第　62　問

n, m を正の整数とする。次の極限値をそれぞれ求めよ。

(1)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n}$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\int_0^1 (x^m+1)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}$$

作問者：negi_0613_

解答

(1) まず, n が十分大きいとき,

$$\sqrt{n} > \log(n+1)$$

が成り立つことを示す。関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \sqrt{x} - \log(x+1)$$

とする。このとき,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x+1} \\ &= \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2\sqrt{x}(x+1)} \\ &\geqq 0 \end{aligned}$$

であるから, $f(x)$ は単調増加な関数である。
さらに

$$\begin{aligned} f(100) &= 10 - \log(101) \\ &> 10 - \log_2(101) \\ &> 10 - \log_2(128) \\ &> 3 \\ &> 0 \end{aligned}$$

であるから, x が十分大きいところで,

$$f(x) > 0$$

特に, n が十分大きいところで,

$$\sqrt{n} > \log(n+1)$$

が成り立つ。
よって,

$$0 \leqq \frac{\log(n+1)}{n} \leqq \frac{\sqrt{n}}{n}$$

が成り立ち,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} \\ &= 0\end{aligned}$$

であるから, 挟み撃ちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{n} = 0$$

となる。

(2) まず,

$$\left\{\int_0^1 (x^m+1)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}}$$

を上から評価することを考える。

$$\begin{aligned}\left\{\int_0^1 (x^m+1)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} &\leqq \left\{\int_0^1 (1+1)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= 2\end{aligned}$$

であるから,

$$\left\{\int_0^1 (x^m+1)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \leqq 2$$

が成り立つ。

次に, 下から評価することを考える。

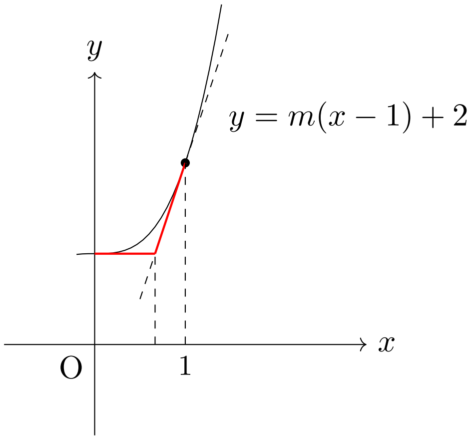
今, $y = x^m + 1$ について, これは $0 \leqq x \leqq 1$ において下に凸な関数だから, $x = 1$ における接線の方程式

$$y = m(x-1) + 2$$

について,

$$x^m + 1 \geqq m(x-1) + 2$$

が成り立つ。



よって, 関数 $g(x)$ を,

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{m-1}{m}\right) \\ m(x-1)+2 & \left(\dfrac{m-1}{m} \leqq x \leqq 1\right) \end{cases}$$

のようにとれば, 図より $0 \leqq x \leqq 1$ において,

$$x^m + 1 \geqq g(x)$$

が成り立つ。
ゆえに,

$$\begin{aligned} \left\{\int_0^1 (x^m+1)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} &\geqq \left\{\int_0^1 (g(x))^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \left\{\int_0^{\frac{m-1}{m}} dx + \int_{\frac{m-1}{m}}^1 (m(x-1)+2)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \left\{\frac{m-1}{m} + \int_{\frac{m-1}{m}}^1 (m(x-1)+2)^n dx\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \left\{\frac{m-1}{m} + \int_1^2 \frac{y^n}{m} dy\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \left\{\frac{m-1}{m} + \frac{2^{n+1}-1}{m(n+1)}\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &\geqq \left\{\frac{2^n}{m(n+1)}\right\}^{\frac{1}{n}} \\ &= \frac{2}{m^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n}}} \end{aligned}$$

が成り立つ。ただし途中で $y = m(x-1)+2$ と置換した。
よって,

$$\frac{2}{m^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n}}} \leqq \left\{ \int_0^1 (x^m+1)^n dx \right\}^{\frac{1}{n}} \leqq 2$$

が成り立つ。
ここで,

$$\lim_{n\to\infty} m^{\frac{1}{n}} = 1$$

であり, さらに

$$(n+1)^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\log(n+1)}{n}}$$

から, (1) を用いれば,

$$\lim_{n\to\infty} (n+1)^{\frac{1}{n}} = 1$$

であるから,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{m^{\frac{1}{n}}(n+1)^{\frac{1}{n}}} = 2$$

である。よって, 挟み撃ちの原理より,

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \int_0^1 (x^m+1)^n dx \right\}^{\frac{1}{n}} = 2$$

となる。