第　n　問

xyz 空間上に点 A: $(a, 0, 0)$ $(a > 0)$, 点 B:$(0, b, 0)$ $(b > 0)$, 点 C: $(0, 0, c)$ $(c > 0)$ を取る。三角形 ABC が面積 1 を満たしながら動くとき, 原点から三角形 ABC におろした垂線の足が動く軌跡の方程式を求めよ。さらに, この軌跡が囲む部分の体積を求めよ。ただし, ベータ関数を用いてよい。

作問者：negi_0613_

解答

まず, 三角形 ABC の面積 S を a, b, c を用いて表す。

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2}\sqrt{\left(|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2\right) - \left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}
\end{aligned}
$$

今, $S = 1$ なので,

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = 4$$

を満たす。

次に, 三角形 ABC におろした垂線の足の座標 H を a, b, c を用いて表す。今, 平面 ABC の方程式は,

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1$$

だからその法線ベクトル $\overrightarrow{n}$ のひとつは,

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{pmatrix}$$

とおける。よって,

$$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{n} \qquad (k\text{は正の実数})$$

とおける。今, 三角錐 OABC の体積は $\frac{abc}{6}$, 三角形 ABC の面積は 1 なので,

$$\frac{abc}{6} = \frac{1}{3}|\overrightarrow{OH}|$$

すなわち,

$$|\overrightarrow{OH}| = \frac{abc}{2}$$

である。

$$|\overrightarrow{n}| = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

であるから,

$$k = \frac{a^2b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}$$

とわかる。
これらより, 正の実数 a, b, c が

$$a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 = 4 \tag{$\star$}$$

を満たして動くとき,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{a^2b^2c^2}{2\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}} \begin{pmatrix} 1/a \\ 1/b \\ 1/c \end{pmatrix}$$

の動く軌跡の方程式を求めればよい。単に代入すれば,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{abc}{4} \begin{pmatrix} bc \\ ca \\ ab \end{pmatrix}$$

となることに注意すれば,

$$x^2+y^2+z^2 = 4\left(\frac{abc}{4}\right)^2$$

であるから,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = (x^2+y^2+z^2) \begin{pmatrix} 1/x \\ 1/y \\ 1/z \end{pmatrix}$$

と逆に解くことができる。よって, $(\star)$ に代入すれば,

$$(x^2+y^2+z^2)^4 \left(\frac{1}{x^2y^2}+\frac{1}{y^2z^2}+\frac{1}{z^2x^2}\right) = 4$$

となる。さらに整理すれば,

$$(x^2+y^2+z^2)^5 = 4x^2y^2z^2$$

このうち, 動く部分は $x>0, y>0, z>0$ の部分なので, 求める軌跡は,

$$\boxed{(x^2+y^2+z^2)^5 = 4x^2y^2z^2,\ x>0, y>0, z>0}$$

次に, 体積を求める。

$$x = r\cos\theta\cos\phi, y = r\cos\theta\sin\phi, z = r\sin\theta$$

とおくと, $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}, 0 \leqq \phi \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を動く。これを代入すれば,

$$r^{10} = 4r^6\cos^4\theta\sin^2\theta\cos^2\phi\sin^2\phi$$

今, $r, \cos\theta, \sin\theta, \cos\phi, \sin\phi$ は全て正なので,

$$r^2 = 2\cos^2\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi$$

となる。求める体積を V とすると,

$$\begin{aligned}
V &= \iiint dxdydz \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{r} r^2\cos\theta drd\theta d\phi \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi)^{\frac{3}{2}}\cos\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2\theta\sin\theta\cos\phi\sin\phi)^{\frac{3}{2}}\cos\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\sin^{\frac{3}{2}}\theta d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\phi\sin\phi)^{\frac{3}{2}}d\phi \\
&= \frac{\sqrt{2}}{6}B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)
\end{aligned}$$

以上から, 求める解答は

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{6}B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{2}\right)B\left(\frac{5}{4}, \frac{5}{4}\right)}$$