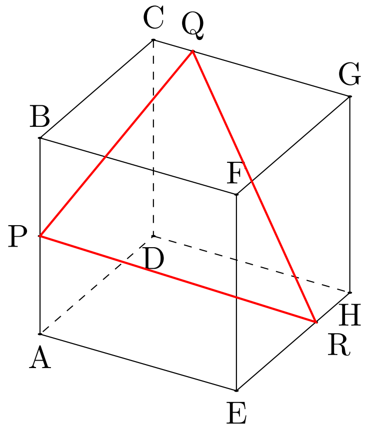
第　54　問

図のように, 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD−EFGH がある。辺 AB 上に点 P, 辺 CG 上に点 Q, 辺 EH 上に点 R をとるとき, 三角形 PQR の垂心が動き得る領域の体積を求めよ。



作問者：negi_0613_

解答

xyz 座標空間上で考える。A を原点とし,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_x = \overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1,0,0) \\ \boldsymbol{e}_y = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,1,0) \\ \boldsymbol{e}_z = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,0,1) \end{cases}$$

とおく。このとき, s, t, u を 0 以上 1 以下の実数として,

$$\begin{cases} \mathrm{AP}:\mathrm{PB} = s : 1-s \\ \mathrm{CQ}:\mathrm{QG} = t : 1-t \\ \mathrm{ER}:\mathrm{RH} = u : 1-u \end{cases}$$

を満たすとすれば,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\boldsymbol{e}_z \\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \\ \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \boldsymbol{e}_x + u\boldsymbol{e}_y \end{cases}$$

を満たす。三角形 PQR の垂心を X とおくと,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{RX}} \\ \overrightarrow{\mathrm{PR}} \perp \overrightarrow{\mathrm{QX}} \end{cases}$$

が成り立つ。
よって, X は平面 PQR 上の点なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{PX}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{PQ}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{PR}}$$

と表せる。
$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RX}} = 0$ より,

$$\begin{aligned} &(t\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + (1-s)\boldsymbol{e}_z) \cdot (\alpha(t\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + (1-s)\boldsymbol{e}_z) + \beta(\boldsymbol{e}_x + u\boldsymbol{e}_y - s\boldsymbol{e}_z) - (\boldsymbol{e}_x + u\boldsymbol{e}_y)) \\ =&t(\alpha t + \beta - 1) + (\alpha + \beta u - u) + (1-s)(\alpha(1-s) - \beta s) \\ =&(t^2 + (1-s)^2 + 1)\alpha + (t + u + s^2 - s)\beta - t - u \\ =&0 \end{aligned}$$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{QX}} = 0$ より，

$$
\begin{aligned}
&(\boldsymbol{e}_x + u\boldsymbol{e}_y - s\boldsymbol{e}_z) \cdot (\alpha(t\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + (1-s)\boldsymbol{e}_z) + \beta(\boldsymbol{e}_x + u\boldsymbol{e}_y - s\boldsymbol{e}_z) - (t\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + (1-s)\boldsymbol{e}_z)) \\
=&(\alpha t + \beta - t) + u(\alpha + \beta u - 1) - s(\alpha(1-s) - \beta s - (1-s)) \\
=&(t + u + s^2 - s)\alpha + (1 + t^2 + s^2)\beta - t - u + s - s^2 \\
=&0
\end{aligned}
$$