第　98　問

A をべき零行列とする。行列の列 $\{A_n\}$ が任意の自然数 n について次の関係式を満たしている。

$$A_{n+1} = AA_n + E$$

n が十分大きいとき, A_n は常に一定の行列になることを示せ。また, その行列を求めよ。

作問者：negi_0613_

解答

まず, 行列 $E-A$ が正則であることを示す。A はべき零行列であったので, ある自然数 m を用いて,

$$A^m = O$$

とできる。ここで,

$$(E-A)(A^{m-1}+A^{m-2}+\cdots+A+E) = E - A^m = E$$

であり,

$$(A^{m-1}+A^{m-2}+\cdots+A+E)(E-A) = E - A^m = E$$

であるから, 行列 $E-A$ は逆行列

$$A^{m-1}+A^{m-2}+\cdots+A+E$$

を持つ。よって, 行列 $E-A$ は正則である。次に与えられた漸化式について考える。

$$A_{n+1} = AA_n + E$$

について,

$$B = AB + E$$

なる行列 B を考えれば,

$$\begin{aligned} & B = AB + E \\ \Longleftrightarrow\ & (E-A)B = E \end{aligned}$$

$E-A$ は逆行列を持つので,

$$B = (E-A)^{-1}$$

である。これより,

$$(A_{n+1}-B) = A(A_n - B)$$

が成り立ち,

$$A_n = A^n(A_0 - B) + B$$

と書ける。ここで, $n \geqq m$ となるようにとれば,

$$A^n = O$$

であるから,

$$A_n = B$$

となる。よって, n が十分大きいとき, A_n は常に一定の行列になり, その行列は $(E-A)^{-1}$ である。