工学系のモデリングA演習問題

第5回 2015年5月13日

担当: 電子物理システム学科 谷井孝至

問1 2階線形非斉次微分方程式

$$10\frac{d^2x}{dt^2} - 9\frac{dx}{dt} + 2x = 29\cos\left(\frac{1}{5}t\right) \tag{1}$$

の解を以下の指示にしたがって導け．

(a) 斉次微分方程式 $10\frac{d^2x}{dt^2} - 9\frac{dx}{dt} + 2x = 0$ の一般解 $x_t(t)$ を求めよ．

特性方程式: $10\lambda^2 - 9\lambda + 2 = 0$ を解いて，$\lambda = \frac{1}{2}$，$\frac{2}{5}$．したがって，斉次方程式の一般解: $x_t(t) = C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{\frac{2}{5}t}$.

(b) 非斉次微分方程式 (1) の特解を $x_s(t) = A\sin\left(\frac{1}{5}t\right) + B\cos\left(\frac{1}{5}t\right)$ とおいて，式 (1) に代入することにより求めてみよ．

$x_s(t) = A\sin\left(\frac{1}{5}t\right) + B\cos\left(\frac{1}{5}t\right)$，$\frac{dx_s}{dt} = \left(\frac{1}{5}\right)A\cos\left(\frac{1}{5}t\right) - \left(\frac{1}{5}\right)B\sin\left(\frac{1}{5}t\right)$，および $\frac{d^2x_s}{dt^2} = -\left(\frac{1}{25}\right)A\sin\left(\frac{1}{5}t\right) - \left(\frac{1}{25}\right)B\cos\left(\frac{1}{5}t\right)$ を，$10\frac{d^2x}{dt^2} - 9\frac{dx}{dt} + 2x = 29\cos\left(\frac{1}{5}t\right)$ に代入して，

$$\begin{aligned}10\cdot\left[-\left(\frac{1}{25}\right)A\sin\left(\frac{1}{5}t\right) - \left(\frac{1}{25}\right)B\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\right]&\\ -9\cdot\left[\left(\frac{1}{5}\right)A\cos\left(\frac{1}{5}t\right) - \left(\frac{1}{5}\right)B\sin\left(\frac{1}{5}t\right)\right]&\\ +2\cdot\left[A\sin\left(\frac{1}{5}t\right) + B\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\right] &= 29\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\end{aligned}$$

$$\left[\frac{8}{5}A + \frac{9}{5}B\right]\sin\left(\frac{1}{5}t\right) + \left[-\frac{9}{5}A + \frac{8}{5}B\right]\cos\left(\frac{1}{5}t\right) = 29\cos\left(\frac{1}{5}t\right)$$

両辺を比較すると，$8A + 9B = 0$，かつ，$-9A + 8B = 145$．これを解いて，$A = -9$，$B = 8$．したがって，非斉次微分方程式 (1) の特解: $x_s(t) = -9\sin\left(\frac{1}{5}t\right) + 8\cos\left(\frac{1}{5}t\right)$.

(c) (b) とは異なる方法で非斉次微分方程式 (1) の特解を求めてみよう．まず、非斉次微分方程式 (1) の特解 $x_s(t)$ を複素数値関数に拡張する．これにより、微分方程式 (1) を解くことは、微分方程式

$$10\frac{d^2x}{dt^2} - 9\frac{dx}{dt} + 2x = 29e^{\frac{1}{5}it} \quad \left[= 29\left\{\cos\left(\frac{1}{5}t\right) + i\sin\left(\frac{1}{5}t\right)\right\}\right]$$

を解くことに相当する。この式の特解 $x_s(t) = \alpha e^{\frac{1}{5}it}$ $\left[= \alpha\left\{\cos\left(\frac{1}{5}t\right) + i\sin\left(\frac{1}{5}t\right)\right\}\right]$ (α: 複素定数) を求め、求めた $x_s(t)$ の実部をとることによって，非斉次微分方程式 (1) の特解を導いてみよ．
(指導書 4.5.3 節を参考にせよ．答えは (b) と一致するが，複素数値関数に拡張した (c) の計算の方がずっと楽であることが分かるであろう).

$x_s(t) = \alpha e^{\frac{1}{5}it}$ とおくと，$\frac{dx_s}{dt} = \frac{1}{5}i\alpha e^{\frac{1}{5}it}$，$\frac{d^2x_s}{dt^2} = -\frac{1}{25}\alpha e^{\frac{1}{5}it}$．これを元の式に代入して，

$$10\cdot\left(-\frac{1}{25}\right)\alpha e^{\frac{1}{5}it} - 9\cdot\left(\frac{1}{5}\right)i\alpha e^{\frac{1}{5}it} + 2\alpha e^{\frac{1}{5}it} = 29e^{\frac{1}{5}it}$$

$\left(\frac{8}{5}-\frac{9}{5}i\right)\alpha=29$ より，$\alpha=8+9i$．したがって，

$$\begin{aligned} x_s(t) &= (8+9i)e^{\frac{1}{5}it} \\ &= (8+9i)\left[\cos\left(\frac{1}{5}t\right)+i\sin\left(\frac{1}{5}t\right)\right] \\ &= \left[-9\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+8\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\right]+i\left[8\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+9\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\right] \end{aligned}$$

$29\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\to 29e^{\frac{1}{5}it}$ と書き換えたので，$x_s(t)=\alpha e^{\frac{1}{5}it}$ の実部 ($\mathcal{R}e\{\,\}$ という記号を導入) を取れば非斉次微分方程式 (1) の特解となる．

$$\begin{aligned} \mathcal{R}e\left\{x_s(t)\right\} &= \mathcal{R}e\left\{\alpha e^{\frac{1}{5}it}\right\} \\ &= \mathcal{R}e\left\{\left[-9\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+8\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\right]+i\left[8\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+9\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\right]\right\} \\ &= -9\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+8\cos\left(\frac{1}{5}t\right) \end{aligned}$$

(d) (a) および (b) (または (c)) の結果をつかって非斉次微分方程式 (1) の一般解を示せ．

非斉次微分方程式 (1) の一般解:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_t(t)+x_s(t) \\ &= C_1e^{\frac{1}{2}t}+C_2e^{\frac{2}{5}t}-9\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+8\cos\left(\frac{1}{5}t\right) \end{aligned}$$

(e) 初期値問題 $x(0)=\frac{dx}{dt}(0)=0$ を解いて，(d) で求めた一般解に含まれる 2 つの任意定数を定めよ．

$x(t)=C_1e^{\frac{1}{2}t}+C_2e^{\frac{2}{5}t}-9\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+8\cos\left(\frac{1}{5}t\right)$ より，$x(0)=C_1+C_2+8=0$．したがって，$C_1+C_2=-8$．

$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{2}C_1e^{\frac{1}{2}t}+\frac{2}{5}C_2e^{\frac{2}{5}t}-\frac{9}{5}\cos\left(\frac{1}{5}t\right)-\frac{8}{5}\sin\left(\frac{1}{5}t\right)$ より，$\frac{dx}{dt}(0)=\frac{1}{2}C_1+\frac{2}{5}C_2-\frac{9}{5}=0$．したがって，$\frac{1}{2}C_1+\frac{2}{5}C_2=\frac{9}{5}$．

$C_1+C_2=-8$ と $\frac{1}{2}C_1+\frac{2}{5}C_2=\frac{9}{5}$ を連立して解くと，$C_1=50$，$C_2=-58$ と定まる．

(f) 非斉次微分方程式 $10\frac{d^2x}{dt^2}-9\frac{dx}{dt}+2x=29\cos\left(\frac{1}{5}t\right)+29\sin\left(\frac{1}{5}t\right)$ の一般解を求めよ ((c) の方法と重ね合わせの原理を (d) の結果に適用してみよ)．

まず，非斉次微分方程式 $10\frac{d^2x}{dt^2}-9\frac{dx}{dt}+2x=29\sin\left(\frac{1}{5}t\right)$ の特解を求める．(c) の方法にしたがって，$29\sin\left(\frac{1}{5}t\right)\to 29e^{\frac{1}{5}it}$ と書き直し，この特解 $x_s(t)=\alpha e^{\frac{1}{5}it}$ の虚部 ($\mathcal{I}m\{\,\}$ という記号を導入) を取ればよい．

$$\begin{aligned} \mathcal{I}m\left\{x_s(t)\right\} &= \mathcal{I}m\left\{\alpha e^{\frac{1}{5}it}\right\} \\ &= \mathcal{I}m\left\{\left[-9\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+8\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\right]+i\left[8\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+9\cos\left(\frac{1}{5}t\right)\right]\right\} \\ &= 8\sin\left(\frac{1}{5}t\right)+9\cos\left(\frac{1}{5}t\right) \end{aligned}$$

(d) の結果と重ね合わせの原理より，非斉次微分方程式 $10\frac{d^2x}{dt^2} - 9\frac{dx}{dt} + 2x = 29\cos\left(\frac{1}{5}t\right) + 29\sin\left(\frac{1}{5}t\right)$ の一般解は，

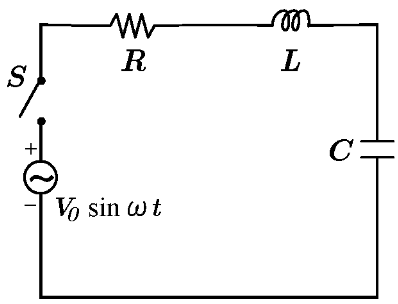
$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{\frac{2}{5}t} - 9\sin\left(\frac{1}{5}t\right) + 8\cos\left(\frac{1}{5}t\right) + 8\sin\left(\frac{1}{5}t\right) + 9\cos\left(\frac{1}{5}t\right) \\ &= C_1 e^{\frac{1}{2}t} + C_2 e^{\frac{2}{5}t} - \sin\left(\frac{1}{5}t\right) + 17\cos\left(\frac{1}{5}t\right) \end{aligned}$$

問 2 2 階線形非斉次微分方程式 $\frac{d^2\psi}{dt^2} + 6\frac{d\psi}{dt} + 9\psi = 2e^{-3t}$ の特解を求めよ．

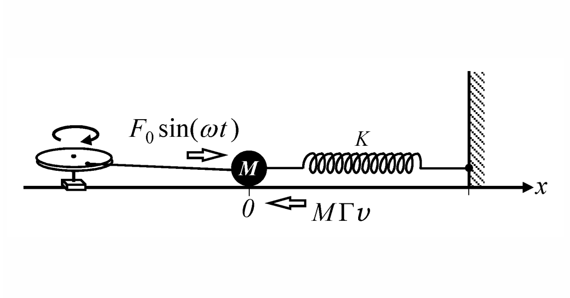
特解 : $\psi_3(t) = t^2 e^{-3t}$.

ちなみに、一般解 : $\psi(t) = e^{-3t}(C_1 + C_2 t + t^2)$.

問 3



(a)



(b)

(a) 上図 (a) のように，コイル (自己誘導: L)，抵抗 (抵抗値: R)，コンデンサ (静電容量: C) とスイッチ S からなる LRC 回路がある．時刻 $t = 0$ において S を閉じて回路に交流電圧 $V_0 \sin(\omega t)$ を印加した．Kirchhoff の電圧則から，$t > 0$ におけるコンデンサ (C) の電荷 $q(t)$ に対する微分方程式を書き下せ．

$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = V_0 \sin(\omega t)$

(b) 上図 (b) のように，質量 M のおもりがバネ定数 K のバネを介して壁に固定されている．質点の位置 $x(t)$ はバネが自然長の場所を原点 ($x = 0$) にとる．おもりと床との摩擦から生ずる抵抗力はおもりの速度に比例し，大きさ $M\Gamma v(t)$ とする．さらに，おもりは回転台にも固定されており，回転台が回転すると，おもりに $F_0 \sin(\omega t)$ なる強制力を与えるようになっている．Newton の運動方程式である $x(t)$ の微分方程式を書き下せ．

$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - M\Gamma\frac{dx}{dt} + F_0 \sin(\omega t)$

(c) (a), (b) の微分方程式はまとめて次の形に表される．

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\frac{dx}{dt} + {\omega_0}^2 x = f_0 \sin(\omega t) \tag{2}$$

それぞれの場合において，定数 γ，${\omega_0}^2$，f_0 はどのように与えられているか．

	(a)	(b)
$x(t)$	$q(t)$	$x(t)$
γ	$\frac{R}{L}$	Γ
ω_0^2	$\frac{1}{LC}$	$\frac{K}{M}$
f_0	$\frac{V_0}{L}$	$\frac{F_0}{M}$

(d) 未知関数 $x(t)$ に関する 2 階線形非斉次微分方程式 (2) について，$f_0 = 0$ とした斉次方程式の一般解を求めよ．ただし，γ は比較的小さく，$\omega_0^2 > \frac{\gamma^2}{4}$ とする（記号 $\Omega_0 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}$ を用いよ）．

$x_t(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(C_1 e^{i\Omega_0 t} + C_2 e^{-i\Omega_0 t}\right)$ より、$x_t(t) = e^{-\frac{\gamma t}{2}}\left(C_1 \sin(\Omega_0 t) + C_2 \cos(\Omega_0 t)\right)$.

(e) (d) の一般解において，解の長時間経過後（$t \to \infty$）の振舞いを述べよ．

C_1, C_2 にかかわらず（初期条件に関係なく），減衰因子 $e^{-\frac{\gamma t}{2}}$ のため，$x_t(t) \to 0 \quad (t \to \infty)$.

以上.