工学系のモデリングA 演習問題

第2回 (第1.2.4節〜1章のおわりまで)

2015年4月15日

問1 Eulerの公式を用いて、以下の関係を示せ。ただし θ は実数とする。

(1) $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$　　(2) $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

(3) $\cos(i\theta) = \cosh\theta$　　(4) $\sin(i\theta) = i\sinh\theta$

解答

(1) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ および $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ より、両辺の和をとると得られる。

(2) $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ および $e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ より、両辺の差をとると得られる。

(3) (1) で $\theta \to i\theta$ と置き換えると、$\cos(i\theta) = \dfrac{e^{\theta}+e^{-\theta}}{2} = \cosh\theta$

(4) (2) で $\theta \to i\theta$ と置き換えると、$\sin(i\theta) = \dfrac{e^{-\theta}-e^{\theta}}{2i} = i\sinh\theta$

問2 双曲線関数について、以下の加法定理が成り立つことを示せ。

(1) $\cosh(\alpha+\beta) = \cosh\alpha\cosh\beta + \sinh\alpha\sinh\beta$

(2) $\sinh(\alpha+\beta) = \sinh\alpha\cosh\beta + \cosh\alpha\sinh\beta$

解答

三角関数の加法定理 $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ および $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ において、$\alpha \to i\alpha$、$\beta \to i\beta$ と置き換えると双曲線関数の加法定理が導かれる。

問３　Taylor 展開を用いて、以下の問いに答えよ。

(1) $\tan\theta$ を θ について 3 次の項まで級数展開せよ。ただし θ は級数が収束する範囲で十分小さいものとする。

(2) $\dfrac{1}{1+x}$ を x について 2 次の項まで級数展開せよ。ただし x は級数が収束する範囲で十分小さいものとする。

解答

(1) $\tan\theta = \theta + \frac{1}{3}\theta^3 + O(\theta^5)$

(2) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3)$

問４ 以下の微分方程式について、(a) 階数、(b) 線形、非線形の種別を答えよ。さらに線形の場合は、(c) 斉次形、非斉次形の種別を答えよ。

(1) $\dfrac{dy}{dx}(x) + \alpha y(x) = \beta \sin x$

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}(t) + \alpha\dfrac{dy}{dt} - y + y^3 = \beta\cos\omega t$

(3) $-\dfrac{\hbar^2}{2m}\dfrac{d^2\phi}{dx^2}(x) + \dfrac{1}{2}kx^2\phi(x) = E\phi(x)$

(4) $\dfrac{dy}{dt}(t) = \dfrac{\beta}{\alpha - 2y(t)}$

解答

(1) (a)1 階　(b) 線形　(c) 非斉次

(2) (a)2 階　(b) 非線形

(3) (a)2 階　(b) 線形　(c) 斉次

(4) (a)1 階　(b) 非線形

問５ 図に示すような、コイルを含む回路を考える。回路に一定の電流が流れる定常状態で時刻 $t = 0$ においてスイッチ S を接点 1 から 2 に切り替えたとする。この後、閉回路の任意の点を時刻 t までに矢印の方向に通過した電荷の総量 $q(t)$ に対する微分方程式は、自由粒子の運動方程式と同じ、以下の式で表すことができる。

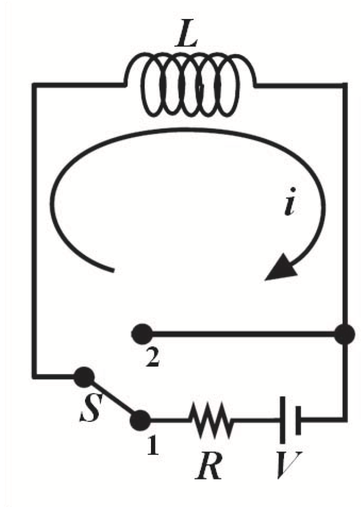
$$L\frac{d^2q}{dt^2} = 0 \tag{1}$$

ここで L は定数で、コイルのインダクタンスと呼ばれる。また、時刻 t において回路を流れる電流 $i(t)$ は

$$i(t) = \frac{dq}{dt} \tag{2}$$

と表わされる。

　このとき、電流 $i(t)$ と電荷量 $q(t)$ の一般解を求めよ。また、初期条件を $i(0) = i_0$, $q(0) = 0$ として特殊解を求めよ。



解答

　一般解　$i(t) = C_1$, $q(t) = C_1 t + C_2$

　特殊解　$i(t) = i_0$, $q(t) = i_0 t$

理想的なコイルのみを含む閉回路には、一定の電流が永久に流れ続ける。