

基礎物理学 B 演習解答 2

1. 任意のスカラー場 $f(\mathbf{r})$ について、その勾配 $\nabla f(\mathbf{r})$ の成分表示は

$$\nabla f(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial x} \\ \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial y} \\ \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1)$$

と与えられる。また、 $\nabla f(\mathbf{r})$ と同じ向きの単位ベクトル \mathbf{n} を求めるには、 $\nabla f(\mathbf{r})$ の大きさ $|\nabla f(\mathbf{r})|$ で $\nabla f(\mathbf{r})$ を割れば良いので、 \mathbf{n} は、

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(\mathbf{r})}{|\nabla f(\mathbf{r})|} \quad (2)$$

によって計算できる。

- (a) $f(\mathbf{r}) = z$ を、 x 、 y 、 z でそれぞれ偏微分すると、

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial z} = 1$$

よって、これらを式 (1) に代入して、

$$\nabla z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

さらに、これより、 $|\nabla z| = 1$ だから、式 (2) より、

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

また、 $z = \text{一定}$ 面は z 軸に垂直な平面。(資料 1 の勾配の例 1 を参照。)

- (b) まず、 $f(\mathbf{r}) = \sqrt{x^2 + y^2} = (x^2 + y^2)^{1/2}$ の、 x での偏微分を計算する。合成関数の微分の演算規則より、 $(x^2 + y^2)^{1/2}$ を $x^2 + y^2$ で微分したものに、 $x^2 + y^2$ を x で偏微分したものを掛ければ良いので、

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)^{-1/2} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

同様に、 y での偏微分、 z での偏微分を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2)^{1/2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2)^{1/2} = 0$$

よって、これらを式 (1) に代入して、

$$\nabla \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

さらに、これより、

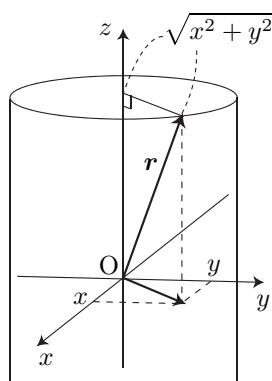
$$|\nabla\sqrt{x^2+y^2}| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2} = 1$$

だから、式 (2) より、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

また、 $\sqrt{x^2+y^2}$ は、位置ベクトル \mathbf{r} の終点と z 軸との距離だから、 $\sqrt{x^2+y^2} = \text{一定}$ 面は z 軸からの距離が一定の曲面、すなわち、 z 軸を中心軸とする円柱の側面。(資料 1 の勾配の例 3 を参照。)

注) \mathbf{r} の終点と z 軸との距離は、 \mathbf{r} の終点から z 軸へ降ろした垂線の長さに他ならず、これは、 \mathbf{r} を $x-y$ 平面へ射影したベクトルの大きさに等しい。 \mathbf{r} を $x-y$ 平面へ射影したベクトルの x 成分と y 成分は、それぞれ、 \mathbf{r} の終点の x 座標 x と y 座標 y に等しいので、 \mathbf{r} を $x-y$ 平面へ射影したベクトルの大きさは $\sqrt{x^2+y^2}$ 。



(c) $f(\mathbf{r}) = x^2 + y^2$ を、 x 、 y 、 z でそれぞれ偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2) = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2) = 0$$

よって、これらを式 (1) に代入して、

$$\nabla(x^2 + y^2) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

さらに、これより、

$$|\nabla(x^2 + y^2)| = \sqrt{(2x)^2 + (2y)^2} = 2\sqrt{x^2 + y^2}$$

だから、式 (2) より、

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

また、 x^2+y^2 は、位置ベクトル \mathbf{r} の終点と z 軸との距離 $\sqrt{x^2+y^2}$ の二乗だから、 $x^2+y^2 = \text{一定}$ 面は z 軸からの距離が一定の曲面、すなわち、 z 軸を中心軸とする円柱の側面。

注) $\sqrt{x^2 + y^2}$ を二乗すると $x^2 + y^2$ だから、 $\sqrt{x^2 + y^2} = \text{一定面}$ と $x^2 + y^2 = \text{一定面}$ は同じで、 z 軸を中心軸とする円柱の側面である。したがって、 $\nabla \sqrt{x^2 + y^2}$ と $\nabla(x^2 + y^2)$ は同じ向きであり、当然、それぞれと同じ向きの単位ベクトルは同じになる。

- (d) $|\mathbf{r}|$ は $|\mathbf{r}| = \sqrt{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ と書けるから、 $f(\mathbf{r}) = 1/|\mathbf{r}|$ は $f(\mathbf{r}) = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ と表せる。これを x で偏微分するには、合成関数の微分の演算規則より、 $(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ を $x^2 + y^2 + z^2$ で微分したものに、 $x^2 + y^2 + z^2$ を x で偏微分したものを掛ければ良いので、

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} \cdot 2x = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}^3} = -\frac{x}{|\mathbf{r}|^3}$$

同様に、 y での偏微分、 z での偏微分を計算すると、

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{y}{|\mathbf{r}|^3}, \quad \frac{\partial}{\partial z}(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} = -\frac{z}{|\mathbf{r}|^3}$$

よって、これらを式 (1) に代入して、

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} = -\frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (3)$$

さらに、これより、

$$\left| \nabla \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right| = \sqrt{\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right) \cdot \left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \right)} = \sqrt{\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^6}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^6}} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^2}$$

だから、式 (2) より、

$$\mathbf{n} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

また、 $|\mathbf{r}|$ は、原点から位置ベクトル \mathbf{r} の終点までの距離だから、 $1/|\mathbf{r}| = \text{一定面}$ は原点からの距離が一定の曲面、すなわち、原点を中心とする球面。

注) $\nabla(1/|\mathbf{r}|)$ は $1/|\mathbf{r}| = \text{一定面}$ に垂直で $1/|\mathbf{r}|$ が大きくなる向きを向いているが、この向きは $|\mathbf{r}|$ が小さくなる向き、すなわち、原点へ向かう向きである。これに対応して、 $\nabla(1/|\mathbf{r}|)$ は \mathbf{r} とは逆向きを向いていることに注意せよ。

2. (a) クーロンの法則より、位置 \mathbf{r}_0 に静止している電荷量 e の点電荷が、位置 \mathbf{r}_B に静止している電荷量 e_B の点電荷に及ぼすクーロン力 \mathbf{F} は、

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e e_B}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_0|} \quad (4)$$

と与えられる。一方、位置 \mathbf{r}_0 にある点電荷が作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を用いると、 \mathbf{F} は $\mathbf{F} = e_B \mathbf{E}(\mathbf{r}_B)$ と書けるので、位置 \mathbf{r}_0 にある点電荷が位置 \mathbf{r}_B に作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}_B)$ は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}_B) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_0|}$$

と書ける。点電荷 B を置く位置 \mathbf{r}_B は任意なので、 \mathbf{r}_B を任意の位置ベクトル \mathbf{r} で置き換えて、位置 \mathbf{r}_0 に静止している電荷量 e の点電荷が作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (5)$$

と求められる。

(b) まず、 $R(\mathbf{r}) \equiv |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ を、 x 、 y 、 z で微分しやすい形に書き直しておく。

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

だから、このベクトルの大きさ $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ を考えることにより、 $R(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ が

$$R(\mathbf{r}) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} = [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{1/2}$$

と書けることがわかる。これを用いると、 $R(\mathbf{r})$ の x での偏微分 $\partial R(\mathbf{r})/\partial x$ は、合成関数の微分の演算規則を適用して、

$$\begin{aligned} \frac{\partial R(\mathbf{r})}{\partial x} &= \frac{1}{2} [(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2]^{-1/2} \cdot 2(x - x_0) \\ &= \frac{x - x_0}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}} = \frac{x - x_0}{R(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

同様に、 y での偏微分、 z での偏微分も

$$\frac{\partial R(\mathbf{r})}{\partial y} = \frac{y - y_0}{R(\mathbf{r})}, \quad \frac{\partial R(\mathbf{r})}{\partial z} = \frac{z - z_0}{R(\mathbf{r})}$$

と計算できるので、 $\nabla R(\mathbf{r})$ は、 $R(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ に注意して、

$$\nabla R(\mathbf{r}) = \frac{1}{R(\mathbf{r})} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{R(\mathbf{r})} \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{R(\mathbf{r})} [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0] = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

と書ける。よって、

$$dR = \nabla R(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \cdot d\mathbf{r} \quad (7)$$

(c) 式 (5) と (7) を用い、再び $R(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ に注意すると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \cdot d\mathbf{r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} dR$$

したがって、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の線積分は R による通常の積分に書き換えられる。(R で積分する際には、 R が \mathbf{r} の関数であることを気にする必要はないので、上式においては、 $R(\mathbf{r})$ ではなく、単に R と表記してある。) C に沿った線積分の始点 \mathbf{r}_1 と終点 \mathbf{r}_2 における $R(\mathbf{r})$ の値はそれぞれ $R(\mathbf{r}_1) = R_1$ と $R(\mathbf{r}_2) = R_2$ であり、これらがそれぞれ R による積分の下限と上限なので、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{R^2} dR \quad (8)$$

(d) 式 (8) の右辺の積分を実行し、 $R_1 = R(\mathbf{r}_1) = |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|$ と $R_2 = R(\mathbf{r}_2) = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0|$ に注意すると、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_2} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0|} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0|}$$

よって、これを、位置 \mathbf{r}_0 に静止している電荷量 e の点電荷が作る静電ポテンシャル

$$\phi(\mathbf{r}) \equiv \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (9)$$

を用いて書き表すと、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = -\phi(\mathbf{r}_2) + \phi(\mathbf{r}_1) \quad (10)$$

(e) $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ が

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} = [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{-1/2}$$

と書けることに注意して $1/|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ を x で偏微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} &= -\frac{1}{2} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2]^{-3/2} \cdot 2(x-x_0) \\ &= -\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}^3} = -\frac{x-x_0}{R^3(\mathbf{r})} \end{aligned}$$

同様に、 y での偏微分、 z での偏微分も

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{y-y_0}{R^3(\mathbf{r})}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{z-z_0}{R^3(\mathbf{r})}$$

と計算できる。したがって、式 (6) と $R(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ に注意すると、

$$\nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{1}{R^3(\mathbf{r})} \begin{pmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \\ z-z_0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} [\mathbf{r} - \mathbf{r}_0] = -\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

よって、式 (9) より、 $\nabla \phi(\mathbf{r})$ は

$$\nabla \phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$$

と計算されるが、これと、式 (5) より、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \phi(\mathbf{r})$$

が成り立っていることが示される。

注 1) 式 (8) からわかるように、電場 (5) の曲線 C に沿った線積分は、 C の途中の経路に依らず、その始点 \mathbf{r}_1 と終点 \mathbf{r}_2 における $R(\mathbf{r})$ の値 R_1 と R_2 のみに依存している。すなわち、力学の言葉を使えば、電場 (5) は保存力に対応する。(ただし、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の次元は単位電荷量当たりの力なので、電場 (5) を力と呼ぶのは適当でない。) このことは、クーロン力 (4) が位置 \mathbf{r}_0 を中心とする中心力であり、また、中心力が保存力であることを考えれば自然に理解できるであろうが、実際には、中心力が保存力であるという事実は、一般的に、上のような計算によって示される。その例として、ここでは、簡単のため $\mathbf{r}_0 = 0$ の場合、すなわち、原点を中心とする中心力

$$\mathbf{F}_c = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

について考えてみる。このとき、 $R(\mathbf{r}) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ は $r = |\mathbf{r}|$ に帰着し、式 (7) より、

$$dr = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot d\mathbf{r} \quad (11)$$

であるから、曲線 C に沿って \mathbf{F}_c がする仕事 W は、

$$W = \int_C \mathbf{F}_c \cdot d\mathbf{r} = \int_{r_1}^{r_2} F(r) dr \quad (12)$$

と、 r による通常の積分に書き直せる。ただし、 r_1 と r_2 は、それぞれ C の始点の位置 \mathbf{r}_1 と終点の位置 \mathbf{r}_2 における r の値、すなわち、 $r_1 = |\mathbf{r}_1|$ 、 $r_2 = |\mathbf{r}_2|$ である。したがって、一般に ($F(r)$ がどの

ような関数でも、中心力 F_c については、仕事 W が C の途中の経路に依らず、その始点と終点の位置のみに依存することがわかる。言い換えれば、中心力 F_c は、一般的に保存力である。さらに、任意の定数 r_s を用いて、式 (12) の右边を

$$\int_{r_1}^{r_2} F(r) dr = \int_{r_s}^{r_2} F(r) dr - \int_{r_s}^{r_1} F(r) dr$$

と変形し、

$$V(r) \equiv - \int_{r_s}^{|r|} F(r) dr \quad (13)$$

と $V(r)$ を定義すれば、式 (12) の仕事 W は、

$$W = -V(r_2) + V(r_1)$$

と書き直せる。よって、式 (13) で定義した関数 $V(r)$ は F_c のポテンシャル・エネルギーに他ならない。また、式 (13) より、 $|r| = r_s$ のとき $V(r) = 0$ となるから、 r_s は、(基準点でのポテンシャル・エネルギーの値をゼロとしたときの) 基準点における $|r|$ の値であることもわかる。特に、クーロン力や万有引力のように逆二乗則にしたがう力の場合、 $F(r)$ は r^{-2} に比例するので、ポテンシャル・エネルギーの基準点を無限遠に選ぶ、すなわち、 $r_s \rightarrow \infty$ とすると、式 (13) より、ポテンシャル・エネルギー $V(r)$ が $r^{-1} = |r|^{-1}$ に比例することが導かれる。

注 2) 電場と静電ポテンシャルが式 (5) と (9) のように与えられるのは、静止している点電荷の場合のみである。一般に、電荷が広がりを持って分布している場合には、電場や静電ポテンシャルは異なった形で与えられ得るし、さらに、電場が時間的に変化する場合には、静電ポテンシャルが存在しない。むやみに式 (5) や (9) を使えば良いというものではない。

3. (a) 原点を中心とする球面上の任意の点について、その点の位置ベクトルと、その点における球面の法線ベクトルは平行なので、 n_1 と n_2 はそれぞれ R_1 と R_2 に平行である。

外側の球面 S_1 上では、外向きの法線ベクトル、すなわち、領域 \mathcal{V} からそれ以外の領域へ向く法線ベクトルは、原点から遠ざかる向きなので、 n_1 は R_1 と同じ向きである。一方、内側の球面 S_2 上では、外向きの法線ベクトル、すなわち、領域 \mathcal{V} からそれ以外の領域へ向く法線ベクトルは原点へ近づく向きなので、 n_2 は R_2 と逆向きであり、したがって、 $-R_2$ と同じ向きである。(問題文中の図を参照。)

よって、単位ベクトルである n_1 と n_2 は、 R_1 と $-R_2$ をそれぞれの大きさ $|R_1|$ と $|-R_2| = |R_2|$ で割って、

$$n_1 = \frac{R_1}{|R_1|}, \quad n_2 = -\frac{R_2}{|R_2|} \quad (14)$$

と求められる。

注) ここでも見たように、原点を中心とする球面上の任意の点について、その点の位置ベクトルと、その点における球面の法線ベクトルは平行である。しかし、このことは、球面の幾何学的な性質から言えることであって、他の形状の曲面については、法線ベクトルと位置ベクトルが平行であるとは限らないので、むやみやたらに式 (14) のように外向き単位法線ベクトルを求めてはならない。当たり前のことではあるが、法線ベクトルは、与えられた曲面によって異なる。曲面の方程式 ($f(r) = \text{一定}$) が与えられている、もしくは、簡単に求められる場合には、法線ベクトルを求める最も単純で安直な方法は、 $\nabla f(r)$ を計算することである。あるいは、曲面の幾何学的性質をうまく利用して法線ベクトルを求められる場合もある。法線ベクトルが求められれば、それに平行で外向きのベクトルを、その大きさで割ることによって、外向き単位法線ベクトルを求めることができる。

- (b) S_1 上の任意の点の位置ベクトルは \mathbf{R}_1 であり、 S_1 の外向き単位法線ベクトルは \mathbf{n}_1 であるから、 S_1 を貫く電束は、

$$\int_{S_1} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1 dS \quad (15)$$

と書ける。クーロンの法則より、原点にある電荷量 e の点電荷が作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r}|^2} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \quad (16)$$

と与えられる(式(5)参照)ので、式(14)と(16)を代入し、 $\mathbf{R}_1/|\mathbf{R}_1|$ が単位ベクトルであることと、 $|\mathbf{R}_1|$ が S_1 の半径であり、したがって、一定であることを用いると、電束(15)は、

$$\int_{S_1} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \frac{e}{4\pi|\mathbf{R}_1|^2} \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|} \cdot \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|} dS = \frac{e}{4\pi|\mathbf{R}_1|^2} \int_{S_1} dS$$

と変形できる。 S_1 上での1の面積分は球面 S_1 の面積 $4\pi|\mathbf{R}_1|^2$ であるので、

$$\int_{S_1} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{e}{4\pi|\mathbf{R}_1|^2} \cdot 4\pi|\mathbf{R}_1|^2 = e$$

- (c) S_2 上の任意の点の位置ベクトルは \mathbf{R}_2 であり、 S_2 の外向き単位法線ベクトルは \mathbf{n}_2 であるから、 S_2 を貫く電束は、

$$\int_{S_2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_2} \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{R}_2) \cdot \mathbf{n}_2 dS$$

と書ける。式(14)と(16)を代入し、 $\mathbf{R}_2/|\mathbf{R}_2|$ が単位ベクトルであることと、 S_2 の半径 $|\mathbf{R}_2|$ が一定であることを用いて前問と同様に計算すると、

$$\int_{S_2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_2} \frac{e}{4\pi|\mathbf{R}_2|^2} \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|} \cdot \frac{\mathbf{R}_2}{|\mathbf{R}_2|} dS = - \frac{e}{4\pi|\mathbf{R}_2|^2} \int_{S_2} dS = -e$$

- (d) S 上の面積分は S_1 上の面積分と S_2 上の面積分に分けて実行することができるから、上問の結果を用いて、

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = e + (-e) = 0$$

注)この問題で考えた点電荷は、着目している領域 V には含まれておらず、このとき、 V の境界 S を貫く電束がゼロになっていることが上の計算で示された。すなわち、この問題の結果から、点電荷が着目している領域に含まれていない場合のガウスの法則を確認することができる。また、この問題における計算から、 S_1 を(V の内から外へ)貫く電束は正の値を、 S_2 を(V の外から内へ)貫く電束は負の値を取っており、それらの絶対値が等しいので、互いに相殺して、 S を貫く電束がゼロとなっていることがわかる。電束は電気力線の“本数”に比例するから、電気力線の“本数”は、点電荷から出ている電気力線が領域 V を外から内へ貫く時には負の値を、内から外へ貫く時には正の値を取ることができる。このように考えれば、この問題の場合に限らず、一般的に、点電荷が着目している領域に含まれていない時には、その点電荷から出ている電気力線が領域を外から内へ貫く回数と内から外へ貫く回数は等しいから、領域の境界を貫く電束の値がゼロになることが、直感的に理解できるであろう。

4. (a) 点電荷 A と点電荷 B それぞれの位置から見た任意の点の位置ベクトル $\mathbf{r} - \mathbf{r}_A$ と $\mathbf{r} - \mathbf{r}_B$ の成分表示はそれぞれ

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_A = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}_B = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と与えられるから、クーロンの法則より導いた点電荷の電場の表式 (5) より、点電荷 A が作る電場 $\mathbf{E}_A(\mathbf{r})$ と点電荷 B が作る電場 $\mathbf{E}_B(\mathbf{r})$ はそれぞれ

$$\mathbf{E}_A(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_A}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} x - \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{E}_B(\mathbf{r}) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|^2} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_B}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} x + \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と成分表示される。ふたつの点電荷が作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、電場の線形性より、 $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_A(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_B(\mathbf{r})$ によって与えられるから、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} x - \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} x + \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \quad (17)$$

また、点電荷の電場 (5) の線積分を与える静電ポテンシャルの表式 (9) から、点電荷 A が作る静電ポテンシャル $\phi_A(\mathbf{r})$ と点電荷 B が作る静電ポテンシャル $\phi_B(\mathbf{r})$ はそれぞれ、

$$\phi_A(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_A|} = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x - \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\phi_B(\mathbf{r}) = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_B|} = \frac{-e}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}}$$

と書け、これらは、電場 $\mathbf{E}_A(\mathbf{r})$ および $\mathbf{E}_B(\mathbf{r})$ とは、それぞれ $\mathbf{E}_A(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_A(\mathbf{r})$ と $\mathbf{E}_B(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_B(\mathbf{r})$ によって関係づいている。ここで $\phi_A(\mathbf{r}) + \phi_B(\mathbf{r})$ の勾配を考えると、

$$\nabla(\phi_A(\mathbf{r}) + \phi_B(\mathbf{r})) = \nabla\phi_A(\mathbf{r}) + \nabla\phi_B(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}_A(\mathbf{r}) - \mathbf{E}_B(\mathbf{r}) = -\mathbf{E}(\mathbf{r})$$

となるが、ふたつの点電荷が作る静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は、ふたつの点電荷が作る電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ によって関係づくはずだから、これらより、 $\phi(\mathbf{r})$ が $\phi(\mathbf{r}) = \phi_A(\mathbf{r}) + \phi_B(\mathbf{r})$ によって与えられることがわかる。したがって、ふたつの点電荷が作る静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ は、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{(x - \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x + \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}} \right] \quad (18)$$

と与えられる。

注) ここでは、ふたつの点電荷が作る静電ポテンシャルが、それぞれの点電荷が作る静電ポテンシャルの和で与えられることを見たが、これは、点電荷の数がいくつの場合でも成り立つ。すなわち、複数の点電荷が作る静電ポテンシャルは、それぞれの点電荷が作る静電ポテンシャルの和である。このことは、電場の線形性と、勾配の線形性 (和の勾配が、勾配の和に等しいこと) を考えれば、容易に理解できるであろう。

- (b) 微小量 ε に対して $(1 + \varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$ なので、式 (17) を微小量 d/r の 1 次までで近似すると、 $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ に注意して、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{(x \mp \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}} &= \left[x^2 \mp dx + \frac{d^2}{4} + y^2 + z^2 \right]^{-3/2} = \left[r^2 \mp dx + \frac{d^2}{4} \right]^{-3/2} \\ &= r^{-3} \left[1 \mp \frac{d}{r} \frac{x}{r} + \frac{d^2}{4r^2} \right]^{-3/2} \simeq \frac{1}{r^3} \left[1 \pm \frac{3}{2} \frac{d}{r} \frac{x}{r} \right] \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &\simeq \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \left[\left(1 + \frac{3}{2} \frac{d}{r} \frac{x}{r} \right) \begin{pmatrix} x - \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} - \left(1 - \frac{3}{2} \frac{d}{r} \frac{x}{r} \right) \begin{pmatrix} x + \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 3\frac{d}{r}\frac{x^2}{r} - d \\ 3\frac{d}{r}\frac{xy}{r} \\ 3\frac{d}{r}\frac{xz}{r} \end{pmatrix} = \frac{ed}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^3} \begin{pmatrix} 3x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

同様に、式 (18) を微小量 d/r の 1 次までで近似すると、

$$\frac{1}{\sqrt{(x \mp \frac{d}{2})^2 + y^2 + z^2}} = \left[r^2 \mp dx + \frac{d^2}{4} \right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{r} \left[1 \pm \frac{1}{2} \frac{d}{r} \frac{x}{r} \right]$$

より、

$$\phi(\mathbf{r}) \simeq \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \left[\left(1 + \frac{1}{2} \frac{d}{r} \frac{x}{r} \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \frac{d}{r} \frac{x}{r} \right) \right] = \frac{ed}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{r^3} \quad (20)$$

実際、式 (20) の $\phi(\mathbf{r})$ 勾配を取ることで、式 (19) の $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r})$ を満たしていることが確認できるであろう。

注) ここで用いた近似 $d \ll r$ の意味は、ふたつの点電荷間の距離 d が微小量と見なせるほど原点からの距離 r が大きいということであり、したがって、この問題では、ふたつの点電荷がほとんど同じ位置にあると見なせるくらい遠くにおける電場を調べていることになる。もし仮に、 $d = 0$ が近似なしに正しいとしたら、すなわち、ふたつの点電荷が本当に同じ位置 (原点) にあったとしたら、それぞれの点電荷の電荷量は絶対値が等しく符号が逆なので、正味ゼロの電荷量が原点にあることになり、よって、電場は至る所でゼロであったはずである。したがって、式 (19) の電場や式 (20) の静電ポテンシャルは、(無限遠から見て) わずかにでも点電荷の位置がずれていることによってできていることになる。これに対応して、式 (19) も式 (20) もそのずれ d に比例している。このことは、電場や静電ポテンシャルが位置 \mathbf{r} にどのように依存しているかにも反映されている。たとえば、簡単のために静電ポテンシャル (20) を見ると、位置に対する依存性は x/r^3 となっている。 $|x| \leq r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ だから、これより、静電ポテンシャル (20) は、無限遠で、高々 $1/r^2$ のようにふるまうことがわかる。(x 軸上では $y = z = 0$ だから $|x| = r$ であることに注意。) これは、原点にあるひとつの点電荷が作る静電ポテンシャルが $1/r$ のようにふるまうのと比較すると、より速く減少している。実際、式 (20) において、それ

それぞれの点電荷による $1/r$ の寄与（括弧内の 1 の項）は互いに相殺されていることがわかるであろう。この項は、近似展開における d/r のゼロ次の項であるので、 $d = 0$ としたときに得られる項で、上述したように、これが相殺するのは、正味ゼロの電荷量を原点に置いたことに対応する。結果として、式 (20) において生き残る寄与は、 d/r の一次以上の項であり、これらは、ふたつの点電荷が離れていることに由来する項である。このことから、この問題で求めた電場が、ふたつの点電荷が離れて置かれていることによってできているものであることが理解できるであろう。このように、絶対値が等しく符号が逆の電荷量を持つふたつの点電荷が離れて置かれているとき、この点電荷の対を電気双極子と呼ぶ。すなわち、この問題で求めた電場は、電気双極子が作る電場である。

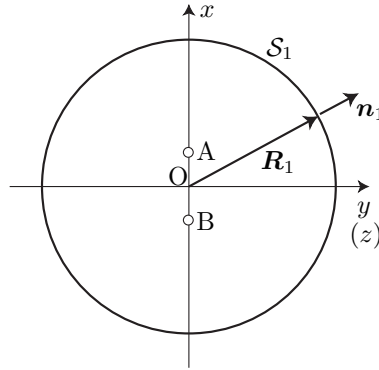
(c) S_1 上における任意の点の位置ベクトル \mathbf{R}_1 を

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

と成分表示すると、 S_1 は原点を中心とする球面なので、 S_1 の外向き単位法線ベクトル \mathbf{n}_1 は、

$$\mathbf{n}_1 = \frac{\mathbf{R}_1}{|\mathbf{R}_1|} = \frac{1}{R_1} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix}$$

と与えられる。



$d \ll R_1$ のときの電場を調べれば良いので、 $d \ll r$ という近似のもとでの電場 (19) に $\mathbf{r} = \mathbf{R}_1$ を代入し、これと \mathbf{n}_1 との内積を取ると、

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{ed}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1^3} \left[\frac{3X_1}{R_1^2} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \cdot \frac{1}{R_1} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} = \frac{ed}{2\pi\epsilon_0} \frac{X_1}{R_1^4}$$

ここで、

$$|X_1| \leq R_1 = \sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2}$$

が成り立つことを用いると、

$$|\mathbf{E}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1| = \frac{|ed|}{2\pi\epsilon_0} \frac{|X_1|}{R_1^4} \leq \frac{|ed|}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_1^3}$$

が導かれる。これは、電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ を用いると、

$$-\frac{|ed|}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \leq \mathbf{D}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1 \leq \frac{|ed|}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \quad (21)$$

と書ける。ところで、 R_1 は S_1 の半径なので、 S_1 上では一定で、このことを考慮して式 (21) の最左辺と最右辺の S_1 上での面積分を計算すると、 $R_1 \rightarrow \infty$ の極限で、

$$\oint_{S_1} \frac{\pm|ed|}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} dS = \frac{\pm|ed|}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \oint_{S_1} dS = \frac{\pm|ed|}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \cdot 4\pi R_1^2 = \frac{\pm 2|ed|}{R_1} \rightarrow 0$$

となる。よって、これらより、 $R_1 \rightarrow \infty$ の極限で、

$$\oint_{S_1} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{S_1} \mathbf{D}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1 dS = 0$$

したがって、半径無限大の球面 S_1 を貫く電束はゼロ。

注 1) この問題で、 $|\mathbf{E}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1|$ が $R_1 \rightarrow \infty$ の極限でゼロに近づくことのみをもって直ちに、 S_1 を貫く電束がゼロであると結論づけるのは誤りである。なぜなら、 S_1 の面積が $R_1 \rightarrow \infty$ の極限では発散するからである。電束がゼロであることを示すには、 $\mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}$ の S_1 上での面積分そのものがゼロになることを示す必要がある。実際、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が、原点にある点電荷が作る電場であった場合、 $|\mathbf{E}(\mathbf{R}_1) \cdot \mathbf{n}_1|$ は $1/R_1^2$ のようにゼロに近づくが、 S_1 を貫く電束はゼロではない。

注 2) この問題からも、ガウスの法則を確認することができる。すなわち、 S_1 によって囲まれる領域に含まれる電荷量は、点電荷 A の電荷量 e と B の電荷量 $-e$ の和だからゼロであり、これは、 S_1 を貫く電束に等しい。

(d) S_2 上での面積分の積分範囲を、 S_0 と半径を無限大にした S_+ に分け、 S_2 を貫く電束を

$$\oint_{S_2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_+} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_0} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (22)$$

のように、 S_+ を貫く電束と S_0 を貫く電束に分けて考える。

S_+ は S_1 の一部なので、 S_+ 上での電束密度は式 (21) を満たし、また、 $R_1 \rightarrow \infty$ の極限では

$$\int_{S_+} \frac{\pm|ed|}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} dS = \frac{\pm|ed|}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \int_{S_+} dS = \frac{\pm|ed|}{2\pi} \frac{1}{R_1^3} \cdot 2\pi R_1^2 = \frac{\pm|ed|}{R_1} \rightarrow 0$$

が成り立つので、前問と同様に考えて、

$$\int_{S_+} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (23)$$

一方、 S_0 上では $x = 0$ なので、 S_0 上の任意の点の位置ベクトルを \mathbf{R}_0 とすれば、 S_0 上での電場 $\mathbf{E}(\mathbf{R}_0)$ は、式 (17) より、

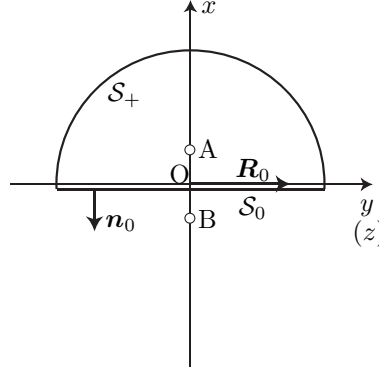
$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{R}_0) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{-ed}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2}^3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と成分表示できる。(S_0 上では $d \ll r$ が成り立たない点もあるので、式 (19) の電場の近似式をここで使うことはできない。) S_0 の外向き単位法線ベクトルを \mathbf{n}_0 とすると、 \mathbf{n}_0 は S_0 、すなわち、 $x = 0$ 面に垂直なので x 軸に平行で、 S_2 によって囲まれた領域からそれ以外の領域への向き、すなわち、 x 負の向きを向いている。よって、 \mathbf{n}_0 は、

$$\mathbf{n}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と成分表示でき、これらより、

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{n}_0 = \frac{ed}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2}^3}$$



S_0 上では y と z が独立に、ともに $-\infty$ から ∞ まで動くので、 S_0 を貫く電束は、

$$\int_{S_0} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_0} \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{R}_0) \cdot \mathbf{n}_0 dS = \frac{ed}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2}^3} dy dz \quad (24)$$

となる。ここで、式の簡潔さのため、 $a = d/2$ において (d は正なので a も正)、上の (係数 $ed/(4\pi)$ を除いた) 積分を実行してみる。まず z を固定して y で $-\infty$ から ∞ まで積分し、その後で z で $-\infty$ から ∞ まで積分することにする。すると、 y で積分する際には、固定した z は定数として扱って良いので、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + a^2}^3} dy dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}^3} \frac{\sqrt{z^2 + a^2}}{\sqrt{(y/\sqrt{z^2 + a^2})^2 + 1}^3} d\left(\frac{y}{\sqrt{z^2 + a^2}}\right) \right] dz \end{aligned}$$

と書き直し、 $\tan \varphi = y/\sqrt{z^2 + a^2}$ によって φ を導入して積分変数を y から φ へ変換すると、

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + a^2}^3} dy dz = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{z^2 + a^2} \frac{1}{\sqrt{\tan^2 \varphi + 1}^3} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \right] dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{z^2 + a^2} \cos \varphi d\varphi \right] dz = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2 + a^2} dz \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2} \frac{a}{(z/a)^2 + 1} d\left(\frac{z}{a}\right) = \frac{2}{a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(z/a)^2 + 1} d\left(\frac{z}{a}\right) \end{aligned}$$

さらに、 $\tan \psi = z/a$ によって ψ を導入して積分変数を z から ψ へ変換すると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{y^2 + z^2 + a^2}^3} dy dz = \frac{2}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{\tan^2 \psi + 1} \frac{d\psi}{\cos^2 \psi} = \frac{2}{a} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\psi = \frac{2\pi}{a}$$

$a = d/2$ と置いていたので、これを上に代入すると、式 (24) より、

$$\int_{S_0} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \frac{ed}{4\pi} \frac{4\pi}{d} = e \quad (25)$$

したがって、式 (22)、(23)、および、(25) より、

$$\oint_{S_2} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = e \quad (26)$$

注) S_2 に囲まれた領域の中には、点電荷 A は含まれているが、点電荷 B は含まれていない。したがって、この問題からは、着目している領域に含まれない電荷がある場合について、ガウスの法則を確認することができる。すなわち、 S_2 を貫く電束は、 S_2 に囲まれた領域に含まれる点電荷 A のみの電荷量 e に等しく、この領域に含まれない点電荷 B の電荷量はこれに寄与していない。(もし仮に、点電荷 B の電荷量 $-e$ が寄与するとしたら、式 (26) の右辺はゼロ。) ただし、このとき、式 (26) の電束密度 $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ は、ふたつの点電荷が作る電束密度であることに注意せよ。

5. 求める電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が z 軸を中心軸とする円筒の側面に垂直でなければならないことと、その大きさが $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ のみの関数であることから、 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(\varrho) \mathbf{n}_s \quad (27)$$

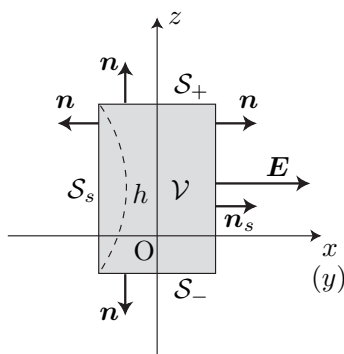
の形に書ける。ただし、 $E(\varrho)$ は求めるべき未知関数であり、 \mathbf{n}_s は、 z 軸を中心軸とする円筒の側面に垂直な単位ベクトルで、ここでは、その向きを ϱ が増加する向きに選ぶことにする。すると、問 1(b) と (c) で求めたように、 \mathbf{n}_s は、

$$\mathbf{n}_s = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (28)$$

と成分表示される。

式 (27) の $E(\varrho)$ を求めるために、 z 軸を中心軸とする、底面積 s 、高さ h の円柱の領域 \mathcal{V} を考え、 \mathcal{V} に対してガウスの法則を適用する。そのためには、 \mathcal{V} に含まれる電荷量と \mathcal{V} の境界 S を貫く電束を計算する必要がある。

まず、 σ が電荷線密度、すなわち、単位長さあたりに含まれる電荷量であり、これが一様であることから、高さ h の円柱である \mathcal{V} に含まれる電荷量は、直ちに、 σh であることがわかる。



次に、 S を貫く電束を計算するために、 S を、円柱 \mathcal{V} の上底面 S_+ 、下底面 S_- 、および、側面 S_s に分割する。積分範囲を分けることにより、 S 上の面積分は、 S_+ 上の面積分、 S_- 上の面積分、および、 S_s 上の面積分に分けて実行することができるから、

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_+} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_-} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_s} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (29)$$

ところで、円柱の底面は z 軸に垂直なので、 S_+ と S_- の外向き単位法線ベクトルは z 方向を向いている。したがって、これらの外向き単位法線ベクトルは電場 (27) に垂直であり、このことから、

$$\int_{S_+} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \int_{S_-} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (30)$$

一方、 S_s の外向き、すなわち、領域 \mathcal{V} からそれ以外の領域へ向く向きは、 z 軸からの距離 ϱ が増加する向きであり、 S_s は z 軸を中心軸とする円筒の側面であるから、 S_s の外向き単位法線ベクトルは式 (28) の \mathbf{n}_s に他ならない。式 (27) と $\mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_s = 1$ を用い、さらに、 S_s 上では ϱ 、したがって、 $E(\varrho)$ が一定であることと、 S_s の面積 (円筒の側面積) が $2\pi\varrho h$ であることを考慮すると、

$$\int_{S_s} \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_s} \varepsilon_0 E(\varrho) \mathbf{n}_s \cdot \mathbf{n}_s dS = \varepsilon_0 E(\varrho) \int_{S_s} dS = 2\pi\varrho h \varepsilon_0 E(\varrho) \quad (31)$$

と計算できる。よって、式 (29)、(30)、および、(31) より、 \mathcal{V} の境界 S を貫く電束は、

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = 2\pi\varrho h \varepsilon_0 E(\varrho) \quad (32)$$

ガウスの法則より、電束 (32) と \mathcal{V} に含まれる電荷量 σh が等しいので、

$$\sigma h = 2\pi\varrho h \varepsilon_0 E(\varrho)$$

が成り立ち、よって、

$$E(\varrho) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varrho}$$

が得られる。これを式 (27) に代入し、 $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$ と式 (28) を用いることにより、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0\varrho} \mathbf{n}_s = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2 + y^2}} \mathbf{n}_s = \frac{\sigma}{2\pi\varepsilon_0(x^2 + y^2)} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求められる。

6. (a) $r < a$ のとき、半径 r の球は導体球内に含まれている。ところで、導体内の静電場はゼロだから、半径 r の球面を貫く電束はゼロ。したがって、ガウスの法則より、半径 r の球の内部に含まれる電荷量もゼロ。このことは、 $r < a$ であればどんな r についても成り立ち、よって、 $r \rightarrow a$ の極限でも成り立つ。したがって、導体球内部には電荷は存在せず、電荷は $r = a$ 、すなわち、導体球の表面のみに分布していなければならない。

注) ここでの結論を導くにあたって、導体が球であることは全く本質的でないことに気づくであろう。実際、ここで展開した議論は、導体がどんなに歪な形をしていても同様に繰り返すことができ、導体内部には静止した電荷が存在できないことが示される。すなわち、どのような導体についても、静止した電荷はその表面上に分布していなければならない。

- (b) 導体球に分布した電荷が作る電場は、球対称、すなわち、任意の位置 \mathbf{r} における電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は \mathbf{r} に平行で、その大きさは $r = |\mathbf{r}|$ のみの関数であるはずなので、 $E(r)$ は、求めるべき未知関数 $E(r)$ を用いて、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (33)$$

と書ける。ただし、導体内部の電場はゼロだから、 $r < a$ に対しては $E(r) = 0$ であることが既にわかっている。 $r > a$ に対して $E(r)$ を求めるために、原点を中心とする半径 $r (> a)$ の球の

領域を \mathcal{V} 、 \mathcal{V} の境界を S とし、 S の外向き単位法線ベクトルを \mathbf{n} とする。 S は原点を中心とする球面なので、 \mathbf{n} は、 S 上の任意の点の位置ベクトル \mathbf{r} と同じ向きで

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

と与えられる。 S 上では r 、よって、 $E(r)$ は一定なので、 S を貫く電束は、

$$\oint_S \mathbf{D}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \varepsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = \oint_S \varepsilon_0 E(r) \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS = \varepsilon_0 E(r) \oint_S dS = 4\pi r^2 \varepsilon_0 E(r)$$

と計算される。ガウスの法則より、これが \mathcal{V} に含まれる電荷量、すなわち、導体球が持つ電荷量 Q に等しいので、以上より、 $r > a$ に対しては、 $E(r)$ が、

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

と導かれる。よって、これを式 (33) に代入し、 $r < a$ に対しては電場がゼロであることも考慮して、

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} & r > a \end{cases} \quad (34)$$

なお、この結果から明らかなように、電場は $r = a$ で不連続である。

注1) この問題の結果から、導体球の外部に作られる電場が、それが持つ電荷量 Q がすべて原点に集まっていると考えたときの電場、すなわち、電荷量 Q の点電荷が作る電場と同じであることに気づくであろう。導体球の電荷はその表面にしか分布していないから、導体球内部における電場がゼロであることも考え合わせると、原点からの距離が r である位置における電場は、半径 r の球の内側に含まれる電荷量がすべて原点に集中していると考えたときの電場に等しいことがわかる。このことは、導体球に限らず、球対称性を持つ電荷分布については常に成り立つ性質である。(各自、ガウスの法則を用いて証明してみよ。なお、導体でなければ、内部に電荷が分布していても良い。) ただし、このとき、球対称性が重要で、球対称からずれた電荷分布については、この性質が成り立つとは限らない。

注2) この問題においては球対称性から直ちに明らかであるが、一般的に、どのような形の導体についても、導体表面上(ただし、内部では電場はゼロなので、表面外側)において、電場はその表面に垂直である。なぜならば、導体上では静電ポテンシャルは一定なので、特に、その表面上でも静電ポテンシャルは一定であり、電場は等電位面(静電ポテンシャルが一定の面)に垂直であるからである。

- (c) 静電ポテンシャルを求めるには、力学において保存力からポテンシャル・エネルギーを求めるのと同じ要領で、電場を基準点から任意の位置まで線積分すれば良い。すなわち、基準点である無限遠の点の位置ベクトルを \mathbf{r}_∞ 、基準点から任意の位置 \mathbf{r} までの任意の曲線を C とすれば、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = -\phi(\mathbf{r}) + \phi(\mathbf{r}_\infty)$$

であり、基準点における静電ポテンシャルの値 $\phi(\mathbf{r}_\infty)$ をゼロにするのだから、

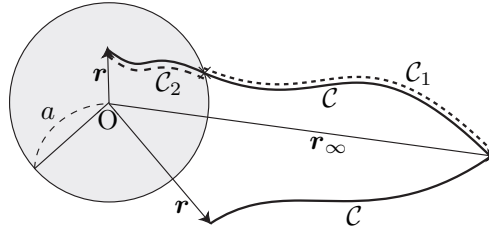
$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = -\phi(\mathbf{r}) \quad (35)$$

より、任意の位置における静電ポテンシャル $\phi(\mathbf{r})$ を計算することができる。(積分変数と被積分関数の中の \mathbf{r}' は C 上の任意の点なので、 C の終点である \mathbf{r} と区別するためにプライムをつけ

である。)ところで、導体内部の電場はゼロであるから、位置 r が導体内部の点である場合、曲線 C のうち導体内部に含まれる部分に沿った電場の線積分はゼロである。すなわち、この場合、曲線 C は導体表面との交点を持つから、 C をこの交点で分割して、無限遠からこの交点までの部分を C_1 、交点から r の点までの部分を C_2 とすると、線積分の積分範囲を分けて、式 (35) の左辺を

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \int_{C_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \int_{C_2} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \int_{C_1} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

によって計算することができる。つまり、導体内部における静電ポテンシャルは、基準点から導体表面までの電場の線積分によって与えられる。したがって、式 (35) において r を導体外部の点の位置ベクトルに選んで、導体外部、すなわち、 $r > a$ における静電ポテンシャル $\phi(r)$ を求めておけば、 r を導体表面上の点に選ぶ、すなわち、 $r \rightarrow a$ とすることによって導体内部の静電ポテンシャルの値を求めることができるわけである。



導体外部における静電ポテンシャルを求めるために、 r を導体外部の任意の点として、式 (35) の左辺に式 (34) の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ を代入して線積分を実行すると、ここでも式 (11) を用いて積分変数を $r' = |\mathbf{r}'|$ に変換し、 r での積分の下限と上限にそれぞれ C_1 の始点と終点における r の値を代入して、

$$\int_C \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = \int_C \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r'^2} \frac{\mathbf{r}'}{r'} \cdot d\mathbf{r}' = \int_{\infty}^{|r|} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r'^2} dr' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|r|} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \quad (36)$$

式 (35) と (36) より、導体外部、すなわち、 $r > a$ では、静電ポテンシャル $\phi(r)$ が

$$\phi(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$$

と与えられることがわかる。上で述べたように、ここで $r \rightarrow a$ としたものが導体内部における静電ポテンシャルの値に等しいので、結局、静電ポテンシャル $\phi(r)$ は、

$$\phi(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a} & r < a \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} & r \geq a \end{cases}$$

と求められる。なお、上の導出から明らかなように、静電ポテンシャルは $r = a$ で連続である。