工学系のモデリングA 演習問題

第4回 (第3章はじめ〜3.2.3節「斉次方程式の一般解」まで)

2015年4月29日

問1 次の解の組が区間 $-\infty < x < +\infty$ で線形独立かどうか調べよ。

(1) $e^{\lambda_1 x}, \quad e^{\lambda_2 x}$ （ただし $\lambda_1 \neq \lambda_2$）

(2) $\sin(\pi x), \quad \sin(-\pi x)$

(3) $e^{\kappa x}, \quad xe^{\kappa x}$

解答

(1) $e^{\lambda_1 x}\dfrac{de^{\lambda_2 x}}{dx} - \dfrac{de^{\lambda_1 x}}{dx}e^{\lambda_2 x} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$ ∴線形独立

(2) $\sin(\pi x)\dfrac{d\sin(-\pi x)}{dx} - \dfrac{d\sin(\pi x)}{dx}\sin(-\pi x) = 0.$ ∴線形従属

(3) $e^{\kappa x}\dfrac{dxe^{\kappa x}}{dx} - \dfrac{de^{\kappa x}}{dx}xe^{\kappa x} = e^{2\kappa x} \neq 0.$ ∴線形独立

問2 次の微分方程式の特性根を求めよ。

(1) $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} - 15y = 0$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$

解答

(1) $\lambda_{1,2} = -\dfrac{3}{2}, \ 5$

(2) $\lambda_{1,2} = 1 \pm 2i$

(3) $\lambda_{1,2} = -2$ （重根）

問３ 問２ (1)〜(3) の微分方程式の一般解を求めよ。

解答

(1) $y(x) = C_1 e^{-3x/2} + C_2 e^{5x}$

(2) $y(x) = e^x \{C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x\}$

(3) $y(x) = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$

問４ 問２および問３の結果を用いて、次の微分方程式の初期値問題を解け。

(1) $2\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} - 15y = 0$ 　　初期条件：$x = 0$ のとき、$y = 0$ かつ $\dfrac{dy}{dx} = 13$

(2) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dy}{dx} + 5y = 0$ 　　初期条件：$x = 0$ のとき、$y = 1$ かつ $\dfrac{dy}{dx} = -1$

(3) $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 4\dfrac{dy}{dx} + 4y = 0$ 　　初期条件：$x = 0$ のとき、$y = 2$ かつ $\dfrac{dy}{dx} = -1$

解答

(1) $C_1 = -2,\ C_2 = 2 \quad \therefore\ y(x) = -2e^{-3x/2} + 2e^{5x}$

(2) $C_1 = 1,\ C_2 = -1 \quad \therefore\ y(x) = e^x \{\cos 2x - \sin 2x\}$

(3) $C_1 = 2,\ C_2 = 3 \quad \therefore\ y(x) = 2e^{-2x} + 3xe^{-2x}$

問５ 以下の問いに答えよ。

(1) 複素数値の関数 $z(x)$ について微分方程式 $\dfrac{d^2z}{dx^2} - 2\dfrac{dz}{dx} + 5z = 0$ の一般解を求めよ。

(2) (1) で求めた複素数解 $z(x)$ の実部および虚部を、Euler の公式を用いて求めよ。

(3) (2) で求めた解の実部および虚部が、与えられた微分方程式の解になっていることを確かめよ。

解答

(1) $z(x) = e^x \{Ae^{+2ix} + Be^{-2ix}\}$ ただし A、B は複素定数。

(2) $A = A_R + iA_I$、$B = B_R + iB_I$ とおくと、実部は $e^x(A_R + B_R)\cos 2x + (B_I - A_I)\sin 2x$、虚部は $e^x(A_I + B_I)\cos 2x + (A_R - B_R)\sin 2x$ 。

(3) 微分方程式に実際に代入して等号が成り立つことを確かめればよい。また、実部および虚部が問 3 (2) で求めた一般解と一致することからも明らか。

以上。