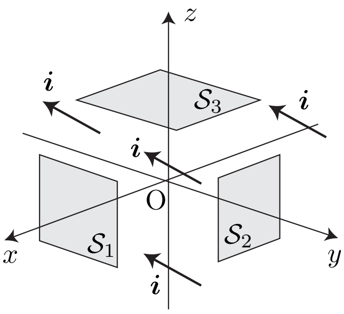
基礎物理学 B 演習問題 3

1. 電流密度 $\boldsymbol{i}$ が一定かつ一様である場合には、

$$\boldsymbol{i} = \begin{pmatrix} i_x \\ i_y \\ i_z \end{pmatrix}$$

と成分表示すれば、その成分 i_x、i_y、i_z は定数である。x 軸に垂直で面積が s_1 の平面を $\mathcal{S}_1$、y 軸に垂直で面積が s_2 の平面を $\mathcal{S}_2$、z 軸に垂直で面積が s_3 の平面を $\mathcal{S}_3$ として、この電流密度に関して以下の問に答えよ。ただし、$\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$、$\mathcal{S}_3$ の外向きは、それぞれ、x 正の向き、y 正の向き、<u>z 負の向き</u> であるとする。

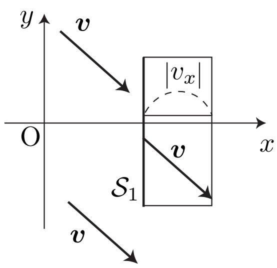


(a) $\mathcal{S}_1$ を貫く電流 I_1、$\mathcal{S}_2$ を貫く電流 I_2、$\mathcal{S}_3$ を貫く電流 I_3 それぞれを、 i_x、i_y、i_z を用いて表せ。

(b) 一定かつ一様な電荷密度 ρ の荷電流体（電荷を持った流れる物体）が、一定かつ一様な速度 $\boldsymbol{v}$ で流れているとする。この速度 $\boldsymbol{v}$ を

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

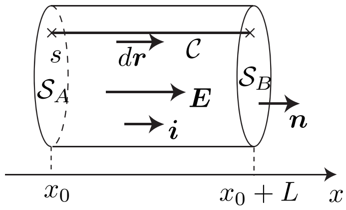
と成分表示すると、$\mathcal{S}_1$ を単位時間 の間に通過する荷電流体の体積は $(|v_x|\times 1)\times s_1 = |v_x|s_1$ と与えられる。



同様に、$\mathcal{S}_2$ と $\mathcal{S}_3$ を単位時間の間に通過する荷電流体の体積はそれぞれ $|v_y|s_2$ と $|v_z|s_3$ によって与えられる。これらの体積内に含まれる電荷量を考えることにより、$\mathcal{S}_1$ を貫く電流 I_1、$\mathcal{S}_2$ を貫く電流 I_2、$\mathcal{S}_3$ を貫く電流 I_3 それぞれを、v_x、v_y、v_z を用いて表せ。

(c) 上問の結果を考慮して、電流密度 $\boldsymbol{i}$ を、荷電流体の電荷密度 ρ と速度 $\boldsymbol{v}$ を用いて表せ。

2. 導体に外部起電力による電場（静電場ではなく、電池などの外部からの作用による電場）がかかっているときの、電場と定常電流の関係について考える。そのために、面積が s で x 軸に垂直な断面を持つ長さ L の柱体の導体を考え、これに x 正の向きの定常（時間的に一定）かつ一様な電場 $\boldsymbol{E}$ がかかっているとする。この一様な定常電場によって、導体内の自由電子が一様な速度 $\boldsymbol{v}$ で運動し、したがって、一様な電流密度 $\boldsymbol{i}$ で定常電流が流れているとするとき、以下の問に答えよ。



(a) 導体中の自由電子は、原子核や他の電子と衝突しながら導体中を運動する。この自由電子が衝突の際に受ける力 $\boldsymbol{F}_v$ は、空気抵抗と同様、平均的には、自由電子の速度 $\boldsymbol{v}$ に比例し、$\boldsymbol{v}$ と逆向きであると考えて良い。すなわち、電子の質量を m、Γ を正の定数として、$\boldsymbol{F}_v$ は、$\boldsymbol{F}_v = -m\Gamma\boldsymbol{v}$ とおける。また、電子の電荷量を e とすると、自由電子には、電場 $\boldsymbol{E}$ から電気力 $\boldsymbol{F}_E = e\boldsymbol{E}$ も及ぼされている。自由電子が $\boldsymbol{F}_v$ と $\boldsymbol{F}_E$ のみを受けて運動しているとして、電流が定常に流れるためには自由電子が等速直線運動していなければならないこと、および、電荷密度 ρ を用いると電流密度 $\boldsymbol{i}$ が $\boldsymbol{i} = \rho\boldsymbol{v}$ と書かれることを利用して、電流密度 $\boldsymbol{i}$ と電場 $\boldsymbol{E}$ の関係を導け。

(b) 一般に、定常電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ については、静電場と同様、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r})$ を満たす $\phi(\boldsymbol{r})$ が存在し、よって、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は $\phi(\boldsymbol{r}) =$ 一定 面に垂直である。（一般に、この $\phi(\boldsymbol{r})$ はスカラー・ポテンシャルと呼ばれる。）したがって、上の柱体の底面それぞれにおいて $\phi(\boldsymbol{r})$ は一定であり、x 座標が小さい側の底面 $\mathcal{S}_A$、x 座標が大きい側の底面 $\mathcal{S}_B$ それぞれにおける $\phi(\boldsymbol{r})$ の値を ϕ_A、ϕ_B とすると、導体にかかる電位差 $V \equiv \phi_A - \phi_B$ を定義することができる。（いわゆる電圧。）また、導体の断面（x 軸に垂直な面）の外向きを x 正の向きに選ぶと、この断面の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は

$$\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

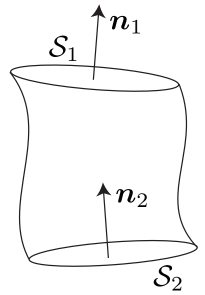
と成分表示でき、x 軸に平行で $\mathcal{S}_A$ から $\mathcal{S}_B$ までを結ぶ線分 $\mathcal{C}$ に沿った微小変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ は

$$d\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \boldsymbol{n}dx$$

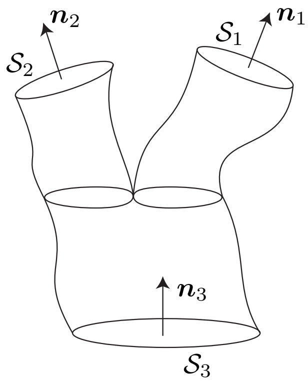
と、$\boldsymbol{n}$ を用いて表すことができる。これらのことと、前問の $\boldsymbol{i}$ と $\boldsymbol{E}$ の関係を用いて、導体にかかる電位差 V と導体の断面を貫く電流 I の関係を求めよ。ただし、電荷密度 ρ も Γ も一様であるとせよ。

3. 定常電流の電荷保存則に関して、以下の問に答えよ。

(a) 下図のような領域において、断面 $\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ を貫く電流の値が等しいことを示せ。ただし、この領域の側面（$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ 以外の表面）を貫く電流の値はゼロであるとし、$\mathcal{S}_1$ の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ と $\mathcal{S}_2$ の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_2$ の向きは下図のように取るものとする。



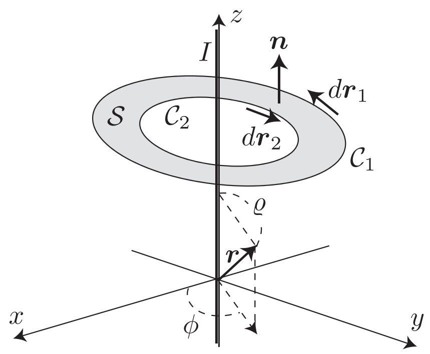
(b) ３つの柱状の領域を組み合わせた下のような領域において、各領域における断面 $\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$、および、$\mathcal{S}_3$ それぞれを貫く電流の値 I_1、I_2、I_3 が $I_3 = I_1 + I_2$ を満たすことを示せ。ただし、この領域の側面を貫く電流の値はゼロであるとし、$\mathcal{S}_1$ の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1$、$\mathcal{S}_2$ の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_2$、および、$\mathcal{S}_3$ の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_3$ の向きは下図のように取るものとする。



4. z 軸に沿った無限に長い導線に、z 正の向きに値が I の電流が流れている（導線の断面の外向き単位法線ベクトルの向きを z 正の向きに取ったときに導線の断面を貫く電流の値が I である）とすると、ビオ・サバールの法則より、この電流が作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{I}{2\pi\varrho}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求められる。ただし、$\varrho \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ は任意の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の終点と z 軸との距離であり、ϕ は、$\boldsymbol{r}$ の $x-y$ 平面への射影の x 正の向きからの偏角である。z 軸に垂直で z 軸上の点を中心とする半径 ϱ_1 の円周 $\mathcal{C}_1$ と半径 ϱ_2 の円周 $\mathcal{C}_2$ に囲まれた円環の領域 $\mathcal{S}$ に着目すると、$\mathcal{S}$ の境界 $\mathcal{C}$ は $\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_2$ から構成されている。以下にしたがって、$\mathcal{C}$ に沿った線積分を計算せよ。ただし、$\mathcal{S}$ の外向きは z 正の向きであるとし、$\varrho_1 > \varrho_2$ であるとする。また、$\mathcal{C}_1$ に沿った微小変位ベクトルを $d\boldsymbol{r}_1$、$\mathcal{C}_2$ に沿った微小変位ベクトルを $d\boldsymbol{r}_2$ とする。



(a) $d\boldsymbol{r}_1$ と $d\boldsymbol{r}_2$ を、ϕ を用いて成分表示せよ。

(b) $\mathcal{C}_1$ に沿った磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の線積分

$$\int_{\mathcal{C}_1} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

を計算せよ。

(c) $\mathcal{C}_2$ に沿った磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の線積分

$$\int_{\mathcal{C}_2} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

を計算せよ。

(d) $\mathcal{C}$ に沿った線積分は、積分範囲を分けることにより、$\mathcal{C}_1$ に沿った線積分と $\mathcal{C}_2$ に沿った線積分に分けて実行することができる。このことに注意して、$\mathcal{C}$ に沿った磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の線積分を計算せよ。

5. z 軸に平行で無限に長い２本の導線に流れる電流が作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を考える。２本の電流のうち、電流 A は、$x=d$、$y=0$ の直線に沿って z 正の向きに、電流 B は、$x=-d$、$y=0$ の直線に沿って z 負の向きに、ともに大きさ I の電流が流れているとする。（したがって、導線の断面の外向きを z 正の向きに選ぶと、電流 A の値は I、電流 B の値は $-I$。）d は正であるとして、以下の問に答えよ。

(a) ビオ・サバールの法則を用いて、２本の電流が作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を求め、I と d を用いて成分表示せよ。なお、a を定数として、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{a^2+\zeta^2}^{\,3}}\, d\zeta$$

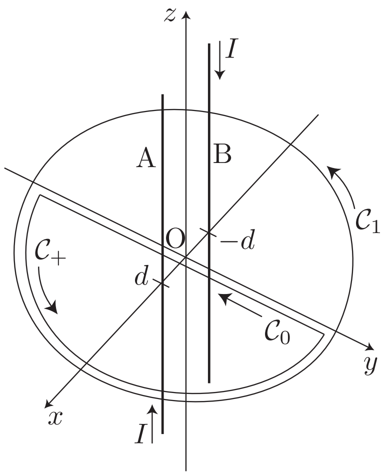
の積分を実行するには、

$$\tan\psi = \frac{\zeta}{a}$$

によって ζ から ψ へ積分変数を変換してみると良い。

(b) 電流から無限に離れた点における $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ のふるまいを調べたい。そのために、z 軸からの距離 $\varrho = \sqrt{x^2+y^2}$ が十分大きく、$d \ll \varrho$ が成り立つときに、d/ϱ の一次までで $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を近似せよ。

(c) 原点を中心とする $x-y$ 平面内の円周を $\mathcal{C}_1$ とする。z 座標が正の側から見て反時計回りに回る向きを $\mathcal{C}_1$ の向きとして、$\mathcal{C}_1$ の半径が無限大の極限で、$\mathcal{C}_1$ に沿った磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の線積分を（アンペールの法則を用いずに）計算せよ。



(d) 前問の $\mathcal{C}_1$ の $x \geq 0$ の部分（半円）を $\mathcal{C}_+$ とし、y 軸に沿った直線を $\mathcal{C}_0$ とする。$\mathcal{C}_0$ と、半径を無限大としたときの $\mathcal{C}_+$ からなる閉曲線を $\mathcal{C}_2$ とするとき、$\mathcal{C}_2$ に沿った磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の線積分を（アンペールの法則を用いずに）計算せよ。ただし、$\mathcal{C}_0$ に沿って y 負の向きへ変位する向きを $\mathcal{C}_2$ の向きとする。なお、a を定数として、

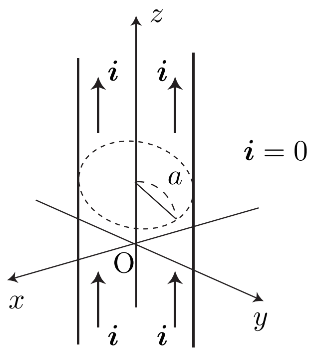
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2+\zeta^2}\, d\zeta$$

の積分を実行するには、

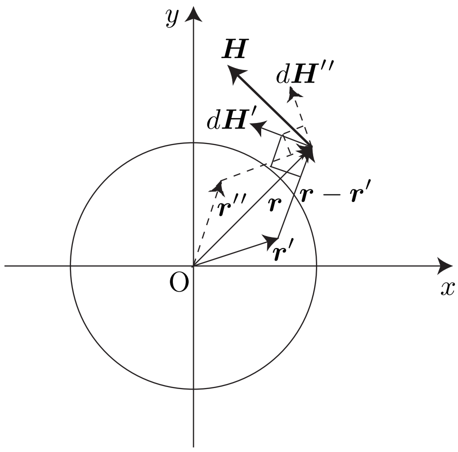
$$\tan\psi = \frac{\zeta}{a}$$

によって ζ から ψ へ積分変数を変換してみると良い。

6. 断面の円の半径が a で z 軸を中心軸とする無限に長い円柱内を、大きさが i で z 正の向きの一様な電流密度で定常電流が流れているとし、この定常電流が作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を考える。ただし、円柱の外部においては、電流密度はゼロであるとする。この電流分布は、z 軸を中心に回転しても、z 軸に沿って動いても変わらないので、それが作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の大きさは、任意の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の終点と z 軸との距離 $\varrho \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数である。



また、この電流分布を無限に細く分割したそれぞれの（無限に細い）電流の向き、すなわち、電流密度の向きは z 正の向きなので、ビオ・サバールの法則より、位置 $\boldsymbol{r}'$ における電流密度が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る微小磁場 $d\boldsymbol{H}'$ は z 軸と $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$ に垂直である。ここで、$\boldsymbol{r}$ と z 軸を含む平面に関して $\boldsymbol{r}'$ と対称な位置 $\boldsymbol{r}''$ を考えると、$\boldsymbol{r}''$ における電流密度が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る微小磁場 $d\boldsymbol{H}''$ と $d\boldsymbol{H}'$ の和は $\boldsymbol{r}$ に垂直になっており、任意の $\boldsymbol{r}'$ についてこのような対称な位置 $\boldsymbol{r}''$ が存在するので、磁場の線形性より、定常電流全体が位置 $\boldsymbol{r}$ に作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は、全体として $\boldsymbol{r}$ に垂直である。$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は z 軸にも垂直であるから、結局、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ が $\boldsymbol{r}$ と z 軸を含む平面に垂直であることがわかる。



したがって、$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ の大きさが ϱ のみの関数であることを考慮すれば、磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ は、

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -H(\varrho)\sin\phi \\ H(\varrho)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書ける。ただし、ϕ は、$\boldsymbol{r}$ の $x-y$ 平面への射影の x 正の向きからの偏角であり、$H(\varrho)$ は求めるべき未知関数である。このことを利用し、アンペールの法則を用いることによって、磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。