■　解答編（問題 1〜 問題 10）

問　題　1

《解答》

補題として，a, b は $a < b$ を満たす実数とすると，

$$\big(|x-a| - (x-a)\big)\big(|x-b| + (x-b)\big) = 0$$

が常に成り立つので，展開して

$$|x-a|\,|x-b| = -\,(x-b)\,|x-a| + (x-a)\,|x-b| + (x-a)\,(x-b)$$

が成り立つ．

関数 $f(x)$ と $g(x)$ を，

$$\begin{cases} A(x) = f(x) + g(x) \\ B(x) = f(x) - g(x) \end{cases}$$

を満たすように定めると，もとの方程式は

$$f(x)^2 + g(x)^2 + (4\,|x| + 2)f(x)g(x) = 2x^2 + 2 + (4\,|x| + 2)\left|x^2 - 1\right|$$

と表される．

- 適切な $\Big(f(x), g(x)\Big)$ の組をひとつ探すと

  $$\Big(f(x), g(x)\Big) = \Big(|x+1|, |x-1|\Big)$$

  を見つけられる．
- 条件を満たす

  $$\Big(f(x), g(x)\Big)$$

  の組について，解と係数の関係より

  $$\Big(-(4\,|x| + 2)g(x) - f(x), g(x)\Big)$$

  も条件を満たす組であり，対称性より

  $$\Big(g(x), -(4\,|x| + 2)g(x) - f(x)\Big)$$

  も条件を満たす．

このようにして，各区間の次数がどれだけ大きい解でも構成できる．
f と g の各区間の次数が異なるようにしながら次数を大きくできるから，$\Big(A(x), B(x)\Big)$ の組は無数に存在する．

問　題　2

まず, 三角形 ABC の面積 S を a, b, c を用いて表す。

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2\right) - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2} \end{aligned}$$

今, $S=1$ なので,

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=4$$

を満たす。
次に, 三角形 ABC におろした垂線の足の座標 H を a, b, c を用いて表す。今, 平面 ABC の方程式は,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

だからその法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ のひとつは,

$$\overrightarrow{n}=\begin{pmatrix}1/a\\1/b\\1/c\end{pmatrix}$$

とおける。よって,

$$\overrightarrow{OH}=k\overrightarrow{n} \qquad (k\text{は正の実数})$$

とおける。今, 三角錐 OABC の体積は $\dfrac{abc}{6}$, 三角形 ABC の面積は 1 なので,

$$\frac{abc}{6}=\frac{1}{3}|\overrightarrow{OH}|$$

すなわち,

$$|\overrightarrow{OH}|=\frac{abc}{2}$$

である。

$$|\overrightarrow{n}|=\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

であるから,

$$k=\frac{a^2b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

とわかる。
これらより, 正の実数 a, b, c が

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2=4 \tag{$\star$}$$

を満たして動くとき,

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{a^2b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}\begin{pmatrix}1/a\\1/b\\1/c\end{pmatrix}$$

の動く軌跡の方程式を求めればよい。単に代入すれば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{abc}{4} \begin{pmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{pmatrix}$$

となることに注意すれば,

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \left(\frac{abc}{4} \right)^2$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (x^2 + y^2 + z^2) \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix}$$

と逆に解くことができる。よって, $(\star)$ に代入すれば,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^4 \left(\frac{1}{x^2 y^2} + \frac{1}{y^2 z^2} + \frac{1}{z^2 x^2} \right) = 4$$

となる。さらに整理すれば,

$$(x^2 + y^2 + z^2)^5 = 4x^2 y^2 z^2$$

このうち, 動く部分は $x > 0, y > 0, z > 0$ の部分なので, 求める軌跡は,

$$\boxed{(x^2 + y^2 + z^2)^5 = 4x^2 y^2 z^2,\ x > 0, y > 0, z > 0}$$

次に, 体積を求める。

$$x = r \cos\theta \cos\phi, y = r \cos\theta \sin\phi, z = r \sin\theta$$

とおくと, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq \phi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を動く。これを代入すれば,

$$r^{10} = 4r^6 \cos^4\theta \sin^2\theta \cos^2\phi \sin^2\phi$$

今, $r, \cos\theta, \sin\theta, \cos\phi, \sin\phi$ は全て正なので,

$$r^2 = 2\cos^2\theta \sin\theta \cos\phi \sin\phi$$

となる。求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned}
V &= \iiint dxdydz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r} r^2 \cos\theta dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2\theta \sin\theta \cos\phi \sin\phi)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2\theta \sin\theta \cos\phi \sin\phi)^{\frac{3}{2}} \cos\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta \sin^{\frac{3}{2}}\theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\phi \sin\phi)^{\frac{3}{2}} d\phi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{6} B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2} \right) B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4} \right)
\end{aligned}$$

以上から, 求める解答は

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{6} B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2} \right) B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4} \right)}$$

問　題　3

【解答】

方程式

$$8^x + 12^x = 27^x$$

の両辺を 8^x で割って

$$1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{3x}$$

を解けばよい．
ここで

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = X$$

とおけば方程式は

$$1 + X = X^3$$

つまり

$$X^3 - X - 1 = 0$$

となる．
まず，

$$X^3 - X - 1 = 0$$

を満たす実数 X を全て求める．
関数 $f(X)$ を

$$f(X) = X^3 - X - 1$$

とおけば，

$$f'(X) = 3X^2 - 1$$

$$= 3\left(X + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(X - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

であるため，$f(X)$ の増減は

X	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
$f'(X)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(X)$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$	$\searrow$	$-\frac{2}{3\sqrt{3}} - 1$	$\nearrow$

となる．
ゆえに，方程式

$$f(X) = 0$$

の実数解はただ一つであり，さらにそれが正であることも分かる．
ここで，

$$\begin{cases} a^3 + b^3 = -1 \\ 3ab = 1 \end{cases}$$

を満たす実数 a, b を見つけることができれば，1 の虚数三乗根 ω を用いて

$$
\begin{aligned}
f(X) &= X^3 - X - 1 \\
&= X^3 + a^3 + b^3 - 3abX \\
&= (X + a + b)\left(X + a\omega + b\omega^2\right)\left(X + a\omega^2 + b\omega\right)
\end{aligned}
$$

と因数分解することができて，

$$X = -a - b$$

と結論できる．

そのような a と b は,

$$
\begin{cases}
a^3 + b^3 = -1 \\
a^3 b^3 = \dfrac{1}{27}
\end{cases}
$$

を満たすため，二次方程式の解と係数の関係から

$$
\begin{cases}
\left(a^3\right)^2 + \left(a^3\right) + \dfrac{1}{27} = 0 \\
\left(b^3\right)^2 + \left(b^3\right) + \dfrac{1}{27} = 0
\end{cases}
$$

が成り立つので,

$$a^3, b^3 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{27}}}{2}$$

が得られる．

したがって

$$
\begin{aligned}
X &= -a - b \\
&= -\sqrt[3]{\frac{-1 + \sqrt{1 - \frac{4}{27}}}{2}} - \sqrt[3]{\frac{-1 - \sqrt{1 - \frac{4}{27}}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt[3]{108 - 12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}}{6}
\end{aligned}
$$

と求められる．

したがって，方程式

$$8^x + 12^x = 27^x$$

の実数解 x は

$$x = \log_{3/2} X$$

より,

$$x = \frac{\log\left(\sqrt[3]{108 - 12\sqrt{69}} + \sqrt[3]{108 + 12\sqrt{69}}\right) - \log 6}{\log 3 - \log 2}$$

である（対数の底は何でもよい）．

問　題　4

《解答》

式
$$(pq)^r + 2^{pq} + 1 = \left(qr^2\right)^p \tag{1}$$
において，法を 2 とする合同式を見ると
$$pq + 1 \equiv qr \pmod 2$$
となる．
よって，q は奇数であり，p と r のどちらか一方のみが偶数である．

(a) p が偶数であるとき，r は奇数である．
p は偶数かつ素数なので
$$p = 2$$
が得られる．
これを数式 (1) に代入すると
$$(2q)^r + 4^q + 1 = \left(qr^2\right)^2 \tag{2}$$
となる．
いま，整数 i と j を
$$1 \leq i < j \leq q - 1$$
を満たすようにとると，
$$4j - 4i = 4(j - i)$$
であり，
- q は奇数であるから q と 4 は互いに素
- $1 \leq j - i \leq q - 2$ であるから，素数 q と $j - i$ は互いに素

の二つから，
$$4i \not\equiv 4j \pmod q$$
が得られる．
すなわち，$q - 1$ 個の整数
$$4,\ 4 \cdot 2,\ \ldots,\ 4(q-1)$$
を q で割った余りは全て異なり，それらの余りとしては
$$1,\ 2,\ \ldots,\ q - 1$$
がちょうど 1 回ずつ出現する．
これより，
$$4 \times (4 \cdot 2) \times \cdots \times (4 \cdot (q-1)) \equiv 1 \times 2 \times \cdots \times (q-1) \pmod q$$
すなわち
$$4^{q-1}(q-1)! \equiv (q-1)! \pmod q$$
が得られる．
いま，q が素数であることより $(q-1)!$ と q は互いに素なので，合同式の両辺を $(q-1)!$ で割ることができ，結果として
$$4^{q-1} \equiv 1 \pmod q$$
が成り立つ．

よって

$$4^q \equiv 4 \pmod q$$

であるから，数式 (2) に戻って法を q とする合同式を見ると

$$5 \equiv 0 \pmod q$$

が得られる.

ゆえに,

$$q = 5$$

である.

これをまた数式 (2) に代入すると,

$$10^r + 1025 = 25r^4 \tag{3}$$

となる.

この両辺を 3 で割った余りを考えると

$$1 + 2 \equiv r^4 \pmod 3$$

であり，r が素数であることから

$$r = 3$$

でなければならない.

実際に $r = 3$ のときは,

$$10^r + 1025 = 2025$$

かつ

$$25r^4 = 2025$$

であるから，数式 (3) が成り立つ.

以上から，p が偶数のとき,

$$(p, q, r, N) = (2, 5, 3, 2025)$$

である.

(b) p が奇数のとき，r は偶数である.

r は偶数かつ素数なので

$$r = 2$$

が得られる.

これを数式 (1) に代入すると

$$(pq)^2 + 2^{pq} + 1 = (4q)^p \tag{4}$$

となる.

ここで，法を 4 とする合同式を見ると

$$(pq)^2 + 1 \equiv 0 \pmod 4$$

となる.

しかし，pq は奇数であるからある整数 k を用いて

$$pq = 2k + 1$$

と書け,

$$\begin{aligned} &(pq)^2 \\ =&(2k+1)^2 \\ =&4k^2 + 4k + 1 \\ \equiv&1 \pmod 4 \end{aligned}$$

となるから，不適．

よって p が奇数のとき, 不成立.

以上から,

$$(p, q, r, N) = (2, 5, 3, 2025)$$

のみが適し，特に答えるべき値は 2025 である．

問　題　5

まず，$\cos 2x$ を $\tan x$ で表すと，

$$\begin{aligned}\cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x + \sin^2 x} \\ &= \frac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}\end{aligned}$$

と書ける．
これより，方程式の左辺は

$$\begin{aligned}\frac{2\cos(2x) - 1}{2\cos(2x) + 1} &= \frac{2\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} - 1}{2\frac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x} + 1} \\ &= \frac{2\left(1 - \tan^2 x\right) - \left(1 + \tan^2 x\right)}{2\left(1 - \tan^2 x\right) + \left(1 + \tan^2 x\right)} \\ &= \frac{1 - 3\tan^2 x}{3 - \tan^2 x}\end{aligned}$$

と変形される．
これより方程式は

$$\frac{1 - 3\tan^2 x}{3 - \tan^2 x} = \tan(x)\tan(a)$$

となる．$\tan x = 0$ のとき方程式は成立しないから

$$\frac{1 - 3\tan^2 x}{3\tan x - \tan^3 x} = \tan(a)$$

であり，三倍角の定理より

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) = \tan(a)$$

が得られる．
したがって，解は

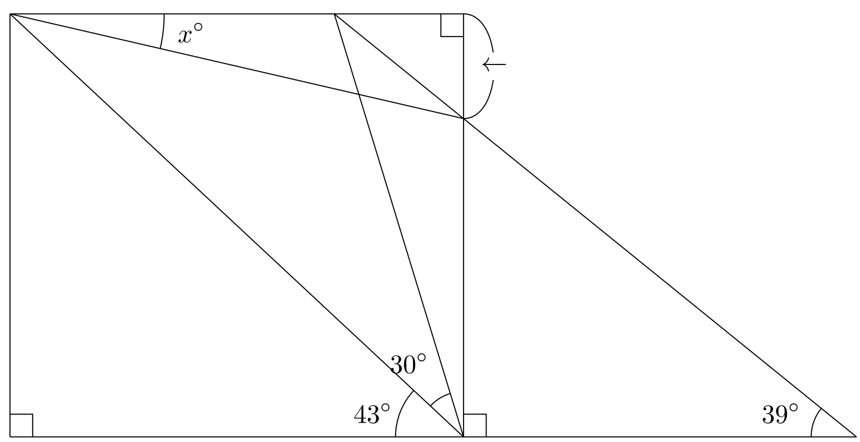
$$x = \frac{\pi}{6} - \frac{a}{3} + \frac{n\pi}{3} \quad (n \text{ は整数})$$

である．

問　題　6

《解答》

図中の次の部分に注目せよ。



三角関数は直角三角形における辺の比を表せることから、長方形の横の長さを 1 としたとき、この部分の長さは二通りで表されて

$$\tan 43^\circ \tan 17^\circ \tan 39^\circ = \tan x^\circ$$

となる.
いま、$\theta = 13^\circ$ とおけば、この式は

$$\tan x^\circ = \tan(30^\circ + \theta) \tan(30^\circ - \theta) \tan(3\theta)$$

と書き直せる。

ここで、右辺について

$$
\begin{aligned}
\tan(30^\circ+\theta)\tan(30^\circ-\theta) &= \tan\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\tan\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right) \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\theta\right)} \\
&= \frac{\cos\left(2\theta\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(2\theta\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)} \\
&= \frac{2\cos\left(2\theta\right)-1}{2\cos\left(2\theta\right)+1} \\
&= \frac{2\left(\frac{1-(\tan\theta)^2}{1+(\tan\theta)^2}\right)-1}{2\left(\frac{1-(\tan\theta)^2}{1+(\tan\theta)^2}\right)+1} \\
&= \frac{2\left(1-(\tan\theta)^2\right)-\left(1+(\tan\theta)^2\right)}{2\left(1-(\tan\theta)^2\right)+\left(1+(\tan\theta)^2\right)} \\
&= \frac{1-3\left(\tan\theta\right)^2}{3-\left(\tan\theta\right)^2} \\
&= \frac{1}{\frac{3(\tan\theta)-(\tan\theta)^3}{1-3(\tan\theta)^2}}\cdot\left(\tan\theta\right) \\
&= \frac{\tan\left(\theta\right)}{\tan\left(3\theta\right)}
\end{aligned}
$$

と変形することができるから、方程式は

$$\tan x^\circ = \tan\theta$$

となる。
したがって、

$$x^\circ = \theta = 13^\circ$$

となるから、答えは

$$\boxed{x = 13}$$

である。

問　題　7

《解答》

整数 k に対して，整数列 $\{F_k\}$ を

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right)$$

と定め，整数列 $\{L_k\}$ を

$$L_k = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

と定める．

数列 F_k について 7 つの命題を示す．命題 5,6,7 が本問で用いるものであり，命題 1,2,3,4 はその準備のためのものである．

命題 1. 全ての整数 k に対して

$$F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$$

が成り立つ．

証明. 式変形をすることで

$$\begin{aligned}
\sqrt{5}F_{k+2} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2} \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right) \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \\
&= \sqrt{5}F_{k+1} + \sqrt{5}F_k
\end{aligned}$$

が得られる．

すなわち

$$\sqrt{5}F_{k+1} + \sqrt{5}F_k = \sqrt{5}F_{k+2}$$

であるから，両辺を $\sqrt{5}$ で割って

$$F_k + F_{k+1} = F_{k+2}$$

が示された． □

命題 2. 全ての整数 k に対して

$$L_k = 2F_{k+1} - F_k$$

が成り立つ．

証明．式変形をすることで

$$
\begin{aligned}
2F_{k+1} =& \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(1+\sqrt{5}\right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\left(1-\sqrt{5}\right)\right) \\
=& \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right) + \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right) \\
=& F_k + L_k
\end{aligned}
$$

が得られる．
すなわち

$$2F_{k+1} = F_k + L_k$$

であるから，両辺から F_k を引くことで

$$L_k = 2F_{k+1} - F_k$$

が示された． □

命題 3. 全ての整数 a, b に対して

$$F_{a+b} = F_a F_{b+1} + F_{a-1} F_b$$

が成り立つ．

証明．整数 x, y を用いて $x + y\sqrt{5}$ と表される数全体の集合について，$\sqrt{5}$ は無理数なので，任意の元 z から

$$z = x + y\sqrt{5}$$

を満たす整数の組 (x, y) を一意に決定できる．そのときの y の値を z の係数と呼ぶこととする．
いま F_{a+b} は

$$2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a+b}$$

の $\sqrt{5}$ の係数であるから，指数法則より

$$2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{a}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{b}$$

の $\sqrt{5}$ の係数と言えるので，

$$F_{a+b} = \frac{L_a F_b + F_a L_b}{2}$$

が成り立つ．
ここに定理 2 を適用して

$$F_{a+b} = \frac{(2F_{a+1} - F_a)F_b + F_a(2F_{b+1} - F_b)}{2}$$

が得られ，さらに定理 1 を用いて

$$
\begin{aligned}
F_{a+b} &= \frac{(F_{a+1} + F_{a-1})F_b + F_a(2F_{b+1} - F_b)}{2} \\
&= \frac{(F_{a+1} - F_a + F_{a-1})F_b + 2F_a F_{b+1}}{2} \\
&= \frac{(F_{a-1} + F_{a-1})F_b + 2F_a F_{b+1}}{2} \\
&= F_{a-1}F_b + F_a F_{b+1}
\end{aligned}
$$

が得られる．
これで
$$F_{a+b} = F_a F_{b+1} + F_{a-1} F_b$$
が示された． □

命題 4. 全ての整数 k に対して
$$F_{-k} = -(-1)^k F_k$$
が成立する．

証明．式変形をすることで
$$\begin{aligned}\sqrt{5}F_{-k} &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{-k} \\ &= \left(-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} \\ &= -(-1)^k \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k}\right) \\ &= -(-1)^k \sqrt{5} F_k\end{aligned}$$
が得られる．
すなわち
$$\sqrt{5}F_{-k} = -(-1)^k \sqrt{5} F_k$$
であるから，両辺を $\sqrt{5}$ で割って
$$F_{-k} = -(-1)^k F_k$$
が示された．

□

命題 5. 全ての整数 k に対して
$$2F_k F_{k+1} - F_k^2 = F_{2k}$$
が成立する．

証明．定理 3 において $a = b = k$ を代入して
$$F_k F_{k+1} + F_{k-1} F_k = F_{2k}$$
が得られる．
これは
$$2F_k(F_{k-1} + F_k) - F_k^2 = F_{2k}$$
と表現できるので，定理 1 を適用して
$$2F_k F_{k+1} - F_k^2 = F_{2k}$$
が示された． □

命題 6. 全ての整数 k に対して
$$F_k^2 + F_{k+1}^2 = F_{2k+1}$$
が成立する．

証明. 定理 3 において $a=k+1, b=k$ を代入すると

$$F_{k+1}^2+F_{k-1}F_k=F_{2k+1}$$

が得られるので，これで示された. □

命題 7. 全ての整数 k に対して

$$-\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}=\frac{F_{-2k}}{F_{-2k-1}}$$

が成立する.

証明. 定理 4 より

$$\begin{aligned}-\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}&=-\frac{-F_{-2k}}{F_{-(2k+1)}}\\&=\frac{F_{-2k}}{F_{-2k-1}}\end{aligned}$$

と計算できるから示された. □

それでは，本題に入る.
$a_1=1$ であるから，

$$a_1=\frac{F_2}{F_1}$$

と書くことができる.
また，a_n がある整数 k を用いて

$$a_n=\frac{F_{k+1}}{F_k}$$

と表されているとするとき，

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1-2a_n}{1+a_n^2}\\&=\frac{1-2\frac{F_{k+1}}{F_k}}{1+\frac{F_{k+1}^2}{F_k^2}}\\&=-\frac{2F_kF_{k+1}-F_k^2}{F_k^2+F_{k+1}^2}\end{aligned}$$

となるが，これは命題 5,6 より

$$a_{n+1}=-\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}}$$

と変形できて，さらに命題 7 より

$$a_{n+1}=\frac{F_{-2k}}{F_{-2k-1}}$$

と変形できる.
したがって，数列 $\{b_n\}$ を

$$\begin{cases}b_1=1\\b_{n+1}=-2b_n-1\end{cases}$$

を満たすようにとれば，つねに

$$a_n=\frac{F_{b_n+1}}{F_{b_n}}$$

が成立する．
次に，b_n を求めよう．
漸化式を変形すると

$$\begin{cases} b_1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3} \\ b_{n+1} + \dfrac{1}{3} = -2\left(b_n + \dfrac{1}{3}\right) \end{cases}$$

となるから，一般項は

$$b_n + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}(-2)^{n-1}$$

つまり

$$b_n = \frac{(-2)^{n+1} - 1}{3}$$

である．
以上から，

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^{\frac{(-2)^{n+1}+2}{3}} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{\frac{(-2)^{n+1}+2}{3}}}{\left(1+\sqrt{5}\right)^{\frac{(-2)^{n+1}-1}{3}} - \left(1-\sqrt{5}\right)^{\frac{(-2)^{n+1}-1}{3}}}$$

と求めることができた.

問 題 8

不等式をそれぞれ分解して変形すると

$$a_1a_2 \leqq a_2a_3,\ a_2a_3 \leqq a_3a_4,\ \cdots,\ a_{n-2}a_{n-1} \leqq a_{n-1}a_n,\ a_{n-1}a_n \leqq na_n,\ na_n \leqq n^2$$

各項は正の整数で $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \neq 0$ なので

$$1 \leqq a_1 \leqq a_3 \leqq a_5 \leqq \cdots,\ 1 \leqq a_2 \leqq a_4 \leqq a_6 \leqq \cdots,\ a_{n-1} \leqq n,\ a_n \leqq n$$

非負整数の数列 $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ を用いて

$$a_{2i-1} = 1 + \sum_{k=1}^{i} b_k,\ a_{2j} = 1 + \sum_{k=1}^{j} c_k \qquad \left(1 \leqq i \leqq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil,\ 1 \leqq j \leqq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)$$

とおく. (実数 x に対して, x 以下の最大の整数を $\lfloor x \rfloor$, 以上の最小の整数を $\lceil x \rceil$ とする)
このとき $1 \leqq a_1 \leqq a_3 \leqq a_5 \leqq \cdots,\ 1 \leqq a_2 \leqq a_4 \leqq a_6 \leqq \cdots$ は自動的に満たされるので, $a_{n-1} \leqq n,\ a_n \leqq n$ を満たすようにすればよい. すなわち

$$1 + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} b_k \leqq n,\ 1 + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} c_k \leqq n$$

$$\therefore 0 \leqq b_1 + b_2 + \cdots + b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} \leqq n-1,\ 0 \leqq c_1 + c_2 + \cdots + c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \leqq n-1$$

となる. $b_1 + b_2 + \cdots + b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} = B,\ c_1 + c_2 + \cdots + c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = C$ とすると, 組 $(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$, $(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ の選び方は重複組み合わせで $B,\ C$ 個にそれぞれ仕切りを $\lceil \dfrac{n}{2} \rceil - 1,\ \lfloor \dfrac{n}{2} \rfloor - 1$ 個入れる方法に一対一対応になる.
よって, 選び方は $\dfrac{(B + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)!}{B!(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)!},\ \dfrac{(C + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{C!(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}$ であり, $0 \leqq B,\ C \leqq n-1$ の範囲で $B,\ C$ をそれぞれ動かすと

$$\sum_{B=0}^{n-1} \frac{(B + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)!}{B!(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)!} = \frac{(n + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)!}{(n-1)!(\lceil \frac{n}{2} \rceil)!},\ \sum_{C=0}^{n-1} \frac{(C + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{C!(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!} = \frac{(n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{(n-1)!(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}$$

この計算には二項係数の恒等式 $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(k+r)!}{k!r!} = \frac{(n+k+1)!}{n!(r+1)!}$ を用いた.
$(b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{\lceil \frac{n}{2} \rceil})$, $(c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$ の選び方は独立しているので, 組 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$ の選び方は二つの積であるから

$$\left(\sum_{B=0}^{n-1} \frac{(B + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)!}{B!(\lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)!}\right)\left(\sum_{C=0}^{n-1} \frac{(C + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{C!(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}\right) = \frac{(n + \lceil \frac{n}{2} \rceil - 1)!(n + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1)!}{(n-1)!^2(\lceil \frac{n}{2} \rceil)!(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor)!}$$

が答えになる.

問 題 9

【解答】

(1) (i) $S_1(r)$ を求める。

$0 < r \leq 1$ のとき円周の通過領域は、半径 $(1+r)$ の円の中央に $(1-r)$ の円の穴があいた形になるので、その面積は

$$\begin{aligned} S_1(r) &= \pi(1+r)^2 - \pi(1-r)^2 \\ &= 4\pi r \end{aligned}$$

である。

$1 \leq r$ のとき円周の通過領域は、半径 $(r+1)$ の円の中央に $(r-1)$ の円の穴があいた形になるので、その面積は

$$\begin{aligned} S_1(r) &= \pi(r+1)^2 - \pi(r-1)^2 \\ &= 4\pi r \end{aligned}$$

である。

以上から、いずれにしても

$$S_1(r) = 4\pi r$$

となる。

(ii) $S_2(r)$ を求める。

$0 < r \leq 1$ のとき円板の通過領域は、半径 $(1+r)$ の円の中央に $(1-r)$ の円の穴があいた形になるので、その面積は

$$\begin{aligned} S_2(r) &= \pi(1+r)^2 - \pi(1-r)^2 \\ &= 4\pi r \end{aligned}$$

である。

$1 \leq r$ のとき円周の通過領域は、半径 $(r+1)$ の円の形になるので、その面積は

$$S_2(r) = \pi(r+1)^2$$

である。

以上から、

$$S_2(r) = \begin{cases} 4\pi r & (0 < r \leq 1) \\ \pi(r+1)^2 & (1 \leq r) \end{cases}$$

となる。

したがって答えは、

$$S_1(r) = 4\pi r, \quad S_2(r) = \begin{cases} 4\pi r & (0 < r \leq 1) \\ \pi(r+1)^2 & (1 \leq r) \end{cases}$$

である。

(2) (i) $V_1(r)$ を求める。

$0 < r \leq 1$ のとき球面の通過領域は、半径 $(1+r)$ の球の中央に $(1-r)$ の球の穴があいた形になるので、その体積は

$$\begin{aligned} V_1(r) &= \frac{4}{3}\pi(1+r)^3 - \frac{4}{3}\pi(1-r)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(2r^3 + 6r\right) \\ &= \frac{8}{3}\pi\left(r^3 + 3r\right) \end{aligned}$$

である。

$1 \leq r$ のとき球面の通過領域は、半径 $(r+1)$ の球の中央に $(r-1)$ の球の穴があいた形になるので、その体積は

$$\begin{aligned} V_1(r) &= \frac{4}{3}\pi(r+1)^3 - \frac{4}{3}\pi(r-1)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(6r^2+2\right) \\ &= \frac{8}{3}\pi\left(3r^2+1\right) \end{aligned}$$

である。

以上から、

$$V_1(r) = \begin{cases} \dfrac{8}{3}\pi\left(r^3+3r\right) & (0 < r \leq 1) \\ \dfrac{8}{3}\pi\left(3r^2+1\right) & (1 \leq r) \end{cases}$$

となる。

(ii) $V_2(r)$ を求める。

$0 < r \leq 1$ のとき球体の通過領域は、半径 $(1+r)$ の球の中央に $(1-r)$ の球の穴があいた形になるので、その体積は

$$\begin{aligned} V_2(r) &= \frac{4}{3}\pi(1+r)^3 - \frac{4}{3}\pi(1-r)^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi\left(2r^3+6r\right) \\ &= \frac{8}{3}\pi\left(r^3+3r\right) \end{aligned}$$

である。

$1 \leq r$ のとき球面の通過領域は、半径 $(r+1)$ の球の形になるので、その体積は

$$V_2(r) = \frac{4}{3}\pi(r+1)^3$$

である。

以上から、

$$V_2(r) = \begin{cases} \dfrac{8}{3}\pi\left(r^3+3r\right) & (0 < r \leq 1) \\ \dfrac{4}{3}\pi(r+1)^3 & (1 \leq r) \end{cases}$$

となる。

したがって答えは、

$$V_1(r) = \begin{cases} \dfrac{8}{3}\pi\left(r^3+3r\right) & (0 < r \leq 1) \\ \dfrac{8}{3}\pi\left(3r^2+1\right) & (1 \leq r) \end{cases}, \quad V_2(r) = \begin{cases} \dfrac{8}{3}\pi\left(r^3+3r\right) & (0 < r \leq 1) \\ \dfrac{4}{3}\pi(r+1)^3 & (1 \leq r) \end{cases}$$

である。

問　題　10

$q \geq 5$ において，q 進法で表された整数 $2024_{(q)}$ は
$2024_{(q)} = 2 \cdot q^3 + 0 \cdot q^2 + 2 \cdot q^1 + 4 \cdot q^0 = 2q^3 + 2q + 4$
であるから，

$$2q^3 + 2q + 4 = p^q + 8r^s s^r \tag{1}$$

を満たす素数の組 (p, q, r, s) を求めればよい。

$$(1) \Longleftrightarrow p^q = 2(q^3 + q + 2 - 4r^s s^r) \tag{1'}$$

$(1')$ の右辺は偶数だから，左辺も偶数であり，p が素数であることから，$p = 2$ である。
次の補題を示す。

補題． $q \geq 12$ であるすべての整数 q で $2^q > 2q^3 + 2q + 4$ である。

証明． q に関する数学的帰納法で示す。

(i) $q = 12$ のとき
　$2^{12} = 4096 > 2 \cdot 12^3 + 2 \cdot 12 + 4 = 3484$ より補題は成り立つ。

(ii) $q = k$ のときに補題が成り立つとき
　$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2(2k^3 + 2k + 4)$
　であり，
　$2(2k^3 + 2k + 4) - \{2(k+1)^3 + 2(k+1) + 4\} = 2(k^3 - 3k^2 - 2k)$
　である。$f(k) = k^3 - 3k^2 - 2k$ とすると，
　$f'(k) = 3k^2 - 6k - 2 = 0 \Longleftrightarrow k = 1 \pm \sqrt{\dfrac{5}{3}}$
　だから，増減表は以下の通り。

k	$\cdots$	$1 - \sqrt{\dfrac{5}{3}}$	$\cdots$	$1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}}$	$\cdots$
$f'(k)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(k)$	$\nearrow$	極大値	$\searrow$	極小値	$\nearrow$

　$1 + \sqrt{\dfrac{5}{3}} < 1 + \sqrt{\dfrac{12}{3}} = 1 + 2 = 3$ だから，$k > 12$ のとき $f(k)$ は単調増加する。
　したがって，このとき
　$2(2k^3 + 2k + 4) - \{2(k+1)^3 + 2(k+1) + 4\} = 2(k^3 - 3k^2 - 2k) > 0$
　により，
　$2^{k+1} > 2(2k^3 + 2k + 4) > 2(k+1)^3 + 2(k+1) + 4$
　すなわち
　$2^{k+1} > 2(k+1)^3 + 2(k+1) + 4$
　である。よって $q = k + 1$ においても補題は成り立つ。

(i)(ii) より補題は示された。 □

$8r^s s^r$ が正の値をとることと補題により，$q \geq 12$ のときに (1) を満たす素数の組
(p, q, r, s) は存在しない。以下，$q = 5, 7, 11$ のときについて (1) に代入して調べる。

[1]$q = 5$ のとき
　このとき
　$2 \cdot 5^3 + 2 \cdot 5 + 4 = 2^5 + 8r^s s^r$
　したがって $r^s s^r = 29 = 1 \cdot 29$
　1 は素数ではないから，これを満たす素数の組 (r, s) は存在しない。

[2]$q = 7$ のとき
　このとき
　$2 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7 + 4 = 2^7 + 8r^s s^r$

したがって $r^s s^r = 72 = 2^3 \cdot\ 3^2$

これを満たす素数の組 (r, s) は $(2, 3), (3, 2)$ のみ。

$[3] q = 11$ のとき

このとき

$2 \cdot 11^3 + 2 \cdot 11 + 4 = 2^{11} + 8r^s s^r$

したがって $r^s s^r = 80 = 2^4 \cdot 5^1$

これを満たす素数の組 (r, s) は存在しない。

以上から，条件を満たす整数の組 (p, q, r, s) は $(2, 7, 2, 3), (2, 7, 3, 2)$ である。