工学系のモデリング A 演習問題＋解答例

第 9 回

2015 年 6 月 10 日

問 1 指導書 p.10 にあるように、複素数は複素平面で表すとわかりやすい。図 1 に示すように、複素数 z が $z = a + bi = r \cdot e^{i\theta}$ と書けるとき、

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$a = r\cos\theta$$
$$b = r\sin\theta$$

などの関係式が成立する（これらはオイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ に対応する）。これらに基づき、以下の問いに答えよ。

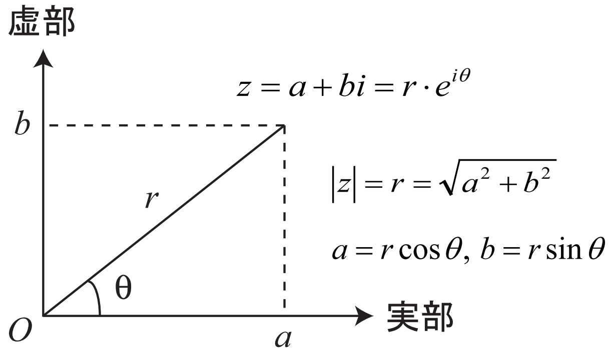


図 1: 複素数と複素平面

(a) $z = \sqrt{3} + i$ のとき、r と θ を求めよ。

(b) $z = 2i$ のとき、r と θ を求めよ。

(c) $z = 3 \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$ のとき、a と b を求めよ。

(d) $z = 4 \cdot e^{-i\frac{2\pi}{3}}$ のとき、a と b を求めよ。

解答）

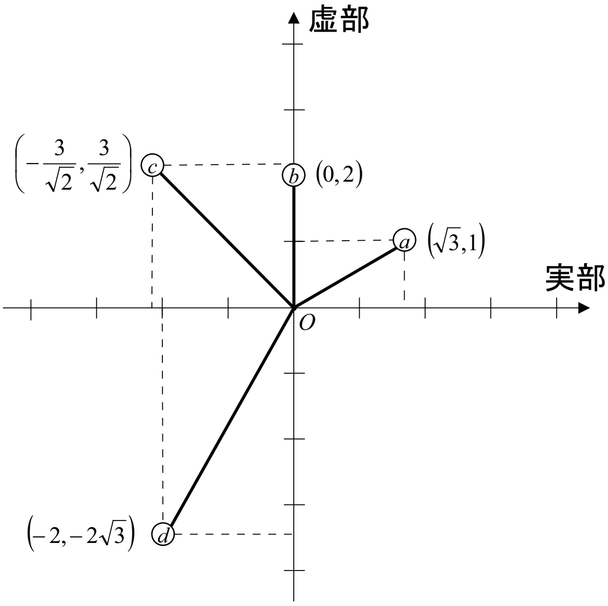
(a) r=2、$\theta = \dfrac{\pi}{6}$ （あるいは 30°）

(b) r=2, $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ （あるいは 90°）

(c) $a = -3/\sqrt{2}$、$b = 3/\sqrt{2}$ （あるいは $a = -3\sqrt{2}/2$、$b = 3\sqrt{2}/2$）

(d) $a = -2$、$b = -2\sqrt{3}$

次の図では、それぞれの複素数を複素平面上で表している。



問 2 Fourier 変換について、以下の性質が成立することを示しなさい。

(a) 線形性
a_1、a_2 を定数として $f(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x)$ と書ける時、$F(\omega) = a_1 \cdot F_1(\omega) + a_2 \cdot F_2(\omega)$ が成立する。

(b) 時間推移性
x_0 を遅延として $f_2(x) = f_1(x - x_0)$ と書ける時、$F_2(\omega) = e^{-iwx_0} F_1(\omega)$ が成立する。

(c) 周波数推移性
w_0 を周波数のシフトとして $F_2(\omega) = F_1(\omega - \omega_0)$ と書ける時、$f_2(x) = e^{iw_0 x} f_1(x)$ が成立する。

(d) 相似性
$a > 0$ として $f_2(x) = f_1(ax)$ と書ける時、$F_2(\omega) = \frac{1}{a} F_1(\frac{\omega}{a})$ が成立する。

解答）

(a) $f(x) = a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x)$ を代入して変形を進める。

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{a_1 \cdot f_1(x) + a_2 \cdot f_2(x)\} e^{-i\omega x} dx \\ &= a_1 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) e^{-i\omega x} dx + a_2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= a_1 \cdot F_1(\omega) + a_2 \cdot F_2(\omega) \end{aligned}$$

(b) $y = x - x_0$、$dy = dx$ として変形を進める。

$$\begin{aligned} F_2(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x - x_0) e^{-i\omega x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) e^{-i\omega(y + x_0)} dy = e^{-i\omega x_0} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) e^{-i\omega y} dy \\ &= e^{-i\omega x_0} F_1(\omega) \end{aligned}$$

(c) $\omega' = \omega - \omega_0$、$d\omega' = d\omega$ として変形を進める。

$$
\begin{aligned}
f_2(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega-\omega_0)e^{i\omega x}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega')e^{i(\omega'+\omega_0)x}d\omega' \\
&= e^{i\omega_0 x}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\omega')e^{i\omega' x}d\omega' = e^{i\omega_0 x}f_1(x)
\end{aligned}
$$

(d) $y = ax$、$dy = a\cdot dx$ として変形を進める。

$$
F_2(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(ax)e^{-i\omega x}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)e^{-i\omega\frac{y}{a}}\frac{dy}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)e^{-i\frac{\omega}{a}y}dy
$$

Fourier 変換の定義式で ω に $\frac{\omega}{a}$ を代入すれば、

$$
F_1(\frac{\omega}{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y)e^{-i\frac{\omega}{a}y}dy
$$

よって、

$$
F_2(\omega) = \frac{1}{a}F_1(\frac{\omega}{a})
$$

問 3 以下の関数の Fourier 変換を求めよ。

(a) 部分的な三角関数

$$
f(x) = \begin{cases} \sin\omega_0 x & (|x| < T) \\ 0 & (|x| > T) \end{cases}
$$

(b) 三角波

$$
f(x) = \begin{cases} -(x-T) & (0 < x < T) \\ x+T & (-T < x < 0) \\ 0 & (|x| > T) \end{cases}
$$

問題を解くに際して、次の積分の公式を用いてよい。

$$
\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx
$$

解答）

(a) 随時、オイラーの公式を活用する。

$$
\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-T}^{T}\sin\omega_0 x e^{-i\omega x}dx = \int_{-T}^{T}\frac{e^{i\omega_0 x}-e^{-i\omega_0 x}}{2i}e^{-i\omega x}dx = \int_{-T}^{T}\frac{e^{i(\omega_0-\omega)x}-e^{-i(\omega_0+\omega)x}}{2i}dx \\
&= \left[\frac{e^{i(\omega_0-\omega)x}}{-2(\omega_0-\omega)}\right]_{-T}^{T} - \left[\frac{e^{-i(\omega_0+\omega)x}}{-2(\omega_0+\omega)}\right]_{-T}^{T} \\
&= \frac{e^{i(\omega_0-\omega)T}-e^{-i(\omega_0-\omega)T}}{-2(\omega_0-\omega)} - \frac{e^{-i(\omega_0+\omega)T}-e^{i(\omega_0+\omega)T}}{-2(\omega_0+\omega)} \\
&= -i\cdot\frac{1}{\omega_0-\omega}\cdot\frac{e^{i(\omega_0-\omega)T}-e^{-i(\omega_0-\omega)T}}{2i} + i\cdot\frac{1}{\omega_0+\omega}\cdot\frac{e^{i(\omega_0+\omega)T}-e^{-i(\omega_0+\omega)T}}{2i} \\
&= i\cdot\frac{\sin(\omega_0+\omega)T}{\omega_0+\omega} - i\cdot\frac{\sin(\omega_0-\omega)T}{\omega_0-\omega}
\end{aligned}
$$

(b) まず、積分第一項に対して $y=-x$、$dy=-dx$ として変形を進める。

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \int_{-T}^{0}(x+T)e^{-i\omega x}dx + \int_{0}^{T}(-x+T)e^{-i\omega x}dx \\
&= \int_{T}^{0}(-y+T)e^{i\omega y}(-dy) + \int_{0}^{T}(-x+T)e^{-i\omega x}dx \\
&= \int_{0}^{T}(-y+T)e^{i\omega y}dy + \int_{0}^{T}(-x+T)e^{-i\omega x}dx \\
&= \int_{0}^{T}(-x+T)(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x})dx = \int_{0}^{T}2(-x+T)\cos\omega x dx
\end{aligned}$$

ここで $g(x)=2(-x+T)$、$h'(x)=\cos\omega x$ として部分積分の公式を考える。$g'(x)=-2$、$h(x)=\frac{\sin\omega x}{\omega}$ であるから、

$$\begin{aligned}
F(\omega) &= \left[2(-x+T)\frac{\sin\omega x}{x}\right]_0^T - \int_0^T(-2)\frac{\sin\omega x}{\omega}dx = \frac{2}{\omega}\int_0^T\sin\omega x dx \\
&= \frac{2}{\omega}\left[-\frac{\cos\omega x}{\omega}\right]_0^T = \frac{2(1-\cos\omega T)}{\omega^2} = \frac{4}{\omega^2}\cdot\sin^2\frac{\omega T}{2}
\end{aligned}$$

最後は三角関数の倍角公式を使っている。