第 99 問

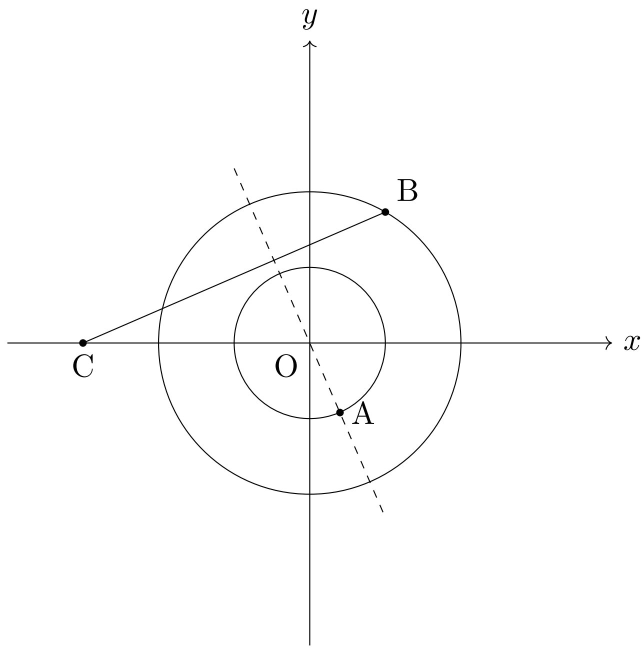
a, b, c を正の実数とする。xy 平面上において, 点 A が原点中心半径 a の円周上, 点 B が原点中心半径 b の円周上, 点 C が原点中心半径 c の円周上を動くとき, 次の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の面積が最大になるときはどのような時か。理由とともに答えよ。

(2) $a = 1, b = 3, c = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ のとき, 三角形 ABC の面積の最大値を求めよ。

解答

(1) 解答: $\boxed{\text{三角形 ABC の垂心が原点と一致するとき。}}$



以下, そのことを証明する。

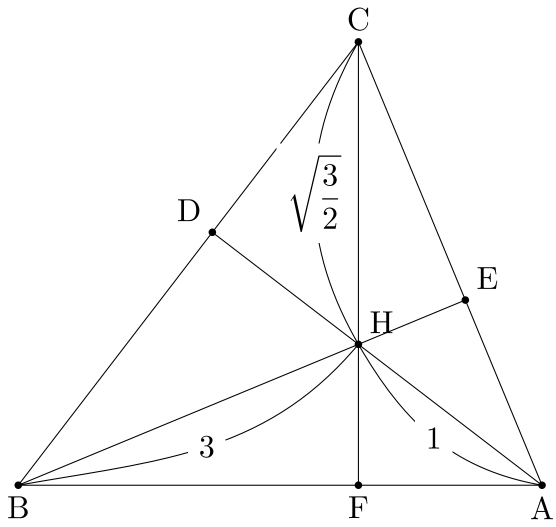
まず, $\mathrm{C}(-c, 0)$ としても一般性を失わない。

今, B を円周上のある一点に固定して考えると, 三角形 ABC の面積が最大になるのは, BC の長さは一定であるから, A と直線 BC の距離が最大の時である。これはすなわち, $\mathrm{AO} \perp \mathrm{BC}$ となる A のうち, 直線 BC から遠い方である。

次に, この条件のもと, B を動かすと, A のときと同様に $\mathrm{AC} \perp \mathrm{BO}$ のとき, 三角形 ABC の面積が最大になる。

以上のことから, $\mathrm{AO} \perp \mathrm{BC}$, $\mathrm{AC} \perp \mathrm{BO}$ が同時に成り立つとき面積が最大になるので, 求める答えは, 三角形 ABC の垂心と原点が一致する時。

(2) (1) より, 次の図のような三角形の面積を求めればよい。



図のように点 D, E, F を取る。HE= x とおけば, 相似から

$$\mathrm{HD} = 3x$$

が成り立つ。三平方の定理から,

$$\mathrm{CD}^2 + \mathrm{AD}^2 = \mathrm{AC}^2$$

が成り立つので,

$$\frac{3}{2} - 9x^2 + (1+3x)^2 = \left(\sqrt{\frac{3}{2} - x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)^2$$

これを整理すれば,

$$\frac{5}{2} + 6x = \frac{5}{2} - 2x^2 + 2\sqrt{\left(\frac{3}{2} - x^2\right)(1-x^2)}$$

$$\left(x^2+3x\right)^2 = \left(\frac{3}{2} - x^2\right)(1-x^2)$$

$$6x^3 + 9x^2 = -\frac{5}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

$$6x^3 + \frac{23}{2}x^2 - \frac{3}{2} = 0$$

今,

$$6x^3+\frac{23}{2}x^2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(3x-1)(4x^2+9x+3)$$

であるから, この解は

$$x=\frac{1}{3},\frac{-9\pm\sqrt{33}}{8}$$

このうち, 正であるものは,

$$x=\frac{1}{3}$$

のみ。求める面積 S は,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{9}}+\sqrt{1-\frac{1}{9}}\right)\\&=\frac{5}{3}\left(\frac{5}{6}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)\\&=\frac{5}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$