

問 題 21

《解答》

「ある」の共通点は、「〇〇をはく」という表現が自然に可能であること。

- ズボンを履く
- 思いを吐く
- 庭を掃く

問題 22

S ¹						E ⁴					S ⁶								
P ²		H	A ³		S	E	T ⁵		O	R	U	S							
R			N					H				L							
I ⁷	N	T	E	G	R	A		L				F							
N			I					N				I	C ⁸						
G			N			V ⁹		O				D	U						
			O			E		L ¹⁰					I	N	E	A	R		
			D			C												R	
S ¹¹		P	E	C	T	R	U	M											E
E					O											N			
T					R ¹²	E	S	O	N	A	N	T							

(1) 選択肢を順に検討する。

ア. 問題の宣伝効果は関係ない。信頼を得ることで問題が解かれやすくなるとは述べられているが、問題の宣伝効果について論じているわけではない。

イ. 作問団体の社会的地位は関係ない。

ウ. 本文によれば、信頼を得ることで、解答者は投稿問題が高品質であることを予想するので、その観点で問題を避けることは無くなると考えられる。正しい。

エ. 問題の難易度は関係ない。

よって、答えはウ。

(2) まず問題を解く。

n を正の整数とする。

このとき

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{(k+1)n^k} &= \sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{n^k} \int_0^1 x^k dx \\ &= \int_0^1 \sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{n^k} x^k dx \\ &= \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx \quad (\because \text{二項定理})\end{aligned}$$

と変形される。

これより

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx$$

を求めればよいのだが、単純に積分と極限を交換して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx \stackrel{?}{=} \int_0^1 e^x dx$$

と安易に決めつけるわけにはいかない。

そこで、不等式評価をする。

まず全ての非負実数 s に対して

$$1 \geq \frac{1}{1+s}$$

が成り立つ。

よって、全ての非負実数 t に対して

$$\int_0^t ds \geq \int_0^t \frac{1}{1+s} ds$$

すなわち

$$t \geq \log(1+t)$$

が成り立つ。

よって全ての非負実数 t に対して

$$\frac{t}{n} \geq \log \left(1 + \frac{t}{n}\right)$$

が成り立つので、両辺に n をかけ、底を e とする指数をとって

$$e^t \geq \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$$

が成り立つ。

これより全ての非負実数 t に対して

$$\begin{aligned} e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n-1} &\geq e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

となるので、非負実数 x に関して

$$\int_0^x \left(e^t - \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n-1} \right) dt$$

は非負であり、かつ減少することがない。

つまり、非負実数 x に関して

$$e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

は非負であり、かつ減少することがない。

このことから、

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx - \int_0^1 e^x dx \right| \\ &= \left| \int_0^1 \left(e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right) dx \right| \\ &= \int_0^1 \left(e^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \right) dx \\ &\leq \int_0^1 \left(e^1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right) dx \\ &= e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ &\rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

と評価できるから、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^1 e^x dx$$

が成り立つ。

以上から、

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{{}_nC_k}{(k+1)n^k} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n dx \\ &= \int_0^1 e^x dx \\ &= e - 1 \end{aligned}$$

と求めることができた。

次に、その出題方法について批判を与える。

出題方式について論じるものであるから、「誰でも解ける超簡単な基本問題を作りました！ 次の極限の値を求めてください！」という序文に着目しなくてはならない。

本文にあるように、問題の中身については実際に解いてみなければ分からないものである。すると、序盤に置かれた難易度表示は、解答前に参照可能な唯一の情報だということになる。

そう考えると、「誰でも解ける超簡単な基本問題を作りました!」という前置きは、問題の難易度を過小評価して提示しているものであり、結果として読者の判断を誤らせる可能性がある。実際には、この数学の問題を解くためには、無から積分記号を出現させる変形や、極限をとるための不等式評価といった難関を自力で全て行う必要がある。少なくとも、「誰でも解ける」「超簡単」といった表現は、客観的な難易度としては妥当ではない。

このような不適格な出題がされてしまえば、解答者は無駄な時間を過ごすことになるため、作問者や作問団体への信頼が失われてしまう。

このことから、明らかな難問を簡単と称して出題するという行為は、本文で論じられているように解答者の時間と労力への配慮を欠いた、信頼を損なう出題態度に該当する。

《最終解答》

$e - 1$

難問を簡単だと偽って出題することは解答者を欺く行為であり信頼を損なうため避けるべきである。(45 字)

問 題 24

1. 解答 : All organic compounds with the molecular formula C_5H_8 are alkynes, and if stereoisomers are not considered, there are 16 structural isomers.

正しくは,

Some organic compounds with the molecular formula C_5H_8 are alkynes, and if stereoisomers are not considered, there are 17 structural isomers.

このように直せば, 下線の本数を最小にできる。分子式 C_5H_8 で表される有機化合物にはアルキンでないものも存在する。また, 分子式 C_5H_8 で表される有機化合物の構造異性体は 17 種類ある。

2. 解答 : The value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ is equal to the value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$, and its value is $\frac{(n-1)!}{n!}$ if n is odd.

正しい計算結果は,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{if } n \text{ is odd} \\ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

である。ただし, "!!" は二重階乗であり,

$$n!! = \begin{cases} n(n-2)(n-4)\cdots 3 & \text{if } n \text{ is odd} \\ n(n-2)(n-4)\cdots 2 & \text{if } n \text{ is even} \end{cases}$$

次のように訂正すると, 訂正箇所が二か所になるので, 最高得点を得ることはできない。

The value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ is equal to the value of $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx$, and its value is $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{(n-1)!}{n!}$ if n is even.

3. 解答 : A sphere is uniquely determined by three non-colinear coordinate.

次のように訂正すれば, 下線の本数, つまり減点を最も少なくできる。A plane is uniquely determined by three non-colinear coordinates

coordinate は複数形, "coordinates" にしなければならない点が 1 つ目の誤り, 同一直線上にない 3 点でただ 1 つ決めることができるのは, 球面ではなく平面である点が 2 つ目の誤り, とすれば下線の本数を最も減らし, 2 点の減点に抑えることができる。

次のように訂正する場合は, 3 点の減点となる。A sphere is uniquely determined by four non-coplanar coordinates.

*coplanar: 同一平面上

4. The circle centered at $\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ and radius 2 intersects the circle centered at $\left(e, \frac{\pi}{2}\right)$ with radius 3 at two distinct points.

この文には誤りはないため, 下線を引くと, その下線の本数の分だけ減点となる。

5. When a light wave enters a denser medium, its speed increases.

正しくは, decreases である。

別解:

When a light wave enters a rarer medium, its speed increases.

それでも下線の箇所は 1 箇所ですべて抑えられる。

6. Sound can be heard more easily over long distances in the day time because of diffraction.

正しくは, Sound can be heard more easily over long distances at night because of refraction.

7. 解答 : Alpha particle can be stopped by a sheet of paper, and beta particle can be stopped by lead.

正しくは, Alpha particles can be stopped by a sheet of paper, and gamma particles can be stopped by lead.

8. 解答 : A real gas behaves like an ideal gas under conditions of high pressure and low temperature, where intermolecular forces and the volume of the gas molecules itself becomes negligible.

正しくは,

A real gas behaves like an ideal gas under conditions of low pressure and high temperature, where intermolecular forces and the volume of the gas molecules itself become negligible.

実在気体は高圧低温ではなく、高温低圧で理想気体に近づく。intermolecular forces と the volume of the gas molecules itself という複数の主語に対して、become が単数形になっているのも誤り。

“pressure” と “temperature” に両方下線を引き、入れ替えるという訂正でも構わない。

【解答】

- (1) (i) 「直ダ～耳」と書いて、「ただ～だけだ」という意味を表す。したがって、多少文脈を考慮して現代語訳すれば、答えは

ただ 100 歩逃げなかったというだけだ。

- (ii) 耳小骨

- (2) (i) 選択肢の中で性悪説で知られる人物は(b)の荀子。
 (ii) 感想文中における性善説は、全ての人間が良心に従った行動をとるという、楽観主義のような意味で使われている。しかし、孟子の性善説は、人間が生まれつきもつ善性について論じられたものであり、後天的に悪を身につけることを否定するものではない。

- (iii) POS システム

- (3) (i) A と B が運動を始めた時刻を 0s とし、 B が 100m 地点に到達した時刻を t_B [s] とし、 A が 100m 地点に到達する時刻を t_A [s] とする。

また、 A の加速度の大きさを a [m/s^2] とする。

すると等加速度運動の式より

$$\begin{cases} \frac{1}{2}at_A^2 = 100 \\ \frac{1}{2}at_B^2 = 50 \end{cases}$$

が成り立つ。

これより

$$t_A^2 = 2t_B^2$$

が成り立ち、考える時刻は正だから

$$t_A = \sqrt{2} \cdot t_B$$

が得られる。

したがって、答えは

$\sqrt{2}$ 倍

- (ii) (a) と金は二歩の判定に含まれないので不適當。
 (b) と金は二歩の判定に含まれないので不適當。
 (c) 歩について言えば成らないメリットが無いので、ふつう成るものだが、しかし成らないからといって反則ではない。実際、複雑な試合においては成らないことが有効な戦術となることもありうる。不適當。
 (d) 打ち歩詰めという反則行為にあたる。これが適當。
 よって答えは(d)。

- (4) (i) 本文において、五十歩逃げた者と百歩逃げた者に大した差が無いというのはどちらも逃げたという点で共通しているからであり、数量の大小は問題外である。一方で X の発言は数量の違いの感覚について論じるものであるため、本文の内容に則しているわけではない。よって答えは(c)。

- (ii) a, b を 1 以外の正の実数とし、 x を正の実数とすると、底の変換公式より

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

が成り立つ。つまり

$$\log_a(x)$$

と

$$\log_b(x)$$

は比例関係にあり、比例定数は 0 でない。

したがって Y の発言中の対数の底として何を選んでも、比例であるという関係は変わることがない。

(5) 自由に答えれば良いが、ここでは解答例として AI の回答を載せる。

《本当の優しさとは、見返りを求めず相手の立場に立って行動すること。時には厳しさも含めた思いやりが本物の優しさだと思う。》

【解答】

一般に、「この文は偽である」という言明は真であるとも偽であるとも言えない。

したがって、ナツの発言から、シロとナツは別存在であることが分かる。

これよりダイアの主張は偽なので、続く発言も偽であり、ばけろうの言うことは誤りである。

よってナツの発言は誤りであるから、シロとケロたんどちらか一方は真のことを言っているのだが、ケロたんの発言よりシロとケロたんは真偽が同じだから、シロとケロたんはともに真。

ここで、シロの発言から、真のことを言っているシロとケロたんは同一存在であることが分かる。

次に、部屋にいる存在の数について考える。

- ばけろうの言っていることは嘘であったから、この部屋にいる存在の数は 1,4,5 のどれかである。
- シロとケロたんは同一存在であったから、この部屋にいる存在の数は 4 以下である。
- この部屋には真の文を述べる存在と偽の文を述べる存在がどちらもいるので、この部屋にいる存在の数は 2 以上である。

ゆえに部屋にいる存在の数は 4 であることが分かった。

以上から、部屋にいる存在の数は 4 であり、各存在は

- シロ/ケロたん、真
- ダイア、偽
- ナツ、偽
- ばけろう、偽

である。

- limit : 限定
- イ衣 : より

ということで、答えは「余弦定理」