■　解答編（問題 11〜 問題 20）

問　題　11

以下のように場合分けして考える．

(i) n が 4 以外の合成数の場合

$(M,N)\neq(2,2)$ なる 2 以上の整数の組 (M,N) を用いて $n=MN$ と書ける．このとき，$MN-(M+N)=(M-1)(N-1)-1>0$ なので，$n>M+N$ である．この M,N を用いて，$n-1$ 次多項式 P を

$$P(x)=x^{n-1-M-N}\left(\prod_{i=1}^{M}(x+i)\right)\left(\prod_{i=1}^{N}(x+i)\right)$$

と定義すると，任意の m に対して，$P(m)$ が $M!N!$ の倍数，特に，$n=MN$ の倍数となる．

(ii) $n=1$ の場合

最高次の係数が 1 の 0 次多項式は 1 であるため，$n=1$ は**条件**を満たす．

(iii) (i)(ii) 以外の場合

n が 4 または素数とし，**条件**を満たすような $n-1$ 次多項式があったと仮定し，矛盾を導く．この多項式を P_{n-1} と定め，これを用いて，$n-2$ 次多項式 P_{n-2} を $P_{n-2}(x)=P_{n-1}(x+1)-P_{n-1}(x)$ で定める．この P_{n-2} の最高次の係数は $n-1$ であり，任意の整数 m に対して，$P_{n-2}(m)$ は n の倍数となる．更にこの P_{n-2} を用いて，$n-3$ 次多項式 P_{n-3} を $P_{n-3}(x)=P_{n-2}(x+1)-P_{n-2}(x)$ で定めると，P_{n-3} の最高次の係数は $(n-1)(n-2)$ となり，任意の整数 m に対して，$P_{n-3}(m)$ は n の倍数となる．このステップを繰り返すと，$(n-1)!$ が n の倍数になることが分かるが，n が 4 または素数の時はこれが成立しない．よって，矛盾が生じた．

以上より，(iii) の場合は**条件**を満たすような $n-1$ 次多項式が存在しないと分かった．

以上より，求める正の整数 n は，<u>4 以外の合成数と 1</u> である．

問　題　12

頂角を 2θ, 母線の長さを r として U は $(0,0,0),(r,0,0),(r\cos 2\theta, 0, r\sin 2\theta)$ の三点からなる二等辺三角形を z 軸まわりに 1 回転させた通過領域に等しい．この三角形の面積は $r^2\sin\theta\cos\theta$ であり重心は $\left(\dfrac{2r\cos^2\theta}{3}, \dfrac{r\sin 2\theta}{3}\right)$ であるからパップス・ギュルダンの定理より

$V = 2\pi\cdot\dfrac{2r\cos^2\theta}{3}\cdot r^2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{4\pi}{3}r^3\cdot\sin\theta\cos^3\theta$ ここで，円錐の高さを h とすると $\cos\theta = \dfrac{h}{r}, \sin\theta = \dfrac{\sqrt{r^2-h^2}}{r}$ であるから $V = \dfrac{4\pi}{3}\cdot\dfrac{h^3\sqrt{r^2-h^2}}{r}$,

さらに $r = \dfrac{1}{h}$ であるから $V = \dfrac{4\pi}{3}\cdot\sqrt{h^6-h^{10}}$ となる．

$\dfrac{d}{dh}(h^6-h^{10}) = 10h^5\left(\dfrac{3}{5}-h^4\right)$ であるから V は $h = \sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$ において最大値 $\dfrac{4\pi}{5}\sqrt[4]{\dfrac{4}{15}}$ をとる．

[別解]

V を求める際，パップス・ギュルダンの定理を用いずに大きな円錐から小さな円錐を二つ除く（解答略）

問　題　13

k を任意の自然数とする。
ここで、n が $k^2 \leqq n \leqq (k+1)^2 - 1$ の範囲にあるとき、

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor = k \qquad \cdots ①$$

となる。
ここで、n は整数 $x(0 \leqq x \leqq 2k)$ と k を用いて

$$n = k^2 + x \qquad \cdots ②$$

と表せる。
これより、①と②を $\dfrac{n^2}{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ に代入すると、

$$\frac{n^2}{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor} = \frac{k^4 + 2xk^2 + x^2}{k^2 + x - k} \qquad \cdots ③$$

となる。
ここで、③を変形すると、
$③ = k^2 + k + (x-1) + \dfrac{k - x}{k^2 + x - k}$
となり、$k^2 + k + (x-1)$ の部分は整数なので、③が整数となるには $\dfrac{k-x}{k^2+x-k}$ の部分が整数となればよい。これより以下の 2 通りについて考える。

(i) $k - x \geq k^2 + x - k$ のとき
これを変形すると、
$(k-1)^2 + 2x - 1 \leqq 0$
この不等式をみたす (k, x) は、
$(k, x) = (2, 0)$ のみであり、このときに $\dfrac{n^2}{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ は整数となる。($k^2 + x - k \neq 0$ なので、$(k, x) = (1, 0)$ は除く)

(ii) $k = x$ のとき
$\dfrac{k-x}{k^2+x-k} = 0$ かつ $k^2 + x - k \neq 0$ となるので、$\dfrac{n^2}{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ は必ず整数となる。
このとき、$n = k^2 + k$ と表せるので、n は $k = 1, 2, \cdots, 44$ の 44 個のときに $\dfrac{n^2}{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ は整数となる。

以上の (i)(ii) より、$\dfrac{n^2}{n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor}$ が整数となる $n(1 \leqq n \leqq 2025)$ は45 個存在する。

問　題　14

(1)
対偶である「k が合成数」$\Rightarrow$「2^k-1 が合成数」が真であることを示す。
(k は 2 以上なので、2^k-1 が 1 になることはない)
k が合成数、つまり $k=ab$ (a,b は 2 以上の自然数) と表せるとすると、

$$2^k-1=2^{ab}-1=(2^a-1)\left((2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+\cdots+2^a+1\right)$$

$a,b\geq 2$ より、両因子は 1 以上となる。つまり 2^k-1 は合成数となる。
よって題意は示された。□

(2)
ℓ が偶数である時

$$1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^m\equiv 1 \pmod 2$$

ℓ が奇数である時

$$1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^m\equiv\begin{cases}1 \pmod 2 & (m\text{ が偶数の時})\\ 0 \pmod 2 & (m\text{ が奇数の時})\end{cases}$$

$1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^m$ が 2 の倍数になるためには ℓ と m が奇数である必要がある。
よって、$m=2M+1$ (M は自然数) とし、これを代入すると、

$$\begin{aligned}1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^m&=\frac{\ell^{m+1}-1}{\ell-1}=\frac{\ell^{2(M+1)}-1}{\ell-1}=\frac{(\ell^{M+1}-1)(\ell^{M+1}+1)}{\ell-1}\\&=\left(1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^M\right)\left(\ell^{M+1}+1\right)\end{aligned}$$

同様の議論を $1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^M$ においても行い、それを同じように続けていくと、
全ての因子が 2 の倍数になるためには以下のようになる必要がある。

$$1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^m=(1+\ell)\left(1+\ell^2\right)\left(1+\ell^4\right)\cdots\left(1+\ell^{2^i}\right) \qquad (①)$$

(ただし、i は自然数、$m=2^{i+1}-1$)
ここで、「$1+\ell+\ell^2+\cdots+\ell^m=2^n$ を満たす ℓ,m,n の組が存在する」と仮定する。
① より、

$$1+\ell^{2^r}=2^{n_r}\quad(r=0,1,\cdots,i) \qquad (②)$$

$$n_0+n_1+\cdots+n_i=n\quad(1<n_0<n_1<\cdots<n_i)$$

となる必要がある。この時、$1+\ell=2^{n_0}$ より

$$1+\ell^2=1+(2^{n_0}-1)^2=2\left(2^{2n_0-1}-2^{n_0}+1\right)$$

$2^{2n_0-1}-2^{n_0}+1$ は 3 以上で 2 の倍数ではないので、$1+\ell^2$ は 2 以外の因数を持つ。
しかし、これは ② に矛盾する。背理法より題意は示された。□

(3)
自然数 u の正の約数の総和を S_u と表記する。
$p_1,p_2,\cdots,p_t$ は全て相異なる素数であり、$p_1<p_2<\cdots<p_t$ とする。

$$u=p_1^{A_1}\times p_2^{A_2}\times\cdots\times p_t^{A_t}$$

u が上記のように因数分解できるとすると、S_u は以下のように計算することができる。

$$S_u=(1+p_1+p_1^2+\cdots+p_1^{A_1})(1+p_2+\cdots+p_2^{A_2})\cdots(1+p_t+\cdots+p_t^{A_t})$$

$S_u = 1024 = 2^{10}$ なので、(2) より $A_1 = A_2 = \cdots = A_t = 1$ である。
よって、以下のようになる。

$$1 + p_s = 2^{q_s} \quad (s = 1, 2, \cdots, t) \qquad (③)$$

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_t = 10 \quad (q_1 < q_2 < \cdots < q_t) \qquad (④)$$

ここで、$p_1, p_2, \cdots, p_t$ は相異なる素数であり、③と (1) より、$q_1, q_2, \cdots, q_t$ は全て相異なる素数となる必要がある。
よって、④を満たす $q_1, q_2, \cdots, q_t$ は以下の 2 通りが考えられる。

(i) $(q_1, q_2, q_3) = (2, 3, 5)$ の時

$$(p_1, p_2, p_3) = (3, 7, 31)$$

$3, 7, 31$ は素数である。よって

$$u = 651$$

(ii) $(q_1, q_2) = (3, 7)$ の時

$$(p_1, p_2) = (7, 127)$$

$7, 127$ は素数である。よって

$$u = 889$$

(i)、(ii) より、$S_u = 1024$ を満たす自然数 u は 651 と 889 である。

《解答》

$$(m,n)=\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1},\ 3\right)\quad (k\text{ は非負整数})$$

《解説》

整数 a を用いて

$$\sqrt{\frac{m^2+4}{n^2-4}}=a$$

が成り立っているとすると，各種制約から

$$\begin{cases} m \geq 1 \\ n \geq 3 \\ a \geq 1 \end{cases}$$

でなければならない．

このとき，与式を整理すれば

$$m^2+4=a^2(n^2-4) \tag{1}$$

である．

ここで，偶奇に注目すると

$$m \equiv an \pmod 2$$

であるから，有理数 b を

$$b=\frac{an+m}{2}$$

と定めれば b は正の整数であることが分かり，

$$a^2-nab+b^2+1=0$$

が従う．

ここで，集合 S_n を

$$S_n=\left\{(a,b)\in\mathbb{N}^2\ :\ a^2-nab+b^2+1=0\right\}$$

とおく．

集合 S_n の元 (a,b) から $a+b$ を最小にするものをとり，それを (A,B) とする．

(i) $A \neq B$ のときを考える．一般性を失わず $A>B>1$ としてよい．

このとき，

$$A^2-nAB+B^2+1=0$$

が成立する．

ここで，二次方程式

$$x^2-nxB+B^2+1=0$$

は $x=A$ を解にもち，他方の解を A' とおくと解と係数の関係より

$$A'=nB-A=\frac{B^2+1}{A}$$

が成立する．特に，一つ目の等号より

$$A' \in \mathbb{Z}$$

であり，かつ二つ目の等号より

$$A' > 0$$

であるから，

$$A' \in \mathbb{N}$$

となるので，

$$(A', B) \in S_n$$

が得られる．

ここで (A, B) は S_n の元 (a, b) のうち $a + b$ を最小にするものだったから，$A' \geq A$ である必要があるが，すると仮定より

$$\begin{aligned} B^2 + 1 &= AA' \\ &\geq A^2 \\ &\geq (B+1)^2 \\ &= B^2 + 2B + 1 \\ &> B^2 + 1 \end{aligned}$$

となって矛盾する．

よって $A \neq B$ はあり得ない．

(ii) $A = B$ のときを考えると，

$$\begin{aligned} n &= \frac{A^2 + B^2 + 1}{AB} \\ &= \frac{A^2 + A^2 + 1}{A^2} \\ &= 2 + \frac{1}{A^2} \\ &\leq 3 \end{aligned}$$

より，

$$(A, B, n) = (1, 1, 3)$$

のみがあり得る．

以上で $n = 3$ である必要があると分かったので，数式 1 に戻って

$$m^2 - 5a^2 = -4$$

が得られる．

これを解くために，非負整数 x, y に対する方程式

$$x^2 - 5y^2 = -4$$

を解く．

非負整数 k に対して有理数列 $\{x_k\}$ と $\{y_k\}$ を次のように定める：

$$x_k + y_k\sqrt{5} = (1 + \sqrt{5})\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^k.$$

この x_k, y_k はともに整数であり，さらに偶奇が一致することを数学的帰納法により示す．

1. $k=0$ のとき
$$(x_0, y_0) = (1, 1)$$
であるから成立.

2. x_k と y_k が満たすとき，x_{k+1} と y_{k+1} について考える.
$$\begin{aligned}x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{5} &= (x_k + y_k\sqrt{5})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\\ &= \frac{(3x_k + 5y_k) + (x_k + 3y_k)\sqrt{5}}{2}\end{aligned}$$
であるから
$$\begin{cases} x_{k+1} = \dfrac{3x_k + 5y_k}{2} \\ y_{k+1} = \dfrac{x_k + 3y_k}{2} \end{cases}$$
となり，x_k と y_k の偶奇が一致しているという仮定よりこれらは整数である.
さらに，これより
$$x_{k+1} + y_{k+1} = 2(x_k + 2y_k)$$
であるからこれらの偶奇は一致している.
したがって，$k+1$ についても示された.

以上で，x_k, y_k はともに整数であり，さらに偶奇が一致することが示された.
今，結論を述べれば非負整数 x, y に対して
$$x^2 - 5y^2 = -4 \iff \text{ある非負整数 } k \text{ が存在して } (x, y) = (x_k, y_k)$$
を示すことができる.
以下，それを示す.

($\Longleftarrow$) 任意の非負整数 k に対して
$$\begin{aligned}&{x_k}^2 - 5{y_k}^2\\ =&(x_k + y_k\sqrt{5})(x_k - y_k\sqrt{5})\\ =&(1+\sqrt{5})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k (1-\sqrt{5})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k\\ =&(-4)1^k\\ =&-4\end{aligned}$$
と計算できる.
よって，非負整数 x, y に対して
$$x^2 - 5y^2 = -4 \Longleftarrow \text{ある非負整数 } k \text{ が存在して } (x, y) = (x_k, y_k)$$
が示された.

($\Longrightarrow$) 背理法により示す.
いかなる非負整数 k によっても
$$(x, y) = (x_k, y_k)$$
と表されないような非負整数の解の組 (x, y) が存在したと仮定する.
このとき，ある非負整数 k_0 を用いて
$$(1+\sqrt{5})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0} < x + y\sqrt{5} < (1+\sqrt{5})\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0+1}$$

と書けるはずである.

これより

$$1 < \frac{1}{-4}(x+y\sqrt{5})(1-\sqrt{5})\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{k_0} < \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

つまり

$$2 < \frac{(x+y\sqrt{5})(x_{k_0}-y_{k_0}\sqrt{5})}{-2} < 3+\sqrt{5}$$

が得られる.

ここで中辺は,x と y, x_{k_0} と y_{k_0} の偶奇がそれぞれ一致していることから $X+Y\sqrt{5}$ $(X, Y \in \mathbb{Z})$ とおけ,

$$\begin{aligned}
&X^2-5Y^2 \\
=&(X+Y\sqrt{5})(X-Y\sqrt{5}) \\
=&\frac{x+y\sqrt{5}}{2}\frac{x-y\sqrt{5}}{2}(x_{k_0}-y_{k_0}\sqrt{5})(x_{k_0}+y_{k_0}\sqrt{5}) \\
=&4
\end{aligned}$$

と計算できる.

ここで,

$$2 < X+Y\sqrt{5} < 3+\sqrt{5}$$

と，その逆数の -4 倍

$$-2 < -X+Y\sqrt{5} < -3+\sqrt{5}$$

の和より

$$0 < 2Y\sqrt{5} < 2\sqrt{5}$$

が成り立つが，これは Y が整数であることに矛盾する.

ゆえに背理法の仮定を捨てて，非負整数 x, y に対して

$$x^2-5y^2=-4 \implies \text{ある非負整数 } k \text{ が存在して } (x,y)=(x_k,y_k)$$

が示された.

以上で，非負整数 x, y に対して

$$x^2-5y^2=-4 \iff \text{ある非負整数 } k \text{ が存在して } (x,y)=(x_k,y_k)$$

が示された.

また，x_k と y_k $(k \geq 0)$ の一般項については

$$\begin{cases}
x_k+y_k\sqrt{5}=(1+\sqrt{5})\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^k \\
x_k-y_k\sqrt{5}=(1-\sqrt{5})\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^k
\end{cases}$$

より

$$\begin{cases}
x_k=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} \\
y_k=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}\right)
\end{cases}$$

である．
したがって，非負整数 $x,\ y$ に対する方程式

$$x^2-5y^2=-4$$

の解は

$$\begin{cases} x=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1} \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}\right) \\ (k\ \text{は非負整数}) \end{cases}$$

である．

以上から，実数 $\sqrt{\dfrac{m^2+4}{n^2-4}}$ が整数となるような正の整数の組 (m,n) を全て求めると

$$(m,n)=\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+1},\ 3\right)\quad (k\ \text{は非負整数})$$

である．

【コメント】

ルートがついていなかったらどうなのか？
正の整数 $m,\ n$ であって $\dfrac{m^2+4}{n^2-4}$ が整数であるようなものを全て求めたい．分子は素因数 3 をもたないので，n は 3 の倍数である．(42,15,8),(111,27,17),(469,39,145) などの例がある．

問　題　16

解答

(1) 直線 l と曲線 B の交点を (x_1, y_1) として、直線 l の方程式は

$$y - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(x - x_1)$$

直線 l は (0,-a) を通るので、

$$-a - y_1 = \frac{a^2 y_1}{b^2 x_1}(-x_1)$$
$$y_1 = \frac{ab^2}{a^2 - b^2}$$

$y_1 > 0$ より $a > b$

楕円 A の式に代入して、$x_1 > 0$ に注意して

$$x_1 = \frac{a}{a^2 - b^2}\sqrt{a^4 + b^4 - 3a^2b^2}$$

$(x_1, y_1) = \left(\dfrac{a}{a^2 - b^2}\sqrt{a^4 + b^4 - 3a^2b^2}, \dfrac{ab^2}{a^2 - b^2}\right)$

(2) $y_1 < b$ より

$$\frac{ab^2}{a^2 - b^2} < b$$
$$ab < a^2 - b^2 \quad (b > 0, a^2 - b - 2 > 0)$$
$$0 < a^2 - ab - b^2$$
$$= (a - \frac{b}{2})^2 - \frac{5}{4}b^2$$

$s = \dfrac{a}{b}$ とおいて $\dfrac{b}{2} < b < a$ に注意して

$$\frac{\sqrt{5}}{2}b < a - \frac{b}{2}$$
$$\frac{1 + \sqrt{5}}{2} < \frac{a}{b} = s$$

また

$$\frac{a^2}{(a^2 - b^2)^2}(a^4 + b^4 - 3a^2b^2) + \left(\frac{ab^2}{a^2 - b^2} + a\right)^2 = (ta)^2$$

より

$$t^2 = \frac{2a^2 - b^2}{a^2 - b^2} = \frac{2s^2 - 1}{s^2 - 1} = 2 + \frac{1}{s^2 - 1}$$

$\dfrac{3 + \sqrt{5}}{2} < s^2$ より

$$t^2 = 2 + \frac{1}{s^2 - 1} < 2 + \frac{1}{\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

問 題 17

「xy 平面上で原点から鏡を通してみることができる領域」を「原点に転向弦を置いた時に，光が鏡に反射されて xy 平面を照らす領域」と読み替える．
鏡上の点を $\boldsymbol{r}_m = (x_m,\, y_m,\, z_m)$ とすると以下条件を満たす．

$$\begin{cases} y_m - 2z_m + 3 = 0 \\ x_m^2 + (y_m+1)^2 + (z_m-1)^2 \leqq 1 \end{cases}$$

よって，以下のようにパラメータ r, θ を用いて表すことができる．

$$\boldsymbol{r}_m = \left(r\cos\theta,\, \frac{2\sqrt{5}}{5} r\sin\theta - 1,\, \frac{\sqrt{5}}{5} r\sin\theta + 1 \right), \quad (0 \leqq r \leqq 1,\, 0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

原点から $\boldsymbol{r}_m$ に向かう入射光の方向ベクトルを $\boldsymbol{d}_i$ とすると，$\boldsymbol{d}_i = \boldsymbol{r}_m$ と表現することができる．反射光の方向ベクトルを $\boldsymbol{d}_r$，鏡の法線ベクトルを $\boldsymbol{n}_m$ とすると，$\boldsymbol{n}_m = (0,\, 1,\, -2)$ であり，以下の 2 条件を満たす．

$$|\boldsymbol{d}_i| = |\boldsymbol{d}_r| \tag{2}$$
$$-\boldsymbol{d}_i + \boldsymbol{d}_r = k\boldsymbol{n}_m \quad (k \in \mathbb{R}) \tag{3}$$

(2 つの大きさが等しいベクトルの和は角の二等分線を表現することができる．)
(3) より

$$\boldsymbol{d}_r = \left(r\cos\theta,\, k + \frac{2\sqrt{5}}{5} r\sin\theta - 1,\, -2k + \frac{\sqrt{5}}{5} r\sin\theta + 1 \right)$$

これを (2) に代入すると $k = \dfrac{6}{5}$ と計算することができるので，

$$\boldsymbol{d}_r = \left(r\cos\theta,\, \frac{2\sqrt{5}}{5} r\sin\theta + \frac{1}{5},\, \frac{\sqrt{5}}{5} r\sin\theta - \frac{7}{5} \right)$$

である．よって，反射光上の点は $\boldsymbol{r}_m + t\boldsymbol{d}_r$ $(t \in \mathbb{R})$ とすることができる．今回，求めたい領域上の点を $\boldsymbol{r} = (x,\, y,\, 0)$ とすると，$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_m + t\boldsymbol{d}_r$ を満たすので，これを解くと以下のようになる．

$$\begin{cases} t = \dfrac{5 + \sqrt{5} r\sin\theta}{5 - \sqrt{5} r\sin\theta} \\ x = \dfrac{12 r\cos\theta}{7 - \sqrt{5} r\sin\theta} \\ y = \dfrac{-6 + 6\sqrt{5} r\sin\theta}{7 - \sqrt{5}\sin\theta} \end{cases}$$

これを式変形すると

$$\begin{cases} r\sin\theta = \dfrac{6 + 7y}{\sqrt{5}(6+y)} \\ r\cos\theta = \dfrac{3x}{6+y} \end{cases}$$

よって，x, y が満たすべき関係式は以下のようになる．

$$\left(\frac{3x}{6+y} \right)^2 + \frac{1}{5} \left(\frac{6+7y}{6+y} \right)^2 = r^2 \leqq 1.$$

これを整理すると,

$$\frac{11}{36} x^2 + \frac{121}{405} \left(y + \frac{3}{11} \right)^2 \leqq 1.$$

k ろえは楕円になるので，求めたい面積 S は

$$S = \pi \sqrt{\frac{36 \cdot 405}{11 \cdot 121}} = \frac{54\sqrt{55}}{121} \pi$$

である．

問　題　18

《解答》

$$\frac{n^n}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}$$

《解説》任意の非負整数 n に対して，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,dx = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

が成り立つ．

証明．非負整数 n に対して I_n を

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,dx$$

と定める．
数学的帰納法により

$$I_n = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

を示す．

(i) $n=0$ のとき，

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx$$

であるから，直ちに

$$I_0 = \frac{\pi}{2}$$

が得られる．
よって $n=0$ のとき示された．

(ii) n を 1 以上の非負整数とし，$n-1$ について命題の成立を仮定する．
このとき，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\,dx$$

は

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-1}(\cos x)\,dx$$

と表現できるから，部分積分より

$$\begin{aligned} I_n &= \Big[(\cos x)^{2n-1}(\sin x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &\quad -(2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-2}(-\sin x)(\sin x)\,dx \end{aligned}$$

が成り立つので，整理して

$$I_n = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-2}(\sin x)^2\,dx$$

が成り立つ．
ここで

$$(\sin x)^2 = 1-(\cos x)^2$$

を用いて変形して

$$I_n = (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-2}\, dx - (2n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n}\, dx$$

であるから,

$$I_n = (2n-1)\, I_{n-1} - (2n-1)\, I_n$$

つまり

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}$$

が得られる.

数学的帰納法の仮定

$$I_{n-1} = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2k}$$

をここに適用して

$$I_n = \frac{\pi}{2}\frac{2n-1}{2n}\prod_{k=1}^{n-1}\frac{2k-1}{2k}$$

であるから

$$I_n = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

が示された.

以上から, 全ての非負整数 n において

$$I_n = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

が示された. □

任意の非負整数 n に対して,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1}\, dx = \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$$

が成り立つ.

証明. 非負整数 n に対して I_n を

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1}\, dx$$

と定める.

数学的帰納法により

$$I_n = \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$$

を示す.

(i) $n=0$ のとき,

$$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

であるから,

$$\begin{aligned} I_0 =& [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ =& 1 \end{aligned}$$

が得られる.

よって $n=0$ のとき示された.

(ii) n を 1 以上の非負整数とし，$n-1$ について命題の成立を仮定する．
このとき，

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1}\, dx$$

は

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n} (\cos x)\, dx$$

と表現できるから，部分積分より

$$\begin{aligned} I_n = &\left[(\cos x)^{2n} (\sin x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &- (2n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-1} (-\sin x) (\sin x)\, dx \end{aligned}$$

が成り立つので，整理して

$$I_n = (2n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-1} (\sin x)^2\, dx$$

が成り立つ．
ここで

$$(\sin x)^2 = 1 - (\cos x)^2$$

を用いて変形して

$$I_n = (2n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n-1}\, dx - (2n) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1}\, dx$$

であるから，

$$I_n = (2n)\, I_{n-1} - (2n)\, I_n$$

つまり

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} I_{n-1}$$

が得られる．
数学的帰納法の仮定

$$I_{n-1} = \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{2k+1}$$

をここに適用して

$$I_n = \frac{2n}{2n+1} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k}{2k+1}$$

であるから

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

が示された．

以上から，全ての非負整数 n において

$$I_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}$$

が示された． □

任意の非負整数 n に対して，

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n+2}} \leq \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

が成り立つ．

証明．実数 x において

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq \cos x \leq 1$$

である．
よって実数 x において不等式

$$\begin{aligned} 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies 0 \leq& (\cos x)^{2n+2} \\ \leq& (\cos x)^{2n+1} \\ \leq& (\cos x)^{2n} \end{aligned}$$

が成立する．
不等式の二つの辺で定積分をとって，不等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+2}\,dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos x)^{2n+1}\,dx$$

が成り立つ．
この不等式に命題 1,2 の結果を代入して

$$\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{2k-1}{2k} \leq \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$$

であり，各辺を

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

で割って

$$\frac{\pi}{2}\frac{2n+1}{2n+2} \leq \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)(2k)}{(2k+1)(2k-1)}$$

となる．
右辺について，

$$\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)(2k)}{(2k+1)(2k-1)} = (2n+1)\prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}$$

であるから，不等式

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n+2} \leq \prod_{k=1}^{n}\frac{(2k)^2}{(2k+1)^2}$$

が成り立ち，各辺で根号をとれば不等式

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n+2}} \leq \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$$

が得られる．
右辺を命題 2 により書き換えれば

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n+2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n+1}\,dt$$

が分かり，上で示した

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies (\cos x)^{2n+1} \leq (\cos x)^{2n}$$

を用いれば

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n+2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n}\, dt$$

が分かる．
命題 1 により再び右辺を書き換えれば

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}\frac{1}{2n+2}} \leq \frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}$$

が示された． □

任意の非負整数 n と，0 でない実数 x に対して，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} (\cos 2xt)\, dt = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}\right)\frac{\sin(\pi x)}{2x}$$

が成り立つ．

証明. 非負整数 n に対して I_n を

$$I_n(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} (\cos 2xt)\, dt$$

と定める．
数学的帰納法により

$$I_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}\right)\frac{\sin(\pi x)}{2x}$$

を示す．

(i) $n=0$ のとき，

$$I_0(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 2xt)\, dt$$

であるから，

$$\begin{aligned} I_0(x) &= \left[\frac{\sin 2xt}{2x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\sin(\pi x)}{2x} \end{aligned}$$

が得られる．
よって $n=0$ のとき示された．

(ii) n を 1 以上の非負整数とし，$n-1$ について命題の成立を仮定する．
部分積分より

$$\begin{aligned} I_n(x) =& \frac{1}{2x}\left[\frac{(\cos t)^{2n} (\sin 2xt)}{2x}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &- \frac{2n}{2x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{(2n-1)} (-\sin t) (\sin 2xt)\, dt \end{aligned}$$

が成り立つので，整理して

$$I_n(x) = \frac{2n}{2x}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{(2n-1)} (\sin t) (\sin 2xt)\, dt$$

が成り立つ．
再び部分積分より

$$\begin{aligned} I_n(x) =& \frac{2n}{(2x)^2}\left[(\cos t)^{(2n-1)} (\sin t) (-\cos 2xt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &- \frac{2n}{(2x)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-(2n-1)(\cos t)^{(2n-2)} (\sin t)^2 + (\cos t)^{2n}\right) (-\cos 2xt)\, dt \end{aligned}$$

が成り立つので，整理して

$$\begin{aligned} I_n(x) =& \frac{2n}{(2x)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} (\cos 2xt)\, dt \\ &- \frac{2n(2n-1)}{(2x)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{(2n-2)} (\sin t)^2 (\cos 2xt)\, dt \end{aligned}$$

が成り立つ．
ここで

$$(\sin t)^2 = 1 - (\cos t)^2$$

を用いて変形して

$$\begin{aligned} I_n(x) =& \frac{(2n)^2}{(2x)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} (\cos 2xt)\, dt \\ &- \frac{2n(2n-1)}{(2x)^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{(2n-2)} (\cos 2xt)\, dt \end{aligned}$$

であるから，

$$I_n(x) = \frac{4n^2}{4x^2} I_n(x) - \frac{2n(2n-1)}{4x^2} I_{n-1}(x)$$

つまり

$$I_n(x) = \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}} I_{n-1}(x)$$

が得られる．
数学的帰納法の仮定

$$I_{n-1}(x) = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}\right)\frac{\sin(\pi x)}{2x}$$

をここに適用して

$$I_n(x) = \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{1-\frac{x^2}{n^2}}\left(\prod_{k=1}^{n-1} \frac{2k-1}{2k}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}\right)\frac{\sin(\pi x)}{2x}$$

であるから

$$I_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}\right)\frac{\sin(\pi x)}{2x}$$

が示された．

以上から，全ての非負整数 n において

$$I_n(x) = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}\frac{1}{1-\frac{x^2}{k^2}}\right)\frac{\sin(\pi x)}{2x}$$

が示された． □

任意の実数 x に対して，

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

が成り立つ．

証明. (i) $0 \leq x < \dfrac{\pi}{2}$ のときを考える．

任意の実数 t に対し不等式

$$0 \leq t < \frac{\pi}{2} \implies 1 \leq 1 + \tan^2 t$$

が成り立つので，両辺積分して

$$\int_0^x 1dt \leq \int_0^x \left(1 + \tan^2 t\right) dt$$

も成り立つ．

左辺は

$$\int_0^x 1dt = x$$

と計算でき，右辺は

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(1 + \tan^2 t\right) dt &= [\tan t]_0^x \\ &= \tan x\end{aligned}$$

と計算できるので，これで不等式

$$x \leq \tan x$$

が得られる．

等式

$$\cos x = \frac{1}{1 + \tan^2 x}$$

とこの不等式より，

$$\cos x \leq \frac{1}{1+x^2}$$

が示された．

(ii) $x = \dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

であることから

$$\cos\frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}}$$

となるので示された．

以上から，任意の実数 x に対して，

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \implies \cos x \leq \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

が成り立つことが示された． □

任意の実数 x に対して，

$$1 - \cos x \leq |x|$$

が成り立つ．

証明． (i) $x \geq 0$ のときを考える．

任意の実数 t に対し不等式

$$\sin t \leq 1$$

が成り立つので，両辺積分して

$$\int_0^x \sin t dt \leq \int_0^x 1 dt$$

も成り立つ．

左辺は

$$\begin{aligned}\int_0^x \sin t dt =& [-\cos t]_0^x \\ =& 1 - \cos x\end{aligned}$$

と計算でき，右辺は

$$\int_0^x 1 dt = x$$

と計算できるので，これで不等式

$$1 - \cos x \leq x$$

つまり

$$1 - \cos x \leq |x|$$

が示された．

(ii) $x < 0$ のときを考えると，$-x \geq 0$ だから先に示したことより

$$\begin{aligned}1 - \cos x =& 1 - \cos(-x) \\ \leq& |-x| \\ =& |x|\end{aligned}$$

とできるので，$x < 0$ のときも

$$1 - \cos x \leq |x|$$

が示された．

以上から，全ての実数 x において

$$1 - \cos x \leq |x|$$

が示された． □

任意の 0 でない実数 x に対して，

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

が成り立つ．

証明． n を 2 以上の非負整数とする．

命題 4 より

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \left(\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} (\cos 2xt)\, dt}{\frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}}\right) \prod_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

が得られる．

よって命題の証明のためには,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}(\cos 2xt)\,dt}{\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}}\right)=1$$

を示せばよい.
命題 1 より

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}(\cos 2xt)\,dt\right|\\&=\left|\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}\,dt-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}(\cos 2xt)\,dt\right|\end{aligned}$$

であり，すなわち

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}(\cos 2xt)\,dt\right|\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}(1-\cos 2xt)\,dt\end{aligned}$$

が成立する.
ここで命題 5,6 を用いれば

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}(\cos 2xt)\,dt\right|\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^{2n}|2xt|\,dt\end{aligned}$$

すなわち

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}(\cos 2xt)\,dt\right|\\&=|x|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t}{(1+t^2)^n}dt\end{aligned}$$

となり，置換積分によりこの積分を計算すれば

$$\begin{aligned}&\left|\frac{\pi}{2}\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^{2n}(\cos 2xt)\,dt\right|\\&=|x|\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2t}{(1+t^2)^n}dt\\&=|x|\int_0^{\frac{\pi^2}{4}}\frac{1}{(1+t)^n}dt\\&=\frac{|x|}{-n+1}\left[\frac{1}{(1+t)^{(n-1)}}\right]_0^{\frac{\pi^2}{4}}\\&=\frac{|x|}{-n+1}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{(n-1)}}-1\right)\\&=\frac{|x|}{n-1}\left(1-\frac{1}{\left(1+\frac{\pi^2}{4}\right)^{(n-1)}}\right)\\&\leq\frac{|x|}{n-1}\end{aligned}$$

が得られる．
今得た不等式

$$\left| \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} (\cos 2xt)\, dt \right| \leq \frac{|x|}{n-1}$$

を，命題 3 で得た不等式

$$\sqrt{\frac{\pi}{2} \frac{1}{2n+2}} \leq \frac{\pi}{2} \prod_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$$

で割って

$$\left| 1 - \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} (\cos 2xt)\, dt}{\frac{\pi}{2} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{2n+2}}{n-1} |x|$$

□

が成り立つ．
右辺の極限は

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{2n+2}}{n-1} |x| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sqrt{2+\frac{2}{n}}}{\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}} |x| = 0$$

であることから，はさみうちの定理より左辺の極限も 0 である．
したがって，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^{2n} (\cos 2xt)\, dt}{\frac{\pi}{2} \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}} = 1$$

である．
ゆえに，

$$\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right)$$

が成り立つことが示された．[1]
任意の正の整数 n に対して，

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^{2n-1} \frac{nk+l}{nk+n} \right) = \frac{n^n}{(2\pi)^{n-1} (n-1)!}$$

が成り立つ．

証明. まず，いくつかの総乗を求める．

- 方程式

  $$x^n - 1 = 0$$

  の解は

  $$x = \cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right) \quad (l = 0, 1, \ldots, n-1)$$

  であるから，因数定理より

  $$x^n - 1 = \prod_{l=0}^{n-1} \left(x - \left(\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right) \right) \right)$$

  が成り立つ．

さらに左辺も変形して

$$(x-1)\left(\sum_{l=0}^{n-1} x^l\right) = (x-1)\prod_{l=1}^{n-1}\left(x-\left(\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right)\right)$$

となる．

両辺を多項式 $(x-1)$ で割った商より恒等式

$$\left(\sum_{l=0}^{n-1} x^l\right) = \prod_{l=1}^{n-1}\left(x-\left(\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right)\right)$$

が得られ，$x=1$ を代入して

$$\left(\sum_{l=0}^{n-1} 1^l\right) = \prod_{l=1}^{n-1}\left(1-\left(\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right)\right)$$

すなわち

$$\prod_{l=1}^{n-1}\left(1-\left(\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right)\right) = n$$

が得られる．

一方で，l を 1 以上 $n-1$ 以下の任意の整数とすると

$$\cos\left(\frac{l\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^l$$

かつ

$$\cos\left(\frac{l\pi}{n}\right)-i\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-l}$$

であるから，辺々引いて

$$2i\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^l - \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{-l}$$

となり，整理して

$$2i\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \frac{\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{2l}-1}{\left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)^{l}}$$

が得られる．

両辺の絶対値をとることで，1 以上 $n-1$ 以下の任意の整数 l に対して

$$2\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \left|1-\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^l\right|$$

が成り立つから，$l=1$ から $l=n-1$ まで積をとって

$$\prod_{l=1}^{n-1} 2\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \prod_{l=1}^{n-1}\left|1-\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^l\right|$$

すなわち

$$2^{n-1}\prod_{l=1}^{n-1}\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right) = \left|\prod_{l=1}^{n-1}\left(1-\left(\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right)^l\right)\right|$$

となる．

この右辺については先に示したように

$$\prod_{l=1}^{n-1}\left(1-\left(\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right)\right) = n$$

が成り立っているから，結果として

$$2^{n-1}\prod_{l=1}^{n-1}\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right)=|n|$$

すなわち

$$\prod_{l=1}^{n-1}\sin\left(\frac{l\pi}{n}\right)=\frac{n}{2^{n-1}}$$

が得られる．

- 一般に

$$\prod_{l=1}^{n-1}l=(n-1)!$$

が成り立つ．

- 一般に

$$\prod_{l=1}^{n-1}\pi=\pi^{n-1}$$

が成り立つ．

- 一般に

$$\prod_{l=1}^{n-1}n=n^{n-1}$$

が成り立つ．

以上から，

$$\prod_{l=1}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{\pi l}{n}\right)}{\frac{\pi l}{n}}=\frac{\frac{n}{2^{n-1}}}{\frac{\pi^{n-1}(n-1)!}{n^{n-1}}}$$

すなわち

$$\prod_{l=1}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{\pi l}{n}\right)}{\frac{\pi l}{n}}=\frac{n^n}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}$$

が成り立つことが分かった．

さて，命題 7 によれば 1 以上 $n-1$ 以下の任意の整数 l に対して

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi l}{n}\right)}{\frac{\pi l}{n}}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{l^2}{n^2k^2}\right)$$

であるから，$l=1$ から $l=n-1$ まで積をとって

$$\prod_{l=1}^{n-1}\frac{\sin\left(\frac{\pi l}{n}\right)}{\frac{\pi l}{n}}=\prod_{l=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{l^2}{n^2k^2}\right)$$

が成り立ち，極限の積は積の極限であるから

$$
\begin{aligned}
\prod_{l=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{n}\right)}{\frac{\pi l}{n}} &= \prod_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{l^2}{n^2 k^2}\right) \\
&= \prod_{l=1}^{n-1} \lim_{M\to\infty} \prod_{k=1}^{M} \left(1 - \frac{l^2}{n^2 k^2}\right) \\
&= \lim_{M\to\infty} \prod_{l=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{M} \left(1 - \frac{l^2}{n^2 k^2}\right) \\
&= \lim_{M\to\infty} \prod_{k=1}^{M} \prod_{l=1}^{n-1} \left(1 - \frac{l^2}{n^2 k^2}\right) \\
&= \prod_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n-1} \left(1 - \frac{l^2}{n^2 k^2}\right)
\end{aligned}
$$

とできる．

すなわち，

$$\prod_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n-1} \left(1 - \frac{l^2}{n^2 k^2}\right) = \prod_{l=1}^{n-1} \frac{\sin\left(\frac{\pi l}{n}\right)}{\frac{\pi l}{n}}$$

が得られたので，先に得た結果を右辺に代入して

$$\prod_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n-1} \left(1 - \frac{l^2}{n^2 k^2}\right) = \frac{n^n}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}$$

となることが分かった．

左辺を変形して

$$\prod_{k=1}^{\infty} \prod_{l=1}^{n-1} \left(\frac{nk-l}{nk}\right)\left(\frac{nk+l}{nk}\right) = \frac{n^n}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}$$

となり，添字を調整して

$$\prod_{k=0}^{\infty} \prod_{l=1}^{n-1} \left(\frac{nk+n-l}{nk+n}\right)\left(\frac{nk+n+l}{nk+n}\right) = \frac{n^n}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}$$

が成り立つ．

これは

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^{n-1} \frac{nk+n-l}{nk+n}\right)\left(\frac{nk+n}{nk+n}\right)\left(\prod_{l=1}^{n-1} \frac{nk+n+l}{nk+n}\right) = \frac{n^n}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}$$

さらに

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^{n-1} \frac{nk+l}{nk+n}\right)\left(\frac{nk+n}{nk+n}\right)\left(\prod_{l=1}^{n-1} \frac{nk+n+l}{nk+n}\right) = \frac{n^n}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}$$

と表現することができる．

ゆえに，求めるべきであったものの値は

$$\prod_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{l=1}^{2n-1} \frac{nk+l}{nk+n}\right) = \frac{n^n}{(2\pi)^{n-1}(n-1)!}$$

であると示された． □

参考文献

[1] D. Salwinski. (2018). Euler's Sine Product Formula: An Elementary Proof. *The College Mathematics Journal.*

問　題　19

《解答》

正弦定理より

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{x}{\sin\left(x^2\right)}$$

が成り立たなければならない.

よって,

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x^2}{\sin\left(x^2\right)}$$

が成り立たなければならない.

これを解くために，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

と定め，これについて考察する.

$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は，商の微分公式より

$$f'(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{(\sin x)^2}$$

と計算できる.

この分子の部分を

$$g(x) = \sin x - x\cos x$$

とおけば，この導関数 $g'(x)$ は

$$\begin{aligned} g'(x) &= \cos x - (\cos x - x\sin x) \\ &= x\sin x \end{aligned}$$

と計算できる.

よって，$g(x)$ の $0 \leq x \leq \pi$ の部分の増減は

x	0	$\cdots$	π
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	π

となる.

これより，$f(x)$ の $0 < x < \pi$ の部分の増減は

x	(0)	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	(1)	$\nearrow$	(∞)

となる.

これで，$f(x)$ は $0 < x < \pi$ において単調に増加することがわかった.

ゆえに，実数 a と b が $0 < a < \pi$ と $0 < b < \pi$ を満たしているとき

$$f(a) = f(b) \implies a = b$$

が成り立つことが分かる.

それでは方程式

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{x^2}{\sin\left(x^2\right)}$$

に戻ろう.

方程式から

$$f(x) = f\left(x^2\right)$$

であり，一方で，設定 $0 < x < \sqrt{\pi}$ より

$$\begin{cases} 0 < x < \pi \\ 0 < x^2 < \pi \end{cases}$$

であるため，上で示した性質から

$$x = x^2$$

が導かれる．
これを成り立たせるような実数 x で，$0 < x < \sqrt{\pi}$ を満たすものは，

$$x = 1$$

である．
したがって答えは 1.

問 題　20

積分と調和級数

a は $0 < a < 1$ を満たす実数とし, n を自然数とする.

関数 f_n を $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$ と定めるとき, 次の問いに答えよ.

(1)　(i)　$0 \leqq x \leqq a$ のとき, $\left| f_n(x) - \dfrac{1}{1-x} \right| \leqq \dfrac{x^n}{1-a}$ が成り立つことを示せ.

(ii)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x$ の値を求めよ.

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ の値を求めよ.

---

(1)　(i)　f_n は等比数列の和であり, $0 \leqq x \leqq a$ の範囲で $x \neq 1$ であるので, $f_n(x) = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ となる.

$$\left| f_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{1-x^n}{1-x} - \frac{1}{1-x} \right| = \left| \frac{-x^n}{1-x} \right|$$

$0 \leqq x \leqq a$, $0 < a < 1$ より, $0 < 1-x \leqq 1-a \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{1-x} \leqq \dfrac{1}{1-a}$

$\left| \dfrac{-x^n}{1-x} \right| = \dfrac{x^n}{1-x} \leqq \dfrac{x^n}{1-a}$ なので, $\left| f_n(x) - \dfrac{1}{1-x} \right| \leqq \dfrac{x^n}{1-a}$ が成り立つ.

(ii)　(i) より, $\left| f_n(x) - \dfrac{1}{1-x} \right| \leqq \dfrac{x^n}{1-a}$ が成り立つ.

$0 \leqq x \leqq a$ の範囲で両辺を積分すると

$$\int_0^a \left| f_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| \mathrm{d}x \leqq \int_0^a \frac{x^n}{1-a}\,\mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{(1-a)(n+1)}$$

また, $\left| \displaystyle\int_0^a f_n(x) - \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x \right| \leqq \displaystyle\int_0^a \left| f_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| \mathrm{d}x$ が成り立つので

$$\left| \int_0^a f_n(x) - \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x \right| \leqq \int_0^a \left| f_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| \mathrm{d}x \leqq \frac{a^{n+1}}{(1-a)(n+1)}$$

両端の式で極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_0^a f_n(x) - \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x \right| \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}}{(1-a)(n+1)} = 0$$

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\log(1-x) \Big]_0^a = -\log(1-a)$$

(2)　積分 $\displaystyle\int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x$ を $y = 1-x$ で置換すると

$$\int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a \frac{1-x^n}{1-x}\,\mathrm{d}x = \int_{1-a}^1 \frac{1-(1-y)^n}{y}\,\mathrm{d}y$$

$(1-y)^n$ を展開すると, $(1-y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(-y)^k$ なので

$$\int_{1-a}^1 \frac{1-(1-y)^n}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{1-a}^1 \left(\sum_{k=1}^{n} {}_n\mathrm{C}_k(-y)^{k-1} \right) \mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k \int_{1-a}^1 y^{k-1}\,\mathrm{d}y$$

$\displaystyle\int_{1-a}^{1} y^{k-1}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{y^k}{k}\right]_{1-a}^{1} = \frac{1-(1-a)^k}{k}$ より

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k \int_{1-a}^{1} y^{k-1}\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}\{1-(1-a)^k\}$$

ここで極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}\{1-(1-a)^k\}$$

(ii) より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^a f_n(x)\,\mathrm{d}x = -\log(1-a)$ なので

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}\{1-(1-a)^k\} = -\log(1-a)$$

$a = \dfrac{1}{2}$ を代入すると

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}\left(1-\frac{1}{2^k}\right) = \log 2$$