■　解答編（問題 51〜 問題 59）

問　題　51

【解答】

実数 t に対し、

$$\tan\theta = t, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

を満たす実数 θ が一意に定まるので、それを $f(t)$ と書く。

任意の非負整数 $p,\, q$ に対し、片方の文字について数学的帰納法を用いることで、

$$\int_0^1 t^p(1-t)^q dt = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$$

が成り立つ。

したがって、実数 x $(0 < x < 4)$ に対して目的の無限級数の部分和は、

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{{}_{2k}\mathrm{C}_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k(2k+1)\int_0^1 t^k(1-t)^k dt$$

$$= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (2k+1)\left(xt\left(1-t\right)\right)^k dt$$

$$= \int_0^1 \frac{-\left(\left(2n+3\right)\left(xt\left(1-t\right)\right)^{n+1}\right) + \left(2n+1\right)\left(xt\left(1-t\right)\right)^{n+2} + \left(xt\left(1-t\right)\right) + 1}{\left(\left(xt\left(1-t\right)\right) - 1\right)^2} dt \quad (\because \text{分母} \neq 0)$$

$$= \int_0^1 \frac{xt\left(1-t\right)+1}{\left(xt\left(1-t\right)-1\right)^2} dt + \int_0^1 \frac{-\left(2n+3\right)\left(xt\left(1-t\right)\right)^{n+1} + \left(2n+1\right)\left(xt\left(1-t\right)\right)^{n+2}}{\left(xt\left(1-t\right)-1\right)^2} dt$$

となるので、実数 x $(0 < x < 4)$ に対して目的の無限級数は

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{{}_{2k}\mathrm{C}_k}$$

$$= \int_0^1 \frac{xt\left(1-t\right)+1}{\left(xt\left(1-t\right)-1\right)^2} dt$$

$$= \frac{-2}{4-x}\int_0^1 \frac{2xt^2-2xt+x-2}{\left(xt^2-xt+1\right)^2} dt + \frac{1}{4-x}\int_0^1 \frac{1}{t^2-t+\frac{1}{x}} dt$$

$$= \frac{2}{4-x}\left[\frac{2t-1}{xt^2-xt+1}\right]_0^1 + \frac{1}{4-x}\sqrt{\frac{4x}{4-x}}\left[f\left(\sqrt{\frac{4x}{4-x}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1$$

$$= \frac{4}{4-x} + \frac{4}{4-x}\sqrt{\frac{x}{4-x}} f\left(\sqrt{\frac{x}{4-x}}\right)$$

と求められる。

よって特に $x=1,2,3$ のときは

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{{}_{2k}\mathrm{C}_k} = \frac{2\pi}{9\sqrt{3}} + \frac{4}{3} \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{{}_{2k}\mathrm{C}_k} = \frac{\pi}{2} + 2 \\[2ex] \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k}{{}_{2k}\mathrm{C}_k} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} + 4 \\ \end{cases}$$

である。

問 題 52

(1) まず, 積和の公式より,

$$\begin{aligned}
I(n,m) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\cos(mx)dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} x\left(\cos x\cos(mx)\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos(m+1)x+\cos(m-1)x\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\left(I(n-1,m+1)+I(n-1,m-1)\right)
\end{aligned}$$

が成り立つ。これを用いて,

$$I(n,m)=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i I(0,m-n+2i)$$

を示す。

$n=0$ のとき, 代入すれば, 明らかに成り立つ。

$n=k$ のとき,

$$I(k,m)=\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i I(0,m-k+2i)$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned}
I(k+1,m) &= \frac{1}{2}\left(I(k,m+1)+I(k,m-1)\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i I(0,m+1-k+2i)+\frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i I(0,m-1-k+2i)\right) \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i I(0,m+1-k+2i)+\sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i I(0,m-1-k+2i)\right) \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{i=1}^{k+1} {}_k\mathrm{C}_{i-1} I(0,m-1-k+2i)+\sum_{i=0}^{k} {}_k\mathrm{C}_i I(0,m-1-k+2i)\right) \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\left(\sum_{i=1}^{k} \left({}_k\mathrm{C}_{i-1}+{}_k\mathrm{C}_i\right) I(0,m-1-k+2i)+I(0,m+k+1)+I(m-k-1)\right) \\
&= \frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=0}^{k+1} {}_{k+1}\mathrm{C}_i I(m-1-k+2i)
\end{aligned}$$

より, $n=k+1$ でも成り立つ。よって, 数学的帰納法から

$$I(n,m)=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_i I(0,m-n+2i)$$

が示された。

(2) まず, a を整数とし, $I(0,a)$ を計算する。

$$
\begin{aligned}
I(0,a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(ax)dx \\
&= \begin{cases} \left[\dfrac{1}{a}\sin(ax)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} & (a \neq 0) \\ \left[1\right]_0^{\frac{\pi}{2}} & (a = 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{\sin\left(\frac{a\pi}{2}\right)}{a} & (a \neq 0) \\ \dfrac{\pi}{2} & (a = 0) \end{cases} \\
&= \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{a-1}{2}}}{a} & (a\text{が奇数}) \\ 0 & (a\text{が偶数}) \\ \dfrac{\pi}{2} & (a = 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となる。次に, $I(2n,2m)$ を計算すると,

$$
\begin{aligned}
I(2n,2m) &= \frac{1}{2^{2n}} \sum_{i=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_i I(0, 2m-2n+2i) \\
&= \begin{cases} 0 & (|m| > n) \\ \dfrac{\pi}{2^{2n+1}} {}_{2n}\mathrm{C}_{n-m} & (|m| \leqq n) \end{cases}
\end{aligned}
$$

となる。

(3) まず補題として, 以下を示す。

$$
\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx)
$$

$n=1$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(3x)}{\sin x} &= \frac{\sin x + 2\sin x \cos(2x)}{\sin x} \\
&= 1 + 2\cos(2x)
\end{aligned}
$$

より, 成立する。

$n=l$ のとき,

$$
\frac{\sin(2l+1)x}{\sin x} = 1 + 2\sum_{k=1}^{l} \cos(2kx)
$$

が成り立つと仮定すると,

$$
\begin{aligned}
\frac{\sin(2l+3)x}{\sin x} &= \frac{\sin(2l+1)x + 2\sin x\cos(2l+2)x}{\sin x} \\
&= \frac{\sin(2l+1)x}{\sin x} + 2\cos(2l+2)x \\
&= 1 + 2\sum_{k=1}^{l+1} \cos(2kx)
\end{aligned}
$$

より, $n=l+1$ でも成り立つ。よって, 数学的帰納法から示された。

次に積和の公式より,

$$
\cos(nx)\sin((n+1)x) = \frac{1}{2}\left(\sin(2n+1)x + \sin x\right)
$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x \cos(nx) \sin((n+1)x)}{\sin x} dx &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \left(\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} + 1 \right) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) dx\end{aligned}$$

有限和なので, $\displaystyle\int$ と $\displaystyle\sum$ の順序を交換でき,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \sum_{k=0}^{n} \cos(2kx) dx &= \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n} x \cos(2kx) dx \\ &= \sum_{k=0}^{n} I(2n, 2k) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{\pi}{2^{2n+1}} {}_{2n}\mathrm{C}_{n-k} \\ &= \frac{\pi}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{n-k}\end{aligned}$$

今,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{2n} {}_{2n}\mathrm{C}_{k} + {}_{2n}\mathrm{C}_{n} \right) \\ &= \frac{1}{2}\left(2^{2n} + {}_{2n}\mathrm{C}_{n} \right)\end{aligned}$$

であるから, これを代入すれば,

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{n} {}_{2n}\mathrm{C}_{n-k} &= \frac{\pi}{2^{2n+1}} \frac{1}{2} \left(2^{2n} + {}_{2n}\mathrm{C}_{n} \right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{n}}{2^{2n}} \right)\end{aligned}$$

以上より,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2n} x \cos(nx) \sin((n+1)x)}{\sin x} dx = \boxed{\frac{\pi}{4}\left(1 + \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_{n}}{2^{2n}} \right)}$$

【解答】

(1) 非負実数 x の関数 y を

$$y = x^a - a - 1$$

と定めると、

$$y' = ax^{a-1} - 1$$

が成り立つ。
これは単調増加する関数であり $x = 0$ のとき $y' = -1$ だから、ある正の実数 x_0 が存在して

$$\begin{cases} y' < 0 & (0 \leq x < x_0) \\ y' = 0 & (x = x_0) \\ y' > 0 & (x_0 < x) \end{cases}$$

が成り立つ。
よって、y は $0 \leq x \leq x_0$ で単調減少し、$x_0 \leq x$ で単調増加する。
ここで $x = 0$ のとき $y = 0$ だから、$x > 0$ において $y = 0$ となるのは、$x_0 < x$ におけるただ一つのみ。
これで示された。
(参考資料)

x	(0)	$\cdots$		$\cdots$		$\cdots$	(∞)
y'	(-1)	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+$	$\nearrow$	
y	(0)	$\searrow$	$-$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	(∞)

(2) 1 より大きい実数 t に対して $f(t)$ は

$$f(t)^t = f(t) + 1 \quad \cdots (\star)$$

を満たす唯一の正の実数である。

(i) 式 $(\star)$ を変形すると、

$$\log\left(f\left(t\right)\right) = \frac{\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{t}$$

を得る。
いま、

$$f(t) > 0$$

であるから

$$\log\left(f\left(t\right)+1\right) > 0$$

が成り立ち、$t > 0$ でもあるから

$$0 < \log\left(f\left(t\right)\right)$$

が従う。

(ii) 式 $(\star)$ を変形すると、

$$\log\left(f\left(t\right)\right) = \frac{\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{t}$$

を得る。

いま、(i) より

$$1 < f(t)$$

であるから

$$f(t) + 1 < 2f(t)$$

が成り立つため、

$$\begin{aligned}\log\left(f\left(t\right)\right) &= \frac{\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{t} \\ &< \frac{\log\left(2f\left(t\right)\right)}{t} \\ &= \frac{\log\left(2\right)+\log\left(f\left(t\right)\right)}{t}\end{aligned}$$

という不等式が成り立つ。

この不等式から、$\log(t)$ について

$$\log\left(f\left(t\right)\right) < \frac{\log\left(2\right)}{t-1}$$

が成立する。

以上 (i) と (ii) より

$$0 < \log\left(f\left(t\right)\right) < \frac{\log\left(2\right)}{t-1}$$

と評価できるので、はさみうちの定理より

$$\lim_{t\to\infty} \log\left(f\left(t\right)\right) = 0$$

が成り立つ。

したがって、指数対数の連続性より

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = 1$$

が成り立つ。(後のために、1 より大きい方からのみ近づくことを述べておく。)

(3) 問 (2) と式 $(\star)$ より

$$\begin{aligned}&tf(t) - \boxed{ア}\, t \\ =&t\left(f(t)-1\right) \\ =&\frac{\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{\log\left(f\left(t\right)\right)}\left(f\left(t\right)-1\right) \\ =&\log\left(f\left(t\right)+1\right)\left(\frac{f\left(t\right)-1}{\log\left(f\left(t\right)\right)}\right)\end{aligned}$$

と変形できる。

したがって、問 (2) の答えより

$$\lim_{t\to\infty}\left(tf(t)-\boxed{\text{ア}}\,t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\log\left(f\left(t\right)+1\right)\left(\frac{f\left(t\right)-1}{\log\left(f\left(t\right)\right)}\right)$$

$$=\lim_{u\to 1+0}\log\left(u+1\right)\left(\frac{u-1}{\log\left(u\right)}\right) \qquad (u=f(t))$$

$$=\lim_{v\to +0}\log\left(v+2\right)\left(\frac{v}{\log\left(v+1\right)}\right) \qquad (v=u-1)$$

$$=\log 2$$

である。

(4) 問 (2),(3) と式 $(\star)$ より

$$t^2f(t)-\boxed{\text{ア}}\,t^2-\boxed{\text{イ}}\,t$$

$$=t^2f(t)-t^2-(\log 2)t$$

$$=\left(\frac{\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{\log\left(f\left(t\right)\right)}\right)^2 f\left(t\right)-\left(\frac{\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{\log\left(f\left(t\right)\right)}\right)^2-\left(\log 2\right)\left(\frac{\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{\log\left(f\left(t\right)\right)}\right)$$

$$=\frac{\left(\log\left(f\left(t\right)+1\right)f\left(t\right)-\log\left(f\left(t\right)+1\right)-\left(\log 2\right)\log\left(f\left(t\right)\right)\right)\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{\log\left(f\left(t\right)\right)^2}$$

と変形できる。

したがって、問 (2) の答えより

$$\lim_{t\to\infty}\left(t^2f(t)-\boxed{\text{ア}}\,t^2-\boxed{\text{イ}}\,t\right)$$

$$=\lim_{t\to\infty}\frac{\left(\log\left(f\left(t\right)+1\right)f\left(t\right)-\log\left(f\left(t\right)+1\right)-\left(\log 2\right)\log\left(f\left(t\right)\right)\right)\log\left(f\left(t\right)+1\right)}{\log\left(f\left(t\right)\right)^2}$$

$$=\lim_{u\to +0}\frac{\left(\log\left(e^u+1\right)\left(e^u-1\right)-u\log 2\right)\log\left(e^u+1\right)}{u^2} \qquad (u=\log(f(t)))$$

である。

これを求めるために上下から評価する。

以下、$u\geq 0$ とする。

(i) 非負実数 u に対する関数 $g_1(u)$ を

$$g_1\left(u\right)=\log\left(e^u+1\right)-\frac{1}{2}u-\log 2$$

と定めると

$$g_1'(u) = \frac{e^v}{e^v+1} - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{e^u-1}{e^u+1}\right)$$

$$\geq 0$$

が成り立つ。
これより $g_1(u)$ の増減は

u	0	$\cdots$
$g_1'(u)$	0	$+$
$g_1(u)$	0	$\nearrow$

となるから、

$$g_1(u) \geq 0$$

が得られる。
したがって、

$$\log(e^u+1) \geq \frac{1}{2}u + \log 2$$

である。

(ii) 非負実数 u に対する関数 $g_2(u)$ を

$$g_1(u) = \log(e^u+1) - \frac{1}{2}u - \log 2$$

と定めると

$$g_2'(u) = 2u + \frac{1}{2} - \frac{e^u}{e^u+1}$$

$$= 2u + \frac{1}{e^u+1} - \frac{1}{2}$$

が成り立つ。
よって、

$$g_2''(u) = 2 + \frac{-e^u}{(e^u+1)^2}$$

$$= 1 + \frac{e^{2u}+e^u+1}{(e^u+1)^2}$$

$$\geq 0$$

が成り立つ。

これより $g_2'(u)$ の増減は

u	0	$\cdots$
$g_2''(u)$	$+$	$+$
$g_2'(u)$	0	$\nearrow$

となるから、

$$g_2'(u) \geq 0$$

が得られる。
これより $g_2(u)$ の増減は

u	0	$\cdots$
$g_2'(u)$	0	$+$
$g_2(u)$	0	$\nearrow$

となるから、

$$g_2(u) \geq 0$$

が得られる。
したがって、

$$\log\left(e^u+1\right) \leq u^2+\frac{1}{2}u+\log 2$$

である。

(iii) 非負実数 u に対する関数 $h_1(u)$ を

$$h_1\left(u\right)=e^u-1-u-\frac{1}{2}u^2$$

と定めると

$$h_1'\left(u\right)=e^u-1-u$$

が成り立つ。
よって、

$$h_1''\left(u\right)=e^u-1$$

$$\geq 0$$

が成り立つ。

これより $h_1''(u)$ の増減は

u	0	$\cdots$
$h_1''(u)$	0	$+$
$h_1'(u)$	0	$\nearrow$

となるから、

$$h_1'(u) \geq 0$$

が得られる。
これより $h_1'(u)$ の増減は

u	0	$\cdots$
$h_1'(u)$	0	$+$
$h_1(u)$	0	$\nearrow$

となるから、

$$h_1(u) \geq 0$$

が得られる。
したがって、

$$e^u \geq 1 + u + \frac{1}{2}u^2$$

である。

(iv) 非負実数 u に対する関数 $h_2(u)$ を

$$h_2(u) = 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + u^3 - e^u$$

と定めると

$$h_2'(u) = 1 + u + 3u^2 - e^u$$

が成り立つ。
よって、

$$h_2''(u) = 1 + 6u - e^u$$

が成り立つ。
よって、

$$h_2'''(u) = 6 - e^u$$

となるので、

$$0 \leq u \leq 1 \implies h_2'''(u) \geq 0$$

が成り立つ。
これより $h_2''(u)$ の増減は

u	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h_2'''(u)$	$+$	$+$	$+$	?
$h_2'(u)$	0	$\nearrow$		?

となるから、

$$0 \leq u \leq 1 \implies h_2''(u) \geq 0$$

が得られる。
これより $h_2'(u)$ の増減は

u	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h_2''(u)$	0	$+$	$+$	?
$h_2'(u)$	0	$\nearrow$		?

となるから、

$$0 \leq u \leq 1 \implies h_2'(u) \geq 0$$

が得られる。
これより $h_2(u)$ の増減は

u	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h_2'(u)$	0	$+$	$+$	?
$h_2(u)$	0	$\nearrow$		?

となるから、

$$0 \leq u \leq 1 \implies h_2(u) \geq 0$$

が得られる。
したがって、

$$0 \leq u \leq 1 \implies e^u \leq 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + u^3$$

である。
以上から、目的の関数

$$\frac{\left(\log\left(e^u+1\right)\left(e^u-1\right) - u\log 2\right)\log\left(e^u+1\right)}{u^2}$$

について

$$0 \leq u \leq 1 \implies \frac{\left(\left(\log 2 + \frac{1}{2}u\right)\left(u + \frac{1}{2}u^2\right) - u\log 2\right)\log\left(e^u + 1\right)}{u^2}$$

$$\leq \frac{\left(\log\left(e^u + 1\right)\left(e^u - 1\right) - u\log 2\right)\log\left(e^u + 1\right)}{u^2}$$

$$\leq \frac{\left(\left(\log 2 + \frac{1}{2}u + u^2\right)\left(u + \frac{1}{2}u^2 + u^3\right) - u\log 2\right)\log\left(e^u + 1\right)}{u^2}$$

と評価できる。

上下の評価をそれぞれ変形すると

$$0 \leq u \leq 1 \implies \left(\left(\frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}u\right)\log\left(e^u + 1\right)$$

$$\leq \frac{\left(\log\left(e^u + 1\right)\left(e^u - 1\right) - u\log 2\right)\log\left(e^u + 1\right)}{u^2}$$

$$\leq \left(\left(\frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\log 2 + \frac{5}{4}\right)u + u^2 + u^3\right)\log\left(e^u + 1\right)$$

となるから、はさみうちの定理より

$$\lim_{u \to +0} \frac{\left(\log\left(e^u + 1\right)\left(e^u - 1\right) - u\log 2\right)\log\left(e^u + 1\right)}{u^2} = \left(\frac{\log 2}{2} + \frac{1}{2}\right)\log(2)$$

が得られる。

以上から、

$$\lim_{t \to \infty}\left(t^2 f(t) - \boxed{ア}\, t^2 - \boxed{イ}\, t\right) = \frac{(\log 2)(\log 2 + 1)}{2}$$

である。

(5) 式 $(\star)$ を用いて

$$\lim_{t \to \infty}\left(\frac{f(t)}{\boxed{ア}}\right)^t$$

$$= \lim_{t \to \infty} f(t)^t$$

$$= \lim_{t \to \infty}\left(f(t) + 1\right)$$

$$=2$$

である。

【最終解答】

ア: 1

イ: $\log 2$

ウ: $\dfrac{(\log 2)(\log 2 + 1)}{2}$

エ: 2

【コメント】
「方程式の解の極限」の問題です。アを求めたら、イとウは「文字を一種類にする」方針が使えます。この方針はしばしば見かけるので、マスターしておくとよいと思います。一方で、エは、一番最初の定義に戻ると簡潔に解くことができます。
さて、ア、イ、ウの三問は、t が大きいときに $g(t)$ がどのようなふるまいをするか調べることをテーマにしています。同様の手順を続けると、どのような数列になるのかが気になります。

問　題　54

関数 f を

$$f(x) = (x+1) - 2^x$$

と定めると

$$f'(x) = 1 - (\log 2)\, 2^x$$

である。

また、

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

はすぐに確かめられる。

したがって $f(x)$ の増減は

x	$\cdots$	0	$\cdots$		$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
y	$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$

となる。

ゆえに、求める面積は

$$\int_0^1 f(x)\, dx$$

$$= \int_0^1 (x+1)\, dx - \int_0^1 2^x dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1 - \left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + 1 - \frac{2-1}{\log 2}$$

$$= \boxed{\frac{3\log 2 - 2}{2\log 2}}$$

と求められる。

問 題 55

以下のように座標を設定する．

円柱の側面上の点：$\boldsymbol{r}=(X,\,4\cos\theta,\,4\sin\theta)\qquad(X,\,\theta\in\mathbb{R},\quad 0\leqq\theta\leqq 2\pi)$

円柱の側面上の方程式：$y^2+z^2=16$ ①

ボール：$x^2+y^2+(z-6)^2=1$ ②

点光源：$\boldsymbol{r}_l=(0,\,0,\,8)$

このとき，点光源から円柱の側面上の点に向かう直線上の点は以下のように表現できる．

$$\boldsymbol{r}_l+t(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_l)=(tX,\,4t\cos\theta,\,8(1-t)+4t\sin\theta)\qquad(\theta\in\mathbb{R}) \quad ③$$

影ができるためにはこの直線がボールを通過する，つまりボールの表面上の点を含む必要がある．よって，③ を ② に代入しても成立するような実数 t が存在する条件を考える．

$$t^2X^2+16t^2\cos^2\theta+(8(1-t)+4t\sin\theta-6)^2=1$$
$$(X^2-64\sin\theta+80)t^2+2(8\sin\theta-16)t+3=0$$

この二次方程式が実数解を持つための条件は，判別式を D とすると以下のようになる．

$$\frac{D}{4}=(8\sin\theta-16)^2-3(X^2-64\sin\theta+80)\geq 0$$

これを整理すると

$$3X^2\leqq 16(2\sin\theta-1)^2$$

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}(2\sin\theta-1)\leqq X\leqq\frac{4}{\sqrt{3}}(2\sin\theta-1) \quad ④$$

次に，光が届きうる θ の範囲を考える．それは，③ を ① に代入したときに t が $0\leqq t\leqq 1$ の範囲でただ一つの解を持つような θ を考えればよい．③ を ① に代入すると

$$(-64\sin\theta+80)t^2+64(\sin\theta-2)t+48=0$$

$f(t)=(-64\sin\theta+80)t^2+64(\sin\theta-2)t+48$ とすると，$f(0)=48>0,\ f(1)=0$ となるので，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲でただ一つの解を持つためには軸の x 座標が 1 以上である必要がある．

$$\frac{-32(\sin\theta-2)}{-64\sin\theta+80}\geq 1$$

これを整理すると

$$\sin\theta\geq\frac{1}{2}$$

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\frac{5\pi}{6} \quad ⑤$$

ここで，X 軸に垂直で円柱の側面に沿うように Y 軸を取ると，以下のような条件を満たす．

$$4\theta=Y \quad ⑥$$

(X 軸 ($y=4$ かつ $z=0$) に垂直な平面で切断したときの円柱の円周が Y 軸になっている．)

④，⑤，⑥ より，XY 平面における求めたい領域は以下のようになる．

$$-\frac{4}{\sqrt{3}}\left(2\sin\left(\frac{Y}{4}\right)-1\right)\leqq X\leqq\frac{4}{\sqrt{3}}\left(2\sin\left(\frac{Y}{4}\right)-1\right)$$

よって，求めたい面積 S は

$$S=\frac{8}{\sqrt{3}}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{10\pi}{3}}\left(2\sin\left(\frac{Y}{4}\right)-1\right)dY=64\left(1-\frac{\sqrt{3}\pi}{9}\right)$$

である．

問　題　56

任意の正の整数 n に対して

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k}$$

が成り立つ。
ゆえに、f の原点における連続性から

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} f(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(f\left(\frac{x}{2^n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} \right) \\ &= f(0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{2^k} \\ &= f(0) + x \end{aligned}$$

となるから、ある実数定数 c があって

$$f(x) = x + c$$

が成立する。
逆に、そのようなものは全て適する。
したがって答えは

$$f(x) = x + c \quad (c \text{ は実数定数})$$

である。

【別解】
$g(x) = f(x) - x$ とおくと、条件 $f(2x) = f(x) + x$ は $g(2x) = g(x)$ と書き換わる。本質的に何かが変わるわけではないが、幾分か見やすくなる。

問 題 57

任意の正の実数 x, y に対して

$$2xf'(x+y-1) = f(x)f(y)\log f(x)$$

が成り立つことより、特に

$$y = 1$$

を代入しても成り立つので、

$$2xf'(x) = f(x)f(1)\log f(x)$$

となる。
いま

$$x > 0$$

が成り立ち、また同時に、

$$f(x) > 1$$

かつそれにより

$$\log f(x) > 0$$

であるから

$$f(x)\log f(x) > 0$$

より、除法を行って

$$\frac{f'(x)}{f(x)\log f(x)} = \frac{f(1)}{2x}$$

が成立する。
両辺 x で不定積分することで

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)\log f(x)}dx = \int \frac{f(1)}{2x}dx$$

となる。
左辺において

$$\log f(x) =: t$$

と置換すれば

$$\int \frac{1}{t}dt = \frac{f(1)}{2}\int \frac{1}{x}dx$$

を得るから、積分を計算して

$$\log_e t = \frac{f(1)}{2}\log_e x + c \quad (c\text{はある実数})$$

となる。
ゆえに、t をもとに戻して

$$\log_e \log f(x) = \frac{f(1)}{2}\log_e x + c \quad (c\text{はある実数})$$

が成り立つから、両辺を指数関数の肩に乗せて

$$\log f(x) = e^c x^{\frac{f(1)}{2}} \quad (c\text{はある実数})$$

となり、再び両辺を指数関数の肩に乗せて

$$f(x) = e^{e^c x^{\frac{f(1)}{2}}} \quad (c\text{はある実数})$$

となる。
ゆえに、

$$f(x) = e^{Cx^{\frac{f(1)}{2}}} \quad (C\text{ はある正の実数})$$

が成立する。

一方で、任意の正の実数 $x,\, y$ に対して

$$2xf'(x+y-1) = f(x)f(y)\log f(x)$$

が成り立つことより、特に

$$x = 1$$

を代入しても成り立つので、

$$2f'(y) = f(1)f(y)\log f(1)$$

となる。
いま

$$f(y) > 1$$

より、除法を行って

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{f(1)\log f(1)}{2}$$

が成立する。
両辺 y で不定積分することで

$$\int \frac{f'(y)}{f(y)}dy = \int \frac{f(1)\log f(1)}{2}dy$$

となる。
左辺において

$$f(y) =: u$$

と置換すれば

$$\int \frac{1}{u}du = \frac{f(1)\log f(1)}{2}\int dy$$

を得るから、積分を計算して

$$\log_e u = \frac{f(1)\log f(1)}{2}y + d \quad (d\text{はある実数})$$

となる。
ゆえに、u をもとに戻して

$$\log_e f(y) = \frac{f(1)\log f(1)}{2}y + d \quad (d\text{はある実数})$$

が成り立つから、両辺を指数関数の肩に乗せて

$$f(y) = e^d e^{\frac{f(1)\log f(1)}{2}y} \quad (d\text{はある実数})$$

となる。
ゆえに、

$$f(y) = De^{\frac{f(1)\log f(1)}{2}y} \quad (D\text{ はある正の実数})$$

が成立する。

以上から、任意の正の実数 x に対する $f(x)$ の表式として

$$f(x) = e^{Cx^{\frac{f(1)}{2}}} \quad (C\text{ はある正の実数})$$

と

$$f(x)=De^{\frac{f(1)\log f(1)}{2}x} \quad (D \text{ はある正の実数})$$

の二つが得られたことになるので、二つを等号でつないで

$$e^{Cx^{\frac{f(1)}{2}}}=De^{\frac{f(1)\log f(1)}{2}x} \quad (C \text{ と } D \text{ はある正の実数})$$

が得られる。
両辺の自然対数をとって

$$Cx^{\frac{f(1)}{2}}=\frac{f(1)\log f(1)}{2}x+\log D$$

が成り立つ。
右辺は x の一次関数なので、左辺も x の一次関数であるから

$$\frac{f(1)}{2}=1$$

が成り立ち、さらにそのとき定数項および一次の係数をそれぞれ比較して

$$C=\frac{f(1)\log f(1)}{2}$$

ならびに

$$0=\log D$$

が得られる。
したがって、

$$\begin{cases} f(1)=2 \\ C=\log 2 \\ D=1 \end{cases}$$

となる。
これを、上の $f(x)$ の表式（2 つあるがどちらでもよい）に代入して、

$$f(x)=e^{(\log_e 2)x}$$

となり、整理して

$$f(x)=2^x$$

を得る。
逆にこれが解であることは、指数関数の性質と、任意の正の実数 x, y に対して

$$\begin{aligned} 2xf'(x+y-1) &= 2x\,(\log 2)\,2^{x+y-1} \\ &= 2^x 2^y\,(x\log 2) \\ &= f(x)f(y)\log f(x) \end{aligned}$$

であることから従う。

ゆえに、目的の関数は

$$f(x)=2^x$$

である。

問　題　58

$\log n$ の整数部分が 1 ということは、

$$1 \leq \log n < 2$$

つまり

$$e \leq n < e^2$$

ということである。
e の値が

$$2 < e < 3$$

かつ

$$7 < e^2 < 8$$

より、$\log n$ の整数部分が 1 となるような整数 n は

$$n = 3, 4, 5, 6, 7$$

の、5 つ。