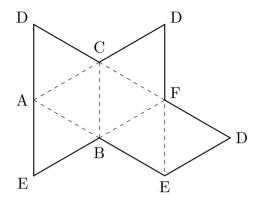
# ▋目次

p. 2	問題 21	p.19
p. 2	問題 22	p.19
p. 3	問題 23	p.20
p. 3	問題 24	p.20
p. 4	問題 25	p.21
p. 4	問題 26	p.22
p. 5	問題 27	p.23
p. 7		
p. 7		
p. 7		
p. 8		
p. 9		
p.10		
p.11		
p.12		
p.13		
p.14		
p.15		
p.16		
p.17		
	p. 2 p. 3 p. 3 p. 4 p. 4 p. 4 p. 5 p. 7 p. 7 p. 7 p. 8 p. 9 p.10 p.11 p.12 p.13 p.14 p.15 p.16	p. 2 問題 22 p. 3 問題 23 p. 3 問題 24 p. 4 問題 25 p. 4 問題 26 p. 5 問題 27 p. 7 p. 7 p. 7 p. 7 p. 8 p. 9 p.10 p.11 p.12 p.13 p.14 p.15 p.16

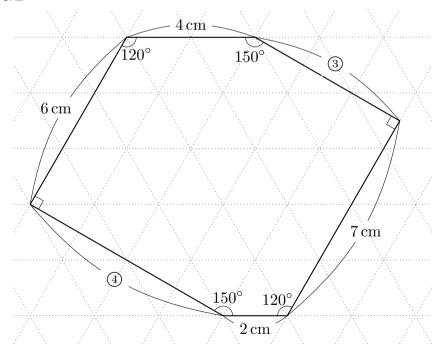
## 図形

## 問題 1



対応する頂点を,一部欠損した展開図に書き込み,もとの正八面体と 見比べると,答えは,**面 ADE** と分かる.

## 問題 2



上図のようにできるので、 $37.5 \times 4 = 150$  倍.

AC と BD の交点を X, BD と CE の交点を Y, BI と CH の交点を Z, CJ と DI の交点を W, CI の中点を M, とする. 立体 XBCZ の体積は元の立体の  $\frac{1}{18} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{108}$  倍. 立体 ZMWI の体積は元の立体の  $\frac{1}{24} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{144}$  倍. よって,立体 XYCZMW の体積は元の立体の  $\frac{1}{18} - \frac{1}{108} \times 2 - \frac{1}{144} = \frac{13}{432}$  倍. 以上より,求める立体の体積は元の立体の  $1 - \frac{1}{108} \times 12 - \frac{13}{432} \times 12 = \frac{19}{36}$  倍.

#### 問題 4

この形は、多くのパーツに分かれているね.

まず、1 パーツだけ使う、普通の三角形を数えてみよう. つまり、周りにある三角形だね. 全部数えると、「10 個」になるはずだ.

ここからがイジワルなポイントだ. 実は, 2つのミニ三角形をくっつけると, 大きな三角形になるパーツがあるんだ. それを探してみると, また「10 個」あるはずだ. これも周りにぐるっとあったね.

実はまだあるんだ。ミニ三角形を3つ合わせて,超大きな三角形になるものもあるんだ。それを数えてみると,また「10 個」あるんだ。実は中にある星のなかにも,超大きな三角形が5 個隠れていたんだ。

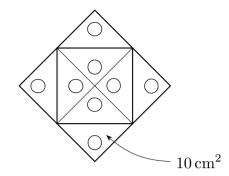
なんと! さらにさらにあるんだ! 最後は、ミニ三角形を5つ合わせて、超超大きな三角形を作るんだ. それは全部で「5 個」あるんだ. 1 つ目は、真ん中にズドンとあるね.

これで全部! 全部数えると, 答えは「35個」だ!

見つけられない三角形があったら、作問サークル公式 X

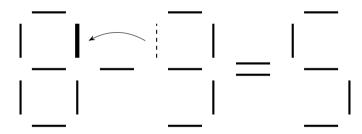
(**@WU\_sakumon**) の DM から教えてね! イラスト付きで答えを教えるよ!

《答え》35 個

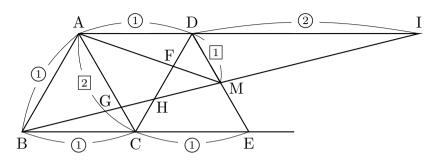


- $\bigcirc$  をつけた三角形は全て同じ面積なので、答えは  $10\,\mathrm{cm}^2 \times 8 = 80\,\mathrm{cm}^2$ .
- 問題 6

例えば,このようにすればよい.



(1) CH: HD と CF: FD を求めて連比しましょう.



AD の延長と BM の延長の交点を I とすると,

 $\triangle$ MBE  $\equiv \triangle$ MID

より、ID = BE. AB = ① とすると、ID = ②. ここで、  $\triangle BHC \hookrightarrow \triangle IHD$ 

より,

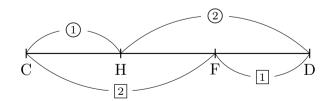
CH : DH = BC : ID : CH : DH = 1 : 2

また,

 $\triangle AFC \sim \triangle MFD$ 

より,

CF : DF = AC : MD  $\therefore CF : DF = 2 : 1$ 



CH: HD = 1: 2 も CF: FD = 2: 1 も CD を 3 等分したときの比を表すので、

CH : HF : FD = 1 : 1 : 1

(2)  $\triangle ABG \simeq \triangle CHG \ \sharp \ \mathfrak{h}$ ,

$$AG: CG = AB: CH$$
 ∴  $AG: CG = 3:1$  よって、 $\triangle CHG$  は  $\triangle ABC$  の  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$ . また、 $\triangle ADF$  は  $\triangle ABC$  の  $\frac{1}{3}$ . よって、四角形  $AGHF$  は  $\triangle ABC$  の  $1 - \frac{1}{12} - \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$  倍

ただし、"≡"は合同を、"∽"は相似を表す.

# 計算

## 問題8

$$\begin{array}{c|ccccc}
(1) & & 8 & 4 \\
 & + & 2 & 5 \\
\hline
 & 1 & 0 & 9
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc} (2) & 7 & \boxed{9} \\ & + & \boxed{3} & 3 \\ \hline \boxed{1} & 1 & 2 \\ \end{array}$$

### 問題 9

				7	2	1	6	
	×			2	9	6	7	
			5	0	5	1	2	
		4	3	2	9	6		
	6	4	9	4	4			
1	4	4	3	2				
2	1	4	0	9	8	7	2	
この	二つ	が見	つか	つるの	Dで,	W	=5,	7

				8	8	6	8
	×			2	8	6	8
			7	0	9	4	4
		5	3	2	0	8	
	7	0	9	4	4		
1	7	7	3	6			
2	5	4	3	3	4	2	4

## 問題 10

- (1) 1+2+3+4
- $(2) 2+0+2\times 4$
- (3)  $3+7\times(7-6)$
- (4)  $(8+7) \times 6 \div 9$
- (5)  $6! \div 6 \div (6+6)$

- (1)  $45 \times 11 = 495$
- (2)  $45 \times 11111 = 499995$
- (3) ① S(P) は P 桁で各位の数が 1 である整数に  $1\sim9$  の和である 45 をかけたものだから.
  - ② <前半>「各位の数が1である整数」は5の倍数ではない.0 個.

<後半>各位の数が 1 である整数が 9 の倍数であればよい. つまり P が 9 の倍数であることが条件. よって求める個数は  $123456789 \div 9$  の商, すなわち 13717421 個.

## 速さ

#### 問題 12

(1) 時速 72 km を秒速に換算すると、72 km/h = 72,000 m/h であるから、72,000 ÷ 3600 = 20 m/s となる.トンネルの長さと電車の長さを合わせると、

$$360 + 300 = 660 \text{ m}$$
   
  $660 \div 20 = 33$ 秒 (距離÷速度)

C は A が 1 分計ると 40 秒しか進まないので,C の時間の進む割合は A の  $\frac{40}{60}=\frac{2}{3}$  である.よって,A で計った時間が 33 秒になるので,C で測ると, $33 \times \frac{2}{3}=22$ 秒 となる.

- (2) 急行電車は時速 108 km で走っているので、秒速にすると、108000 m/h = 108 km/h、 $108000 \div 3600 = 30 \text{ m/s}$  である。急行電車が普通電車を追い抜く速さは 30 m/s 20 m/s = 10 m/s である。B は A の 1.5 倍早く時間が進むので、実際の時間は $90秒 \div 1.5 = 60$ 秒 である。これを C で計ると、 $60 \times \frac{2}{3} = 40$ 秒 となる。
- (3) 追い抜きにかかる実際の時間は 60 秒で、その間に急行電車が  $10~\text{m/s} \times 60$ 秒 = 600m(相対的に) 移動する。600~m から普通電車 の長さを引くと、600-300=300~m. よって急行電車の長さは 300~m.
- (4) 反対方向から走る場合の相対速度は 20~m/s + 30~m/s = 50~m/s である. 2 つの電車の長さの合計は 300 + 300 = 600~m.  $600~\text{m}\div 50~\text{m/s} = 12$ 秒 である. これを B で計ると,  $12 \times 1.5 = 18$ 秒 となる.

まず、100 時間ずっと、新幹線に乗ってみよう. すると、 $100 \times 300 = 30\,000\,\mathrm{km}$  しか進めていない.

もし1時間だけ、新幹線じゃなくて、飛行機に乗っていたら? その1時間に進む距離は、 $800-300=500\,\mathrm{km}$  長くなるはずだ.

今回は、 $40\,000\,\mathrm{km}$  進みたい。つまり、あと  $10\,000\,\mathrm{km}$  足りないんだ。だから、 $10000\div500=20$  時間は、飛行機に乗らなくちゃいけない。よって、答えは 100-20=80 時間.

(1) 給水管 A, B, C のサイクルは 3 分サイクルである. それぞれ の給水管の稼働時間は, 25 分 20 秒 =3 分  $\times$  8 +1 分 20 秒 より, A:9分 B:8分 20 秒  $=\frac{25}{3}$  分 C:8分 である. よって、水槽の容量は

$$2 \times 9 + 3 \times \frac{25}{3} + 4 \times 8 = \underline{75} \, \text{L}$$

である.

(2) 給水管 A, B, D のサイクルは 3 分サイクルである. それぞれ の給水管の稼働時間は, 14 分 10 秒 = 3 分  $\times$  4 + 2 分 10 秒 より, A:5分 B:5分 D:4分 10 秒 =  $\frac{25}{6}$  分 である. 給水管 D が毎分  $\Box$ L 水を入れるとすると,

$$2 \times 5 + 3 \times 5 + \square \times \frac{25}{6} = 75$$

となる. これを解くと,  $\square=12$  となるので, 給水管 D は <u>毎分12 L</u> のペースで水槽に水を入れることが出来る.

(3) 給水管 A, B, C, D のサイクルは 4 分サイクルで, 1 サイクル中に 2+3+4+12=21 L 水槽に水が入れられる.  $75\div21$  を計算すると, 3 余り 12 なので, (3) の給水では, 3 サイクル終わった後に, 更に 12 L 水槽に水が入ったら, 水槽が満杯になる.

ここで、3 サイクルが終わった直後からについて考える.最初の3分では、2+3+4=9L 給水される.なので、ここから更に12-9=3L 給水されれば水槽が満杯になる.これにかかる時間は $3\div 12=\frac{1}{4}$ 分、すなわち、15 秒 である.

以上より、答えは $4分 \times 3 + 3 + 15$ 秒 = 15分15秒 である.

## 離散数学 – ゲーム・組み合わせ・整数 –

#### 問題 15

*ABCD* は *AB* で割り切れるから、*CD* は *AB* の倍数である.

 $AB \neq CD$  なので、CD は AB の 2~9 の整数倍である.

さらに、ABCD は CD で割り切れるから、 $AB \times 100$  は CD の倍数で、CD は AB の 2~9 の整数倍であることを合わせて考えると、CD は  $AB \times 2$ 、 $AB \times 4$ 、 $AB \times 5$  のいずれかと等しい.

これより調べていくと,

 $AB \times 2$  のタイプは 1326、1632、3162、3264、4896

 $AB \times 4$  のタイプは 1248, 2184

 $AB \times 5$  のタイプはなし (B が偶数だと, D=0 になってしまい, 問題の条件に合わなくなる. 奇数の場合だけを調べればいいことに注意しよう. )

よって, 1248, 1326, 1632, 2184, 3162, 3264, 4896 の中から 3 つを答えればよい.

#### ≪こぼれ話≫

本当は、「すべて求めよ.」としてもよかったが、調べ上げの労力を考えて「3つ求めよ.」という形式にした。 $A \sim D$  のどれか1つが1だと楽なので、小さい方から (A=1として) 調べてみようという勘を働かせられたら天晴れ。

ここでは表のほうが裏よりも多いこととします.

太郎さん, 花子さんの手の中には (表, 裏, 裏)、(表, 表, 表) と (表, 表, 裏)、(裏, 表, 表) の 2 通りのコインの表裏が考えられます. 太郎さんのコインが (表, 表, 裏) だとします. この時花子さんは太郎さんから見て (裏, 裏, 裏)、(表, 表, 裏) の 2 通りの手が考えられます.

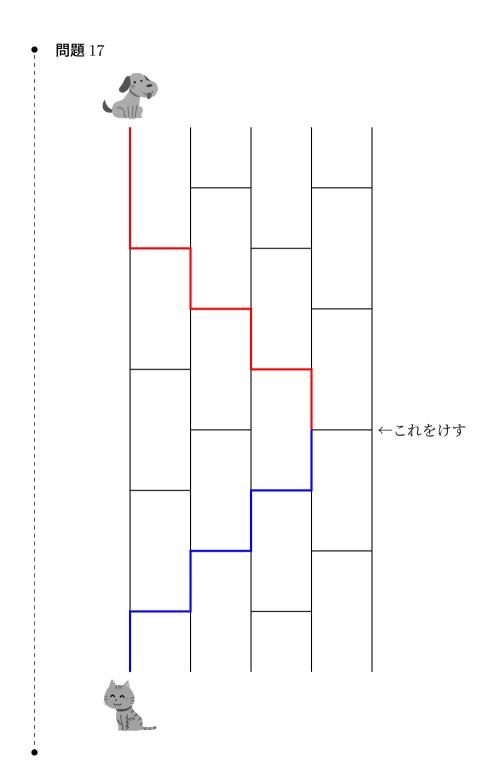
もし,(裏,裏,裏)だった場合,一致することはないので確実性の面から非合理的なので続行を選択します.これは花子さん(花子さんも(表,表,裏)なので)から見ても同様です.

その後,ひっくり返す際に太郎さんは、もし花子さんの持っているコインが(裏,裏,裏)だった場合,ひっくり返しても表が1枚,裏が2枚なので、ここで表を裏にするのは時間短縮の面で非合理的だと考えます。よって、太郎さんの持っているコインは(裏,裏,表)となります。これは花子さんから見ても同様です。もし2人が合理的な判断をしていると太郎さんが考えているので、花子さんのコインは(裏,裏,表)であると考え終了を選択します。これにて完全に一致します。

次に太郎さんのコインが (表,表,表)であるとします。この時,太郎さんから見て花子さんの手は (裏,裏,表)であることが確定するので続行を選択します。花子さんは,太郎さんの手が (表,表,表)、(裏,裏,表)の2通りであると考えますが,もし,(表,表,表)であった場合,確実性に反するので、続行を選択します。

太郎さんは表のコインを裏返し(裏,表,表)となります。この時花子さんは、太郎さんの手が(表,表,表)であった場合裏返しても(裏,表,表)となるので、表のコインを裏返すとこれは時間短縮の面で非合理的です。よって裏のコインを表にし、(裏,表,表)にします。花子さんは太郎さんが合理的な思考をしていると考えているので、ここで終了を選びます。これにて完全に一致します。

裏のほうが多いときは、上の記述の表  $\rightarrow$  裏、裏  $\rightarrow$  表に置き換えると同様の議論が成り立ちます。よって「まず続行を選択し、多いほうのコインをひっくり返し、その後終了を選択する」が答えです。



まず初めに中を指定する.そして,何でもいいので他の小瓶に移す. 溢れるか溢れないかによってこの小瓶は絶対に中でないので大か小かが 確定する.その後ラベルが開けられるが,残りは(大,中),(中,小)の2 通りが考えられるがラベルと真偽が絶対に一致しないことにより残りの 小瓶も決まる.よって中を指定すればいい.

仮に大を指定すると、この小瓶は中か小である.溢れたとき中が確定し他も確定するが、溢れなかったとき (中, 小) の 2 通りの可能性が考えられる.ラベルを開けたときに水を注いだ小瓶が、中が貼られたものであればその小瓶が大であることが確定するので他も確定できるが、小であったとするとこの小瓶は (中, 大) の 2 通りの可能性がある.この時(選んだ小瓶、注いだ小瓶、残りの小瓶)は (中, 大, 小)、(小, 中, 大)の 2 通りの可能性が考えられこれでは確定しない.

仮に小を指定すると、この小瓶は中か大である. 溢れなかったとき中が確定し他も確定するが、溢れたとき (中、大) の 2 通りの可能性が考えられる. ラベルを開けたときに水を注いだ小瓶が、中が貼られたものであればその小瓶が大であることが確定するので他も確定できるが、大であったとするとこの小瓶は (中、小) の 2 通りの可能性がある. この時(選んだ小瓶、注いだ小瓶、残りの小瓶) は (中、小、大)、(大、中、小)の 2 通りの可能性が考えられこれでは確定しない.

より、実は中を選んだ時以外は確定しないのである.

#### ▶ 問題 19

まず、 $3 \sim 89$  が全て作れることを示す。

- (i)  $3 \sim 9$ .  $1+1+1, 1+1+2, \cdots, 1+1+7$  で作れる.
- (ii)  $10 \sim 89$  のうち、9 の段、(9 の段 +1) 以外. まず、 $1 \sim 9$  の数字の中から 2 つの数字を取り出すことを考える.

$$1 + (1 \sim 9), 2 + (1 \sim 9), \cdots, 9 + (1 \sim 9)$$

これを見ると、 $2 \sim 18$  までは作れることが分かる. (9 の段の数) +  $(2 \sim 8)$  とすることで、9 の段と、(9 の段 +1) 以外の全ての数が作れる.

(iii) 9の段, (9の段+1).

8の段を上手く使えば良い.8の段の一つ,8×□を考える.すると,8×□+□とすれば,9×□となり,9の段の数となる.□には1~9しか入らない.そして+の数は,1~9までは簡単に作れる.□=1のときは9なので,3+3+3で良い.9の段+1も同じように作れる.8×□+(□+1)とすれば良い.□には1~9しか入らないため,□+1には2~10.これは数字2つで作れる.

次に、 $90 \sim 100$  が全て作れることを示す.

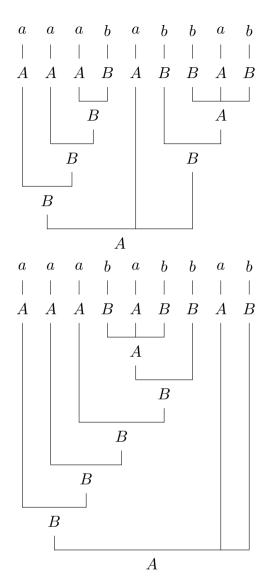
- (★)  $90 \sim 99$ . これは,  $81 + (9 \sim 18)$  を使えば, すぐに全部作れる.
- (★★) 100. 30 + 30 + 40 で作れる.

よって、 $3 \sim 100$  までの全ての数字が作れることが示された.

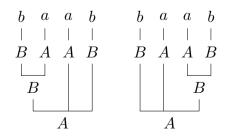
#### 【解説】

形式言語・生成文法から出題した. (1) は構文解析と呼ばれる操作をした. (2) では「規則」で作られた文法が「曖昧である」ことを確認した.

(1) まず、規則の特徴に注目したい. B を置き換える規則では B の数は増減しないことがわかる. また、B を増やすには  $A \to BAB$  が必要であることもわかる. 出発点の "A" では B の数は 0 個であったから、規則に従って文字列を生成すると b は偶数個しか現れないはずである. この時点で b を奇数個含む選択肢を除外して (b) まで絞り込むことが出来る. あとは、(b) が生成できることを確認しよう. 以下にいくつか例を示す.



(2) こちらも同様に過程を調べる.



この整数をある約数で割った数も約数であるから,

約数の逆数をすべて足した数×整数=約数をすべて足した数である。

約数の逆数をすべて足した数 = 3約数をすべて足した数 = 2016

だから、整数 =  $\frac{2016}{3}$  = 672 である.

#### ▶ 問題 22

いぬは、ねこに負けてる. ねこは、いぬより早かったんだ.

そんなねこも、1位にはなれてない.

じゃあ1位は…? 最後の1匹, くまだ.

- 2位と3位は、いぬかねこだ. ねこの方が、いぬより早かった. だから、
- 2位はねこだ.

つまり3位は、いぬだ.

≪答え≫

- 1位 くま
- 2位 ねこ
- 3位 いぬ

#### ▶ 問題 23

くまは「ビリだ……」と言ってるから、ビリ確定.

残り3人の中で、1位は誰だろう? いぬはねこに負けてるし、ねこも1位じゃない。つまり、1位はとりだ。

つまり、いぬとねこが、2位か3位になる、どっちが2位なんだろう。いぬは「ねこに負けた」って言ってる。だからねこが2位で、いぬが3位だ。

#### 《答え》

- 1位 とり
- 2位 ねこ
- 3位 いぬ
- 4位 くま

#### ● 問題 24

順番に考えてみよう. いぬは、ねこに勝ってる. だから順番は「いぬ  $\rightarrow$  ねこ」

ねこは、くまに負けてる.だから順番は「いぬ  $\rightarrow$  くま  $\rightarrow$  ねこ」または「くま  $\rightarrow$  いぬ  $\rightarrow$  ねこ」どっちが正解かは、まだわからない.

くまは、いぬに勝ってる.だから順番は「くま  $\rightarrow$  いぬ  $\rightarrow$  ねこ」 とりは、ねこに負けてる.だから順番は「くま  $\rightarrow$  いぬ  $\rightarrow$  ねこ  $\rightarrow$  とり」 ひつじは、くまに勝ってる.だから順番は「ひつじ  $\rightarrow$  くま  $\rightarrow$  いぬ  $\rightarrow$ ねこ  $\rightarrow$  とり」

#### ≪答え≫

- 1位 ひつじ
- 2位 くま
- 3位 いぬ
- 4位 ねこ
- 5位 とり

いぬとねこは、連続してゴールしてる. つまり、「1 位&2 位」「2 位&3 位」「3 位&4 位」「4 位&5 位」のどれかだ.

また、いぬとねこは、いぬの方が順位が上だ.

まず、いぬは 1 位じゃないと言ってる.だから「1 位&2 位」じゃない.そして、4 位はくまだ.だから、「3 位&4 位」も「4 位&5 位」も違う.となると、余ってるのは「2 位&3 位」だけだ.つまり、いぬとねこは、「2 位&3 位」だ.

残りは、1位と5位だ. ひつじは、ねこに負けてる。絶対に1位じゃないね、ひつじは5位だ.

最後のとりが、1位になる.

#### ≪答え≫

1位 とり

2位 いぬ

3位 ねこ

4位 くま

5位 ひつじ

とりの発言「くまとの間に3人いたよ」これって、どんな状況だろう?

### とり 〇 〇 〇 くま

きっとこんな感じだ.

今回は 5 匹でのレースだ. だから、とり&くまは、「1 位&5 位」のペアだ. (とり、くまは順番逆かもだから)

次に、いぬ「ねことの間に1人いたよ」これはどうだろう?

今残ってるのは、2位、3位、4位. この中で、1人間をあけて入れようとすると、2位&4位しかできない. だから、いぬ&ねこは、 $\lceil 2$ 位&4位」のペアだ.

余ったひつじは、3位だ、そんな3位のひつじは、いぬに勝ってる、いぬは、2位か4位のはず、

つまり、いぬは4位だ. そして、ねこは2位だ.

そんな 2 位のねこは、くまに負けてる、2 位に勝てるのは、1 位しかいないね、1 位はくまだ、

くま&とりが、「1 位&5 位」のペアだった.1 位はくまだったんだから、5 位はとりだ.

#### ≪答え≫

1位 くま

2位 ねこ

3位 ひつじ

4位 いぬ

5位 とり

## 数学以外 – 化学 –

問題 27

(1) 
$$\frac{50}{450+50} = \frac{50}{500} = \frac{1}{10}$$
 これを 100 分率に直して  $\frac{1}{10} \times 100 = \frac{10\%}{500}$ . 質量パーセント濃度は、質量に注目して計算した濃度である. (本 問では値を設定していないが) 体積を使って計算すると、体積 パーセント濃度となり、別の数値になるため注意.

(2) 加える食塩の量をxとおくと、

$$100: 3 = 450: x$$

$$\frac{100}{3} = \frac{450}{x}$$

$$100 \times x = 1350 \qquad x = 13.5 \text{ g}$$

(3)  $13.5 \,\mathrm{g}$  の食塩を加えたときに  $1.9\,^{\circ}\mathrm{C}$  下がるので、(1) の食塩水の凝固点降下度(水が氷になる温度の  $0\,^{\circ}\mathrm{C}$  からの下がり方)を y とおくと、

$$\frac{13.5}{450 + 13.5} : 1.9 = \frac{50}{450 + 50} : y$$
$$y = 4.9 \times \frac{50}{450 + 50} \times \frac{450 + 13.5}{13.5}$$

より、y = 6.52333... (=  $6.52\dot{3}$ ) なので、答えは  $6.52\,^{\circ}$ C.