物理

《第 1 問解答》

(1) 物体についての運動方程式

$$m\begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu N \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -kx \\ 0 \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{aligned} ma &= \mu mg - 2kx \\ &= -2k\left(x - \frac{\mu mg}{2k}\right) \end{aligned}$$

ここで，$x - \frac{\mu mg}{2k}$ を変位と見なせば，物体にはたらく力の合力は復元力であるから、物体は左向きの運動の間、中心が $x = \frac{\mu mg}{2k} = 1.0[\mathrm{m}]$ となる単振動をする。

(2) (1) と同様にすると、物体は左向きの運動の間、中心が $x = -\frac{\mu mg}{2k} = -1.0[\mathrm{m}]$ となる単振動をする。

(3) (1)(2) から、n 回目に運動の向きが逆転し、$n+1$ 回目にもう一度運動の向きが逆転するまでの間の振動の中心は、

$$x = (-1)^n \times \frac{\mu mg}{2k} = (-1)^n[\mathrm{m}]$$

単振動の中心は振動の 2 つの端点の中点であるから、

$$\begin{aligned} \frac{(a_n + a_{n+1})}{2} &= (-1)^n \times \frac{\mu mg}{2k} \\ &= (-1)^n \\ a_n + a_{n+1} &= 2(-1)^n \end{aligned}$$

両辺に $(-1)^{n+1}$ をかけると、

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1}a_{n+1} - (-1)^n a_n &= 2(-1)^{2n+1} \\ &= -2. \end{aligned}$$

差分方程式 $\Delta((-1)^n a_n) = -2$ から、

$$\begin{aligned}(-1)^n a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n}(-2)\\ &= 20 - 2n\\ \therefore a_n &= (-1)^n(20-2n)\end{aligned}$$

[注] 簡単な規則性からこの等式を書いてもよい。

(4) 物体が速度をもって運動しているとき、(1)(2) から、物体が速度 0 になり得るのは振動の端点 a_n だけである。振動の端点で運動の向きが逆転して運動が継続する条件は、物体に一瞬だけはたらく静止摩擦力の大きさ $N\mu_0$ に対して変位 $x = a_n$ のときに関してばねの弾性力 $|-2ka_n| > N\mu_0$ が成立することである。逆に、物体が振動の端点において静止しその後に再び動き出すことがなくなる条件は $|-2ka_n| \leq N\mu_0$ である。

静止摩擦力の大きさは $N\mu_0 = 6.0\mu_0$ で、$n = 9$ のとき運動が継続するから、$|-2ka_9| > N\mu_0$ より、$12 > 6$ μ$_0$ から $2 >$ μ$_0$。また、$n = 10$ のときにちょうど運動が終了するから、$|-2ka_{10}| \leq N\mu_0$ より、$0 \leq 6\mu_0$ から $0 \leq \mu_0$.

$\mu \leq \mu_0$ より $1 \leq \mu_0$ も考えて、求めるべき条件は、$1 \leq \mu_0 < 2$.

また、$n = 10$ に対して、$a_{10} = 0$ である。

《第 2 問解答》

(1) 小球が位置 x にあるときのばねののびを求める。三平方の定理より、ばねの長さは $\sqrt{x^2+l^2}$ であるから、のびは $\sqrt{x^2+l^2} - l$ である。

小球にはたらくばねの弾性力の大きさは $k\left(\sqrt{x^2+l^2} - l\right)$ となる。これの x 成分は $k\left(\sqrt{x^2+l^2} - l\right) \times \left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+l^2}}\right) = -kx\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2+1}}\right)$ である。

解　$ma = -kx\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2+1}}\right)$

(2) (1) より、$f(x) = a(x) = -\frac{k}{m}x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2+1}}\right)$ である。

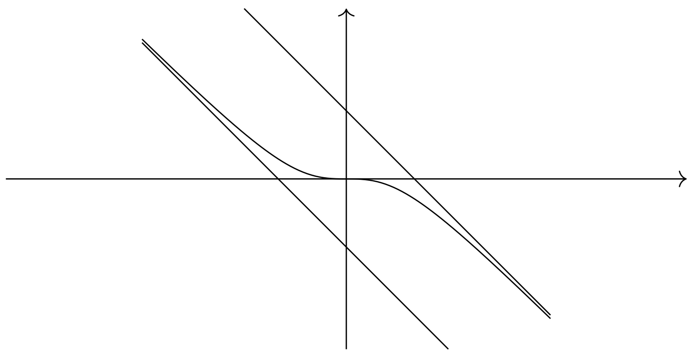
これを x で微分すると、

$\frac{d}{dx}a(x) = -\frac{k}{m}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2+1}} + \frac{1}{2}x\left(\frac{1}{\left(\left(\frac{x}{l}\right)^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)\right)$

さて、$f(x)$ は明らかに奇関数であるから、$x \geq 0$ の場合のみ考察すればよい。

$\frac{d}{dx}a(0) = 0$、$\frac{d}{dx}a(x) < 0$ $(x > 0)$、$\lim_{x\to\infty} \frac{d}{dx}a(x) = -\frac{k}{m}$ が成立する。さらに微分すれば $\frac{d^2}{dx^2}a(x) < 0$ $(x > 0)$ も示せる。(過程略)

ここまでの結果を用いると、下図を書ける。(直線は漸近線)



$a(x) = -\frac{k}{m}\left(x - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{l^2}+\frac{1}{x^2}}}\right)$ であるから、

$A(x) = a(x) - \left(-\frac{k}{m}x + \frac{k}{m}l\right)$ とすると、$\lim_{x\to\infty} = 0$ となるから、

$x \to \infty$ における $a(x)$ の漸近線は $F(x) = -\frac{k}{m}x + \frac{k}{m}l$ となる。

$f(x)$ は奇関数であるから、近似直線は原点を通る。

$f(1) = -\frac{k}{m}\left(\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{l})^2+1}}\right)$ より、近似直線は $a(x) = -\frac{k}{m}\left(\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{l})^2+1}}\right)x$

近似直線は、小球が振幅 $x_0 = 1$ の単振動することを示す。さらに、初期位置は $t = 0$ で $x = x_0 = 1$ であったことから、

$x(t) = 1 \times \cos(\sqrt{\frac{k}{m\sqrt{(\frac{1}{l})^2+1}}}t)$

(3) 再度運動方程式を立てる。運動方程式は、
$ma = mg - kx\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2+1}}\right)$ であり、a について整理すると、
$a = \frac{k}{m}\left(mg - x\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^2+1}}\right)\right)$ となる。$a = 0$ となる点は、$x_1 = \frac{mg}{1-\sqrt{\left(\frac{x_1}{l}\right)^2+1}}$ より、$\frac{x_1^4}{l^2} = (mg)^2 - 2mgx_1$

(4) x が大きければ大きいほどばねは水平向き (運動方向) を向くようになる。このため、x が大きい領域で振動させると単振動に近づく。

《第 3 問解答》

《I》

エネルギー保存則より

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + \frac{1}{2}mv^2 \tag{1}$$

運動量保存則より

$$x \text{ 軸方向} : \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'}\cos\phi + mv\cos\theta \tag{2}$$

$$y \text{ 軸方向} : 0 = \frac{h}{\lambda'}\sin\phi - mv\sin\theta \tag{3}$$

(1)

式 (2),(3) より

$$\cos\theta = \frac{1}{mv}\left(\frac{h}{\lambda} - \frac{h}{\lambda'}\cos\phi\right) \tag{4}$$

$$\sin\theta = \frac{1}{mv}\cdot\frac{h}{\lambda'}\sin\phi \tag{5}$$

(2)
式 (3),(4) の両辺を二乗して辺々加えて

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = \frac{h^2}{(mv)^2}\cdot\left\{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\cos\phi\right)^2 + \frac{1}{\lambda'^2}\sin^2\phi\right\}$$

整理して

$$(mv)^2 = h^2\left\{\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + \frac{2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\phi)\right\} \tag{6}$$

式 (1) より

$$(mv)^2 = 2mhc\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) \tag{7}$$

式 (6),(7) より

$$\frac{2mc}{h}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right) = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)^2 + \frac{2}{\lambda\lambda'}(1-\cos\phi)$$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{h}{mc}\left\{(1-\cos\phi) + \left(\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda}\right)^2\left(\frac{1}{\frac{\lambda'-\lambda}{\lambda}+1}\right)\right\} \\ &\fallingdotseq \frac{h}{mc}(1-\cos\phi) \end{aligned} \tag{8}$$

(3)
式 (8) に与えられた値を代入して

$$\begin{aligned}\Delta\lambda &= \frac{6.6\times10^{-34}}{9.1\times10^{-31}\cdot3.0\times10^{8}} \\ &= \frac{220}{91}\times10^{-12} \\ &\fallingdotseq 2.4\times10^{-12}\end{aligned}$$

補足
(1),(2) はただの典型問題である．(3) はただの計算問題である．
一つ注意してほしいことがある．それは (2) の最後に行った近似である．実際この近似が許されないことがあり，それは近似した項が $1-\cos\phi$ の大きさに対して無視できない時である．しかし，実際無視できなくなることはほぼ無いといってよく，問われたときに考える程度で十分だろう．

《II》
エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{hc}{\lambda}=\frac{1}{2}mv'^2+\frac{hc}{\lambda'} \tag{9}$$

運動量保存則より

$$mv-\frac{h}{\lambda}=mv'+\frac{h}{\lambda'} \tag{10}$$

(1)
式 (9) より

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv'^2&=\frac{hc}{\lambda'}-\frac{hc}{\lambda}\\ \frac{v+v'}{2}&=\frac{hc}{m(v-v')}\left(\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned} \tag{11}$$

式 (10) より

$$\begin{aligned}mv-mv'&=\frac{h}{\lambda'}+\frac{h}{\lambda}\\ v-v'&=\frac{h}{m}\left(\frac{1}{\lambda'}+\frac{1}{\lambda}\right)\end{aligned} \tag{12}$$

式 (11),(12) より

$$\begin{aligned}\frac{v+v'}{2}&=c\cdot\frac{\frac{1}{\lambda'}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda'}+\frac{1}{\lambda}}\\ &=c\cdot\frac{\lambda-\lambda'}{\lambda+\lambda'}\\ &=c\cdot\frac{1-\frac{\lambda'}{\lambda}}{1+\frac{\lambda'}{\lambda}}\\ &=c\cdot\frac{1-k}{1+k}\end{aligned} \tag{13}$$

(2)
$k = \frac{1}{100}$ であり, 式 (13) より

$$\begin{aligned} v &\fallingdotseq 3.0 \times 10^8 \cdot \frac{99}{101} \\ &\fallingdotseq 2.9 \times 10^8 \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} m' &= \frac{m_e}{\sqrt{1 - (\frac{99}{101})^2}} \\ &= \frac{101}{20} m_e \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} E &= m'v^2 \\ &= \frac{101 \cdot 9.1 \times 10^{-31} \cdot (3.0 \times 10^8)^2}{20 \cdot 1.6 \times 10^{-19}} \\ &\fallingdotseq 2.6 \times 10^6 \end{aligned}$$

補足
(1),(2),(3) すべて設問の要求に従うのみで大して難しくはない．しかし (3) の計算は少し煩雑であるから注意したい.
実際に逆コンプトン効果は利用されている．そこでは約 $8GeV$ にも及ぶエネルギーを持つ電子をアルゴンレーザー光 (約 $3.5eV$) とぶつけて，$2.4GeV$ にも及ぶエネルギーを持つ光を得る．ここで光のエネルギーはなんと約 7 億倍にも増幅されている．ちなみに 8GeV のエネルギーを持つ電子に要求される速さは光速の 99.9999998% である．ここまでくると相対論的効果は全く無視できない．電子の加速手法は様々あるので調べてみると面白いかもしれない.

《第 4 問解答》

糸 (1) の張力の大きさを S_1，糸 (2)〜(5) の張力の大きさを S_2，糸 (6)〜(9) の張力の大きさを S_3，糸 (10)〜(13) の張力の大きさを S_4 とする．小球$\boxed{5}$の鉛直方向の力のつり合いより，

$$mg = 4 \times \frac{S_4}{\sqrt{2}} \quad \therefore S_4 = \frac{mg}{2\sqrt{2}}$$

である．小球$\boxed{1}$の鉛直方向の力のつり合いより，

$$\frac{S_2}{\sqrt{2}} = mg + \frac{S_4}{\sqrt{2}} \quad \therefore S_2 = \frac{5mg}{2\sqrt{2}}$$

である．点$\boxed{0}$での鉛直方向での力のつり合いより，

$$S_1 = 4 \times \frac{S_2}{\sqrt{2}} \quad \therefore S_1 = 5mg$$

である．小球$\boxed{1}$の円運動の運動方程式より，

$$m\frac{l}{\sqrt{2}}\omega^2 = \frac{S_2}{\sqrt{2}} + 2 \times \frac{S_3}{\sqrt{2}} + \frac{S_4}{\sqrt{2}} \quad \therefore S_3 = m\frac{l}{2}\omega^2 - \frac{3mg}{2\sqrt{2}}$$

である．糸 (6)〜(9) がぴんと張るための条件は，$S_3 > 0$ より，

$$m\frac{l}{2}\omega^2 - \frac{3mg}{2\sqrt{2}} > 0 \quad \therefore \omega > \sqrt{\frac{3g}{\sqrt{2}l}} = \omega_0$$

である．

【答え】

（ア）$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{\sqrt{2}l}}$.

（イ）順に，$5mg, \frac{5mg}{2\sqrt{2}}, \frac{ml\omega^2}{2} - \frac{3mg}{2\sqrt{2}}, \frac{mg}{2\sqrt{2}}$.

化学

《第 1 問解答》

(1) 正解は水酸化ナトリウム水溶液．エステル結合が加水分解されることで溶けてしまうため．

(2) 正解はフッ化水素酸．

$$\mathrm{SiO_2 + 6\,HF \longrightarrow H_2SiF_6 + 2\,H_2O}$$

の反応により溶けてしまうため．

《第 2 問解答》

(1) 電池式は以下．

$$(-)\mathrm{Pb} \mid \mathrm{H_2SO_4aq} \mid \mathrm{PbO_2}(+)$$

(2) イオン反応式は

$$\begin{aligned}&\text{正極}\ :\ \mathrm{PbO_2 + 4\,H^+ + {SO_4}^{2-} + 2\,e^- \longrightarrow PbSO_4 + 2\,H_2O}\\&\text{負極}\ :\ \mathrm{Pb + {SO_4}^{2-} \longrightarrow PbSO_4 + 2\,e^-}\end{aligned}$$

である．これを足して，

$$\mathrm{Pb + PbO_2 + 2\,H_2SO_4 \longrightarrow 2\,PbSO_4 + 2\,H_2O}$$

(3) 希硫酸の電気分解，すなわち，水の電気分解が起こる．(このとき，電解液が減少してしまう)

(4) 正解は (a)．電解液には希硫酸を使っているが，この中の硫酸 $\mathrm{H_2SO_4}$ は不揮発性であるので，電解液が (3) の理由などで減少しても硫酸が減ることはない．ここで硫酸を新たに加えてしまうと元の状態より硫酸濃度が高くなってしまう．新たに硫酸を加える必要はないので，純水を加えればそれでよい．

(5) 電池内部に金属樹が生じ，極板どうしが金属で接触してしまうためにショートが起こる可能性があり，危険だから．(鉛蓄電池では鉛原子が溶解することがないため，金属樹ができることはなく，安全に充電できる)

《第 3 問解答》

(1) 正解は (b)(c)．(b) は関係が逆．マレイン酸はシス型であり，分子内で水素結合を作るため，融点は低くなる．(c) は沸点が最も高いのは HF．これは水素結合による．

(2) 正解は (b)．水上置換法を用いると，水面から気化した水蒸気が混ざってしまう．

(3) 正解は (d)．酵素反応などがあてはまる．(a) は固体の表面積が影響する (塊状の場合と粉末状の場合など)．(b) は活性化エネルギーを与える必要がある．(c) は $\rightleftharpoons$ を用いる．

地理

《第 1 問解答》

(1) 海岸に近い (海岸線と直交した向きの) 深い谷が海面上昇や沈降によって海に沈んでできた入り組んだ入り江.

(2) 正解は③．複雑な入江のため，波が比較的穏やかで，水産業に向く．地曳網漁は浅い海岸が必要なため不適.

(3) 正解は「三陸海岸」,「志摩半島」,「若狭湾」.

《第 2 問解答》

(1) $\boxed{\text{ア}}$: 原料指向性工業
$\boxed{\text{イ}}$: 筑豊炭田

(2) 大消費地である東京に近く，材料を持ち込みやすい港であり，また，日本国内にはそもそも鉄鉱山・炭鉱が少ないため．(かつては筑豊炭田など，様々な場所に炭鉱があったが，輸入したほうが安いため，ほとんど閉坑してしまった)

家庭科

《第 1 問解答》

あ	本返し縫い
い	並縫い
う	半返し縫い

《第 2 問解答》

2

《第 3 問解答》

ア	27
イ	1
ウ	7，8，17，19，20，21，23，26
エ	28
オ	5
カ	9，10，(12)
キ	30
ク	2
ケ	6
コ	15，16，18，22
サ	24，25

世界史

《第 1 問解答》

(1) ９世紀後半、ルーシの首長であるリューリクが東スラブ人を征服し、ノブゴロド国を建てた。さらにその一派のノブゴロド公オレーグは南下してキエフ公国を建国し、ノブゴロド公国と合体してロシアを統一した。この間、黒海貿易の拠点として栄えたキエフ公国はビザンツ帝国と経済的・政治的繋がりを強めた。10 世紀末にはキエフ大公ウラディミル１世がビザンツ皇帝バシレイオス１世と交流してギリシア正教に改宗したため、ギリシア正教が国教化し、ビザンツ文化がロシアに定着した。その後、キエフ公国は諸侯国が分立して衰退し、１３世紀半ばにバトゥが率いるモンゴル軍に敗れて滅亡した。この間、諸侯国の一つであるモスクワ公国は貢納によりキプチャク＝ハン国から自治を容認され、14 世紀頃から勢力を拡大した。キプチャク＝ハン国の衰退に伴い、15 世紀後半、モスクワ大公イヴァン 3 世は貢納を止めて自立を達成し、ロシアは「タタールのくびき」から解放された。

（400 字）

[解説・講評]

中世ロシア史からの出題である。キエフ公国の成立の過程が少し書きにくいかもしれないが、そのほかはおおむね標準的な内容なので、比較的書きやすいだろう。本問は昨今のウクライナ情勢に関連して、世界史学習者としてロシアとウクライナの歴史的関係を理解しているかを問うた時事問題でもある。今年度の大学入試においてウクライナに関する出題があることは十分想定できるので、この問題を機にロシア史・ウクライナ史を復習してもらえたら出題者として幸いである。

(2) 1917 年の革命後、ソヴィエト政府は反革命勢力と干渉戦争の危機を克服するために戦時共産主義を採用し、穀物の強制徴発などの極端な統制経済政策を実施した。そのため生産力が急激に低下し、クロンシュタット反乱などが起こった。生産力の回復と社会主義建設に必要な経済基盤の確立のためにレーニンは部分的に資本主義を復活させる NEP を採

用し、余剰農産物の販売を認め、穀物徴発制を中止した。生産力は回復し、クラークやネップマンが台頭した。1928 年、スターリンは社会主義建設のため第 1 次五か年計画を開始して重化学工業を推進したため、生産力が増大した。またコルホーズ・ソフホーズの確立のよる農業の集団化を図った。この時ソヴィエト政府は工業化に必要な外貨を獲得するためにウクライナの小麦を輸出したが、天候不順によって穀物生産量が激減した際に外貨獲得を優先して過剰な量の穀物徴収を続けたため、1932 年から 1933 年にかけてホロドモールが起こった。
(398 字)

[解説・講評]
現代ロシア史からの出題である。難易度はやや難といったところであろう。「1917 年の革命直後から第 1 次五か年計画に至るまでのソヴィエト連邦の経済政策の変遷」に関しては政策の名称とその時系列がすぐに想起できたであろうが、「その具体的内容、また各政策がソヴィエト連邦の経済・社会に与えた影響」となると少し難しかったかもしれない。続く「その経済政策が 1932 年から 1933 年のウクライナの社会に及ぼした影響」に関してはホロモドールを知っていれば書けたであろう。ホロドモールはそれほどメジャーな歴史事項ではないかもしれないが、オスマン帝国のアルメニア人虐殺、ナチス・ドイツのホロコーストと並んで 20 世紀最大の悲劇の一つとされており、2022 年 12 月 15 日、欧州議会（EU の主要機関の 1 つ）はホロドモールをジェノサイドと認定したことに関する時事問題でもある。ホロドモールは、イギリスなどのヨーロッパ諸国が国際赤十字社を通してソ連に飢饉対策を要請したのにもかかわらず、ソ連が「五か年計画」の成功を宣伝していたためウクライナでの飢饉を認めなかったことで生じた虐殺とも捉えられるのだ。そのため独ソ戦でドイツ軍がウクライナに侵攻してきた際には大勢のウクライナ人がドイツ軍に志願し、共産党員の引き渡しなどに加担した。ホロドモールは 1985 年に始まったゴルバチョフのグラスノチによって判明したが、それまでのソ連の情報工作が功を奏してか今でも日本での認知度はあまり

高くない。しかし、ホロモドールでのウクライナの死者数は一説には 500 万人にも上るとされる。ホロドモールは今でもウクライナ人にとってソ連時代の抑圧の歴史として記憶されていることであろう。またこのような歴史を踏まえると、今日のウクライナがロシアの侵攻に対して抵抗し続ける理由と、国民が一丸となって戦えるその原動力が少しはわかるではないだろうかと思う。