

第 112 問

次のうち, 正しいものを全て選べ。

- (1) 正則でない行列は必ず 0 を固有値に持つ。
- (2) 二つの可換な行列は, 必ず同時対角化できる。
- (3) 二つの対角化可能な行列の積は必ず対角化できる。
- (4) ふたつの積 AB, BA が計算できる行列 A, B において, AB と BA の対角成分の和は等しい。

作問者: negi_0613_

解答

- (1) 真: 正則でない行列は行列式が 0 であり、 $\lambda = 0$ が特性方程式 $\det(A - \lambda I) = 0$ の解となるため、0 が固有値である。
- (2) 偽: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば、 $AB = BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり、可換だが A は対角化できないので、当然同時対角化できない。
- (3) 偽: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすれば、 A, B は対角化可能だが、 $AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となり、対角化できない。
- (4) 真: a_{ij} で A の ij 成分を表せば、

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(AB) &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m a_{kl} b_{lk} \\ &= \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^n b_{lk} a_{kl} \\ &= \mathrm{tr}(BA)\end{aligned}$$

以上より、 $\boxed{1, 4}$ 。