問　題　1

I (1) 物体 A と物体 B の間働く力はその内力のみであるから，相対運動は円運動である。したがって，重心から見たそれぞれの運動も円運動である。xy 平面から見てもそれぞれが円運動をするので，重心速度は 0 でなくてはならない。故に y 方向の運動量は保存し，

$$-mv_0 + MV_0 = 0 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{m}{M} = \frac{V_0}{v_0}$$

(2) 重心からのそれぞれの物体の距離の比は, 質量の逆比なので, 物体 A と物体 B の円運動の半径 r_A, r_B は

$$r_A = \frac{M}{m+M}l, \quad r_B = \frac{m}{m+M}l$$

(3) 重心は初期位置 $(0, 0)$，初速度 $\left(0,\ \dfrac{-mv_0 + MV_0}{m+M}\right)$，加速度 $(0,\ g\sin\theta)$ の等加速度運動をするので，時刻 t での座標は

$$\left(0,\ \frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2 + \frac{-mv_0+MV_0}{m+M}t\right)$$

である。一方物体 B から見た物体 A の運動は速さ $v_0 + V_0$ の円運動であるから，時刻 t での相対座標は

$$\left(l\,\cos\frac{2\pi}{v_0+V_0}t,\ l\,\sin\frac{2\pi}{v_0+V_0}t\right)$$

したがって時刻 t での物体 A の座標は

$$\left(\frac{M}{m+M}\cdot l\,\cos\frac{l}{v_0+V_0}t,\ \frac{1}{2}g\sin\theta\cdot t^2 + \frac{-mv_0+MV_0}{m+M}t + \frac{M}{m+M}\cdot l\,\sin\frac{l}{v_0+V_0}t\right)$$

II (1) 重心は初期位置 $\left(\dfrac{m}{m+M}l,\ 0\right)$，初速度 $\left(0,\ \dfrac{m}{m+M}v_1\right)$，加速度 $(0,\ -g)$ の等加速度運動をするので，時刻 t での座標は

$$\left(0,\ -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{m}{m+M}v_1\right)$$

(2) 物体 B から見た物体 A の相対運動は速さ v_1 の円運動であるから，周期は $\dfrac{2\pi l}{v_1}$.

(3) ゆえに時刻 t での物体 B から見た物体 A の相対 y 座標は $l\sin\dfrac{l}{v_1}t$ であるから，xy 座標系での物体 A の y 座標は

$$-\frac{1}{2}gt^2 + \frac{m}{m+M}v_1 + l\sin\frac{l}{v_1}t$$

(4) 運動の周期性から，問題にある状況は $t = 0$ での状況と同じである。すなわちこの瞬間物体 A は物体 B に対し速さ v_1 での円運動をしているので，棒から物体 B が受ける力の大きさを T_1 とすると，相対運動方程式から

$$T_1 = \frac{mM}{m+M}\frac{v_1^2}{l}$$

(5) $t = 0$ での状況と，問題にある状況 (物体 A の速さを v_2 とする) とでは，力学的エネルギーの合計は一致する。そのうち，水平方向の重心運動エネルギーは保存するので,

$$0 + \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 = \frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}v_2^2 + 0 - mgl.$$

これと物体 B が静止して見える座標系での物体 A の運動方程式 (棒が物体 A から受ける力の大きさを T_2 とする)

$$m\frac{v_2^2}{l} = T_2 - mg$$

から,

$$T_2 = mg + \left(1 + \frac{m}{M}\right)\cdot m\frac{v_1^2 + 2gl}{l}$$

問　題　2

(イ)、(エ)

《解説》

（ア）$C=8,9,10$ のアルカンは、オクタン、ノナン、デカンである。ウンデカンは $C=11$、ドデカンは $C=12$ のアルカンである。

（ウ）ヒドロキシ基が結合している炭素原子についている水素原子が 1 個のアルコールは、第二級アルコールである。第一級アルコールでは、ヒドロキシ基が結合している炭素原子には水素原子がついていない。

(イ)、(エ) は記述の通り。

問　題　3

(1) 光が空気中からコアに入射する際のスネルの法則、およびコアとクラッド間の全反射の条件から

$$1 \cdot \sin\phi_{inmax} = n_1 \sin\phi_{out_{max}}$$
$$n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \phi_{outmax}\right) = n_1 \cos\phi_{outmax} = n_2$$

ただし $\phi_{in} = \phi_{inmax}$ のとき $\phi_{out} = \phi_{outmax}$ とする。
二式から

$$\sin\phi_{inmax} = n_1 \sin\phi_{out_{max}} = n_1\sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

(2) 光路長を L として $\cos\phi_{outmax} = \dfrac{l}{L/n_1}$ となるから

$$L = \frac{ln_1}{\cos\phi_{outmax}} = \frac{ln_1^2}{n_2}$$

(3)

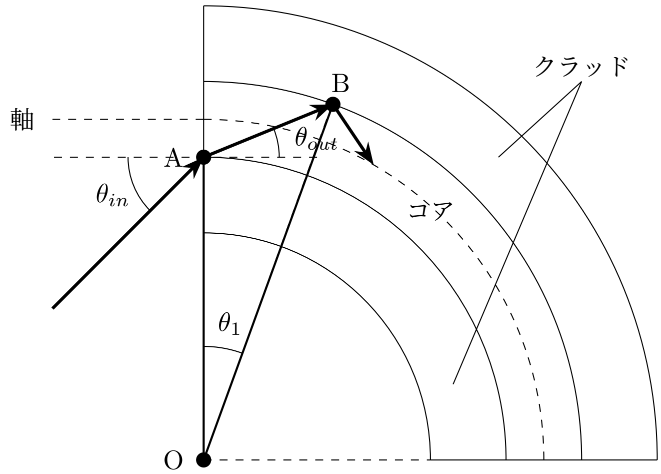


図 3

三角形 OAB に着目すると、コアとクラッドの境界での 1 度目の反射である点 B における入射角は $90^\circ - \theta_1 - \theta_{out}$ とわかる。また、直線 OB について対称に光が進む事を考慮すると、2 度目の反射の入射角は $90^\circ - \theta_{out}$ となり、以降も反射の対称性を考えれば、入射角は $90^\circ - \theta_1 - \theta_{out}$ と $90^\circ - \theta_{out}$ を繰り返すことが分かる。つまり全反射の条件は

$$n_1 \cos(\theta_{1max} + \theta_{outmax}) = n_2 \text{かつ} n_1 \cos\theta_{outmax} > n_2$$

または

$$n_1 \cos(\theta_{1max} + \theta_{outmax}) > n_2 \text{かつ} n_1 \cos\theta_{outmax} = n_2$$

であるが、不等式の成立を考えれば

$$n_1 \cos(\theta_{1max} + \theta_{outmax}) = n_2$$

とわかるので

$$\frac{n_2}{n_1} = \cos(\theta_{1max} + \theta_{outmax})$$

(4)

$$\frac{n_2}{n_1} = \cos(\theta_{1max} + \theta_{outmax}) = \cos\theta_{1max}\cos\theta_{outmax} - \sin\theta_{1max}\sin\theta_{outmax}$$
$$\sin\theta_{outmax} = \frac{\sin\theta_{inmax}}{n_1}$$

より、

$$n_1 \cos\theta_{outmax} = \frac{n_2 + \sin\theta_{inmax}\sin\theta_{1max}}{\cos\theta_1}$$

よって

$$\begin{aligned} n_1^2 &= n_1^2(\cos^2\theta_{outmax} + \sin^2\theta_{outmax}) \\ &= (\frac{n_2 + \sin\theta_{inmax}\sin\theta_{1max}}{\cos\theta_{1max}})^2 + \sin^2\theta_{inmax} \\ &= \frac{n_2^2 + 2n_2\sin\theta_{inmax}\sin\theta_{1max} + \sin^2\theta_{inmax}}{\cos^2\theta_{1max}} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \sin\phi_{inmax} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2} &= \sqrt{\frac{n_2^2 + 2n_2\sin\theta_{inmax}\sin\theta_{1max} + \sin^2\theta_{inmax}}{\cos^2\theta_{1max}} - n_2^2} \\ &= \frac{n_2\sin\theta_{1max} + \sin_{inmax}}{\cos\theta_{1max}} \end{aligned}$$

問　題　4

【解答】

⑴ 織姫: ベガ、彦星: アルタイル

⑵ 秋 (ペガスス) の大四辺形、ペガスス座とアンドロメダ座

⑶ シリウス、リゲル、プロキオン、カペラ、ポルックス、アルデバラン

【解説】

⑴ 織姫はベガ、彦星はアルタイルです。夏の大三角のもう 1 つ、デネブは 2 人の橋渡し役として七夕に登場する説もあります。

⑵ 秋の大四辺形は、アンドロメダ座の 2 等星アルフェラッツと、ペガスス座のマルカブ、シェアト、アルゲニブを結んでできた図形です。別名「ペガススの大四辺形」とも呼ばれています。

⑶ 冬のダイヤモンドは、冬の大三角を構成する 3 つの星座と、新たに追加された 3 つの星座でできています。冬の大三角を構成する 3 つの星は、おおいぬ座のシリウス、こいぬ座のプロキオン、オリオン座のベテルギウスです。シリウスとプロキオンは冬のダイヤモンドでも採用されていますが、オリオン座ではベテルギウスではなくリゲルが冬のダイヤモンドに採用されています。
そして新たに追加された 3 つの星が、おうし座のアルデバラン、ぎょしゃ座のカペラ、ふたご座のポルックスです。これら 6 つの星はどれも 1 等星で、とても美しいのでぜひ探してみてください。

問　題　5

《解答》

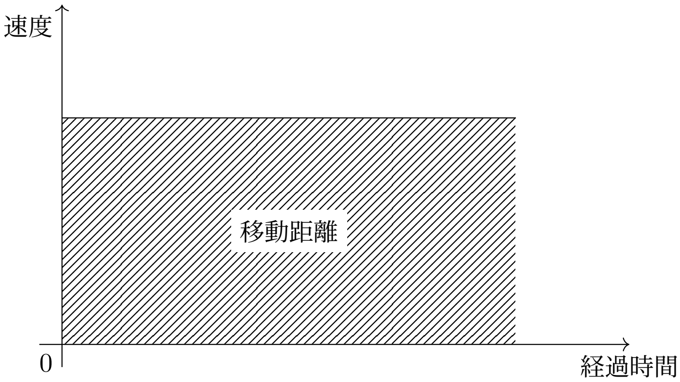
200m

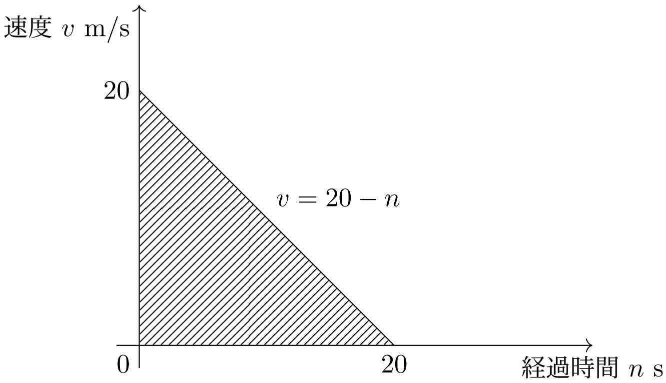
《解説》

速さの公式は、「移動距離＝速度 × 時間」である。速度が一定ならば、移動距離は図 1 のような長方形の面積で表すことができる。

今回は速度がだんだん下がっているため、移動距離は図 2 のような三角形の面積で求められる。時速 72 ㎞は秒速 20m であり、ストップまでにかかる時間は 20 秒である。

この三角形の面積は 20×20÷2 ＝ 200 のため、答えは 200m。





問 題 6

(1) 全原子数 N は一定であるため、$N_1 + N_2 = N$（定数）が成り立つ。この式の両辺の微小時間 Δt あたりの変化量を考えると、

$$\frac{\Delta(N_1+N_2)}{\Delta t} = \frac{\Delta N_1}{\Delta t} + \frac{\Delta N_2}{\Delta t} = 0$$

となるから、$\dfrac{\Delta N_1}{\Delta t} = -\dfrac{\Delta N_2}{\Delta t} = \alpha_{21} N_2$

(2) 状態 2 の原子数 N_2 は、よりエネルギーの高い状態 3 からの遷移によって増加し、よりエネルギーの低い状態 1 への遷移によって減少するから、N_2 の微小時間 Δt あたりの変化量 ΔN_2 は、

$$\Delta N_2 = (\alpha_{32}N_3)\Delta t - (\alpha_{21}N_2)\Delta t$$

両辺を Δt で割ると、

$$\frac{\Delta N_2}{\Delta t} = \alpha_{32}N_3 - \alpha_{21}N_2$$

十分時間が経過した定常状態では、各状態の原子数は時間的に変化しなくなるため、

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = \frac{\Delta N_2}{\Delta t} = \frac{\Delta N_3}{\Delta t} = 0$$

定常状態で各状態の原子数の変化は以下のように表される。

$$\frac{\Delta N_3}{\Delta t} = -(\alpha_{31}+\alpha_{32})N_3 = 0$$
$$\frac{\Delta N_2}{\Delta t} = \alpha_{32}N_3 - \alpha_{21}N_2 = 0$$
$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = \alpha_{31}N_3 + \alpha_{21}N_2 = 0$$

これと全原子数が $N = N_1 + N_2 + N_3$ であることから、

$$N_1 = N, \quad N_2 = 0, \quad N_3 = 0$$

(3)

状態 1 から状態 3 へのポンピングを考慮に入れると、定常状態における各原子数の変化は 0 になるため、以下の方程式が成り立つ。

$$\frac{\Delta N_3}{\Delta t} = AN_1 - (\alpha_{32}+\alpha_{31})N_3 = 0 \tag{1}$$
$$\frac{\Delta N_2}{\Delta t} = \alpha_{32}N_3 - \alpha_{21}N_2 = 0 \tag{2}$$
$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = -AN_1 + \alpha_{21}N_2 + \alpha_{31}N_3 = 0 \tag{3}$$

式 (2) より、$N_2 = \dfrac{\alpha_{32}}{\alpha_{21}}N_3$、式 (1) より、$N_3 = \dfrac{A}{\alpha_{32}+\alpha_{31}}N_1$

これらから、N_2 を N_1 で表すと、

$$N_2 = \frac{\alpha_{32}}{\alpha_{21}}\left(\frac{A}{\alpha_{32}+\alpha_{31}}\right)N_1$$

状態 1 と状態 2 の間で反転分布が形成される条件は $N_2 > N_1$ なので、

$$\frac{\alpha_{32}}{\alpha_{21}}\left(\frac{A}{\alpha_{32}+\alpha_{31}}\right) > 1$$

これを A について解くと、

$$A > \frac{\alpha_{21}(\alpha_{32}+\alpha_{31})}{\alpha_{32}}$$

(4)
4 準位モデルにおいて、定常状態では各原子数の時間変化が 0 になるため、以下の方程式が成り立つ。

$$\frac{\Delta N_4}{\Delta t} = AN_1 - (\alpha_{43} + \alpha_{42} + \alpha_{41})N_4 = 0 \tag{4}$$

$$\frac{\Delta N_3}{\Delta t} = \alpha_{43}N_4 - (\alpha_{32} + \alpha_{31})N_3 = 0 \tag{5}$$

$$\frac{\Delta N_2}{\Delta t} = \alpha_{42}N_4 + \alpha_{32}N_3 - \alpha_{21}N_2 = 0 \tag{6}$$

$$\frac{\Delta N_1}{\Delta t} = -AN_1 + \alpha_{41}N_4 + \alpha_{31}N_3 + \alpha_{21}N_2 = 0 \tag{7}$$

式 (5) から、$N_2 = \dfrac{\alpha_{42}N_4 + \alpha_{32}N_3}{\alpha_{21}}$、これを $N_3 > N_2$ に代入すると、

$$N_3 > \frac{\alpha_{42}N_4 + \alpha_{32}N_3}{\alpha_{21}}$$

整理すると、

$$\alpha_{21}N_3 > \alpha_{42}N_4 + \alpha_{32}N_3$$

$$(\alpha_{21} - \alpha_{32})N_3 > \alpha_{42}N_4 \quad \cdots (*)$$

次に、式 (6) から $N_3 = \dfrac{\alpha_{43}}{\alpha_{32} + \alpha_{31}}N_4$、これを式 $(*)$ に代入し両辺を $N_4 > 0$ で割ると

$$(\alpha_{21} - \alpha_{32})\frac{\alpha_{43}}{\alpha_{32} + \alpha_{31}} > \alpha_{42}$$

問　題　7

(1) $\dfrac{1}{a}$

(2) 物体の位置を $X(t)$ とすると、$0 < t < b$ においては $X(t) = X - \dfrac{1}{2}at^2$,$b < t < 2b$ においては $X(t) = X + \dfrac{a}{2}(t^2 - 4bt + 2b^2)$,$2b < t$ においては $X - ab^2$ であり以下略

問　題　8

《解答》

(イ)、(エ)

《解説》

(ア) 寛政の改革を行ったのは松平定信である。棄捐令の記述は正しい。

(ウ) 隣組は第二次世界大戦下で作られた制度であり、江戸時代ではない。江戸時代に作られた制度は五人組。

(イ)、(エ) は記述の通り。

問　題　9

正解: $\boxed{(1)}$ 解説:

(1) 誤り。鉄砲の伝来は 1543 年、応仁の乱が始まったのは 1467 年とされており、この記述は間違いである。

(2) 正しい。特に 4 回目の戦いは激戦であったとされている。

(3) 正しい。松平元康は桶狭間の戦いの後、今川家から独立し、織田信長と同盟を結んだ。

(4) 正しい。本能寺の変の際、羽柴秀吉は毛利家との戦争中であったが、備中高松城を水攻めにし降伏させることで「中国大返し」を行った。

余談: (4) に記述される戦いは山崎の戦いと言われており、その日付は 6/13。なんか見たことあるね。

問　題　10

《解答》

イタリア

《解説》

イタリアが 60 件の世界遺産を持ち最大です。

その次に多いのは、59 件の中国。

詳しくは、以下を参照してください。

https://whc.unesco.org/en/list/stat