目次

数学 I

問題 1

準備

S の部分集合

　問題を直接解く前に，集合 S について理解を深めなければならない．定義から

$$P \subset S \tag{1}$$

である．特に一次関数は S の元であるため，絶対値に対する閉性より，全ての実数 t に対して，

$$|x - t| \in S \tag{2}$$

となる．

(1) と (2) から，積に対する閉性より，全ての $f \in P^{\times}$ と実数 t に対して

$$f(x)|x - t| \in S \tag{3}$$

となる．

(1) と (3) から，和に対する閉性より，全ての $f_0 \in P$ と非負整数 L と $f_1, f_2, \dots f_L \in P^{\times}$ と実数 $t_1 < t_2 < \cdots < t_L$ に対して，

$$f_0(x) + \sum_{k=1}^{L} f_k(x)|x - t_k| \in S \tag{4}$$

が成立する．

ここで，左辺で表される関数全体からなる集合を S' とする．すなわち，

$$S' := \left\{ f_0(x) + \sum_{k=1}^{L} f_k(x)|x - t_k| \colon f_0 \in P,\ L\text{は非負整数}, \atop f_1, f_2, \dots f_L \in P^{\times},\ t_1 < t_2 < \cdots < t_L \right\} \tag{5}$$

と定める．

すると (4) と (5) から明らかに,

$$S' \subset S \tag{6}$$

であるが，実は次の補題が成り立つ.

補題

集合 S と S' は等しい集合である.

まずこれを示そう.

$S = S'$ の証明　まず，多項式関数と絶対値関数 $|x|$ はともに連続関数であり，連続関数同士の和と積と合成は連続であるから，S' の元が多項式関数と絶対値関数 $|x|$ の和と積と合成により作られたことを思い出せば S' の元は全て連続である.

つまり，任意の実数 a と $A(x) \in S'$ に対して

$$\lim_{x \to a} A(x) = A(a) \tag{7}$$

が成り立つ.

これより連続性は保証されたが，一方で微分可能性については保証されない.

実際，たとえば $|x|$ は $x = 0$ で微分可能ではない.

そこで S' の任意の元 $A(x)$ に対して, 次のように $\$A(x)$ の定義をする:

$$\$A(x) := \left\{ \begin{array}{l} t\colon t\text{は実数で, ある非負整数}n\text{が存在して} \\ \displaystyle\lim_{h \to +0} \frac{f^{(n)}(t+h) - f^{(n)}(x)}{h} \neq \lim_{h \to -0} \frac{f^{(n)}(t+h) - f^{(n)}(x)}{h} \end{array} \right\} \tag{8}$$

つまり，これは $A(x)$ の無限回微分が不可能な点全体の集合を表す.

逆に言えば，$\$A$ に含まれない点は無限回微分可能と言える.

よって，微分演算の線形性より，全ての $A, B \in S'$ と実数 a に対して,

$$a \notin (\$A \cup \$B) \implies a \notin \$(A + B) \tag{9}$$

$$a \in (\$A \triangle \$B) \implies a \in \$(A + B) \tag{10}$$

が成立する．
この 2 つから，全ての $A, B \in S'$ と実数 a に対して，

$$\$(A+B) \subset \$A \cup \$B \tag{11}$$

$$\$A \cap \$B = \emptyset \implies \$(A+B) = \$A \cup \$B \tag{12}$$

$$a \notin \$A \implies (a \in \$B \iff a \in \$(A+B)) \tag{13}$$

が言える．

一方で，全ての $f \in P^{\times}$ と実数 t に対して

$$\$(f(x)|x-t|) = \{t\} \tag{14}$$

である．証明としては，このとき

$$f(x) = \begin{cases} f(x)(x-t) \in P & (x > t) \\ 0 & (x = t) \\ -f(x)(x-t) \in P & (x < t) \end{cases}$$

であり，多項式関数は無限回微分が可能であるとともに，$x = t$ においては f が 0 でないことから左右の多項式が異なることによる．

ここで (12) と (14) を繰り返し用いることで，全ての $f_0 \in P$ と非負整数 L と $f_1, f_2, \dots f_L \in P^{\times}$ と実数 $t_1 < t_2 < \cdots < t_L$ に対して，

$$\$\left(f_0(x) + \sum_{k=1}^{L} f_k(x)|x-t_k| \right) = \{t_k \ : k = 1, 2, \dots, L\} \tag{15}$$

となる．
これより，無限回微分不可能な点について着目することで，関数間の等式として，全ての $f_0 \in P$ と非負整数 L と $f_1, f_2, \dots f_L \in P$ と実数 $t_1 < t_2 < \cdots < t_L$ に対して

$$f_0(x) + \sum_{k=1}^{L} f_k(x)|x-t_k| = 0 \iff f_0(x) = f_1(x) = \cdots = f_L(x) = 0 \tag{16}$$

が成立するので，S' の定義 (5) に用いた文字は全て一意である．

さて，次に S' が積について閉じていることを示そう．
$A, B \in S'$ を任意にとると, ただ一通りの $f_0 \in P$ と $f_1, f_2, \dots f_{\#\$A} \in P^\times$ と実数 $a_1 < a_2 < \cdots < a_{\#\$A}$ が存在して，

$$f_0(x) + \sum_{i=1}^{\#\$A} f_i(x)|x - a_i| = A(x)$$

であり，同様に，ただ一通りの $g_0 \in P$ と $g_1, g_2, \dots g_{\#\$B} \in P^\times$ と実数 $b_1 < b_2 < \cdots < b_{\#\$B}$ が存在して，

$$g_0(x) + \sum_{j=1}^{\#\$B} g_j(x)|x - b_j| = B(x)$$

である．
これらの文字を用いて $A \times B$ について考えると

$$\begin{aligned}
A(x)B(x) = &\left(f_0(x) + \sum_{i=1}^{\#\$A} f_i(x)|x - a_i|\right)\left(g_0(x) + \sum_{j=1}^{\#\$B} g_j(x)|x - b_j|\right) \\
=& f_0(x)g_0(x) \\
&+ \sum_{i=1}^{\#\$A} g_0(x)f_i(x)|x - a_i| \\
&+ \sum_{j=1}^{\#\$B} f_0(x)g_j(x)|x - b_j| \\
&+ \sum_{i=1}^{\#\$A} \sum_{j=1}^{\#\$B} f_i(x)g_j(x)|(x - a_i)(x - b_j)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&f_0(x)g_0(x)\\
&+\sum_{i=1}^{\#\$A} g_0(x)f_i(x)|x-a_i|\\
&+\sum_{j=1}^{\#\$B} f_0(x)g_j(x)|x-b_j|\\
&+\sum_{i=1}^{\#\$A}\sum_{j=1}^{\#\$B} f_i(x)g_j(x)(\\
&\qquad (x-a_i)(x-b_j)\\
&\qquad -(x-\max(a_i,b_j))|x-\min(a_i,b_j)|\\
&\qquad +(x-\min(a_i,b_j))|x-\max(a_i,b_j)|\\
&\quad)\\
\in&S'
\end{aligned}
\tag{17}
$$

が成立する．したがって S' は積について閉じている．
ただし最後の変形には，実数 a, b に対して

$$
a < b \implies (|x-a|-(x-a))(|x-b|+(x-b)) = 0
$$

と，

$$
|x-a||x-b| = |x-\max(a,b)||x-\min(a,b)|
$$

が成り立つことを用いた．

次に，S' が絶対値をとる操作について閉じていることを示そう．
はじめに，(15) から，任意の $A \in S'$ に対して，

$$
\$A\text{は有限集合} \tag{18}
$$

となる．

よって無限回微分不可能な点について数学的帰納法を使った証明方法が可能である．
まず，全ての $A \in S'$ と実数 $p < q$ に対して，

- ある $t \in \$A$ が存在して $p < t < q$
- ただ一つの $f \in P$ があって，区間 $[p, q]$ 上 $A(x) = f(x)$

のいずれかが成り立つことを示そう．
数学的帰納法により示す．

1. $\#\$A = 0$ のとき
   $A(x)$ は P の元なので明らか．
2. $\#\$A = L$ のとき正しいと仮定すると，$\#\$A = L + 1$ のとき
   (15) から，ただ一通りの $f_0 \in P$ と $f_1, f_2, \dots f_{L+1} \in P^\times$ と実数 $t_1 < t_2 < \dots < t_{L+1}$ が存在して，
   $$f_0(x) + \sum_{k=1}^{L+1} f_k(x)|x - t_k| = A(x)$$
   が成立し，これらの文字を用いて
   $$A(x) = f_0(x) + \sum_{k=1}^{L} f_k(x)|x - t_k| + f_{L+1}|x - t_{L+1}| \quad (19)$$
   が成立する．
   これにより，
   - $a < t_{L+1} < b$ ならば，$t = t_{L+1}$ ととれば命題は正しい．
   - そうでないならば，(13) と数学的帰納法の仮定より命題は正しい．

   したがって，$\#\$A = L$ のとき正しいと仮定すると，$\#\$A = L + 1$ のときも正しい．

よって $\#\$A$ の値によらず示された．□

これより，場合分けと呼ばれる表示が可能である．ただし連続性 (7) より，有限個の点たる $\$A$ の元については言及しなくとも十分である．
すなわち，全ての $f_0 \in P$ と非負整数 L と $f_1, f_2, \dots f_L \in P^\times$ と実数 $t_1 < t_2 < \dots < t_L$ に対して，t_0 を $-\infty$ とし，t_{L+1} を ∞ とすると，

各 $m = 0, 1, \ldots, L$ に対し

$$
\begin{aligned}
& x \in (t_m, t_{m+1}) \implies \\
& \qquad f_0(x) + \sum_{k=1}^{L} f_k(x)|x - t_k| \\
& \qquad = f_0(x) + \sum_{k=1}^{m} f_k(x)(x - t_k) - \sum_{k=m+1}^{L} f_k(x)(x - t_k)
\end{aligned}
\tag{20}
$$

となる.

逆に，有限個の多項式関数の連続な場合分けで表された関数は S' の元である.

証明.

全ての非負整数 L と $h_0, h_1, \ldots h_L \in P$ と実数 $t_1 < t_2 < \cdots < t_L$ に対して，t_0 を $-\infty$ とし，t_{L+1} を ∞ とすると，

各 $m = 0, 1, \ldots, L$ に対し

$$
\begin{aligned}
& (x \in (t_m, t_{m+1}) \implies H(x) = h_m(x)) \implies \\
& \qquad H(x) = \frac{h_0(x) + h_L(x)}{2} + \sum_{k=1}^{L} \frac{h_k(x) - h_{k-1}(x)}{2(x - t_k)}|x - t_k|
\end{aligned}
\tag{21}
$$

となる.

ここで右辺について，仮定より $H(x)$ は連続なので

$$h_k(t_k) = h_{k-1}(t_k)$$

だから，因数定理より，ある $Q(x) \in P^{\times}$ が存在して

$$h_k(x) - h_{k-1}(x) = (x - t_k)Q(x)$$

となる．したがって

$$\frac{h_k(x) - h_{k-1}(x)}{2(x - t_k)} \in P^{\times}$$

なので，有限個の多項式関数の連続な場合分けで表された関数は S' の元であることが示された．□

これにより，有限個の多項式関数の連続な場合分けで表された関数であることと S' の元であることは等価である．

このことを用いて S' が絶対値について閉じていることが示せる．
まず，S' の元 $A(x)$ を任意にとる．
$\$A$ を小さい方から $t_1, t_2, \dots$ と配列し，$t_0 := -\infty$，$t_{\#\$A+1} := \infty$ として，$A(x)$ が次のように場合分けされているとする：
ただ一つの $h_0, h_1, \dots h_{\#\$A} \in P$が存在して, 各 $m = 0, 1, \dots, \#\$A$ に対し

$$x \in (t_m, t_{m+1}) \implies A(x) = h_m(x)$$

と場合分けされている．
ここで，代数学の基本定理により，各 $h_m(x)$ については

- 恒等的に 0 である
- 区間 (t_m, t_{m+1}) において根は有限

のどちらかがが成立する．
そこで，次のように $\$'A$ を定める：

$$\$'A := \$A \cup \left\{ \begin{array}{l} x_0 \ : \text{ある正整数 } m \text{ が存在して} \\ \qquad t_m < x_0 < t_{m+1} \ \wedge \ h_m \neq 0 \ \wedge \ h_m(x_0) = 0 \end{array} \right\}$$

すると集合 $\$'A$ は有限である．その元を小さい方から $T_1, T_2, \dots$ と配列し，$T_0 := -\infty$，$T_{\#\$'A+1} := \infty$ とすると，各区間 (T_n, T_{n+1}) において $A(x)$ はある多項式に一致し，なおかつ正の値と負の値を同時に含むことがない．
従って各区間 (T_n, T_{n+1}) において $|A(x)|$ はある多項式に一致するのだから，(21) よりこれは S' の元である．

以上で，S' の絶対値に対する閉性が示された．
すなわち，任意の $A(x) \in S'$ に対して

$$|A(x)| \in S' \tag{22}$$

が示された．

さて，集合 S' は明らかに和について閉じており，上で示したように積と絶対値についても閉じている．
よって

$$S' \supset S \tag{23}$$

となるので，(6) と (23) から，

$$S' = S \tag{24}$$

となり補題が示された．$\square$

これより上で示された S' についての命題は S と読み替えてよい．
さて，S の一般の元を具体的に表せるようになったところで，いよいよ問題に入る．
問 (1) の証明
$S^{\times}$ の任意の元 A, B をとる．
$S^{\times}$ は S の部分集合であるから

$$A, B \in S$$

であり，S は積について閉じた集合なので

$$AB \in S \tag{25}$$

が成り立つ．
一方，$S^{\times}$ は S の元であって場合分け表示に定数関数 0 が表れない関数全体からなる集合である．よって集合 $\$A \cup \$B$ の要素を小さい方から $T_1, T_2, \ldots$ と配列し，$T_0 := -\infty$，$T_{\#(\$A\cup\$B)+1} := \infty$ として，$A(x)$ と $B(x)$ が次のように場合分けされているとできる：
ただ一通りの $h_0, h_1, \ldots h_{\#(\$A\cup\$B)+1} \in P^{\times}$ が存在して，
各 $m = 0, 1, \ldots, \#(\$A \cup \$B)$ に対し

$$x \in (t_m, t_{m+1}) \implies A(x) = h_m(x)$$

かつ，ただ一通りの $l_0, l_1, \dots l_{\#(\$A\cup\$B)+1} \in P^\times$ が存在して，
各 $m = 0, 1, \dots, \#(\$A \cup \$B)$ に対し

$$x \in (t_m, t_{m+1}) \implies A(x) = l_m(x)$$

と場合分けされている．
このとき A と B の積は，
各 $m = 0, 1, \dots, \#(\$A \cup \$B)$ に対し

$$x \in (t_m, t_{m+1}) \implies A(x)B(x) = h_m(x)l_m(x)$$

であり，$h_m(x)$ と $l_m(x)$ はともに 0 でない多項式なので $h_m(x)l_m(x)$ も 0 でない多項式となる．
ゆえに $A(x)B(x)$ は場合分け表示に定数関数 0 が表れない．
このことと (25) より，以上の命題を改めて整理すると，任意の $A, B \in S^\times$ に対して，

$$AB \in S^\times \tag{26}$$

が成立することが示された．
よって問 (1) は示された．

問 (2) の証明

まず，$S^\times$ の元 $A(x)$ を任意にとる．
$\$A$ の要素を小さい方から $t_1, t_2, \dots$ と配列し，$t_0 := -\infty$，$t_{\#\$A+1} := \infty$ として，$A(x)$ が次のように場合分けされているとする：
ただ一つの $h_0, h_1, \dots h_{\#\$A} \in P$が存在して，
各 $m = 0, 1, \dots, \#\$A$ に対し

$$x \in (t_m, t_{m+1}) \implies A(x) = h_m(x)$$

と場合分けされている．

ここで，唐突だが次のような $B(x)$ をとる：

各 $m = 0, 1, \ldots, \#\$A$ に対し

$$x \in (t_m, t_{m+1}) \implies B(x) = \left(\prod_{k=0}^{m-1} h_k(x)\right)\left(\prod_{k=m+1}^{\#\$A} h_k(x)\right)$$

と場合分けされている．

このとき，$A(x)B(x)$ を計算してみると，
各 $m = 0, 1, \ldots, \#\$A$ に対し

$$\begin{aligned} x \in (t_m, t_{m+1}) \implies & \\ A(x)B(x) &= h_m(x) \times \left(\prod_{k=0}^{m-1} h_k(x)\right)\left(\prod_{k=m+1}^{\#\$A} h_k(x)\right) \\ &= \prod_{k=0}^{\#\$A} h_k(x) \end{aligned} \tag{27}$$

となる．これは m に依存しない式であるから，$A(x)$ と $B(x)$ の積は多項式関数になっている．
さて，$A(x)$ は連続だから，全ての $m \in 1, 2, \ldots, \#\$A$ に対して

$$h_m(t_m) = h_{m-1}(t_m)$$

となる．

これにより $B(x)$ については全ての $m \in 1, 2, \dots, \#\$A$ に対して,

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \to t_m - 0} B(x) \\
&= \lim_{x \to t_m - 0} \left(\prod_{k=0}^{m-2} h_k(x) \right) \left(\prod_{k=m}^{\#\$A} h_k(x) \right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{m-2} h_k(t_m) \right) \left(\prod_{k=m}^{\#\$A} h_k(t_m) \right) \\
&= h_m(t_m) \left(\prod_{k=0}^{m-2} h_k(t_m) \right) \left(\prod_{k=m+1}^{\#\$A} h_k(t_m) \right) \\
\land \quad & \lim_{x \to t_m + 0} B(x) \\
&= \lim_{x \to t_m + 0} \left(\prod_{k=0}^{m-1} h_k(x) \right) \left(\prod_{k=m+1}^{\#\$A} h_k(x) \right) \\
&= \left(\prod_{k=0}^{m-1} h_k(t_m) \right) \left(\prod_{k=m+1}^{\#\$A} h_k(t_m) \right) \\
&= h_{m-1}(t_m) \left(\prod_{k=0}^{m-2} h_k(t_m) \right) \left(\prod_{k=m+1}^{\#\$A} h_k(t_m) \right) \\
\therefore \quad & \lim_{x \to t_m - 0} B(x) = \lim_{x \to t_m + 0} B(x)
\end{aligned}$$

となるので極限 $\displaystyle\lim_{x \to t_m} B(x)$ が存在するから,

$$B(x) \in S$$

が言える.

加えて，各 $h_m(x)$ はどれも 0 でないため,

$$B(x) \in S^{\times}$$

が成立する.

また,

$$A(x)B(x) = \prod_{k=0}^{\#\$A} h_k(x)$$

であったから，各 h_k が 0 でないことより

$$A(x)B(x) \in P^{\times}$$

が成立する.

以上の命題を改めて整理すると, 任意の $A \in S^{\times}$ に対して, ある $B \in S^{\times}$ とある $g \in P^{\times}$ が存在して,

$$AB = g \tag{28}$$

が示された.
したがって問 (2) も示された.

問題 2

【解説】

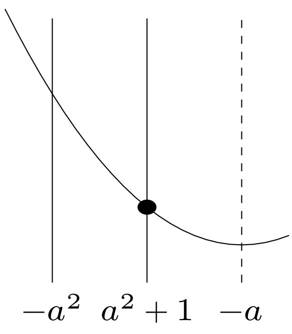
二次関数の問題においては図をかくことが望ましい．視覚的に場合分けを済ませてしまおう．

まず，$a=0$ の場合を考えておく．$y\equiv 1$ (恒等) であるので，最小値は 1.

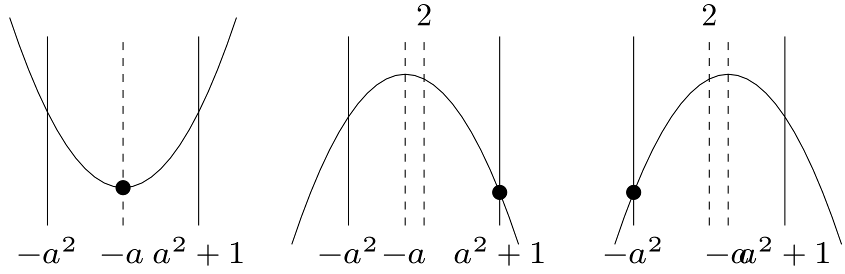
次に，$a\neq 0$ の場合を考える．

$$\begin{aligned} y &= ax^2+2a^2x+1 \\ &= a(x+a)^2+1-a^3 \end{aligned}$$

であるから，軸は $x=-a$ にある．以下，それぞれの図のように場合分けする．



(1) $a^2+1<-a \iff a^2+a+1<0$ の場合を考えるが，$a^2+a+1=\left(a+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ が明らかであるから，このようになる a は実数に存在しない．



(2) $-a^2 \leqq -a \leqq a^2+1$ のときを考える．これを満たす a は $a \leqq 0,\ 1 \leqq a$ である．$a<0$ の場合はグラフの形が変わるので別に考える．

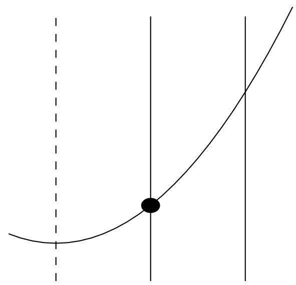
$1 \leqq a$ の場合 (グラフ左)，最小値は $x=-a$ のとき，$1-a^3$ となる．

$a<0$ のときは最小値をとる点の候補は定義域の両端となるが，これを区別する境界は軸 $x=-a$ が定義域の中間の $x=\dfrac{1}{2}$ の左右どちらにあるかということである．

- $-a<\dfrac{1}{2} \iff -\dfrac{1}{2}<a(<0)$ の場合 (グラフ中)，最小値は $x=a^2+1$ のとき，$a^5+2a^4+2a^3+2a^2+a+1$ となる．

- $-a=\dfrac{1}{2} \iff a=-\dfrac{1}{2}$ の場合，最小値は $x=-\dfrac{1}{4},\dfrac{5}{4}$ のとき，$\dfrac{27}{32}$ となる．

- $\dfrac{1}{2}<-a \iff a<-\dfrac{1}{2}$ の場合 (グラフ右)，最小値は $x=-a^2$ のとき，a^5-2a^4+1 である．



(3) $-a < -a^2$ のときを考える．これを満たす a は $0 < a < 1$ である．
このときの最小値は $x = -a^2$ のとき，$a^5 - 2a^4 + 1$ である．

まとめると，

- $a < -\dfrac{1}{2}$ の場合，最小値は $x = -a^2$ のとき，$a^5 - 2a^4 + 1$
- $a = -\dfrac{1}{2}$ の場合，最小値は $x = -\dfrac{1}{4}, \dfrac{5}{4}$ のとき，$\dfrac{31}{32}$
- $-\dfrac{1}{2} < a < 0$ の場合，最小値は $x = a^2 + 1$ のとき，$a^5 + 2a^4 + 2a^3 + 2a^2 + a + 1$
- $a = 0$ の場合，最小値は $0 \leqq x \leqq 1$ のすべての x で 1
- $0 < a < 1$ の場合，最小値は $x = -a^2$ のとき，$a^5 - 2a^4 + 1$
- $a = 1$ の場合，最小値は $x = -1$ のとき，-2
- $1 < a$ の場合，最小値は $x = -a$ のとき，$1 - a^3$

ただし，境界部分の値はその左右どちらかの区間に含めてもよい．

問題 3

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \beta = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする. n を非負整数として, $a_n = \alpha^n + \beta^n$ とおくと，$a_0 = 2, a_1 = 1$ であり，数列 a_n は

$$a_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot a_{n+1} + a_n = a_{n+1} + a_n$$

を満たす．したがって a_{n+1}, a_n が共に整数であれば a_{n+2} は整数となり，数列 a_n の第一項と第二項が整数であるから数学的帰納法により任意の非負整数 n に対して a_n は整数となる．ここで，$2.5 > \sqrt{5}$ より $|\beta| < 0.75$ であり $|\beta|^{2024} < 0.5$ であるから $N = a_{2024}$
$\therefore |\alpha^{2024} - N| = |\beta|^{2024}$．以下 $|\beta|$ の評価を行う．$2.236 < \sqrt{5} < 2.24$ より $0.618 < |\beta| < 0.62$，ここで

$$\begin{aligned}
0.62^5 &= 0.62 \cdot 0.3844^2 < 0.62 \cdot 0.4^2 \\
&= 0.62 \cdot 0.16 \\
&= 0.0992 < 10^{-1}, \\
0.618^{23} &> 0.61 \cdot 0.3819^{11} \\
&> 0.61 \cdot 0.38 \cdot 0.1458^5 \\
&> 0.61 \cdot 0.38 \cdot 0.14 \cdot 0.021^2 \\
&> 0.61 \cdot 0.38 \cdot 0.14 \cdot 0.0004 \\
&= 0.0000129808 > 10^{-5}
\end{aligned}$$

であり $10^{-\frac{5}{23}} < |\beta| < 10^{-\frac{1}{5}}$ つまり $10^{-440} < |\beta|^{2024} < 10^{-404.8}$. したがって求めるべき値は $m = 10$.

問題 4

(解答)

(1) A が成立しているとき，背理法により B の成立を示す．

ある素数 p に対して m が p^2 で割り切れるとする．このとき m は p で割り切れるため，$\dfrac{m}{p}$ は整数である．そこで，

$$n = \frac{m}{p} \tag{1}$$

とすると，

$$n^2 = \frac{m^2}{p^2} = m \cdot \frac{m}{p^2}$$

より，n^2 は m の倍数である．このとき A より n も p の倍数となるはずだが，$p \geqq 2$ と (1) より矛盾する．したがって，任意の素数 p に対して m は p^2 で割り切れない．

よって $A \Longrightarrow B$ は成り立つ．

(2) 逆に，B が成立しているときに A の成立を示す．

まず以下の補題を示す．

(＊) 素数 p に対して，m^2 が p で割り切れるなら m も p で割り切れる．

これは対偶を考えると，m^2 が p で割り切れないならば，m も p で割り切れない．

これは背理法で示すと明快である．

m^2 が p で割り切れないとき，m が p で割り切れると仮定する．すると m^2 は p^2 で割り切れるので矛盾．対偶が成立するので (＊) は成り立つ．

さて，2 以上の m については素因数分解により，異なる素数の積として

$$m = p_1 p_2 \cdots p_k$$

と書ける．このとき，m は p_1，$p_2, \ldots$，p_k の倍数となるので，

$(*)$ より，

$$
\begin{aligned}
n^2\text{が}m\text{の倍数} &\Longleftrightarrow n^2\text{が}p_1,\ p_2, \dots,\ p_k\text{の倍数} \\
&\Longleftrightarrow n\text{が}p_1,\ p_2, \dots,\ p_k\text{の倍数} \\
&\Longleftrightarrow n\text{が}m\text{の倍数}
\end{aligned}
$$

となる．よって，$B \Longrightarrow A$ は成り立つ．

問題 5

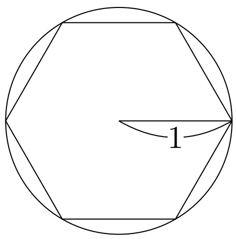
$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2=1 \\ |x|+|y|+|z|=k \end{cases}$$

を満たす (x, y, z) が存在する条件は，$x+y+z=0$ 上の 2 つの図形

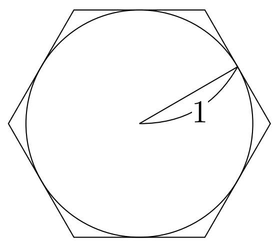
- 原点中心で半径 1 の円
- 原点中心で 1 辺の長さが $\dfrac{k}{\sqrt{2}}$ の正六角形

が共有点をもつ.

円が外接



円が内接



よって，$1 \leqq \dfrac{k}{\sqrt{2}} \leqq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ から，$\sqrt{2} \leqq k \leqq \dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.

問題 6

A から辺 BC に対して垂線を引く. その垂線の足を H とする. $\mathrm{BH} = x$ とすると，三平方の定理より，

$$6^2 - x^2 = 8^2 - (7-x)^2 \quad \therefore x = \frac{3}{2}$$

よって，$\mathrm{AH} = \dfrac{3\sqrt{15}}{2}$.

$\angle \mathrm{C} = \theta$ とする．このとき，$\sin\theta = \dfrac{3\sqrt{15}}{16}$ であることと，正弦定理より，

$$\frac{6}{\sin\theta} = 2R \quad \therefore R = \frac{3}{\sin\theta} = \frac{16\sqrt{15}}{15}$$

また，$\triangle$ ABC の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}r(6+7+8) = \mathrm{AH} \times \mathrm{BC} \times \frac{1}{2}$$

$$\therefore r = \frac{1}{21} \times \frac{3\sqrt{15}}{2} \times 7 = \frac{\sqrt{15}}{2}$$

よって，$\underline{R = \dfrac{16\sqrt{15}}{15},\ r = \dfrac{\sqrt{15}}{2}}$.

問題 7

k を実数として，$2x+y=k$ と置く．$y=k-2x$ と変形し，$x^2+y^2=5$ に代入すると，

$$\begin{aligned} x^2+(k-2x)^2&=5 \\ 5x^2-4kx+k^2-5&=0 \end{aligned}$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると，

$$\frac{D}{4}=(2k)^2-5(k^2-5)\geq 0 \quad \therefore k^2\leq 25 \quad \therefore -5\leq k\leq 5$$

また，$(x,y)=(2,1)$ のとき，$k=5$ となり，$(x,y)=(-2,-1)$ のとき，$k=-5$ となる．よって，

<u>最大値 $5\,(x=2,\ y=1$ のとき$)$，最小値 $-5\,(x=-2,\ y=-1$ のとき$)$.</u>

数学 A

問題 8

(1) $\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)=s^2+t^2$，$\dfrac{1}{2}(x^2-y^2)=2st$ より，代入.

$$x^2+2y^2=k^2.$$

(2)

$$x^2+2y^2=k^2 \tag{$*$}$$

$x+y=2s$ より，x と y の偶奇は一致する．x,y がともに奇数のとき，

$$\begin{aligned} x^2+2y^2 &\equiv 3 && (\mathrm{mod}\ 4) \\ k^2 &\equiv 0 \text{ or } 1 && (\mathrm{mod}\ 4) \end{aligned}$$

となり矛盾．よって，x,y はともに偶数．$(*)$ を満たす最小の組を x_0,y_0,k_0 とすると，x_1，y_1 を自然数として，

$$\begin{aligned} x_0 &= 2x_1 \\ y_0 &= 2y_1 \end{aligned}$$

とでき，$4{x_1}^2+8{y_1}^2={k_0}^2$ より k_0 は偶数で，k_1 を自然数として $k_0=2k_1$ を満たし，よって

$${x_1}^2+2{y_1}^2={k_1}^2$$

を満たすことになる．これは $(*)$ の式と一致し，(x_0,y_0,k_0) の最小性に矛盾する．

問題 9

a と b の最大公約数を t，p, q を互いに素な自然数として

$$a = pt, \quad b = qt$$

とする．与式を t^n で割ると，

$$p^n + q^n = (pq)^{2024} t^{4048-n} \tag{1}$$

また，$n > 4048$ ならば

$$\begin{aligned} a^n + b^n &> a^{4048} + b^{4048} \\ &= \left(a^{2024} - \frac{1}{2}b^{2024}\right)^2 + \frac{3}{4}b^{4048} + (ab)^{2024} \\ &\geqq (ab)^{2024} \end{aligned}$$

より，与式に反するため，$n \leqq 4048$.
よって t^{4048-n} は自然数であるから，(1) を解釈すると，

$$p^n + (q\text{の倍数}) = (q\text{の倍数})$$

p, q は互いに素であるから，$q = 1$.
(1) に $q = 1$ を代入すると，

$$(p\text{の倍数}) + 1 = (p\text{の倍数})$$

よって $p = q = 1$．これを (1) に代入して

$$2 = t^{4048-n}$$

ゆえに $(t, n) = (2, 4047)$，$a = pt = 2$，$b = qt = 2$
よって $(a, b, n) = (2, 2, 4047)$.

問題 10

(i) n が偶数のときを考える．

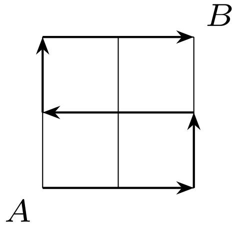


図 1

$n=2$ のとき，図 1 のように少なくとも 1 通り存在する．

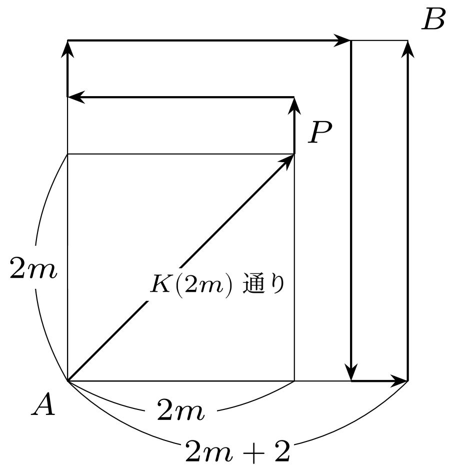


図 2

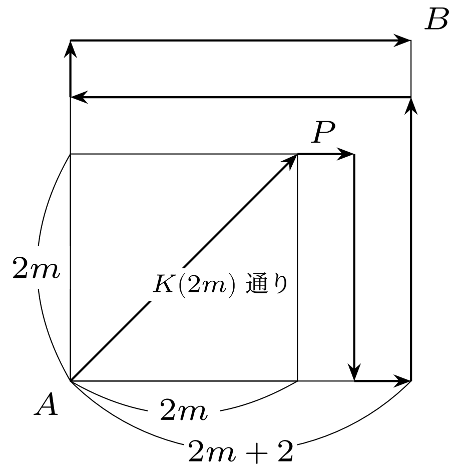


図 3

m を自然数として，$n=2m$ のとき，経路が $K(2m)$ 通りあるので，図 2，図 3 より，

$$0<K(2m)<2K(2m)\leqq K(2m+2)$$

となる．ゆえに，n が偶数のとき，

$$K(n)<K(n+2)$$

が成り立つ．

(ii) n が奇数のときを考える．

まず，移動距離が常に偶数であることを示す．最短距離は $2n$ で，偶数である．ここで，左方向に k，下方向に l だけ移動するとき，点 B に向かうためにさらに右方向に k，上方向に l だけ移動する必要があるので，移動距離は $2(n+l+k)$ と偶数となる．

ここで，すべての点を通る必要があるから移動距離は $(n+1)^2-1=n^2+2n$ で，これは奇数であり，移動距離が偶数であることに矛盾する．

以上より，n が奇数のとき，$K(n)=0$ となる．

(i)，(ii) より，求める条件は $k=l$ または k,l がともに奇数であることである．

問題 11

$n = 1$ であることを背理法により示す. $4a^2 + b^2 + c^2 + 1 = 2^n a(c+3)$ について, $n \geq 2$ と仮定すると, 右辺は 4 の倍数となるから, $b^2 + c^2 + 1 \equiv 0 \pmod 4$ となる一方, 平方数は 4 を法として 0 または 1 と合同なので, $b^2 + c^2 + 1 \equiv 1, 2, 3 \pmod 4$ となるので矛盾. よって $n = 1$ となる.

$n = 1$ なので, 与式は

$$4a^2 + b^2 + c^2 + 1 = 2a(c+3)$$

となり, これを変形すると,

$$2a + \frac{b^2 + c^2 + 1}{2a} = c + 3 \qquad (*)$$

となる. 相加平均と相乗平均の関係より, 左辺は

$$2a + \frac{b^2 + c^2 + 1}{2a} \geqq 2\sqrt{b^2 + c^2 + 1}$$

と評価できるので,

$$(c+3) \geq 2\sqrt{b^2 + c^2 + 1}$$

となることから, 2 乗して

$$(c+3)^2 \geqq 4(b^2 + c^2 + 1)$$
$$c^2 + 6c + 9 \geqq 4b^2 + 4c^2 + 4$$
$$8 \geqq 4b^2 + 3c^2 - 6c + 3$$
$$8 \geqq 4b^2 + 3(c-1)^2$$

これを満たす b と c の組は,

$$(b, c) = (1, 1), (1, 2)$$

$(*)$ は $(b, c) = (1, 1)$ の時,

$$2a + \frac{3}{2a} = 4$$

より左辺が整数にならないので不適.
$(b,c)=(1,2)$ の時,

$$2a+\frac{3}{a}=5$$

より, これは $a=1,3$ の時のみ左辺が整数となるが, $a=1$ しか満たさない. よって $(a,b,c,n)=(1,1,2,1)$ しかありえず, これは与式を満たす.

以上より $(a,b,c,n)=\mathbf{(1,1,2,1)}$
※尚, 相加平均・相乗平均の関係を用いているが IA 範囲でも解ける

問題 12

まず，操作の前後で b の数の偶奇が変わらないことを示す．操作前の数列で b が含まれるのは，$(b,b),(a,b),(b,a)$ のどれかであるが，(b,b) は何個あろうとも，ここには b が偶数個含まれるので，$(a,b),(b,a)$ の数と b の数の偶奇は一致する．$(a,b),(b,a)$ 共に操作によって b になるので示された．このことから，操作前の数列に，

- b が奇数個なら最終的に b に，
- b が偶数個なら最終的に a に

なる．今，a の出る確率を p とすると，b の出る確率は $1-p$．$2m$ 回ボタンを押して a が偶数回出る確率を q_m とする．$2m+2$ 回で偶数が偶数回 a が出るには，$2m$ 回で a が偶数のもと，a が 2 回，b が 0 回か，a が 0 回，$b2$ 回.
$2m$ 回で a が奇数のもと，$a,b1$ 回ずつなので，

$$\begin{aligned}q_{m+1} &= \{p^2+(1-p)^2\}q_m+2p(1-p)(1-q_m)\\ &= \{p-(1-p)\}^2q_m+2p(1-p)\\ &= (2p-1)^2q_m+2p(1-p)\end{aligned}$$

$$\therefore q_{m+1}-\frac{1}{2}=(2p-1)^2\left(q_m-\frac{1}{2}\right)$$

$$q_m=(2p-1)^{2m-2}\left(q_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$$

$q_1=p^2+(1-p)^2$ なので，

$$\begin{aligned}q_1-\frac{1}{2} &= 2p^2-2p+\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}(2p-1)^2\end{aligned}$$

$$\therefore q_m=\frac{1}{2}(2p-1)^{2m}+\frac{1}{2}$$

よって，

$$p_n=q_{2^{n-1}}=\frac{1}{2}(2p-1)^{2^n}+\frac{1}{2}$$

問題 13

$WSD, SKMN, 1ST, ANNIV$ の 4 つとも 8 の倍数であると仮定する．このとき，1 の位の P, N, T, V はすべて偶数であり，$0, 2, 4, 6, 8$ のいずれか.

ある数が 4 の倍数であるとき,

10 の位	1 の位
偶数	0,4,8
奇数	2,6

と対応する．ここで，異なるアルファベットには異なる数字が入ることから，10 の位以上では偶数は 1 つしか使えない.

つまり，S, M, I のうち偶数は 1 つ．もし，M(I でもよい) が偶数であるとすると，D, T と V(または N) に 2,6 を入れる必要があり，重複が発生するので不適．よって，S が偶数．ここで，KMN, NIV が (奇数, 奇数, 偶数), (偶数, 奇数, 偶数) であることがわかった.

整理すると，

WSD	(奇数, 偶数, 偶数)
KMN	(奇数, 奇数, 偶数)
$1ST$	(1, 偶数, 偶数)
NIV	(偶数, 奇数, 偶数)

となる.

まず，N, V は 10 の位が奇数であるから，それぞれ 2 か 6 のいずれかである．下 2 桁が 4 の倍数であることから，M, I は $1, 5, 9$ のいずれか．S, D, T は $0, 4, 8$ のいずれかで，(奇数)$SD, 1ST$ が 8 の倍数であることから，SD, ST は 8 の倍数にはならない．対称性から $SD < ST$ として,

$$(SD, ST) = (04, 08), (40, 48), (80, 84)$$

の 3 通り．よって，SD, ST のどちらか一方は 8 の倍数.

$$(\text{奇数}) \times 100 + (8\text{の倍数}) \not\equiv 0 \pmod 8$$

より矛盾.

よって，$WSD, SKMN, 1ST, ANNIV$ が同時に 8 の倍数となることはない．

問題 14

《解答》

$2:7-3\sqrt{5}$

《解説》

全体の正五角形の頂点を，反時計回りに A, B, C, D, E とする．また，内部の正五角形の頂点を，A のすぐ左下から，P, Q, R, S, T とする．
全体の正五角形の一辺の長さを 1 とする．このとき，内部の正五角形の一辺の長さが分かれば，相似比を求めることができる．
内部の正五角形の一辺の長さとして，PT を求めることを考える．

$$\mathrm{PT}=\mathrm{BE}-\mathrm{BP}-\mathrm{TE}$$

三角形 ABP と三角形 EAT は合同のため，BP=TE (この合同の証明に関しては，本文最後に記載) よって，BE, BP の長さが求まればよい．
まずは，BP の長さについて考える．三角形 ABE と三角形 ABP は，全ての角がそれぞれ等しいため，相似である． (∗)
三角形 APE は二等辺三角形のため，AE=PE．よって，

$$\mathrm{BE}=\mathrm{BP}+\mathrm{PE}=\mathrm{BP}+1$$

相似な図形の対応する辺の比は等しいため，

$$\mathrm{BP}:\mathrm{AB}=\mathrm{AB}:\mathrm{BE}$$

これを計算すると，

$$\mathrm{BP}:1=1:(\mathrm{BP}+1)$$

$$\mathrm{BP}^2+\mathrm{BP}=1$$

$$\mathrm{BP}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \qquad (\mathrm{BP}>0\text{より})$$

これで BP の長さが求まった．またここで，BE=BP+1 のため，
$\mathrm{BE}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ と求まる．

これにより，PT の長さは

$$\mathrm{BE} - \mathrm{BP} \times 2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

となる．

相似な図形の面積比は，線分比の 2 乗のため，

$$\begin{aligned}(\text{全体の正五角形の面積}) : (\text{内部の正五角形の面積}) &= 1^2 : \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\ &= 1 : \left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) \\ &= 2 : (7-3\sqrt{5})\end{aligned}$$

よって答えは，$2 : 7-3\sqrt{5}$.

(∗)《各三角形の合同, 相似の証明》

こちらの証明は比較的容易なため，読者諸君に委ねる．解けない場合は，

作サー公式 X(@WU_sakumon) の DM まで.

問題 15

式の値を P とおくと，右辺より P は有理数となる．左辺から

$$P=\frac{a^2+\sqrt{2}ab-2b^2}{c^2+\sqrt{2}cd-2d^2}$$

より，分母を払って

$$\big((a^2-2b^2)-(c^2-2d^2)P\big)+(ab-cdP)\sqrt{2}=0$$

となるが，$\sqrt{2}$ は無理数なので

$$\begin{cases}(a^2-2b^2)-(c^2-2d^2)P=0\\ ab-cdP=0\end{cases}$$

が成立する．ここで，同じく $\sqrt{2}$ は無理数なので

$$c^2+\sqrt{2}cd-2d^2=0 \iff c^2-2d^2=cd=0$$

であるから c^2-2d^2，cd による除法が可能なので，

$$P=\frac{a^2-2b^2}{c^2-2d^2}=\frac{ab}{cd}=\frac{c^2+4cd-1+d^2}{c^2+4ab+1+d^2}$$

を得る．さらに，

$$\begin{cases}(a^2-2b^2)=(c^2-2d^2)P\\ ab=cdP\\ c^2+4cd-1+d^2=(c^2+4ab+1+d^2)P\end{cases}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\frac{(2a+2b\sqrt{2}i)^2}{(2c+2d\sqrt{2}i)^2}\\ =&\frac{(a+b\sqrt{2}i)^2}{(c+d\sqrt{2}i)^2}\\ =&\frac{a^2-2b^2+2ab\sqrt{2}i}{c^2-2d^2+2cd\sqrt{2}i}\\ =&\frac{(c^2-2d^2)P+2cdP\sqrt{2}i}{c^2-2d^2+2cd\sqrt{2}i}\\ =&P\end{aligned}$$

かつ,

$$\begin{aligned}
&\frac{c^2+4ab+4cd-1+d^2}{c^2+4ab+4cd+1+d^2}\\
=&\frac{(c^2+4cd-1+d^2)+4ab}{(c^2+4ab+1+d^2)+4cd}\\
=&\frac{(c^2+4ab+1+d^2)P+4cdP}{(c^2+4ab+1+d^2)+4cd}\\
=&P
\end{aligned}$$

であるので，以上をまとめて次のようになる：

$$P=\frac{(2a+2b\sqrt{2}i)^2}{(2c+2d\sqrt{2}i)^2}=\frac{c^2+4ab+4cd-1+d^2}{c^2+4ab+4cd+1+d^2}$$

これを解くためには，変数として整数 k と複素数 α,β を導入し，次の連立方程式を解けばよい：

$$\begin{cases}
k=c^2+4ab+4cd+d^2\\
\alpha=(a+c)+(b+d)\sqrt{2}i\\
\beta=(a-c)+(b-d)\sqrt{2}i\\
P=\frac{(\alpha+\beta)^2}{(\alpha-\beta)^2}=\frac{k-1}{k+1}
\end{cases}$$

この最終行の式より $\alpha^2+2k\alpha\beta+\beta^2=0$ となるはずである．
ここで，集合 S を，$S=\{m+n\sqrt{2}i\ :\ m,n\text{は自然数}\}$ と定める．α,β は S の元でなければならない．
では，$\alpha^2+2k\alpha\beta+\beta^2=0$ が S の二つの元 (α,β) に対して成立するときについて考えよう．

1. $\alpha=0$ または $\beta=0$ のとき
   方程式から $\alpha=\beta=0$ となるが，このとき $a=b=c=d=0$ となり与式の分数の分母が 0 になるため不適．
2. α と β がともに 0 でないとき
   $|\alpha|^2+|\beta|^2$ は正の整数であるからそれが最小となる組 (A,B) がとれ，一般性を失わず $|A|\geq|B|$ とする．

このとき解と係数の関係から A の代わりに次の A' を用いても方程式は成立する:

$$A' = -2kB - A = \frac{B^2}{A}$$

右側より $A' \neq 0$ であり，左側より $A' \in S$ である．よって (A, B) は $|A|^2 + |B|^2$ を最小にするともに 0 でない解だったから

$$\begin{aligned} |A| &\leq |A'| \\ |A| &\leq \left|\frac{B^2}{A}\right| \\ |A|^2 &\leq |B|^2 \\ |A| &\leq |B| \end{aligned}$$

であり，さらに仮定より $|A| \geq |B|$ だったこととこれより $|A| = |B|$.

いま，$|A| = |B|$ かつ $A^2 + 2kAB + B^2 = 0$ より

$$\begin{aligned} &2|k||A|^2 \\ =&|-2kAB| \\ =&|A^2 + B^2| \\ \leq&|A^2| + |B^2| \\ =&2|A|^2 \end{aligned}$$

となるので，$A \neq 0$ をふまえて $k = -1, 0, 1$ が得られる．

(a) $k = -1$ のとき，

$$\begin{aligned} \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 &= 0 \\ (\alpha - \beta)^2 &= 0 \\ \alpha - \beta &= 0 \\ c + d\sqrt{2}i &= 0 \\ \therefore c = d &= 0 \end{aligned}$$

となり与式の分数の分母が 0 になり不適.

(b) $k=0$ のとき

$$\alpha^2+\beta^2=0$$
$$\therefore \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2+1=0$$

であるが，有理数 p,q を $\dfrac{\alpha}{\beta}=p+q\sqrt{2}i$ により定めると，

$$(p+q\sqrt{2}i)^2+1=0$$
$$\therefore \begin{cases} p^2-2q^2+1=0 \\ pq=0 \end{cases}$$

となり，$pq=0$ より $p=0 \vee q=0$.

i. $p=0$ のとき，$-2q^2+1=0$
これを解くと $q=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，q が有理数であることに反する．

ii. $q=0$ のとき，$p^2+1=0$
これを解くと $p=\pm i$ となり，p が有理数であることに反する．

(c) $k=1$ のとき $P=0$ となるから，与式より

$$\begin{cases} a=b=0 \\ c^2+4cd+d^2=1 \end{cases}$$

以下 $c^2+4cd+d^2=1$ を解く．
$x=c+2d, y=d$ とおくと方程式は $x^2-3y^2=1$ と言い換えられる．
(x,y) が解であるとき $(x,-y),(-x,y),(-x,-y)$ も解であるから，まず x と y がともに非負であるときについて考える．
非負整数 n に対して非負整数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ を次のよう

に定める：

$$\begin{cases} x_n + y_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n \\ x_n, y_n \text{は 0 以上の整数} \end{cases}$$

すると $(x,y)=(x_n,y_n)$ は,

$$\begin{aligned}&{x_n}^2-3{y_n}^2\\=&(x_n+y_n\sqrt{3})(x_n-y_n\sqrt{3})\\=&(2+\sqrt{3})^n(2-\sqrt{3})^n\\=&1^n\\=&1\end{aligned}$$

より解である.
逆に，これで表せない非負整数解 (x,y) があったと仮定すると，ある非負整数 n を用いて

$$(2+\sqrt{3})^n<x+y\sqrt{3}<(2+\sqrt{3})^{n+1}$$

であるから,

$$1<(x+y\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n<2+\sqrt{3}$$

となる．ここで中辺はある整数 X と Y を用いて $X+Y\sqrt{3}$ とおけ,

$$\begin{aligned}&X^2-3Y^2\\=&(X+Y\sqrt{3})(X-Y\sqrt{3})\\=&(x+y\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n(X-Y\sqrt{3})^n\\=&\frac{1}{(x-y\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n}(X-Y\sqrt{3})^n\\=&\frac{1}{(X-Y\sqrt{3})^n}(X-Y\sqrt{3})^n\\=&1\end{aligned}$$

より解の一つである.
また,

$$1<X+Y\sqrt{3}<2+\sqrt{3}$$

とその逆数の -1 倍

$$-1<-X+Y\sqrt{3}<-2+\sqrt{3}$$

の各辺の和より

$$0 < 2Y\sqrt{3} < 2\sqrt{3}$$

となるが，これは Y が整数であることに矛盾.
よって非負整数解 (x, y) は $(x, y) = (x_n, y_n)$ で尽きる.
また，x_n と y_n $(n \geq 0)$ の一般項については

$$\begin{cases} x_n + y_n\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^n \\ x_n - y_n\sqrt{3} = (2-\sqrt{3})^n \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} x_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} \\ y_n = \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \end{cases}$$

であるから，全ての整数解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} \\ \pm\frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \ (n\text{は 0 以上の整数})\ \text{複号任意}$$

よって，

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\frac{(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n}{2} - \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{\sqrt{3}} \\ \frac{(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \ (n\text{は整数})$$

以上から，解は

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{(2+\sqrt{3})^{m\pm1} - (2-\sqrt{3})^{m\pm1}}{2\sqrt{3}} \\ -\frac{(2+\sqrt{3})^m - (2-\sqrt{3})^m}{2\sqrt{3}} \end{pmatrix} \ (m\text{は整数})\ \text{複号同順}$$

問題 16

Lem.1. $\sin\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geq \dfrac{a+b+c}{6R}$ が成り立つ.

($\because$) 正弦定理より,

$$6R = \frac{a}{\sin A} + \frac{b}{\sin B} + \frac{c}{\sin C}$$

である. ここで, $f(x) := \dfrac{1}{\sin x}\,(0 < x < \pi)$ と置くと,

$$f'(x) = -\frac{\cos x}{\sin^2 x}$$

$$\therefore f''(x) = -\frac{-\sin x \cdot \sin^2 x - \cos x \cdot 2\sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0$$

なので, Jensen の不等式から,

$$\begin{aligned} 6R &= (a+b+c)\left(\frac{a}{a+b+c}\frac{1}{\sin A} + \frac{b}{a+b+c}\frac{1}{\sin B} + \frac{c}{a+b+c}\frac{1}{\sin C}\right) \\ &\geq (a+b+c)\frac{1}{\sin\dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}} \end{aligned}$$

となるので, $0 < \dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c} < \pi$ に留意すると,

$$\sin\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{6R}$$

が言えた.

Lem.2. $\dfrac{A\sin A + B\sin B + C\sin C}{\sin A + \sin B + \sin C} \geq \dfrac{\pi}{3}$ が成り立つ.

($\because$) $0 < A \leq B \leq C < \pi$ としても一般性を失わない. 以下, この下で考える.

$A+B+C=\pi$, $\sin A + \sin B + \sin C > 0$, $A+B+C > 0$ から, 示す式は,

$$\frac{A\sin A}{A+B+C} + \frac{B\sin B}{A+B+C} + \frac{C\sin C}{A+B+C} \geq \frac{1}{3}(\sin A + \sin B + \sin C)$$

と同値．また，この式は，両辺から $-\sin A$ を引いて整理することで，

$$\frac{B}{A+B+C}(\sin B-\sin A)+\frac{C}{A+B+C}(\sin C-\sin A) \geq \frac{1}{3}(\sin B-\sin A)+\frac{1}{3}(\sin C-\sin A)$$

と同値だと分かる．以下，これを示す．

B, C が共に $\frac{\pi}{2}$ 以上と仮定すると，$A+B+C > 0+\frac{\pi}{2}\times 2=\pi$ より，$A+B+C=\pi$ に矛盾するので，$0<A \leq B \leq C<\frac{\pi}{2}$，もしくは，$0<A \leq B<\frac{\pi}{2} \leq C<\pi$ のどちらか一方が成り立つ．$0<A \leq B \leq C<\frac{\pi}{2}$ の場合，当然 $\sin A \leq \sin B \leq \sin C$ である．また，$0<A \leq B<\frac{\pi}{2} \leq C<\pi$ の場合，
$B<A+B=\pi-C \leq \pi-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ と $\sin(\pi-C)=\sin C$ から，$\sin A \leq \sin B \leq \sin C$ が成り立つ．以上より，どちらの場合でも $\sin A \leq \sin B \leq \sin C$ が成り立つことが分かった．

求める不等式について，

$$\frac{B+C}{A+B+C}=1-\frac{A}{A+B+C} \geq 1-\frac{A}{A+A+A}=\frac{2}{3}$$

であり，$\sin A \leq \sin B \leq \sin C, A \leq B \leq C$ なので，

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{B}{B+C}(\sin B-\sin A)+\frac{C}{B+C}(\sin C-\sin A)\right\} \\
&-\left\{\frac{1}{2}(\sin B-\sin A)+\frac{1}{2}(\sin C-\sin A)\right\} \\
&=\frac{C-B}{2(B+C)}(\sin C-\sin B) \geq 0
\end{aligned}$$

なので，

$$\frac{B}{B+C}(\sin B-\sin A)+\frac{C}{B+C}(\sin C-\sin A) \geq \frac{1}{2}(\sin B-\sin A)+\frac{1}{2}(\sin C-\sin A)(\geq 0)$$

が成り立つ．したがって，

$$
\begin{aligned}
(\text{左辺}) &= \frac{B+C}{A+B+C}\left\{\frac{B}{B+C}(\sin B-\sin A)+\frac{C}{B+C}(\sin C-\sin A)\right\} \\
&\geq \frac{2}{3}\left\{\frac{1}{2}(\sin B-\sin A)+\frac{1}{2}(\sin C-\sin A)\right\} = (\text{右辺})
\end{aligned}
$$

が成り立つ．よって示せた.

以上の補題から，与えられた不等式を示す．まず，**Lem.2.** と，正弦定理

$$a = 2R\sin A,\ b = 2R\sin B,\ c = 2R\sin C$$

から，

$$\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geq \frac{\pi}{3}$$

である．任意の $x \geq \dfrac{\pi}{3}$ に対して，$\dfrac{3\sqrt{3}}{2\pi}x \geq \sin x$ なので，

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geq \sin\frac{aA+bB+cC}{a+b+c}$$

である．これと **Lem.1.** より，

$$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\frac{aA+bB+cC}{a+b+c} \geq \frac{a+b+c}{6R}$$

となる．この両辺に，$\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}(a+b+c)(>0)$ を掛けて，

$$aA+bB+cC \geq \frac{(a+b+c)^2}{9\sqrt{3}R}\pi$$

が言えた.

問題 17

(1) 先に $WSEDBR$ の 6 文字を並べ，その間に A を入れると考える．

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & * & & * & & * & & * & & * & & * & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

(∗は $WSEDBR$ を並べ替えたもの)

上図より，A の場所は ${}_7C_3$，$WSEDBR$ の並べ替え方は $6!$．よって，${}_7C_3 \cdot 6! = 25200$ 通り．

(2) (i) AA を 1 文字として考えると，AA, A, W, S, E, D, B, E の並べ方は ${}_8C_2 \cdot 6! = \frac{1}{2} \cdot 8!$ 通り．

(ii) AAA を 1 文字として考えると，AAA, W, S, E, D, B, E の並べ方は ${}_7C_2 \cdot 5! = \frac{1}{2} \cdot 7!$ 通り．

(iii) EE を 1 文字として考えると，EE, W, A, S, D, A, B, A の A が隣り合わないような並べ方は EE, W, S, D, B の並べ方が $5!$ 通りで，その文字の間に A を入れると考えると $5! \cdot_6 C_3$ 通り．

$$\begin{array}{ccccccccccc} & * & & * & & * & & * & & * & \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \end{array}$$

(∗は A 以外を並べ替えたもの)

(i)〜(iii) より，隣り合う文字が存在するような並べ方は

$$\frac{1}{2} \cdot 8! - \frac{1}{2} \cdot 7! +_6 C_3 \cdot 5! = 20040\text{通り}$$

$W, A, S, E, D, A, B, E, A$ の 9 文字の並べ方は ${}_9C_3 \cdot_6 C_2 \cdot 4! = 30240$ 通り．よって

$$30240 - 20040 = 10200\text{通り}$$

(3)　(i) 中心にはいる文字が E のときを考える．(1) における文字列を，頂点から順に並べ，その後同じ文字が隣り合っているものを取り除くと考える．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & * & & & \\ & & A & & A & & \\ & * & & E & & * & \\ * & & * & & * & & * \end{array}$$

図 1

図 1 のように A, E を置いたとき，残りの A を (1) における文字列にならないように置く方法は，点線で囲まれた部分の 4 通り．残りの文字の置き方は $6!$ 通り．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & A & & & \\ & & E & & * & & \\ & * & & E & & * & \\ * & & * & & * & & * \end{array}$$

図 2

図 2 のように A, E を置いたとき，残りの A が隣り合わない置き方は 8 通り．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & * & & & \\ & & E & & A & & \\ & * & & E & & * & \\ * & & * & & * & & * \end{array}$$

図 3

図 3 のように置いた場合は 5 通り．よって，対称性から

$$\begin{aligned} 25200 - 3 \cdot 4 \cdot 6! - 6 \cdot 13 \cdot 5! &= 252 - 8640 - 9360 \\ &= 7200\text{通り} \end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{array}{c} \bigcirc \\ \ast \quad \ast \\ \ast \quad A \quad \ast \\ \bigcirc \quad \ast \quad \ast \quad \bigcirc \end{array}$$

図 4

中心に入る文字が A のときを考える．このとき，A が隣り合わないような A の置き方は図 4 の白丸の部分で 3 通り．

$$\begin{array}{c} \ast \\ \ast \quad \ast \\ \ast \quad A \quad \ast \\ A \quad \ast \quad \ast \quad A \end{array}$$

図 5

次に図 5 のように A を置いたとき，E が隣り合うような置き方は 8 通り．E の置き方は ${}_7C_2 = 21$ 通り．
よって，A も E も隣り合わない置き方は $21 - 8 = 13$ 通り．対称性から，$3 \cdot 13 \cdot 5! = 4680$ 通り．

(iii) 中心に入る文字が A, E 以外のときを考える．

$$\begin{array}{c} \ast \\ A \quad A \\ \ast \qquad\quad \ast \\ A \quad \ast \quad \ast \quad \ast \end{array}$$

(は A, E 以外の文字)

図 6

図 6 のように並び，かつ E が隣り合わないような並べ方を考える．E が一番上にあるとき，残りの E の置き方は 5 通り．
そうでないとき，5 通り．よって 10 通り．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \ast & & & \\ & & A & & A & & \\ & \ast & & & & \ast & \\ \ast & & A & & \ast & & \ast \end{array}$$

図 7

図 7 のように並び，かつ E が隣り合わないような並べ方を考える．E が一番上にあるとき，残りの E の置き方は 5 通り．そうでないとき，${}_5C_2-4=6$ 通り．よって 11 通り．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \ast & & & \\ & & E & & E & & \\ & \ast & & & & \ast & \\ \ast & & \ast & & \ast & & \ast \end{array}$$

図 8

$$\begin{array}{ccccccc} & & & A & & & \\ & & E & & E & & \\ & \ast & & & & \ast & \\ \ast & & \ast & & \ast & & \ast \end{array}$$

図 9

図 8 のように並び，かつ A が隣り合わないような並べ方を考える．点線で囲まれた部分に A を 3 つ入れることはできないから，図 9 のようになる．残りの A の入れ方は 8 通り．

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \ast & & & \\ & & A & & A & & \\ & E & & & & \ast & \\ \ast & & E & & \ast & & \ast \end{array}$$

図 10

図 10 のように並び，かつ残りの A が他の A に隣り合わないような並べ方を考える．残りの A の置き方は 3 通り．

対称性を考えると，

$$10200-3\cdot\{2(10+11+3)+8\}\cdot 4!=6168\text{通り}$$

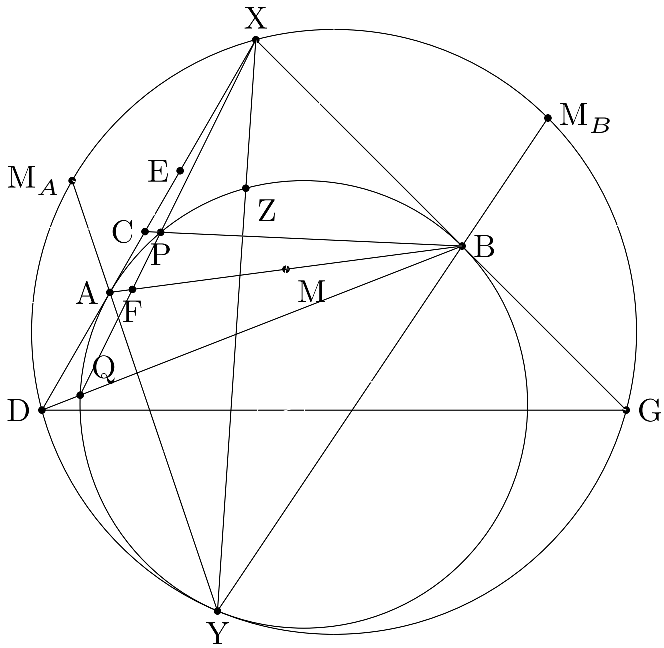
に入れる文字の選び方は 5 通りなので，

$$6168\cdot 5=30840\text{通り}$$

(i)〜(iii) より，

$$7200+4680+30840=42720\text{通り}$$

問題 18



AB の中点を M，AB と PQ の交点を F とする．

$\boxed{\text{補題 1}}$ $\quad \mathrm{XP} : \mathrm{PF} = \mathrm{XQ} : \mathrm{QF}.$

証明

$$\Gamma : x^2 + y^2 = r^2$$
$$l : y = m(x-a)$$
$$\mathrm{X} : (a, 0)$$

とおく．$\mathrm{A}(s,t)$ とすると，Γ の A における接線の方程式は

$$sx + ty = r^2.$$

これが X を通るので,

$$sa = r^2 \qquad \text{すなわち} \qquad s = \frac{r^2}{a}.$$

よって AB の方程式は

$$x = \frac{r^2}{a}.$$

また，P,Q の x 座標をそれぞれ α, β とすると，これは $x^2 + y^2 = r^2$，$y = m(x - a)$ を連立した,

$$x^2 + m^2(x-a)^2 = r^2$$

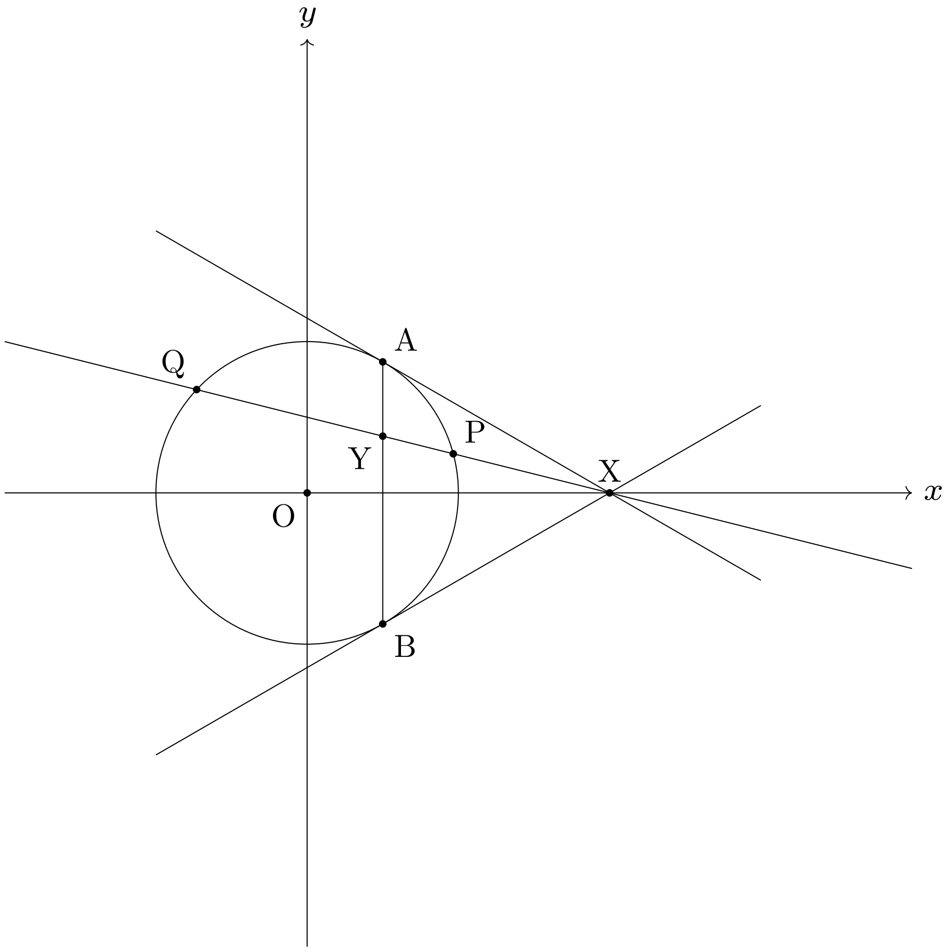
の 2 解であるから，解と係数の関係より,

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= \frac{2am^2}{m^2+1}, \\ \alpha\beta &= \frac{a^2m^2 - r^2}{m^2+1}. \end{aligned}$$

ここで x 座標の比を用いれば

$$\begin{aligned} \mathrm{XP} \cdot \mathrm{QF} - \mathrm{XQ} \cdot \mathrm{PF} &= (a - \alpha)\left(\beta - \frac{r^2}{a}\right) - (\alpha - \beta)\left(\frac{r^2}{a} - \alpha\right) \\ &= 2r^2 + 2\alpha\beta - \left(a + \frac{r^2}{a}\right)(\alpha + \beta) \\ &= 2r^2 + 2\,\frac{a^2m^2 - r^2}{m^2+1} - \left(a + \frac{r^2}{a}\right)\left(\frac{2am^2}{m^2+1}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

より示された.



$\boxed{\text{補題 2}}$ $\mathrm{XC} : \mathrm{AC} = \mathrm{CD} : \mathrm{AD}.$

証明

$$\triangle \mathrm{BXP} = \frac{1}{2}\,\mathrm{BX} \cdot \mathrm{BP}\,\sin\angle \mathrm{XBP},$$
$$\triangle \mathrm{BFP} = \frac{1}{2}\,\mathrm{BF} \cdot \mathrm{BP}\,\sin\angle \mathrm{FBP}.$$

$\triangle \mathrm{BXP} : \triangle \mathrm{BFP} = \mathrm{XP} : \mathrm{FP}$ であるから,

$$\frac{\mathrm{XP}}{\mathrm{FP}} = \frac{\mathrm{BX}\ \sin\angle\mathrm{XBQ}}{\mathrm{BF}\ \sin\angle\mathrm{FBQ}}.$$

同様にして,

$$\frac{\mathrm{XQ}}{\mathrm{FQ}} = \frac{\mathrm{BX}\ \sin\angle\mathrm{XBQ}}{\mathrm{BF}\ \sin\angle\mathrm{FBQ}}.$$

よって

$$\frac{\mathrm{XP}}{\mathrm{FP}} \times \frac{\mathrm{XQ}}{\mathrm{FQ}} = \frac{\sin\angle\mathrm{XBP}\sin\angle\mathrm{FBQ}}{\sin\angle\mathrm{FBP}\sin\angle\mathrm{XBQ}}.$$

したがって左辺の値は角度によって決まるので,

$$\frac{\mathrm{XP}}{\mathrm{FP}} \times \frac{\mathrm{FQ}}{\mathrm{XQ}} = \frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{XD}}.$$

補題 1 より,

$$\frac{\mathrm{XC}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{XD}} = 1.$$

よって

$$\mathrm{XC} : \mathrm{AD} = \mathrm{XD} : \mathrm{AD}.$$

補題 3　$\angle\mathrm{CMA} = \angle\mathrm{DMA}$.

証明　XM//AT となるように MD 上に T をとり，AT と MC の交点を S とする.

補題 2 より,

$$\mathrm{XC} : \mathrm{AC} = \mathrm{CD} : \mathrm{AD}.$$

補題 2 で示した複比の不変性より，X に対応する点を無限遠点 X_∞ と考えると，

$$X_\infty S : AS = X_\infty T : AT$$

より

$$AS = AT.$$

これと $\angle MAT = 90^\circ$ より，

$$\angle CMA = \angle DMA.$$

YA と Γ' の交点を M_A（$\neq$Y），YB と Γ' の交点を M_B（$\neq$Y）とする．

$\boxed{\text{補題 4}}$　弧 DM_A = 弧 XM_A.

証明　円 Γ と Γ' は相似であり，A に対応する点が M_A であるので示された．

同様に，XB と Γ' の交点を G（$\neq$X）とすると，弧 GM_B = 弧 XM_B が成り立つ．

M_BD と AB の交点を M' とする．

$\boxed{\text{補題 5}}$　4 点 M',A,D,Y は同一円周上にある．

証明　Γ と Γ' は相似であり，BY に対応する直線は M_BY である．

よって，Γ の弧 BY に対する中心角と Γ' の弧 M_BY に対する中心角は等しい．したがって

$$\angle BAY = \angle M_BDY.$$

よって円周角の定理の逆より，4 点 M’,A,D,Y は同一円周上にある．

$\boxed{\text{補題 6}}$ $\triangle \mathrm{M_B BM'} \sim \triangle \mathrm{M_B M'Y}$.

証明

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{DM'Y} &= \angle \mathrm{DAY} \quad (\text{円周角の定理})\\ &= \angle \mathrm{ABY} \quad (\text{接弦定理})\end{aligned}$$

より二角相等で $\triangle \mathrm{M_B BM'} \sim \triangle \mathrm{M_B M'Y}$.

$\boxed{\text{補題 7}}$ $\mathrm{M_B B {\cdot} M_B Y} = \mathrm{M_B X^2} = \mathrm{M_B G^2}$.

証明

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{M_B GX} &= \angle \mathrm{M_B XG} \quad (\text{補題 4})\\ &= \angle \mathrm{M_B YG} \quad (\text{円周角の定理})\end{aligned}$$

より $\triangle \mathrm{M_B BG} \sim \triangle \mathrm{M_B GY}$.

よって

$$\begin{aligned}\mathrm{M_B B \cdot M_B Y} &= \mathrm{M_B G^2}\\ &= \mathrm{M_B X^2}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{補題 8}}$ M’ は $\triangle$XPG の内心である．

証明　補題 6 より

$$\mathrm{M_B B \cdot M_B Y} = \mathrm{M_B M^2}$$

補題 7 と合わせて

$$\mathrm{M_BX = M_BG = M_BM'}.$$

これより，

$$\angle\mathrm{M_BM'G} = \angle\mathrm{M_BGM'}.$$

$\angle\mathrm{M_BM'G} = \angle\mathrm{M'DG} + \angle\mathrm{M'GD}$ であり，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{M_BGM'} &= \angle\mathrm{M_BGX} + \angle\mathrm{M'GX}\\ &= \angle\mathrm{M_BXG} + \angle\mathrm{M'GX}\\ &= \angle\mathrm{M_BDG} + \angle\mathrm{M'GX} \quad \text{（円周角の定理）}\\ &= \angle\mathrm{M'DG} + \angle\mathrm{M'GX}\end{aligned}$$

よって

$$\angle\mathrm{M'GD} = \angle\mathrm{M'GX}.$$

同様に

$$\angle\mathrm{M'DG} = \angle\mathrm{M'DX}$$

も示せるので，M' は $\triangle$XDG の内心である．

$\boxed{\text{補題 9}}$ M = M'.

証明 M' は内心なので，

$$\angle\mathrm{AXM'} = \angle\mathrm{BXM'}.$$

また，

$$\angle\mathrm{AXM} = \angle\mathrm{BXM}.$$

よって

$$\mathrm{M} = \mathrm{M'}.$$

$\boxed{\text{補題 10}}$　$\angle\mathrm{MYA} = \angle\mathrm{BYX}$.

証明　Γ の中心を O，ZY の中点を N とする．$\angle\mathrm{OAX} = \angle\mathrm{OBX} = 90^\circ$ であり，$\angle\mathrm{ONX} = 90^\circ$ より，円周角の定理の逆から，5 点 X,A,O,N,B は同一円周上にある．

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{MBX} &= \angle\mathrm{BOX} \quad \text{（円周角の定理）}\\ &= \angle\mathrm{BOM}\\ &= \frac{1}{2}\angle\mathrm{BOA}\\ &= \angle\mathrm{BYA}.\end{aligned}$$

円周角の定理より，

$$\angle\mathrm{BZY} = \angle\mathrm{BAY}.$$

したがって二角相等で

$$\triangle\mathrm{BZN} \sim \triangle\mathrm{BAY}.$$

よって

$$\mathrm{BZ} : \mathrm{ZN} = \mathrm{BA} : \mathrm{AY}.$$

よって

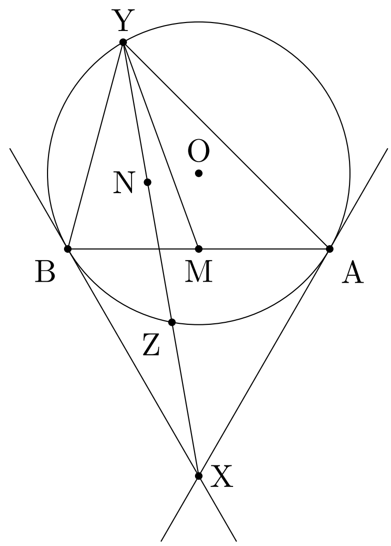
$$\mathrm{BZ} : \mathrm{ZY} = \mathrm{MA} : \mathrm{AY}.$$

二辺比夾角相当で

$$\triangle\mathrm{BZY} \sim \triangle\mathrm{MAY}.$$

よって

$$\angle \mathrm{MYA} = \angle \mathrm{BYZ}.$$



（本証明）$\angle \mathrm{CMA} = \angle \mathrm{ZBA}$ を示す.
円周角の定理より

$$\begin{aligned}
\angle \mathrm{ADM} &= \angle \mathrm{AYM} \quad \text{（補題 5）}\\
&= \angle \mathrm{ZYB} \quad \text{（補題 10）}\\
&= \angle \mathrm{ZAB} \quad \text{（円周角の定理）}.\\
\angle \mathrm{XAZ} &= \angle \mathrm{XAB} - \angle \mathrm{ZAB}\\
&= \angle \mathrm{AMD} + \angle \mathrm{ADM} - \angle \mathrm{ZAB}\\
&= \angle \mathrm{AMD}\\
&= \angle \mathrm{CMA} \quad \text{（補題 3）},\\
\angle \mathrm{XAZ} &= \angle \mathrm{AYZ} \quad \text{（接弦定理）}\\
&= \angle \mathrm{ABZ} \quad \text{（円周角の定理）}.
\end{aligned}$$

したがって

$$\angle \mathrm{CMA} = \angle \mathrm{ZBA}.$$

中点連結定理より，

$$\angle \mathrm{CMA} = \angle \mathrm{EBA}$$

が成り立つので，

$$\angle \mathrm{ZBA} = \angle \mathrm{EBA}.$$

よって，Z と E は AB に対して同じ側にあるので，3 点 E,Z,B は同一直線上にある．

問題 19

ω_1 と AD,BD の接点を E,F，ω_2 と AD,CD の接点を G,H とする．
また，Γ と AI の交点を M とする．
このとき，$\angle\mathrm{BAM} = \angle\mathrm{CAM}$ より，M は弧 BC の中点である．
ω と Γ は相似であり，F と M は対応する点，P は共通する点なので，
M,F,P は同一直線上にある．
同様に，M,H,Q も同一直線上にある．
$\triangle\mathrm{MFB}$ と $\triangle\mathrm{MBP}$ について，

$$\begin{aligned}\angle\mathrm{FMB} &= \angle\mathrm{BMP} \quad （共通）\\ \angle\mathrm{BPM} &= \angle\mathrm{BCM} \quad （円周角の定理）\\ &= \angle\mathrm{CMB}\\ \triangle\mathrm{MFB} &\sim \triangle\mathrm{MBP} \quad （二角相等）\end{aligned}$$

よって

$$\mathrm{MB}^2 = \mathrm{MF}{\cdot}\mathrm{MP}.$$

同様に

$$\mathrm{MC}^2 = \mathrm{MH}{\cdot}\mathrm{MQ}.$$

MB=MC より，

$$\mathrm{MF}\cdot\mathrm{MP} = \mathrm{MH}\cdot\mathrm{MQ}.$$

方べきの定理の逆より，4 点 P,F,H,Q は同一円周上にある．（＊）
EF と AI の交点を I’ とする．
今，ω_1 と Γ は相似であり，PF と PM は対応する直線なので，それに
対応する円周角は等しい．よって

$$\angle\mathrm{PEF} = \angle\mathrm{PAM}.$$

円周角の定理の逆より，4 点 A,P,I’,E は同一円周上にある．

同様に，4 点 A,Q,G,I' も同一円周上にある．

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{PI'M} &= 180^\circ - \angle \mathrm{PI'A} \\ &= 180^\circ - \angle \mathrm{PEA} \quad \text{（円周角の定理）} \\ &= 180^\circ - \angle \mathrm{PFE} \quad \text{（接弦定理）} \\ &= \angle \mathrm{I'FM}\end{aligned}$$

$$\angle \mathrm{PMI'} = \angle \mathrm{I'MF} \quad \text{（共通）}$$

より

$$\triangle \mathrm{PMI'} \sim \triangle \mathrm{I'MF} \quad \text{（二角相等）}$$

したがって

$$\mathrm{MI'}^2 = \mathrm{MF} \cdot \mathrm{MP}.$$

よって

$$\mathrm{MI'} = \mathrm{MB} = \mathrm{MC}$$

が成り立つ．

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{I'BC} &= \angle \mathrm{I'BM} - \angle \mathrm{CBM} \\ &= \angle \mathrm{BI'M} - \angle \mathrm{BCM} \\ &= \angle \mathrm{BIM} - \angle \mathrm{BAM} \quad \text{（円周角の定理）} \\ &= \angle \mathrm{ABI}\end{aligned}$$

I' は △ABC の内心となるので，I=I' である．
4 点 X,I,E, は同一円周上にあるので，

$$\angle \mathrm{XIE} + \angle \mathrm{EAX} = 180^\circ.$$

よって

$$\angle \mathrm{XIE} = 90^\circ.$$

ω_1，ω_2 の中心を O_1, O_2 とすると，

$$\angle \mathrm{O_1DO_2} = 90^\circ.$$

EF は O_1D に，GH は O_2D に垂直に交わるので

$$\angle \mathrm{FIH} = 90^\circ.$$

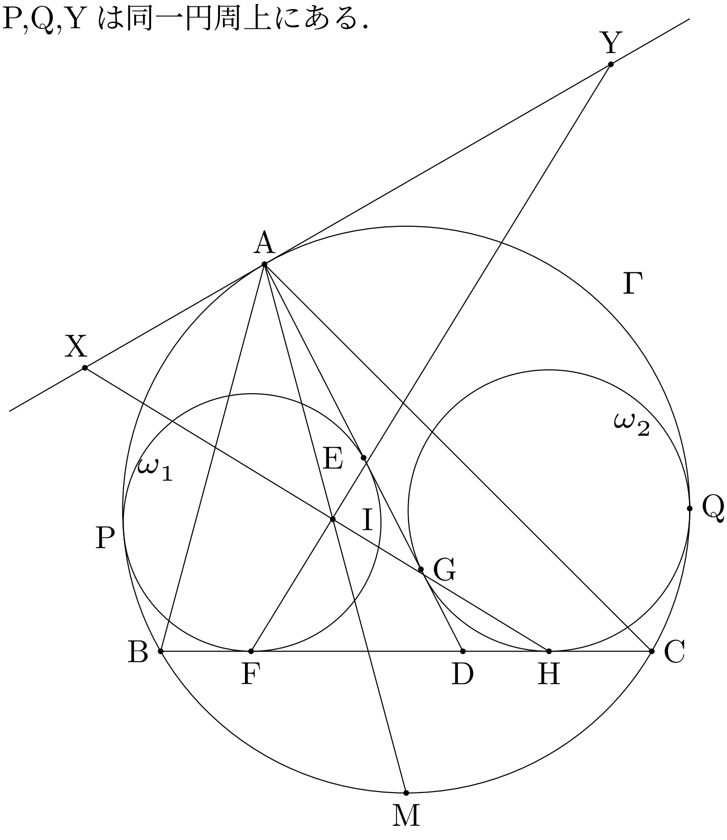
よって

$$\angle \mathrm{XIE} + \angle \mathrm{EIH} = 180^\circ$$

となるので，X,I,G,H は同一直線上にある．
同様に，Y,E,I,F は同一直線上にある．

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{PFB} &= \angle \mathrm{PEF} \\ &= \angle \mathrm{PXI} \quad \text{（円周角の定理）}\end{aligned}$$

円内接四角形定理より，4 点 X,P,F,H は同一円周上にある．
同様に，4 点 Y,Q,H,F も同一円周上にある．
よって，X,P,Q,Y は同一円周上にある．



問題 20

《解答》: 存在する.

n を 3 以上の奇数として, $(a,b,c,d,e) = (F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, F_{n+2}, F_{n-2})$ とするとき, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ とすればよいことを示す.

補題-1 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} {F_k}^2 = F_n F_{n+1}$

証明

(i) $n = 1$ のとき, 明らかに成立する.

(ii) $n = m$ のときに成立すると仮定すると, $n = m+1$ のとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m} {F_k}^2 + {F_{n+1}}^2 &= F_m F_{m+1} + {F_{m+1}}^2 \\ &= F_{m+1}(F_{m+1} + F_m) \ = F_{m+1}F_{m+2}\end{aligned}$$

より成立する.

よって, (右辺) $\displaystyle = \sum_{k=1}^{n+1} {F_k}^2 - \sum_{k=2}^{n-2} {F_k}^2 = {F_{n-1}}^2 + {F_n}^2 + {F_{n+1}}^2$

補題-2 $2({F_{n-1}}^4 + {F_n}^4 + {F_{n+1}}^4) = ({F_{n-1}}^2 + {F_n}^2 + {F_{n+1}}^2)^2$

証明 $A = 2({F_{n-1}}^4 + {F_n}^4 + {F_{n+1}}^4) - ({F_{n-1}}^2 + {F_n}^2 + {F_{n+1}}^2)^2$

とし,

$$\begin{aligned}A &= {F_{n-1}}^4 + {F_n}^4 + {F_{n+1}}^4 - 2{F_n}^2{F_{n-1}}^2 - 2{F_n}^2{F_{n+1}}^2 - 2{F_{n+1}}^2{F_{n-1}}^2 \\ &= ({F_{n+1}}^2 - {F_n}^2)^2 + {F_{n-1}}^4 - 2({F_n}^2{F_{n-1}}^2 + {F_{n+1}}^2{F_{n-1}}^2) \\ &= (2F_nF_{n-1} + {F_{n-1}}^2)^2 + {F_{n-1}}^4 - 2({F_n}^2{F_{n-1}}^2 + {F_{n+1}}^2{F_{n-1}}^2) \\ &= 2{F_{n-1}}^2 + 4F_n{F_{n-1}}^3 + 2{F_n}^2{F_{n-1}}^2 - 2{F_{n-1}}^2(F_{n-1} + F_n)^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

より (1) は成り立つ.

補題-3 $F_{2k+1}F_{2k-1} = {F_{2k}}^2 + 1$

証明 帰納法で示す.

(i) $k = 1$ のとき，明らかに成立する.

(ii) $k = n$ のとき成立すると仮定する．すなわち，

$$F_{2n+1}F_{2n-1} = {F_{2n}}^2$$

$k = n + 1$ のとき，

$$\begin{aligned}
F_{2n+3}F_{2n+1} &= F_{2n+1}(F_{2n+1} + F_{2n+2}) \\
&= F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+1}(F_{2n} + F_{2n-1}) \\
&= F_{2n+1}F_{2n+2} + F_{2n+1}F_{2n} + {F_{2n}}^2 + 1 \quad (\because \text{仮定}) \\
&= F_{2n+2}F_{2n+1} + F_{2n}(F_{2n} + F_{2n+1}) + 1 \\
&= F_{2n+2}(F_{2n+1} + F_{2n}) + 1 \\
&= {F_{2n+2}}^2 + 1
\end{aligned}$$

よって，$k = n + 1$ のときも成り立つ.

よって，自然数全体について成り立つ.

これにより，(2) の成立がいえる.

補題-4 フィボナッチ数列の隣り合う項は互いに素である.

証明 ユークリッドの互除法を用いる.

よって，$a : b : c : d : e$ の比が一定でないことがいえる.

問題 21

$$a^2+kab+b^2=ka^mb^nc^2-1$$

右辺の -1 を左辺に移項し，両辺を ab で割って，

$$\frac{a^2+b^2+1}{ab}+k=ka^{m-1}b^{n-1}c^2 \quad (\text{自然数})$$

ここで，$\dfrac{a^2+b^2+1}{ab}=l \quad (l\text{は自然数})$ ならば，$l=3$ のみであることを示す．

$l\neq 3$ と仮定する．対称性より $a\geq b$ としてよく，a が最小となるような (a,b) の組を (A,B) とする．このとき，

$x^2-lBx+B^2+1=0$ の A でない解を d とすると (d,B) はこの方程式の解となる．また，解と係数の関係より，

$$\begin{cases} A+d=lB & \cdots(1) \\ Ad=B^2+1 & \cdots(2) \end{cases}$$

(1) より，d が整数，(2) より d が正であることが分かるため，d は正の整数となる．ここで，$A>B$ とすると，(2) より，

$d=\dfrac{B^2+1}{A}<A$ となって，A の最小性に矛盾．したがって，$A=B$ となるが

$\dfrac{2A^2+1}{A^2}$ は自然数であることより，$A=1$ となるが，これは $l\neq 3$ に矛盾する．したがって，$\dfrac{a^2+b^2+1}{ab}=l \quad (\text{自然数})$ ならば，$l=3$.

(1) $k=1$ のとき，

$$\frac{a^2+b^2+1}{ab}+1=a^{m-1}b^{n-1}c^2=4$$

を考えればよい．

① $c=1$ のとき，$a^{m-1}b^{n-1}=4$ より，

$$(a^{m-1},b^{n-1})=(1,4),(2,2),(4,1)$$

(i) $(a^{m-1},b^{n-1})=(1,4)$ のとき，$(b,n)=(2,3),(4,2)$ についてそれぞれ調べると，

- $(b,n)=(2,3)$ のとき，$a^2-6a+5=0$ より t を任意の実数として，$(a,m)=(1,t),(5,1)$
- $(b,n)=(4,2)$ のとき，$a^2-12a+17=0$ で a が自然数とならず不適.

(ii) $(a^{m-1},b^{n-1})=(2,2)$ のとき，$(a,b,m,n)=(2,2,2,2)$ のみで代入すると $\dfrac{2^2+2^2+1}{2\cdot 2}$ が自然数であることになり，矛盾するから不適.

② $c=2$ のとき，$m=n=1$ とすれば，a,b は任意の値をとる．ここで，a,b は $\dfrac{a^2+b^2+1}{ab}=3$ を満たすため，式変形をして，

$$(2a-3b)^2-5b^2=-4$$

ここで，x,y は自然数とし，

$$x^2-5y^2=-4$$

の解を求める.

- x が偶数のとき，自然数 α を用いて $x=2\alpha$ とできる.

$$5y^2=4(\alpha^2+1)$$

より y は偶数.

- y が偶数のとき，自然数 β を用いて $y=2\beta$ とできる.

$$x^2=4(5\beta^2-1)$$

より x が偶数.

以上の議論より，x が偶数であることと y が偶数であることは同値であることが示された.

$x^2-5y^2=-4$ を変形すると

$$\frac{x+y\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{x-y\sqrt{5}}{2}=-1$$

(x,y) の最小の解が $(x,y)=(1,1)$ で，その組の x,y をそれぞれ x_1,y_1 とする.

$$\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}\left(\frac{x_1-y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}=-1$$

数学的帰納法を用いて

$$\frac{x_n+y_n\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1},\ \frac{x_n-y_n\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{x_1-y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}$$

を示す.

(i) $n=1$ のとき，明らかに成立する．

(ii) $n=k$ のときに成立すると仮定する．

$n=k+1$ のとき，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} &= \frac{6+2\sqrt{5}}{4}\cdot\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1} \\
&= \frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{x_k+y_k\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{(3x_k+5y_k)+(x_k+3y_k)\sqrt{5}}{4} \\
\left(\frac{x_1-y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} &= \frac{6-2\sqrt{5}}{4}\cdot\left(\frac{x_1-y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1} \\
&= \frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{x_k-y_k\sqrt{5}}{2} \\
&= \frac{(3x_k+5y_k)-(x_k+3y_k)\sqrt{5}}{4}
\end{aligned}$$

よって，

$$x_{k+1}=\frac{3x_k+5y_k}{2},\ y_{k+1}=\frac{x_k+3y_k}{2} \qquad \text{(Q)}$$

とすると，

$$\frac{x_{k+1}+y_{k+1}\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{x_1+y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1},$$

$$\frac{x_{k+1}-y_{k+1}\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{x_1-y_1\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}$$

ここで，x が偶数であることと y が偶数であることが同値であり，x, y の偶奇が一致することから，x_{k+1}, y_{k+1} はともに自然数となる．したがって，$n=k+1$ のときも成り立つ．

(i),(ii) より，すべての自然数 n について成り立つことが示された．

(s,t) を $x^2-5y^2=-4$ を満たす任意の自然数解とすると，

$$\frac{s+t\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k-1}$$

を満たす自然数 k が存在することを示す．

$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{s+t\sqrt{5}}{2}$ とする．$\alpha>1$ より，$\alpha,\alpha^2,\ldots,\alpha^n,\ldots$ は増加数列だから，

$$\lim_{n\to\infty}\alpha^n=\infty$$

である．よって，

$$\alpha^{2k-1}\leqq\beta<\alpha^{2k+1}$$

を満たす自然数 k が存在する．

$$\begin{aligned}&\alpha^{2k-1}\leqq\beta\leqq\alpha^{2k+1}\\ \Longleftrightarrow&(2k-1)\log_{10}\alpha\leqq\log_{10}\beta<(2k+1)\log_{10}\alpha\\ \Longleftrightarrow&k\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}+1\right)<k+1\end{aligned}$$

よって，$k=\left[\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\log_{10}\beta}{\log_{10}\alpha}+1\right)\right]$ とすればよい．

(ただし，$[x]$ は x を超えない最大の整数)

また，$\alpha^{2k-1}\leqq\beta<\alpha^{2k+1}$ のすべての辺を α^{2k-1} で割ると，

$$1\leqq\frac{\beta}{\alpha^{2k-1}}<\alpha^2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$\alpha^{2k-1} = \dfrac{x_k + y_k\sqrt{5}}{2}$ と表せるので,

$$\begin{aligned}\frac{\beta}{\alpha^{2k-1}} &= \frac{s+t\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{-x_k+y_k\sqrt{5}}{2}\\ &= \frac{(-sx_k+5ty_k)+(-tx_k+sy_k)\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

$u = \dfrac{-sx_k+5ty_k}{4}$, $v = \dfrac{-tx_k+sy_k}{4}$ とすると,

$$1 \leqq u+v\sqrt{5} < \frac{3+\sqrt{5}}{2} \tag{i}$$

また,

$$\begin{aligned}u^2-5v^2 &= \frac{1}{16}(-sx_k+5ty_k)^2 - \frac{5}{16}(-tx_k+sy_k)^2\\ &= \frac{1}{16}({x_k}^2-5{y_k}^2)(s^2-5t^2)\\ &= 1\end{aligned}$$

$$\therefore u^2-5v^2 = 1 \tag{ii}$$

$$(u+v\sqrt{5})(u-v\sqrt{5}) = 1$$

$u+v\sqrt{5} > 0$ より, $u-v\sqrt{5} > 0$ で,

$$u+v\sqrt{5}+u-v\sqrt{5} = 2u > 0$$

より $u > 0$.
$v < 0$ とすると, $u+v\sqrt{5} \geqq 1(\because\text{(i)})$ のため,

$$1 = u^2-5v^2 > (u+v\sqrt{5})^2 \geqq 1$$

となり矛盾. よって $v \geqq 0$.

また，$v>0$ とすると，(ii) より

$$2u=\frac{-sx_k+5ty_k}{2}$$
$$2v=\frac{-tx_k+sy_k}{2}$$

において，x_k, y_k の偶奇，s, t の偶奇は一致する．
よって，$(2u, 2v)$ は $x^2-5y^2=4$ の正の整数解であり，x が最小の組は $(3, 1)$ であることから，$2v \geqq 3$ でなければならない．このとき，

$$(2v)^2=\frac{(2u)^2-4}{5} \geqq 1$$

より $2v \geqq 1$．

$$2u+2v\sqrt{5}>3+\sqrt{5}=2\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

で (i) より $u+v\sqrt{5}<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ に矛盾．
よって，$v=0$ で，このとき $u=1$ となる．

$$\frac{\beta}{\alpha^{2k-1}}=u+v\sqrt{5}=1$$

より $\beta=\alpha^{2k-1}$．
よって，$x^2-5y^2=-4$ の正の整数解は

$$\frac{x_n+y_n\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}.$$

$$2a-3b=\pm x_n,\ b=y_n$$

より

$$(a, b)=\left(\frac{\pm x_n+3y_n}{2}, y_n\right)$$

ここで，(Q) より，

$$3y_{m+1}-x_{m+1}=2y_m>0$$

であるから，自然数 n に対して $\dfrac{\pm x_n+3y_n}{2}$ は自然数.
よって，n を自然数として，

$$\begin{aligned}(a,b,c,k,m,n)=&\left(\frac{x_n+3y_n}{2},y_n,2,1,1,1\right),\\&\left(\frac{-x_n+3y_n}{2},y_n,2,1,1,1\right),\end{aligned}$$

$$\frac{x_n+y_n\sqrt{5}}{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n-1}$$

さて，これを踏まえると，
$k(a^{m-1}b^{n-1}c^2-1)=3$
(i)$(a,b)=(1,1),(a,n)=(1,1),(m,b)=(1,1)$ となればよい．これらについて考えると，

$$(a,b,c,k,m,n)=(1,1,2,1,s,t),(1,2,2,1,s,1),(2,1,2,1,1,s)$$

が得られる．

(2) $k=3$ のとき，与式は,

$$\frac{a^2+b^2+1}{3ab}+1=a^{m-1}b^{n-1}c^2=2$$

であった．$c\geqq 2$ とすると不適であったから，$c=1$.

$$(a^{m-1},b^{n-1})=(2,1),(1,2).$$

$(a^{m-1},b^{n-1})=(2,1)$ のとき, $(a,m)=(2,2)$ で, $\dfrac{a^2+b^2+1}{3ab}=1$ に代入し,

$$b^2-6b+5=0$$

より t を任意の自然数として，$(b,n)=(1,t),(5,1)$.

対称性より，t を任意の自然数として，

$$\begin{aligned}(a,b,c,k,m,n) =&(2,1,1,3,2,t),\ (2,5,1,3,2,1),\\ &(1,2,1,3,t,2),\ (5,2,1,3,1,2)\end{aligned}$$

よって，解は

$$\begin{aligned}(a,b,c,k,m,n) =&(1,2,1,1,t,3),\ (5,2,1,1,1,3),\\ &(2,1,1,1,3,t),\ (2,5,1,1,3,1),\\ &(1,1,2,1,s,t),\ (2,1,1,3,2,t),\\ &(1,2,1,3,t,2),\ (2,5,1,3,2,1),\\ &(5,2,1,3,1,2),\\ &\left(\frac{x_l+3y_l}{2},y_l,2,1,1,1\right),\\ &\left(\frac{-x_l+3y_l}{2},y_l,2,1,1,1\right),\\ &(1,2,2,1,s,1),\ (2,1,2,1,1,t)\end{aligned}$$

ただし，s,t は任意の自然数，l は自然数で，

$$\begin{cases} x_{l+1} = \dfrac{1}{2}(3x_l+5y_l) \\ y_{l+1} = \dfrac{1}{2}(x_l+3y_l) \end{cases}$$

$$x_1 = y_1 = 1$$

数学 II

問題 22

$f(x)$ は多項式であり，この多項式が N 次とすると，$N+1$ 個の実数 $a_0, a_1, \cdots, a_N$ が一意に存在し，

$$f(x) = \sum_{j=0}^{N} a_j x^j$$

と表せられる．このとき，

$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \sum_{j=1}^{N} a_j h^{j-1} = a_1$$

となる．また，$f(x) = (1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^{2024})$ の 1 次の項について，

- 最初の括弧で x の方を選ぶ.
- 2 つめ以降の括弧で 1 の方を選ぶ.

ような選び方を考えることで，$a_1 = 1$ と分かる．以上より，$f'(0) = \mathbf{1}$ と分かった.

問題 23

(1) $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

より，$2\sin^2 x - 1 = -\cos 2x$.

(2) $$\begin{aligned} 16 \cdot 2^{2x} &= 4^2 \cdot 4^x \\ &= 4^{x+2} \\ &= 4^{x-(-2)} \end{aligned}$$

より，$y = 4^x$ を x 方向に -2 だけ平行移動したもの.

(3) $$\begin{aligned} \log_2(3x) + \log_4(9x^2) + \log_8(27x^3) &= \frac{\log_8(3x)}{\log_8 2} + \frac{\log_8(3x)^2}{\log_8 4} + \log_8(3x)^3 \\ &= \frac{\log_8(3x)}{\frac{1}{3}} + \frac{2\log_8(3x)}{\frac{2}{3}} + 3\log_8(3x) \\ &= 3\log_8(3x) + 3\log_8(3x) + 3\log_8(3x) \\ &= 9\log_8(3x) \\ &= 9\log_8 x + 9\log_8 3 \end{aligned}$$

より，$y = \log_8 x$ を y 軸を中心に y 方向に 9 倍に拡大し，y 方向に $+9\log_8 3$ だけ平行移動したもの.

問題 24

(1) 曲線 $y = a^x$ は，曲線 $y = b^{\log_b(a)x}$ とも書ける．
この曲線を原点中心に $1/\log_b(a)$ 倍に拡大縮小することで，
曲線 $\dfrac{y}{\log_b(a)} = b^x$，つまり曲線 $y = b^{\log_b \log_b(a)+x}$ が得られる．
これを右に $\log_b \log_b(a)$ だけ平行移動すると，曲線 $y = b^x$ が得られる．
したがって，曲線 $y = a^x$ と曲線 $y = b^x$ は相似である．

(2) a を 1 でない正の実数とする．
曲線 $y = a^x$ および曲線 $y = \log_a(x)$ が，必ず曲線 $y = 10^x$ と相似であることを示せば十分である．(10 という数に本質的な意味はない．)

(a) $a > 1$ のとき，前問より曲線 $y = a^x$ は曲線 $y = 10^x$ と相似.

(b) $0 < a < 1$ のとき，曲線 $y = a^x$ を y 軸について対称移動すると曲線 $y = a^{-x}$，すなわち曲線 $y = (1/a)^x$ が得られる．
$1/a$ は 1 より大きい実数なので，前問より曲線 $y = (1/a)^x$ は曲線 $y = 10^x$ と相似.
よって曲線 $y = a^x$ は曲線 $y = 10^x$ と相似.

(c) 曲線 $y = \log_a(x)$ を直線 $y = x$ について対称移動すると直線 $y = a^x$ が得られる．今までの議論から，これは曲線 $y = 10^x$ と相似である．
よって曲線 $y = \log_a(x)$ は曲線 $y = 10^x$ と相似である．

したがって，指数関数のグラフ，および対数関数のグラフは全て曲線 $y = 10^x$ に相似だから，全て互いに相似である．

問題 25

(1) $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ の式で表す.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta \\ &= \cos\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\sin^2\theta\cos\theta \\ &= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - 2\cos\theta(1-\cos^2\theta) \\ &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ \therefore \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta\end{aligned}$$

このとき $\theta = 20^\circ$ を代入すると,

$$4\cos^2 20^\circ - 3\cos 20^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

となる.

また, $x = \cos 20^\circ$ とおくと, $8x^3 - 6x - 1 = 0$ を得て,

$8x^3 - 6x - 1 = 0$ は $x = \cos 20^\circ$ を解に持つことが示された.

(2) $8x^3 - 6x - 1 = 0$ の 3 解を求める.

(1) より,

$$\begin{aligned}8x^3 - 6x - 1 &= (x - \cos 20^\circ)\{8x^2 + 8(\cos 20^\circ)x + 8\cos^2 20^\circ - 6\} \\ &= 0\end{aligned}$$

と因数分解できる.

$8x^2 + 8(\cos 20^\circ)x + 8\cos^2 20^\circ - 6 = 0$ の解を求めると,

$$\begin{aligned}x &= \frac{-2\cos 20^\circ \pm \sqrt{(2\cos 20^\circ)^2 - 4(4\cos^2 20^\circ - 3)}}{4} \\ &= \frac{-\cos 20^\circ \pm \sqrt{3}\sin 20^\circ}{2} \\ &= \cos(20^\circ \pm 120^\circ) \\ \therefore x &= \cos 100^\circ,\ \cos 140^\circ\end{aligned}$$

$8x^3 - 6x - 1 = 0$ の解は大きい順に $\cos 20^\circ$, $\cos 100^\circ$, $\cos 140^\circ$ である.

ここで $2\cos 20^\circ + 1$，$2\cos 100^\circ + 1$，$2\cos 140^\circ + 1$ を解に持つ 3 次方程式を作る.
$y = 2x + 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}y - \dfrac{1}{2}$ より,

$$0 = 8\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}\right) - 1 = y^3 - 3y^2 + 1$$

y を x に置きなおして, $x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ を得られた.

得た方程式の解を
$\alpha = 2\cos 20^\circ + 1$，$\beta = 2\cos 100^\circ + 1$，$\gamma = 2\cos 140^\circ + 1$ とおき,

$$A_n = \alpha^n + \beta^n + \gamma^n \ (n = 0,\ 1,\ 2, \cdots)$$

とすると,

$$\alpha^3 - 3\alpha^2 + 1 = 0,\ \beta^3 - 3\beta^2 + 1 = 0,\ \gamma^3 - 3\gamma^2 + 1 = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha^3 = 3\alpha^2 - 1,\ \beta^3 = 3\beta^2 - 1,\ \gamma^3 = 3\gamma^2 - 1$$
$$\Leftrightarrow \alpha^{n+3} = 3\alpha^{n+2} - \alpha^n,\ \beta^{n+3} = 3\beta^{n+2} - \beta^n,\ \gamma^{n+3} = 3\gamma^{n+2} - \gamma^n$$

よって, $A_{n+3} = 3A_{n+1} - A_n$ である.
解と係数の関係より $A_2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - 2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha) = 9$
$A_0 = 3$，$A_1 = 3$，$A_2 = 9$，$A_{n+3} = 3A_{n+1} - A_n$

$\{A_n\}$ の漸化式から A_n は帰納的に整数と分かる.

A_{2024} を 9 で割った余りを求める.
9 を法として，$A_0 \equiv 3$，$A_1 \equiv 3$，$A_2 \equiv 0$，$A_3 \equiv 6$，$A_4 \equiv 6$，$A_5 \equiv 0$，$A_6 \equiv 3$，$A_7 \equiv 3$，$A_8 \equiv 0, \cdots$ より A_n を 9 で割った余りは周期 6 であり, A_{2024} を 9 で割った余りは 0 となる.

$f(x)=x^3-3x^2+1$ とすると,
$f(0)=1$, $f(\frac{2}{3})=-\dfrac{1}{27}$, $f(-\frac{2}{3})=-\dfrac{17}{27}$ より,
中間値の定理から $-\dfrac{2}{3}<2\gamma+1<0<2\beta+1<\dfrac{2}{3}$ である.
$(2\beta+1)^{2024}<(2\beta+1)^2<\dfrac{4}{9}$, $(2\gamma+1)^{2024}<(2\gamma+1)^2<\dfrac{4}{9}$
よって, $0<(2\beta+1)^{2024}+(2\gamma+1)^{2024}<1$ である.

$(2\alpha+1)^{2024}$ を全体に足して,
$(2\alpha+1)^{2024}<(2\alpha+1)^{2024}+(2\beta+1)^{2024}+(2\gamma+1)^{2024}$
$=A_{2024}<(2\alpha+1)^{2024}+1$
$A_{2024}-1<(2\alpha+1)^{2024}<A_{2024}$

A_{2024} は整数で, $(2\alpha+1)^{2024}$ の整数部分は $A_{2024}-1$ に一致する. $\alpha=\cos 20^\circ$ また, A_{2024} を 9 で割った余り 0 から,
$(1+2\cos 20^\circ)^{2024}$ の整数部分を 9 で割った余りは 8 となる.

問題 26

次の方程式で表される曲線 C を描く：

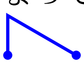
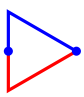
$$|2\sqrt{3}y| + \Big||2\sqrt{3}y| + 4x - 1\Big| = 3 \tag{1}$$

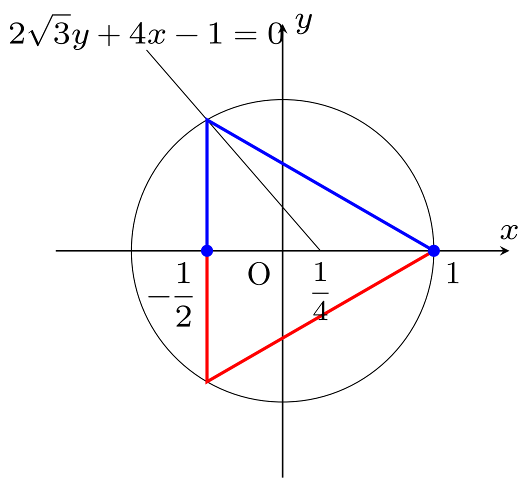
そこで，$(x,y) \in C \iff (x,-y) \in \mathrm{C}$ であるから，C は x 軸対称，したがって以下 $y \geq 0$ の範囲で考える．その下で (1) は

$$2\sqrt{3}y + |2\sqrt{3}y + 4x - 1| = 3 \tag{2}$$

今，(2) は

$$\mathrm{C}: \quad \begin{cases} y = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x-1) & 2\sqrt{3}y + 4x - 1 \geq 0 \text{のとき}, \\ x = -\frac{1}{2} & 2\sqrt{3}y + 4x - 1 < 0 \text{のとき}. \end{cases}$$

よって C の $y \geq 0$ の部分は右図の  部，したがって C はこれを x 軸に対して折り返した  を合わせた  で表される正三角形．



したがって，求める θ は

$$\theta = 0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

問題 27

(1) $x^2+y^2=r^2$ と, $y=m(x-a)$ が共通解を持てばよいので, 連立して判別式 D から

$$\begin{aligned}\frac{D}{4}&=m^4a^2-(m^2+1)(a^2m^2-r^2)\\&=r^2-(a^2-r^2)m^2\\&>0\end{aligned}$$

$$-\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}<m<\frac{r}{\sqrt{a^2-r^2}}$$

(2) $A(s,t)$ とおくと, Γ の A における接線の方程式は $sx+ty=r^2$

これが X を通るので $sa=r^2$, よって AB の方程式は $x=\dfrac{r^2}{a}$

また, P,Q の x 座標をそれぞれ, α,β とおくと, $x^2+m^2(x-a)^2=r^2$ の二解であるから, 解と係数の関係より

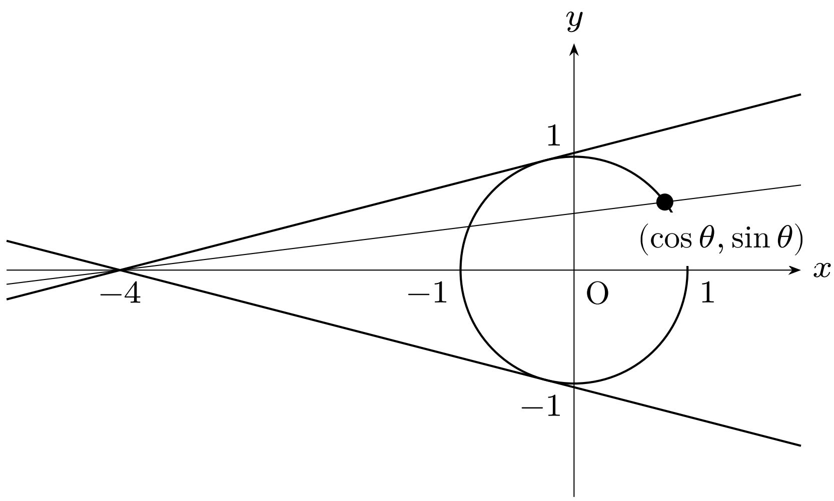
$$\alpha+\beta=\frac{2am^2}{m^2+1},\alpha\beta=\frac{a^2m^2-r^2}{m^2+1}$$

ここで x 座標の比を使えば,

$$\begin{aligned}XP\times QF-XQ\times PF&=(a-\alpha)(\beta-\frac{r^2}{a})-(a-\beta)(\frac{r^2}{a}-\alpha)\\&=2r^2+2\alpha\beta-(a+\frac{r^2}{a})(\alpha+\beta)\\&=2r^2+2\frac{a^2m^2-r^2}{m^2+1}-(a+\frac{r^2}{a})(\frac{2am^2}{m^2+1})\\&=0\end{aligned}$$

より, 示された.

問題 28



要するに，$(-4, 0)$ から単位円上の点 $(\cos\theta, \sin\theta)$ を通るように引いた直線の傾きを考えれば良い．これが最大・最小となるのは接するときなので，直線の方程式を $y = a(x+4)$ とすると，点と直線の距離の公式より，

$$\frac{4a}{\sqrt{a^2+1}} = 1 \quad \therefore a = \pm\frac{1}{\sqrt{15}}$$

よって，$\underline{\text{最大値 } \frac{1}{\sqrt{15}}, \text{ 最小値 } -\frac{1}{\sqrt{15}}}$.

問題 29

$x^5-11x^3+11x^2-1=0$ を解けば良い.

$$x^5-11x^3+11x^2-1=(x-1)(x^4+x^3-10x^2+x+1)$$

ここで，$x^4+x^3-10x^2+x+1=0$ で $x\neq 0$ とし，両辺 x^2 で割り，

$$x^2+x-10+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$

$x+\dfrac{1}{x}=t$ として，

$$t^2+t-12=0 \quad \therefore t=3,\ -4$$

$x+\dfrac{1}{x}=3$ のとき $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$x+\dfrac{1}{x}=-4$ のとき $x=-2\pm\sqrt{3}$ なので，求める x 座標は

$$\underline{x=1,\ \frac{3\pm\sqrt{5}}{2},\ -2\pm\sqrt{3}}$$

問題 30

$\sin 72^\circ = \sin(180^\circ - 72^\circ) = \sin 108^\circ$ より，

$\sin(2 \times 36^\circ) = \sin(3 \times 36^\circ)$　$\therefore 2\sin 36^\circ \cos 36^\circ = 3\sin 36^\circ - 4\sin^3 36^\circ$

$\sin 36^\circ \neq 0$ なので，

$$2\cos 36^\circ = 3 - 4(1 - \cos^2 36^\circ) \quad \therefore 4\cos^2 36^\circ - 2\cos 36^\circ - 1 = 0$$

$\cos 36^\circ > 0$ なので，

$$\cos 36^\circ = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$$

また，$\cos\theta = \dfrac{49}{50}$ より，

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta = \frac{3764768}{1000000} - \frac{2940000}{1000000} = 0.824768$$

よって，

$$\frac{1+\sqrt{5}}{4} < 0.81 < 0.824768 < 0.86 < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

となるから，

$$\cos 36^\circ < \cos 3\theta < \cos 30^\circ$$

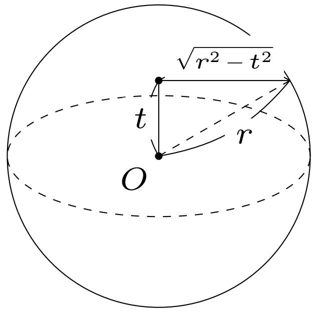
ここで，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \dfrac{9}{10} < \dfrac{49}{50} < 1$ より，$0^\circ < \theta < 60^\circ$，すなわち，
$0^\circ < 3\theta < 180^\circ$ となるから，

$$30^\circ < 3\theta < 36^\circ \quad \therefore 10^\circ < \theta < 12^\circ$$

(証明終)

問題 31

(1) 下図の三角形において，三平方の定理より，$z=t$ での断面の半径は $\sqrt{r^2-t^2}$. したがって面積は $\pi(r^2-t^2)$.



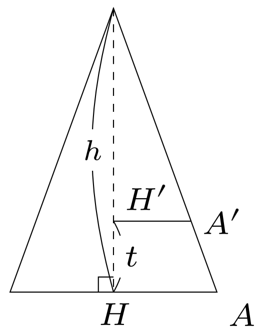
(2) **証明**. 球の中心を原点とする. $z=t$ における断面の面積は $\pi(r^2-t^2)$ である. したがって，この球の体積は

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r}\pi(r^2-t^2)dt &= 2\pi\left[r^2t-\frac{1}{3}t^3\right]_0^r\\ &= 2\pi\left(r^3-\frac{1}{3}r^3\right)\\ &= \frac{4}{3}\pi r^3\end{aligned}$$

□

(3) 錐体の底面積を S, 高さを h とし，高さの方向に z 軸をとる. $z=t$ における断面の面積を $S(t)$ とする. この断面から錐体の頂点までの高さは $h-t$, 底面から錐体の頂点までの高さは h であることから，この断面と底面の相似比は $(h-t):h$, 面積比は $(h-t)^2:h^2$ である.

次ページの図のようなものを描くとわかりやすい. 次ページの図において，$HA:H'A'=h:(h-t)$ であり，これを 2 乗したもの, $h^2:(h-t)^2$ が面積比となる.



錐体を横から見た断面図

したがって，

$$S(t) = S \times \frac{(h-t)^2}{h^2}$$

より，この錐体の体積 V_1 は，

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_0^h S(t)dt \\ &= \int_0^h \frac{(h-t)^2}{h^2} S dt \\ &= \frac{S}{h^2}\left[-(h-t)^3\right]_0^h \\ &= \frac{1}{3}Sh \end{aligned}$$

一方，底面積 S，高さ h の柱体の体積 V_2 は，

$$V_2 = Sh$$

したがって，

$$V_1 = \frac{1}{3}V_2$$

問題 32

点 P は $y=x^2$ と $x=ay^2$ の交点なので $(a^{\frac{-1}{3}}, a^{\frac{-2}{3}})$，点 Q は $x=ay^2$ と $y=a^2x^2$ の交点なので $(a^{\frac{-5}{3}}, a^{\frac{-4}{3}})$ と表せる．すなわち，直線 OP の式は $y=a^{\frac{-1}{3}}x$，直線 OQ の式は $y=a^{\frac{1}{3}}x$ となるので，直線 OP と直線 OQ は $y=x$ について対称である．よって，点 R と点 P は $y=x$ について対称であるといえる．半径 r が正の実数上を変化するときの点 P の軌跡は $y=x^2$ の $x>0$ の部分なので，点 R の軌跡は $y=x^2$ の $y>0$ の部分.

問題 33

$\cos(x^n)+\sin(x^n)=a_n$ とおく．このとき，a_n と a_{n+2} の関係性について考える．

$$\begin{aligned}a_n &= (\cos(x^2)+\sin(x^2))(\cos(x^n)+\sin(x^n))\\ &= \cos(x^{n+2})+\sin(x^{n+2})+\sin(x^2)\cos(x^n)+\cos(x^2)\sin(x^n)\\ &= a_{n+2}+\sin(x^2)\cos(x^n)+\cos(x^2)\sin(x^n)\end{aligned}$$

よって，$\sin(x^2)\cos(x^n)+\cos(x^2)\sin(x^n)=b_n$ とすると，

$$a_n = a_{n+2}+b_n$$

これを書き換えると，

$$a_n - a_{n+2} = b_n \tag{1}$$

ここで，与式の値は $b_2, b_4, \ldots, b_{2022}$ の総和の 4 倍である．
この値は，式 (1) を繰り返し用いると，a_2-a_{2024} と分かる．
$a_2=1, a_{2024}=S$ のため $1-S$. この 4 倍が答えのため答えは「$4-4S$」

数学 B

問題 34

答えは $a=-b\neq 0$ かつ $r_1=r_2=-1$ である．ここでは，(⇒)，(⇐) の 2 つに分けて解説していく．

便宜上，各条件に次のように番号を振る．

・$a_n\neq a_{n+1}$ かつ $b_n\neq b_{n+1}$ …①

・$a_n\neq b_n$ …②

・$a_n+b_n=a_{n+1}+b_{n+1}$ …③

・$a_nb_n=a_{n+1}b_{n+1}$ …④

(⇒)

$a_n+b_n=a_{n+1}+b_{n+1}=p$，$a_nb_n=a_{n+1}b_{n+1}=q$ とすると，すべての正の整数 n に対し，a_n と b_n は 2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の異なる 2 解 a，b である．

ここで，条件①より $a_1\neq a_2$ であるから，$a_2=b$ であり，同様の理由から $a_3=a$ である．

数列 $\{a_n\}$ は初項 a 公比 r_1 の等比数列であるから，$a_3=ar_1^2$ であり，$r_1=\pm 1$ となるが，$r_1=1$ のとき，条件②を満たさず，不適である．したがって，$r_1=-1$ と分かる．

数列 $\{b_n\}$ についても同様の議論を行うと，$r_2=-1$ となる．

よって，$a=-b$ となるが，条件②より $a\neq b$ なので，$a=-b\neq 0$ である．

以上より，$a=-b\neq 0$ かつ $r_1=r_2=-1$ である．

(⇐)

逆に，$a=-b\neq 0$ かつ $r_1=r_2=-1$ であるとき，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が条件①〜④をすべて満たすことを確認する．

すべての正の整数 n に対して，$a_n=a\times(-1)^{n-1}\neq a\times(-1)^n=a_{n+1}$ であり，かつ $b_n=b\times(-1)^{n-1}\neq b\times(-1)^n=b_{n+1}$ であるから，条件①を満たす．

また，すべての正の整数 n に対して，

$$\begin{aligned} a_n &= a \times (-1)^{n-1} \\ &= -b \times (-1)^{n-1} \\ &\neq b \times (-1)^{n-1} \\ &= b_n \end{aligned}$$

であるから，条件②を満たす.

さらに，すべての正の整数 n に対して，

$$\begin{aligned} a_n + b_n &= a \times (-1)^{n-1} + b \times (-1)^{n-1} \\ &= -b \times (-1)^{n-1} + b \times (-1)^{n-1} \\ &= 0, \\ a_{n+1} + b_{n+1} &= a \times (-1)^{n} + b \times (-1)^{n} \\ &= -b \times (-1)^{n} + b \times (-1)^{n} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であるから条件③を満たす.

最後に，条件④である．すべての正の整数 n に対して，

$$\begin{aligned} a_n b_n &= a \times (-1)^{n-1} \times b \times (-1)^{n-1} \\ &= ab \times (-1)^{2n-2} \\ &= ab \times 1 = ab, \\ a_{n+1} b_{n+1} &= a \times (-1)^{n} \times b \times (-1)^{n} \\ &= ab \times (-1)^{2n} \\ &= ab \times 1 \\ &= ab \end{aligned}$$

であるから，これが満たされることが確認できた.

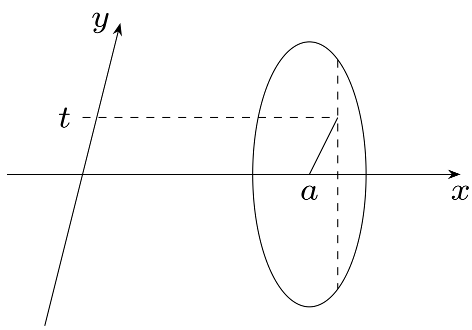
以上より，$a = -b \neq 0$ かつ $r_1 = r_2 = -1$ であるとき，数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ が条件①～④をすべて満たすことが示された.

問題 35

(1) Q の方程式は

$$\begin{cases} x = a \\ y^2 + z^2 = b^2 + c^2 \end{cases}$$

R について,



$y = t$ のとき,($t \leqq \sqrt{b^2 + c^2}$)

$$x^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 - t^2$$

であるから,R の方程式は

$$\begin{cases} y \leqq \sqrt{b^2 + c^2} \\ x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2 \end{cases}$$

S について,R が球の $y \leqq \sqrt{b^2 + c^2}$ の部分のみであるが,z 軸周りに一回転すると完全な球となる.よって,S の方程式は

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

(2) l を点の集合と見れば,(1) のように考えられるため,l 上のすべての点が x, y, z 軸中心に回すと球を作る.よって,最も内側と外側に作られる球の半径を考えればよい.ここで,最も外側に作られる球の半径を R,最も内側に作られる球の半径を r とする.

l 上の点 $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と O の距離の 2 乗は,

$$\begin{aligned}(1+2t)^2 + (2+t)^2 + (3+t)^2 &= 6t^2 + 14t + 14 \\ &= 6\left(t + \frac{7}{6}\right)^2 + \frac{35}{6} \\ &= f(t)\end{aligned}$$

とする.

$$R^2 = \max\left\{ \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2, \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right|^2 \right\}$$

であるから, (∗) より,

$$\begin{cases} \left|\alpha + \dfrac{7}{6}\right| \geqq \left|\beta + \dfrac{7}{6}\right| & \Longrightarrow R^2 = f(\alpha) \\ \left|\alpha + \dfrac{7}{6}\right| < \left|\beta + \dfrac{7}{6}\right| & \Longrightarrow R^2 = f(\beta) \end{cases}$$

r^2 は $f(t)$ の最小値が $t = -\dfrac{7}{6}$ のときで $\dfrac{35}{6}$ であることより

$$\begin{cases} \alpha \leqq -\dfrac{7}{6} \leqq \beta \Longrightarrow r^2 = \dfrac{35}{6} \\ \text{それ以外} \Longrightarrow r^2 = \min\{f(\alpha), f(\beta)\} \end{cases}$$

「それ以外」について考えると,

$$\begin{cases} \alpha \leqq \beta < -\dfrac{7}{6} & \Longrightarrow \min\{f(\alpha), f(\beta)\} = f(\beta) \\ -\dfrac{7}{6} < \alpha \leqq \beta & \Longrightarrow \min\{f(\alpha), f(\beta)\} = f(\alpha) \end{cases}$$

これらをまとめると，

	R^2	r^2
$\alpha \leqq \beta \leqq -\dfrac{7}{6}$	$f(\alpha)$	$f(\beta)$
$\begin{cases} \alpha \leqq -\dfrac{7}{6} \leqq \beta \\ \left\|\alpha + \dfrac{7}{6}\right\| \geqq \left\|\beta + \dfrac{7}{6}\right\| \end{cases}$	$f(\alpha)$	$f\left(-\dfrac{7}{6}\right)$
$\begin{cases} \alpha \leqq -\dfrac{7}{6} \leqq \beta \\ \left\|\alpha + \dfrac{7}{6}\right\| < \left\|\beta + \dfrac{7}{6}\right\| \end{cases}$	$f(\beta)$	$f\left(-\dfrac{7}{6}\right)$
$-\dfrac{7}{6} < \alpha \leqq \beta$	$f(\beta)$	$f(\alpha)$

求める体積は，$\dfrac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)$ であるから，

$$V = \begin{cases} \dfrac{4}{3}\pi\left((6\alpha^2 + 14\alpha + 14)^{\frac{3}{2}} - (6\beta^2 + 14\beta + 14)^{\frac{3}{2}}\right) \\ \qquad \left(\alpha \leqq \beta < -\dfrac{7}{6}\right) \\ \dfrac{4}{3}\pi\left((6\alpha^2 + 14\alpha + 14)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{35}{6}\right) \\ \qquad \left(\alpha \leqq -\dfrac{7}{6} \leqq \beta,\ \left|\alpha + \dfrac{7}{6}\right| \geqq \left|\beta + \dfrac{7}{6}\right|\right) \\ \dfrac{4}{3}\pi\left((6\beta^2 + 14\beta + 14)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{35}{6}\right) \\ \qquad \left(\alpha \leqq -\dfrac{7}{6} \leqq \beta,\ \left|\alpha + \dfrac{7}{6}\right| < \left|\beta + \dfrac{7}{6}\right|\right) \\ \dfrac{4}{3}\pi\left((6\beta^2 + 14\beta + 14)^{\frac{3}{2}} - (6\alpha^2 + 14\alpha + 14)^{\frac{3}{2}}\right) \\ \qquad \left(-\dfrac{7}{6} < \alpha \leqq \beta\right) \end{cases}$$

問題 36

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}] &= n + \sum_{k=1}^{n}(k-1)(2k-1) \\ &= n + \frac{1}{3}n(n+1)(2n+1) - \frac{3}{2}n(n+1) + n\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n^2}[\sqrt{k}] = n^3 \\ &6n + 2(2n^3 + 3n + 1) - 9n(n+1) + 6n = 6n^3 \\ &2n^3 + 3n^2 - 5n = 0 \\ &n(n-1)(2n+5) = 0\end{aligned}$$

よって, $\mathbf{= 1}$ のみ.

問題 37

(1) **解答 1**

数学的帰納法を用いて示す．n を非負整数として，$a_n = \alpha^n + \beta^n$ とおくと，$a_0 = 2, a_1 = 1$ であり，数列 a_n は

$$a_{n+2} = \alpha \cdot a_{n+1} + \beta \cdot a_{n+1} + a_n = a_{n+1} + a_n$$

を満たす．したがって a_{n+1}, a_n が共に整数であれば a_{n+2} は整数となり，数列 a_n の第一項と第二項が自然数であるから題意は示される □

解答 2

$\alpha = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{2}\beta = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ それぞれの n 乗を二項展開して足し合わせることで示すことができる．証明は読者への宿題とする．

(2) $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} \alpha^{kn}\beta^{k(m-n)}$ とする．m, k を正整数として，

$0 \leqq n \leqq \dfrac{m}{2}$ を満たす任意の n に対して

$$\begin{aligned} \alpha^{kn}\beta^{k(m-n)} + \alpha^{k(m-n)}\beta^{kn} &= (\alpha\beta)^{kn}(\alpha^{k(m-2n)} + \beta^{k(m-2n)}) \\ &= (-1)^{kn}(\alpha^{k(m-2n)} + \beta^{k(m-2n)}) \end{aligned}$$

は (1) より整数となり，m が奇数のときはこれを $n = 0$ から $n = \dfrac{m-1}{2}$ まで足したものが S で，m が偶数のときはこれを $n = 0$ から $n = \dfrac{m}{2}$ まで足して整数 $(-1)^{\frac{km}{2}}$ を引いたものが S であるから題意は示された．□

(3) $G_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}$ に $n = 1, n = 2$ を代入して $G_1 = G_2 = 1$ であり $n = 1, 2$ に対して $F_n = G_n$ である．ある $n, n+1$ に対して $F_n = G_n$ であるとすると，

$$\begin{aligned} F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n = G_{n+1} + G_n \\ &= \frac{\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}}{\sqrt{5}} + \frac{\alpha^n + \beta^n}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}}{\sqrt{5}} \qquad (\because \alpha + 1 = \alpha^2, \beta + 1 = \beta^2) \\ &= G_{n+2} \end{aligned}$$

となる．したがって数学的帰納法により任意の正整数に対して $F_n = G_n$□

(4) $i \equiv 0 \pmod j$ のときある正整数 k を用いて $i = kj$ とおけて，$\dfrac{F_i}{F_j} = \dfrac{\alpha^i - \beta^i}{\alpha^j - \beta^j} = \sum n = 0^k \alpha^{in} \beta^{i(k-n)}$ であり (2) よりこれは整数．よって $F_i \equiv 0 \pmod{F_j}$□

数学 III

問題 38

$\sin 2130 = \sin(2130 - 678\pi)$ ここで，$x > 0$ において

$$\int_0^x \cos t dt \leq \int_0^x 1 dt$$

つまり $\sin x < x$．また，$0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin x$ は上に凸であるから

$$\frac{2}{\pi}x \leq \sin x.$$

よって

$$\frac{4260}{\pi} - 1356 \leq \sin 2130 \leq 2130 - 678\pi$$

であり，

$$0.00011 \cdots \leq \sin 2130 \leq 0.00018 \ldots$$

である．したがって求めるレベルは 3.

《解説》

$\sin 2130$ の値がなぜほぼ 0 になるのかは，解答を見ればわかるかもしれないが

$$\frac{2130}{678} = \frac{355}{113} = 3.141592 \cdots \fallingdotseq \pi$$

であることが理由となる．したがって $2130 - 678\pi$ の値がほぼ 0(実際は $0.00018 \ldots$) となり，$x = 0$ まわりでの $\sin x$ の有名な不等式が利用できる．ちなみに下からの評価は直線と $\sin x$ の交点を原点に近づけていけば (評価する点までいってはいけないが) 本解答よりも厳しく数値評価ができる．(例えば交点を $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{1}{2}\right)$ にして試してみるとよい)

問題 39

$f(z)=z^3+az^2+bz+1$ と置く, $f(z)=0$ が実数解を 3 つ持つとき, $f(0)>0$ より, 負の解を必ず 1 つ持ち, そのひとつを α とすると, 残りの 2 つは α または $-\alpha$ である. 解と係数の関係より, その 3 つの積は -1 であるから, 解のパターンは $(\alpha,\alpha,\alpha),(-\alpha,-\alpha,\alpha)$ のいずれかである. どちらにしても $\alpha=-1$ それぞれのパターンで a,b をだすと, $(a,b)=(3,3),(-1,-1)$ である.
次に, $f(z)=0$ が実数解を 1 つ, 複素数解を 2 つ持つとき, 実数解を β とおくと $f(\beta)=0$ より, $f(z)-f(\beta)=0$ から,

$$z^2+(a+\beta)z+\beta^2+a\beta+b=0$$

よって, $|z|^2=\beta^2+a\beta+b=\beta^2$ から, $a\beta+b=0$. これを $f(\beta)=0$ に代入して, $\beta=-1, a=b$. 虚数解を持つ条件より, $-1<a<3$.
以上より, 求める部分は $a=b(-1\leq a\leq 3)$

問題 40

《解答》存在しない.

方程式 $\cos x = x$ がただ 1 つの実数解を持つことを示そう.
$g(x) = x - \cos x$ とおくと $g'(x) = 1 + \sin x \geq 0$ であり，$1 + \sin x$ が恒等的に 0 になるような区間は存在しないため $g(x)$ は狭義単調増加.
また，$g(0) = -1 < 0, g\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2} > 0$ より，中間値の定理からある実数 t があって $g(t) = 0$ $\left(0 < t < \dfrac{\pi}{2}\right)$.
以上から，方程式 $\cos x = x$ は唯一の解 t を $0 < t < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲にもつ.

以下，$f(f(x)) = \cos x$ を満たす実数上の連続関数 $f(x)$ が存在すると仮定する.
$f(\cos x) = f(f(f(x))) = \cos(f(x))$
これに $\cos x = x$ の唯一の実数解 t を代入して $f(t) = \cos(f(t))$.
よって $f(t)$ は方程式 $\cos x = x$ の解となる実数であるから $f(t) = t$.

区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ から 2 実数 a と b をとる.
$f(a) = f(b)$ ならば，$\cos a = f(f(a)) = f(f(b)) = \cos b$ であるため $a = b$.
よって区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において $f(x)$ は単射であり，さらに仮定より連続関数なので，その区間において $f(x)$ は単調である.

$t = f(t)$ より $0 \leq t \leq \dfrac{\pi}{2}$ かつ $0 \leq f(t) \leq \dfrac{\pi}{2}$ であることと，$f(x)$ の連続性から，区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ 内にある 2 実数 u, v $\left(0 \leq u < v \leq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が存在して $0 \leq f(u) \leq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leq f(v) \leq \dfrac{\pi}{2}$ とできる.

(i) 区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において $f(x)$ が単調増加ならば

$0 \leq u < v \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $f(u) < f(v)$

よって $0 \leq f(u) < f(v) \leq \dfrac{\pi}{2}$ となるから，$f(f(u)) < f(f(v))$.

(ii) 区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ において $f(x)$ が単調減少ならば

$0 \leq u < v \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $f(u) > f(v)$

よって $\dfrac{\pi}{2} \geq f(u) > f(v) \geq 0$ となるから，$f(f(u)) < f(f(v))$.

したがって $f(f(u)) < f(f(v))$，つまり $\cos u < \cos v$ が成立する．
一方で $0 \leq u < v \leq \dfrac{\pi}{2}$ より $\cos u > \cos v$ であり，これらは矛盾している．
したがって，$f(f(x)) = \cos x$ を満たす実数上の連続関数 $f(x)$ は存在しない．

問題 41

$1 < a$ を満たす a において

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^a x \,\mathrm{d}x$$

$t = \tan x$ とおくと, $\mathrm{d}t = (t^2 + 1)\,\mathrm{d}x$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^a x \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{t^a}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$$

$0 \leq t \leq 1$, $1 < a$ より $t^2 + 1 \leq 2$ だから

$$\frac{t^a}{2} \leq \frac{t^a}{t^2+1}$$

$t^2 \leq 1$ より

$$2t^a \leq t^a + t^{a-2} = t^{a-2}(t^2+1)$$

$$\frac{t^a}{t^2+1} \leq \frac{t^{a-2}}{2}$$

以上より, $0 \leq t \leq 1$において, $\dfrac{t^a}{2} \leq \dfrac{t^a}{t^2+1} \leq \dfrac{t^{a-2}}{2}$が成り立つ.

3 式を積分しても不等号は変わらないから

$$\frac{1}{2(a+1)} = \int_0^1 \frac{t^a}{2}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{t^a}{t^2+1}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^1 \frac{t^{a-2}}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(a-1)}$$

$$\frac{a}{2(a+1)} \leq a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^a x \,\mathrm{d}x \leq \frac{a}{2(a-1)}$$

$\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{a}{2(a+1)} = \frac{1}{2}$, $\displaystyle\lim_{a\to\infty} \frac{a}{2(a-1)} = \frac{1}{2}$より, はさみうちの原理から

$$\lim_{a\to\infty} a\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^a x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}$$

問題 42

$f(x)=0, x, |x|, -|x|$

《解説》

① $(0,0)$ より $f(0)=0$

② $(x,0)$ より $f(f(x))=f(x)$

③ (x,x) より $2f(x)=f(2x)$

　したがって全ての整数 a に対して $2^a f(x)=f(2^a x)$

④ $(x,-x)$ より $f(f(x)-f(-x))=f(x)-f(-x)$

⑤ $(-x,x)$ より $f(f(-x)-f(x))=f(-x)-f(x)$

　まず，ある点 x_1 で $f(x_1)>0$ となるときを考える．
このとき，③より $f(x)$ はいくらでも大きな値をとれる一方で，①より 0 も値域に含まれる．ゆえに中間値の定理より，全ての非負実数は値域に含まれる．
②より $f(x)$ はその値域に対して恒等関数となるため，このとき
$x\geq 0 \implies f(x)=x$ が成立する．

　同様に，ある点 x_2 で $f(x_2)<0$ となるときを考えると，
$x\leq 0 \implies f(x)=x$ が成立する．

　以下，$f(x)$ がある点で正の値，負の値をとるかどうかで場合を分ける．

[1] $f(x)$ が正の値も負の値もとらないとき
　このとき，常に $f(x)=0$ でなければならない．実際に $f(x)=0$ が解の一つであることは明らかである．

[2] $f(x)$ が正の値も負の値もとるとき
　このとき，常に $f(x)=x$ でなければならない．実際に $f(x)=x$ が解の一つであることは明らかである．

[3] $f(x)$ が正の値をとるが負の値をとらないとき

このとき $(x \geq 0 \implies f(x) = x)$ かつ $f(x) \geq 0$ でなければならない．④と⑤より $f(x) - f(-x) \geq 0$ かつ $f(-x) - f(x) \geq 0$ なので $f(x) = f(-x)$ であるから，$f(x) = |x|$ である必要がある．実際に $f(x) = |x|$ が条件を満たすことは以下の変形から示される:

$|x + y| + |x - y| = ||x| + |y|| + ||x| - |y|| = |x| + |y| + ||x| - |y||$

[4] $f(x)$ が正の値をとらないが負の値をとるとき

このとき $(x \leq 0 \implies f(x) = x)$ かつ $f(x) \leq 0$ でなければならない．④と⑤より $f(x) - f(-x) \leq 0, f(-x) - f(x) \leq 0$ なので $f(x) = f(-x)$ であるから，$f(x) = -|x|$ である必要がある．実際に $f(x) = -|x|$ が解の一つであることは [3] から明らかである．

以上から，$f(x) = 0, x, |x|, -|x|$

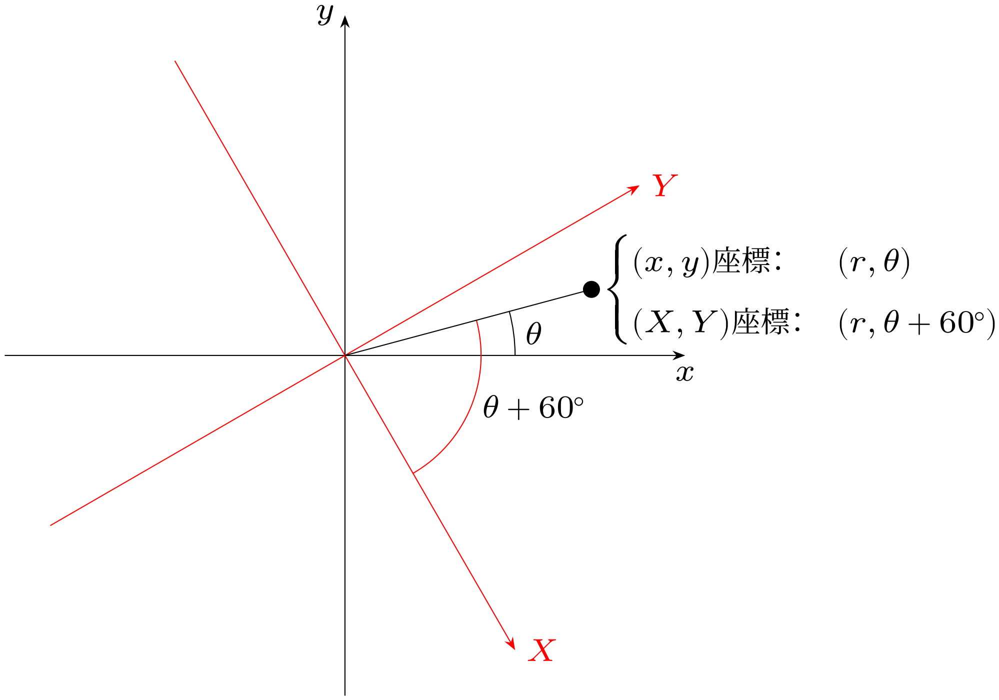
問題 43

$(3f, 0)$ と $(f, 2\sqrt{3}f)$ を焦点とする (中心が $(2f, \sqrt{3}f)$) 紐の長さ $10f$ の楕円．短軸，長軸が x 軸，y 軸と平行でない楕円となるため，工夫が必要．まずは，XY 平面上で焦点距離が $4f$，焦点が X 軸上で中心が原点にあるものとして計算してみる．

$$\frac{X^2}{25f^2} + \frac{Y^2}{21f^2} = 1$$

今書いたこの曲線を $-60°$ だけ回転し，平行移動すればよい．中心が原点にある，平行移動前の xy 平面での曲線の式を求めてから平行移動することにする．

下図の極座標の関係に従って座標変換をする．



変換後の (X, Y) 座標で表される点 (X, Y) をもとの (x, y) 座標で表すと，

$$X+Yi=(x+yi)(\cos 60^\circ+i\sin 60^\circ)=\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y+i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)$$

となる．これを (X,Y) 座標で求めた楕円の式に代入すると，

$$\frac{\left(\frac{1}{2}x-\frac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2}{25f^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{2}y\right)^2}{21f^2}=1$$

これを平行移動する．x を $(x-2f)$ に，y を $(y-\sqrt{3}f)$ に書き換えればよい．そうすると解答

$$\underline{\frac{\left(\frac{1}{2}(x-2f)-\frac{\sqrt{3}}{2}(y-\sqrt{3}f)\right)^2}{25f^2}+\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(x-2f)+\frac{1}{2}(y-\sqrt{3}f)\right)^2}{21f^2}=1}$$

が得られる．

他の部分の曲線も求めておく．

- C_1
  $(3f,0)$ と $(-3f,0)$ が焦点となる紐の長さ $16f$ の楕円である．短半径と長半径をそれぞれ求めれば解答を得る．
- C_2
  $(-3f,0)$ と $(-f,0)$ が焦点となる紐の長さ $12f$ の楕円と考える．紐が $(-f,0)$ に引っかかる．楕円の対称中心が $(-2f,0)$ となるので，短半径と長半径をそれぞれ求めて原点中心の式を書いて平行移動すればよい．
- C_3
  $(-3f,0)$ と $(-3f,2\sqrt{3}f)$ が焦点となる紐の長さ $8f$ の楕円．
- C_4 $(-3f,2\sqrt{3}f)$ を中心とする円．紐の長さ $(16-4-4-2\sqrt{3})f=(8-2\sqrt{3})f$ はであった．中心から領域の境界までの部分には紐が 2 本重なっているので，半径は $\dfrac{8-2\sqrt{3}}{2}f$.

- C_5
  $(3f, 0)$ と $(-f, 0)$ を焦点とする紐の長さ $14f$ の楕円.
- C_7
  $(f, 2\sqrt{3}f)$ を中心とする円. 紐の長さは $(16-2-4-4)f = 6f$ であった. C_4 と同様に中心から領域の境界までの部分には紐が 2 本重なっているので, 半径は $\dfrac{6f}{2} = 3f$.

問題 44

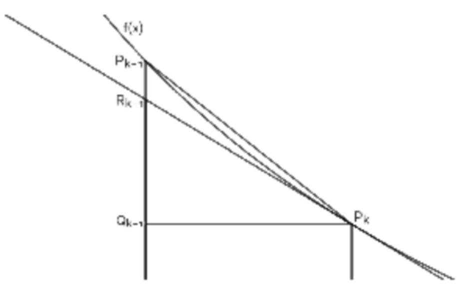
$S_k(t)$ を次のようにおく.

$$S_k(t)=\int_{\frac{k-1}{n}t}^{\frac{k}{n}t}\frac{1}{\log(x+e)}\mathrm{d}x-\frac{t}{n\log\left(\frac{k}{n}t+e\right)}$$

$f(x)=\dfrac{1}{\log(x+e)}$ とすると, $0\leq x$ のとき

$f'(x)=-\dfrac{1}{(x+e)\{\log(x+e)\}^2}<0,\ f''(x)=\dfrac{\log(x+e)+2}{(x+e)^2\{\log(x+e)\}^3}>0\cdots(*)$

$P_k\left(\dfrac{k}{n}t,\ f\left(\dfrac{k}{n}t\right)\right)$, $Q_k\left(\dfrac{k}{n}t,\ f\left(\dfrac{k+1}{n}t\right)\right)$ とする. また, f の P_{k+1} における接線と直線 $x=\dfrac{k}{n}$ の交点を R_k とすると, $R_k\left(\dfrac{k}{n}t,\ -\dfrac{t}{n}f'\left(\dfrac{k+1}{n}t\right)+f\left(\dfrac{k+1}{n}t\right)\right)$ となる.



$(*)$ より上図のようになり, $\triangle P_kQ_{k-1}R_{k-1}<S_k(t)<\triangle P_kQ_{k-1}P_{k-1}$ が成立する. 不等式の 2 三角形の面積をそれぞれ求めると,

$$\triangle P_kQ_{k-1}R_{k-1}=\frac{1}{2}\cdot P_kQ_{k-1}\cdot Q_{k-1}R_{k-1}=-\frac{t^2}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}t\right)$$

$$\triangle P_kQ_{k-1}P_{k-1}=\frac{1}{2}\cdot P_kQ_{k-1}\cdot Q_{k-1}P_{k-1}=\frac{t}{2n}\left\{f\left(\frac{k-1}{n}t\right)-f\left(\frac{k}{n}t\right)\right\}$$

不等式は $k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ で成り立つから

$$\sum_{k=1}^{n}-\frac{t^2}{2n^2}f'\left(\frac{k}{n}t\right)<\sum_{k=1}^{n}S_k(t)<\sum_{k=1}^{n}\frac{t}{2n}\left\{f\left(\frac{k-1}{n}t\right)-f\left(\frac{k}{n}t\right)\right\}$$

求める $S(t)$ は $S_k(t)$ を用いて

$$S(t)=\lim_{n\to\infty} n^p\sum_{k=1}^{n} S_k(t)$$

と表せる.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} -\frac{tn^{p-1}}{2}\cdot\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}t\right) < S(t) &= \lim_{n\to\infty} n^p\sum_{k=1}^{n} S_k(t)\\ &< \lim_{n\to\infty}\frac{tn^{p-1}}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k-1}{n}t\right)-f\left(\frac{k}{n}t\right)\right\}\end{aligned}$$

$p=1$ とすると,

$$\begin{aligned}\triangle P_kQ_{k-1}R_{k-1}:\ \lim_{n\to\infty} -\frac{tn^{0}}{2}\cdot\frac{t}{n}\sum_{k=1}^{n} f'\left(\frac{k}{n}t\right)\\ &= -\frac{t}{2}\int_0^t f'(x)\ \mathrm{d}x\\ &= \frac{t}{2}\{f(0)-f(t)\}\\ &= \frac{t}{2}\left\{1-\frac{1}{\log(t+e)}\right\}\\ \triangle P_kQ_{k-1}P_{k-1}:\ \lim_{n\to\infty}\frac{tn^{0}}{2}\sum_{k=1}^{n}\left\{f\left(\frac{k-1}{n}t\right)-f\left(\frac{k}{n}t\right)\right\}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{t}{2}\{f(0)-f(t)\}\\ &= \frac{t}{2}\left\{1-\frac{1}{\log(t+e)}\right\}\end{aligned}$$

はさみうちの原理から $p=1$ で $S(t)$ は 0 でない値に収束し, そのときの $S(t)$ は

$$S(t)=\frac{t}{2}\left\{1-\frac{1}{\log(t+e)}\right\}$$

問題 45

(1) $$I=\int_{\frac{\sqrt{a+b^2}-\sqrt{a}}{b}}^{\frac{\sqrt{a+b^2}+\sqrt{a}}{b}}\frac{\log x}{x^2+1}dx$$

$$=\int_{\frac{\sqrt{a+b^2}+\sqrt{a}}{b}}^{\frac{\sqrt{a+b^2}-\sqrt{a}}{b}}\frac{\log\frac{1}{t}}{\frac{1}{t^2}+1}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt\quad\left(x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{1}{t^2}dt\right)\quad(\ast)$$

$$=\int_{\frac{\sqrt{a+b^2}+\sqrt{a}}{b}}^{\frac{\sqrt{a+b^2}-\sqrt{a}}{b}}\frac{-\log t}{\frac{1}{t^2}+1}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=\int_{\frac{\sqrt{a+b^2}+\sqrt{a}}{b}}^{\frac{\sqrt{a+b^2}-\sqrt{a}}{b}}\frac{\log t}{t^2+1}dt$$

$$=-\int_{\frac{\sqrt{a+b^2}-\sqrt{a}}{b}}^{\frac{\sqrt{a+b^2}+\sqrt{a}}{b}}\frac{\log t}{t^2+1}dt$$

$$=-I$$

よって $I=0$.

$(\ast)$ では積分区間について，変数変換後に有理化した.

(2) $$I=\int_{\alpha}^{\beta}\log(\tan\theta)d\theta\qquad\left(x=\tan\theta,\ \frac{1}{x^2+1}dx=d\theta\right)$$

$$=[\theta\log(\tan\theta)]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{\theta}{\tan\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=[\theta\log(\tan\theta)]_{\alpha}^{\beta}-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{2\theta}{\sin 2\theta}d\theta$$

$$=[\theta\log(\tan\theta)]_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{2}\int_{2\alpha}^{2\beta}\frac{u}{\sin u}du\qquad(2\theta=u,\ 2d\theta=du)$$

$$0=[\theta\log(\tan\theta)]_{\alpha}^{\beta}-\frac{1}{2}J$$

$$\tan\beta=\frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\pm\infty$$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$ より，$0 < \alpha + \beta < \pi$ となるから，
$\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$

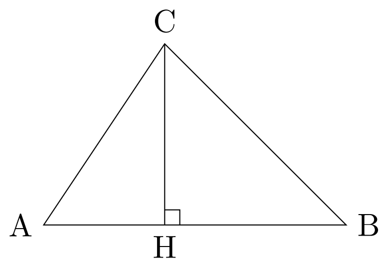
$$
\begin{aligned}
J &= 2[\theta \log(\tan\theta)]_{\alpha}^{\beta} \\
&= 2\beta \log(\tan\beta) - 2\alpha \log(\tan\alpha) \\
&= 2\beta \log(\tan\beta) - 2\alpha \log\left(\frac{1}{\tan\beta}\right) \\
&= 2\beta \log(\tan\beta) + 2\alpha \log(\tan\beta) \\
&= 2(\alpha+\beta) \log(\tan\beta) \\
&= \pi \log\left(\frac{\sqrt{a+b^2}+\sqrt{a}}{b}\right)
\end{aligned}
$$

問題 46

(1) $\dfrac{a^2}{2h}$

(2) a

《解説》



この図において，外接円の半径を R とすると

面積の式：

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|AB||CH| = \frac{1}{2}|BC|AC|\sin\angle C$$

正弦定理：

$$\frac{|AB|}{\sin\angle C} = 2R$$

この 2 つの式より，

$$R = \frac{|BC||AC|}{2|BH|}$$

が分かる．

本問では (1)(2) ともにこの式を用いる．

(1) レムニスケートの性質 $|FP||F'P| = a^2$ より外接円の半径 R_1 は

$$R_1 = \frac{|FP||F'P|}{2h} = \frac{a^2}{2h}$$

(2) レムニスケートの方程式 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2)$ を変形すると

$$(x^2+y^2)^2 - 2a^2(x^2+y^2) + 4a^2y^2 = 0$$

となるから，X についての二次方程式

$$X^2 - 2a^2X + 4a^2h^2 = 0$$

は $|OP|^2$ と $|OQ|^2$ を 2 つの解としてもつ．
よって解と係数の関係より $|OP|^2|OQ|^2 = 4a^2h^2$ であるから，外接円の半径 R_2 は

$$R_2 = \frac{|OP||OQ|}{2h} = \frac{\sqrt{4a^2h^2}}{2h} = \frac{2ah}{2h} = a$$

問題 47

(1) 一般に正の整数 a, b について，$\gcd(a,b)=g$ とし，$a=gA$，$b=gB$ とおく．このとき，a_n は $A+B-1$ 周期で，$a_{(A+B-1)m}=gABm$ であるから，$(A+B-1)m \leqq n < (A+B-1)(m+1)$ なる m をとると，

$$gABm \leqq a_n < gAB(m+1)$$

が成り立つ.

$$\therefore \frac{gABm}{(A+B-1)(m+1)} < \frac{a_n}{n} < \frac{gAB(m+1)}{(A+B-1)m}$$

はさみうちの原理より，$\lim n \to \infty \frac{a_n}{n} = \frac{gAB}{A+B-1}$
$2024=2^3\times 11\times 23$，$33=3\times 11$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{11\times 2^3\times 23\times 3}{2^3\times 23+3-1}=\frac{6072}{186}=\frac{1012}{31}$$

(2) α, β を，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ が無理数であり，$\alpha > \beta$ となるようにとる．今，$a_n = m\alpha$ となる n, m をとると，

$$k\beta < a_n < (k+1)\beta$$

なる k をとることができ,

$$n = m + k \tag{1}$$

また，$k\beta < m\alpha < (k+1)\beta$ より，

$$\frac{\alpha}{\beta}m - 1 < k < \frac{\alpha}{\beta}m \tag{2}$$

$\dfrac{a_n}{n} = \dfrac{m\alpha}{m+k}$ であるから，

$$\frac{m\alpha}{m+\frac{\alpha}{\beta}m} < \frac{a_n}{n} < \frac{m\alpha}{m+\frac{\alpha}{\beta}m-1}$$

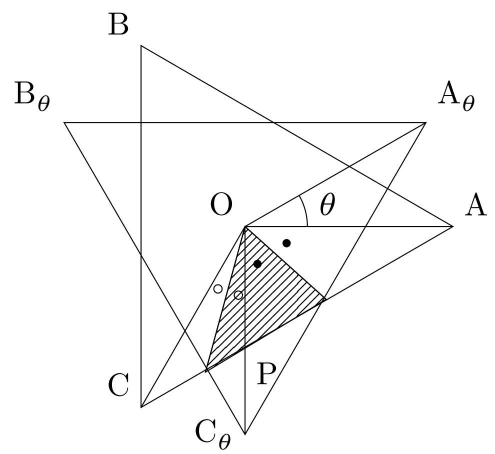
$n \to \infty$ のとき $m \to \infty$ であるから，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \frac{\sqrt{2024}\cdot\sqrt{33}}{\sqrt{2024}+\sqrt{33}}$$

問題 48



$z=\theta$ のときの正三角形 ABC を正三角形 $\mathrm{A}_\theta\mathrm{B}_\theta\mathrm{C}_\theta$ とする．OC_θ と AC の交点を P_θ とする．○と●はそれぞれ等しく，OA=OC=1 なので，斜線部の面積は三角形 OAC の $\dfrac{\mathrm{OP}}{\mathrm{OA}+\mathrm{OP}}$ 倍である．三角形 OCP について正弦定理より，$\mathrm{OC}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\mathrm{OP}\sin\dfrac{\pi}{6}$

斜線部の面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\dfrac{1}{1+\frac{1}{\mathbf{OP}}} = \dfrac{1}{4}\dfrac{1}{1+2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}$

斜線部の面積の 6 倍が三角形 ABC と三角形 $\mathrm{A}_\theta\mathrm{B}_\theta\mathrm{C}_\theta$ の共通部分の面積である．これを θ が 0 から $\dfrac{2\pi}{3}$ まで積分したものが求める値

よって求める体積は

$$\frac{3\sqrt{3}}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{3}} \frac{1}{1+2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)}d\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \frac{1}{1+2\sin\theta}d\theta$$

$u=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと，$\dfrac{du}{d\theta}=\dfrac{\tan\frac{\theta}{2}}{d\theta}=\dfrac{2}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{1}{2}(u^2+1)$

$$
\begin{aligned}
\int\frac{2}{1+2\sin\theta}d\theta &= \int\frac{1}{1+\frac{4u}{u^2+1}}\frac{1}{u^2+1}du \\
&= \int\frac{2}{u^2+4u+1}du \\
&= \int\frac{2}{(u+2)^2-3}du \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\int\left(\frac{1}{u+2-\sqrt{3}}-\frac{1}{u+2+\sqrt{3}}\right)du \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}(\log(u+2-\sqrt{3})-\log(u+2+\sqrt{3})) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\log(\tan\frac{\theta}{2}+2-\sqrt{3})-\log\left(\tan\frac{\theta}{2}+2+\sqrt{3}\right)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{3\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+2\sin\theta}d\theta \\
&= \frac{3}{2}\left[\log\left(\tan\frac{\theta}{2}+2-\sqrt{3}\right)-\log(\tan\frac{\theta}{2}+2+\sqrt{3})\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} \\
&= \frac{3}{2}\log\left(\frac{4}{4+2\sqrt{3}}\frac{4}{4-2\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{3}{2}\log\frac{16}{4} \\
&= 3\log 2
\end{aligned}
$$

問題 49

$$\{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\}' = \sum_{i=1}^{n} [(x-1)\cdots\{x-(i-1)\}$$
$$\{x-(i+1)\}\cdots(x-n)]$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{x-i}$$

より

$$(\quad \mathbf{1})(\quad \mathbf{2})\cdots(\quad)+$$

問題 50

(1) 度数法での 180° を，弧度法では π [rad] と表現する．よって

$$y = \sin \frac{\pi}{180}x$$

(2) $f(x)$ を x で微分し，$\dfrac{d}{dx}f(x) = \dfrac{\pi}{180}\cos\dfrac{\pi}{180}x$ より，$x = 45^\circ$ における $f(x)$ の傾きは $\dfrac{d}{dx}f(45^\circ) = \dfrac{\sqrt{2}}{2\times\frac{\pi}{180}}$．よって接線の方程式は，

$$\begin{aligned} l(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\pi}{180}(x-45^\circ)+\sin\left(\frac{\pi}{180}\times 45^\circ\right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{180}x-\frac{\pi}{4}+1\right) \end{aligned}$$

ここで，$A(x) = l(x) - f(x)$ とすると，

$$A(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{180}x-\frac{\pi}{4}+1\right)-\sin\frac{\pi}{180}x$$

これを x で微分し，

$$\frac{d}{dx}A(x) = \frac{\pi}{180}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\cos\frac{\pi}{180}x\right)$$

x	0°		45°
$A(x)$	$+$	↘	0
$\dfrac{d}{dx}A(x)$	$-$	$-$	0

明らかに $A(45^\circ) = 0$ であることを確認し，$A(x)$ の増減表を書くと上の様．　増減表から，$0^\circ < x < 45^\circ$ において $A(x) > 0$ だから，$l(x) > f(x)$.

(3) $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\pi}{180}x-\dfrac{\pi}{4}+1\right)+a\left(\dfrac{\pi}{180}x-\dfrac{\pi}{4}\right)^2$ である．

$$\begin{aligned} h(x) &= g(x) - f(x) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{180}x-\frac{\pi}{4}+1\right)+a\left(\frac{\pi}{180}x-\frac{\pi}{4}\right)^2-\sin\frac{\pi}{180}x \end{aligned}$$

として，$h(x)$ の符号と増減に注目する．$h(x)$ を x で微分し，

$$\frac{d}{dx}h(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{180} + 2a\left(\frac{\pi}{180}x - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{\pi}{180} - \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}x$$

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2}h(x) &= 2a\left(\frac{\pi}{180}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{180}\right)^2 \sin\frac{\pi}{180}x \\ &= \left(\frac{\pi}{180}\right)^2\left(2a + \sin\frac{\pi}{180}x\right)\end{aligned}$$

ここで，$h(45^\circ) = 0$, $\dfrac{d}{dx}h(45^\circ) = 0$ が a の値に関わらず成立することを確認しておく．

i) $a \leq -\dfrac{1}{2}$ のとき，

x	0°		45°
$h(x)$	$-$	$\nearrow$	0
$\dfrac{d}{dx}h(x)$	$+$	$\searrow$	0
$\dfrac{d^2}{dx^2}h(x)$	$-$	$-$	-

$2a \leqq -1$ であるから，$\dfrac{d^2}{dx^2}h(x) \leqq 0$. よって，$\dfrac{d}{dx}h(x)$ は単調減少．これを用いて $\dfrac{d}{dx}h(x) \geq 0$ から，$h(x)$ は単調増加．

結局，$h(x) \leq 0$ が示された．

よって $g(x) \leqq f(x)$，$x = 45^\circ$ で等号成立．

ii) $0 \leq a$ のとき，

x	0°		45°
$h(x)$	$+$	$\searrow$	0
$\dfrac{d}{dx}h(x)$	$-$	$\nearrow$	0
$\dfrac{d^2}{dx^2}h(x)$	$+$	$+$	$+$

$0 \leqq 2a$ であるから，$\dfrac{d^2}{dx^2}h(x) \geqq 0$. よって，$\dfrac{d}{dx}h(x)$ は単調増加．これを用いて $\dfrac{d}{dx}h(x) \leqq 0$ から，$h(x)$ は単調減少．

結局，$h(x) \geqq 0$ が示された．

よって $g(x) \geqq f(x)$，$x = 45^\circ$ で等号成立．

(4) $a = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ のとき，

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{180}x - \frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{180}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \sin\frac{\pi}{180}x \\
\frac{d}{dx}h(x) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{180} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{180}x - \frac{\pi}{4}\right) \times \frac{\pi}{180} - \frac{\pi}{180}\cos\frac{\pi}{180}x \\
\frac{d^2}{d^2x}h(x) &= \left(\frac{\pi}{180}\right)^2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin\boxed{f()}\frac{\pi}{180}x\right)
\end{aligned}
$$

x	0°		45°
$h(x)$	$-$	$\nearrow$	0
$\dfrac{d}{dx}h(x)$	$+$	$\searrow$	0
$\dfrac{d^2}{d^2x}h(x)$	$-$	$-$	0

増減表より，$h(x) \leqq 0$ とわかり，ここから，$g(x) \leqq f(x)$，$x = 45^\circ$ で等号成立．

(5) (2) と (4) の結果を利用し，

$$
\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{180}x - \frac{\pi}{4} + 1\right) - \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{\pi}{180}x - \frac{\pi}{4}\right)^2 &\leqq \sin\boxed{f()}x \\
\sin x &\leqq \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\pi}{180}x - \frac{\pi}{4} + 1\right)
\end{aligned}
\tag{$*$}
$$

と評価できる．

さて，$2024 = 360 \times 5 + 180 + 44$ より，求めるべき値は

$$\sin(180^\circ + 44^\circ) = -\sin 44^\circ$$

の小数第二位までの数字である．

$x=44$ とすると，$\dfrac{\pi}{180}\times 44-\dfrac{\pi}{4}<0$ であるから，$(*)$ の不等式で左辺は π を大きく見積もり，$\pi\fallingdotseq 3.15$，右辺では小さく見積もり，$\pi\fallingdotseq 3.14$，左辺も右辺も正となることから，左辺では $\sqrt{2}\fallingdotseq 1.41$，右辺では $\sqrt{2}\fallingdotseq 1.42$ とすれば大小関係を維持できる．このとき，

$$\frac{1.41}{2}\left\{\left(1-\frac{3.15}{180}\right)-\left(\frac{3.15}{180}\right)^2\right\}\leqq \sin 44^\circ \leqq \frac{1.42}{2}\left(1-\frac{3.14}{180}\right)$$

これを計算してみると，

$$\frac{1.41}{2}\left\{\left(1-\frac{3.15}{180}\right)-\left(\frac{3.15}{180}\right)^2\right\}=0.692\cdots>0.692$$
$$\frac{1.42}{2}\left(1-\frac{3.14}{180}\right)=0.697\cdots<0.698$$

となるから，

$$0.692<\sin 44^\circ<0.698$$

となり，$\sin 44^\circ=0.69\cdots$ と，小数第二位まで決定できた．求めるべき値は

$$\frac{[100\times(-\sin 44^\circ)]}{100}=\frac{[-69.\cdots]}{100}=-0.70$$

《解説》

本問では，「$x=45^\circ$ における $\sin x$ の Taylor 展開」を扱った．すでに「マクローリン展開」を知っている高校生も多いことであろうが，これは $x=0$ における Taylor 展開である．しかし，本問では $x=44^\circ$ としたいため，$x=0$ における Taylor 展開を行って $\sin 44^\circ$ の近似値を求めるのは精度に問題が生じる．そこで，$x=45^\circ$ における Taylor 展開を行って精度よく値を評価しようとしたのである．上に示した解答のように，2 次の項まで計算すれば十分であった．また，数値評価のために何度も不等式や $\pi,\sqrt{2}$ の近似値を用いたが，大小関係が崩れないように注意して運用してほしい．

問題 51

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} 3\sin^2 x\cos^4 x dx$$
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2(\cos^{\frac{2}{3}} x+\sin^{\frac{2}{3}} x)^3}dx$$

とおく．ここで，アステロイド

$$x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1$$

を考える．このアステロイドを極座標で表すと，

$$\begin{aligned} x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=1 &\Leftrightarrow (r\cos\theta)^{\frac{2}{3}}+(r\sin\theta)^{\frac{2}{3}}=1 \\ &\Leftrightarrow r=\frac{1}{2(\cos^{\frac{2}{3}}\theta+\sin^{\frac{2}{3}}\theta)^3} \end{aligned}$$

となるが，J はこれを $\theta=0$ から $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ まで積分したもの，つまりアステロイドの囲む領域の面積の $\dfrac{1}{4}$ となる．また，アステロイドは

$$x=\sin^3\theta, y=\cos^3\theta$$

のようにパラメータ表示でき (ここでの θ は偏角を意味しないことに注意)，第一象限の部分を積分すると

$$\int_0^1 ydx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^3\theta)(\sin^3\theta)'d\theta=I$$

となり，I もまたアステロイドの囲む領域の面積の $\dfrac{1}{4}$ となる．以上より $I:J=1:1$ である．

問題 52

解 1　分数関数の微分を用いる考え方

$$f'(x)=\frac{([x+1]-x)'(x-[x])-([x+1]-x)(x-[x])'}{(x-[x])^2}$$
$$=\frac{-1\cdot(x-[x])-([x+1]-x)\cdot 1}{(x-[x])^2}$$
$$=\frac{[x]-[x+1]}{(x-[x])^2}$$
$$=\boxed{-\frac{1}{(x-[x])^2}} \qquad \text{(答)}$$

解 2　微分の定義式から計算する考え方

正の数であって，$x+h<[x+1]$ を満たす h が存在する．そのような h に対し，

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left\{\frac{[x+h+1]-(x+h)}{x+h-[x+h]}-\frac{[x+1]-x}{x-[x]}\right\}$$
$$=\frac{1}{h}\left\{\frac{[x+1]-(x+h)}{x+h-[x]}-\frac{[x+1]-x}{x-[x]}\right\}$$
$$=\frac{1}{h}\left\{([x+1]-x)\left(\frac{1}{x+h-[x]}-\frac{1}{x-[x]}\right)-\frac{h}{x+h-[x]}\right\}$$
$$=\frac{[x+1]-x}{(x+h-[x])(x-[x])}-\frac{1}{x+h-[x]}$$

ゆえに

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{[x+1]-x}{(x+h-[x])(x-[x])}-\frac{1}{x+h-[x]}\right\}$$
$$=\frac{[x+1]-x}{(x-[x])^2}-\frac{1}{x-[x]}$$
$$=\boxed{-\frac{1}{(x-[x])^2}} \qquad \text{(答)}$$

問題 53

$f(x)=x^3-(a+3)x+2$ とおく.

(1) $a=0$ のとき, $f(x)=x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$

$$\begin{aligned} S&=\int_{-2}^{1} f(x)\ dx \\ &=\int_{-2}^{1}(x-1)^2(x+2)\ dx \\ &=\left[\frac{1}{3}(x-1)^3(x+2)\right]_{-2}^{1}-\frac{1}{12}\int_{-2}^{1}(x-1)^4\ dx \\ &=\frac{27}{4} \end{aligned}$$

(2) $a>0$ のとき, $f(x)=0$ の実数解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha \geq \beta \geq \gamma)$ とする.

$\boxed{T_1}$

$$T_1=\int_{\beta}^{\alpha}-f(x)\ dx=-\frac{1}{4}(\alpha^4-\beta^4)+\frac{1}{2}(a+3)(\alpha^2-\beta^2)-2(\alpha-\beta)$$

$$T_1=(\alpha-\beta)\left\{-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{2}(a+3)(\alpha+\beta)-2\right\}$$

$\alpha-\beta,\ \alpha+\beta,\ \alpha^2+\beta^2$ をそれぞれ別の形で表し, T_1 の 2 因数の極限をそれぞれ求める.

解と係数の関係より $\alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta\gamma=-2$

また,$f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ より

$$f(-2)=(-2-\alpha)(-2-\beta)(-2-\gamma)=2a$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha-\beta)^2 &= (\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta \\
&= (-\gamma)^2-4\left(-\frac{2}{\gamma}\right) \\
&= \frac{(-2-\gamma)(\gamma^2-2\gamma+4)}{-\gamma} \\
&= \frac{2a(\gamma^2-2\gamma+4)}{-\gamma(2+\alpha)(2+\beta)}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \alpha-\beta = \sqrt{\frac{2a(\gamma^2-2\gamma+4)}{-\gamma(2+\alpha)(2+\beta)}} \cdots\cdots (i)
$$

$$
\alpha+\beta=-\gamma,\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\gamma^2+\frac{4}{\gamma}\text{より}
$$

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{2}(a+3)(\alpha+\beta)-2 &= \frac{1}{4}(\gamma^3+4)-\frac{1}{2}(a+3)\gamma-2 \\
&= \frac{(\gamma+2)(\gamma^2-2\gamma-2)}{4}-\frac{a\gamma}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\therefore -\frac{1}{4}(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2)+\frac{1}{2}(a+3)(\alpha+\beta)-2 = -\frac{2a(\gamma^2-2\gamma-2)}{4(1+\alpha)(1+\beta)}-\frac{a\gamma}{2} \cdots\cdots (ii)
$$

$a \to +0$ のとき, $\alpha \to 1+0,\ \beta \to 1-0, \gamma \to -2-0$ であることに注意する.

$(i),\ (ii)$ より T_1 に代入して, $a\sqrt{a}$ で割ると,

$$
\begin{aligned}
\lim_{a\to+0}\frac{T_1}{a\sqrt{a}} &= \lim_{a\to+0}\sqrt{\frac{2(\gamma^2-2\gamma+4)}{-\gamma(2+\alpha)(2+\beta)}}\cdot\left\{-\frac{2(\gamma^2-2\gamma-2)}{4(1+\alpha)(1+\beta)}-\frac{\gamma}{2}\right\} \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{1}{3}+1\right) \\
&= \frac{4\sqrt{3}}{9}
\end{aligned}
$$

$\boxed{T_2}$

$$T_2 - S = \int_\gamma^\beta f(x)\ dx - \frac{27}{4}$$
$$= \frac{1}{4}\{(\beta^4-\gamma^4) - 2(a+3)(\beta^2-\gamma^2) + 8(\beta-\gamma)\} - \frac{27}{4}$$
$$= -\frac{1}{4}(1-\beta)^3(3+\beta) - \frac{1}{4}(\gamma+2)^2(\gamma^2-4\gamma+6) + \frac{a}{2}(\gamma^2-\beta^2)$$

$1-\beta,\ -\gamma-2$ について, a の式で表す.

$f(1)=(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)=-a,\ \alpha+\beta+\gamma=0,\ \alpha\beta\gamma=-2$ より

$$1-\beta = \frac{-a}{(1-\alpha)(1-\gamma)} = \frac{-a}{1-(\alpha+\gamma)+\alpha\gamma} = \frac{a\beta}{(1-\beta)(2+\beta)}$$

$$\therefore 1-\beta = \sqrt{\frac{a\beta}{\beta+2}} \cdots\cdots (iii)$$

$f(-2)=(-2-\alpha)(-2-\beta)(-2-\gamma)=2a$ より

$$-2-\gamma = \frac{2a}{(2+\alpha)(2+\beta)} \cdots\cdots (iv)$$

$(iii),\ (iv)$ より T_2-S に代入すると,

$$T_2 - S = -\frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{a\beta}{\beta+2}\right)^3}(3+\beta) - \frac{1}{4}\left\{\frac{2a}{(2+\alpha)(2+\beta)}\right\}^2(\gamma^2-4\gamma+6)$$
$$+\frac{a}{2}(\gamma^2-\beta^2)$$

a で割って極限を取ると,

$$\lim_{a\to+0}\frac{T_2-S}{a} = \lim_{a\to+0} -\frac{1}{4}\sqrt{a\left(\frac{\beta}{\beta+2}\right)^3}(3+\beta)$$
$$-\frac{a}{4}\left\{\frac{2}{(2+\alpha)(2+\beta)}\right\}^2(\gamma^2-4\gamma+6) + \frac{\gamma^2-\beta^2}{2}$$
$$= \frac{3}{2}$$

以上より,

$$\lim_{a\to+0}\frac{T_1^2}{(T_2-S)^3} = \lim_{a\to+0}\left(\frac{T_1}{a\sqrt{a}}\right)^2\left(\frac{a}{T_2-S}\right)^3 = \frac{4^2}{27}\cdot\frac{2^3}{3^3} = \frac{128}{729}$$

数学以外

問題 54

1. elephant

   “elephant in the room” とは, その場にいる誰もが知っている, でも誰も口にしたくないような大きな問題のことをいいます. もし象が部屋にいたらと考えてみましょう. 気づかないわけがありません. そのくらい明らかだけど, 口に出しづらい話題, 問題を象にたとえた表現が “elephant in the room” です.

   受験生にはなるべくこの問題文の少年のようになってほしくありませんが, もし失敗してしまった場合は試験の話を “elephant in the room” にしておくほうが気が楽で良いかもしれません.

   “elephant in the room” という表現は, 入試ではあまり出てきませんが, 教養程度に覚えておいても損はないでしょう.

2. broke

   “break the silence” は頻繁に使う表現ですね. 文字通り, “silence” を破る, 静寂をさえぎることを言います. できなかった人はこれを機に覚えておきましょう.