第　n　問

A, B を可換な n 次実正定値対称行列とする。また, $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^t$ とする。

$$|\boldsymbol{x}^t A \boldsymbol{x}| = 1$$

を満たすとき,

$$\boldsymbol{x}^t B \boldsymbol{x}$$

の最大値, 最小値は A, B の固有値をそれぞれ λ_A, λ_B とすれば,

$$\text{最大値} = \frac{\max \lambda_A}{\min \lambda_B}, \text{最小値} = \frac{\min \lambda_A}{\max \lambda_B}$$

となることを示せ。

作問者：negi_0613_

解答

A, B は可換な対称行列であるから。次のように直交行列 P を用いて, 同時対角化可能である。よって, A の固有値を $\lambda_{A,i}$ とすれば, それらは全て実数であり, 次のように変形できる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x} &= x^t P^t PAP^t P\boldsymbol{x} \\ &= (P\boldsymbol{x})^t (PAP^t)(P\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{A,i} X_i^2\end{aligned}$$

ただし, X_i は $P\boldsymbol{x}$ の第 i 成分である。
同様に, B の固有値を $\lambda_{B,i}$ とすれば, それらは全て実数であり,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}^t B\boldsymbol{x} &= x^t P^t PBP^t P\boldsymbol{x} \\ &= (P\boldsymbol{x})^t (PBP^t)(P\boldsymbol{x}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \lambda_{B,i} X_i^2\end{aligned}$$

ここで, A は正定値行列であるから, $\lambda_{A,i} > 0$ である。
ゆえに, $Y_i = \sqrt{\lambda_{A,i}} X_i$ とおけば,

$$|\boldsymbol{x}^t A\boldsymbol{x}| = \sum_{i=1}^{n} Y_i^2 = 1$$

のもとで,

$$\boldsymbol{x}^t B\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda_{A,i}}{\lambda_{B,i}} Y_i^2$$

の最大値, 最小値を求めれば良い。
これは明らかに, 固有値は全て正であったから,

$$\text{最大値} = \frac{\max \lambda_A}{\min \lambda_B}, \text{最小値} = \frac{\min \lambda_A}{\max \lambda_B}$$