数学 I

≪第 1 問解答≫

余弦定理により，$\cos\angle\mathrm{A}$ を求める．

$$\cos\angle\mathrm{A} = \frac{2+4-3}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

これは鋭角であるとわかる．三角比の関係式から，

$$\sin\angle\mathrm{A} = \sqrt{1-\frac{18}{64}} = \frac{\sqrt{46}}{8}$$

よって，三角形の面積は

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sqrt{4}\sin\angle\mathrm{A} = \frac{\sqrt{23}}{4}$$

≪第 2 問解答≫

$f(x) = x^2 + ax + b$ を平方完成すると $f(x) = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$ となる。つまり、$x = -\frac{a}{2}$ の時最小値を取る。最大値は常に $f(p)$ か $f(p+1)$ のどちらか、または両方のため、$f(p) \geq f(p+1)$、すなわち $p^2+ap+b \geq (p+1)^2 + a(p+1) + b$ を変形すると $0 \geq 2p+1+a$. すなわち $-\frac{a+1}{2} \geq p$

≪第 3 問解答≫

$s^2 - 2st + t^2 + \frac{1}{2t-3}$ を s の二次関数としてみると，

$$s^2 - 2st + t^2 + \frac{1}{2t-3} = (s-t)^2 + \frac{1}{2t-3}$$

となり，$s = t$ の時，最小値となることがわかる．しかし，$t > \frac{3}{2} > s$ なので $s = t$ とはなりえず，軸から最も近い $s = 1$ の時に t の値によらず最小値をとることがわかる．$s = 1$ を代入すると，$1 - 2t + t^2 + \frac{1}{2t-3}$ となる．この式の最小値について考える．

$$t^2 - 2t + 1 + \frac{1}{2t-3} = (t-2)^2 + 2t - 3 + \frac{1}{2t-3}$$

$(t-2)^2$ この部分は，$t=2$ の時に最小値をとる．

$$2t-3+\frac{1}{2t-3} \geq 2\sqrt{(2t-3)\frac{1}{2t-3}} = 2 \quad \left(t > \frac{3}{2}\text{より}\right)$$

等号成立は $2t-3 = \dfrac{1}{2t-3}$ となる時，すなわち，

$$4t^2-12t+9=1 \quad \left(t > \frac{3}{2}\text{より}\right)$$

$$4t^2-12t+8=0$$

$$t^2-3t+2=0$$

$$(t-2)(t-1)=0 \quad \text{よって}, t=2\text{ の時，最小値をとる．}$$

$(t-2)^2$ と $2t-3+\dfrac{1}{2t-3}$ がともに $t=2$ で最小値をとるため，$(t-2)^2 + 2t-3+\dfrac{1}{2t-3}$ は $t=2$ の時に最小値 2 をとる．よって，$(s,t)=(1,2)$ の時，最小値 2 をとる．

≪第 4 問解答≫

$t=x^2$ とする．このとき $0 \leq t \leq n^2$ である．また，与式は $\|\lfloor t \rfloor - t\| = \dfrac{1}{2}$ となる．
ここで，$t \geq \lfloor t \rfloor$ であるからさらに与式は $t - \lfloor t \rfloor = \dfrac{1}{2}$ となる．
したがって $t=(\text{整数})+1/2$ であることが必要十分であり，t は $0 \leq t \leq n^2$ の範囲では $\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}, ..., \dfrac{2n^2-1}{2}$ の n^2 個あり，x も n^2 個ある．$(\because x \geq 0)$

≪第 5 問解答≫

(1) テストでとれる点数は
$0, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 100$ であり $m_A = \mu_A = 50$, 第一四分位数 25, 第三四分位数 75 なので $q_A = 50$, 分散は $50^2 + 2(40^2+35^2+30^2+25^2+20^2+15^2+10^2+5^2)/19 = 800$ なので標準偏差は $s_A = 20\sqrt{2}$

(2) 対称性より $m'_A = \mu'_A = 50$, 64 番目と 65 番目の平均は 65 なので対称性より $q_A = 30$。分散は $(50^2 + 2(4\cdot 40^2 + 4\cdot 35^2 + 6\cdot 30^2 + 16\cdot 25^2 + 10\cdot 20^2 + 24\cdot 15^2 + 25\cdot 10^2 + 20\cdot 5^2))/256 = 325$ なので, $s'_A = 5\sqrt{13}$

(3) $r = \dfrac{64}{\sqrt{13}\cdot 5\sqrt{13}} = \dfrac{64}{65}$

≪第 6 問解答≫

(1) まず，カルノーの定理と呼ばれる定理を証明する．カルノーの定理は以下を主張する．

カルノーの定理

$\triangle ABC$ に対して, $\triangle ABC$ の外接円の中心を O とし，$\triangle ABC$ の外接円，内接円の半径をそれぞれ R, r とし，AB, BC, CA の中点をそれぞれ M_c, M_a, M_b とすると,

$$OM_a + OM_b + OM_c = R + r$$

(ただし OM_a, OM_b, OM_c は符号つきで，辺が三角形の外側にある, つまり中点の対角が $\dfrac{\pi}{2}$ よりも大きいとき負)

(証明)

カルノーの定理は次のように変形できる.

$$R\cos A + R\cos B + R\cos C = R + r$$

したがって $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \dfrac{r}{R}$ を示せばよい.

余弦定理より

$$\begin{aligned}
\cos A + \cos B + \cos C &= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \\
&= 1 + \frac{a(b^2 + c^2 - a^2) + b(a^2 + c^2 - b^2) + c(a^2 + b^2 - c^2) - 2abc}{2abc} \\
&= 1 + \frac{-a^3 + (b+c)a^2 + (b^2 + c^2 - 2bc)a + ac^2 + b^2c - b^3 - c^3}{2abc} \\
&= 1 + \frac{-a^3 + (b+c)a^2 + (b-c)^2a - (b+c)(b-c)^2}{2abc}
\end{aligned}$$

$$= 1 + \frac{\{a^2 - (b-c)^2\}(-a+b+c)}{2abc} (a = b + c \text{ として因数定理を用いた})$$

$$= 1 + \frac{(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)(-a+b+c)}{(a+b+c)2abc}$$

$$= 1 + \frac{16S^2}{(a+b+c)2abc} (\because \text{ ヘロンの公式}, S \text{ は } \triangle ABC \text{ の面積})$$

$$= 1 + \frac{8S^2}{(a+b+c)(4RS)}$$

$(\because$ 正弦定理より $a = 2R\sin\angle A, S = \dfrac{1}{2}bc\sin\angle A$ であるから $abc = 4RS)$

$$= 1 + \frac{2S}{a+b+c} \cdot \frac{1}{R}$$

$$= 1 + \frac{r}{R} \quad (\text{証明終})$$

(この解法は数学 I 範囲での解法だが，傍心の性質を用いる解法 (数学 A) や和積の公式を用いる解法 (数学 II) などいろいろある．証明は読者に任せる．)

円に内接する四角形 $ABCD$ を考える．A, B, C, D はこの順に円周上にあるとする．四角形 $ABCD$ の外接円の中心を O とし，O から AB, BC, CD, DA, AC, BD に下した垂線の符号つき長さをそれぞれ h, i, j, k, l, m とする．正負はカルノーの定理と同じように定める．

l, m に関しては $\triangle ABC$ と $\triangle ABD$ を基準とする．まず, $\triangle ABC$ と $\triangle CDA$ にカルノーの定理を用いると, それぞれの内接円の半径を r_1, r_2 として

$$h + i + l = r_1 + R, j + k - l = r_2 + R$$

$$\therefore r_1 + r_2 = h + i + j + k - 2R$$

次に，$\triangle ABD$ と $\triangle BCD$ にカルノーの定理を用いると，それぞれの内接円の半径を r_3, r_4 とすると

$$h + k + m = r_3 + R, i + j - m = r_4 + R$$

$$\therefore r_3 + r_4 = h + i + j + l - 2R$$

以上から題意は示される．(証明終)

● 補足
カルノーの定理を経由して証明するのはあくまで日本の定理の証明方法の一つである.

(2) 円に内接する五角形 $ABCDE$ を考える．A, B, C, D, E はこの順に円周上にあるとする．五角形 $ABCDE$ の三角形分割の仕方は $(ABC, ACD, ADE), (ABC, ACE, ADE),$ $(ABD, BCD, ADE), (ABE, BCE, CDE), (ABE, BCD, BDE)$ の 5 通りあり，(1) より共通の三角形を持つ組み合わせの内接円の半径の和は等しい．以上より題意は示される．(証明終)

数学 A

≪第 1 問解答≫

操作を 4 回行い，赤と白の玉の個数が同じである確率を p とし，求める確率を q とすれば

$$q = \frac{1}{2}(1-p) \tag{1}$$

である．

以下，箱の中に白玉が x こ，赤玉が y こ入っている状態を (x, y) と表す．

(m, m) から 4 回操作を行い，$(m-2, m-2)$ となる遷移は以下の通り d で

$$\begin{tikzcd}
 & & (m-2,m) \arrow[dr, "b"] & & \\
 & (m-1,m) \arrow[ur, "1-a"] \arrow[dr] & & (m-2,m-1) \arrow[dr, "c"] & \\
(m,m) \arrow[ur, "\frac{1}{2}"] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"'] & & (m-1,m-1) \arrow[ur] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"'] & & (m-2,m-2) \\
 & (m,m-1) \arrow[ur, "\mathrm{a}"] \arrow[dr, "1-a"'] & & (m-1,m-2) \arrow[ur, "c"'] & \\
 & & (m,m-2) \arrow[ur, "b"'] & &
\end{tikzcd}$$

ただし，

$$\begin{aligned}
a &= \frac{{}_{m-1}\mathrm{C}_3 + {}_{m-1}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{m}\mathrm{C}_1}{{}_{2m-1}\mathrm{C}_3} = \frac{(m-2)(4m-3)}{2(2m-1)(2m-3)}, \\
b &= \frac{{}_{m}\mathrm{C}_3 + {}_{m}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{m-2}\mathrm{C}_1}{{}_{2m-3}\mathrm{C}_3} = \frac{m}{2m-3}, \\
c &= \frac{{}_{m-1}\mathrm{C}_3 + {}_{m-1}\mathrm{C}_2 \cdot {}_{m-2}\mathrm{C}_1}{{}_{2m-3}\mathrm{C}_3} = \frac{(m-1)(4m-9)}{2(2m-3)(2m-5)}
\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}
p &= c(1 + ab - a) \\
&= c\{1 + a(b-1)\}
\end{aligned}$$

であり

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2}\Big[1 - c\big\{1 + a(b-1)\big\}\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{(m-1)(4m-9)}{2(2m-3)(2m-5)} \cdot \big\{1 - \frac{(m-2)(4m-3)}{2(2m-1)(2m-3)}\big\}\Big] \\
&= \frac{2^2(2m-1)(2m-3)^3(2m-5) - (m-1)(4m-9)\{2(2m-1)(2m-3)^2 - (m-2)(m-3)(4m-3)\}}{2^3(2m-1)(2m-3)^3(2m-5)} \\
&= \frac{(m-3)(4m-5)(20m^3 - 83m^2 + 105m - 36)}{2^3(2m-1)(2m-3)^3(2m-5)}
\end{aligned}
$$

補足

発想は難しくないが計算はかなり煩雑である．最後まで計算したら小さな n について検算するのを忘れないように.

≪第 2 問解答≫

面積と周の長さが等しい二つの直角三角形 $\triangle ABC(a < b < c), \triangle XYZ(x < y < z)$ が合同であることを示せば良い。

$\angle ACB = \angle XZY = 90^\circ$ とすると、条件より

$ab = xy, a+b+c = x+y+z, a^2+b^2 = c^2, x^2+y^2 = z^2$

が成り立つ。第二式の両辺を 2 乗して第一, 三, 四式を用いると、

$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$

$c^2 + c(a+b) = z^2 + z(x+y)$

$(c-z)(x+y+z) = 0$

$x+y+z \neq 0$ ゆえ $c = z$。

よって $ab = xy, a+b = x+y$ を得る。二式から y を消去して

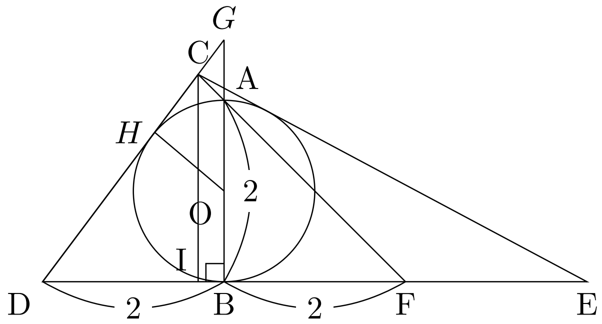
$ab = x(a+b-x)$

$(x-a)(x-b) = 0$

となり大小関係を考えると $(x, y) = (a, b)$ となる。

三辺相等により $\triangle ABC \equiv \triangle XYZ$ であるから題意は示された。

≪第 3 問解答≫



上図のように補助線を引く。$\mathrm{GH}=x$ とおくと、$\triangle\mathrm{GOH}\backsim\triangle\mathrm{GDB}$ から

$$\mathrm{GH}:\mathrm{OH}=\mathrm{GB}:\mathrm{DB}$$
$$x:1=(\sqrt{x^2+1}+1):2$$

これを解いて $x=\dfrac{4}{3}$。

次に $\mathrm{CG}=y$ とおき、$\triangle\mathrm{GBD}$ と直線 CF についてメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{GA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BF}}{\mathrm{FD}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CG}}=1$$
$$\frac{\frac{2}{3}}{2}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{\frac{10}{3}-y}{y}=1$$

これを解いて $y=\dfrac{10}{21}$。

同様にメネラウスの定理を用いると

$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{GD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BF}}=1$$
$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{AC}}\cdot\frac{\frac{10}{21}}{\frac{10}{3}}\cdot\frac{2}{2}=1$$

これを解いて $\mathrm{FA}=7\mathrm{AC}$。よって、$\mathrm{CI}=\mathrm{AB}\cdot\dfrac{8}{7}=\dfrac{16}{7}$ と求まる。

さらに、$\mathrm{EF}=z$ とおいて $\triangle\mathrm{CEI}$ に三平方の定理を用いると

$$\mathrm{CI}^2+\mathrm{IE}^2=\mathrm{CE}^2$$
$$\left(\frac{16}{7}\right)^2+\left(z+\frac{16}{7}\right)^2=(z+2+\mathrm{CH})^2$$
$$\left(\frac{16}{7}\right)^2+\left(z+\frac{16}{7}\right)^2=\left(z+\frac{20}{7}\right)^2$$

これを解いて $z=2$。
以上より、$\triangle\mathrm{CDE}=6\cdot\frac{16}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{48}{7}$

≪第 4 問解答≫

(1) (左辺) $=(3^m+2^n)^2$ なので, m は偶数.

(2) $m=2k$(k は自然数) とすると, $3^n+2^{2k}=5^k$ なので法を 3 として $1\equiv(-1)^k \pmod 3$ であるから k は偶数. よって m は 4 の倍数.

(3) $3^n+4^{2l}=5^{2l}\Leftrightarrow 3^n=(5^l-4^l)(5^l+4^l)$($l$ は自然数) を $5^l-4^l=3^a$, $5^l+4^l=3^{n-a}(0<a<n-a)$ とすると $2\cdot5^l=3^a+3^{n-a}$ なので, 左辺が 3 で割れないので $a=0$. $5^l-4^l=1$ となる. $l>1$ のとき $5^l-4^l>1+4^l-4^l=1$ であるから $l=1$. よって $(m,n)=(4,2)$.

≪第 5 問解答≫

直線 AD と直線 BC の交点を点 O とする扇形 OAB と扇形 ODC は相似。相似比は、AB:DC=3:5。ゆえに、扇形 OAB と扇形 ODC の面積比は 9:25。
OB:OC=3:5、BC=3cm より、OB=$\frac{9}{2}$cm。ゆえに∠ O=$\frac{AB}{4.5\times2\times3.14}\times$ 360° =120°
よって図形 ABCD の面積は、$\frac{9}{2}\times\frac{9}{2}$ ×円周率× $\frac{1}{3}\times\frac{16}{9}$=12 ×円周率> 12 × 3.14=37.68
この時点で、S_1 の面積が 34cm^2 を超えているため、全体の面積は 134cm^2 より大きい。
この問題は、多い条件に惑わされず、最短経路で答えを導き出せるかどうかが肝となる問題だった。

≪第 6 問解答≫

A の外接円の半径を 1 とする。

すると A は、頂角 60°、等辺 1 の二等辺三角形が 6 個集まったものと考えることが出来る。

よって A の面積は、$1 \times 1 \times \dfrac{\surd\ 3}{4} \times 6 = \dfrac{3\ \surd\ 3}{2}$ となる。

このとき、D は外接円の半径が 1 となる、正十二角形である。

D は、頂角 30°、等辺 1 の二等辺三角形が 12 個集まったものと考えることが出来る。

よって D の面積は、$1 \times 1 \times \dfrac{1}{4} \times 12 = 3$ となる。

ゆえに、D の面積は A の面積の $\dfrac{2\ \surd\ 3}{3}$ 倍となる。

≪第 7 問解答≫

(1) $m = 1$ の時、求める確率は $\dfrac{2n}{4n} \cdot \dfrac{2n}{4n-1} = \dfrac{2n}{4n-1}$

(2) 求める確率 S_{2m} は一般に

$${}_{2m}Cm\frac{(2n)(2n-1)\cdots(2n-(m-1))(2n)(2n-1)\cdots(2n-(m-1))}{(4n)(4n-1)\cdots(4n-(2m-1))}$$

$= \dfrac{{}_{2n}C_m^2}{{}_{4n}C_{2m}}$ とあらわすことができる。

$$S_{2(m+1)} = S_{2m}\frac{(2n-m)^2(2m+1)(2m+2)}{(4n-2m)(4n-2m-1)(m+1)^2}$$

よって、$\dfrac{(2n-m)^2(2m+1)(2m+2)}{(4n-2m)(4n-2m-1)(m+1)^2} > 1$ となるところが最小となるはずである。

$$\frac{(2n-m)^2(2m+1)(2m+2)}{(4n-2m)(4n-2m-1)(m+1)^2} > 1$$

$\Rightarrow (2n-m)^2(2m+1)(2m+2) > (4n-2m)(4n-2m-1)(m+1)^2$

$\Rightarrow (2n-m)^2(2m+1)(2m+2) - (4n-2m)(4n-2m-1)(m+1)^2 > 0$

$\Rightarrow -2(m+1)(2n-m)(2n-2m-1) > 0$

$m < -1$ の時 $-2(m+1)(2n-m)(2n-2m-1) > 0$

$-1 < m < n - \dfrac{1}{2}$ の時 $-2(m+1)(2n-m)(2n-2m-1) < 0$

$n - \dfrac{1}{2} < m < 2n$ の時 $-2(m+1)(2n-m)(2n-2m-1) > 0$

$2n > m$ の時 $-2(m+1)(2n-m)(2n-2m-1) < 0$

よって、$m = n$ の時、最小値をとる。

≪第 8 問解答≫

(1) $a \equiv b \pmod p$ より、$a = mp+b$（m は 0 以上の整数、$0 \leq b \leq p-1$）と表すことができる。

$a^p \equiv b^p \pmod p$ であることは明らかである。 ...(a)

$(mp+b)^p = (mp)^p + {}_pC_1(mp)^{p-1}b + \ldots + b^p$ より

$b^p \equiv b$ を示す。 ...(b)

(i) $b = 0$ の時、$a^p \equiv 0 \pmod p$ となるため上の式は成立

(ii) $b = k$ の時成立を仮定

$b = k+1$ の時、$(k+1)^p = k^p + {}_pC_1 k^{p-1} + \ldots + {}_pC_{p-1}k + 1$ ${}_pC_m \equiv 0 \pmod p$ （$1 \leq m \leq p-1$）なので、

$(k+1)^p \equiv k^p + 1 \pmod p \equiv k+1 \pmod p$

よって数学的帰納法より、成り立つ。(a), (b) より、故に題意は示された。

(2) (i) $n = 1$ の時

$p = 2$ の時、m は奇数となるので、$m \equiv 1 \pmod 2$ となる。

$p \neq 2$ の時

$m^{p-1} \equiv l \pmod p$ （$2 \leq l \leq p-1$）と仮定する。

$m^p \equiv ml \pmod p$ であるから、$m^p - m^p \equiv m(l-1) \equiv 0 \pmod p$、$m$ は p と互いに素、かつ $1 \leq l-1 \leq p-2$ なので、$l-1$ と p も互いに素となる。よって、$m(l-1)$ は、p で割り切れず矛盾。

(ii) $n = k$ の時成立を仮定

$n = k+1$ の時

$(m^{p-1})^{p^{k-1}} \equiv 1 \pmod{p^k}$ が成り立つので、$(m^{p-1})^{p^k} = (qp^n + 1)$ と書くことができる。

$(m^{p-1})^{p^k} = ((m^{p-1})^{p^{k-1}})^p = (qp^n)^p + {}_pC_{p-1}(qp^n)^{p-1} + \ldots + {}_pC_1(qp^n) + 1$

${}_pC_m \equiv 0 \pmod p$（$1 \leq m \leq p-1$）なので、$(m^{p-1})^{p^k} \equiv 1 \pmod p$ となる。よって題意は示された。

(3) y は n 個の異なる素数 $\{p_{a_n}\}$ を用いて（$n \geq 1$）
$y = p_{a_1}^{b_1} \cdot p_{a_2}^{b_2} \ldots \cdot p_{a_n}^{b_n}$ と表すことができる。
($\{a_n\}$ は異なる n 個の異なる自然数の集合。$\{b_n\}$ は n 個の自然数の集合。)
(2) より $x^{(p_{a_1}-1)p_{a_1}^{b_1-1}} \equiv 1 \pmod{p_{a_1}^{b_1}}$, $x^{(p_{a_2}-1)p_{a_2}^{b_2-1}} \equiv 1 \pmod{p_{a_2}^{b_2}}$, ..., $x^{(p_{a_n}-1)p_{a_n}^{b_n-1}} \equiv 1 \pmod{p_{a_n}^{b_n}}$ が成り立つ。 ... (a)
$X = x^{(p_{a_1}-1)(p_{a_2}-1)\ldots(p_{a_n}-1)p_{a_1}^{b_1-1}p_{a_2}^{b_2-1}\ldots p_{a_n}^{b_n-1}}$ とおくと、
(a) より
$X \equiv 1 \pmod{p_{a_1}^{b_1}}$, $X \equiv 1 \pmod{p_{a_2}^{b_2}}$, ..., $X \equiv 1 \pmod{p_{a_n}^{b_n}}$ となる。
よって、X は n 個の整数 $\{c_n\}$ を用いて、
$X = c_1 p_{a_1}^{b_1} + 1 = c_2 p_{a_2}^{b_2} + 1 = \ldots = c_n p_{a_n}^{b_n} + 1$ と表すことができる。
より、
$X - 1 = c_1 p_{a_1}^{b_1} = c_2 p_{a_2}^{b_2} = c_n p_{a_n}^{b_n}$ となり、$X - 1$ は $p_{a_1}^{b_1} p_{a_2}^{b_2} \ldots p_{a_n}^{b_n}$ の倍数すなわち y の倍数であるといえる。
よって、$x^{(p_{a_1}-1)(p_{a_2}-1)\ldots(p_{a_n}-1)p_{a_1}^{b_1-1}p_{a_2}^{b_2-1}\ldots p_{a_n}^{b_n-1}} \equiv 1 \pmod{y}$ といえるため、$t = (p_{a_1}-1)(p_{a_2}-1)\ldots(p_{a_n}-1)p_{a_1}^{b_1-1}p_{a_2}^{b_2-1}\ldots p_{a_n}^{b_n-1}$ は x によらず条件を満たすといえる。
よって題意は示された。

数学 II

≪第 1 問解答≫

相加平均・相乗平均の関係より, $\boxed{\text{ア}} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{a} + \dfrac{a}{c} + \dfrac{c}{b} + \dfrac{b}{a} \geqq 6$

$\boxed{\text{イ}} = a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \dfrac{1}{2}\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} \geqq 0$

等号成立は $a = b = c$ の時なので, 最小値は $\begin{cases} \boxed{\text{ア}} : 6 \\ \boxed{\text{イ}} : 0 \end{cases}$

≪第 2 問解答≫

ア	1	イ	2	ウエ	-7
オ	6	カ	3	キ	2
ク	1	ケ	1	コ	2
サ	3	シ	2		

まず，$(a^b)^c = (a^c)^b$ の形に気づいて変形したい．
$4^{\sqrt{-x}} = (2^2)^{\sqrt{-x}} = (2^{\sqrt{-x}})^2$ であるから，もとの方程式は

$$(2^{\sqrt{-x}})^2 + 2^{\sqrt{-x}} - 42 = 0$$

と書き換えられる．さて，$2^{\sqrt{-x}} = X$ とすれば，二次方程式

$$X^2 + X - 42 = 0$$

となり，これの解は $X = -7, 6$ である．
さて，$X = 2^{\sqrt{-x}} > 0$ より，$X = -7$ は除外しなければならない．この原因を一言で表すならば,「指数関数の値域」である．
$X = 6$ と定まったから，$2^{\sqrt{-x}} = 6$ を解く．両辺を底を 2 とする対数をとればよく，

$$\begin{aligned} \sqrt{-x} &= \log_2 6 \\ &= 1 + \log_2 3 \\ x &= -(1 + \log_2 3)^2 \end{aligned}$$

さて，ここで一点注意事項であるが，もし $-x < 0$ であれば $\sqrt{-x}$ は実数でない値となってしまう．そのため，条件 $x < 0$ が必要となるが，ここで得られた値はこれを満たしている．

≪第 3 問解答≫

(1) $m = 1$ の時、$x - 1$ は $x - 1$ で 1 回のみ割り切れる。

$m \geq 2$ の時、

$x^m - 1 = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \ldots + x + 1)$ であることから、

$x^m - 1$ は $x - 1$ で少なくとも 1 回割り切れる。

$(x^{m-1}+x^{m-2}+\ldots+x+1) = Q(x)$ とおくと、$Q(1) > 0$ であり、$Q(1) \neq 0$ である。

よって、$x - 1$ で割ることはできないため、$x - 1$ で 1 回のみ割り切れるといえる。

(2) (1) より、与式 $A(x) = (x-1)^n \cdot P(x)$ ($P(x)$ は $\dfrac{n(n-1)}{2}$ 次式) と変形できる。

与式を微分すると、$A'(x) = n(x-1)^{n-1} \cdot P(x) + (x-1)^n \cdot P'(x)$ となる。

これを $n - 1$ 回繰り返すと、共通因数が $(x - 1)$ でくくれる多項式が現れることがわかる。

つまり、$A^{(n-1)}(x) = (x-1)B(x)$ と表すことができるのである。

係数の和は x に 1 を代入したときの値なので、$A^{(n-1)}(1) = (1-1)B(1) = 0$ となり、0 となることがわかる。

≪第 4 問解答≫

(1) $x^2 + x + 1 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$ であるから，左辺の最小値は $\dfrac{3}{4} > 0$ となる．よって，不等式の解は実数全体.

(2) すべての複素数 z について，$|z| \geq 0$ であるから，不等式の解はすべての複素数.

(3) $x = a+bi$ (a, b は実数) とすると，$x^2+x+1 = (a^2-b^2+a+1)+(2ab+b)i$ となる．これが実数となるのは，虚部が 0 のときであるから，求める条件は $2ab + b = 0$ である．$2ab + b = b(2a+1) = 0$ を解き，

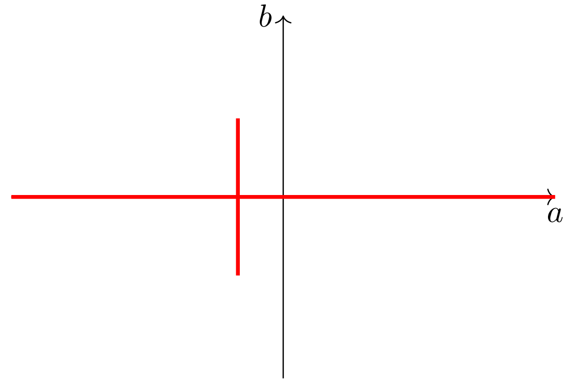
$$\begin{cases} b = 0 \ (x \text{ は実数}) \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

(4) x が実数のときは (1) で確認したから，ここでは x の実部が $-\dfrac{1}{2}$ のときのみ調べる.

$x=-\dfrac{1}{2}+bi$ (b は実数) とする．このとき，$x^2+x+1=-b^2+\dfrac{3}{4}$ となる．不等式 $-b^2+\dfrac{3}{4}\geq 0$ を解けばよく，

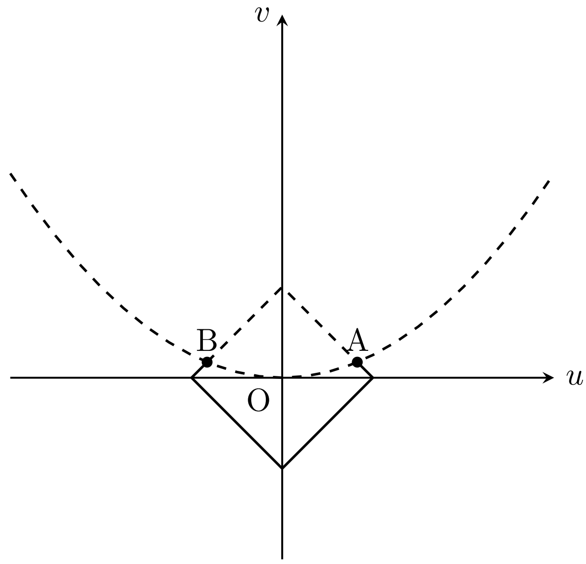
$$b^2 \leq \frac{3}{4}$$
$$|b| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，解 $x=a+bi$ について，(a,b) が満たすのは下図．

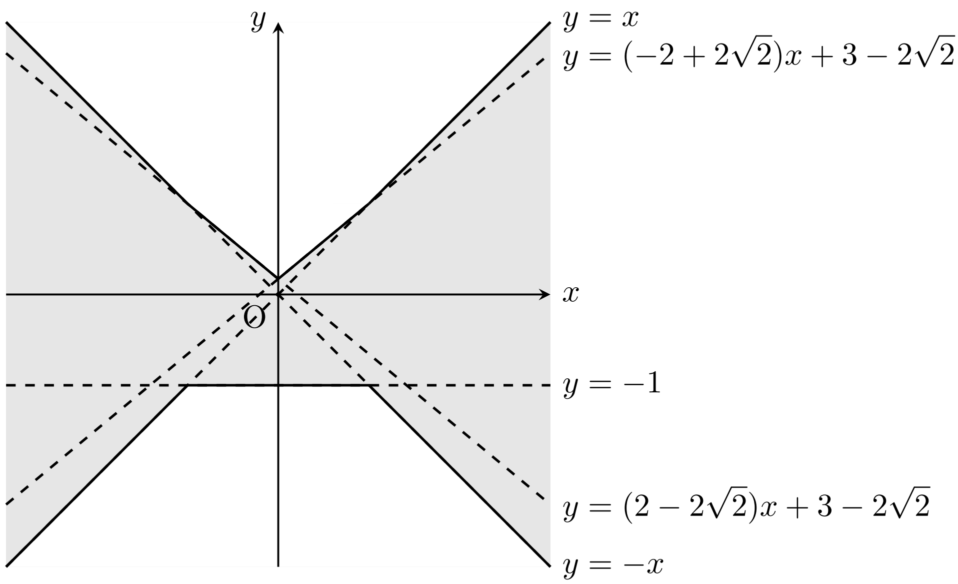


≪第 5 問解答≫

(1) $s+t=u$, $st=v$ と置くと，s,t が実数となる条件は，二次方程式 $x^2-ux+v=0$ が 2 実数解を持つ，すなわちこの二次方程式の判別式が 0 以上，すなわち $\dfrac{u^2}{4}\geqq v$ であり，$|st|+|s+t|=1 \Leftrightarrow |u|+|v|=1$ であるので，uv 平面上に図示すると，



A の座標は $(-2+2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$ であり, B の座標は $(2-2\sqrt{2}, 3-2\sqrt{2})$ また, $y = st-(s+t)x \Leftrightarrow v = xu + y$ なので, 線型計画法を行うことによって, $y = st-(s+t)x$ の通過しうる範囲は,



ただし境界は含む.

$d = \dfrac{|(s+t)\cdot 0 + 1 - st|}{\sqrt{1+(s+t)^2}}$ なので, (1) の直線と点 $(0,1)$ の距離を表

している．よって d の最小値は $y=(-2+2\sqrt{2})x+3-2\sqrt{2}$ と $(0,1)$ の距離 $d_1=\dfrac{|(2\sqrt{2}-2)\cdot 0+1-3+2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+(2\sqrt{2}-2)^2}}=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{13-8\sqrt{2}}}$ と $d_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{2\sqrt{2}-2}{4-2\sqrt{2}}$ のうち小さい方であり，

$$(4-2\sqrt{2})^2-(13-8\sqrt{2})=11-8\sqrt{2}=-\frac{7}{11+8\sqrt{2}}<0$$

なので $d_1<d_2$ であるから，答えは $\dfrac{2\sqrt{2}-2}{\sqrt{13-8\sqrt{2}}}$.

≪第 6 問解答≫

(本解)

$$\begin{aligned}
&(\sin\theta_1+\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_2+\cos\theta_3)^2+\cdots+(\sin\theta_{n-1}+\cos\theta_n)^2+(\sin\theta_n+\cos\theta_1)^2\\
&=(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1)+(\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_2)+\cdots+(\sin^2\theta_{n-1}+\cos^2\theta_{n-1})\\
&\quad+(\sin^2\theta_n+\cos^2\theta_n)+2(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_3+\cdots+\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n\\
&\quad+\sin\theta_n\cos\theta_1)\\
&=n+2K\geq 0
\end{aligned}$$

同様にして

$$\begin{aligned}
&(\sin\theta_1-\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_2-\cos\theta_3)^2+\ldots+(\sin\theta_{n-1}-\cos\theta_n)^2+(\sin\theta_n-\cos\theta_1)^2\\
&=n-2K\geq 0
\end{aligned}$$

したがって

$$\|K\|\leq\frac{n}{2}\qquad\text{(証明終)}$$

(別解)

$$\begin{aligned}\|K\| &= \|\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_3+...+sin\theta_{n-1}\cos\theta_n+\sin\theta_n\cos\theta_1\| \\ &\le \|\sin\theta_1\cos\theta_2\|+\|\sin\theta_2\cos\theta_3\|+...+\|\sin\theta_{n-1}\cos\theta_n\|+\|\sin\theta_n\cos\theta_1\| \\ &\quad (\because \text{三角不等式}) \\ &\le \frac{(\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_2)}{2}+\frac{(\sin^2\theta_2+\cos^2\theta_3)}{2}+\cdots+\frac{(\sin^2\theta_{n-1}+\cos^2\theta_n)}{2} \\ &\quad +\frac{(\sin^2\theta_n+\cos^2\theta_1)}{2} \\ &\quad (\because \text{相加平均・相乗平均の不等式}) \\ &= \frac{n}{2} \quad (\text{証明終})\end{aligned}$$

補足

見た目は異なるが本解も別解もやってることは同じ.

第 7 問解答

(1)　各 $k \in \{1,\cdots,n\}$ を

$$\phi_k = -\theta_k + \sum_{l=1}^{n}\theta_l \tag{2}$$

に代入した各辺を足すことで、

$$\begin{aligned}\sum_{l=1}^{n}\phi_l = -\sum_{l=1}^{n}\theta_l + n\sum_{l=1}^{n}\theta_l = (n-1)\sum_{l=1}^{n}\theta_l \\ \frac{1}{n-1}\sum_{l=1}^{n}\phi_l = \sum_{l=1}^{n}\theta_l \end{aligned} \tag{3}$$

が成り立つ。(2) から (1) を引くことで、

$$\theta_k = -\phi_k + \frac{1}{n-1}\sum_{l=1}^{n}\phi_l \quad (k \in \{1,\cdots,n\})$$

が出せた。

特に $k=1$ のとき、

$$\theta_1 = -\phi_1 + \frac{1}{n-1}\sum_{l=1}^{n}\phi_l$$

となる。

(2)　与式より、

$$\sin\left(\sum_{l=1}^{n}\theta_l\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i-\cos\left(\sum_{l=1}^{n}\theta_l\right)\cdot\sum_{i=1}^{n}\sin\theta_i=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}\left\{\sin\left(\sum_{l=1}^{n}\theta_l\right)\cos\theta_i-\cos\left(\sum_{l=1}^{n}\theta_l\right)\sin\theta_i\right\}=0$$
$$\sum_{i=1}^{n}\sin\left(-\theta_i+\sum_{l=1}^{n}\theta_l\right)=0 \quad \therefore\sum_{i=1}^{n}\sin\phi_i=0 \tag{4}$$

が成立する。

ここで、$\sin\phi_k \leq \dfrac{1}{n-1}$ を満たす $k\in\{1,\cdots,n\}$ が多くとも 1 つだと仮定する。このとき、少なくとも $n-1$ 個の $k\in\{1,\cdots,n\}$ は、$\sin\phi_k > \dfrac{1}{n-1}$ を満たす。なので、

$$\sum_{i=1}^{n}\sin\phi_i>(n-1)\frac{1}{n-1}+(-1)=0$$

が成り立ち、(3) と矛盾する。よって、題意は示された。

(3)　$2m\pi+\dfrac{\pi}{6}<\phi_k<2m\pi+\dfrac{5\pi}{6}$ が成立するような $m\in\mathbb{Z}$ が存在するための必要十分条件は、$\dfrac{1}{2}<\sin\phi_k\leq 1$ である。また、(1) の答えより、どんな $(\phi_1,\cdots,\phi_n)\in\mathbb{R}^n$ に対しても、$\phi_k=-\theta_k+\displaystyle\sum_{l=1}^{n}\theta_l\quad(k\in\{1,\cdots,n\})$ を満たすような $(\theta_1,\cdots,\theta_n)\in\mathbb{R}^n$ が存在するので、求める個数は、「$(\phi_1,\cdots,\phi_n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上で自由に動かしたときに、n 個の実数 $\phi_1,\cdots,\phi_n$ のうち、何個まで、$f(x)=\sin x$ に代入すると、$\dfrac{1}{2}<f(x)\leq 1$ を満たすようにできるか」という個数である。求める個数を M_n 個とする。

《1》　$n=3$ のとき、(2) より、$3-M_3\geq 2$ すなわち、$M_3\leq 1$ である。ここで、

$$\sin\phi_1=\frac{2}{3},\sin\phi_2=\sin\phi_3=-\frac{1}{3}$$

を満たすように $\phi_1,\phi_2,\phi_3\in\mathbb{R}$ をとれるので、$M_3\geq 1\quad\therefore M_3=1$ である。

《2》　$n=3j\quad(j\in\mathbb{N}\setminus\{1\})$ のとき、$\sin\phi_1,\cdots,\sin\phi_{3j}$ のうち、少なくと

も $2j$ 個は $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ に含まれているとすると、

$$\sum_{i=1}^{3j} \sin\phi_i > \frac{1}{2} \cdot 2j + (-1) \cdot j = 0$$

なので、(3) と矛盾する。よって、$M_{3j} < 2j$ が成り立つ。

また、$\phi_1, \cdots, \phi_{3j}$ を

$$\sin\phi_i = \begin{cases} \frac{j+1}{2j+1} \ (1 \leq i \leq 2j-1) \\ -1 \ (2j \leq i \leq 3j) \end{cases}$$

を満たすようにとると、$\dfrac{j+1}{2j+1} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^{3j} \sin\phi_i = 0$ が成り立つので、$M_{3j} \geq 2j-1 \quad \therefore M_{3j} = 2j-1$

《3》 $n = 3j+1 \quad (j \in \mathbb{N})$ のとき、$\sin\phi_1, \cdots, \sin\phi_{3j+1}$ のうち、少なくとも $2j+1$ 個は $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ に含まれているとすると、

$$\sum_{i=1}^{3j+1} \sin\phi_i > \frac{1}{2} \cdot (2j+1) + (-1) \cdot j = \frac{1}{2} > 0$$

なので、(3) と矛盾する。よって、$M_{3j+1} < 2j+1$ が成り立つ。

また、$\phi_1, \cdots, \phi_{3j+1}$ を

$$\sin\phi_i = \begin{cases} \frac{j+1}{2j} \ (1 \leq i \leq 2j) \\ -1 \ (2j+1 \leq i \leq 3j+1) \end{cases}$$

を満たすようにとると、$\dfrac{j+1}{2j} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$ かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^{3j+1} \sin\phi_i = 0$ が成り立つので、$M_{3j+1} \geq 2j \quad \therefore M_{3j+1} = 2j$

《4》 $n = 3j+2 \quad (j \in \mathbb{N})$ のとき、$\sin\phi_1, \cdots, \sin\phi_{3j+2}$ のうち、少なくとも $2j+2$ 個は $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ に含まれているとすると、

$$\sum_{i=1}^{3j+2} \sin\phi_i > \frac{1}{2} \cdot (2j+2) + (-1) \cdot j = 1 > 0$$

なので、(3) と矛盾する。よって、$M_{3j+2} < 2j+2$ が成り立つ。

また、$\phi_1, \cdots, \phi_{3j+2}$ を

$$\sin\phi_i = \begin{cases} \frac{j+1}{2j+1} \ (1 \leq i \leq 2j+1) \\ -1 \ (2j+2 \leq i \leq 3j+1) \end{cases}$$

を満たすようにとると、$\dfrac{j+1}{2j+1} \in \left(\dfrac{1}{2}, 1\right]$ かつ $\displaystyle\sum_{i=1}^{3j+2} \sin\phi_i = 0$ が成り立つので、$M_{3j+2} \geq 2j+1 \quad \therefore M_{3j+1} = 2j+1$

以上より、求める個数は、

$$\begin{cases} 2j-1 \text{ 個 } (n = 3j(j \in \mathbb{N})) \\ 2j \text{ 個 } (n = 3j+1(j \in \mathbb{N})) \\ 2j+1 \text{ 個 } (n = 3j+2(j \in \mathbb{N})) \end{cases}$$

となる。

≪第 8 問解答≫

(1) 相加平均・相乗平均の不等式より $\tan\alpha \geq 2 > \sqrt{3}$ であるから tan の単調性から, $\alpha > \dfrac{\pi}{3}$.

(2) $u^2 - 4v \geqq 0$ より $u = s+t, v = st$ となる実数 s, t が存在し,

$$\frac{u(v+1)}{u^2+v^2-3v+1} = \frac{s+\frac{1}{s}+t+\frac{1}{t}}{\left(s+\frac{1}{s}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)-1}$$

$\tan\theta = s+\dfrac{1}{s}, \tan\phi = t+\dfrac{1}{t}$ とすると $\theta, \phi < \dfrac{\pi}{2}$ とできて, (1) の α を用いて,

$$\frac{u(v+1)}{u^2+v^2-3v+1} = -\tan(\theta+\phi) \leqq -\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$$

$\theta, \phi < \dfrac{\pi}{2}$ より $\theta+\phi < \pi$ なので $0 < \dfrac{u(v+1)}{u^2+v^2-3v+1} \leqq \dfrac{4}{3}$.

数学B

≪第 1 問解答≫

ベクトルならば -1, 実数ならば 1 を返す関数 f を考えると $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ なので

$$f(a_1) \cdot f(a_2) = f(a_2) \cdot f(a_3) = f(a_3) \cdot f(a_1) = f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot f(a_3)$$
$$\Leftrightarrow f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = 1$$

であり全部実数なので

$$a_1 a_2 = a_2 a_3 = a_3 a_1 = a_1 a_2 a_3$$

より $(a_1, a_2, a_3) = (1, 1, 1)$.

≪第 2 問解答≫

まずは 6 人の平均点を求める。

(60+64+64+72+78+82) ÷ 6 = 70

彼らの、自身の得点と平均点の差はそれぞれ、

10,6,6,2,8,12 点となっている。

分散は、これらの 2 乗の平均のため、

(100+36+36+4+64+144) ÷ 6 = 64

標準偏差は、分散の正の平方根のため、√ 64 = 8

よって、82 点の人の、このテストにおける偏差値は、

(82-70) × 10 ÷ 8 + 50 = 65

よってこの人の偏差値は、65。

≪第 3 問解答≫

$$\begin{aligned} a_{2n} &= a_0 + \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{k}{n} - 1\right)^{2n+1} + 1 + \sum_{k=1}^{2n} k \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{k}{n} - 1\right)^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} k + 1 \\ &= \sum_{k=0}^{2n} \left\{\frac{2n-k}{n} - 1\right\}^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} k + 1 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{2n} \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} k + 1 \\
&= -\sum_{k=0}^{2n} \left(\frac{k}{n} - 1\right)^{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} k + 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore 2a_{2n} &= 2\sum_{k=1}^{2n} k + 2 \\
\therefore a_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} k + 1 \\
&= \frac{2n(2n+1)}{2} + 1 \\
&= 2n^2 + 2n + 1 \cdots (\text{答})
\end{aligned}
$$

補足

小さな n で実験してみれば途中から打ち消しあうことがすぐに分かるだろう．あとはそれをどのような方法でもよいから論理の欠陥なく示せればよい．和を逆から足すことは king property と同じようなことであり，”置換和分”の特殊な場合である．置換の仕方では計算が非常に楽になる場合があるのでいろいろためしてみるといつか役に立つかもしれない．

≪第 4 問解答≫

適切に回転移動することにより $\boldsymbol{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となるようにする．

(この際，操作の前後で平面上の図形の形状（面積を含む）が保たれている．)

つぎに，$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とおくと，与式は

$$
\begin{aligned}
y^2=(x^2+y^2)-(x^2+y^2)^2 &\iff (x^2+y^2)^2-x^2=0\\
&\iff (x^2+y^2+x)(x^2+y^2-x)=0\\
&\iff \left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=0
\end{aligned}
$$

したがって与式を満たす点の集合の囲む領域は,
中心 $\left(\frac{1}{2},0\right)$ 半径 $\frac{1}{2}$ の円と，中心 $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ 半径 $\frac{1}{2}$ の円の囲む領域で，面積は
$2\cdot\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{\pi}{2}\cdots$(答)

補足
もう少しだけ図形的に考えてみよう． $\boldsymbol{n}$ は解答と同じようにし, $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角を $\theta(0<\theta<\pi)$ とすると，与式は

$$
\begin{aligned}
|\boldsymbol{r}|^2\cos^2\theta=|\boldsymbol{r}|^2-|\boldsymbol{r}|^4 &\iff |\boldsymbol{r}|=0 \quad \vee \quad \cos^2\theta=1-|\boldsymbol{r}|^2\\
&\iff |\boldsymbol{r}|=0 \quad \vee \quad |\boldsymbol{r}|=\sin\theta
\end{aligned}
$$

知っている人も多いと思うが，極座標において $r=\sin\theta$ や $r=\cos\theta$ は半径 $\frac{1}{2}$ の円を描く．あとは θ の取り方を考えれば答えの予測ができるはずだ.

≪第 5 問解答≫

A_1 は、O と異なる 3 次元空間上のどんな点でも良い。なので、$N=1$ は条件を満たす。また、この A_1 が z 軸の負の部分にあるように x 軸、y 軸、z 軸を定めることができる。以下、この座標系で考える。$\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\cdots$ は O とは異なる点であるので、$\mathrm{A}_m,\mathrm{A}_n(1\leq m<n\leq N)$ が条件ア)、イ）を共に満たすための条件は

$$
\overrightarrow{\mathrm{OA}_m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}<0 \tag{5}
$$

である。

ここで、任意の $n\in\{1,2,\cdots,N\}$ に対して、A_n の座標を (x_n,y_n,z_n)

とする。$x_1=y_1=0, z_1<0$ なので、$n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}_m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_n}<0 &\Longleftrightarrow x_1x_n+y_1y_n+z_1z_n<0\\ &\Longleftrightarrow z_n>0\end{aligned}$$

である。そのため、A_2 は領域 $\{(x,y,z)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z>0\}$ にあれば題意を満たす。なので、$N=2$ は条件を満たす。また、$N\geq 2$ の際を考える際は、$\mathrm{A}_2,\cdots,\mathrm{A}_N$ を領域 $\{(x,y,z)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z>0\}$ に置く必要がある。

今、A_2 が z 軸の正の部分にある場合を考える。この下で、題意を満たすような A_3 があると仮定する。このとき、$x_2=y_2=0, z_2>0$ と (1) より、

$$0\cdot x_3+0\cdot y_3+z_2z_3<0 \qquad \therefore z_3<0$$

が成立するが、これは A_3 が領域 $\{(x,y,z)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z>0\}$ にあることに矛盾する。したがって、$N\geq 3$ の場合は、A_2 が領域 $\{(x,y,z)\mid x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}, z>0\}$ から z 軸の正の部分を除いた部分にある場合を考えなければいけない。

ここで、$N=3$ の場合、

$$\mathrm{A}_1(0,0,-1), \mathrm{A}_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right), \mathrm{A}_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{1}{2}\right)$$

ならば、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=-\frac{1}{2}<0$$

であり、$N=4$ の場合、

$$\mathrm{A}_1(0,0,-1), \mathrm{A}_2\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},0,\frac{1}{3}\right), \mathrm{A}_3\left(-\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{1}{3}\right), \mathrm{A}_4\left(-\frac{\sqrt{2}}{3},-\frac{\sqrt{6}}{3},\frac{1}{3}\right)$$

ならば、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}=-\frac{1}{3}<0$$

なので、$N=3,4$ は条件を満たす。

ここで、今から $N=5$ が条件を満たさないことを示す。これが示せれば、$N\geq 6$ のとき、題意を満たす $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{A}_3,\mathrm{A}_4,\mathrm{A}_5$ が置けないので、N が条件を満たさないと分かる。

題意を満たす $\mathrm{A}_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ があるとする。前述の通り、A_2, A_3, A_4, A_5 が領域 $\{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z > 0\}$ から z 軸の正の部分を除いた部分にある必要がある。この領域は、4 つの領域

$$
\begin{aligned}
D_1 &= \{(x, y, z) \mid x \geq 0, y > 0, z > 0\} \\
D_2 &= \{(x, y, z) \mid x < 0, y \geq 0, z > 0\} \\
D_3 &= \{(x, y, z) \mid x \leq 0, y < 0, z > 0\} \\
D_4 &= \{(x, y, z) \mid x > 0, y \leq 0, z > 0\}
\end{aligned}
$$

に分けることができる。ある $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対し、領域 D_i 内に 2 つ以上点が存在すると仮定する。この時、それらの点の x 座標、y 座標、z 座標は、0 以上か 0 以下かがそれぞれの座標ごとに一致しているので、O を基準とした位置ベクトル同士の内積が 0 以上になる。(1) よりこれは $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5$ が題意を満たすことに矛盾している。したがって、領域 D_1, D_2, D_3, D_4 の 1 つ 1 つに $\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5$ が 1 つずつ入っている。

ここで、任意の $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対し、$\mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5$ のうち、領域 D_i に入っている点を A'$_i(x'_i, y'_i, z'_i)$ とする。(1) より、$\overrightarrow{\mathrm{OA}'_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}'_2}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}'_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}'_3}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}'_3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}'_4}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}'_4} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OA}'_1}$ は全て負なので、

$$
\begin{aligned}
&x'_1x'_2 + y'_1y'_2 + z'_1z'_2 < 0 \\
&x'_2x'_3 + y'_2y'_3 + z'_2z'_3 < 0 \\
&x'_3x'_4 + y'_3y'_4 + z'_3z'_4 < 0 \\
&x'_4x'_1 + y'_4y'_1 + z'_4z'_1 < 0
\end{aligned}
$$

$z'_1, z'_2, z'_3, z'_4 > 0$ なので、

$$
\begin{aligned}
&x'_1x'_2 + y'_1y'_2 < 0 \\
&x'_2x'_3 + y'_2y'_3 < 0 \\
&x'_3x'_4 + y'_3y'_4 < 0 \\
&x'_4x'_1 + y'_4y'_1 < 0
\end{aligned}
$$

となる。任意の $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ に対し、A'_i を xy 平面に射影した点を B_i とすると、この点の座標が $(x'_i, y'_i, 0)$ なので、$\overrightarrow{\mathrm{OB}_1} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}_2}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}_2} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}_3}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}_3} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}_4}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}_4} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}_1}$ は全て負と分かる。それゆえ、

$$
\begin{aligned}
\angle \mathrm{B}_1\mathrm{OB}_2, \angle \mathrm{B}_2\mathrm{OB}_3, \angle \mathrm{B}_3\mathrm{OB}_4, \angle \mathrm{B}_4\mathrm{OB}_1 > 90^\circ \\
\therefore \angle \mathrm{B}_1\mathrm{OB}_2 + \angle \mathrm{B}_2\mathrm{OB}_3 + \angle \mathrm{B}_3\mathrm{OB}_4 + \angle \mathrm{B}_4\mathrm{OB}_1 > 360^\circ \qquad (6)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。　一方、$\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \mathrm{B}_3, \mathrm{B}_4$ は xy 平面上で z 軸の正の部分の点から見て、O を取り囲むように、反時計回りに置かれているので、

$$\angle \mathrm{B}_1\mathrm{OB}_2 + \angle \mathrm{B}_2\mathrm{OB}_3 + \angle \mathrm{B}_3\mathrm{OB}_4 + \angle \mathrm{B}_4\mathrm{OB}_1 = 360^\circ \tag{7}$$

が成り立つ。このとき、(2) と (3) が矛盾する。　ゆえに、題意を満たす $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \mathrm{A}_3, \mathrm{A}_4, \mathrm{A}_5$ が存在しないので、$N \geq 5$ の時、N が条件を満たさないことが分かった。そのため、求める自然数は $N = 1, 2, 3, 4$ である。

≪第 6 問解答≫

第二式を第一式を用いて書き換えると

$$(A_k + A_{k+1} + Ak + 2)^2 + (B_k + B_{k+1} + Bk + 2)^2 = 1$$

第三式を第一式を用いて書き換えると

$$(A_k + A_{k+1})^2 + (B_k + B_{k+1})^2 > 0$$

$A_k = a_{k+1} - a_k$, $B_k = b_{k+1} - b_k$ と置くと

$$\begin{cases} (a_{k+1} - a_k)^2 + (b_{k+1} - b_k)^2 = 1 \\ (a_{k+3} - a_k)^2 + (b_{k+3} - b_k)^2 = 1 \\ (a_{k+2} - a_k)^2 + (b_{k+2} - b_k))^2 > 0 \end{cases}$$

となり, $P_k = (a_k, b_k)$ とすると,

$$\begin{cases} P_kP_{k+1} = 1 \\ P_kP_{k+3} = 1 \\ P_k \neq P_{k+2} \end{cases}$$

なので, $\overrightarrow{P_0P_1} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $\overrightarrow{P_1P_2} = (\cos\beta, \sin\beta)$ と置くと, P_k は k が 1 増えるごとに線分 P_0P_1 と P_1P_2 を辺とする平行四辺形上を反時計回りに回り続けるので, $n = 4m$(m は自然数) とすると $R = \dfrac{1}{2}(\cos\alpha\sin\alpha + \cos\beta\sin\beta)$, また $n = 4m + l(l = 1, 2, 3)$ とすると $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+l} = 1$ であり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=4m+1}^{4m+l} A_kB_k = 0$ であるから, $R = \dfrac{1}{2}(\cos\alpha\sin\alpha + \cos\beta\sin\beta) = \dfrac{1}{4}(\sin 2\alpha + \sin 2\beta)$ なので, $- -\dfrac{1}{2} \leqq R \leqq \dfrac{1}{2}$.

数学 Ⅲ

≪第 1 問解答≫

(1) 置換積分と部分分数分解.

$$\int_0^x \frac{1}{\cos t}dt = \int_0^x \frac{\cos t}{1-\sin^2 t}dt$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\cos t}{1-\sin t} + \frac{\cos t}{1+\sin t}\right)dt$$

ここで，$\sin t = u$ とすると，

$$\int_0^x \frac{1}{\cos t}dt = \frac{1}{2}\int_0^{\sin x}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right)du$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\log|u-1| + \log|u+1|\right]_0^{\sin x}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_0^{\sin x}$$
$$= \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|$$

(2) 双曲線関数 $\cosh x, \sinh x$ を微積分したときの関係を用いて，(1) と同様に積分する.

$$\int_0^x \frac{1}{\cosh t}dt = \int_0^x \frac{\cosh t}{1+\sinh^2 t}dt$$

ここで，$\sinh t = \tan\theta$ とすると，$\sinh x = \tan a$
(すなわち $a = \arctan\sinh x$) として，

$$\int_0^x \frac{1}{\cosh t}dt = \int_0^a d\theta$$
$$= a$$
$$= \arctan\sinh x$$

(3) 実際に逆関数の関係になっていることを確認しよう．

$$
\begin{aligned}
g(f(x)) &= \arctan \sinh\left(\frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|\right) \\
&= \arctan \frac{\sqrt{-\left(\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right)} - \sqrt{-\left(\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right)}}{2} \\
&= \arctan\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}}\right) \\
&= \arctan \tan x \\
&= x
\end{aligned}
$$

となり，示された．

(4) $\dfrac{d}{dx}\tan x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ を利用する．

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cos^3 x} &= \int (\tan x)' \frac{dx}{\cos x} \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \tan x \cdot \frac{\sin x}{\cos^2 x} dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} - \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^3 x} dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \int \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{\cos^3 x}\right) dx \\
&= \frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| - \int \frac{dx}{\cos^3 x}
\end{aligned}
$$

同形出現となり，$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{\sin x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{4}\log\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right| + C$

(5) (4) と同様に，$\dfrac{d}{dx}\tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}$ を利用する．

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\cosh^3 x} &= \int (\tanh x)' \frac{1}{\cosh x} dx \\
&= \tanh x \frac{1}{\cosh x} - \int \frac{-\sinh^2 x}{\cosh^3 x} dx \\
&= \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} - \int \frac{1-\cosh^2 x}{\cosh^3 x} dx \\
&= \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} + \int \frac{dx}{\cosh x} - \int \frac{dx}{\cosh^3 x} \\
&= \frac{\sinh x}{\cosh^2 x} + \arctan \sinh x - \int \frac{dx}{\cosh^3 x}
\end{aligned}
$$

同形出現となり，$\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^3 x} = \frac{\sinh x}{2\cosh^2 x} + \frac{1}{2}\arctan \sinh x + C$

ここで示した解法以外にも様々な方法が使えるであろう．

≪第 2 問解答≫

(1) $f'(x) = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
なので、
$(t^x)' = \displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{t^{x+h} - t^x}{h} = \lim_{h\to 0} t^x \frac{t^h - 1}{h} = t^x \lim_{h\to 0} \lim_{h\to 0} \frac{t^{0+h} - t^0}{h} =$
$t^x t'(0)$
と変形することができる。よって示された。

(2) 指数関数の逆関数は $\log_t x$（$t > 0$） と定義されている。
$(\log_e x)' = g'(x)$ とおくと、

$$g'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\log_e 1 + h - \log_e 1}{h} = \lim_{h\to 0} \log_e (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

逆関数の微分の定義により、

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\frac{dx}{dy}} &= \lim_{h\to 0} \log_e (1+h)^{\frac{1}{h}} \\
\frac{1}{f'(0)} &= \lim_{h\to 0} \log_e (1+h)^{\frac{1}{h}}
\end{aligned}
$$

$$1 = \lim_{h \to 0} \log_e (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

が成り立つ。

$h = \dfrac{1}{n}$ とおくと、

$$1 = \lim_{n \to \infty} \log_e (1 + \frac{1}{n})^n$$
$$e = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

よって、与式は示された。

≪第 3 問解答≫

円錐の頂角を $2\theta \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とすると

$V = \dfrac{1}{3} \cdot \pi(\sin\theta)^2 \cdot \cos\theta$

$S = \pi \sin\theta(\sin\theta + 1)$

$\therefore \dfrac{V}{S} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + 1}$

$f(\theta) = \dfrac{\sin\theta\cos\theta}{\sin\theta + 1}$ とおくと

$f'(\theta) = \dfrac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\sin\theta + 1) - \sin\theta\cos^2\theta}{(\sin\theta + 1)^2}$

$= \dfrac{-\sin^2\theta - \sin\theta + 1}{\sin\theta + 1}$

$= -\dfrac{(\sin\theta - \frac{\sqrt{5}-1}{2})(\sin\theta + \frac{\sqrt{5}+1}{2})}{\sin\theta + 1}$

$\sin\theta$ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において $\sin\theta$ は増加関数で

$0 < \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < \dfrac{3-1}{2} = 1, \dfrac{\sqrt{5}+1}{2} > \dfrac{1+1}{2} = 1$ より $f(\theta)$ の増減は

x	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
f'		$+$	0	$-$	
f	(0)	$\nearrow$		$\searrow$	(0)

(ただし α は $\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ を満たす実数)

したがって $\dfrac{V}{S}$ が最大の時の S の値は
$S=\pi(\sin^2\alpha+\sin\alpha)=\pi\cdots$(答)
$(\because \sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0)$

補足
今回は天頂角をパラメータとしたが，底円の半径など様々なパラメータの置き方があり，問題によって計算量や難易度が変わったりする．（本質的にはすべて同じではあるが...）
f について，$\sin\theta=t$ などと置換しても構わない．この置換により得られる関数は底円の半径をパラメータとしたときに調べることになる関数そのものである．（当たり前）

≪第 4 問解答≫
(1)　$\theta_1,\cdots,\theta_N$ のうち、$[\pi,2\pi)$ に属するものが 2 つ以上あると仮定すると、O の角の和について考えると、$\theta_1+\cdots+\theta_N=2\pi$ であることに矛盾するので、$\theta_1,\cdots,\theta_N$ のうち、$[\pi,2\pi)$ に属するものは存在しないか、唯 1 つ存在する。前者がタイプ①、後者がタイプ② になる。
(2)　$\theta_1\in[\pi,2\pi),\theta_2,\cdots,\theta_N\in(0,\pi)$ としても一般性を失わない。この下で考える。このとき、N 角形の面積を S とすると、

$$S=-\frac{1}{2}\sin(2\pi-\theta_1)+\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2}\sin\theta_k\leq\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2}\sin\theta_k \tag{2.1}$$

である。ここで、$f(x)=\sin x\quad(0<x<\pi)$ とおくと、$0<x<\pi$ で、

$$f'(x)=-\cos x\quad\therefore f''(x)=-\sin x<0$$

なので、凸不等式を用いると、

$$\sum_{k=2}^{N}\frac{1}{2}\sin\theta_k\leq\frac{N-1}{2}\sin\left(\frac{1}{N-1}\sum_{k=2}^{N}\theta_k\right) \tag{2.2}$$

である。ここで、$\theta_1\in[\pi,2\pi),\theta_1+\cdots+\theta_N=2\pi$ なので、

$$0=\frac{1}{N-1}(2\pi-2\pi)<\frac{1}{N-1}\sum_{k=2}^{N}\theta_k\leq\frac{1}{N-1}(2\pi-\pi)=\frac{\pi}{N-1}\left(<\frac{\pi}{2}\right)$$

が成り立ち、$f(x) = \sin x$ の区間 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ での単調性から、

$$0 < \sin\left(\frac{1}{N-1}\sum_{k=2}^{N}\theta_k\right) \leq \sin\frac{\pi}{N-1} \tag{2.3}$$

が成り立つ。

以上 (2.1)(2.2)(2.3) より、

$$S \leq \frac{N-1}{2}\sin\frac{\pi}{N-1}$$

が成り立つ。

(3)　N 角形の面積を (2) と同様に S とすると、

$$S = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{2}\sin\theta_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sin\theta_k \tag{3.1}$$

が分かる。ここで、$\theta_1, \cdots, \theta_N \in (0, \pi)$ と $f''(x) < 0 \quad (0 < x < \pi)$ から、

$$\sum_{k=1}^{N}\sin\theta_k \leq N\sin\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\theta_k\right) = N\sin\frac{2\pi}{N} \tag{3.2}$$

が成り立つ。等号成立条件は、$\theta_k = \dfrac{2\pi}{N} \quad (k = 1, \cdot, N)$ のとき。このとき、N 角形は外接円の半径が 1 の正 N 角形になる。

以上 (3.1)(3.2) より、

$$S \leq \frac{N}{2}\sin\frac{2\pi}{N}$$

で、等号成立条件は、N 角形が外接円の半径が 1 の正 N 角形であることである。よって、求める N 角形はこれである。

(4)　任意の 3 以上の自然数 N に対して、

$$\frac{N-1}{2}\sin\frac{\pi}{N-1} < \frac{N}{2}\sin\frac{2\pi}{N} \tag{4.1}$$

が成り立つことを示せば、外接円の半径が 1 の正 N 角形でなければ、タイプ①、タイプ② を問わず、面積が外接円の半径が 1 の正 N 角形の面積未満と言えるので、以下、任意の 3 以上の自然数 N に対して、(4.1) を示す。

$N=3$ のとき、

$$(\text{左辺})=1 \quad (\text{右辺})=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

なので、(4.1) は成り立つ。

$N \geq 4$ のとき、

$$0<2\leq\frac{N}{2}<N-1 \quad \therefore 0<\frac{\pi}{N-1}<\frac{2\pi}{N}\leq\frac{\pi}{2} \quad \therefore 0<\sin\frac{\pi}{N-1}<\sin\frac{2\pi}{N}$$

なので、

$$\frac{N-1}{2}\sin\frac{\pi}{N-1}<\frac{N}{2}\sin\frac{N-1}{2}<\frac{N}{2}\sin\frac{2\pi}{N}$$

よって、(4.1) が示せた。

以上より、求める N 角形は外接円の半径が 1 の正 N 角形である。

≪第 5 問解答≫

A の対称性より, 蝋燭は極座標の動径方向に中心から d 離れた方向に刺したとしてよい. よって $0\leqq\theta\leqq\pi$ のとき $r'\geqq 0$ であり, $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき $r'\leqq 0$

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= 1+\int_0^{\pi}\frac{r'(\theta)}{r(\theta)}d\theta-\int_{\pi}^{2\pi}\frac{r'(\theta)}{r(\theta)}d\theta \\
&= 1+[\log(r(\theta))]_0^{\pi}-[\log(r(\theta))]_{\pi}^{2\pi} \\
&= 1+2\log(r(\pi))-2\log(r(0)) \\
&= 1+2\log(1+d)-2\log(1-d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A\geqq\frac{1}{3} &\Leftrightarrow A^{-1}\leqq 3 \\
&\Leftrightarrow \log(1+d)-\log(1-d)\leqq 1 \\
&\Leftrightarrow \frac{1+d}{1-d}\leqq e \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{1-d}\leqq 1+e \\
&\Leftrightarrow \frac{2}{1+e}\leqq 1-d \\
&\Leftrightarrow \frac{e-1}{e+1}\geqq d
\end{aligned}$$

よって面積は $\dfrac{\pi(e-1)^2}{(e+1)^2}$

≪第 6 問解答≫

(1) $0<x<\pi$ において $f(x)=(\sin x)^{\cos x}=e^{(\cos x)(\log \sin x)}$ より

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^{(\cos x)(\log \cos x)}\{(\cos x)(\log \sin x)\}' \\
&= e^{(\cos x)(\log \cos x)}\left\{(-\sin x)\log \sin x+\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right\}
\end{aligned}
$$

ここで，$0<x<1$ において

$$0<\sin x<1, 0\leq \cos^2 x, \log \sin x\leq 0$$

であるから $0<x<\pi$ において $f'(x)\geq 0$(等号は $x=\dfrac{\pi}{2}$ の時のみ)
また，$f(0)=0, \displaystyle\lim_{x\to\pi-0} f(x)=\infty$ であるから
$f(x)=\dfrac{1}{2}$ は $0<x<\pi$ においてただ一つの解を持つ.
補足
もちろん対数微分法を用いてよい．真数が 0 となる場合を除外するのを忘れないように.
「ある区間において $f(x)=0$ の解がただ一つ存在する」ことを示すには, その区間において $f(x)$ が単調であり区間の両端の正負が異なっていれば”十分”である．=0 でなくても同様である．一部の問題では区間内全体で単調ではないことがあるかもしれないが，解を持つ単調な区間とそれ以外で場合分けし，”それ以外”の区間では解を持たないことを示せばよい．また，中間値の定理は「その区間内において（少なくとも一つ）解を持つ」ことを主張するものであり，単体では解の個数を具体的に調べる際には利用できないことに注意してほしい.

(2) $f(x)$ は $0<x<\pi$ において連続であるから
$f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)<\dfrac{3}{2}<f\left(\dfrac{5}{6}\pi\right)$ つまり $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}}<\dfrac{3}{2}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}$ であることを示せばよい.

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{\sqrt{2}}{2}} = 2^{\frac{\sqrt{2}}{4}} < 2^{\frac{2}{4}} < \frac{3}{2}$$
$$\left(\because \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^2 = 2 < \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2\right)$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2^{\frac{\sqrt{3}}{2}} > 2^{\frac{2}{3}} > \frac{3}{2}$$
$$\left(\because \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} > \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right), \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^3 = 4 > \frac{27}{8} = \left(\frac{3}{2}\right)^3\right)$$
よって示された.

補足

値を代入するところまでは特に問題もないだろう．問題となるのは”無理数乗の評価”である．一般的に無理数の評価をするにはふさわしい関数や積分による，または図形的な評価をするしかないが，平方根や立方根はそれぞれ二乗，三乗すれば比較的簡単な評価に持ち込むことができる．また $x^{\frac{b}{a}}$ (x は有理数，a, b は 0 でない整数) を評価する際は b 乗すればただの有理数の評価に帰着できる．本設問はさまざな別解が考えられる．考えてみよう．

≪第 7 問解答≫

$f(x) = -k \cdot e^{-x} + l \cdot \dfrac{1}{x}$ より

$f'(x) = k \cdot e^{-x} - l \cdot \dfrac{1}{x^2}$ であり，

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = -\infty, \lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$ であるから求める条件は

$$\exists x > 0, f'(x) > 0 \iff \exists x > 0, x^2e^{-x} > \frac{l}{k} \quad \cdots (*)$$

$g(x) = x^2e^{-x} (x > 0)$ とおくと

$g'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = -x(x-2)e^{-x}$

よって $g(x)$ の増減表は以下の通り

x	(0)	$\cdots$	2	$\cdots$	(∞)
g'		$+$	0	$-$	
g	$(-\infty)$	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	(0)

$\therefore (*) \iff \dfrac{l}{k} \leq \dfrac{4}{e^2} \cdots$(答)

補足

答えと同値な条件式であれば構わない.

（定義域内でなめらかな微分できる関数に）極大値（極小値）が存在する条件は「微分した関数に符号が正から負 (負から正) になる区間があること」ということを習ったであろう.

解答四行目において定数分離をしている．この際，$x^{-2}e^x$ を微分するより x^2e^{-x} を微分するほうが楽という意識をもって変形している．変形後にする操作がわかっているならばその操作が楽になるように変形する意識を大切にしよう.

≪第 8 問解答≫

$$a_n = \int_0^{2n\pi} |e^{-x} - \sin x| dx \quad (n \in \mathbb{N})$$

とおくときの

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n}$$

を求める。

ここで、

$$b_k = \int_{(2k-2)\pi}^{2k\pi} |e^{-x} - \sin x| dx \quad (k \in \mathbb{N}) \tag{8}$$

とおく。今から、$(2k-2)\pi \leq x \leq 2k\pi$ での $y = e^{-x}$ と $y = \sin x$ のグラフの上下関係について考える。

$(2k-2)\pi \leq x \leq (2k-1)\pi$ の区間では、$y = e^{-x}$ は下に凸、$y = \sin x$ は上に凸のグラフであり、

$$\begin{cases} (0 =) \sin{(2k-2)\pi} < e^{-(2k-2)\pi} \\ e^{-\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi} < \sin\left(2k-\frac{3}{2}\right)\pi (= 1) \\ (0 =) \sin{(2k-1)\pi} < e^{-(2k-1)\pi} \end{cases}$$

であるため、区間 $[(2k-2)\pi, (2k-1)\pi]$ で、$(2k-2)\pi \leq x \leq 2k\pi$ での $y = e^{-x}$ と $y = \sin x$ のグラフは 2 つ共有点を持ち、その x 座標を小さい順に α_k, β_k とおくと、

$$(2k-2)\pi < \alpha_k < \left(2k - \frac{3}{2}\right)\pi, \left(2k - \frac{3}{2}\right)\pi < \beta_k < (2k-1)\pi \quad (9)$$

であり、

$$\begin{cases} e^{-x} \geq \sin x \; ((2k-2)\pi \leq x \leq \alpha_k) \\ e^{-x} \leq \sin x \; (\alpha_k \leq x \leq \beta_k) \\ e^{-x} \geq \sin x \; (\beta_k \leq x \leq (2k-1)\pi) \end{cases}$$

となる。　また、$(2k-1)\pi \leq x \leq 2k\pi$ の区間では、

$$e^{-x} \geq 0 \geq \sin x \quad \therefore e^{-x} \geq \sin x$$

となる。

以上から、

$$\begin{aligned} b_k &= \int_{(2k-2)\pi}^{\alpha_k} (e^{-x} - \sin x)dx + \int_{\alpha_k}^{\beta_k} (\sin x - e^{-x})dx + \int_{\beta_k}^{2k\pi} (e^{-x} - \sin x)dx \\ &= \Big[-e^{-x} + \cos x\Big]_{(2k-2)\pi}^{\alpha_k} + \Big[e^{-x} - \cos x\Big]_{\alpha_k}^{\beta_k} + \Big[-e^{-x} + \cos x\Big]_{\beta_k}^{2k\pi} \\ &= (-e^{-\alpha_k} + \cos\alpha_k + e^{-(2k-2)\pi} - 1) + (e^{-\beta_k} - \cos\beta_k - e^{-\alpha_k} + \cos\alpha_k) \\ &+ (-e^{-2k\pi} + 1 + e^{\beta_k} - \cos\beta_k) \\ &= e^{-(2k-2)\pi} - e^{-2k\pi} - 2e^{-\alpha_k} + 2e^{-\beta_k} + 2\cos\alpha_k - 2\cos\beta_k \end{aligned}$$

となる。

ここで、(2) より、

$$e^{-(2k-1)\pi} < e^{-\alpha_k} < e^{-(2k-2)} \quad e^{-(2k-1)\pi} < e^{-\beta_k} < e^{-(2k-2)}$$

となる。また、(2) と、「$0<x<1$ ならば、$x<\sqrt{x}$ となる」ことと、「$y=e^{-x}$ と $y=\sin x$ のグラフは 2 つ共有点を持ち、その x 座標を小さい順に α_k,β_k とおいた」ことから、

$$\cos\alpha_k=\sqrt{1-\sin^2\alpha_k}=\sqrt{1-e^{-2\alpha_k}}>1-e^{-2\alpha_k}>1-e^{-(4k-4)}$$
$$\therefore 1-e^{-(4k-4)}<\cos\alpha_k\leq 1$$

と

$$-\cos\beta_k=\sqrt{1-\sin^2\beta_k}=\sqrt{1-e^{-2\beta_k}}>1-e^{-2\beta_k}>1-e^{-(4k-4)}$$
$$\therefore 1-e^{-(4k-4)}<-\cos\beta_k\leq 1$$

が分かる。

したがって、

$$\begin{aligned}-e^{-2k\pi}+2e^{-(2k-1)\pi}-e^{-(2k-2)\pi}-4e^{-(4k-4)\pi}+4&\leq b_k\\ \leq -e^{-2k\pi}-2e^{-(2k-1)\pi}+3e^{-(2k-2)\pi}+4& \qquad (10)\end{aligned}$$

が成り立つ。

ここで、(1) より、

$$\sum_{k=1}^{n}b_k=\int_0^{2n\pi}|e^{-x}-\sin x|dx=a_n$$

であり、任意の $a>0$ と $r\in[0,1)$ に対して、

$$\sum_{k=1}^{n}ar^k=\frac{ar(1-r^n)}{1-r}\quad\therefore 0\leq\sum_{k=1}^{n}ar^k\leq\frac{ar}{1-r}$$

が成り立つので、(3) の各辺に $k=1,2,\cdots,n$ を代入したものの辺々を足し合わせることを考えると、

$$R_1+4n\leq a_n\leq R_2+4n\quad(n\in\mathbb{N})$$

を満たす $R_1,R_2\in\mathbb{R}$ が存在することが分かる。

$$4+\frac{R_1}{n}\leq\frac{a_n}{n}\leq 4+\frac{R_2}{n}$$

であり、

$$\lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{R_1}{n}\right)=4 \quad \lim_{n\to\infty}\left(4+\frac{R_2}{n}\right)=4$$

なので、はさみうちの原理より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4$$

が出せた。

別解 [チェザロ平均]

[(3) の導出までは同じ]

$k\to\infty$ で、(3) の左辺と右辺は共に 4 に収束するので、

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 4$$

が成り立つ。

$\varepsilon>0$ を任意にとる。このとき、ある $N_\varepsilon\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ が存在して、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、

$$n\geq N_\varepsilon \Longrightarrow |b_n-4|\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。

また、ある $M_\varepsilon\in\mathbb{N}$ が存在して、

$$\frac{2}{\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}|b_k-4|<M_\varepsilon \quad \therefore \frac{1}{M_\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon}|b_k-4|<\frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ。

よって、$K_\varepsilon=\max\{N_\varepsilon,M_\varepsilon\}$ とおくと、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対して、$n\geq K_\varepsilon$ のとき、

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{n}-4\right|&=\frac{1}{n}|a_n-4|=\frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}(b_k-4)\right|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|b_k-4|\\&=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon-1}|b_k-4|+\frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon}^{n}|b_k-4|\\&=\frac{M_\varepsilon}{n}\cdot\frac{1}{M_\varepsilon}\sum_{k=1}^{N_\varepsilon-1}|b_k-4|+\frac{1}{n}\sum_{k=N_\varepsilon}^{n}|b_k-4|\\&<\frac{M_\varepsilon}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}+\frac{n-M\varepsilon+1}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\leq\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\end{aligned}$$

が成り立つ。以上より、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=4$$

が出せた。

第 9 問

求める領域を D とする。$z\in\mathbb{C}$ に対して、

$$\begin{aligned}z\in D &\iff \text{「}|(\alpha-1)z+\alpha|=2|z|-|z+1| \text{ かつ } |\alpha|=1 \text{ を満たす} \alpha\in\mathbb{C} \text{ が存在する」}\\ &\iff \text{「}|\alpha(z+1)-z|+|z+1|=2|z| \text{ かつ } |\alpha|=1 \text{ を満たす} \alpha\in\mathbb{C} \text{ が存在する」}\end{aligned}$$

が成り立つ。

ここで、$z=0$ とすると、$|\alpha|=1$ の下で、

$$|\alpha(z+1)-z|+|z+1|=2 \quad 2|z|=0$$

なので、$z\notin D$。

以下、$z\neq 0$ の下で考える。このとき、

$$|\alpha(z+1)-z|+|z+1|=2|z| \iff \left|\alpha\frac{z+1}{z}-1\right|+\left|\frac{z+1}{z}\right|=2$$

なので、

$$\begin{aligned}z\in D &\iff \text{「}|\alpha(z+1)-z|+|z+1|=2|z| \text{ かつ } |\alpha|=1 \text{ を満たす} \alpha\in\mathbb{C} \text{ が存在する」}\\ &\iff \text{「}\left|\alpha\frac{z+1}{z}-1\right|+\left|\frac{z+1}{z}\right|=2 \text{ かつ } |\alpha|=1 \text{ を満たす} \alpha\in\mathbb{C} \text{ が存在する」}\\ &\iff \text{「}\left|\alpha\frac{z+1}{z}-1\right|+\left|\alpha\frac{z+1}{z}\right|=2 \text{ かつ } |\alpha|=1 \text{ を満たす} \alpha\in\mathbb{C} \text{ が存在する」}\end{aligned}$$

が成り立つ。

ここで、

$$\left|\alpha\frac{z+1}{z}-1\right|+\left|\alpha\frac{z+1}{z}\right|=2 \iff \text{「複素数平面上で点} \alpha\frac{z+1}{z} \text{が方程式 } |z-1|+|z|=2 \text{ で表せられる楕円上にある」}$$

が成り立ち、α が $|\alpha|=1$ を満たしながら変化するとき、複素数平面上で点 $\alpha\dfrac{z+1}{z}$ は、中心 0、半径 $\left|\dfrac{z+1}{z}\right|$ の円上をくまなく動くので、方程式

$|z-1|+|z|=2$ で表せられる楕円を E とすると、

$$z \in D \Longleftrightarrow \text{「}\left|\alpha\frac{z+1}{z}-1\right|+\left|\alpha\frac{z+1}{z}\right|=2 \text{ かつ } |\alpha|=1 \text{ を満たす} \alpha \in \mathbb{C} \text{ が存在する」}$$

$$\Longleftrightarrow \text{「楕円 } E \text{ 上に、点 } 0 \text{ からの距離が } \left|\frac{z+1}{z}\right| \text{ である点が存在する」}$$

が成立する。

楕円 E は、座標平面上で、焦点が $(0,0),(2,0)$ で、「距離の和」が 2 の楕円なので、方程式 $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{4}{3}y^2=1$ で表せられる。なので、楕円 E 上の任意の点 P は

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2}+\cos\theta, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

で表せられる。このとき、O$(0,0)$ とすると、

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\cos\theta\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}(2+\cos\theta)^2}=\frac{1}{2}(2+\cos\theta)$$

なので、OP は、$\frac{1}{2} \leq \mathrm{OP} \leq \frac{3}{2}$ の範囲をくまなく動く。ゆえに、

$$z \in D \Longleftrightarrow \text{「楕円 } E \text{ 上に、点 } 0 \text{ からの距離が } \left|\frac{z+1}{z}\right| \text{ である点が存在する」}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2} \leq \left|\frac{z+1}{z}\right| \leq \frac{3}{2}$$

$$\Longleftrightarrow |z| \leq 2|z+1| \leq 3|z| \quad (\because z \neq 0)$$

$$\Longleftrightarrow |z|^2 \leq 4|z+1|^2 \leq 9|z|^2 \quad (\because \text{各辺正})$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4|z+1|^2-|z|^2 \geq 0 \\ 9|z|^2-4|z+1|^2 \geq 0 \end{cases}$$

が成り立つ。

ここで、

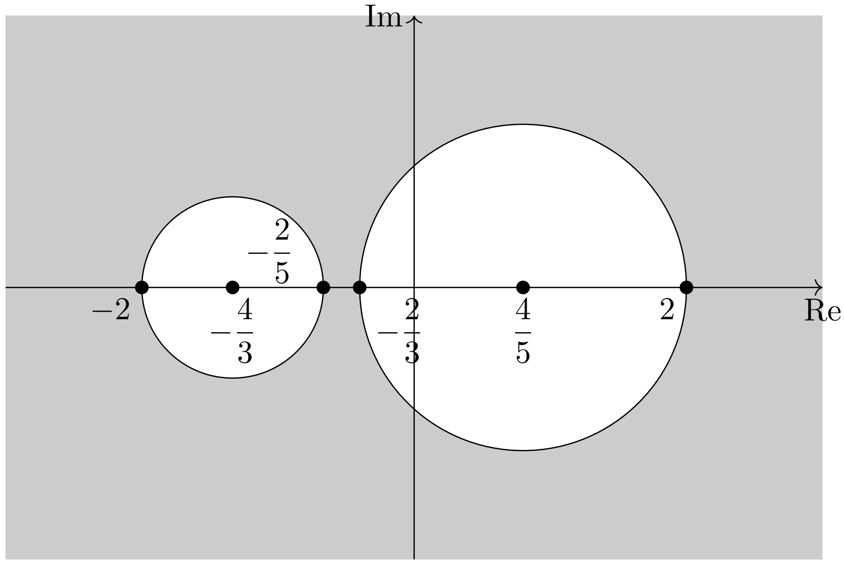
$$\begin{aligned}4|z+1|^2-|z|^2\geq 0 &\iff 4(z+1)\overline{(z+1)}-z\overline{z}\geq 0\\ &\iff 4(z+1)(\overline{z}+1)-z\overline{z}\geq 0\\ &\iff 3z\overline{z}+4z+4\overline{z}+4\geq 0\\ &\iff 3\left|z+\frac{4}{3}\right|^2\geq\frac{4}{3}\\ &\iff \left|z+\frac{4}{3}\right|^2\geq\frac{4}{9}\\ &\iff \left|z+\frac{4}{3}\right|\geq\frac{2}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}9|z|^2-4|z+1|^2\geq 0 &\iff 9z\overline{z}-4(z+1)\overline{(z+1)}\geq 0\\ &\iff 9z\overline{z}-4(z+1)(\overline{z}+1)\geq 0\\ &\iff 5z\overline{z}-4z-4\overline{z}-4\geq 0\\ &\iff 5\left|z-\frac{4}{5}\right|^2\geq\frac{36}{5}\\ &\iff \left|z-\frac{4}{5}\right|^2\geq\frac{36}{25}\\ &\iff \left|z-\frac{4}{5}\right|\geq\frac{6}{5}\end{aligned}$$

が成り立つので、

$$\begin{aligned}z\in D &\iff \begin{cases}4|z+1|^2-|z|^2\geq 0\\ 9|z|^2-4|z+1|^2\geq 0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}\left|z+\dfrac{4}{3}\right|\geq\dfrac{2}{3}\\ \left|z-\dfrac{4}{5}\right|\geq\dfrac{6}{5}\end{cases}\end{aligned}$$

である。この条件は、$z\neq 0$ を満たすので、求める領域は結局、$\left|z+\dfrac{4}{3}\right|\geq\dfrac{2}{3}$ かつ $\left|z-\dfrac{4}{5}\right|\geq\dfrac{6}{5}$ であり、以下の図の表す領域となる。



(境界を含む)

学コン

≪第 1 問解答≫

与式の mod3 を取ると、

$(-1)^a$+$(-1)^b$=$(-1)^c$+1

ここから

c=偶数なら、a と b の偶奇は一致

c=奇数なら、a と b の偶奇は不一致

とわかる。

同じく mod4 を取ると、

0+$(-1)^b$=$(-1)^c$+0

ここから、b と c の偶奇は一致とわかる。

同じく mod5 を取ると、

0+3^b=1+$(-1)^d$

3^b は 0 ではないため、d は偶数となり、$3^b \equiv 2$

$3^b \equiv 2$ より、b は 4 の倍数 +3 と表せる。すなわち奇数である。

以上より、(a,b,c,d)=(偶数, 奇数, 奇数, 偶数) となる。

$a = 2s, d = 2t(s, t$ は自然数) とすると、与式は

$400^s + 23^b = 11^c + 16^t$

と書き換えることができる。

ここで mod8 を取ると、

0+$(-1)^b$=3^c+0

b は奇数より、$(-1)^b$=-1

c は奇数より、$3^c \equiv 3$

よって矛盾が生じるため、与式を満たす組 (a, b, c, d) は存在しない。

≪第 2 問解答≫

(1)

まず，$\lfloor\sqrt{a}\rfloor = k$ とおく．(k は整数) このとき，$4 \leq a$ であるから $2 \leq k$ である．また，ガウス記号の定義より $k \leq \sqrt{a} < k+1$ が成立し 各辺が正であることに注意して各辺を二乗すると $k^2 \leq a < (k+1)^2$となる．ここで，a は整数であるから, さらに $k^2 \leq a \leq k^2+2k$ となる．したがって

$(2\lfloor\sqrt{a}\rfloor)^2 - 2a \geq 4k^2 - 2(k^2+2k) = 2k(k-2) \geq 0(\because 2 \leq k)$

$4a - (2\lfloor\sqrt{a}\rfloor)^2 \geq 4k^2 - 4k^2 = 0$ より与式は示される（証明終）

(2)

$h = \sqrt{a+\sqrt{n}} + \sqrt{a-\sqrt{n}}$とおくと，$h^2 = 2a + 2\sqrt{a^2-n}$となる．ここで $0 \leq n \leq a^2$より a^2-n は 0 以上 a^2以下のすべての整数値を取ることができるので$\sqrt{a^2-n}$は 0 以上 a 以下のすべての整数値を取ることができ，h^2は $2a$ 以上 $4a$ 以下のすべての偶数の整数値を取ることができる．また，(1) より $4 \leq a$ に対して $2a$ 以上 $4a$ 以下に必ず偶数の平方数が存在する．したがって $4 \leq a$ の場合は示された．$a = 1$ の場合，$n = 0$ とすれば $h = 2$ となり，$a = 2$ の場合，$n = 4$ とすれば $h = 2$ となり存在性がわかる (証明終)

補足

(1) の下からの評価は最も厳しく，今回模範解答で用いた手法以外では少なくない範囲での個別の確認が要求されてしまう．ガウス記号の不等式評価はは良く問われるので忘れないようにしよう．また，$a < (k+1)^2 = k^2+2k+1$ から $a \leq k^2+2k$ とする操作は盲点となりやすいので注意しよう．

≪第 3 問解答≫

$x^n - a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}a_{n-1}x + (-1)^n a_n = 0$

この方程式の係数 a_m $(1 \leq m \leq n)$ は、解と係数の関係から、n 個の解の中から m 個の異なる解の組み合わせを選び、その積を求め、それをすべての組み合わせについて行い、求めた積の総和であることがわかる。$(\ldots(\mathrm{a}))$

解を $x_1, x_2, \ldots, x_n$ とおく。

(i) $m = 1$ の時、

問題文と (a) から、

$a_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1$ となることがわかり成立。

(ii) $m = k$ の時成立を仮定

$m = k + 1$ の時、

$x_1 + x_2 + \ldots + x_n < 1$ より、$\dfrac{1}{k!} > a_k > (x_1 + x_2 + \ldots + x_n)a_k = (k+1)x_1x_2 \ldots x_{k+1} + (k+1)x_1x_3 \ldots x_{k+2} + \ldots + (k+1)x_{n-k} \ldots x_n + D$

(D は 2 乗となる項 (例えば、$x_1^2x_2 \ldots x_n$) を含む項をまとめたもの)

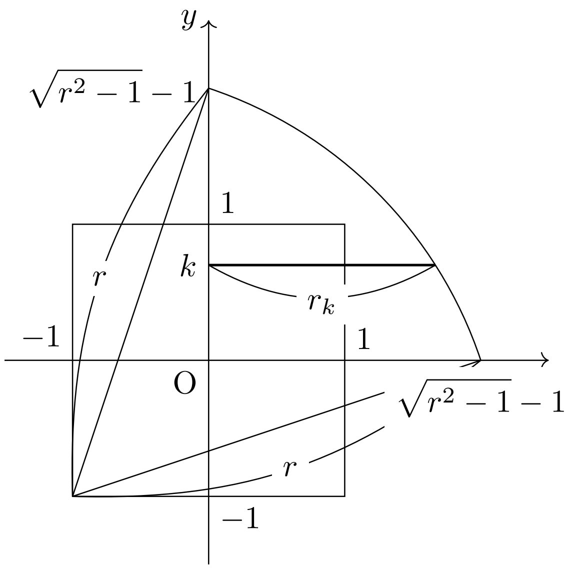
定義、x が正の実数であることから D は、正の実数の和となるので $D > 0$ といえる。

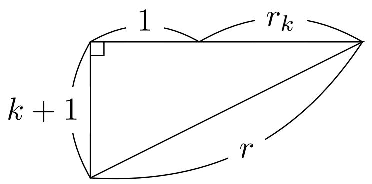
よって $\dfrac{1}{k!} > (k+1)a_{k+1} + D > (k+1)a_{k+1} \Rightarrow \dfrac{1}{(k+1)!} > a_{k+1}$ より成立。

(i)(ii) より、数学的帰納法により、題意は示された。

≪第 4 問解答≫

円柱の両底面の直径を含む平面を考える。円柱部分は一辺 2 の正方形になる。この平面上で点 P の動きうる領域は、正方形の各頂点を中心とする半径 r の円の共通部分である。この部分を y 軸回転させたものの体積が求めたい体積 V である。第一象限を考える。$y=k\left(0 \leqq k \leqq \sqrt{r^2-1}\right)$ の部分の長さを r_k とすると、$\dfrac{V}{2}=\displaystyle\int_0^{\sqrt{r^2-1}-1} r_k^2 \pi dk$





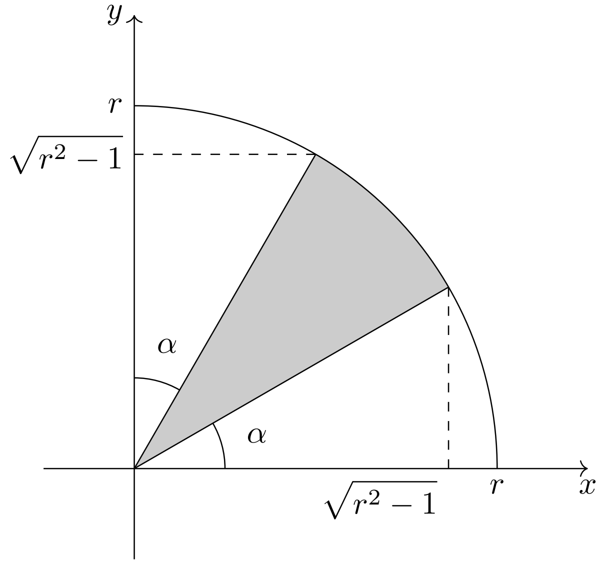
ここで $(r_k+1)^2+(k+1)^2=r^2 \quad 0 \leqq r_k+1$ より $r_k=-1+\sqrt{r^2-t^2}$
よって

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{\sqrt{r^2-1}-1} \left(-1+\sqrt{r^2-t^2}\right)^2 dk \\
&= 2\pi \left(\left[(1+r^2)t - \frac{t^3}{3} \right]_1^{\sqrt{r^2-1}} - 2\int_1^{\sqrt{r^2-1}} \sqrt{r^2-t^2} dt \right) \\
&= 2\pi \left(\left(\frac{2}{3}r^2 + \frac{4}{3} \right) \sqrt{r^2-1} - \frac{2}{3} - r^2 + 2\int_1^{\sqrt{r^2-1}} \sqrt{r^2-t^2} dt \right)
\end{aligned}
$$

$\displaystyle\int_1^{\sqrt{r^2-1}} \sqrt{r^2-t^2} dt$ は、次図黒部分の面積なので
$\displaystyle\int_1^{\sqrt{r^2-1}} \sqrt{r^2-t^2} dt = r^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

よって、

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi\left(\left(\frac{2}{3}r^2+\frac{4}{3}\right)\sqrt{r^2-1}-\frac{2}{3}-r^2+2r^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\right)\\
&= \pi\left(\left(\frac{4}{3\sin^2\alpha}+\frac{8}{3}\right)\sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha}-1}-\frac{4}{3}-\frac{2}{\sin^2\alpha}+\frac{\pi-4\alpha}{\sin^2\alpha}\right)
\end{aligned}
$$



≪**第 5 問解答**≫

条件ロ）より、

(あ) $z_1, \cdots, z_6$ が相異なる 6 つの実数となる

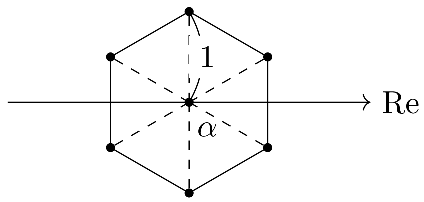
(い) $z_1, \cdots, z_6$ のうち、4 つだけが相異なる実数であり、残りは、実数でない共役な複素数 1 組となる。

(う) $z_1, \cdots, z_6$ のうち、2 つだけが相異なる実数であり、残りは、実数でない相異なる共役な複素数 2 組となる。

(え) $z_1, \cdots, z_6$ は全て実数でなく、相異なる共役な複素数 3 組となる。

のどれか 1 つが成り立つ。(あ) または (い) のとき、1 つの直線上に点が 3 つ以上あるので、$z_1, \cdots, z_6$ が正六角形の頂点になりえないため、条件イ）に反する。

また、(え) のとき、$z_1, \cdots, z_6$ は下図のような正六角形の頂点となる。



それゆえ、正六角形の対称性より、$\alpha \in \mathbb{R}$ となる。また、

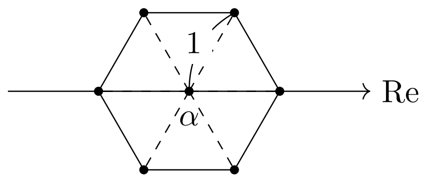
$$\{z_1, \cdots, z_6\} = \left\{ \alpha + \cos\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) \middle| k = 0, \cdots, 5 \right\}$$

となるので、$z_1, \cdots, z_6$ は 6 次方程式 $(x-\alpha)^6 = -1$ すなわち
$(x-\alpha)^6 + 1 = 0$ の相異なる 6 解となる。解と係数の関係から、

$$z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 = \alpha^6 + 1 > 0 \quad (\because \alpha \in \mathbb{R})$$

なので、条件ハ）と反する。

(う) のとき、$z_1, \cdots, z_6$ は下図のような正六角形の頂点となる。



それゆえ、正六角形の対称性より、$\alpha \in \mathbb{R}$ となる。また、

$$\{z_1, \cdots, z_6\} = \left\{\alpha + \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3} \middle| k = 0, \cdots, 5\right\}$$

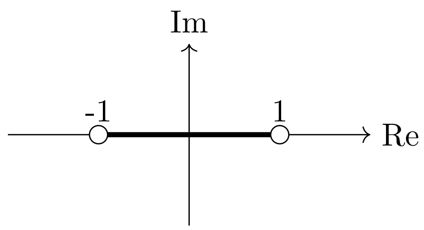
となるので、$z_1, \cdots, z_6$ は 6 次方程式 $(x-\alpha)^6 = 1$ すなわち
$(x-\alpha)^6 - 1 = 0$ の相異なる 6 解となる。解と係数の関係から、

$$z_1z_2z_3z_4z_5z_6 = \alpha^6 - 1$$

なので、条件ハ）を満たすには $\alpha^6 - 1 < 0$ すなわち
$-1 < \alpha < 1 \quad (\because \alpha \in \mathbb{R})$ である必要がある。
　逆に、$-1 < \alpha < 1$ かつ

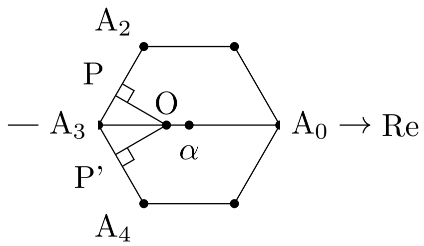
$$\{z_1, \cdots, z_6\} = \left\{\alpha + \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3} \middle| k = 0, \cdots, 5\right\}$$

のとき、条件イ）ロ）ハ）をすべて満たす。よって求める範囲は以下の図の通り。



　ここで、$k = 0, \cdots, 5$ に対して、$\mathrm{A}_k\left(\alpha + \cos\frac{k\pi}{3} + i\sin\frac{k\pi}{3}\right)$ とおく。
求める面積を $S(\alpha)$ とおく。

$0 \leq \alpha < 1$ のとき、

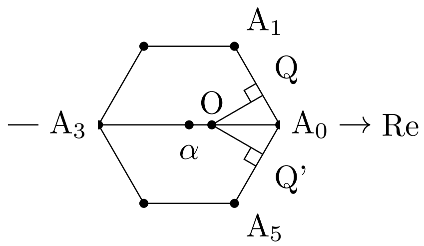


点 O から、辺 A_2A_3、辺 A_3A_4 におろした垂線の足をそれぞれ P、P′ とすると、正六角形の辺上の点のうち、点 O に最も近い点、最も遠い点 (の一部) はそれぞれ P と P′、A_0 であり、正六角形の 6 つの辺は一続きにつながっているので、

$$S(\alpha) = \pi {\mathrm{OA}_0}^2 - \pi \mathrm{OP}^2 = \pi \left[(1+\alpha)^2 - \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-\alpha) \right\}^2 \right] = \frac{\alpha^2 + 14\alpha + 1}{4}\pi$$

である。

[2]　$-1 < \alpha \leq 0$ のとき、



点 O から、辺 A_0A_1、辺 A_0A_6 におろした垂線の足をそれぞれ Q、Q′ とすると、正六角形の辺上の点のうち、点 O に最も近い点、最も遠い点 (の一部) はそれぞれ Q と Q′、A_3 であり、正六角形の 6 つの辺は一続きにつながっているので、

$$S(\alpha) = \pi {\mathrm{OA}_3}^2 - \pi \mathrm{OQ}^2 = \pi \left[(1-\alpha)^2 - \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}(1+\alpha) \right\}^2 \right] = \frac{\alpha^2 - 14\alpha + 1}{4}\pi$$

である。

以上より、$-1<\alpha<1$ の下で、正六角形の辺が通過する領域の面積は

$$S(\alpha)=\frac{\alpha^2+14|\alpha|+1}{4}\pi$$

である。

≪第 6 問解答≫

(1) 略。概形を描くだけなので、x, y を用いて $\dfrac{dy}{dx}$ を考える必要はないだろう。$\dfrac{dr}{d\theta}$ を考えて増減表を示せば良いと思われる。

(2)$\dfrac{dr}{d\theta}=abe^{b\theta}$ より、

$L_1=\displaystyle\int_\alpha^\beta\sqrt{r^2+(\frac{dr}{d\theta})^2}d\theta$

$=a\sqrt{b^2+1}\displaystyle\int_\alpha^\beta e^{b\theta}d\theta$

$=\dfrac{a\sqrt{b^2+1}}{b}[e^{b\theta}]_\alpha^\beta$

$=\dfrac{a\sqrt{b^2+1}}{b}(e^{b\beta}-e^{b\alpha})$

また、

$\displaystyle\lim_{\alpha\to-\infty}L_1=\frac{a\sqrt{b^2+1}}{b}e^{b\beta}(b>0)$（収束）

(3)$L_2=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{10}\sqrt{(\frac{1}{2})^2+1}}{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{2}\cdot 2\pi}$

$=\dfrac{e^\pi}{2}$

(4)$f(x)=e^x$ を考える。$f'(x)=e^x$ ゆえ $x=3$ における $f(x)$ の接線の方程式は $y-e^3=e^3(x-3)$ つまり $y=e^3(x-2)$ となる。$x=\pi$ を代入して $y=e^3(\pi-2)$。$f(x)$ の単調増加性ゆえ

$\dfrac{1}{2}e^\pi>\dfrac{1}{2}e^3(\pi-2)>\dfrac{1}{2}2.71^3(3.14-2)>\dfrac{1}{2}19.9\cdot 1.14=11.343>11$