

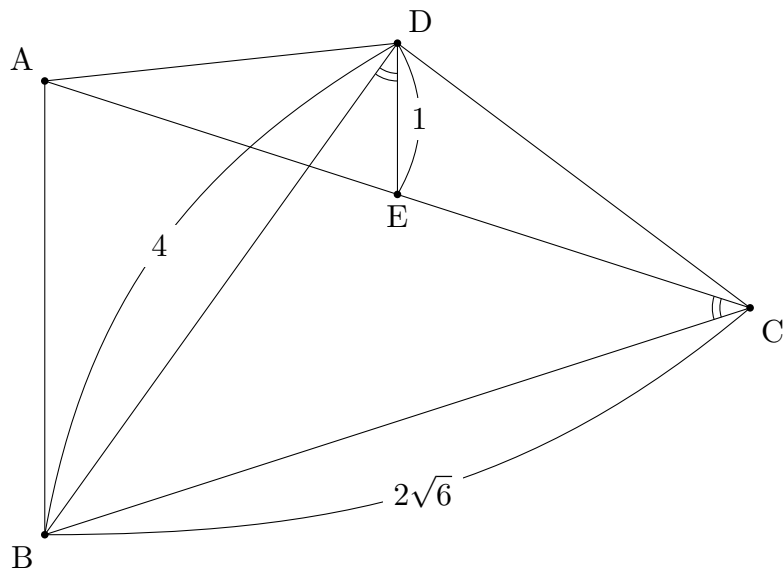
第 3 問

凸四角形 ABCD において、AC の中点を E とすると、 $CA = CB$, $\angle ACB = \angle BDE$ が成り立っている。 $BC = 2\sqrt{6}$, $BD = 4$, $DE = 1$ のとき、AB の長さを求めよ。

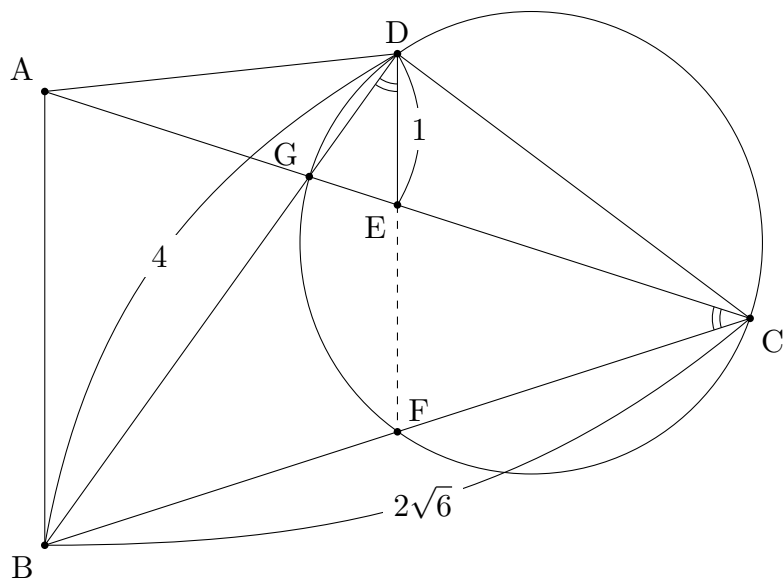
作問者：negi_0613_

解答

まず、図を描くと以下ようになる。



DE と BC の交点を F とする。また, BD と AC の交点を G とする。このとき円周角の定理の逆から 4 点 DGFC は同一円周上にある。



ここで, $\triangle DEG \sim \triangle CEF$ であり, その相似比は,

$$DE : CE = 1 : \sqrt{6}$$

であるから, $DG = x$ とおくと, $CF = \sqrt{6}x$ である。方べきの定理より,

$$\begin{aligned}BG \cdot BD &= BF \cdot BC \\(4 - x) \cdot 4 &= (2\sqrt{6} - \sqrt{6}x) \cdot 2\sqrt{6}\end{aligned}$$

これを解けば,

$$x = 1$$

が分かる。このことから, F は BC の中点であり, 中点連結定理より,

$$DF \parallel AB$$

が成り立つ。よって AB の長さは,

$$AB : DE = BG : DG$$

より,

$$AB = 3$$

と分かる。