第　113　問

次の問に答えよ.

(1) $x > 0$ のとき,

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$

を示せ.

(2) $0 < a < b$ を満たす実数 a, b について,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} < \frac{1}{4}\frac{b-a}{b+a}\left(6 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right)$$

を示せ.

(3) 次の不等式を示せ.

$$e^{\sin \sin 1} > 2$$

作問者：negi_0613_

解答

(1) 以下 $x > 0$ とする.

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

とおく. このとき,

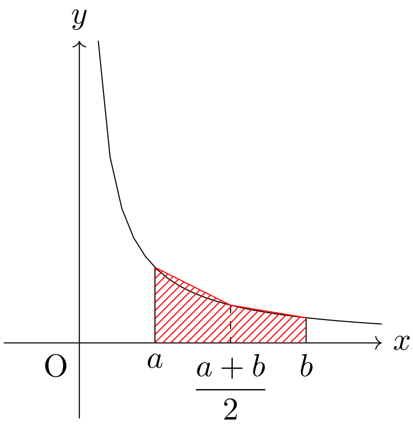
$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \\ f''(x) &= -\sin x + x \\ f'''(x) &= -\cos x + 1 \geqq 0 \end{aligned}$$

であるから, $f''(x)$ は単調増加. $f''(0) = 0$ より $f''(x) \geqq 0$ であるから, $f'(x)$ は単調増加. $f'(0) = 0$ より $f'(x) \geqq 0$ であるから, $f(x)$ は単調増加. $f(0) = 0$ より, $f(x) > 0$. 以上から,

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$$

が示された.

(2) 次の図のように, 評価できる.



よって,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x} &\leqq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a+b}\right)\left(\frac{a+b}{2} - a\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a+b}\right)\left(b - \frac{a+b}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\frac{b-a}{b+a}\left(6 + \frac{b}{a} + \frac{a}{b}\right) \end{aligned}$$

より, 示された.

(3)

$$e^{\sin\sin 1} > 2$$

すなわち,

$$\sin\sin 1 > \log 2$$

を示せばよい．今, (1) より,

$$\begin{aligned}\sin\sin 1 &> \sin\left(1-\frac{1}{6}\right)\\ &= \sin\left(\frac{5}{6}\right)\\ &> \frac{5}{6}-\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^3\\ &= \frac{955}{1296}\end{aligned}$$

である．また, (2) の不等式を $a=1, b=2$ について用いれば,

$$\log 2 = \int_1^2 \frac{dx}{x} < \frac{17}{24}$$

となる．今,

$$\frac{17}{24} = \frac{918}{1296} < \frac{955}{1296}$$

であるから,

$$\sin\sin 1 > \log 2$$

が示されたので,

$$e^{\sin\sin 1} > 2$$

が成り立つ.