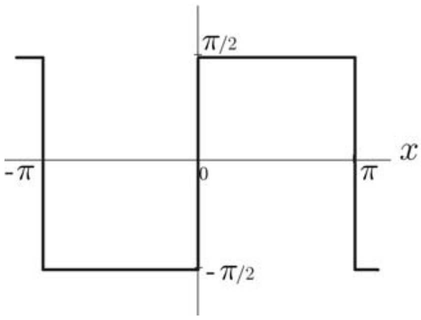
工学系のモデリング A 演習問題　解答

第 8 回　2015 年 6 月 3 日実施

担当：電子物理システム学科　山中　由也

問 1　指導書 p.88 **例題 6.1.4** の (b) で、$D = \pi$, $L = 2\pi$ ととる。すなわち周期 2π（従って $k_n = n$）の関数 $f(x)$



$$f(x) = \pi\left\{\theta(x) - \frac{1}{2}\right\} \qquad (-\pi < x < \pi)$$

の複素 Foureir 級数展開は次式となる。

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} g_m(x)\,, \quad g_m(x) = -i\frac{1}{2m-1}e^{i(2m-1)x}$$

この級数展開の部分和のグラフを、次の順序に従って描こう。

(a) p.86 式 (6.57) の添え字 n は上式の $2m-1$ に対応している（$n = 2m-1$）。偶数 n と $n = 0$ に対して $d_n = 0$ である。指定される 2 項の和 $p_3(x), p_5(x)$ を、次の $p_1(x)$ のようにして計算して求めよ。

$$n = 1, -1\,(m = 1, 0) \qquad p_1(x) = \sum_{m=1,0} g_m(x) = -i\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) = 2\sin x$$

$$n = 3, -3\,(m = 2, -1) \qquad p_3(x) = \sum_{m=2,-1} g_m(x)$$

$$n = 5, -5\,(m = 3, -2) \qquad p_5(x) = \sum_{m=3,-2} g_m(x)$$

(b) 以下のように定義される部分和 $S_3(x)$, $S_5(x)$ を具体的に三角関数を用いて表わせ。

$$S_1(x) = p_1(x) = 2\sin x\,, \qquad S_3(x) = S_1(x) + p_3(x)\,, \qquad S_5(x) = S_3(x) + p_5(x)$$

(c) 関数 $f(x)$ が書かれたグラフに、上で求めた $p_1(x) = S_1(x)$, $p_3(x)$, $p_5(x)$ のグラフを縦軸の大きさに注意して描き込め。さらに、$S_3(x)$, $S_5(x)$ のおおよそのグラフも描き込め。$S_n(x)$ は n が大きくなるにつれて $f(x)$ に近づく関数である。

解答）　(a)

$$p_3(x) = -i\left(\frac{e^{3ix}}{3} - \frac{e^{-3ix}}{3}\right) = \frac{2}{3}\sin 3x$$

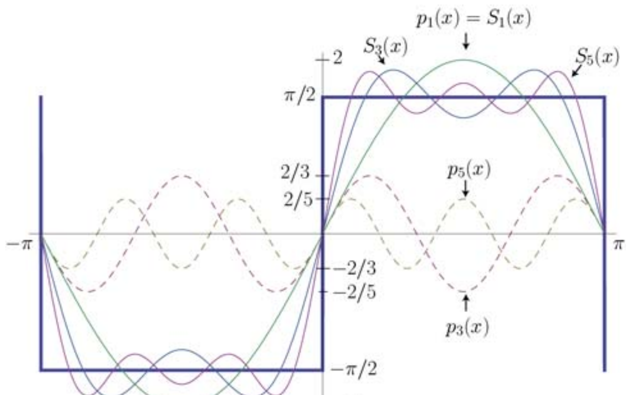
$$p_5(x) = -i\left(\frac{e^{5ix}}{5} - \frac{e^{-5ix}}{5}\right) = \frac{2}{5}\sin 5x$$

(b)

$$S_3(x) = 2\sin x + \frac{2}{3}\sin 3x$$

$$S_5(x) = 2\sin x + \frac{2}{3}\sin 3x + \frac{2}{5}\sin 5x$$

(c) 右図のようになる。$S_n(x)$ は n が大きくなるにつれて $f(x)$ に近づく。



問 2　周期 $L=1$ の周期関数 $f(x)$ （$f(x+1)=f(x)$）が次式のように Fourier 級数展開されているとする。

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n w_n(x)\,, \qquad w_n(x)=e^{i2\pi nx} \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

(a) $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} w_n^*(x)w_{n'}(x)\,dx=\delta_{nn'}$ であることを証明せよ。

(b) (a) の結果を用いて、$\displaystyle d_n=\int_{-1/2}^{1/2} w_n^*(x)f(x)\,dx$ と計算できることを示せ。

解答）　(a) $n\neq n'$ （$n-n'\neq 0$）のとき

$$\begin{aligned}\int_{-1/2}^{1/2} w_n^*(x)w_{n'}(x)\,dx &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi(n-n')}\,dx = \frac{i}{2\pi(n-n')}\left[e^{-i2\pi(n-n')}\right]_{-1/2}^{1/2} \\ &= \frac{i}{2\pi(n-n')}\left(e^{-i\pi(n-n')}-e^{i\pi(n-n')}\right) \\ &= \frac{i}{2\pi(n-n')}\left\{(-1)^{n-n'}-(-1)^{n-n'}\right\}=0\end{aligned}$$

$n=n'$ のとき

$$\int_{-1/2}^{1/2} w_n^*(x)w_n(x)\,dx=\int_{-1/2}^{1/2} dx=1$$

まとめると

$$\int_{-1/2}^{1/2} w_n^*(x)w_{n'}(x)\,dx=\delta_{nn'}$$

(b) $\displaystyle f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n w_n(x)$ の両辺に $w_m^*(x)$ を掛けて、x について $-\frac{1}{2}$ から $\frac{1}{2}$ の積分を実行する。

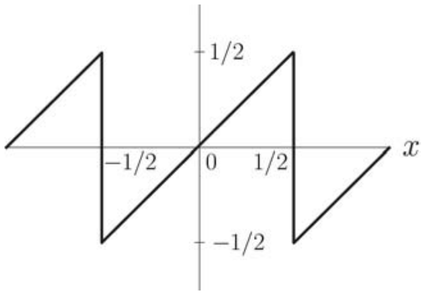
$$\begin{aligned}（左辺） &= \int_{-1/2}^{1/2} w_m^*(x)f(x)\,dx \\ （左辺） &= \int_{-1/2}^{1/2} w_m^*(x)\sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n w_n(x)\,dx \qquad \text{（積分と無限和の順序を交換する）} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n \int_{-1/2}^{1/2} w_m^*(x)w_n(x)\,dx \qquad \text{（(a) で示した結果を代入する）} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n\delta_{mn}=d_m\end{aligned}$$

改めて、m を n と書いて、

$$d_n=\int_{-1/2}^{1/2} w_n^*(x)f(x)\,dx$$

問 3　周期 $L=1$ の周期関数

$$f(x) = x \qquad \left(-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}\right)$$



を、前問（または指導書 p.86 式 (6.57)∼(6.59) で $L=1$ の場合）のように複素 Fourier 級数展開する。

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n w_n(x)\,, \qquad \left(w_n(x) = e^{i2\pi nx}\right)$$

(a) 展開係数 d_n を計算せよ。（$n \neq 0$ と $n=0$ 場合に別けて計算せよ）

(b) (a) の結果を代入すると、複素 Fourier 級数展開は

$$f(x) = \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{i}{2\pi n}(-1)^n\, e^{i2\pi nx}$$

となる。この右辺で、複素指数関数にオイラーの式を用いて三角関数で書き直してみよ。その結果が、指導書 p.85 **問 6.1.3** の記述と一致していることを確認せよ。

解答）　(a) $n \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned}
d_n &= \int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi nx}\, x\, dx = \frac{i}{2\pi n}\int_{-1/2}^{1/2} \left(e^{-i2\pi nx}\right)' x\, dx \\
&= \frac{i}{2\pi n}\left[e^{-i2\pi nx}\, x\right]_{-1/2}^{1/2} - \frac{i}{2\pi n}\int_{-1/2}^{1/2} e^{-i2\pi nx}\, dx \\
&= \frac{i}{4\pi n}\left(e^{-i\pi n} + e^{i\pi n}\right) - \left(\frac{i}{2\pi n}\right)^2 \left[e^{-i2\pi nx}\right]_{-1/2}^{1/2} \\
&= \frac{i}{4\pi n}\left\{(-1)^n + (-1)^n\right) - \left(\frac{i}{2\pi n}\right)^2 \left(e^{-i\pi n} - e^{i\pi n}\right) \\
&= \frac{i}{2\pi n}(-1)^n - \left(\frac{i}{2\pi n}\right)^2 \left\{(-1)^n - (-1)^n\right\} = \frac{i}{2\pi n}(-1)^n
\end{aligned}$$

$n=0$ のとき

$$d_0 = \int_{-1/2}^{1/2} x\, dx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1/2}^{1/2} = 0$$

(b) $|n|$ が等しい対で、$n<0$ に対しては $-n$ を改めて n として、まとめる。

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \frac{i}{2\pi n}(-1)^n\, e^{i2\pi nx} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2\pi n}(-1)^n \left(e^{i2\pi nx} - e^{-i2\pi nx}\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i}{2\pi n}(-1)^n \left\{2i\sin(2\pi nx)\right\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n}\sin(2\pi nx)
\end{aligned}$$

$f(x)$ が奇関数であるので、指導書 p.85 **問 6.1.3** の一般論通り、sin 関数のみで表わされている。

問 4　周期 T の周期関数 $f(t)$ に対して、次式の複素 Fourier 級数展開を行なう。

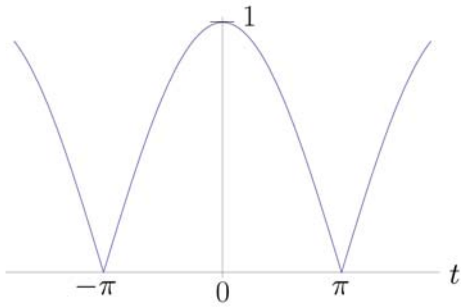
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\omega_n t}\,, \qquad \omega_n = \frac{2\pi}{T}n \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$$

ここで展開係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega_n t}\, f(t)\, dt$$

で与えられることに注意しよう。複素指数関数の規格化は p.86 (6.57)∼(6.59) ではなく、p.82 (6.26) 及び p.83 (6.34) である。さらに、指数関数の指数部分の符号も逆になっている。

周期 $T = 2\pi$ の関数



$$f(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right), \quad (-\pi < t < \pi)$$

に対して、(a) c_n を計算せよ。また、(b) 得られた c_n を級数展開に代入して、級数を三角関数で表わせ。（ヒント : (a) の計算では p.90 **問 6.1.5** (a) のように、$\cos(t/2)$ を複素指数関数で表し、被積分関数を複素指数関数に統一すると積分が比較的簡単になる。）

解答）　(a) （積分の前に $1/2\pi$ を忘れずに）$\omega_n = n$ を用いて

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\cos\left(\frac{t}{2}\right) dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}\,\frac{1}{2}\left(e^{it/2} + e^{-it/2}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(e^{i(n+\frac{1}{2})t} + e^{i(n-\frac{1}{2})t}\right) = \frac{1}{4\pi}\left\{\left[\frac{e^{i(n+\frac{1}{2})t}}{i(n+\frac{1}{2})}\right]_{-\pi}^{\pi} + \left[\frac{e^{i(n-\frac{1}{2})t}}{i(n-\frac{1}{2})}\right]_{-\pi}^{\pi}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{i(n+\frac{1}{2})}\left(e^{in\pi}e^{i\pi/2} - e^{-in\pi}e^{-i\pi/2}\right) + \frac{1}{i(n-\frac{1}{2})}\left(e^{in\pi}e^{-i\pi/2} - e^{-in\pi}e^{i\pi/2}\right)\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{i(n+\frac{1}{2})}\left((-1)^n i - (-1)^n(-i)\right) + \frac{1}{i(n-\frac{1}{2})}\left((-1)^n(-i) - (-1)^n i\right)\right\} \\
&= \frac{(-1)^n}{2\pi}\left(\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}
\end{aligned}$$

途中で $e^{i\pi/2} = i$, $e^{-i\pi/2} = -i$ を用いた。
(b) (a) の結果を展開に代入し、n の和について以下のように、$n = 0$ を取り出し、$|n|$ が等しい対でまとめる。（$n < 0$ に対しては $-n$ を改めて n として）

$$\begin{aligned}
f(t) &= \frac{2}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\, e^{-int} \\
&= \frac{2}{\pi} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\left(e^{-int} + e^{int}\right) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos(nt)
\end{aligned}$$

偶関数の Fourier 級数展開なので、指導書 p.85 **問 6.1.3** の一般論通り、sin 関数を使わずに表わされている。