■　解答編（問題 61〜 問題 64）

問　題　61

《解答》

曲線の式

$$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$$

の両辺を 2 乗すると

$$x+y+\sqrt{4xy}=1$$

となり，これは

$$\sqrt{(x+y)^2-(-x+y)^2}=1-(x+y)$$

であるから再び二乗して

$$(x+y)^2-(-x+y)^2=(1-(x+y))^2$$

より

$$\left(\frac{-x+y}{\sqrt{2}}\right)^2=4\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

が得られる．

これは直線 $y=x$ を軸とする放物線で，

- 準線は直線 $x+y=0$,
- 焦点は点 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

となる．

よって，答えは

$$点\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$

である．

【別解】（ばねばかりむたらふによる、行列を用いた別解）

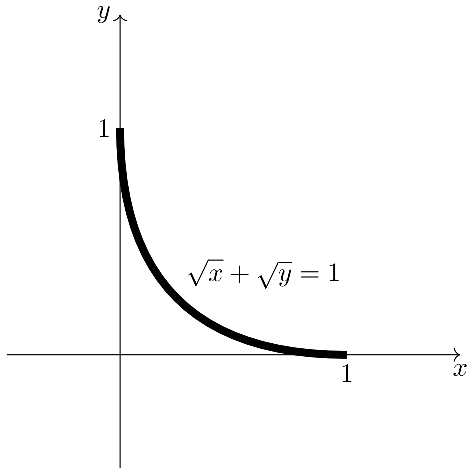
もとの方程式を 2 乗するなどして整理すると，

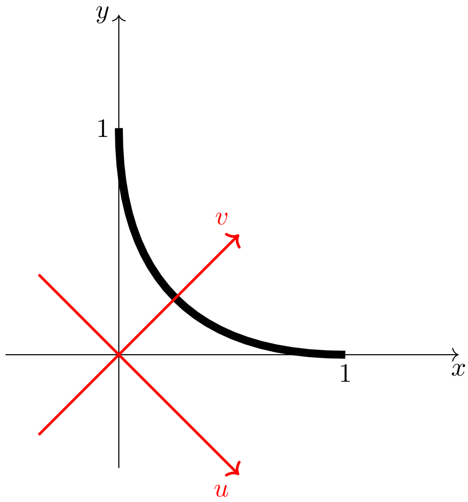
$$x^2+y^2-2x-2y-2xy=-1$$

となる．ただし，これはもとの方程式と同値ではないことに注意しなければならない (これが「含まれる」という意味).

この等式と，以下 (左) に示すもとの方程式をプロットしたものから，45° 回転すると都合がよいことに気づく．

ここで，以下 (右) に示す (x,y) 座標系から 45° だけ回転した (u,v) 座標系を作る．





ここで，(x,y) と (u,v) の関係を調べておく．(x,y) 座標系と (u,v) 座標系では長さは変わらないものとすると，(x,y) 座標系での x 軸から反時計回りに θ だけ回転した方向は (u,v) 座標での u 軸から $\theta+\dfrac{\pi}{4}$ だけ回転した方向と一致する．よって，**回転行列**を用いて関係を書いてみると，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\pi}{4}) & -\sin(-\frac{\pi}{4}) \\ \sin(-\frac{\pi}{4}) & \cos(-\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

より，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(u+v) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(-u+v) \end{pmatrix}$$

となる．これを代入してみると，

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}u^2 + \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

となる．準線と焦点の座標を用いた放物線の定義式

$$x = 4py^2$$

を適用して焦点を調べる．一度 v 切片をなしとして，

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}u^2 \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}v$$

に対しては，

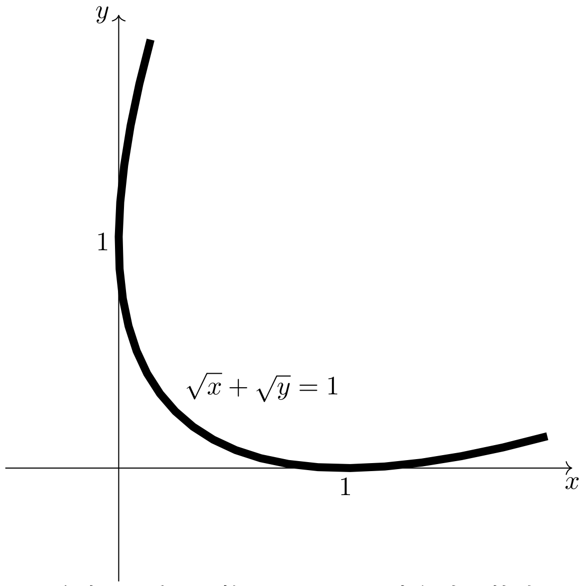
$$p = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

と求まるから，

$$\begin{aligned} &\text{準線は} \quad v = \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \\ &\text{焦点は} \quad u = 0,\ v = \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

となるから，これを (x,y) 座標に直して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$



参考. 2 乗して整理したあとの方程式の軌跡

問 題 62

(1) 図形の回転としての複素数の解釈を条件に適用すると、

$$z^2 - az = \pm i\left(z^2 - bz\right)$$

が得られる。
面積を考える上では回転の向きを考える必要がないので、

$$z^2 - az = i\left(z^2 - bz\right)$$

とする。
もし

$$z = 0$$

であるとすると三角形が構成されないので

$$z \neq 0$$

であるから、両辺を z で割って

$$z - a = i\left(z - b\right)$$

となり、この z についての一次方程式を解くことで

$$z = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}i$$

が得られる。
これより、三角形の面積は

$$\begin{aligned}
\triangle\mathrm{ABC} &= \frac{\left|z^2 - az\right|\left|z^2 - bz\right|}{2} \\
&= \frac{\left|z^2\right|\left|\left(z-a\right)\left(z-b\right)\right|}{2} \\
&= \frac{\left|\left(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}i\right)^2\right|\left|\left(\frac{-a+b}{2} + \frac{a-b}{2}i\right)\left(\frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2}i\right)\right|}{2} \\
&= \frac{\left|ab + \frac{a^2-b^2}{2}i\right|\left|\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right|}{2} \\
&= \frac{\left|2ab + \left(a^2 - b^2\right)i\right|\left|a^2 + b^2\right|}{8} \\
&= \frac{\left(a-b\right)^2\left(a^2+b^2\right)}{8}
\end{aligned}$$

と求められる。
よって

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{\left(a-b\right)^2\left(a^2+b^2\right)}{8}$$

である。

(2) 定数 a, b が整数であるとする。

前問より

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{(a-b)^2 \left(a^2+b^2\right)}{8}$$

である。

a と b の偶奇が異なるとき、$a-b$ と a^2+b^2 はともに奇数だから、$\triangle\mathrm{ABC}$ は整数にならない。

よって、$\triangle\mathrm{ABC}$ が整数であるとき、a と b は同じ偶奇をもつ。

ゆえに $\triangle\mathrm{ABC}$ が整数ならば

$$\begin{cases} s = \dfrac{a+b}{2} \\ t = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}$$

とおけば s と t は整数であり、

$$\begin{aligned}
\triangle \mathrm{ABC} &= \frac{(a-b)^2 \left(a^2+b^2\right)}{8} \\
&= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right) \\
&= \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 \left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right) \\
&= t^2\left(s^2+t^2\right) \\
&= (st)^2 + \left(t^2\right)^2
\end{aligned}$$

が成り立つ。

よって、定数 a, b が相異なる整数であるとき、三角形 ABC の面積が整数ならば、それは 2 つの平方数の和で表される。