基礎物理学 B 演習問題 2

1. スカラー場 $f(\boldsymbol{r})$ が以下のように与えられる場合について、$f(\boldsymbol{r})$ の勾配 $\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r})$、および、$\boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r})$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求め、成分表示せよ。また、$f(\boldsymbol{r}) =$ 一定 面がどのような面であるか答えよ。

   (a) $f(\boldsymbol{r}) = z$

   (b) $f(\boldsymbol{r}) = \sqrt{x^2 + y^2}$

   (c) $f(\boldsymbol{r}) = x^2 + y^2$

   (d) $f(\boldsymbol{r}) = \dfrac{1}{|\boldsymbol{r}|}$

2. 位置 $\boldsymbol{r}_0$ に静止している電荷量 e の点電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ に関して以下の問に答えよ。ただし、真空の誘電率を ε_0 とする。

   (a) クーロンの法則をもとに、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を、e と $\boldsymbol{r}_0$ を用いて書き表せ。

   (b) 位置が $\boldsymbol{r}$ から微小変位ベクトル $d\boldsymbol{r}$ だけ変位するときの、任意の関数 $f(\boldsymbol{r})$ の微小変化量 df が $df = \boldsymbol{\nabla} f(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r}$ と与えられることを用いて、

   $$R(\boldsymbol{r}) \equiv |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

   の微小変化量 dR が

   $$dR = \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} \cdot d\boldsymbol{r}$$

   と書けることを示せ。ただし、x_0、y_0、z_0 は $\boldsymbol{r}_0$ の各成分、すなわち、

   $$\boldsymbol{r}_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

   である。

   (c) 電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の、任意の曲線 $\mathcal{C}$ に沿った線積分が

   $$\int_{\mathcal{C}} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{R^2}\, dR \tag{1}$$

   と変形できることを示せ。ただし、$\mathcal{C}$ の始点の位置を $\boldsymbol{r}_1$、終点の位置を $\boldsymbol{r}_2$ とすると、$R_1 \equiv R(\boldsymbol{r}_1) = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_0|$、$R_2 \equiv R(\boldsymbol{r}_2) = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_0|$ である。

   (d) 静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ が

   $$\phi(\boldsymbol{r}) \equiv \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|} \tag{2}$$

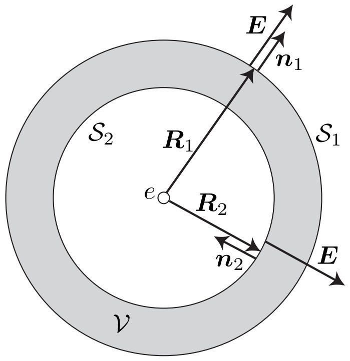
   と与えられることを既知とする。この $\phi(\boldsymbol{r})$ を用いて、式 (1) の線積分を表せ。

(e) 静電ポテンシャル (2) の勾配 $\nabla\phi(\boldsymbol{r})$ を計算することにより、

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\phi(\boldsymbol{r})$$

が成り立っていることを示せ。

3. 原点に静止している電荷量 e の点電荷が作る電場を考える。原点を中心とする外側の球面 $\mathcal{S}_1$ と内側の球面 $\mathcal{S}_2$ に囲まれた領域 $\mathcal{V}$ に着目すると、$\mathcal{V}$ の境界 $\mathcal{S}$ は、$\mathcal{S}_1$ と $\mathcal{S}_2$ から構成されている。$\mathcal{S}$ の外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ は、$\mathcal{S}_1$ 上と $\mathcal{S}_2$ 上では向きが異なるので、$\mathcal{S}_1$ 上における $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n}_1$、$\mathcal{S}_2$ 上における $\boldsymbol{n}$ を $\boldsymbol{n}_2$ と書いて区別することにする。$\mathcal{S}_1$ 上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_1$、$\mathcal{S}_2$ 上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_2$ とするとき、以下にしたがって、$\mathcal{S}$ を貫く電束を計算せよ。ただし、点電荷が作る電場を求めるためにクーロンの法則を用いて良い。



(a) $\boldsymbol{n}_1$ と $\boldsymbol{n}_2$ を、それぞれ $\boldsymbol{R}_1$ と $\boldsymbol{R}_2$ を用いて表せ。($\boldsymbol{n}_2$ の向きに注意すること。)

(b) $\mathcal{S}_1$ を貫く電束を計算せよ。

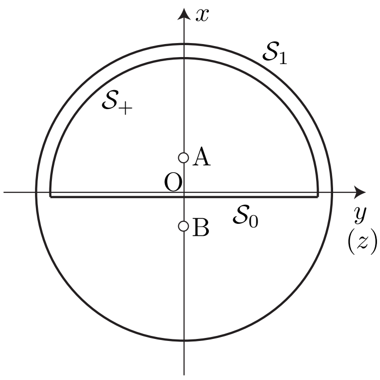
(c) $\mathcal{S}_2$ を貫く電束を計算せよ。

(d) $\mathcal{S}$ 上の面積分は、積分範囲を分けることにより、$\mathcal{S}_1$ 上の面積分と $\mathcal{S}_2$ 上の面積分に分けて実行することができる。このことに注意して、$\mathcal{S}$ を貫く電束を計算せよ。

4. 距離 d だけ離れて静止している電荷量 e の点電荷 A と電荷量 $-e$ の点電荷 B が作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ について考える。点電荷 A の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_A$ と点電荷 B の位置ベクトル $\boldsymbol{r}_B$ がそれぞれ

$$\boldsymbol{r}_A = \begin{pmatrix} \dfrac{d}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{r}_B = \begin{pmatrix} -\dfrac{d}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と成分表示される座標系を用いて、以下の問に答えよ。ただし、d は正であるとし、真空の誘電率を ε_0 とする。



(a) クーロンの法則を用いて、ふたつの点電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求め、e と d を用いて表せ。($\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は成分表示せよ。)

(b) 無限遠における $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と $\phi(\boldsymbol{r})$ のふるまいを調べたい。そのために、原点からの距離 $r = |\boldsymbol{r}|$ が十分大きく、$d \ll r$ が成り立つときに、d/r の一次までで $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ と $\phi(\boldsymbol{r})$ を近似せよ。

(c) 原点を中心とする球面を $\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_1$ 上の任意の点の位置ベクトルを $\boldsymbol{R}_1$ とし、$R_1 \equiv |\boldsymbol{R}_1|$ とする。$\mathcal{S}_1$ によって囲まれた領域からそれ以外の領域への向きを外向きとして、$\mathcal{S}_1$ の外向き単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_1$ とすると、$d \ll R_1$ のときに

$$\left|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}_1)\cdot\boldsymbol{n}_1\right| \leq \frac{|ed|}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1^3}$$

が成り立つことを示し、これを用いて(ガウスの法則を用いずに)、$R_1 \to \infty$ の極限で $\mathcal{S}_1$ を貫く電束を計算せよ。

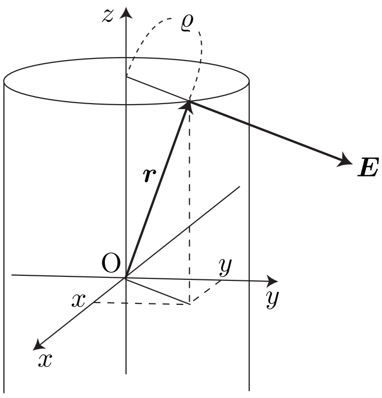
(d) 前問の球面 $\mathcal{S}_1$ の $x \geq 0$ の部分(半球面)を $\mathcal{S}_+$ とし、$x = 0$ 面(すなわち、$y - z$ 平面で、これは、半径無限大の円盤(内部を含む円)と同じ)を $\mathcal{S}_0$ とする。$\mathcal{S}_0$ と半径を無限大としたときの $\mathcal{S}_+$ からなる閉曲面を $\mathcal{S}_2$ とするとき、(ガウスの法則を用いずに)$\mathcal{S}_2$ を貫く電束を計算せよ。ただし、$\mathcal{S}_2$ によって囲まれた領域からそれ以外の領域への向きを外向きとし、a を正の定数として、

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{y^2+z^2+a^2}^{\,3}}\,dy\,dz = \frac{2\pi}{a}$$

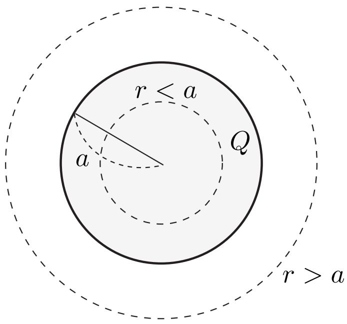
が成り立つことを用いて良い。(できればこれも導出せよ。)

5. z 軸に沿った無限に長い直線上に一様な電荷線密度 σ で分布している静止した電荷を考え、この電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めたい。この電荷分布は上下を反転($x - y$ 平面に関する反転)をしても変わらないから、その電荷によって作られる電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ も、このような反転をしても変わらないはずである。このことから、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は、z 軸に垂直、すなわち、$z =$ 一定 面に平行で、この平面内で z 軸を中心に放射状、つまり、下図のように、z 軸を中心軸とする円筒の側面に垂直でなければならないことがわかる。(もし、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ が他の向きを向いていたすると、上で述べた反転をすると電場の向きが変わってしまう。)さらに、z 軸を中心として回転しても、z 軸に沿って動いても、電荷分布、したがって、電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は変わらないので、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$

の大きさは z 軸からの距離 $\varrho \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ のみの関数でなければならない。この対称性を考慮して、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。



6. 原点を中心とする半径 a の導体球に電荷量 Q の電荷が分布しているときに、この電荷が作る静電場を考える。原点を中心とする半径 r の球の領域にガウスの法則を適用することによって、以下の問に答えよ。ただし、真空の誘電率を ε_0 とする。



(a) $r < a$ の場合に、半径 r の球の内部に含まれる電荷量を求めよ。また、このことから、導体球のどのような場所に電荷が分布していなければならないかを答えよ。

(b) 導体球は、原点に関して対称、すなわち、原点を中心とするどのような回転をしても変わらないし、さらに、原点を通るどのような平面に関する反転をしても変わらないので、電荷分布も、したがって、電場もこれらの対称性にしたがうはずである。このことから、任意の位置 $\boldsymbol{r}$ における電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ は $\boldsymbol{r}$ に平行で、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ の大きさは $r = |\boldsymbol{r}|$ のみの関数でなければならないことがわかる。この対称性を考慮して、導体球に分布している電荷が作る電場 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ を求めよ。

(c) 導体球に分布している電荷が作る静電ポテンシャル $\phi(\boldsymbol{r})$ を求めよ。ただし、無限遠を静電ポテンシャルの基準点とし、この基準点における静電ポテンシャルの値をゼロとせよ。