第　44　問

実数 a, b が $a^2+b^2+(a+b)^2 \leqq 1$ を満たすとき, xy 平面上の点 $\left(ab-(a+b)^2, ab(a+b)\right)$ の動く領域のその面積を求めよ。

作問者：negi_0613_

解答

$c=-(a+b)$ とおくと, 条件は $a^2+b^2+c^2 \leqq 1$ と言い換えられる。
また, $X=ab-(a+b)^2, Y=ab(a+b)$ とおけば,

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ X=ab+bc+ca \\ Y=-abc \end{cases}$$

を満たす。このとき,

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca) \\ &= -2X \leqq 1 \end{aligned}$$

より, $X \geqq -\dfrac{1}{2}$。
また, a, b, c は t に関する 3 次方程式

$$t^3+Xt+Y=0$$

の 3 解であるので, この方程式が 3 つの実数解をもつ必要がある。そこで,

$$f(t)=t^3+Xt$$

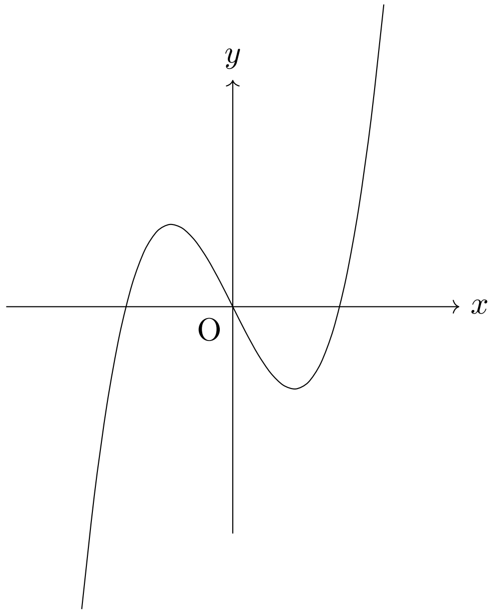
とおき, $y=f(t)$ と $y=-Y$ の交点が重解含め 3 つとなる条件を考える。

$$f'(t)=3t^2+X$$

より, $X \leqq 0$ が必要であり, このとき増減表を描けば,

t		$-\sqrt{\dfrac{-X}{3}}$		$\sqrt{\dfrac{-X}{3}}$	
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって, グラフを描けば,



これと, $y=-Y$ が重解含めて交点が 3 つとなればよいので,

$$f\left(\sqrt{\frac{-X}{3}}\right) \leqq -Y \leqq f\left(-\sqrt{\frac{-X}{3}}\right)$$

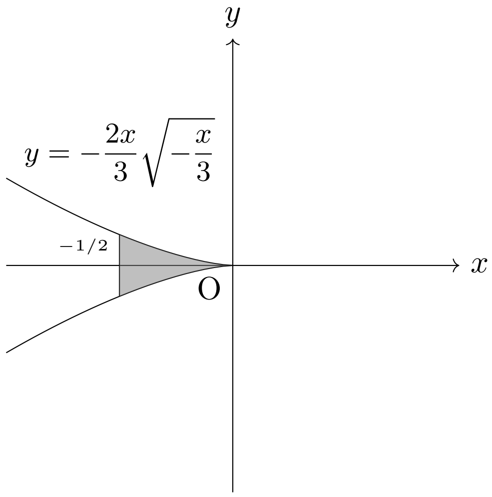
すなわち,

$$\frac{2X}{3}\sqrt{-\frac{X}{3}} \leqq Y \leqq -\frac{2X}{3}\sqrt{-\frac{X}{3}}$$

以上をまとめれば,

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2} \leqq X \leqq 0 \\ \dfrac{2X}{3}\sqrt{-\dfrac{X}{3}} \leqq Y \leqq -\dfrac{2X}{3}\sqrt{-\dfrac{X}{3}} \end{cases}$$

これを図示すれば,



また, 逆にこのとき, 条件を満たすことは明らか。よって, 求める面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= 2\int_{-\frac{1}{2}}^{0} -\frac{2x}{3}\sqrt{-\frac{x}{3}}dx \\ &= 2\int_{0}^{\frac{1}{2}} \frac{2\sqrt{3}}{9}y^{\frac{3}{2}}dy \\ &= \frac{4\sqrt{3}}{9}\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_{0}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{45} \end{aligned}$$