第　87　問

関数 $f(x)$ は, $0 \leqq x \leqq 1$ に対して, $f(x) > 0$ を満たす連続関数とする。さらに, 関数列 $g_n(x)$ を次のように定める。

$$g_0(x) = f(x), g_{n+1}(x)\left(g_n(x) + 1\right) = 1$$

このとき, 以下の値を求めよ。

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 g_n(x) dx$$

作問者：negi_0613_

解答

まず, 関数列 $g_n(x)$ について, $n \geqq 1$ のとき, F_n を $F_0 = 0, F_1 = 1$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

で決まるフィボナッチ数列とすれば,

$$g_n(x) = \frac{F_n + F_{n-1}f(x)}{F_{n+1} + F_n f(x)}$$

となることを数学的帰納法を用いて示す。

- $n = 1$ のとき,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{1 + f(x)} \\ &= \frac{F_1 + F_0 f(x)}{F_2 + F_1 f(x)} \end{aligned}$$

  より成立。

- $n = k$ のとき,

$$g_k(x) = \frac{F_k + F_{k-1}(x)}{F_{k+1} + F_k f(x)}$$

  であると仮定すると,

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= \frac{1}{1 + g_k(x)} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{F_k + F_{k-1}(x)}{F_{k+1} + F_k f(x)}} \\ &= \frac{F_{k+1} + F_k f(x)}{(F_k + F_{k+1}) + (F_{k-1} + F_k) f(x)} \\ &= \frac{F_{k+1} + F_k f(x)}{F_{k+2} + F_{k+1} f(x)} \end{aligned}$$

  より, $n = k + 1$ でも成立。

よって, 数学的帰納法から,

$$g_n(x) = \frac{F_n + F_{n-1}f(x)}{F_{n+1} + F_n f(x)}$$

が成り立つ。
次に,

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

- $n = 1$ のとき,

  $$\begin{aligned} F_1^2 - F_0F_2 &= 1^2 - 0 \cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  より, 成立。
- $n = k$ のとき,

  $$F_k^2 - F_{k-1}F_{k+1} = (-1)^{k-1}$$

  であると仮定すると,

  $$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_kF_{k+2} &= F_{k+1}^2 - F_k(F_{k+1} + F_k) \\ &= F_{k+1}(F_{k+1} - F_k) - F_k^2 \\ &= F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 \\ &= -(-1)^{k-1} \\ &= (-1)^k \end{aligned}$$

  より, $n = k + 1$ でも成立。

よって, 数学的帰納法から,

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$$

が成り立つ。
これらより,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{F_n + F_{n-1}f(x)}{F_{n+1} + F_nf(x)} \\ &= \frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}}{F_n}\frac{1}{F_{n+1} + F_nf(x)} \\ &= \frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_n}\frac{1}{F_{n+1} + F_nf(x)} \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\int_0^1 g_n(x)dx = \frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_n}\int_0^1 \frac{1}{F_{n+1}+F_nf(x)}dx$$

であるから, $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x) > 0$ から,

$$\frac{1}{F_{n+1}+F_nf(x)} < \frac{1}{F_{n+1}}$$

より,

$$\left|\int_0^1 g_n(x)dx - \frac{F_{n-1}}{F_n}\right| < \frac{1}{F_nF_{n-1}}$$

が成り立つ。

次に, 数列 F_n の一般項を求める。$x^2 - x - 1 = 0$ の 2 解を $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とすれば, 解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 1, \alpha\beta = -1$$

よって,

$$F_{n+2} = (\alpha+\beta)F_{n+1} - \alpha\beta F_n$$

とできる。ゆえに,

$$\begin{cases} F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta(F_{n+1} - \alpha F_n) \\ F_{n+2} - \beta F_{n+1} = \alpha(F_{n+1} - \beta F_n) \end{cases}$$

よって,

$$\begin{cases} F_n - \alpha F_{n-1} = \beta^{n-2}(F_2 - \alpha F_1) = \beta^{n-1} \\ F_n - \beta F_{n-1} = \alpha^{n-2}(F_2 - \beta F_1) = \alpha^{n-1} \end{cases}$$

これらより,

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

である。ゆえに,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha^n - \beta^n} \\ &= \frac{1}{\alpha} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{F_nF_{n-1}} &= 0 \end{aligned}$$

から,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_0^1 g_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty}\frac{F_{n-1}}{F_n}\\ &= \frac{1}{\alpha}\\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{aligned}$$