■　解答編（問題 31〜 問題 40）

問　題　31

$(1, 1234566), (1234566, 1)$

《解説》

a, b は互いに素なため、どちらか片方は必ず奇数である。しかし a, b が両方奇数なら a^b, b^a も両方奇数となり、$a^b + b^a$ が偶数となってしまうため破綻。ゆえに a, b のどちらかが偶数、どちらかが奇数であるということが分かる。与式は a と b の対称式のため、a が偶数、b が奇数と仮定する。

もし $b \geqq 2$ なら、a^b は 4 の倍数である。また b^a は奇数の偶数乗のため、奇数の 2 乗と考えることができる。奇数の 2 乗を 4 で割った余りは 1 になる (証明略) ので、$a^b + b^a$ を 4 で割った余りも 1。しかし 1234567 を 4 で割った余りは 3 のため不適。ゆえに $b < 2$ となる。

したがって $b = 1$ が確定する。このとき $a = 1234566$ である。

よって与式を満たす組 (a, b) は $(1, 1234566), (1234566, 1)$ となる。

問　題　32

《解答》

50 個

《略解》

与式を $a^2(a+1)$ と変形して考える。

(i) a が偶数の場合

a^2 が 12 の倍数となるケースと、a^2 は 12 の倍数ではないが、$(a+1)$ が 3 の倍数となっているケースの 2 つが挙げられる。

前者の場合は、a は 6 の倍数である。後者の場合は、a は 6の倍数 $+\,2$ と表せる。

(ii) a が奇数の場合

$(a+1)$ が 12 の倍数となるケースと、$(a+1)$ は 12 の倍数ではないが、a^2 が 3 の倍数となっているケースの 2 つが挙げられる。

a はそれぞれ、前者の場合は 12の倍数 $+\,11$、後者の場合は 12の倍数 $+\,3$ と表せる。

なお後者で、$a =$ 12の倍数 $+\,9$ に関しては、$(a+1)$ が 4 の倍数とならないため不適。

以上より、題意を満たす a の条件は、$a =$ 12の倍数 $+\,0, 2, 3, 6, 8, 11$ のときとなる。

この条件を満たすような 1 以上 100 以下の自然数の個数は、$6 \times 8 + 3 - 1 = 50$ より、50 個。

問　題　33

《解答》

(A) $p=2$ のとき,

$$(2+q)^2+2=q^q$$

となる。

(i) $q=2$ のとき

$$(2+q)^2+2>q^q$$

であるから不適.

(ii) $q=3$ のとき

$$(2+q)^2+2=27=q^q$$

であるから適する.

(iii) $q>3$ のとき

$$\begin{aligned}&(q^q)-\left((2+q)^2+2\right)\\ >&\left(q^3\right)-\left((2+q)^2+2\right)\\ =&(q-3)\left((q+1)^2+1\right)\\ >&0\end{aligned}$$

であるから不適.

(B) $p>2$ のとき, p は奇数である.

(a) $q=2$ のとき

$$(p+q)^p+p>q^q$$

となるから不適.

(b) $q>2$ のとき, p と q はともに奇数である. したがって,

$$(p+q)^p+p=q^q$$

において法を 3 とする合同式を考えることで

$$(p+q)+p\equiv q \pmod 3$$

すなわち

$$2p\equiv 0 \pmod 3$$

が得られ, 2 と 3 は互いに素だから

$$p\equiv 0 \pmod 3$$

が成り立つ.

p は素数だから, これより,

$$p=3$$

でなければならず,

$$(3+q)^3+3=q^q$$

となる.

(i) $q=3$ のとき

$$(3+q)^3+3>q^q$$

であるから不適.

(ii) $q>3$ のとき，$q\geq 5$ であるから，

$$\begin{aligned}
&q^q-\left((3+q)^3+3\right)\\
\geq &q^5-\left((3+q)^3+3\right)\\
= &(q-5)^4+19(q-5)^3+126(q-5)^2+308(q-5)+110\\
> &0
\end{aligned}$$

であるから不適.

以上から，答えは

$$(p,q)=(2,3)$$

である.

《解答》

(1) 3 と 6 を二進数で表すと

$$\begin{cases} 3 = 011_{(2)} \\ 6 = 110_{(2)} \end{cases}$$

であるから，各桁毎に論理和および論理積をとって

$$\begin{cases} 3 \mid 6 = 111_{(2)} \\ 3\&6 = 010_{(2)} \end{cases}$$

となる．

よって答えは，(a) 7, (b) 2.

(2) 0 以上 3 以下の整数からなる集合のうち，0 と 3 を要素に持つものは

$$\{0,3\}, \{0,1,3\}, \{0,2,3\}, \{0,1,2,3\}$$

の 4 種類しかなく，それらは全て快適な集合としてふさわしい．

よって，答えは 4 つ．

(3) それぞれ示す．

(i) (P) $\Longrightarrow$ (Q) を示そう．

S の要素数が 2^n ということは，

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$$

ということである．

このとき，0 以上 $n-1$ 以下の任意の異なる整数 x,y に対し，

$$a = 2^x$$

とすればこれは S の要素であり，

$$2^x \ \& \ a = 2^x \ \& \ 2^x = 2^x > 0$$

かつ

$$2^y \ \& \ a = 2^y \ \& \ 2^x = 0$$

が成り立つので示された．

(ii) (Q) $\Longrightarrow$ (P) を示そう．

0 以上 $n-1$ 以下の任意の整数 x をとる．

仮定より，0 以上 $n-1$ 以下の x を除く各整数 k に対して，ある S の要素 a_k が存在して，

$$\begin{cases} 2^x \ \& \ a_k > 0 \\ 2^k \ \& \ a_k = 0 \end{cases}$$

を成立させられる．

したがって，これらの a_k 全てのビット AND を計算したものを b とおけば

$$b = 2^x$$

となり，また S が快適な集合であったことから

$$b \in S$$

が成り立つ.
したがって，0 以上 $n-1$ 以下の任意の整数 x に対して，

$$2^x \in S$$

が成り立つ.
1 以上 2^n-1 以下の全ての整数はこれらのビット OR で表すことができるので，S が快適な集合であったことから，1 以上 2^n-1 以下の全ての整数は S に属することになる.
さらに 0 も S に属するから，これらより

$$S = \{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$$

が得られる.
したがって，S の要素数は 2^n であることが示された.

問　題　35

《解答》

条件式

$$f(x)^3 + x^3 f(x) = (x + x^2) f(x)^2$$

を整理すると

$$f(x)\left(f(x) - x\right)\left(f(x) - x^2\right) = 0$$

となる．

つまり，それぞれの実数 x に対し

$$f(x) = 0, x, x^2$$

のどれかが成り立つことが必要十分条件である．

ここで，3 曲線 $y = 0, y = x, y = x^2$ の交点について考えると

- 3 曲線全ての交点 $(0, 0)$
- $y = x$ と $y = x^2$ の交点 $(1, 1)$

が全ての交点である．

よって $x < 0$ の部分で $f(x)$ の取り方は常に 0, 常に x, 常に x^2 の 3 通り，

$x > 0$ の部分では

- 常に $x = 0$.
- $f(1) = 1$．$0 < x < 1$ の部分で $f(x)$ の取り方は常に x, 常に x^2 の 2 通り．$1 < x$ の部分で $f(x)$ の取り方は常に x, 常に x^2 の 2 通り．

のどちらかである．

よって連続関数 $f(x)$ の個数は

$$3 \cdot (1 + 2 \cdot 2) = 15$$

と求められる．

問　題　36

一般の実数 $x,\, y$ に対して

$$x^4+4y^4=\left(x^2+2xy+2y^2\right)\left(x^2-2xy+2y^2\right)$$

が成り立つ。
よって、

$$\begin{aligned}289^2+8^2&=17^4+4\cdot 2^4\\&=\left(17^2+4\cdot 17+8\right)\left(17^2-4\cdot 17+8\right)\\&=365\cdot 229\\&=5\cdot 73\cdot 229\end{aligned}$$

と計算できる。
したがって答えは

$$289^2+8^2=\boxed{5\cdot 73\cdot 229}$$

である。

【コメント】
この変形は 289^2+8^2 の素因数分解を与えている。

問　題　37

《解答》

各問において，n を任意の整数とする．

(1)
- $n=2$ のとき，
$$n=(-1)+3$$
と書け，-1 と 3 は互いに素な異なる整数の組なので適する．
- $n\neq$ のとき，
$$n=1+(n-1)$$
と書け，1 と $n-1$ は互いに素な異なる整数の組なので適する．

(2)
- $n=1$ のとき，
$$n=(-1)+(-3)+5$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 3 整数の組なので適する．
- $n=-1$ のとき，
$$n=(-5)+3+1$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 3 整数の組なので適する．
- $n\neq 1,-1$ のとき，
$$n=(-1)+1+n$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 3 整数の組なので適する．

(3)
- $n=0$ のとき，
$$n=(-11)+1+3+7$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 4 整数の組なので適する．
- $n=-1$ のとき，
$$n=(-5)+(-1)+2+3$$
と書け，これらはどの二つも互いに素であるような異なる 4 整数の組なので適する．
- $n\neq 0,-1$ のとき，
$$n=(-n-1)+(-1)+1+(2n+1)$$
と書ける．
ここで，ユークリッドの互除法より
$$\begin{aligned}&\gcd(-n-1,2n+1)\\=&\gcd(n+1,2n+1)\\=&\gcd(n+1,-1)\\=&1\end{aligned}$$
となる．
したがって，$(-n-1)$, (-1), 1, $(2n+1)$ はどの二つも互いに素であるような異なる 4 整数の組なので適する．

以上で全て示された．

解答

$f\left(n^m\right)-f(n)=m-f\big(f(n)-f(n-1)\big)\quad\cdots(*)$

$n={p_1}^{e_1}\cdot{p_2}^{e_2}\cdot\cdots{p_a}^{e_a}$($p_a$：相異なる素数、$e_a$：非負整数)

とおくと、

$f\left(n^m\right)=(me_1+1)(me_2+1)\cdots(me_a+1)$

$=k_am^a+k_{a-1}m^{a-1}+\cdots+k_1m+1$($k_a$：$m^a$ の係数)

同様に、

$f(n)=(e_1+1)(e_2+1)\cdots(e_a+1)$

$=k_a+k_{a-1}+\cdots+k_1+1$

これより、$(*)$ の左辺は

$f\left(n^m\right)-f(n)=k_a\left(m^a-1\right)+k_{a-1}\left(m^{a-1}-1\right)+\cdots+k_1\left(m-1\right)$

となり、ここで b を任意の正整数とすると、$m\neq1$ のときは

$m^b-1=(m-1)\left(m^{b-1}+m^{b-2}+\cdots+m+1\right)$

$\equiv0\big(\mathrm{mod}(m-1)\big)$

が成立するため、$m\neq1$ のとき

$f\left(n^m\right)-f(n)\equiv0\big(\mathrm{mod}(m-1)\big)$

となるため、$f\left(n^m\right)-f(n)$ は常に $m-1$ の倍数となることがわかる。

これより、$(*)$ の右辺も $m-1$ の倍数になるため、$\dfrac{m-f\big(f(n)-f(n-1)\big)}{m-1}$ は整数になる必要がある。

ここで、$f\big(f(n)-f(n-1)\big)\geqq2$ としたとき、

$\dfrac{m-f\big(f(n)-f(n-1)\big)}{m-1}=1-\dfrac{f\big(f(n)-f(n-1)\big)-1}{m-1}<1$

となるが、$(*)$ の左辺の $\dfrac{f\left(n^m\right)-f(n)}{m-1}$ は正整数となり、これに矛盾する。

従って、$f\big(f(n)-f(n-1)\big)$ は 0 または 1 であることがわかるので、それぞれについて場合分けして考える。

<$f\big(f(n)-f(n-1)\big)=0$ のとき>

$f\left(n^m\right)-f(n)=m$

より、両辺が $m-1$ で割り切れるのは $m=2$ のみなので、以下を満たす n を考える。

$$\begin{cases}f\left(n^2\right)-f(n)=2 & \cdots①\\ f(n)-f(n-1)=0 & \cdots②\end{cases}$$

①を満たす n は素数のときに限るので、これより②を満たすとき、$n-1$ も素数である必要があるため、①②を同時に満たす n は、$n=3$ のみと定まる。

<$f\big(f(n)-f(n-1)\big)=1$ のとき>

$$\begin{cases}f\left(n^m\right)-f(n)=m-1 & \cdots③\\ f(n)-f(n-1)=1 & \cdots④\end{cases}$$

④より、$f(n)$ と $f(n-1)$ の片方は偶数、もう片方は奇数となるため、n と $n-1$ の片方は平方数となる必要がある。

(i) n が平方数の場合

$1\leqq n\leqq2025$ において、平方数 n は相異なる素数 p,q,r を用いて以下の 10 通りのパターンが考えられる。

$(p)^2,(p^2)^2,(p^3)^2,(p^4)^2,(p^5)^2,(pq)^2,(p^2q)^2,(p^2q^2)^2,(p^3q)^2,(pqr)^2$

ここで、例えば $n=(p)^2$ で表される場合、③に代入すると以下のようになる。

$$\begin{cases}f\left(p^{2m}\right)-f\left(p^2\right)=m-1\\ 3-f\left(p^2-1\right)=1\end{cases}$$

このとき、これを満たす (m,n) の組は $(1,2)$ のみとなる。同様に、残りの 9 パターンの場合を考えると、

(m, n) の組は 6 組存在することがわかる。

(ii) $n-1$ が平方数の場合

(i) と同様に考えると、この場合の (m, n) の組は 5 組存在することがわかる。

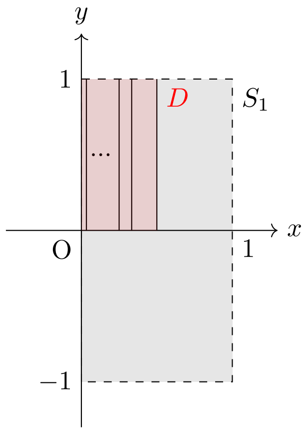
以上より、$(*)$ の等式を満たす (m, n) の組は$\underline{1 \leqq m \leqq 2025, 1 \leqq n \leqq 2025 \text{ において } 13 \text{ 組存在する。}}$

解答.

問 1

例えば，点 $(1/2,\ -1/2)$ を始点，境界点 $(0,\ 1/2)$ を終点とし，終点以外の点がすべて S に含まれるような単純曲線がないことを証明する．そのために，そのような曲線 C があったと仮定する．

（注）の記号を踏襲する．ただし，$a = 0,\ b = 1$ として一般性を失わないので，そのようにする．さて，$\varepsilon \leqq 1/2$ を満たす任意の正数 ε，例えば $1/2$ をとると，それに対応してある正数 δ_1 および δ_2 が存在して，



$$
\begin{aligned}
\delta_1 < t < 1 \quad &\Longrightarrow \quad |x(t) - 0| < \frac{1}{2}, \\
\delta_2 < t < 1 \quad &\Longrightarrow \quad \left| y(t) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

したがって δ を δ_1，δ_2 のうち小さくないほうにすれば，$\delta < t < 1$ において C が常に領域

$$
D = \left\{ (X,\,Y) \,\middle|\, 0 \leqq X < \frac{1}{2},\ 0 < Y < \frac{1}{2} \right\}
$$

に含まれる．そうして，$\delta < t < 1$ を満たす t を一つとって，仮定よりある自然数 n が存在して，

$$
\frac{1}{n+1} < x(t) < \frac{1}{n}
$$

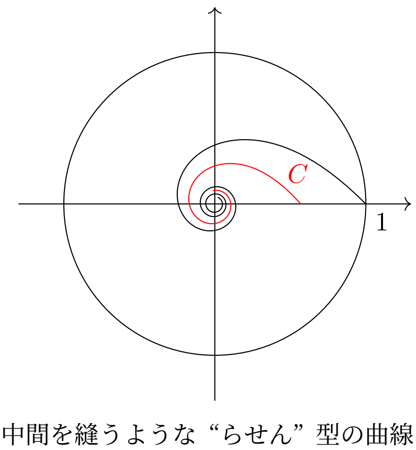
が成立する．C が存在するためにはこの t に対する点 $(x(t),\,y(t))$ と，点 $(0,\ 1/2)$ とを結ぶ単純曲線がなければならないが，中間値の定理からその曲線において $x(t_0) = \dfrac{1}{n+1}$ を満たす $t_0 \in (\delta,\ 1)$ が存在せねばならない．しかも，領域 D 内に含まれているから $y(t_0) > 0$ でなければならない．しかしそれを満たす $(x(t_0),\,y(t_0))$ は S_1 の境界上にあるから矛盾である．故に S_1 によって命題 Z が否定される．

問 2

反例となりえない．そこで，任意の境界点と内点を結ぶ単純曲線があることを証明する．

[1]　任意の内点と，境界点 $(0, 0)$ とを結ぶ単純曲線が存在すること．

まず $t = 0$ に対しては $(x(0),\,y(0)) = (0,\ 0)$ と定め，$t \in (0,\ 1]$ に対して $x(t)$ および $y(t)$ を定める．



$$
\tau = \frac{1}{t}
$$

とおき，

$$
r_t = \frac{1}{1+\tau} - \frac{1}{1+\tau+2\pi}
$$

と定めれば，

$$
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = r_t \begin{pmatrix} \cos\tau \\ \sin\tau \end{pmatrix}
$$

によって曲線 C を定めればよい．要約すれば，曲線 C を，“らせん” S_2 の中間を縫うような “らせん” 型の曲線とすればよい．

これが単純曲線を構成していることを示す．まず $t > 0$ における連続性と単純性について論はない．

$t = 0$ における連続性を示す。$1 > \varepsilon > 0$ を任意にとる．そうして，ある δ が存在して，

$$
0 < t < \delta \quad \text{なるとき常に} \quad \left| \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \right| < \varepsilon
$$

となることはすぐにわかる．すなわち，

$$\left|\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}\right| \leqq |r_t| = \left|\frac{1}{1+\tau} - \frac{1}{1+\tau+2\pi}\right|$$
$$\leqq \left|\frac{1}{1+\tau}\right| + \left|\frac{1}{1+\tau+2\pi}\right|$$
$$< \frac{2}{1+\tau}$$

であるから，

$$\frac{2}{1+\tau} < \varepsilon \quad \text{すなわち} \quad \tau > \frac{2}{\varepsilon} - 1 \quad \text{ゆえに} \quad t < \frac{1}{2/\varepsilon - 1}$$

したがって，$\delta = \dfrac{1}{2/\varepsilon - 1}$ とすればよいのである．ゆえに，

$$\lim_{t \to 0} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

一方，

$$\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ゆえに $t = 0$ で $x(t)$, $y(t)$ は共に連続である. また, r_t は t が減少するにつれて単調に減少するので, $0 \leqq t < t' \leqq 1$ を満たす任意の t, t' に対して

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x(t') \\ y(t') \end{pmatrix}$$

故に曲線 C は単純である．

任意の内点と，曲線 C の終点 $(1/2, 0)$ とを連続につなぐ単純曲線が存在するので，それと曲線 C との和集合によって，その内点と境界点 $(0,\,0)$ は単純曲線で結ばれる．

[2]　任意の内点 I と，$(0, 0)$ を除く任意の境界点 O とを結ぶ単純曲線が存在すること．これは，上記の曲線 C を用いれば当然である．例えば，点 I と，点 I との距離が最も近い曲線 C 上の点 A と連続につなぐ単純曲線 C_1，点 O と，点 O との距離が最も近い曲線 C 上の点 B とを連続につなぐ単純曲線 C_2，C を作り出す写像の，点 A と点 B を始点，終点とする区間への制限の像を C_3 として，C_1, C_2, C_3 の和集合を考えれば，達成される．

以上から，領域 S_2 は命題 Z の反例となりえない．

問　題　40

【解答】

直角を挟んだ二つの辺の長さを x, y とすると斜辺の長さは

$$\sqrt{x^2+y^2}$$

と書ける。
これより周の長さは

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}$$

であり，面積は直角三角形の面積を求める公式より

$$\frac{1}{2}xy$$

であるから，それらが等しいことより

$$x+y+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}xy$$

を得る。
これより

$$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{1}{2}xy-x-y$$

であるから，両辺二乗して

$$x^2+y^2=\frac{1}{4}x^2y^2+x^2+y^2-x^2y-xy^2+2xy$$

となり，整理して

$$xy-4x-4y+8=0$$

つまり

$$(x-4)(y-4)=8$$

が得られる。
いま x と y は整数だから

$$\begin{aligned}(x-4,y-4)=&(-8,-1),(-4,-2),(-2,-4),(-1,-8),\\&(1,8),(2,4),(4,2),(8,1)\end{aligned}$$

つまり

$$\begin{aligned}(x,y)=&(-4,3),(0,2),(2,0),(3,-4),\\&(5,12),(6,8),(8,6),(12,5)\end{aligned}$$

となり，辺の長さは正だから

$$(x,y)=(5,12),(6,8),(8,6),(12,5)$$

に限られる．
このとき斜辺の長さは正の整数となり適する．
よって答えは，直角を挟む 2 辺の長さが 5 と 12, あるいは 6 と 8 の直角三角形．