基礎物理学 B 期末レポート問題

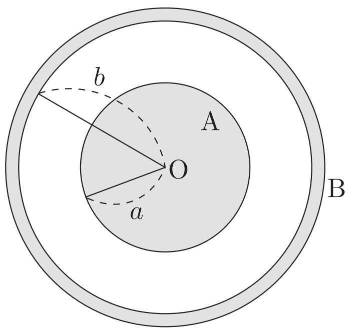
1. 原点を中心とする導体球 A と、原点を中心とする導体の球殻 B からなるコンデンサを考える。（球殻とは、球から、半径が少し小さい球を取り除いた残りの領域。）導体球 A には電荷量 Q が、導体球殻 B には電荷量 $-Q$ が与えられているとし、導体球 A の半径を a、導体球殻 B の内側の球面（B の表面のうち半径が小さい方の球面）の半径を b とする。導体球 A と導体球殻 B に分布した電荷が作る静電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、球対称性より、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E(r)\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

の形に書ける。ただし、$E(r)$ は求めるべき未知関数で、$r = |\boldsymbol{r}|$ は原点から任意の位置 $\boldsymbol{r}$ までの距離である。真空の誘電率を ε_0 とし、Q は正（したがって $-Q$ は負）、原点を中心とする半径 r の球を $\mathcal{V}$、$\mathcal{V}$ の境界をなす球面を $\mathcal{S}$ として、以下の問に答えよ。なお、r の値によって答の関数形が変わる場合には、r のどの範囲に対してどのような関数形になるのかを明確に分類して解答すること。また、微小変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ だけ位置が変位するときの r の微小変化量 dr が

$$dr = \boldsymbol{\nabla} r \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot d\boldsymbol{r}$$

と計算されることを用いて良い。



(a) $\mathcal{S}$ を貫く電束を、未知関数 $E(r)$ を用いて表せ。

(b) $a < r < b$ の場合に、$\mathcal{V}$ に含まれる電荷量を、未知関数 $E(r)$ を用いずに答えよ。

(c) r が導体球殻 B の外側の球面の半径より大きい場合に、$\mathcal{V}$ に含まれる電荷量を、未知関数 $E(r)$ を用いずに答えよ。

(d) ガウスの法則を用い、また、導体中の静電場がゼロであることを考慮して、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の関数形を求め、$E(r)$ を用いずに答えよ。

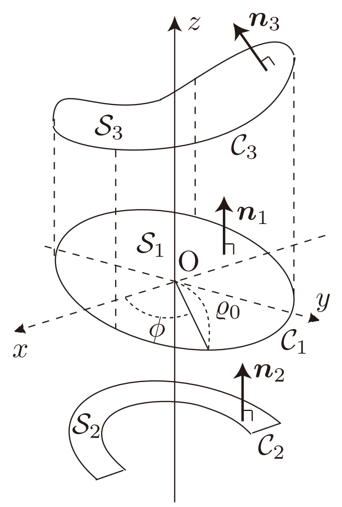
(e) 無限遠を静電ポテンシャルの基準点とし、この基準点における静電ポテンシャルの値をゼロとする。このとき、静電ポテンシャルの基準点から任意の位置まで、前問で求めた電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を線積分することにより、導体球 A と導体球殻 B に分布した電荷が作る静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ の関数形を求めよ。

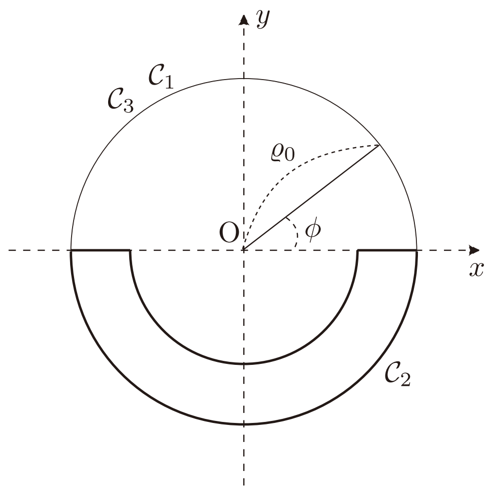
(f) 導体球 A 上の静電ポテンシャルの値を ϕ_A、導体球殻 B 上の静電ポテンシャルの値を ϕ_B とすると、導体球 A と導体球殻 B の電位差 V は $V = \phi_A - \phi_B$ と与えられる。このコンデンサの静電容量 C を、a、b、および、ε_0 を用いて表せ。

2. z 軸に沿った無限に細い導線に流れる定常電流が作る磁場について考える。他に電流はないものとし、導線の断面の外向きを z 正の向きに選んだ時に、その断面を内側から外側へ単位時間あたりに通過する電荷量が I であるとする。ここでは、この電流によって作られる磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ が

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{H_0}{\varrho}\begin{pmatrix} -\sin\phi \\ \cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

という形に書けることを既知として考えることにする。ただし、$\varrho \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ は、任意の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の終点と z 軸との距離で、ϕ は、$\boldsymbol{r}$ の $x-y$ 平面への射影の x 正の向きからの偏角であり、H_0 は求めるべき未知定数である。z 軸に垂直で中心を原点に持つ半径 ϱ_0 の仮想的な円盤を $\mathcal{S}_1$ とし、$\mathcal{S}_1$ の境界をなす円周を $\mathcal{C}_1$ とする。また、外側の円周の $x-y$ 平面への射影が $\mathcal{C}_1$ と一致する、z 軸に垂直な仮想的な円環（円盤から、それより小さい同心の円盤を取り除いたもの）の $y \leq 0$ の側の半分（“半分に切ったバームクーヘン”）を $\mathcal{S}_2$ とし、 $\mathcal{S}_2$ の境界をなす閉曲線を $\mathcal{C}_2$ とする。さらに、$x-y$ 平面への射影が $\mathcal{S}_1$ と一致すること以外は任意である仮想的な曲面を $\mathcal{S}_3$ とし、その境界をなす閉曲線を $\mathcal{C}_3$ とする。$\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$、$\mathcal{S}_3$ それぞれの外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1$、$\boldsymbol{n}_2$、$\boldsymbol{n}_3$ はいずれも z 座標が大きくなる向きを向いているとして、以下の問に答えよ。





$\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、および、$\mathcal{C}_3$ を z 座標が大きい側から見た様子。$\mathcal{C}_1$ と $\mathcal{C}_3$（同じ円周）は細い実線で、$\mathcal{C}_2$ は太い実線で表されている。

(a) $\mathcal{S}_3$ を貫く電流の値を答えよ。（問題文をよく読み、電流の値の定義をよく踏まえた上で解答せよ。）

(b) $\mathcal{C}_1$ に沿った微小変位ベクトルを $d\boldsymbol{R}_1$ として、$d\boldsymbol{R}_1$ を、ϱ_0、ϕ、および、ϕ の微小変化量 $d\phi$ を用いて成分表示せよ。ただし、$d\phi$ の正負を明記すること。

(c) $\mathcal{C}_1$ に沿った磁場の線積分を計算せよ。

(d) $\mathcal{C}_2$ を構成する部分のうち、x 軸に沿った線分上では $\mathcal{C}_2$ に沿った微小変位ベクトルと磁場は直交する。このことと、外側の半円上と内側の半円上での $\mathcal{C}_2$ の向きに注意して、$\mathcal{C}_2$ に沿った磁場の線積分を計算せよ。

(e) $\mathcal{C}_3$ の $x-y$ 平面への射影は $\mathcal{C}_1$ と一致するから、$\mathcal{C}_3$ に沿った微小変位ベクトルの x、y 成分は、それぞれ、$\mathcal{C}_1$ に沿った微小変位ベクトル $d\boldsymbol{R}_1$ の x、y 成分と一致する。このことに注意して、$\mathcal{C}_3$ に沿った磁場の線積分を計算せよ。

(f) アンペールの法則を用いることにより H_0 を求め、磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ を、H_0 を用いずに成分表示せよ。