_T)=0$ が成り立つことが必要である。したがって、いずれの場合にも、$x=x_T$ において $\xi(t,x)$ が満たす条件は $\xi'(t,x_T)=0$。

注）ここで導いた境界条件は、いわゆる、自由端の条件である。

(c) まず、$x=0$ の端点を固定することによって $\xi(t,x)$ に課される条件を導いておく。このとき、問 (b)ii の結果より、

$$\xi(t,0)=[-A+C]\sin(\omega t)+[B+D]\cos(\omega t)=0$$

が任意の t について成り立つので、たとえば、特に、$t=0$ と $t=\pi/(2\omega)$ を代入することによって、

$$C=A,\qquad D=-B$$

が満たされなければならないことが導かれる。これを（任意の x についての）$\xi(t,x)$ に代入し、和積公式 (9) と (11) を用いると、$\xi(t,x)$ を

$$\begin{aligned}\xi(t,x)&=A\left\{\sin\left[kx-\omega t\right]+\sin\left[kx+\omega t\right]\right\}+B\left\{\cos\left[kx-\omega t\right]-\cos\left[kx+\omega t\right]\right\}\\&=2\sin(kx)\left\{A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right\}\end{aligned}\tag{34}$$

という形に制限することができる。

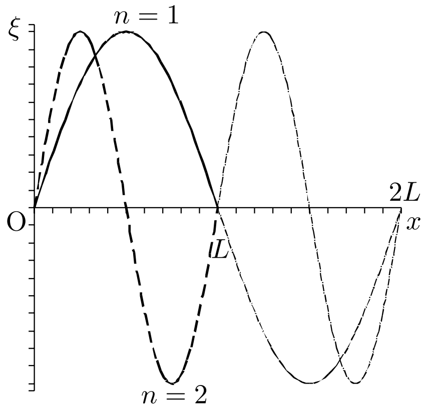
i. $x = L$ における端点を固定するとき、問 (b)ii の結果より、$\xi(t, L) = 0$ が満たされなければならない。よって、式 (34) より、$\sin(kL) = 0$、すなわち、n を自然数として、$kL = n\pi$ でなければならない。したがって、

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

なお、このとき波長 $\lambda = 2\pi/k$ は

$$\lambda = \frac{2L}{n}$$

となり、棒の長さの 2 倍が波長の自然数倍に等しくなければならないことがわかる。



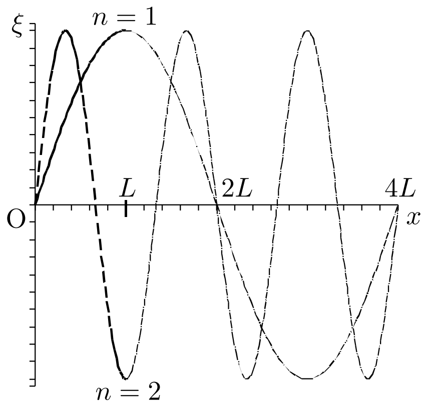
ii. $x = L$ における端点に加わる外力が常にゼロであるとき、問 (b)iii より、$\xi'(t, L) = 0$ が満たされなければならない。したがって、式 (34) を x で偏微分して $x = L$ を代入することにより、$\cos(kL) = 0$ を得る。すなわち、kL は $\pi/2$ の奇数倍でなければならず、よって、n を自然数として、$kL = \dfrac{(2n-1)\pi}{2}$ でなければならない。これより、k は、

$$k = \frac{(2n-1)\pi}{2L}$$

という値でなければならないことがわかる。なお、このとき波長 $\lambda = 2\pi/k$ は

$$\lambda = \frac{4L}{2n-1}$$

となり、棒の長さの 4 倍が波長の奇数倍に等しくなければならない。このことは、$\xi'(t, L) = 0$ であること、すなわち、$x = L$ における $\xi(t, x)$ の傾きがゼロであることから、視覚的にも理解できるであろう。



注）奇数を表すために、自然数 n を用いた $2n-1$ という表記がよくなされる。上で、もし仮に、m を自然数として、$kL = \frac{m\pi}{2}$ としていたら、m が偶数のときに kL が π の自然数倍になってしまい、$\cos(kL) = 0$ という条件が満たされなくなってしまっていた。

7. 和積公式 (8) を用いると、$\phi(t, x)$ は、

$$\begin{aligned}\phi(t,x) = \phi_1(t,x) + \phi_2(t,x) &= \frac{A}{2}\Big\{ \cos\left[(k-\Delta k)x - (\omega-\Delta\omega)t\right] + \cos\left[(k+\Delta k)x - (\omega+\Delta\omega)t\right] \Big\} \\ &= A\,\cos(kx-\omega t)\,\cos(\Delta k x - \Delta\omega t)\end{aligned}$$

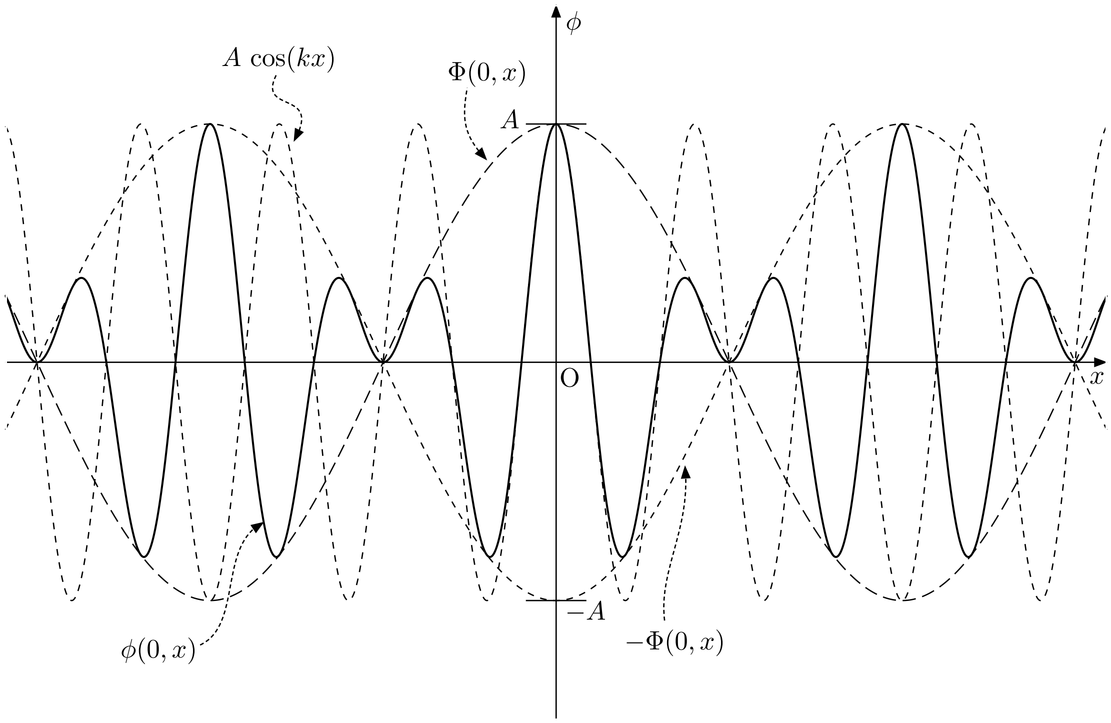
と書くことができる。よって、

$$\Phi(t,x) = A\,\cos(\Delta kx - \Delta\omega t)$$

$t = 0$ においては、

$$\phi(0,x) = A\cos(\Delta kx)\cos(kx), \qquad \Phi(0,x) = A\cos(\Delta kx)$$

だから、これらのグラフの概形は、$A\cos(kx)$ と $-\Phi(0,x)$ のグラフと重ねて描けば、以下のようになる。



8. 位相速度 v_p は、

$$v_p = \frac{\omega(k)}{k} = \sqrt{\left(\frac{g}{k} + \frac{\gamma}{\rho}k\right)\tanh(kh)} \tag{35}$$

一般に、$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ の微分が $\dfrac{d}{dx}x^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ であることに気をつけると、群速度 v_g は、

$$v_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\left(g\,k + \dfrac{\gamma}{\rho}\,k^3\right)\tanh(kh)}}\left[\left(g + 3\frac{\gamma}{\rho}\,k^2\right)\tanh(kh) + \left(g\,k + \frac{\gamma}{\rho}\,k^3\right)\frac{h}{\cosh^2(kh)}\right]$$

ここで式 (35) を用いると、

$$\begin{aligned} v_g &= \frac{1}{2}\frac{v_p}{\left(g + \dfrac{\gamma}{\rho}\,k^2\right)\tanh(kh)}\left[\left(g + 3\frac{\gamma}{\rho}\,k^2\right)\tanh(kh) + \left(g + \frac{\gamma}{\rho}\,k^2\right)\frac{kh}{\cosh^2(kh)}\right] \\ &= v_p\left[\frac{1 + 3\dfrac{\gamma}{\rho g}\,k^2}{2\left(1 + \dfrac{\gamma}{\rho g}\,k^2\right)} + \frac{kh}{\sinh(2kh)}\right] \end{aligned} \tag{36}$$

と、v_p を用いて書き直すことができる。

室温程度の温度では $\sqrt{\dfrac{\gamma}{\rho g}}$ は 1[cm] 以下なので、水深がこれより十分深い場合 $\sqrt{\dfrac{\gamma}{\rho g}} \ll h$ を考えて、水深に比べて波長が長いとき、すなわち、$kh \ll 1$ という近似が良いとき、$\dfrac{\gamma}{\rho g}\,k^2 \ll 1$ も成り立つので、式 (35) と (36) はそれぞれ、

$$v_p = \sqrt{gh}, \qquad v_g = v_p$$

一方、水深に比べて波長が短いとき、すなわち、$kh \gg 1$ という近似が良いときには、式 (35) と (36) はそれぞれ、

$$v_p = \sqrt{\frac{g}{k}\left(1+\frac{\gamma}{\rho g}\,k^2\right)}, \qquad v_g = v_p\,\frac{1+3\dfrac{\gamma}{\rho g}\,k^2}{2\left(1+\dfrac{\gamma}{\rho g}\,k^2\right)} \tag{37}$$

式 (37) は、$\dfrac{\gamma}{\rho g}\,k^2 \ll 1$ のときには、

$$v_p = \sqrt{\frac{g}{k}}, \qquad v_g = \frac{1}{2}\,v_p$$

となり、これらの表式の中に表面張力係数 γ が含まれていないことから、基本的に重力によって引き起こされている波であることがわかる。それに対し、特に波長が短くて $\dfrac{\gamma}{\rho g}\,k^2 \gg 1$ の近似が良いときには、

$$v_p = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}\,k}, \qquad v_g = \frac{3}{2}\,v_p$$

となり、波が表面張力によって引き起こされていることがわかる。

9. (a) $\phi(t,x) = A\sin(kx-\omega t)$ を波動方程式に代入すると、

$$-\omega^2 A\sin(kx-\omega t) = -v^2k^2A\sin(kx-\omega t)$$

なので、$\omega^2 = v^2k^2$。よって、分散関係は、

$$\omega(k) = vk$$

位相速度 v_p は、

$$v_p \equiv \frac{\omega(k)}{k} = v$$

群速度 v_g は、

$$v_g \equiv \frac{d\omega(k)}{dk} = v$$

(b) $\phi(t,x) = A\sin(kx-\omega t)$ をクライン・ゴルドン方程式に代入すると、

$$-\omega^2 A\sin(kx-\omega t) = -c^2k^2A\sin(kx-\omega t) - \mu^2 A\sin(kx-\omega t)$$

なので、$\omega^2 = c^2k^2+\mu^2$。よって、分散関係は、

$$\omega(k) = \sqrt{c^2k^2+\mu^2}$$

位相速度 v_p は、

$$v_p \equiv \frac{\omega(k)}{k} = \frac{\sqrt{c^2k^2+\mu^2}}{k} = c\sqrt{1+\frac{\mu^2}{c^2k^2}}$$

群速度 v_g は、

$$v_g \equiv \frac{d\omega(k)}{dk} = \frac{1}{2}\left(c^2k^2+\mu^2\right)^{-1/2}\cdot 2c^2k = \frac{c^2k}{\sqrt{c^2k^2+\mu^2}} = \frac{c}{\sqrt{1+\dfrac{\mu^2}{c^2k^2}}}$$

注１）この例から明らかなように、位相速度 v_p と群速度 v_g は等しいとは限らない。

注２）素粒子のような非常に小さいスケールにおける物理現象は量子力学と呼ばれる物理理論によって記述されるが、量子力学においては、物体は、粒子としての性質と波動としての性質の両方を合わせ持っている。これを波と粒子の二重性と呼ぶ。したがって、素粒子の運動は波動型の方程式によって支配されている。特に、クライン・ゴルドン方程式は、素粒子理論において現れる最も基本的な方程式である。（ただし、本来、ϕ は t と x のみの関数ではなく、t と位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の関数。）本来の素粒子を支配する方程式はもっと複雑な構造をしているが、その最も本質的な特徴はクライン・ゴルドン方程式も持っていると言える。クライン・ゴルドン方程式における定数 μ は素粒子の質量に対応する。したがって、質量を持たない素粒子の運動を支配する方程式は $\mu = 0$、すなわち、光速度 c を位相速度として持つ波動方程式に他ならない。