■　解答編（問題 31〜 問題 40）

問　題　31

《解答》

良くない.

$$\begin{cases} f(x) = x^n\,(x + |x|) \\ g(x) = x^n\,(x - |x|) \end{cases}$$

とすれば，これらは n 回微分可能で n 次導関数が連続な実関数であり,

$$f(x)g(x) = 0$$

が全ての実数 x について成り立っているが, 当然, 一方が常に 0 をとるわけではない.

問 題 32

まず, 関数列 $g_n(x)$ について, $n \geqq 1$ のとき, F_n を $F_0=0, F_1=1$

$$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$$

で決まるフィボナッチ数列とすれば,

$$g_n(x)=\frac{F_n+F_{n-1}f(x)}{F_{n+1}+F_nf(x)}$$

となることを数学的帰納法を用いて示す。

- $n=1$ のとき,

$$\begin{aligned} g_1(x) &= \frac{1}{1+f(x)} \\ &= \frac{F_1+F_0f(x)}{F_2+F_1f(x)} \end{aligned}$$

  より成立。

- $n=k$ のとき,

$$g_k(x)=\frac{F_k+F_{k-1}(x)}{F_{k+1}+F_kf(x)}$$

  であると仮定すると,

$$\begin{aligned} g_{k+1}(x) &= \frac{1}{1+g_k(x)} \\ &= \frac{1}{1+\frac{F_k+F_{k-1}(x)}{F_{k+1}+F_kf(x)}} \\ &= \frac{F_{k+1}+F_kf(x)}{(F_k+F_{k+1})+(F_{k-1}+F_k)f(x)} \\ &= \frac{F_{k+1}+F_kf(x)}{F_{k+2}+F_{k+1}f(x)} \end{aligned}$$

  より, $n=k+1$ でも成立。

よって, 数学的帰納法から,

$$g_n(x)=\frac{F_n+F_{n-1}f(x)}{F_{n+1}+F_nf(x)}$$

が成り立つ。
次に,

$$F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n-1}$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

- $n=1$ のとき,

$$\begin{aligned} F_1^2-F_0F_2 &= 1^2-0\cdot 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

  より, 成立。

- $n=k$ のとき,

$$F_k^2-F_{k-1}F_{k+1}=(-1)^{k-1}$$

であると仮定すると,

$$\begin{aligned} F_{k+1}^2 - F_kF_{k+2} &= F_{k+1}^2 - F_k(F_{k+1}+F_k) \\ &= F_{k+1}(F_{k+1}-F_k) - F_k^2 \\ &= F_{k+1}F_{k-1} - F_k^2 \\ &= -(-1)^{k-1} \\ &= (-1)^k \end{aligned}$$

より, $n=k+1$ でも成立。

よって, 数学的帰納法から,

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n-1}$$

が成り立つ。
これらより,

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \frac{F_n + F_{n-1}f(x)}{F_{n+1}+F_nf(x)} \\ &= \frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1}}{F_n}\frac{1}{F_{n+1}+F_nf(x)} \\ &= \frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_n}\frac{1}{F_{n+1}+F_nf(x)} \end{aligned}$$

ゆえに,

$$\int_0^1 g_n(x)dx = \frac{F_{n-1}}{F_n} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_n}\int_0^1 \frac{1}{F_{n+1}+F_nf(x)}dx$$

であるから, $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $f(x) > 0$ から,

$$\frac{1}{F_{n+1}+F_nf(x)} < \frac{1}{F_{n+1}}$$

より,

$$\left| \int_0^1 g_n(x)dx - \frac{F_{n-1}}{F_n} \right| < \frac{1}{F_nF_{n-1}}$$

が成り立つ。
次に, 数列 F_n の一般項を求める。$x^2-x-1=0$ の 2 解を $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とすれば, 解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = 1, \alpha\beta = -1$$

よって,

$$F_{n+2} = (\alpha+\beta)F_{n+1} - \alpha\beta F_n$$

とできる。ゆえに,

$$\begin{cases} F_{n+2} - \alpha F_{n+1} = \beta(F_{n+1} - \alpha F_n) \\ F_{n+2} - \beta F_{n+1} = \alpha(F_{n+1} - \beta F_n) \end{cases}$$

よって,

$$\begin{cases} F_n - \alpha F_{n-1} = \beta^{n-2}(F_2 - \alpha F_1) = \beta^{n-1} \\ F_n - \beta F_{n-1} = \alpha^{n-2}(F_2 - \beta F_1) = \alpha^{n-1} \end{cases}$$

これらより，

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

である。ゆえに，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha^n - \beta^n} \\ &= \frac{1}{\alpha} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{F_n F_{n-1}} &= 0\end{aligned}$$

から，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} \\ &= \frac{1}{\alpha} \\ &= \frac{\sqrt{5}-1}{2}\end{aligned}$$

問　題　33

《解答》

1 以上の整数 p,q に対して，関数 $f_{p,q}(x)$ を

$$f_{p,q}(x) = x^p(1-x)^q$$

と定める．

その導関数は

$$f'_{p,q}(x) = px^{p-1}(1-x)^q - qx^p(1-x)^{q-1}$$

であるから，方程式

$$f'_{p,q}(x) = 0$$

の実数解は

$$p(1-x) = qx$$

の実数解で，つまり

$$x = \frac{p}{p+q}$$

である．

したがって，関数 $f_{p,q}(x)$ の $0 \leq x \leq 1$ における増減は

x	0	$\cdots$	$\dfrac{p}{p+q}$	$\cdots$	1
$f'_{p,q}(x)$		$+$	0	$-$	
$f_{p,q}(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{p^pq^q}{(p+q)^{p+q}}$	$\searrow$	0

となる．

次に，1 以上の整数 p,q に対して，実数 $I_{p,q}$ を

$$I_{p,q} = \int_0^1 f_{p,q}(x)dx$$

と定める．

すると，部分積分により

$$\begin{aligned}
I_{p,q} &= \int_0^1 x^p(1-x)^q dx \\
&= \left[\frac{1}{p+1}x^{p+1}(1-x)^q\right]_0^1 + \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx \\
&= \frac{q}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{q-1}dx \\
&= \vdots \\
&= \frac{(q)(q-1)\cdots(1)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)}\int_0^1 x^{p+q}dx \\
&= \frac{(q)(q-1)\cdots(1)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)(p+q+1)} \\
&= \frac{p!q!}{(p+q+1)!}
\end{aligned}$$

と計算できる．

よって，

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{{}_{an}\mathrm{C}_{bn}} &= \left(\frac{(an)!}{(bn)!\,(an-bn)!}\right)^{\frac{1}{n}}\\ &= \frac{1}{\left(\frac{(bn)!(an-bn)!}{(an+1)!}\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{(an+1)^{\frac{1}{n}}}\\ &= \frac{1}{\left(\int_0^1 x^{bn}(1-x)^{an-bn}dx\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{(an+1)^{\frac{1}{n}}}\\ &= \frac{1}{\left(\int_0^1 \left(f_{b,a-b}(x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{1}{(an+1)^{\frac{1}{n}}}\end{aligned}$$

が成り立つ．

以下，二つの部分に分けて極限を求める．

(i) $\left(\displaystyle\int_0^1 \left(f_{b,a-b}(x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}$ について考える．先に示した増減表より，

$$f_{b,a-b}\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{b^b(a-b)^{a-b}}{a^a}$$

で，これが $0 \leq x \leq 1$ における $f_{b,a-b}(x)$ の最大値である．これを M とおく．

これより，

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1 \left(f_{b,a-b}(x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\\ \leq&\left(\int_0^1 M^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\\ =&M\end{aligned}$$

である．

次に，ε を

$$0 < \varepsilon < M$$

を満たすように任意にとる．

すると，方程式

$$f_{b,a-b}(x) = M - \varepsilon$$

は，増減表より $0 < x < 1$ の範囲にちょうど 2 つの解をもつので，それを $l,\ r\ (l < r)$ とおく．

これより，

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^1 \left(f_{b,a-b}(x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\\ \geq&\left(\int_l^r \left(f_{b,a-b}(x)\right)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\\ \geq&\left(\int_l^r (M-\varepsilon)^n dx\right)^{\frac{1}{n}}\\ =&(r-l)^{\frac{1}{n}}\,(M-\varepsilon)\end{aligned}$$

となる．ここで

$$\lim_{n\to\infty}(r-l)^{\frac{1}{n}}\,(M-\varepsilon) = M - \varepsilon$$

であるから，ある正の整数 N が存在して，

$$n \geq N \implies (M-\varepsilon)-(r-l)^{\frac{1}{n}}(M-\varepsilon)<\varepsilon$$

すなわち

$$n \geq N \implies M-2\varepsilon \leq \left(\int_0^1 (f_{b,a-b}(x))^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}$$

が成り立つ．

以上から，任意の ε $(0<\varepsilon<M)$ に対して，ある正の整数 N が存在して，

$$n \geq N \implies M-2\varepsilon \leq \left(\int_0^1 (f_{b,a-b}(x))^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \leq M$$

となるから，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_0^1 (f_{b,a-b}(x))^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} = M = \frac{b^b(a-b)^{a-b}}{a^a}$$

である．

(ii) $(an+1)^{\frac{1}{n}}$ について考えると，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(an+1)^{\frac{1}{n}} &= \lim_{n\to\infty}\left((an+1)^{\frac{1}{an+1}}\right)^{a+\frac{1}{n}}\\ &= 1\end{aligned}$$

である．

以上から，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{{}_{an}\mathrm{C}_{bn}} = \frac{a^a}{b^b(a-b)^{a-b}}$$

である．

《別解》

対数をとって整理すると $\sum\log$ が出現する．対数が単調増加であることより上下から $\int\log$ で評価できるので，慎重に不等式評価を行なっていく．

任意の実数 x に対して，平均値の定理から，

$$|\sin(f_n(x)) - 0| \leqq |\cos c_1||f_n(x) - 0|$$

なる実数 c_1 が 0 と x の中間に存在する．$|\sin c_2| < 1$ であることと $\sin(f_n(x)) = f_{n+1}(x)$ であることに注意して，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

を得る．一方，d を

$$\cos d = d$$

となる実数として定めれば，任意の実数 x に対して，平均値の定理から，

$$|\cos(g_n(x)) - d| \leqq |\sin c_2||g_n(x) - d|$$

なる c_2 が d と x の中間に存在する．$|\sin c_2| < 1$ であることと $\cos(g_n(x)) = g_{n+1}(x)$ であることに注意して，$|g_n(x) - d|$ は $n \to \infty$ で 0 に収束すること，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = d$$

を得る．したがって，ある番号以降で，任意の x に対して

$$|f_n(x)| < \frac{d}{2} \quad \text{および} \quad |g_n(x) - d| < \frac{d}{2}$$

となる．このとき，任意の x で

$$f_n(x) < \frac{d}{2} < g_n(x)$$

であるから，$f_n(x) = g_n(x)$ は解をもたない．これで問の前半部分は示された．

次に，関数 $h_n(x)$ を

$$h_n(x) = g_n(x) - f_n(x)$$

で定める。

[1] $n = 1$ のとき，方程式 $f_1(x) = g_1(x)$ すなわち $\cos x = \sin x$ は少なくとも一つの解 $x = \dfrac{\pi}{4}$ をもつ。
[2] $n = 2$ のとき，

$$\begin{aligned} h_2(x) &= \cos(\cos x) - \sin(\sin x) \\ &= 2\sin\left[-\frac{1}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{\pi}{4}\right]\sin\left[\frac{1}{2}(\cos x - \sin x) + \frac{\pi}{4}\right] > 0. \end{aligned}$$

最後の不等号は，$0 \leqq x < 2\pi$ のとき $-\sqrt{2} \leqq \cos x \pm \sin x \leqq \sqrt{2}$ であること，および

$$\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} - \sin\frac{\pi}{4} > 0, \qquad \frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$$

であることから従う。したがって，$f_2(x) = g_2(x)$ は解をもたない。
[3] $n = 3$ のとき。多項式

$$P(x) = x^2 - 2x - 4$$

の根は $x = 1 \pm \sqrt{5}$，したがって

$$P(x) < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 - \sqrt{5} < x < 1 + \sqrt{5}. \qquad \text{(式 A)}$$

さて

$$\left(\frac{15}{7}\right)^2 < 5 \quad \text{故に} \quad \frac{15}{7} < \sqrt{5} \quad \text{したがって} \quad \frac{22}{7} < \sqrt{5} + 1.$$

そして

$$0 < \int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = \frac{22}{7} - \pi$$

以上より

$$\pi < \frac{22}{7} < \sqrt{5} + 1.$$

これと (式 A) より

$$\pi^2 - 2\pi - 4 < 0 \qquad \text{故に} \qquad \frac{2}{\pi} > \frac{\pi}{2} - 1.$$

ここで $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において $\dfrac{d^2}{dx^2} \sin x = -\sin x < 0$，また

$$\sin 0 = \frac{2}{\pi} \cdot 0 = 0, \qquad \sin \frac{\pi}{2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 1$$

であるから，

$$\sin x > \frac{2}{\pi} x.$$

以上から

$$\sin 1 > \frac{2}{\pi} > \frac{\pi}{2} - 1.$$

故に

$$\sin(\sin 1) > \sin\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = \cos 1.$$

これより

$$h_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\cos\left(\cos\frac{\pi}{2}\right)\right) - \sin\left(\sin\left(\sin\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos 1 - \sin(\sin 1) < 0.$$

また

$$h_3(0) = \cos(\cos(\cos 0)) - \sin(\sin(\sin 0)) = \cos(\cos 1) > 0.$$

関数 $h_3(x)$ は区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続で，$h_3(0) > 0 > h_3\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから，

$$h_3(x_0) = 0$$

なる x_0 がこの区間において存在する。この x_0 において

$$f_3(x_0) = g_3(x_0).$$

以上から，求める n の値は，

$$\boxed{n = 1,\, 3}$$

である．これが問の後半部分である．

問 題　35

各 $n \geq 3$ に対し S_n は，

$$\begin{aligned} S_n &= n \times \left(\text{底辺の長さが} 1 \text{で頂角の大きさが} \frac{2\pi}{n} \text{の二等辺三角形の面積} \right) \\ &= n \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2\tan\frac{\pi}{n}} \right) \\ &= \frac{n}{4\tan\frac{\pi}{n}} \end{aligned}$$

と表せられ，

$$S_n = \frac{n}{4\tan\frac{\pi}{n}} < \frac{n}{4\tan\frac{\pi}{n+1}} < \frac{n+1}{4\tan\frac{\pi}{n+1}} = S_{n+1}$$

となるので，S_n は n に関して狭義単調増加する．よって，

$$S_m < \pi < S_{m+1}$$

となるような 3 以上の整数 m が 1 つ見つかれば，求める n は $m+1$ である．実は，

$$S_6 < \pi < S_7 \tag{1}$$

が成り立つ．以下，これを示していこう．

まずは，$S_6 < \pi$ を示す．これは以下のように示せる：

$$S_6 = \frac{3\sqrt{3}}{2} < \frac{3 \times 1.8}{2} = 2.7 < \pi$$

次に $\pi < S_7$ を示す．この不等式は

$$4\pi \tan\frac{\pi}{7} < 7 \tag{2}$$

と同値なので，これを示せばよい．$y = \tan x$ のグラフの凸性から，

$$4\pi \tan\frac{\pi}{7} < 4\pi \times \left(\frac{6}{7} \tan\frac{\pi}{6} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{7}\pi$$

となるので，

$$4\pi \tan\frac{\pi}{7} < \frac{8 \times 1.8 \times 3.2}{7} = \frac{46.08}{7} < \frac{49}{7} = 7$$

と (2) の評価でき，$\pi < S_7$ が示せた．

以上より，(1) が示せたので，求める n は $n = 7$ である．

問　題　36

三点 O と P と Q の座標は，それぞれ

- $\mathrm{O}(0,0)$
- $\mathrm{P}(2t,0)$
- $\mathrm{Q}(t,\sqrt{1-t^2})$

である．
t が $0 \leq t \leq 1$ を満たして動くときの折れ線 OQP が動く領域を求めるために，線分 OQ と線分 PQ が動く領域をそれぞれ求め，あとでその和集合を求めればよい．

(A) 線分 OQ が動く領域を求める．これは容易で，半円

$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

である．

(B) 線分 PQ が動く領域を求める．
まず直線 PQ が動く領域のうち $0 \leq x \leq 1$ を満たす部分を求める．

(i) $t=0$ のとき，直線 PQ の式は

$$x=0$$

である．

(ii) $0<t\leq 1$ のとき，直線 PQ の式は

$$y=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}(x-2t)$$

すなわち

$$y=-\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x+2\sqrt{1-t^2}$$

である．この右辺を $f(x,t)$ とおく．
t が $0<t\leq 1$ を満たして動くときのこの直線の通過領域は，$\cos p=t$ とおくことで，実数 p が

$$0 \leq p < \frac{\pi}{2}$$

を満たして動くときの直線

$$y=-(\tan p)\,x+2\,(\sin p)$$

の通過領域と同じである．
それを求めるために，固定された各実数 x $(0<x\leq 2)$ に対して y の動く範囲を求める．
式

$$y=-(\tan p)\,x+2\,(\sin p)$$

を p について微分すると

$$\frac{dy}{dp}=-\frac{1}{(\cos p)^2}x+2\,(\cos p)$$

すなわち

$$\frac{dy}{dp}=\frac{2\,(\cos p)^3-x}{(\cos p)^2}$$

を得る．
ここで, いまは $0<x\leq 2$ で考えているから, ある実数 p_0 が存在して

$$0 \leq p_0 < \frac{\pi}{2}$$

かつ

$$\cos(p_0) = \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$$

を満たし，これを用いると p が動くときの y の増減は

p	0	$\cdots$	p_0	$\cdots$	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$\frac{dy}{dp}$		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	(max)	$\searrow$	$(-\infty)$

となる．
したがって t が動くときの y の増減は

t	(0)	$\cdots$	$\sqrt[3]{\frac{x}{2}}$	$\cdots$	1
y	$(-\infty)$	$\nearrow$	(max)	$\searrow$	0

となる．
さて，今求めたのは直線 PQ の動く領域についてであるから，線分 PQ の動く領域について考えるには t の変域を

$$\frac{x}{2} \leq t \leq x$$

に制限しなければならない．

- 不等式
$$\frac{x}{2} \leq \sqrt[3]{\frac{x}{2}}$$
について考える．両辺を 3 乗しても解は変わらないから
$$\frac{x^3}{8} \leq \frac{x}{2}$$
を解けばよい．今考えている $0 < x \leq 2$ の範囲では，これは常に成立する．
- 不等式
$$\sqrt[3]{\frac{x}{2}} \leq x$$
について考える．両辺を 3 乗しても解は変わらないから
$$\frac{x}{2} \leq x^3$$
を解けばよい．今考えている $0 < x \leq 2$ の範囲では，
$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 2$$
のときかつそのときに限りこの不等式が成り立つ．

したがって増減表より，y の動く範囲は,

$$0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

のとき

$$f\left(x, \frac{x}{2}\right) \leq y \leq f\left(x, x\right)$$

であり,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 2$$

のとき

$$\min\left(f\left(x, \frac{x}{2}\right), f\left(x, x\right)\right) \leq y \leq f\left(x, \sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right)$$

である.

また，各値については

$$\begin{aligned}
f\left(x, \frac{x}{2}\right) =& -\frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\left(\frac{x}{2}\right)}x + 2\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2} \\
=& 0, \\
f(x, x) =& -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}x + 2\sqrt{1-x^2} \\
=& \sqrt{1-x^2}, \\
f\left(x, \sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right) =& -\frac{\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right)^2}}{\sqrt[3]{\frac{x}{2}}}x + 2\sqrt{1-\left(\sqrt[3]{\frac{x}{2}}\right)^2} \\
=& -\sqrt[3]{2x^2}\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)^2}} + 2\sqrt{1-\sqrt[3]{\left(\frac{x}{2}\right)^2}} \\
=& -\sqrt[3]{x^2}\sqrt{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{x^2}} + \sqrt[3]{4}\sqrt{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{x^2}} \\
=& \left(\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{x^2}\right)\sqrt{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{x^2}} \\
=& \left(2^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

と求められる.

以上から，線分 PQ が動く領域は

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 0 \leq y \leq \left(2^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 2\right) \end{cases}$$

と書ける.

また，$0 \leq x \leq 1$ のとき

$$\begin{aligned}
&\left(2^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} \\
=&\sqrt{2^2 - 3\cdot 2^{\frac{4}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3\cdot 2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2} \\
=&\sqrt{4 - 6\cdot 2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} + 3\cdot 2^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}} - x^2} \\
=&\sqrt{3\left(2^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}} - 1\right)^2 + 1 - x^2} \\
\geq&\sqrt{1-x^2}
\end{aligned}$$

であるから，線分 OQ の通過領域は線分 PQ の通過領域に包含される．
よって，求める領域は

$$\begin{cases} 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2} & \left(0 \leq x \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ 0 \leq y \leq \left(2^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} & \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq 2\right) \end{cases}$$

である．
次に，面積を求める．
面積を定積分を用いて書くと

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 \left(2^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx$$

となる．ここにある二つの定積分を, それぞれ I_1, I_2 と書くことにする．

(i) I_1 を求める．これは $x = \sin\theta$ の置換により

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{1-x^2}dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= \left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と計算できる。

(ii) I_2 を求める．まず,

$$\frac{x}{2} = (\cos\theta)^3$$

と置換することで

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^2 \left(2^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^0 \left(2^{\frac{2}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}\cos^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} \left(2 \cdot 3 (\cos\theta)^2 \cdot (-\sin\theta)\right) d\theta \\ &= 12 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta)^2 (\sin\theta)^4 d\theta \end{aligned}$$

と変形できる．

これは三角関数の公式を用いて

$$
\begin{aligned}
I_2 &= 12\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos\theta)^2 (\sin\theta)^4 \, d\theta \\
&= 12\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)^2 d\theta \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1-\cos^2 2\theta\right)(1-\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 2\theta\right)(1-\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2\theta d\theta - \frac{3}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\sin^2 2\theta\right)(2\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta - \frac{3}{4}\int_0^{1} t^2 dt \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4}\left[t^3\right]_0^1 \\
&= \frac{3}{16}\pi - \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

と計算できる．

以上二つを足して，求める面積は

$$
\begin{aligned}
I_1 + I_2 &= \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{16}\pi - \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{5\pi}{16}
\end{aligned}
$$

である．

問　題　37

【解答】

(1) $y' - (\sin x)y = 0$ より $y = 0$ のとき適し，そうでないときは

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \sin x$$

となるから両辺 x で積分して

$$\log|y| = -\cos x + C_1 \quad (C_1 \text{ は定数})$$

が得られる．

よって，

$$y = Ce^{-\cos x} \quad (C \text{ は定数})$$

である．

(2) $y' - (\sin x)y = \sin(x + \sin x)$ について，右辺に加法定理を適用することで

$$y' - (\sin x)y = \sin(x)\cos(\sin x) + \cos(x)\sin(\sin x)$$

すなわち

$$(\sin x)(-y) + y' = \sin(x)\cos(\sin x) + \cos(x)\sin(\sin x)$$

よって, 微分方程式の一つの解として

$$y = -\cos(\sin x)$$

が見つかる．

(3) 問 (2) より, 微分方程式 $y' - (\sin x)y = \sin(x + \sin x)$ は

$$(y + \cos(\sin x))' - (\sin x)(y + \cos(\sin x)) = 0$$

と変形できる．

これは問 (1) より解けて,

$$y + \cos(\sin x) = Ce^{-\cos x} \quad (C \text{ は定数})$$

すなわち

$$y = -\cos(\sin x) + Ce^{-\cos x} \quad (C \text{ は定数})$$

である．

(4) 微分方程式 $y' - (\sin x)y = \sin(x + \sin x)$ の両辺に $e^{\cos x}$ をかけると

$$y'e^{\cos x} - (\sin x)ye^{\cos x} = e^{\cos x}\sin(x + \sin x)$$

すなわち

$$(ye^{\cos x})' = e^{\cos x}\sin(x + \sin x)$$

が得られる．

よって,

$$ye^{\cos x} = \int e^{\cos x}\sin(x + \sin x)dx$$

となる．

左辺は問 (3) より

$$ye^{\cos x} = -e^{\cos x}\cos(\sin x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

であるから，右辺についても

$$\int e^{\cos x}\sin(x + \sin x)dx = -e^{\cos x}\cos(\sin x) + C \quad (C \text{ は定数})$$

が成り立つ．
よって，求めるべき不定積分は

$$-e^{\cos x}\cos(\sin x)+C \quad (C\text{ は定数})$$

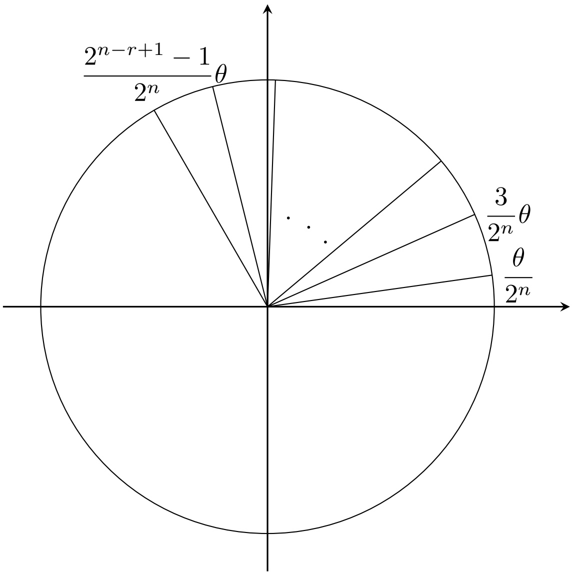
である．

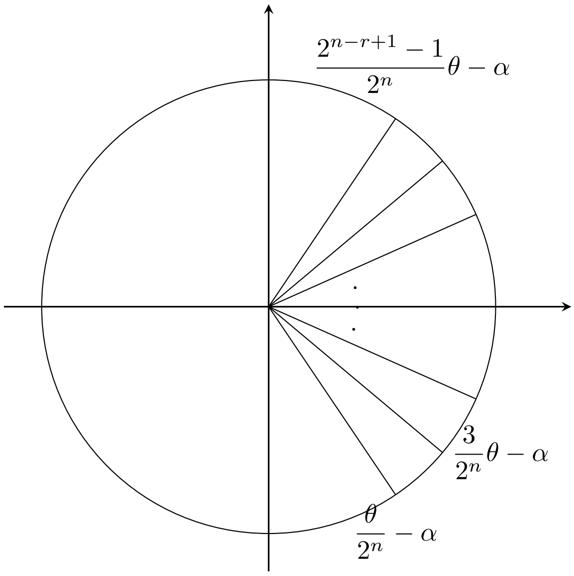
$$\frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-r}} \sin \frac{2k-1}{2^n}\theta}{\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-r}} \cos \frac{2k-1}{2^n}\theta} = l(n,r,\theta)$$ とする。

$$\sum_{k=1}^{2^{n-r}} \sin \frac{2k-1}{2^n}\theta = l \sum_{k=1}^{2^{n-r}} \cos \frac{2k-1}{2^n}\theta$$

$$\sum_{k=1}^{2^{n-r}} \left(\sin \frac{2k-1}{2^n}\theta - l \cos \frac{2k-1}{2^n}\theta \right) = 0$$

$$\sum_{k=1}^{2^{n-r}} \sin \left(\frac{2k-1}{2^n}\theta - \alpha \right) = 0 \ \left(\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{l^2+1}}, sin\alpha = \frac{l}{\sqrt{l^2+1}} \right)$$





図のように、$\dfrac{2^{n-r+1}-1}{2^n}\theta - \alpha = -\left(\dfrac{\theta}{2^n} - \alpha\right)$ となるような α を取れば、各項が打ち消し合い、等式が成り立つ。

$\therefore \alpha = \dfrac{\theta}{2^r}$

$\therefore l = \tan \dfrac{\theta}{2^r}$

$$\therefore S = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^r} \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-r}} \sin \frac{2k-1}{2^n}\theta}{\displaystyle\sum_{k=1}^{2^{n-r}} \cos \frac{2k-1}{2^n}\theta} = \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^r} \tan \frac{\theta}{2^r}$$

$$\begin{aligned}
\int S d\theta &= \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{2^r} \int \tan \frac{\theta}{2^r} d\theta \\
&= -\sum_{r=1}^{n} \log \left| \cos \frac{\theta}{2^r} \right| + C \\
&= -\log \left| \prod_{r=1}^{n} \cos \frac{\theta}{2^r} \right| + C
\end{aligned}$$

ここで、

$$
\begin{aligned}
\sin\theta &= 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= 4\sin\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{4}\cos\frac{\theta}{2} \\
&\vdots \\
&= 2^n \sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{r=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^r}
\end{aligned}
$$

$\therefore \displaystyle\prod_{r=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^r} = \frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}$

$$
\begin{aligned}
\therefore S &= -\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left|\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}}\right| + C \\
&= \frac{1}{2^n\tan\frac{\theta}{2^n}} - \frac{1}{\tan\theta}
\end{aligned}
$$

問　題　39

$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ に対して関数 $f(x)$ を

$$f(x) = (\cos x)^{(\cos x)} + (\sin x)^{(\sin x)}$$

と定める。

このとき、導関数は

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left((\cos x)^{(\cos x)} + (\sin x)^{(\sin x)}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(e^{(\cos x)\log_e(\cos x)} + e^{(\sin x)\log_e(\sin x)}\right)$$

$$= e^{(\cos x)\log_e(\cos x)}\left(-(\sin x)\log_e(\cos x) + (\cos x)\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\right)$$

$$+ e^{(\sin x)\log_e(\sin x)}\left((\cos x)\log_e(\sin x) + (\sin x)\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= (\cos x)^{(\cos x)}\left(-(\sin x)\log_e(\cos x) - \sin x\right)$$

$$+ (\sin x)^{(\sin x)}\left((\cos x)\log_e(\sin x) + \cos x\right)$$

$$= (\sin x)(\cos x)\left(\frac{(\sin x)^{(\sin x)}(\log_e(\sin x)+1)}{\sin x} - \frac{(\cos x)^{(\cos x)}(\log_e(\cos x)+1)}{\cos x}\right)$$

となる。

ここで、$0 < t < 1$ に対して関数 $g(t)$ を

$$g(t) = \frac{t^t(\log_e t + 1)}{t}$$

と定めると

$$f'(x) = (\sin x)(\cos x)\left(g(\sin x) - g(\cos x)\right)$$

となる。

このとき、g の導関数は

$$
\begin{aligned}
g'(t) &= \frac{d}{dt}\frac{t^t\left(\log_e t+1\right)}{t} \\
&= \frac{d}{dt}t^{t-1}\left(\log_e t+1\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt}t^{t-1}\right)\left(\log_e t+1\right)+t^{t-1}\left(\frac{d}{dt}\left(\log_e t+1\right)\right) \\
&= \left(\frac{d}{dt}e^{(t-1)\log_e t}\right)\left(\log_e t+1\right)+t^{t-1}\left(\frac{d}{dt}\left(\log_e t+1\right)\right) \\
&= \left(e^{(t-1)\log_e t}\left(\log_e t+(t-1)\cdot\frac{1}{t}\right)\right)\left(\log_e t+1\right)+t^{t-1}\left(\frac{1}{t}\right) \\
&= t^{t-1}\left(\log_e t+1-\frac{1}{t}\right)\left(\log_e t+1\right)+t^{t-2} \\
&= t^{t-2}\Big(\left(t\log_e t+t-1\right)\left(\log_e t+1\right)+1\Big) \\
&= t^{t-2}\left(t\left(\log_e t+1\right)^2-\log_e t\right) \\
&> 0 \quad \left(\because \log_e t<0\right)
\end{aligned}
$$

となるから、$g(t)$ は t に対して単調に増加する。
これより、$0<a<1,\, 0<b<1$ を満たす実数 $a,\, b$ に対して

$$g(a)=g(b) \implies a=b$$

ということになる。
$f(x)$ の導関数に戻ると、

$$f'(x)=(\sin x)(\cos x)\big(g(\sin x)-g(\cos x)\big)$$

であったから、これが 0 になるのは

$$g(\sin x)=g(\cos x)$$

のときであり、今示したことよりこれは

$$\sin x=\cos x$$

と同値である。
すなわち、

$$f'(x)=0 \iff x=\frac{\pi}{4}$$

ということがわかる。
$g(t)$ が単調増加関数であったことから、$f(x)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	(最小)	$\nearrow$	

となる。
これより、$f(x)$ の最小値は

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^{\left(\cos\frac{\pi}{4}\right)} + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^{\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= 2\left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \\
&= 2^{\left(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)} \\
&= \boxed{2^{\left(\frac{4-\sqrt{2}}{4}\right)}}
\end{aligned}
$$

である。

【コメント】
与えられた式を x で微分した後、微分係数が 0 になる点を求めるための変形が特徴的です。うまく cos と sin を分けることで、g の導入により解決できる形になります。

問　題　40

(1) 問 (2) に含まれるので略。

(2) 任意の自然数 k に対し,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^k = 1$$

であるから、極限は常に 1 で一定になる。

(3) 極限値は

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(n,n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{1-\frac{1}{n+1}}\\ &= \frac{1}{e}\end{aligned}$$

である。