■　解答編（問題 21〜 問題 30）

問　題　21

円周率 π について

$$3 < \pi < 4$$

であるから、

$$\frac{\pi}{4} < 1 < \frac{\pi}{3}$$

が成り立つ。
これら 3 つは $\pi/2$ よりも小さい正の数だから、正接関数を適用しても大小が変わらないので

$$\tan\frac{\pi}{4} < \tan 1 < \tan\frac{\pi}{3}$$

となる。
よって、

$$1 < \tan 1 < \sqrt{3}$$

が得られる。
ここで、さらに

$$\sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$$

であるから、

$$1 < \tan 1 < 2$$

が成り立つ。
よって $\tan 1$ は整数ではない。

問　題　22

左辺に $\sin\dfrac{\pi}{2^n+1}$ をかけて sin の二倍角の公式を用いて処理する。
その結果右辺には $\dfrac{1}{2^n}\sin\dfrac{2^n\pi}{2^n+1}$ が出てくる。
$\sin\dfrac{2^n\pi}{2^n+1}=\sin\dfrac{\pi}{2^n+1}$ であるので、両辺を $\sin\dfrac{\pi}{2^n+1}$ で割ることで答えが求められる。
ここでの $\sin\dfrac{\pi}{2^n+1}$ は触媒の働きをする。

問　題　23

【解答】

(1) 全ての有理数は，ある整数 p と正整数 q を用いて p/q と書ける．
よって，これは多項式 $qx-p$ に代入して 0 となるから，大好きである．

(2) 大好きな複素数 α を任意にとり，それを代入すると 0 になるような整数係数の零でない多項式 $P(x)$ をとり，$P(x)$ の次数を s とする．
設定より当然

$$P(\alpha)=0$$

であるが，実係数多項式に代入して 0 となるような任意の複素数はその共役を代入しても 0 となるから

$$P(\bar{\alpha})=0$$

も成り立つ．

ここで，$\alpha^i\bar{\alpha}^j$ $(0\le i<s,\ 0\le j<s)$ という s^2 個の実数を適当に $x_1,\ldots,x_{s^2}$ と並べる．
α^s と $\bar{\alpha}^s$ は次数下げが可能であることに目を向ければ，適切に有理数 $a_{0,1},\ldots,a_{s^2,s^2}$ を定めることで，二項定理より

$$\begin{aligned}
a_{0,1}x_1+a_{0,2}x_2+\cdots+a_{0,s^2}x_{s^2}&=(\alpha+\bar{\alpha})^0 && \text{(式0)}\\
a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,s^2}x_{s^2}&=(\alpha+\bar{\alpha})^1 && \text{(式1)}\\
&\ \ \vdots\\
a_{s^2,1}x_1+a_{s^2,2}x_2+\cdots+a_{s^2,s^2}x_{s^2}&=(\alpha+\bar{\alpha})^{s^2} && \text{(式}s^2\text{)}
\end{aligned}$$

という式が全て成り立つ．
左辺については s^2 個の項について s^2+1 個の式があるので，適切に整数 $c_0,\ldots,c_{s^2}$ (どれかは 0 でない) を定めれば

$$c_0\times(\text{式0})+c_1\times(\text{式1})+\cdots+c_{s^2}\times(\text{式}s^2)=0$$

が成り立つことが分かる。
この式を右辺について見れば，

$$c_{s^2}(\alpha+\bar{\alpha})^{s^2}+\cdots+c_1(\alpha+\bar{\alpha})^1+c_0(\alpha+\bar{\alpha})^0=0$$

となるから，

$$Q(x)=c_{s^2}x^{s^2}+\cdots+c_1x+c_0$$

と定めればこれは $\alpha+\bar{\alpha}$ を代入して 0 となるような整数係数の零でない多項式に他ならない．

最後に

$$\alpha\text{ の実部}=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}$$

であるから，整数係数の零でない多項式 $Q(2x)$ は α の実部を代入して 0 となる．

以上から，任意の大好きな複素数はその実部も大好きである．

問　題　24

(1) 曲線 $C_1(a)$ の式は

$$\begin{aligned} C_1(a) &= x^2 + ax \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \end{aligned}$$

であるから，その頂点は

$$\left(-\frac{a}{2}, -\frac{a^2}{4}\right)$$

である．

(2) (1) の答えより，C_2 について

$$\begin{cases} x = -\dfrac{a}{2} \\ y = -\dfrac{a^2}{4} \end{cases}$$

である．

第一式より x は全実数をとり

$$a = -2x$$

なので，これを第二式に代入して

$$\begin{aligned} y &= -\frac{(-2x)^2}{4} \\ &= -x^2 \end{aligned}$$

となる．

したがって，曲線 C_2 の式は

$$y = -x^2$$

である．

(3) 各実数 a に対して $C_1(a)$ と C_2 に囲まれた部分の面積を $S(a)$ として求める．

まず二つの曲線の式は

$$C_1(a) : y = x^2 + ax$$

と

$$C_2 : y = -x^2$$

である．

2 式の交点の x 座標は

$$x^2 + ax = -x^2$$

を解いて

$$x = \frac{a}{2}, 0$$

である．

よって面積は

$$
\begin{aligned}
S(a) &= \left| \int_0^{-\frac{a}{2}} \left(\left(-x^2 \right) - \left(x^2 + ax \right) \right) dx \right| \\
&= \left| \int_0^{-\frac{a}{2}} \left(2x^2 + ax \right) dx \right| \\
&= \left| \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{a}{2}x^2 \right]_0^{-\frac{a}{2}} \right| \\
&= \left| \frac{2}{3} \left(-\frac{a}{2} \right)^3 + \frac{a}{2} \left(-\frac{a}{2} \right)^2 \right| \\
&= \left| -\frac{a^3}{12} + \frac{a^3}{8} \right| \\
&= \left| \frac{a^3}{24} \right| \\
&= \frac{a^2 \left| a \right|}{24}
\end{aligned}
$$

となる．

よって，曲線 C_3 の式は

$$
C_3 : y = \frac{x^2 \left| x \right|}{24}
$$

である．

(4) まず二つの曲線の式は

$$
C_1(a) : y = x^2 + ax
$$

と

$$
C_2 : y = \frac{x^2 \left| x \right|}{24}
$$

である．

これらはある関数のグラフであるから，交点の個数は，交点の x 座標の個数，すなわち方程式

$$
x^2 + ax = \frac{x^2 \left| x \right|}{24}
$$

の異なる実数解の個数に等しい．

(i) $x = 0$ について，全ての a で解となる．

(ii) $x \neq 0$ について考える．式を変形すると

$$
a = \frac{x \left| x \right|}{24} - x
$$

となる．

右辺を

$$
f(x) = \frac{x \left| x \right|}{24} - x
$$

とおく．

- $x > 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x \left| x \right|}{24} - x \\
&= \frac{x^2}{24} - x \\
&= \frac{1}{24} \left(x - 12 \right)^2 - 6
\end{aligned}
$$

となる．

- $x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x\,|x|}{24} - x \\ &= \frac{-x^2}{24} - x \\ &= -\frac{1}{24}(x+12)^2 + 6 \end{aligned}$$

となる．

よって，$f(x)$ の増減は

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-12	$\cdots$	(0)	$\cdots$	12	$\cdots$	(∞)
$f(x)$	$(-\infty)$	$\nearrow$	6	$\searrow$	(0)	$\searrow$	-6	$\nearrow$	(∞)

となる．

よって，

$$a = \frac{x\,|x|}{24} - x$$

の 0 でない実数解の個数は

$$\begin{cases} 1 & (a < -6,\ a > 6) \\ 2 & (a = -6,\ a = 0,\ a = 6) \\ 3 & (-6 < a < 0,\ 0 < a < 6) \end{cases}$$

である．

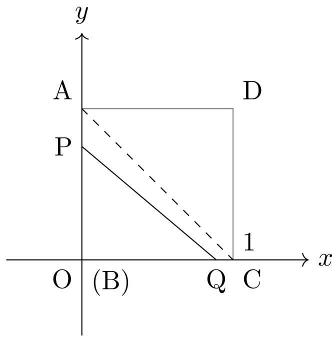
以上から，答えは

$$\begin{cases} 2 & (a < -6,\ a > 6) \\ 3 & (a = -6,\ a = 0,\ a = 6) \\ 4 & (-6 < a < 0,\ 0 < a < 6) \end{cases}$$

【解答】

A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1), P(0, p), Q(q, 0)　$(0 < p \leq 1,\ 0 < q \leq 1)$ とおく。

△BPQ の面積は 1/3 なので



$$\frac{1}{2}pq = \frac{1}{3}$$
$$\therefore\quad pq = \frac{2}{3} \qquad (1)$$

また，直線 PQ の方程式は

$$y = -\frac{p}{q}(x - q)$$
$$\therefore\quad px + qy - pq = 0 \qquad (2)$$

(1) より $q = \dfrac{2}{3p}$，$0 < q \leqq 1$ より $\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$

(2) に代入して両辺に $3p$ をかけると，

$$3xp^2 - 2p + 2y = 0 \qquad (3)$$

$\dfrac{2}{3} \leqq p \leqq 1$ において (3) の解が存在するような $(x,\ y)$ の条件を考える。

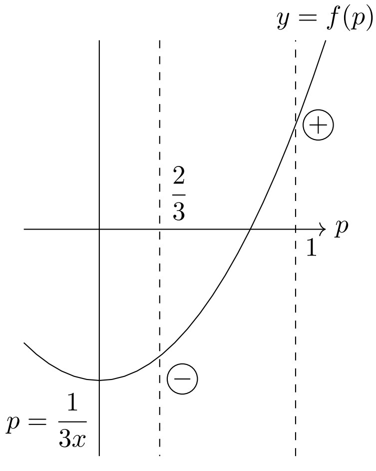
$$f(p) = 3xp^2 - 2p + 2y$$

とおくと，

$$f(p) = 3x\left(p - \frac{1}{3x}\right)^2 - \frac{1}{3x} + 2y$$

(i) $\dfrac{1}{3x} \leqq \dfrac{2}{3}$ すなわち $x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき，下図より

$$f\left(\frac{2}{3}\right)f(1) \leqq 0 \iff \left(\frac{4}{3} + 2y - \frac{4}{3}\right)\big(3x + 2y - 2\big) \leqq 0.$$

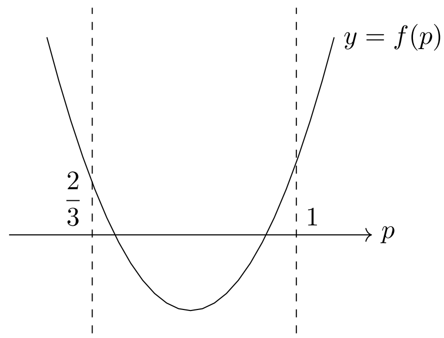


(ii) $\dfrac{2}{3} \leqq \dfrac{1}{3x} \leqq 1$ すなわち $\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき，下図より

$$-\frac{1}{3x} + 2y \leqq 0 \qquad \text{かつ 「} f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 0 \quad \text{または} \quad f(1) \geq 0\text{」}$$

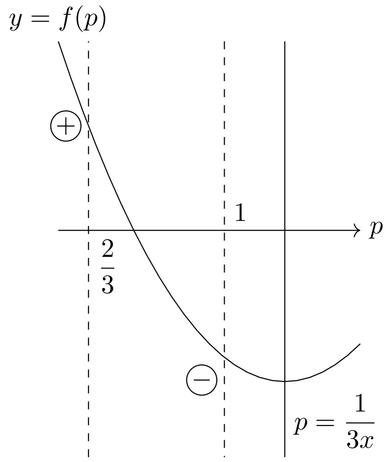
よって

$$y \leqq \frac{1}{6x} \quad \text{かつ 「} y \geq -\frac{3}{2}x + 1 \quad \text{または} \quad y \geq -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}.$$

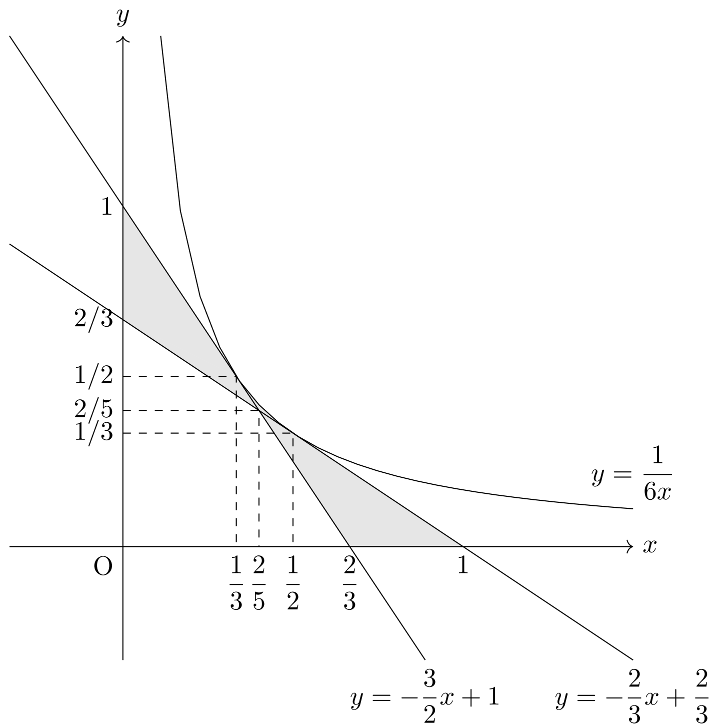


(iii) $\dfrac{1}{3x} \geqq 1$ すなわち $x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき，下図より

$$f\left(\frac{2}{3}\right)f(1) \leqq 0 \iff \left(\frac{4}{3}x+2y-\frac{4}{3}\right)(3x+2y-2) \leqq 0.$$

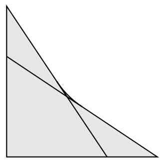


(i)〜(iii) と線分 PQ は正方形 ABCD 内を動くので，線分 PQ の通過領域は下図の網目部分となる (境界を含む)。



求める面積は図の斜線部分である。

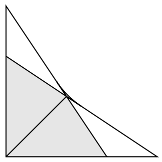
まず，



の面積を求める。台形，曲線と直線が囲む部分，三角形に分けて考えると，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{3}+\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{6x}dx+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left[\log x\right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{6}\log\frac{3}{2}\end{aligned}$$

余分な面積は，二つの三角形の面積の和である。二直線



$$\begin{aligned}y &= -\frac{2}{3}x+1, \\ y &= -\frac{2}{3}x+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

の交点は $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right)$。したがって余分な面積は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\times 2=\frac{4}{15}$$

以上より，求める面積は

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\log\frac{3}{2}\right)-\frac{4}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{6}\log\frac{3}{2}$$

問　題　26

《解答》

$$
\begin{aligned}
(x,y,z) =&(t, 3^t+5^t, 1), \quad (t \text{ は非負整数})\\
&(1,2,3)
\end{aligned}
$$

《解説》

まずは，x と y と z が全て正のときを考える．

1. $z=1$ のとき，方程式は
$$3^x+5^x=y$$
となる．
よって，解は
$$(x,y,z)=(t,3^t+5^t,1) \quad (t \text{ は正の整数})$$
である．
2. $z>1$ のとき
法を 4 とする合同式より，方程式から
$$(-1)^x+1 \equiv y^z \pmod 4$$
が得られる．
(a) x が偶数のとき
$$y^z \equiv 2 \pmod 4$$
となる．これより y^z のもつ素因数 2 の個数はただ 1 つなので，$z>1$ の仮定に反し不適切である．
(b) x が奇数のとき，因数分解の公式より
$$3^x+5^x=(3+5)\sum_{k=0}^{x-1}(-1)^k\cdot 3^k\cdot 5^{x-1-k}$$
であり，
$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{x-1}(-1)^k\cdot 3^k\cdot 5^{x-1-k}\\
\equiv&\sum_{k=0}^{x-1}1\\
=&x\\
\equiv&1 \pmod 2
\end{aligned}
$$
であるから，3^x+5^x，すなわち y^z のもつ素因数 2 の個数は 3 つ．
したがって，$z\in\{1,3\}$ が導かれ，$z>1$ の仮定より $z=3$ でなければならない．
それでは方程式
$$3^x+5^x=y^3$$
を解こう．
i. $x=1$ のとき
$$3+5=y^3$$
であるから，$y=2$ が得られる．

ii. $x > 1$ のとき

3^x は 9 で割り切れるから，法を 9 とする合同式より，方程式は

$$5^x \equiv y^3 \pmod 9$$

となる．

ここで，x を 6 で割った余りと 5^x を 9 で割った余りの関係は

$x \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$5^x \pmod 9$	1	5	7	8	4	2

であり，いま x は奇数だから，

$x \pmod 6$	1	3	5
$5^x \pmod 9$	5	8	2

である．

一方で，y を 3 で割った余りと y^3 を 9 で割った余りの関係は

$y \pmod 3$	0	1	2
$y^3 \pmod 9$	0	1	8

である．

以上から，

$$5^x \equiv y^3 \pmod 9$$

が成立するとき

$$x \equiv 3 \pmod 6$$

でなければならない．

よって x は 3 の倍数だから，正の k を用いて

$$x = 3k$$

とおける．

ここで方程式

$$3^x + 5^x = y^3$$

に戻って，これを k を用いて表すと，

$$27^k + 125^k = y^3$$

となる．

よって，法を 7 とする合同式より，方程式は

$$(-1)^k + (-1)^k \equiv y^3 \pmod 7$$

となる．

しかし y を 7 で割った余りと y^3 を 7 で割った余りの関係は

$y \pmod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$y^3 \pmod 7$	0	1	1	6	1	6	6

であるから，この合同式は成立できない．

よって，不適．

以上から，x と y と z が全て正のとき

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(t,3^t+5^t,1)\quad (t\text{ は正の整数})\\&=(1,2,3)\end{aligned}$$

である．

続いて，方程式

$$3^x+5^x=y^z$$

について，各変数の変域を整数全体に拡張して考察する．

(1) $x>0$ のとき

左辺について

$$\begin{aligned}&3^x+5^x\\>&3^0+5^0\\=&2\end{aligned}$$

であるから，右辺も 3 以上の正の整数である．

(a) $y=0$ のとき，右辺が正の値にならないため不適．

(b) $y<0$ のとき，右辺が正であるためには z が偶数であることが必要．

このとき，

$$3^x+5^x=|y|^z$$

が従う．よって $(x,|y|,z)$ はもとの方程式の正の整数解であるが，先に述べた正の整数解で z が偶数であるものはない．

したがって，不適．

(c) $y>0$ のとき，右辺が 3 以上の整数であるためには $z>0$ が必要．

よって x,y,z は全て正の整数であるから，先に述べた正の整数解のみが適する．

(2) $x=0$ のとき

左辺について

$$\begin{aligned}&3^x+5^x\\=&3^0+5^0\\=&2\end{aligned}$$

であるから，右辺も 2 である．

ゆえに

$$y^z=2$$

が成り立ち，これを見たすのは

$$(x,y,z)=(0,2,1)$$

のみである．

(3) $x<0$ のとき，左辺の既約分数表示は分母も分子も 1 でない．

しかし，そのような状況は右辺ではあり得ない．よって不適．

以上から，全ての整数解は

$$\begin{aligned}(x,y,z)=&(t,3^t+5^t,1),\quad (t\text{ は非負整数})\\&(1,2,3)\end{aligned}$$

である．

問　題　27

《解答》

チョキ

《略解》

あいこだったときは 0 マス進む、負けたときは -3(または -6) マス進む、と考えよう。

勝利に近づく＝じゃんけんで勝って前進すること、より勝利に近づく＝より多くのマス進むこと、と考えると、進めるマスの期待値が最も高い手が、最善手になると分かる。なお、じゃんけんで負けたときは、相手が進むことで、自分は相対的に勝利から遠ざかってしまうので、期待値は負となる。

(グーのとき) 相手がグーなら 0 マス、チョキなら 3 マス、パーなら -6 マス進むので、

$0\times\frac{1}{3}+3\times\frac{1}{3}+(-6)\times\frac{1}{3}=0+1-2=-1$。よって、進めるマスの期待値は -1 マス。

(チョキのとき) 相手がグーなら -3 マス、チョキなら 0 マス、パーなら 6 マス進むので、

$(-3)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+6\times\frac{1}{3}=-1+0+2=1$。よって、進めるマスの期待値は 1 マス。

(パーのとき) 相手がグーなら 6 マス、チョキなら -6 マス、パーなら 0 マス進むので、

$6\times\frac{1}{3}+(-6)\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}=2-2+0=0$。よって、進めるマスの期待値は 0 マス。

以上より、自分が有利になる期待値が最も高い手は、チョキ。

《余談》

「パイナップル」も「チョコレート」も 6 文字なの、作問して初めて気付いた。

グーが弱すぎてチョキが結構強いけど、グー vs チョキだとグーが勝つの、面白いなぁ。

問　題　28

まず 12 個の数のうちから内側と外側の順序を区別したペア $P_1 = (P_1^{(1)}, P_1^{(2)}), \ldots, P_6 = (P_6^{(1)}, P_6^{(2)})$(内側の数に (1), 外側の数に (2) を付けた) を作る作り方は, 12! 通りなので, $\{P_1, \ldots, P_6\}$ としてあり得るものの数は, $\dfrac{12!}{6!}$ 通りである. 各場合に対して, 六つの数珠順列を考えることで,

$$\frac{12!}{6!} \cdot \frac{(6-1)!}{2} = 11! = \textbf{39916800通り}$$

問　題　29

二項定理より，

$$\begin{aligned} 2^n &= (1+1)^n \\ &= {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n \end{aligned}$$

であり，${}_n\mathrm{C}_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}\,(r \neq 0, n)$ は n が素数のとき n の倍数だから，

$$2^n \equiv {}_n\mathrm{C}_0 + {}_n\mathrm{C}_n = 2 (\mathrm{mod}\ n)$$

より，求めるあまりは 2.

問 題 30

各住人が住んでいる階数をそのアルファベットの小文字で表すことにする. まず e が 15 以下であることと E さんの証言から, a はその 1/2 倍の 7.5 以下であり, a, b, c, d は a の相異なる正の約数なので, a の正の約数の個数が 4 以上となり, そのような 1 以上 7 以下の数は 6 しかないので, $a = 6$ で, b, c, d は $1, 2, 3$ のいずれか. e は 15 以下の 6 でない 6 の倍数であるから, $e = 12$. D さんの発言から $b = 1, 2$. B, F さんの発言から, $f = b + e = b + 12$.

- $b = 1$ のとき, $f = 13$ となるが, C さんの発言から $c = 1, 13$ となってしまい b か f に一致してしまい不適.
- $b = 2$ のとき, $f = 14$ となり, c が $1, 2, 3$ であることも考えると, $c = 1$. よって $d = 3$ となる. G さんは F さんよりも上にいるので, $g = 15$.

以上より, **A さん: 6 階, B さん: 2 階, C さん: 1 階, D さん: 3 階, E さん: 12 階, F さん: 14 階, G さん: 15 階**.