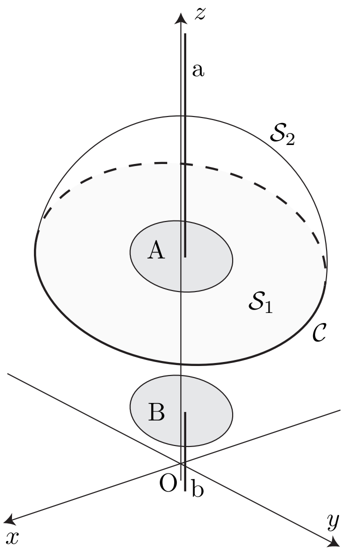
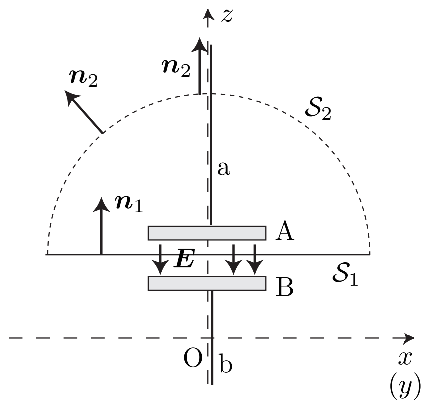
基礎物理学 B 演習問題 4

1. 同じ面積 S を持つ円盤状の 2 枚の導体平板 A と B を用いてコンデンサを作ることにする。これらの導体平板を、ともに z 軸に垂直に、中心を z 軸上に合わせて、導体平板 A の方が B よりも z 座標が大きい位置にあるように配置し、導体平板 A には時間的に変化する電荷量 $Q(t)$ を、したがって、導体平板 B には電荷量 $-Q(t)$ を一様に分布させる。このとき、導体平板間の距離が十分小さくなるように導体平板を配置し、よって、導体平板間にできる電場 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$ は一様で導体平板に垂直であると近似でき、電場は導体平板間（導体平板 A と B をそれぞれ上下の底面とする短い円柱内）でのみゼロでないとする。また、導体平板 A と導体平板 B をそれぞれ z 軸に沿った別の導線 a と導線 b につなげて、これらの導線を通って電荷が移動できるようにしておく。なお、電荷は導体平板か導線内にしか存在しないものとする。





導体平板に平行に導体平板間を通っていて、面積が導体平板より広い円盤の領域を $\mathcal{S}_1$ と、$\mathcal{S}_1$ の境界をなす閉曲線を $\mathcal{C}$ とする。また、$\mathcal{C}$ を境界としていて導線 a が貫いている（導体平板間を通っていない）半球面を $\mathcal{S}_2$ とし、$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ によって囲まれる領域を $\mathcal{V}$ とするとき、以下の問に答えよ。ただし、$\mathcal{S}_1$ の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_1$ は z 正の向きを、$\mathcal{S}_2$ の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}_2$ は $\mathcal{V}$ からそれ以外の領域へ向く向きを向いているとする。

(a) 静電場の場合と同様にガウスの法則を適用することにより、導体平板間に作られる電束密度 $\boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r})$ を求め、$Q(t)$ を用いて成分表示せよ。

(b) 電荷保存則を用いることにより、$\mathcal{S}_2$ を貫く電流の値を、$Q(t)$ を用いて表せ。ただし、$\mathcal{V}$ に含まれる導線の長さが十分に短いために、導線のその部分に含まれる電荷量は十分小さく、したがって、$\mathcal{V}$ に含まれる電荷量は導体平板 A に分布している電荷量 $Q(t)$ に等しいとせよ。

(c) 電流や時間変動する電場によって、このコンデンサのまわりには磁場 $\boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{r})$ が作られる。アンペール・マックスウェルの法則を用いることにより、$\mathcal{C}$ に沿った磁場の線積分

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{H}(t,\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$$

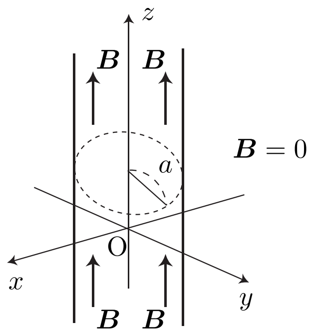
の値を求め、$Q(t)$ を用いて表せ。

(d) アンペール・マックスウェルの法則を用いることにより、$\mathcal{S}_1$ を貫く変位電流

$$\int_{\mathcal{S}_1} \frac{\partial \boldsymbol{D}(t,\boldsymbol{r})}{\partial t} \cdot \boldsymbol{n}_1 \, dS$$

の値を求め、$Q(t)$ を用いて表せ。

2. 断面の円の半径が a で z 軸を中心軸とする無限に長い円柱内に、z 正の向きを向いていて大きさ $B(t)$ が時間的に変化する一様な磁束密度 $\boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{r})$ があるとする。この時間変動する磁束密度が作る電場 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$ を考えたい。ただし、円柱の外部においては、磁束密度はゼロであるとする。この磁束密度の分布は、z 軸を中心に回転しても、z 軸に沿って動いても変わらないので、それが作る電場 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$ の大きさは、任意の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の終点と z 軸との距離 $\varrho \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ と時刻 t のみの関数である。



よって、演習３問６との類似性、および、アンペールの法則とファラデーの法則との類似性を考慮すれば、電場 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$ は、

$$\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} -E(t,\varrho)\sin\phi \\ E(t,\varrho)\cos\phi \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書けるはずである。ただし、ϕ は、$\boldsymbol{r}$ の $x-y$ 平面への射影の x 正の向きからの偏角であり、$E(t,\varrho)$ は求めるべき未知関数である。このことを利用し、ファラデーの法則を用いることによって、電場 $\boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{r})$ を求めよ。

3. 以下を証明せよ。

(a) 任意のベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla} \times \big(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\big) = \boldsymbol{\nabla}\big(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\big) - \nabla^2 \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$$

(b) 任意のスカラー $\phi(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r}) = 0$$

(c) 任意のベクトル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ に対して

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \big(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\big) = 0$$

4. 原点に静止している点電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ をクーロンの法則から求め、それを用いて以下の問に答えよ。ただし、真空の誘電率を ε_0 とする。

(a) 原点以外の任意の点において

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0$$

が満たされていることを示せ。

(b) ガウスの定理を用い、任意の領域 $\mathcal{V}$ に対して、ガウスの法則

$$\varepsilon_0 \oint_{\mathcal{S}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{\mathcal{V}} \rho(\boldsymbol{r})\, dV$$

が成り立つことを示せ。ただし、$\mathcal{S}$ は $\mathcal{V}$ の境界、$\boldsymbol{n}$ は $\mathcal{S}$ の外向き単位法線ベクトル、$\rho(\boldsymbol{r})$ は電荷密度である。

5. z 軸に沿って流れる定常電流が作る磁場 $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ をビオ・サバールの法則から求め、それを用いて以下の問に答えよ。

(a) z 軸上以外の任意の点において

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0$$

が成り立つことを示せ。

(b) ストークスの定理を用い、任意の曲面 $\mathcal{S}$ に対して、アンペールの法則

$$\oint_{\mathcal{C}} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{i}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

が成り立つことを示せ。ただし、$\boldsymbol{n}$ は $\mathcal{S}$ の外向き単位法線ベクトル、$\mathcal{C}$ は $\mathcal{S}$ の境界、$\boldsymbol{i}(\boldsymbol{r})$ は電流密度である。

6. 電荷保存則の積分形とガウスの定理を用いて、電荷保存則の微分形を導け。

7. A と k を任意の実数として、球面波解

$$\phi_2(t, \boldsymbol{r}) \equiv \frac{A}{r} \sin\left[k(r - vt)\right]$$

が、スカラー場に対する三次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi(t, \boldsymbol{r})}{\partial t^2} = v^2\, \nabla^2 \phi(t, \boldsymbol{r})$$

を実際に満たすことを示せ。ただし、$r \equiv |\boldsymbol{r}|$ である。

8. 真空中（電荷密度 $\rho(t, \boldsymbol{r})$ も電流密度 $\boldsymbol{i}(t, \boldsymbol{r})$ もゼロ）を伝搬する電磁波に関して以下の問に答えよ。ただし、c は、真空の誘電率 ε_0 と真空の透磁率 μ_0 を用いて $c \equiv 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ と定義される定数である。

(a) 真空中のマックスウェル方程式から

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r})}{\partial t^2} = c^2\, \nabla^2 \boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}), \qquad \frac{\partial^2 \boldsymbol{H}(t, \boldsymbol{r})}{\partial t^2} = c^2\, \nabla^2 \boldsymbol{H}(t, \boldsymbol{r})$$

を導け。

(b) A_1、A_2、k を任意の定数として、

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r}) = \sin\left[k(x - ct)\right] \begin{pmatrix} 0 \\ A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{H}(t, \boldsymbol{r}) = \frac{1}{\mu_0 c} \sin\left[k(x - ct)\right] \begin{pmatrix} 0 \\ -A_2 \\ A_1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

が真空中のマックスウェル方程式を満たすことを示せ。

(c) $A_1 = 0$ の場合と $A_2 = 0$ の場合それぞれについて、$t = 0$ における式 (1) の電場 $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{r})$ と磁場 $\boldsymbol{H}(t, \boldsymbol{r})$ を図示せよ。