■　解答編（問題 31〜 問題 40）

問　題　31

$(1, 1234566), (1234566, 1)$

《解説》

a, b は互いに素なため、どちらか片方は必ず奇数である。しかし a, b が両方奇数なら a^b, b^a も両方奇数となり、$a^b + b^a$ が偶数となってしまうため破綻。ゆえに a, b のどちらかが偶数、どちらかが奇数であるということが分かる。与式は a と b の対称式のため、a が偶数、b が奇数と仮定する。
もし $b \geqq 2$ なら、a^b は 4 の倍数である。また b^a は奇数の偶数乗のため、奇数の 2 乗と考えることができる。奇数の 2 乗を 4 で割った余りは 1 になる (証明略) ので、$a^b + b^a$ を 4 で割った余りも 1。しかし 1234567 を 4 で割った余りは 3 のため不適。ゆえに $b < 2$ となる。
したがって $b = 1$ が確定する。このとき $a = 1234566$ である。
よって与式を満たす組 (a, b) は $(1, 1234566), (1234566, 1)$ となる。

問　題　32

《解答》

50 個

《略解》

与式を $a^2(a+1)$ と変形して考える。

(i) a が偶数の場合

a^2 が 12 の倍数となるケースと、a^2 は 12 の倍数ではないが、$(a+1)$ が 3 の倍数となっているケースの 2 つが挙げられる。

前者の場合は、a は 6 の倍数である。後者の場合は、a は 6の倍数 $+ 2$ と表せる。

(ii) a が奇数の場合

$(a+1)$ が 12 の倍数となるケースと、$(a+1)$ は 12 の倍数ではないが、a^2 が 3 の倍数となっているケースの 2 つが挙げられる。

a はそれぞれ、前者の場合は 12の倍数 $+ 11$、後者の場合は 12の倍数 $+ 3$ と表せる。

なお後者で、$a =$ 12の倍数 $+ 9$ に関しては、$(a+1)$ が 4 の倍数とならないため不適。

以上より、題意を満たす a の条件は、$a =$ 12の倍数 $+ 0, 2, 3, 6, 8, 11$ のときとなる。

この条件を満たすような 1 以上 100 以下の自然数の個数は、$6 \times 8 + 3 - 1 = 50$ より、50 個。

問　題　33

《解答》

(A) $p=2$ のとき,

$$(2+q)^2+2=q^q$$

となる。

(i) $q=2$ のとき

$$(2+q)^2+2>q^q$$

であるから不適.

(ii) $q=3$ のとき

$$(2+q)^2+2=27=q^q$$

であるから適する.

(iii) $q>3$ のとき

$$\begin{aligned}&(q^q)-\left((2+q)^2+2\right)\\>&\left(q^3\right)-\left((2+q)^2+2\right)\\=&(q-3)\left((q+1)^2+1\right)\\>&0\end{aligned}$$

であるから不適.

(B) $p>2$ のとき, p は奇数である.

(a) $q=2$ のとき

$$(p+q)^p+p>q^q$$

となるから不適.

(b) $q>2$ のとき, p と q はともに奇数である. したがって,

$$(p+q)^p+p=q^q$$

において法を 3 とする合同式を考えることで

$$(p+q)+p\equiv q \pmod 3$$

すなわち

$$2p\equiv 0 \pmod 3$$

が得られ, 2 と 3 は互いに素だから

$$p\equiv 0 \pmod 3$$

が成り立つ.

p は素数だから, これより,

$$p=3$$

でなければならず,

$$(3+q)^3+3=q^q$$

となる.

(i) $q=3$ のとき

$$(3+q)^3+3>q^q$$

であるから不適.

(ii) $q > 3$ のとき，$q \geq 5$ であるから，

$$\begin{aligned} & q^q - \left((3+q)^3 + 3\right) \\ \geq & q^5 - \left((3+q)^3 + 3\right) \\ = & (q-5)^4 + 19(q-5)^3 + 126(q-5)^2 + 308(q-5) + 110 \\ > & 0 \end{aligned}$$

であるから不適.

以上から，答えは

$$(p, q) = (2, 3)$$

である.

《解答》

(1) 3 と 6 を二進数で表すと

$$\begin{cases} 3 = 011_{(2)} \\ 6 = 110_{(2)} \end{cases}$$

であるから，各桁毎に論理和および論理積をとって

$$\begin{cases} 3 \mid 6 = 111_{(2)} \\ 3\&6 = 010_{(2)} \end{cases}$$

となる．
よって答えは，(a) 7, (b) 2.

(2) 0 以上 3 以下の整数からなる集合のうち，0 と 3 を要素に持つものは

$$\{0,3\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2,3\}$$

の 4 種類しかなく，それらは全て快適な集合としてふさわしい．
よって，答えは 4 つ．

(3) それぞれ示す．
(i) (P) $\implies$ (Q) を示そう．
S の要素数が 2^n ということは，

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$$

ということである．
このとき，0 以上 $n-1$ 以下の任意の異なる整数 x,y に対し，

$$a = 2^x$$

とすればこれは S の要素であり，

$$2^x \,\&\, a = 2^x \,\&\, 2^x = 2^x > 0$$

かつ

$$2^y \,\&\, a = 2^y \,\&\, 2^x = 0$$

が成り立つので示された．
(ii) (Q) $\implies$ (P) を示そう．
0 以上 $n-1$ 以下の任意の整数 x をとる．
仮定より，0 以上 $n-1$ 以下の x を除く各整数 k に対して，ある S の要素 a_k が存在して，

$$\begin{cases} 2^x \,\&\, a_k > 0 \\ 2^k \,\&\, a_k = 0 \end{cases}$$

を成立させられる．
したがって，これらの a_k 全てのビット AND を計算したものを b とおけば

$$b = 2^x$$

となり，また S が快適な集合であったことから

$$b \in S$$

が成り立つ．
したがって，0 以上 $n-1$ 以下の任意の整数 x に対して，

$$2^x \in S$$

が成り立つ．
1 以上 2^n-1 以下の全ての整数はこれらのビット OR で表すことができるので，S が快適な集合であったことから，1 以上 2^n-1 以下の全ての整数は S に属することになる．
さらに 0 も S に属するから，これらより

$$S = \{0, 1, 2, \dots, 2^n - 1\}$$

が得られる．
したがって，S の要素数は 2^n であることが示された．

《解答》

条件式

$$f(x)^3+x^3f(x)=(x+x^2)f(x)^2$$

を整理すると

$$f\left(x\right)\left(f\left(x\right)-x\right)\left(f\left(x\right)-x^2\right)=0$$

となる．

つまり，それぞれの実数 x に対し

$$f(x)=0,x,x^2$$

のどれかが成り立つことが必要十分条件である．

ここで，3 曲線 $y=0,y=x,y=x^2$ の交点について考えると

- 3 曲線全ての交点 $(0,0)$
- $y=x$ と $y=x^2$ の交点 $(1,1)$

が全ての交点である．

よって $x<0$ の部分で $f(x)$ の取り方は常に 0, 常に x, 常に x^2 の 3 通り，

$x>0$ の部分では

- 常に $x=0$.
- $f(1)=1$．$0<x<1$ の部分で $f(x)$ の取り方は常に x, 常に x^2 の 2 通り．$1<x$ の部分で $f(x)$ の取り方は常に x, 常に x^2 の 2 通り．

のどちらかである．

よって連続関数 $f(x)$ の個数は

$$3\cdot(1+2\cdot2)=15$$

と求められる．

問　題　36

一般の実数 x, y に対して

$$x^4 + 4y^4 = \left(x^2 + 2xy + 2y^2\right)\left(x^2 - 2xy + 2y^2\right)$$

が成り立つ。
よって、

$$\begin{aligned} 289^2 + 8^2 &= 17^4 + 4 \cdot 2^4 \\ &= \left(17^2 + 4 \cdot 17 + 8\right)\left(17^2 - 4 \cdot 17 + 8\right) \\ &= 365 \cdot 229 \\ &= 5 \cdot 73 \cdot 229 \end{aligned}$$

と計算できる。
したがって答えは

$$289^2 + 8^2 = \boxed{5 \cdot 73 \cdot 229}$$

である。

【コメント】
この変形は $289^2 + 8^2$ の素因数分解を与えている。

問　題　37

《解答》

各問において，n を任意の整数とする．

(1)
- $n=2$ のとき，
$$n=(-1)+3$$
と書け，-1 と 3 は互いに素な異なる整数の組なので適する．
- $n\neq$ のとき，
$$n=1+(n-1)$$
と書け，1 と $n-1$ は互いに素な異なる整数の組なので適する．

(2)
- $n=1$ のとき，
$$n=(-1)+(-3)+5$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 3 整数の組なので適する．
- $n=-1$ のとき，
$$n=(-5)+3+1$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 3 整数の組なので適する．
- $n\neq 1,-1$ のとき，
$$n=(-1)+1+n$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 3 整数の組なので適する．

(3)
- $n=0$ のとき，
$$n=(-11)+1+3+7$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 4 整数の組なので適する．
- $n=-1$ のとき，
$$n=(-5)+(-1)+2+3$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 4 整数の組なので適する．
- $n\neq 0,-1$ のとき，
$$n=(-n-1)+(-1)+1+(2n+1)$$
と書ける．
ここで，ユークリッドの互除法より
$$\begin{aligned}&\gcd(-n-1,2n+1)\\=&\gcd(n+1,2n+1)\\=&\gcd(n+1,-1)\\=&1\end{aligned}$$
となる．
したがって，$(-n-1)$, (-1), 1, $(2n+1)$ はどの二つも互いに素であるような異なる 4 整数の組なので適する．

以上で全て示された．

問　題　38

> コサックくん待ち

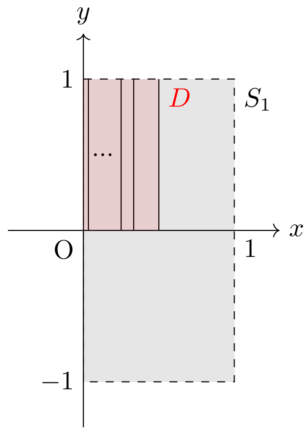
問 題 39

解答.

問 1

例えば，点 $(1/2,\ -1/2)$ を始点，境界点 $(0,\ 1/2)$ を終点とし，終点以外の点がすべて S に含まれるような単純曲線がないことを証明する．そのために，そのような曲線 C があったと仮定する．

（注）の記号を踏襲する．ただし，$a=0,\ b=1$ として一般性を失わないので，そのようにする．さて，$\varepsilon \leqq 1/2$ を満たす任意の正数 ε，例えば $1/2$ をとると，それに対応してある正数 δ_1 および δ_2 が存在して，



$$\begin{aligned} \delta_1 < t < 1 \quad &\Longrightarrow \quad |x(t) - 0| < \frac{1}{2}, \\ \delta_2 < t < 1 \quad &\Longrightarrow \quad \left| y(t) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2} \end{aligned}$$

したがって δ を δ_1，δ_2 のうち小さくないほうにすれば，$\delta < t < 1$ において C が常に領域

$$D = \left\{ (X,\, Y) \,\middle|\, 0 \leqq X < \frac{1}{2},\ 0 < Y < \frac{1}{2} \right\}$$

に含まれる．そうして，$\delta < t < 1$ を満たす t を一つとって，仮定よりある自然数 n が存在して，

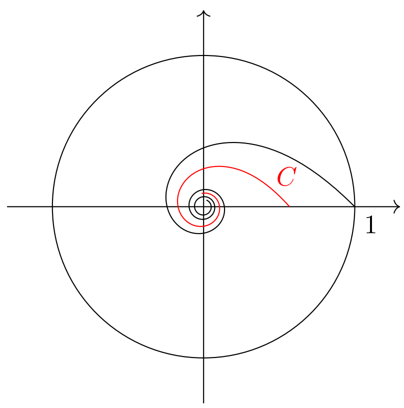
$$\frac{1}{n+1} < x(t) < \frac{1}{n}$$

が成立する．C が存在するためにはこの t に対する点 $(x(t),\, y(t))$ と，点 $(0,\ 1/2)$ とを結ぶ単純曲線がなければならないが，中間値の定理からその曲線において $x(t_0) = \dfrac{1}{n+1}$ を満たす $t_0 \in (\delta,\ 1)$ が存在せねばならない．しかも，領域 D 内に含まれているから $y(t_0) > 0$ でなければならない．しかしそれを満たす $(x(t_0),\, y(t_0))$ は S_1 の境界上にあるから矛盾である．故に S_1 によって命題 Z が否定される．

問 2

反例となりえない．そこで，任意の境界点と内点を結ぶ単純曲線があることを証明する．

[1]　任意の内点と，境界点 $(0, 0)$ とを結ぶ単純曲線が存在すること．
まず $t=0$ に対しては $(x(0),\, y(0)) = (0,\ 0)$ と定め，$t \in (0,\ 1]$ に対して $x(t)$ および $y(t)$ を定める．



$$\tau = \frac{1}{t}$$

とおき，

$$r_t = \frac{1}{1+\tau} - \frac{1}{1+\tau+2\pi}$$

と定めれば，

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r_t \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix}$$

によって曲線 C を定めればよい．要約すれば，曲線 C を，“らせん” S_2 の中間を縫うような “らせん” 型の曲線とすればよい．

これが単純曲線を構成していることを示す．まず $t>0$ における連続性と単純性について論はない．

$t=0$ における連続性を示す。$1 > \varepsilon > 0$ を任意にとる．そうして，ある δ が存在して，

$$0 < t < \delta \quad \text{なるとき常に} \quad \left| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right| < \varepsilon$$

となることはすぐにわかる．すなわち，

$$\begin{aligned}\left|\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\right| &\leqq |r_t| = \left|\frac{1}{1+\tau} - \frac{1}{1+\tau+2\pi}\right| \\ &\leqq \left|\frac{1}{1+\tau}\right| + \left|\frac{1}{1+\tau+2\pi}\right| \\ &< \frac{2}{1+\tau}\end{aligned}$$

であるから，

$$\frac{2}{1+\tau} < \varepsilon \quad \text{すなわち} \quad \tau > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \quad \text{ゆえに} \quad t < \frac{1}{2/\varepsilon - 1}$$

したがって，$\delta = \dfrac{1}{2/\varepsilon - 1}$ とすればよいのである．ゆえに，

$$\lim_{t\to 0}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

一方，

$$\begin{pmatrix}x(0)\\y(0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

ゆえに $t=0$ で $x(t)$, $y(t)$ は共に連続である．また, r_t は t が減少するにつれて単調に減少するので, $0 \leqq t < t' \leqq 1$ を満たす任意の t, t' に対して

$$\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}x(t')\\y(t')\end{pmatrix}$$

故に曲線 C は単純である．

任意の内点と，曲線 C の終点 $(1/2, 0)$ とを連続につなぐ単純曲線が存在するので，それと曲線 C との和集合によって，その内点と境界点 $(0,\ 0)$ は単純曲線で結ばれる．

[2]　任意の内点 I と，$(0,0)$ を除く任意の境界点 O とを結ぶ単純曲線が存在すること．これは，上記の曲線 C を用いれば当然である．例えば，点 I と，点 I との距離が最も近い曲線 C 上の点 A と連続につなぐ単純曲線 C_1，点 O と，点 O との距離が最も近い曲線 C 上の点 B とを連続につなぐ単純曲線 C_2，C を作り出す写像の，点 A と点 B を始点，終点とする区間への制限の像を C_3 として，C_1, C_2, C_3 の和集合を考えれば，達成される．

以上から，領域 S_2 は命題 Z の反例となりえない．

問　題　40

【解答】

直角を挟んだ二つの辺の長さを x, y とすると斜辺の長さは

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

と書ける。
これより周の長さは

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}$$

であり，面積は直角三角形の面積を求める公式より

$$\frac{1}{2}xy$$

であるから，それらが等しいことより

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}xy$$

を得る。
これより

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}xy-x-y$$

であるから，両辺二乗して

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}x^2y^2+x^2+y^2-x^2y-xy^2+2xy$$

となり，整理して

$$xy-4x-4y+8=0$$

つまり

$$(x-4)(y-4)=8$$

が得られる。
いま x と y は整数だから

$$\begin{aligned}(x-4,y-4)=&(-8,-1),(-4,-2),(-2,-4),(-1,-8),\\&(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}(x,y)=&(-4,3),(0,2),(2,0),(3,-4),\\&(5,12),(6,8),(8,6),(12,5)\end{aligned}$$

となり，辺の長さは正だから

$$(x,y)=(5,12),(6,8),(8,6),(12,5)$$

に限られる．
このとき斜辺の長さは正の整数となり適する．
よって答えは，直角を挟む 2 辺の長さが 5 と 12, あるいは 6 と 8 の直角三角形.