目次

数の論理 – 計算・整数・場合の数・確率 –

問題 1

整数 m を用いて, $m=\sqrt{n^2+2024}$ とおく.

$$\begin{aligned} m^2-n^2&=2024 \\ (m+n)(m-n)&=2024 \end{aligned}$$

$m\pm n$ は整数, $m+n>m-n>0$, $m\pm n$ の偶奇が一致することに注意すると

$$(m+n, m-n)=(1012,2),\ (506,4),\ (92,22),\ (46,44)$$

これをそれぞれ解くと

$$(m,n)=(507,505),(255,251),(57,35),(45,1)$$

よって, $n=1,\ 35,\ 251,\ 505$

問題 2

$$\begin{aligned} \sqrt{10}-3&=\sqrt{2}\times\sqrt{5}-3 \\ &=(a+1)(b+2)-3 \\ &=ab+2a+b-1 \end{aligned}$$

答. $ab+2a+b-1$

問題 3

マス目の一番左の列と一番上の行が決まれば残りは自動的に決まるので 2^{n+m-1} 通り.

問題 4

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(1+\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)}$$
$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{2+\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$$

問題 5

解答:62

解説: 項差に注目すると円周率になってることがわかります．調べてみると，

$$\pi = 3.141592653589\cdots$$

なので，$\square = 62$ となることがわかります.

問題 6

$$\begin{aligned} abcabc &= 1001c + 10 \times 1001b + 100 \times 1001a \\ &= 1001(100a + 10b + c) \\ &= 7(14300a + 1430b + 143c) \end{aligned}$$

したがって $abcabc$ は 7 の倍数である.

問題 7

(1) 表全ての数の和は 1 から 9 までの和であり, 45 である.

このとき, 条件から 1 列の和を X とすると,

$$X = 1\text{行目の和} = 2\text{行目の和} = 3\text{行目の和}$$
$$1\text{行目の和} + 2\text{行目の和} + 3\text{行目の和} = 45$$

よって, $3X = 45$ すなわち $X = 15$

(2) 右下の数を x とすると, 1 列の和 15 から

$$\text{左下の数} = 15 - (3 + x) = 12 - x$$
$$\text{右上の数} = 15 - (1 + x) = 14 - x$$
$$\text{中央の数} = 15 - (2 + x) = 13 - x$$

左下から右上の斜めの和を x の式で表すと,

$$\text{左下の数} + \text{右上の数} + \text{中央の数} = 15$$
$$(12 - x) + (14 - x) + (13 - x) = 39 - 3x = 15$$

よって, $x = 8$.

以下, 順々に表を埋めると,

2	7	6
9	5	1
4	3	8

問題 8

$$
\begin{aligned}
S_1 &= \quad 1 \\
S_2 &= \quad 1 \quad + \quad 2 \\
S_3 &= \quad 1 \quad + \quad 2 \quad + 3 \\
&\ \vdots \\
S_{2024} &= \underbrace{1}_{1\text{が}2024\text{個}} + \underbrace{2}_{2\text{が}2023\text{個}} + 3 + \cdots + 2024
\end{aligned}
$$

と考えると,

$$M = 1 \times 2024 + 2 \times 2023 + \cdots + 2024 \times 1$$

これは, $a + b = 2025$ となる自然数 a, b における ab の総和である.
ここで, 2025 個の球を並べる.

$$\underbrace{\circ\circ\circ\cdots\circ\circ}_{2025}$$

2025 個の球に 1 つの仕切りを入れる.

$$\underbrace{\circ\cdots\circ\circ\circ}_{\text{左}}|\underbrace{\circ\cdots\circ}_{\text{右}}$$

左右のグループの球を 1 つずつ塗りつぶす方法は ab に等しい. ここで,
塗りつぶす 2 つの球と仕切りの並べ方は一様であるので, 答えは,

$$M = \frac{2026 \times 2025 \times 2024}{3 \times 2} (= {}_{2026}C_3)$$

問題 9

(1) $576 = 24^2$ より，平方数になる．

(2) その数を 9 で割った余りは各桁の和を 9 で割った余りと一致するので，その数を 9 で割った余りは 7 である．このとき，二乗する前の数を 9 で割った余りは 4,5 である．さらに，$36^2 < 1339$，$97^2 > 9331$ を考え，偶数でないこと，5 の倍数でないことから $41^2, 49^2, 59^2, 67^2, 77^2$ を調べると平方数にならないことがわかる．

(3) 9 で割った余りが 6 なので平方数にならない．

問題 10

与式を変形すると，$(p-1)(q-1) = r$ となるので，

$$\underline{(p, q, r) = (2, 3, 2), (3, 2, 2)}$$

問題 11

$\sqrt{\dfrac{17+4^n}{9}} = m$ (m は自然数) と置くと，

$$17 = (3m - 2^n)(3m + 2^n)$$

$3m + 2^n > 3m - 2^n$ より，

$$\begin{cases} 3m + 2^n = 17 \\ 3m - 2^n = 1 \end{cases}$$

$n \leq 4$ で計算すれば，$\underline{n = 3}$ のみだと分かる．

問題 12

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{45-\sqrt{2024}} &= \frac{45+\sqrt{2024}}{2025-2024} = 45+\sqrt{2024} \\
\frac{1}{\sqrt{2026}-45} &= \frac{\sqrt{2026}+45}{2026-2025} = 45+\sqrt{2026}
\end{aligned}
$$

明らかに，$\sqrt{2024} < \sqrt{2026}$ なので，

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2024} &< \sqrt{2026} \\
45+\sqrt{2024} &< 45+\sqrt{2026} \\
\frac{1}{45+\sqrt{2026}} &< \frac{1}{45+\sqrt{2024}} \\
\sqrt{2026}-45 &< 45-\sqrt{2024}
\end{aligned}
$$

よって，$\sqrt{2026}$ の方が近い.

問題 13

$N = b^2$ (b は整数) とし，

$$
\begin{aligned}
&b^2 = \sqrt{p-4a^4} \\
&b^4 = p-4a^4 \\
&4a^4+b^4 = p \\
&(2a^2+b^2)^2-4a^2b^2 = p \\
&(2a^2+b^2-2ab)(2a^2+b^2+2ab) = p \\
&\{(a-b)^2+a^2\}\{(a+b)^2+a^2\} = p
\end{aligned}
$$

よって，$(a,b)=(1,\pm 1)$ となるので，$\underline{(a,p)=(1,5)}$.

問題 14

$a=m-n,\ b=m+n$ とする．

$$\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ (\text{自然数})$$

$b>a\geq 2$ とすると，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\leq\dfrac{5}{6}$ となるので不適．よって，$a=1$ でなければならず，$\dfrac{1}{b}=N-\dfrac{1}{a}$ より $\dfrac{1}{b}$ が整数であることになるが $b\geqq 2$ より不可能．故に示せた．

問題 15

「ロイヤルストレートフラッシュ」とは，「同じマークの 10,J,Q,K,A が揃うこと」だ．ここで，1 枚ずつ順番に引いていき，だんだんロイヤルストレートフラッシュを完成させていくことを考える．

最初の 1 枚は，10,J,Q,K,A が引ければ何でもいい．マークも関係ない．だから，52 枚中 20 枚はセーフ．確率は $\dfrac{20}{52}$.

2 枚目は，1 枚目と同じマークの，10,J,Q,K,A を引けばいい．そのうち 1 枚はもう引いてるから，セーフは 4 枚．確率は $\dfrac{4}{51}$.

3 枚目は，1,2 枚目と同じマークの，10,J,Q,K,A．確率は $\dfrac{3}{50}$.

4,5 枚目も同じように考えると，4 枚目のセーフ確率は，$\dfrac{2}{49}$，5 枚目のセーフ確率は，$\dfrac{1}{48}$ となる．

5 枚分のセーフ確率を全てかければ，ロイヤルストレートフラッシュが完成する確率になる．つまり，$\dfrac{20}{52}\times\dfrac{4}{51}\times\dfrac{3}{50}\times\dfrac{2}{49}\times\dfrac{1}{48}$ だ．

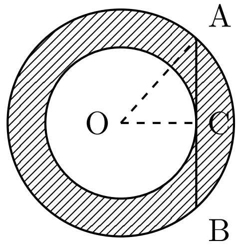
分母は $52\times 51\times 50\times 49\times 48$．これは 3 億と近似してよいと，問題文に記載があった．分子は $20\times 4\times 3\times 2\times 1=480$.

よって確率は，$\dfrac{480}{3\text{億}}$．これを約分して，$\dfrac{1}{625000}$.

《答え》 $\dfrac{1}{625000}$ (62万5000分の1)

図形

問題 16



2 つの円の中心を O とし, 線分 AB と内側の円の接点を C とする.

$$\begin{aligned}\text{灰色の部分の面積} &= \text{外側の円の面積} - \text{内側の円の面積} \\ &= \mathrm{OA}^2\pi - \mathrm{OC}^2\pi \\ &= (\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OC}^2)\pi\end{aligned}$$

また，$\mathrm{AB} = 2\mathrm{CA}$ であり，三平方の定理から，$\mathrm{OC}^2 + \mathrm{CA}^2 = \mathrm{OA}^2$ なので,

$$\mathrm{OA}^2 - \mathrm{OC}^2 = \mathrm{CA}^2 = \frac{\mathrm{AB}^2}{4} = 25$$

を得る．以上より，灰色の部分の面積 $= 25\pi$

問題 17

(1) 半球 + 円柱 + 半球なので，$\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\mathrm{m}^3$

(2) 三角柱と同じ向きのある柱の形になる.

高さ：1m

底面積：120 度扇形 + 正三角形 +120 度扇形なので,

$\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathrm{m}^2$

よって体積は，$\left(\dfrac{2\pi}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)\mathrm{m}^3$

問題 18

(1) 五角形は，対角線をうまく 2 本引くと，3 つの三角形に分かれる．三角形の内角の和は $180°$．それが 3 つあるから，$180° \times 3 = 540°$．つまり，正五角形の内角の和は $540°$．正五角形の内角の大きさはどれも等しいから，1 つの内角の大きさは $540° \div 5 = 108°$．

《答え》

$108°$

(2)《略解》

2 本の対角線によって分けられた，$\angle$ A の 3 部分を，それぞれ①,②,③とする．

①,③はそれぞれ，二等辺三角形を見つけることが出来れば，角度を直接求められる．

すると，②の角度も計算で求められる．($\angle$A − ① − ③)

計算すると，①,②,③はいずれも $36°$ となるため，角の三等分線となっている．

《詳解》

正五角形の 1 つの頂点を A として，残りの頂点を反時計回りに B,C,D,E とする．

$\angle$ BAE において，半直線 AC,AD が角の三等分線になっていることを示す．

三角形 ABC において，正五角形の辺の長さはどれも等しいので，AB=BC よって，三角形 ABC は，AB=BC の二等辺三角形．

頂角である $\angle$ ABC の大きさは，(1) より $108°$．よって，$\angle$ BAC の大きさは,

$$\begin{aligned}(180° - \angle\mathrm{ABC}) \div 2 &= (180° - 108°) \div 2 \\ &= 36° \qquad (1)\end{aligned}$$

次に，三角形 ADE について考える．三角形 ABC と同様に考えると，三角形 ADE は，DE=EA の二等辺三角形である．また，頂角の大きさも 108° である．よって，∠EAD の大きさも 36° である．
(2)
ここで，∠BAE について考える．半直線 AC,AD により，∠BAE は，∠BAC,∠CAD,∠DAE の 3 つに分かれる．(1),(2) より，

$$\angle \mathrm{BAC} = \angle \mathrm{DAE} = 36^\circ.$$

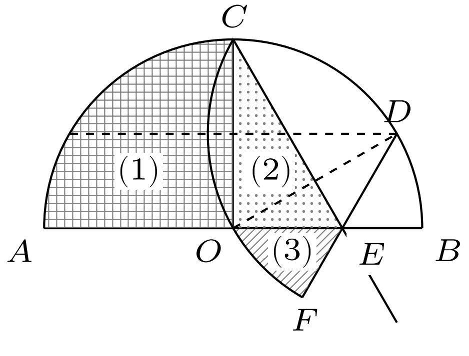
∠BAE の大きさは，正五角形の 1 つの内角の大きさのため 108°．よって，∠CAD の大きさは,

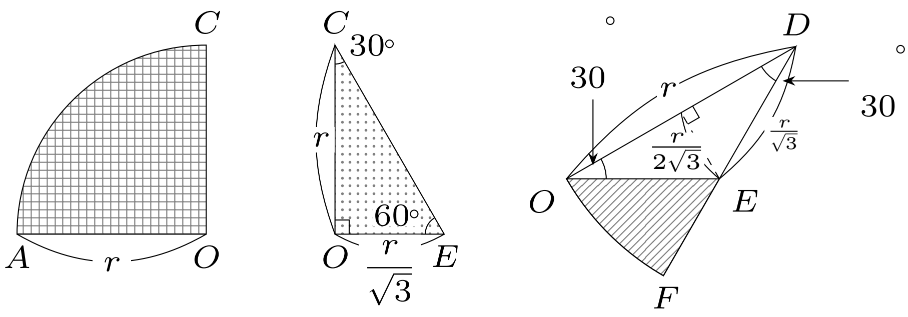
$$\begin{aligned}\angle \mathrm{BAE} - \angle \mathrm{BAC} - \angle \mathrm{DAE} &= 108^\circ - 36^\circ - 36^\circ \\ &= 36^\circ\end{aligned}$$

よって，∠ BAC=∠ CAD=∠ DAE となるため，1 頂点から出ている 2 本の対角線は，角の三等分線.

問題 19

図形を計量するときは，計算しやすいように分割するとよい．





(1) 半径 r の四分円 (左)．面積は $\frac{1}{4}\pi r^2$.

(2) $60°, 30°$ の角をもつ直角三角形 (中)．比から各辺の長さを決定でき，面積は $\frac{1}{\sqrt{3}}r \times r \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}r^2$.

(3) 半径 r，中心角 $30°$ の扇形から底角 $30°$ の二等辺三角形を除いた形 (右)．二等辺三角形の頂点から底辺に垂直二等分線を下ろすと $30°$，$60°$ の角を持つ直角二等辺三角形が 2 つ現れるから，底辺 r に対して高さは $\frac{r}{2\sqrt{3}}$.

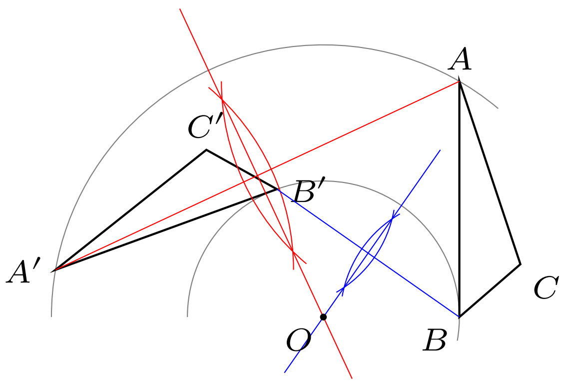
面積は $\frac{30}{360} \times \pi r^2 - r \times \frac{r}{2\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}\pi r^2 - \frac{1}{4\sqrt{3}}r^2$.

なお，$\triangle OED$ が二等辺三角形であることは，紙を折ったことで生じた対称性によるものである．また，孤 OF の中心は D であるから，E が中心の扇形 E-OF とする答案は誤答である．

(1),(2),(3) の面積を足すと，$\frac{4\pi + \sqrt{3}}{12}r^2$.

問題 20

回転の中心は A, A' を通る円の中心かつ B, B' を通る円の中心 (かつ C, C' を通る円の中心) である．2 点を通る円の中心の候補は 2 点の垂直二等分線上の点全体であるので，上のうち 2 つを使って回転の中心を導き出す.



《解説》

「回転移動」というワードから円を想像してほしい．円の中心の作図と考えればよい.

問題 21

$x = \angle ABC$ とすると, $2\angle BAC = \angle ABC$ より $\angle BAC = \dfrac{x}{2}$.

$AB = AC$ より $\triangle ABC$ は二等辺三角形だから $\angle ACB = \angle ABC = x$.

$\triangle ABC$ の内角の和から $\dfrac{x}{2} + x + x = 180°$. よって, $x = 72° = \angle ABC$

$\angle ABC = 72°$ から $\angle CBD = \angle ABD = 36°$ と分かる． また, $\angle BAD = \angle ABD$ と $\angle DCB = \angle CDB$ より $\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ は二等辺三角形である．これより, $BC = BD = AD = 2$ である.

$y = DC$ とすると, $\triangle ABC \backsim \triangle BCD$ であるから

$BC : CD = AC : BD$ すなわち $2 : y = 2 + y : 2$ が成り立つ.

$$y^2 + 2y = 4$$
$$(y+1)^2 = 5$$

よって, $y = -1 + \sqrt{5} = DC$.

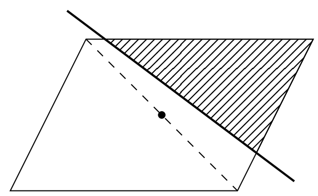
問題 22

(1) c,d

(2) $\boxed{\text{イ}}$: a

$\boxed{\text{エ}}$: b

(3) 直線と平行四辺形が作る三角形の面積は平行四辺形の $\frac{1}{2}$ の面積より小さい.



(4) 下図に示すように点を名付けておく．平行線の錯角により,

$$\angle PAR = \angle QBR \tag{1}$$
$$\angle APR = \angle BQR \tag{2}$$

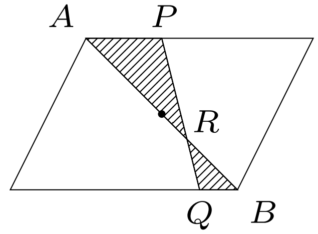
対頂角より,

$$\angle ARP = \angle BQR \tag{3}$$

(1),(2),(3) より,

$$\triangle APR \backsim \triangle BQR$$

となり，相似を証明できた．((1),(2),(3) のうちいずれか 2 つを挙げればよい)

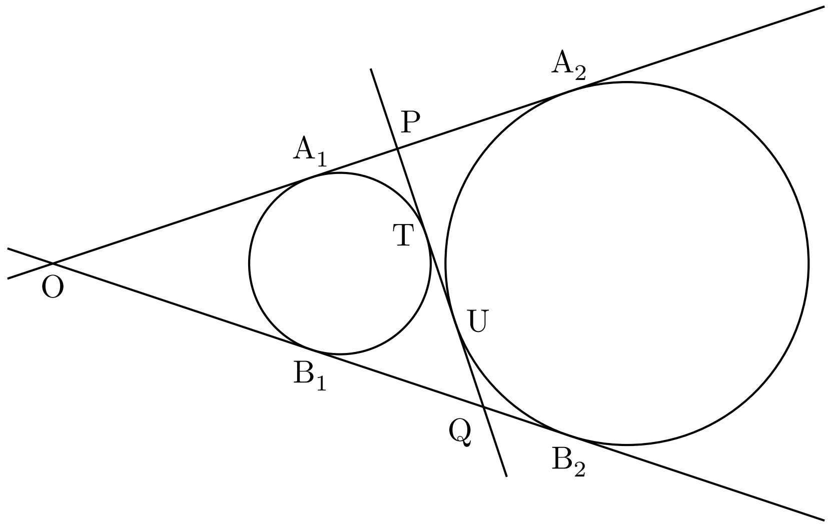


(5) $\boxed{\text{カ}}$: 1:1

$\boxed{\text{ク}}$: 1:1

(6) 2 乗　(体積比は相似比の 3 乗となることも知られている)

問題 23



C_1 と m_1, C_2 と m_1, C_2 と m_2, C_3 と m_2 の接点をそれぞれ T, U, V, W と置く．

まずは，PQ について考える．$\mathrm{A_1A_2} = \mathrm{B_1B_2} (= 1)$ より，

$$\mathrm{A_1P} + \mathrm{A_2P} = \mathrm{B_1Q} + \mathrm{B_2Q} \tag{1}$$

となる．また，線分 PQ の長さについて考えると，

$$\mathrm{TP} + \mathrm{TQ} = \mathrm{UP} + \mathrm{UQ} \tag{2}$$

となるが，円の外部の点から引いた 2 本の接線の長さは等しいので，

$$\mathrm{TP} = \mathrm{A_1P},\ \mathrm{TQ} = \mathrm{B_1Q},\ \mathrm{UP} = \mathrm{A_2P},\ \mathrm{UQ} = \mathrm{B_2Q} \tag{3}$$

が成り立つことと合わせると，

$$\mathrm{A_1P} + \mathrm{B_1Q} = \mathrm{A_2P} + \mathrm{B_2Q} \tag{4}$$

が成り立つと分かる．以上から，(1) と (4) の各辺を足し合わせて整理すると，

$$\mathrm{A_1P} = \mathrm{B_2Q} \tag{5}$$

となる．また，(4) と (5) より，

$$A_2P = B_1Q \tag{6}$$

となる．故に，$A_1A_2 = A_1P + A_2P$, $A_1A_2 = B_1B_2$, $PQ = TP + TQ$ と (3)，(6) を合わせると，

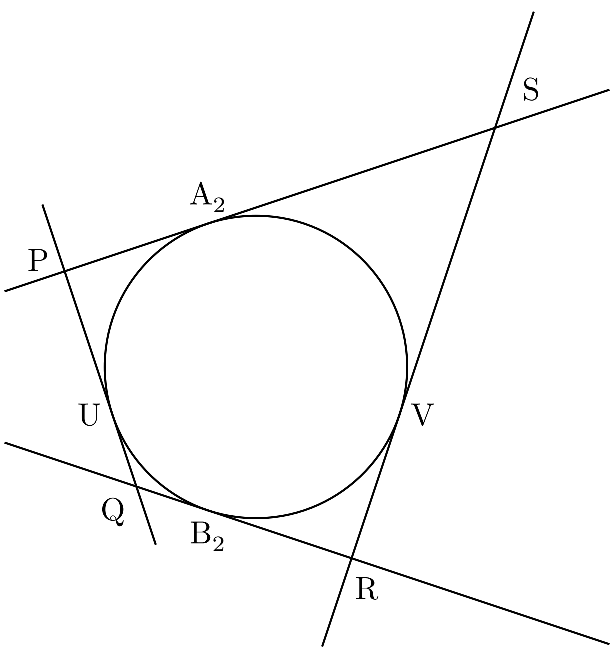
$$A_1A_2 = B_1B_2 = PQ \tag{7}$$

となるので，$PQ = 1$ となる．

同様にして，

$$A_2A_3 = B_2B_3 = RS \tag{8}$$

となるので，$RS = 2$ となる．



次に，$SP + QR$ について考える．円の外部の点から引いた 2 本の接線の長さは等しいので，

$$A_2P = UP,\ B_2Q = UQ,\ B_2R = VR,\ A_2S = VS \tag{9}$$

となる．また，四角形 PQRS の各辺の長さについて，

$$\mathrm{PQ} = \mathrm{UP}+\mathrm{UQ},\ \mathrm{QR} = \mathrm{B_2Q}+\mathrm{B_2R},\ \mathrm{RS} = \mathrm{VR}+\mathrm{VS},\ \mathrm{SP} = \mathrm{A_2S}+\mathrm{A_2P} \tag{10}$$

となる．以上，(9)，(10) より，

$$\mathrm{PQ} + \mathrm{RS} = \mathrm{QR} + \mathrm{SP} \tag{11}$$

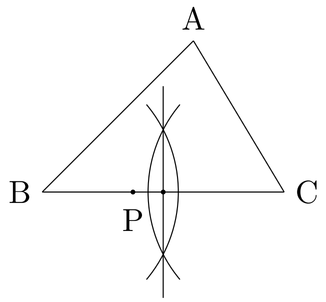
となる．したがって，求める長さは，

$$\mathrm{PQ} + \mathrm{QR} + \mathrm{RS} + \mathrm{SP} = 2(\mathrm{PQ} + \mathrm{RS}) = \mathbf{6} \tag{12}$$

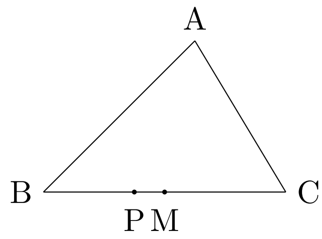
となる．

問題 24

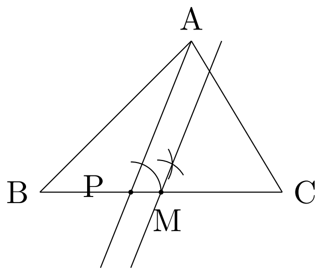
① 線分 BC の中点 M を作図する.



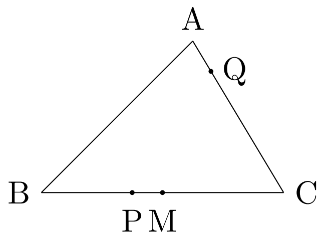
$\longrightarrow$



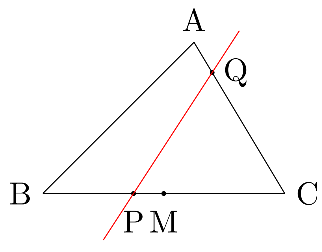
② 点 M を通り，直線 AP と平行な直線 l を引く．直線 l と辺 AC の交点を Q とする.



$\longrightarrow$



③ 点 P と点 Q を結んだ直線が求める直線である.



解説

BM=MC であるから，三角形 ABM の面積は三角形 ABC の面積の半分．直線 AP と直線 l は平行であるから，三角形 APM の面積と三角形 APQ の面積は等しい．ゆえに，四角形 ABPQ の面積も三角形 ABC の半分．すなわち，直線 PQ は三角形 ABC をその面積が半分になるように分割する．

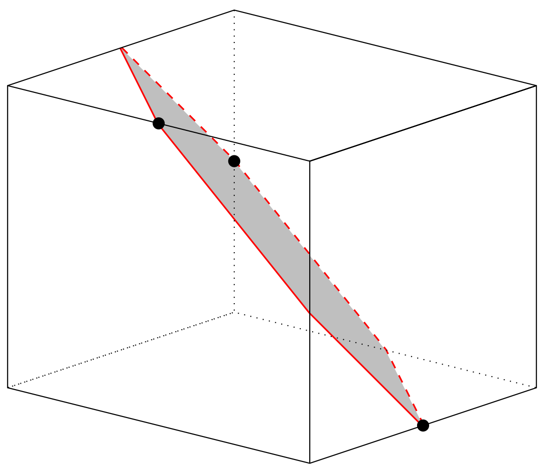
問題 25

直線 $y = ax + b$ は点 $(a, a^2 + b)$ を通る．

a^2 は 0 以上なので点 (a, b) は点 $(a, a^2 + b)$ より上には行かず，したがって直線 $y = ax + b$ より上にも行かない．

問題 26

図のような正六角形が切断面になります．



問題 27

AB と CD の交点を E とする．このとき，$AB \neq CD$ から，三角形 $BCD \equiv$ 三角形 CEA が成り立つ．よって求める面積は一辺 6 の正三角形から三角形 EAD の面積を引けばよい．$\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 6^2 - \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 = 7\sqrt{3}$.

問題 28

外側の円の半径を R，内側の円の半径を r とする．

面積について，

$$\pi R^2 - \pi r^2 = \pi(R+r)(R-r) = 15\pi$$

より，

$$(R+r)(R-r) = 15 \tag{1}$$

周について，

$$2\pi R + 2\pi r = 2\pi(R+r) = 10\pi$$

より，

$$R + r = 5 \tag{2}$$

(1)，(2) より，連立方程式

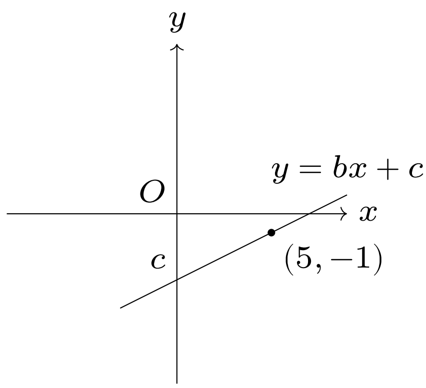
$$\begin{cases} R + r = 5 \\ R - r = 3 \end{cases} \tag{3}$$

を得る．(3) を解くと，$R = 4$ cm

よって，外周をなす円の直径は $2R = 8$ cm

問題 29

図に x, y 軸を書き込むと次のようになる.



c は y 切片を表すので, 図より $c < 0$.

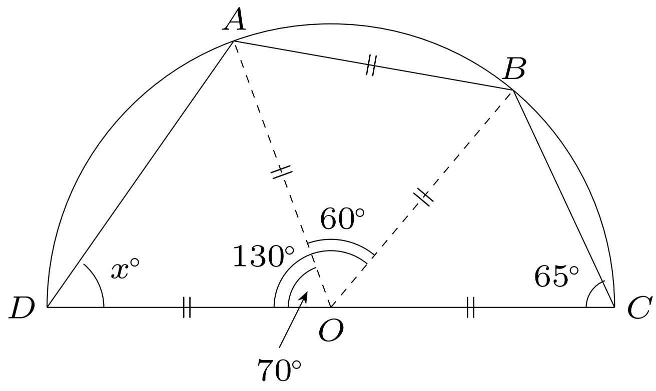
〈別解〉

直線の式に $(5, -1)$ を代入すると,

$$\begin{aligned} -1 &= 5b + c \\ c &= -1 - 5b \end{aligned}$$

となる. ここで $b > 0$ であるから $-5b < 0$ である. よって,-1 と $-5b$ の和である c は負である.

問題 30



$2AB = CD$ であるから, $\triangle ABC$ は正三角形である. よって $\angle AOB =$ $60°$.

円周角の定理より $\angle AOD = 2\angle BCO = 130°$.

以上より $\angle AOD = \angle BOD - \angle AOD = 70°$.

$\triangle OAD$ は二等辺三角形で，頂角は $70°$ であるから，底角

$x = \dfrac{180-70}{2} = 55$.

関数

問題 31

x の増加量は 2，y の増加量は $\dfrac{1}{46}-\dfrac{1}{44}=-\dfrac{2}{2024}$ なので，変化の割合は $\dfrac{1}{2024}$

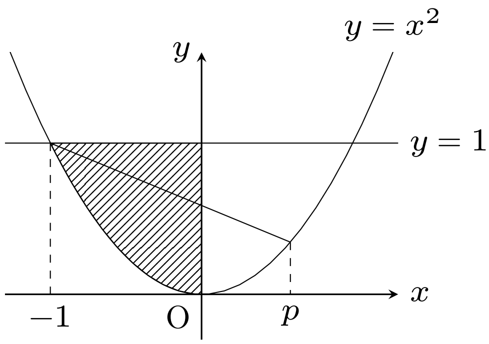
問題 32

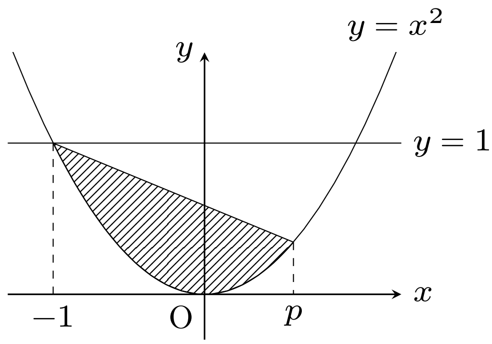
《解答》

$$\frac{p^3+p^2+p-1}{2}$$

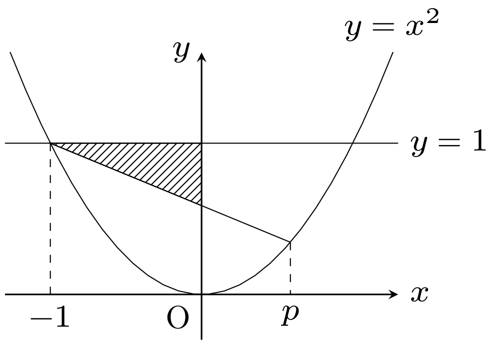
《解説》

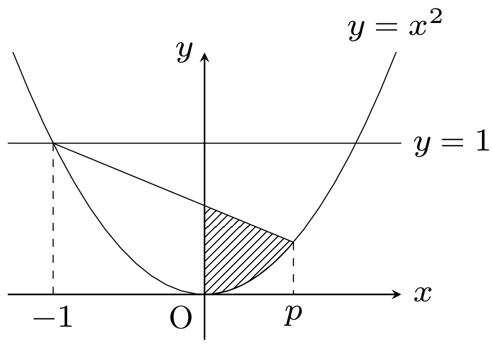
以下の二つの図の斜線部はどちらも，C と直線 $y=1$ で囲まれた部分の面積の半分という，等しい面積をもちます.





したがって，共通な部分を除いた次の二つの図の斜線部も，同じ面積になります.

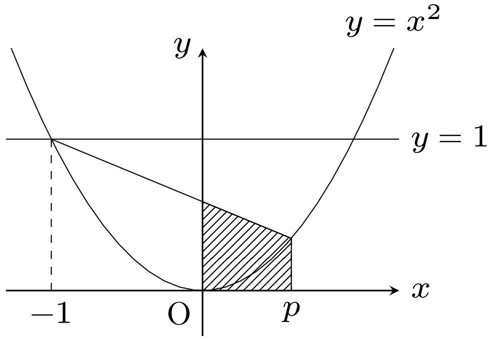




ここで，この左の図は三角形ですから，面積を計算できます．
二点 $(-1,1)$, (p,p^2) を結ぶ直線の式は $y=(p-1)x+p$ ですので，この二つの図の面積はともに

$$1\times(1-p)\times\frac{1}{2}=\frac{1-p}{2} \tag{1}$$

と求めることができます．
次に，以下の斜線部は台形なので面積を計算できます．



二点 $(-1,1)$, (p,p^2) を結ぶ直線の y 切片が p だったことに注意して，この台形の面積は

$$(p+p^2)\times p\times\frac{1}{2}=\frac{p^3+p^2}{2} \tag{2}$$

と求めることができます．
以上を用いて，最終的に求めるべき図形の面積は，第 (2) 式の値から第 (1) 式の値を引いた，

$$\frac{p^3+p^2}{2}-\frac{1-p}{2}=\frac{p^3+p^2+p-1}{2}$$

と分かります．

《付録》

さらに進んだ数学を用いることで，三乗して 4 になる正の数を $\sqrt[3]{4}$ と書くことにすると，p の値を $p = \sqrt[3]{4} - 1$ と求めることができます．したがって，本問で求めた面積については具体的に $-\sqrt[3]{4}^2 + \sqrt[3]{4} + 1$ と表したり，簡潔に $\dfrac{1}{3}p^3$ と表示したりすることが可能です．

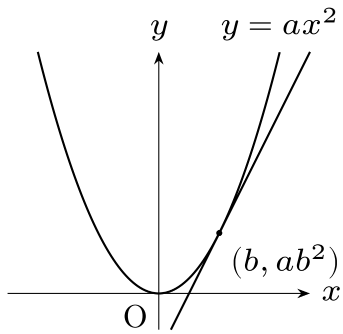
問題 33

$x = 1$ で $y = 1$．$x = 1.0001$ で $y = (1 + 0.0001)^2 = 1 + 2 \times 0.0001 + 0.0001^2$．$y$ の変化量は $(1 + 2 \times 0.0001 + 0.0001^2) - 1 = 2 \times 0.0001 + 0.0001^2$．変化の割合は $\dfrac{2 \times 0.0001 + 0.0001^2}{0.0001} = 2 + 0.0001 = 2.0001$.

【解説】

1.0001^2 を筆算するのではなく，$(1 + 0.0001)^2$ を展開して計算すると安全で早い．本問では x 座標の変化を 0.0001 と小さい値に設定したが，さらにいくらでも 0 に近い小さい値に設定すると，変化の割合は 2 に近づいていく．このような操作を微分といい，高校数学 (数学 II) で詳しく学ぶ.

問題 34



直線の傾きを c とすると，直線の方程式は,

$$y = c(x - b) + ab^2$$

なので，x についての 2 次方程式

$$ax^2 = c(x - b) + ab^2$$

が重解を持つので,

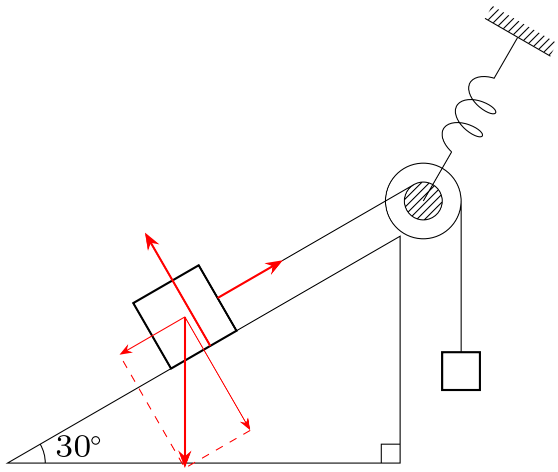
$$c^2 - 4a(bc - ab^2) = 0 \quad \therefore c = 2ab$$

よって，$\underline{y = 2abx - ab^2}$

数学以外

問題 35

(1) 下図.



(2) 輪軸の軸について，てこの原理 (モーメントのつり合い) を考える．物体 A 側の糸の張力は 0.5 N である (60°，30° の直角三角形)．物体 B 側の糸の張力 (B の重さ) を M N とすると，

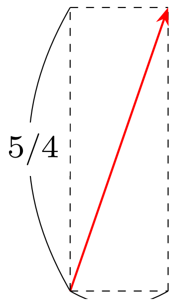
$$0.5\ \mathrm{N} \times r = M\ \mathrm{N} \times 2r$$

から $M = 1\ \mathrm{N}$

(3) 輪軸にはたらく力の合力が 0 になる (輪軸は静止) ことを利用する．以下，(右向き正, 上向き正) の座標を使う．A 側の糸の張力を水平方向と鉛直方向に分解すると，$(\sqrt{3}/4\ \mathrm{N}, 1/4\ \mathrm{N})$ となる．B 側の糸の張力は鉛直方向の成分のみなので，$(0, -1\ \mathrm{N})$ である．これらの合力は

$$(-\sqrt{3}/4\ \mathrm{N}, -1/4\ \mathrm{N}) + (0, -1\ \mathrm{N}) = (-\sqrt{3}/4\ \mathrm{N}, -5/4\ \mathrm{N})$$

となる．よって，これを打ち消すためばねばかりが輪軸に及ぼす力は $(\sqrt{3}/4\ \mathrm{N}, 5/4\ \mathrm{N})$ であるから，この矢印の長さを求めればよい．



三平方の定理により，$\sqrt{25+3} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$ N.

【解説】

三角形の台の頂点に滑車がついた図の問題はよく見ることであろうが，中学範囲では滑車にはたらく力に注目することはないものと思われる．本問では滑車の代わりに輪軸を用いることでモーメントのつり合いの知識があるか，ばねばかりにはたらく力を求めることで二次元で 3 つの力のつり合いが起きている状況を理解しているかを問うた．「力の分解」，「合力とつり合い」，「モーメントのつり合い」，「三平方の定理」と要求する知識は多岐に渡り，本問を完答できれば高校入試の力学に対応する十分な力があるといえるだろう．