■　解答編（問題 41〜 問題 50）

問　題　41

(1)

$$x - \log(x+1) > 0 \quad (x > 0)$$

を示せばよい。

$$f(x) = x - \log(x+1) \quad (x > 0)$$

とおく。

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1} \quad (\because x > 0)$$

よって，$f(x)$ は単調増加。

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 0$$

より，

$$f(x) > 0.$$

$\square$

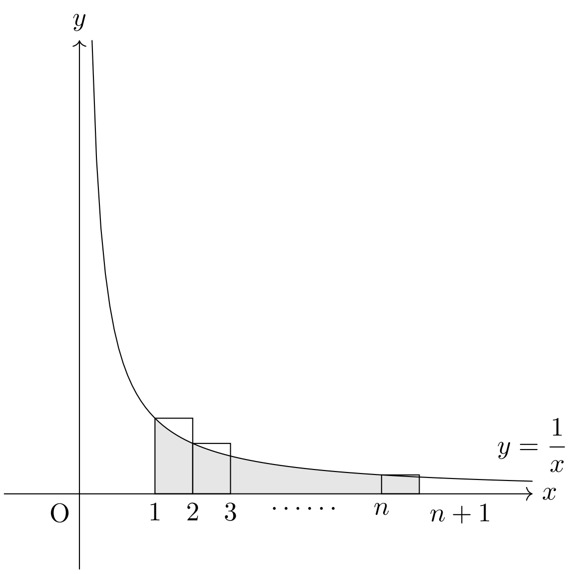
(2) 下図のように，長方形の面積の和と積分値 $\displaystyle\int_1^{n+1} \frac{dx}{x}$ を比較すると，

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} \\ &= \big[\log x\big]_1^{n+1} \\ &= \log(n+1).\end{aligned}$$

$\displaystyle\lim_{n \to \infty} \log(n+1) = \infty$ なので，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \infty.$$

$\square$



(3) n 以下の自然数の素因数は $p_1, p_2, \cdots, p_m$ のいずれかなので,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} &< \left(1+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_1^2}+\cdots\right)\left(1+\frac{1}{p_2}+\frac{1}{p_2^2}+\cdots\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_m}+\frac{1}{p_m^2}+\cdots\right)\\ &= \left(1+1\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_1}}\right)\left(1+1\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_2}}\right)\cdots\left(1+1\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{p_m}}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{p_1-1}\right)\left(1+\frac{1}{p_2-1}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{p_m-1}\right)\end{aligned}$$

両辺の自然対数を取ると,

$$\begin{aligned}\log\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) &< \sum_{i=1}^{m}\log\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right)\\ &< \sum_{i-1}^{m}\frac{1}{p_i-1} \qquad (\because (1))\end{aligned}$$

□

(4) $p_i - 1 \geqq p_{i-1}$ だから,

$$\frac{1}{p_i-1} \leqq \frac{1}{p_{i-1}}.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\sum_{i-1}^{m}\frac{1}{p_i-1} &= 1+\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{p_i-1}\\ &\leqq 1+\sum_{i=2}^{m}\frac{1}{p_{i-1}} = 1+\sum_{i-1}^{m-1}\frac{1}{p_i}\end{aligned}$$

$$\therefore \qquad \sum_{i-1}^{m-1}\frac{1}{p_i} \geqq \sum_{i-1}^{m}\frac{1}{p_i-1}-1 > \log\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k}\right)-1 \tag{1}$$

$n \to \infty$ のとき $t \to \infty$ であり, (1) より (1) の両辺は発散するので,

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{p_i} = \infty.$$

□

問　題　42

(1) k を $|k| \leqq n$ を満たす整数とする。$X_{2n} = 2k$ となる確率を求めよ。

Proof. $2n$ 回コインを投げたとき、表が x 回、裏が y 回出たとすると、$x + y = 2n$ かつ $x - y = X_{2n}$ である。$X_{2n} = 2k$ となるので、$x - y = 2k$ である。これらの連立方程式を解くと、$2x = 2n + 2k \Rightarrow x = n + k$ $2y = 2n - 2k \Rightarrow y = n - k$ となる。$x \geq 0, y \geq 0$ より、$n + k \geq 0$ かつ $n - k \geq 0$、すなわち $-n \leq k \leq n$ を満たす必要がある。表と裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ なので、$2n$ 回の試行で表が $n + k$ 回、裏が $n - k$ 回出る確率は、二項分布の確率で与えられる。

$$P(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{2n}{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

□

(2) 期待値 $E(X_{2n})$ を求めよ。また, θ を任意の定数とし, $E(\cos(\theta X_{2n}))$ を計算せよ。

Proof. i 回目のコイン投げで表が出たら $Y_i = +1$、裏が出たら $Y_i = -1$ とする。$P(Y_i = +1) = P(Y_i = -1) = \dfrac{1}{2}$ である。$X_{2n} = \displaystyle\sum_{i=1}^{2n} Y_i$ と表せる。期待値の線形性より、

$$E(X_{2n}) = E\left(\sum_{i=1}^{2n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{2n} E(Y_i)$$

$E(Y_i) = (+1) \cdot \dfrac{1}{2} + (-1) \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2} = 0$ したがって、

$$E(X_{2n}) = \sum_{i=1}^{2n} 0 = 0$$

次に、$E(\cos(\theta X_{2n}))$ を計算する。

$$E(\cos(\theta X_{2n})) = \sum_{k=-n}^{n} \cos(2k\theta) P(X_{2n} = 2k)$$

$$E(\cos(\theta X_{2n})) = \sum_{k=-n}^{n} \cos(2k\theta)\binom{2n}{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

ここで、オイラーの公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いると、$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix})$ である。$E(\cos(\theta X_{2n})) = \mathrm{Re}(E(e^{i\theta X_{2n}}))$

$$E(e^{i\theta X_{2n}}) = E\left(e^{i\theta \sum_{j=1}^{2n} Y_j}\right) = E\left(\prod_{j=1}^{2n} e^{i\theta Y_j}\right)$$

Y_j は独立なので、

$$E\left(\prod_{j=1}^{2n} e^{i\theta Y_j}\right) = \prod_{j=1}^{2n} E(e^{i\theta Y_j})$$

$E(e^{i\theta Y_j}) = e^{i\theta(+1)} \cdot \dfrac{1}{2} + e^{i\theta(-1)} \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = \dfrac{1}{2}(2\cos\theta) = \cos\theta$ したがって、

$$E(e^{i\theta X_{2n}}) = (\cos\theta)^{2n} = \cos^{2n}\theta$$

よって、

$$E(\cos(\theta X_{2n})) = \mathrm{Re}(\cos^{2n}\theta) = \cos^{2n}\theta$$

($\cos\theta$ は実数なので、その $2n$ 乗も実数である。) □

(3) 以下の等式を示せ。

$$\cos^{2n}\theta = \sum_{k=-n}^{n} P(X_{2n}=2k)\cos(2k\theta)$$

Proof. 問 (2) の計算結果より、

$$E(\cos(\theta X_{2n})) = \cos^{2n}\theta$$

また、期待値の定義より、

$$E(\cos(\theta X_{2n})) = \sum_{x} \cos(\theta x) P(X_{2n}=x)$$

X_{2n} は常に偶数なので、$x=2k$ と置くことができる。

$$E(\cos(\theta X_{2n})) = \sum_{k=-n}^{n} \cos(2k\theta) P(X_{2n}=2k)$$

したがって、両者を組み合わせることで、以下の等式が成り立つ。

$$\cos^{2n}\theta = \sum_{k=-n}^{n} P(X_{2n}=2k)\cos(2k\theta)$$

これは問 (2) で既に導かれているものである。 □

(4) m を $|m| \leqq n$ を満たす整数とする。以下の積分値を求めよ。

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n}\theta \cos(2m\theta)\mathrm{d}\theta$$

Proof. 問 (3) の等式 $\cos^{2n}\theta = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} P(X_{2n}=2k)\cos(2k\theta)$ を用いる。求める積分は、

$$I = \int_0^{\pi} \left(\sum_{k=-n}^{n} P(X_{2n}=2k)\cos(2k\theta) \right) \cos(2m\theta)\mathrm{d}\theta$$

和と積分の順序を交換して、

$$I = \sum_{k=-n}^{n} P(X_{2n}=2k) \int_0^{\pi} \cos(2k\theta)\cos(2m\theta)\mathrm{d}\theta$$

ここで、三角関数の積分の性質を用いる。α, β が整数のとき、

$$\int_0^{\pi} \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & (\alpha = \beta \neq 0) \\ \pi & (\alpha = \beta = 0) \\ 0 & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$$

本問では、$\alpha = 2k,\ \beta = 2m$ である。

- $k=m$ の場合：もし $k=m=0$ ならば、$X_{2n}=0$ となる確率は $\dbinom{2n}{n}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2n}$ である。このとき、$\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(0)\cos(0)\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi} 1\mathrm{d}\theta = \pi$ となる。もし $k=m\neq 0$ ならば、$\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(2k\theta)\cos(2k\theta)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{2}$ となる。
- $k \neq m$ の場合：$\displaystyle\int_0^{\pi}\cos(2k\theta)\cos(2m\theta)\mathrm{d}\theta = 0$ となる。

したがって、和の計算において、$k=m$ の項のみが残る。

$$I = P(X_{2n}=2m)\int_0^{\pi}\cos(2m\theta)\cos(2m\theta)\mathrm{d}\theta$$

もし $m = 0$ ならば、

$$I = P(X_{2n} = 0) \cdot \pi = \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \pi$$

もし $m \neq 0$ ならば、

$$I = P(X_{2n} = 2m) \cdot \frac{\pi}{2} = \binom{2n}{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{\pi}{2}$$

これらをまとめて書くこともできるが、通常は場合分けして示すのが明確である。
最終的な積分値は、

- $m = 0$ のとき: $\pi P(X_{2n} = 0) = \pi \binom{2n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$
- $m \neq 0$ のとき: $\frac{\pi}{2} P(X_{2n} = 2m) = \frac{\pi}{2} \binom{2n}{n+m} \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$

$\square$

問　題　43

(1)　$x>1$ とする．$0<|h|<\dfrac{x-1}{2}$ を満たす実数 h を任意に取ると，

$$\begin{aligned}&f(x+h)-f(x)-h\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{x+\cos\theta}\\&=\int_0^{2\pi}\left\{\log\left(1+\frac{h}{x+\cos\theta}\right)-\frac{h}{x+\cos\theta}\right\}d\theta\end{aligned}$$

である．

ここで，

$$g(t)=\log(1+t)-t\quad(t>-1)$$

とすると，

$$g'(t)=\frac{1}{1+t}-1=-\frac{t}{1+t}\qquad\therefore|g'(t)|=\frac{|t|}{1+t}$$

なので，平均値の定理から，$-\dfrac{1}{2}\leq t\leq\dfrac{1}{2}$ のとき，

$$\begin{aligned}|g(t)|&=|t||g'(\theta t)|\quad(0<\theta<1)\\&=\frac{\theta t^2}{1+\theta t}\leq\frac{t^2}{1/2}=2t^2\end{aligned}$$

となる (注：途中で導入した θ は t に依存する)．今，$|h|$ を $0<|h|<\dfrac{x-1}{2}$ と制限しているので，

$$\left|\frac{h}{x+\cos\theta}\right|\leq\frac{\frac{x-1}{2}}{x-1}=\frac{1}{2}$$

が成り立つので，

$$\left|g\left(\frac{h}{x+\cos\theta}\right)\right|\leq\frac{2h^2}{(x+\cos\theta)^2}\leq\frac{2h^2}{(x-1)^2}$$

となる．

以上より，$0<|h|<\dfrac{x-1}{2}$ を満たす実数 h に対して，

$$\begin{aligned}&\left|f(x+h)-f(x)-h\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{x+\cos\theta}\right|\\&=\left|\int_0^{2\pi}g\left(\frac{h}{x+\cos\theta}\right)d\theta\right|\leq\int_0^{2\pi}\left|g\left(\frac{h}{x+\cos\theta}\right)\right|d\theta\\&\leq\int_0^{2\pi}\frac{2h^2}{(x-1)^2}d\theta=\frac{4\pi}{(x-1)^2}h^2\\\therefore\quad&\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{x+\cos\theta}\right|\leq\frac{4\pi}{(x-1)^2}|h|\end{aligned}$$

が成り立つので，はさみうちの原理から，

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{x+\cos\theta}$$

が成り立つことが分かる．ゆえに，関数 $f(x)$ は $x>1$ で微分可能で，

$$f'(x)=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{x+\cos\theta}\quad(x>1)$$

となる．

(2) [解答が冗長になるが，広義積分を避けるために次のように解答を書く．]

被積分関数の周期性から，

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{x+\cos\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{x+\cos\theta}$$

となる．ここで，正の整数 n に対し，

$$\alpha_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)\pi$$

とすると，

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} \frac{d\theta}{x+\cos\theta} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{x+\cos\theta}\right| \\
&= \left|\int_{-\pi}^{-\alpha_n} \frac{d\theta}{x+\cos\theta} + \int_{\alpha_n}^{\pi} \frac{d\theta}{x+\cos\theta}\right| \\
&\leq \int_{-\pi}^{-\alpha_n} \frac{d\theta}{x+\cos\theta} + \int_{\alpha_n}^{\pi} \frac{d\theta}{x+\cos\theta} \\
&\leq \int_{-\pi}^{-\alpha_n} \frac{d\theta}{x-1} + \int_{\alpha_n}^{\pi} \frac{d\theta}{x-1} = \frac{2\pi}{n(x-1)}
\end{aligned}$$

なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} \frac{d\theta}{x+\cos\theta} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{x+\cos\theta}$$

が分かる．一旦，積分範囲が $-\alpha_n \leq x \leq \alpha_n$ の場合の定積分を考えた後に，$n\to\infty$ の極限を取って与えられた定積分を求めることにしよう．

ここで，正の整数 n に対し，

$$t_n = \tan\frac{\alpha_n}{2}$$

と定めると，

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$

となる．また，ワイエルシュトラス置換を用いると，

$$\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} \frac{d\theta}{x+\cos\theta} = \int_{-t_n}^{t_n} \frac{\dfrac{2}{1+t^2}}{x+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}dt = \frac{2}{x-1}\int_{-t_n}^{t_n} \frac{dt}{t^2+\dfrac{x+1}{x-1}}$$

と計算できる．さらに，

$$t = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\tan\phi \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}\right)$$

という置換を用いると，

$$\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n} \frac{d\theta}{x+\cos\theta} = \frac{2}{x-1}\int_{-\phi_n}^{\phi_n} \frac{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}(1+\tan^2\phi)}{\dfrac{x+1}{x-1}(1+\tan^2\phi)}d\phi = \frac{4\phi_n}{\sqrt{x^2-1}}$$

となる．ただし，ϕ_n は，

$$t_n = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\tan\phi_n \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \phi_n < \frac{\pi}{2}\right)$$

で定義される数である．

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$$

と tan の性質から，

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \frac{\pi}{2}$$

となる．

以上より，$x>1$ に対し，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{x+\cos\theta}=\lim_{n\to\infty}\int_{-\alpha_n}^{\alpha_n}\frac{d\theta}{x+\cos\theta}=\frac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}$$

となる．

(3) 今までの議論より，$x>1$ で，

$$\frac{d}{dx}\int_0^{2\pi}\log(x+\cos\theta)d\theta=\frac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}$$

が成立する．

ここで，置換

$$u=\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\quad(x>1)$$

を考えると，逆に解けば

$$x=\frac{e^u+e^{-u}}{2}$$

となるので，

$$\begin{aligned}\int\frac{2\pi}{\sqrt{x^2-1}}dx&=\int\frac{2\pi}{\frac{e^u-e^{-u}}{2}}\cdot\frac{e^u-e^{-u}}{2}du=2\pi u+C\\&=2\pi\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C\quad(C\text{ は積分定数})\end{aligned}$$

と計算できる．よって，x に依存しない定数 C が存在し，$x>1$ で

$$\int_0^{2\pi}\log(x+\cos\theta)d\theta=2\pi\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)+C$$

が成立することが分かる．後は C が分かればよい．

今から，極限

$$\lim_{x\to\infty}\left\{\int_0^{2\pi}\log(x+\cos\theta)d\theta-2\pi\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right\}$$

を求める．これが求められれば，その極限が C となるので，直ちに与えられた定積分が求まる．以下，簡単のために

$$h(x)=\int_0^{2\pi}\log(x+\cos\theta)d\theta-2\pi\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

と置く．$0\leq\theta\leq 2\pi$ に対し，

$$\log(x-1)\leq\log(x+\cos\theta)\leq\log(x+1)$$

なので，$x>1$ に対し，

$$2\pi\log(x-1)\leq\int_0^{2\pi}\log(x+\cos\theta)d\theta\leq 2\pi\log(x+1)$$

が成り立つ．したがって，$x>1$ に対し，

$$2\pi\log\frac{x-1}{x+\sqrt{x^2-1}}\leq h(x)\leq 2\pi\log\frac{x+1}{x+\sqrt{x^2-1}}$$

なので，はさみうちの原理より，

$$\lim_{x\to\infty}h(x)=-2\pi\log 2$$

となる．

以上より，$x>1$ に対し，

$$\int_0^{2\pi}\log(x+\cos\theta)d\theta=2\pi\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)-\log 2\right\}$$

である．

余談

(3) さえ解ければ良いのならば，大学数学の知識（より詳しく言えば，「複素関数論」の知識）を使うと楽に解ける．対数関数の主枝 $\mathrm{Log} : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ は

$$\mathrm{Log} z = \log |z| + i \mathrm{Arg} z \quad (z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0])$$

を満たす (ただし，Arg は $(-\pi, \pi)$ の範囲に制限された偏角) 正則関数なので，

$$a = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{2}$$

とすると，$a > b > 0$ なので，

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \log(x + \cos\theta) d\theta &= \int_0^{2\pi} \log |a + be^{i\theta}|^2 d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \log |a + be^{i\theta}| d\theta \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\int_0^{2\pi} \mathrm{Log}(a + be^{i\theta}) d\theta \right) \\
&= 2\mathrm{Re}(2\pi \mathrm{Log} a) \quad (\because \text{ 正則関数の平均値の性質}) \\
&= 4\pi \log a \\
&= 2\pi \log \left(\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{2} \right) \\
&= 2\pi \left\{ \log \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) - \log 2 \right\}
\end{aligned}$$

と計算できる．

問　題　44

求めるべきものを書き直すと

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+k}$$

です。
総和の内側を上下からはさみこみます。

- 上からの評価をすると、

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+k}\\ <&\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3}\\ =&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\end{aligned}$$

  となります。
  この式の極限をとると、区分求積法より

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$$

  となります。

- 下からの評価をすると、

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+k}\\ >&\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+n}\\ =&\frac{1}{n^2+1}\sum_{k=1}^{n}k\\ =&\frac{1}{n^2+1}\frac{n(n+1)}{2}\\ =&\frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+1}\end{aligned}$$

  となります。
  この式の極限をとると、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\frac{n^2+n}{n^2+1}=\frac{1}{2}$$

  となります。

以上のことから、挟み撃ちの定理より、

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{kn}{n^3+k}=\frac{1}{2}$$

と求めることができます。

問　題　45

【解答】

χ と x が別の文字であることに気を付けて計算をすると

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\chi}{\sin x + \cos x} dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\chi}{\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

$$= \frac{\sin\chi}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

$$= \frac{\sin\chi}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 - \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)} dx$$

$$= \frac{\sin\chi}{\sqrt{2}} \int_0^{x} \left(\frac{1}{-1 + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{1 + \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)}\right) \frac{\left(\cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right)\right)'}{2} dt$$

$$= \frac{\sin\chi}{\sqrt{2}} \left[\frac{1}{2}\log\left(\left|\frac{-1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{1 + \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}\right|\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \sqrt{2}\sin\chi\log\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

である。

問　題　46

(1) $z=k$ で切断したときの断面を考えると，$x^2+y^2+k^2+xyk=1$

これを y について解くと

$$y=\frac{-kx\pm\sqrt{(k^2-4)x^2+4(1-k^2)}}{2}$$

よって面積 $S(k)$ は

$$S(k)=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}(y_+-y_-)dx=\int_{x_{\min}}^{x_{\max}}\sqrt{(k^2-4)x^2+4(1-k^2)}dx$$

ここで被積分関数を新たに y と置くと

$$y=\sqrt{(k^2-4)x^2+4(1-k^2)}$$
$$\frac{(4-k^2)x^2}{4(1-k^2)}+\frac{y^2}{4(1-k^2)}=1$$

この楕円の，$y\geq 0$ の部分が求めたい面積になるので

$$S(k)=\frac{2(1-k^2)\pi}{\sqrt{4-k^2}}$$

よって，求めたい体積 V は

$$V=\int_{-1}^{1}S(k)dk=2\pi\int_{-1}^{1}\frac{1-k^2}{\sqrt{4-k^2}}dk$$

$k=2\sin\theta$ とすると，

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{1-4\sin^2\theta}{2\cos\theta}2\cos\theta d\theta\\&=2\pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}(2\cos 2\theta-1)d\theta\\&=2\pi\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

である．

(2) $z=k$ で切断したときの断面を考えると，$x^2+y^2+k^2+xyk=1$

これの極座標を考えると

$$r^2=\frac{1-k^2}{1+k\sin\theta\cos\theta}$$

よって

$$r_{\max}^2=\frac{2(1-k^2)}{2-|k|},\quad r_{\min}^2=\frac{2(1-k^2)}{2+|k|}$$

この断面において曲面が通過しうる面積は

$$S(k)=\pi(r_{\max}^2-r_{\min}^2)=2\pi\left(\frac{1-k^2}{2-|k|}-\frac{1-k^2}{2+|k|}\right)$$

よって求めたい体積 V は,

$$\begin{aligned}V&=\int_{-1}^{1}S(k)dk\\&=4\pi\int_0^1\left(\frac{1-k^2}{2-k}-\frac{1-k^2}{2+k}\right)dk\\&=8\pi\int_0^1\left(k-\frac{3k}{4-k^2}\right)dk\\&=4\pi\left(1+3\log\frac{3}{4}\right)\end{aligned}$$

である．

問　題　47

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{n}}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} \\
&= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} \\
&= 0\times\lim\limits_{0}^{1}\frac{1}{x^2+1}dx = 0.
\end{aligned}
$$

問 題 48

$y+e^y=x-\log x$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}y+\frac{d}{dx}e^y&=\frac{d}{dx}x-\frac{d}{dx}\log x\\
\frac{dy}{dx}(1+e^y)&=1-\frac{1}{x}\\
\frac{dy}{dx}&=\frac{x-1}{x(1+e^y)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\\
&=\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x(1+e^y)}\right)\\
&=\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+e^y}\right)\cdot\frac{x-1}{x}+\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x}\right)\cdot\frac{1}{1+e^y}\\
&=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{1+e^y}\right)\cdot\frac{x-1}{x}+\frac{1}{x^2(1+e^y)}\\
&=\frac{x-1}{x(1+e^y)}\cdot\frac{-e^y}{(1+e^y)^2}\cdot\frac{x-1}{x}+\frac{(1+e^y)^2}{x^2(1+e^y)^3}\\
&=\frac{e^{2y}+(1+2x-x^2)e^y+1}{x^2(1+e^y)^3}
\end{aligned}$$

$x^2(1+e^y)^3>0$ であるから, $e^{2y}+(1+2x-x^2)e^y+1$ の増減を調べればよい. $y+e^y=x-\log x$ より, y は x を用いて表せるから, x の関数とみて, $f(x)=e^{2y}+(1+2x-x^2)e^y+1$ とおく.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}f(x)\\
&=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}e^{2y}+e^y\cdot\frac{d}{dx}(1+2x-x^2)+(1+2x-x^2)\cdot\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d}{dy}e^y\\
&=\frac{2(x-1)e^{2y}}{x(1+e^y)}+2e^y(1-x)+\frac{(x-1)e^y}{x(1+e^y)}(1+2x-x^2)\\
&=\frac{(x-1)e^y}{x(1+e^y)}\left\{2e^y-2x(e^y+1)+1+2x-x^2\right\}\\
&=\frac{(x-1)e^y}{x(1+e^y)}\left\{2e^y(1-x)+(1-x)(1+x)\right\}\\
&=-\frac{(x-1)^2e^y}{x(1+e^y)}\left\{2e^y+x+1\right\}
\end{aligned}$$

ここで、$x>0$ において $\dfrac{d}{dx}f(x)\leqq 0$

つまり, $f(x)$ は減少関数

ここで

$$\begin{aligned}
f(1)&=e^{2y}+2e^y+1>0\\
f(5)&=e^{2y}-14e^y+1\\
&=(e^y-7)^2-48
\end{aligned}$$

$y+e^y=5-\log 5$ より, $3<y+e^y<4$

よって, $(e^y-7)^2-48<0$

中間値の定理より $f(x)=0$ となる x は $1<x<5$ に 1 つだけ存在する

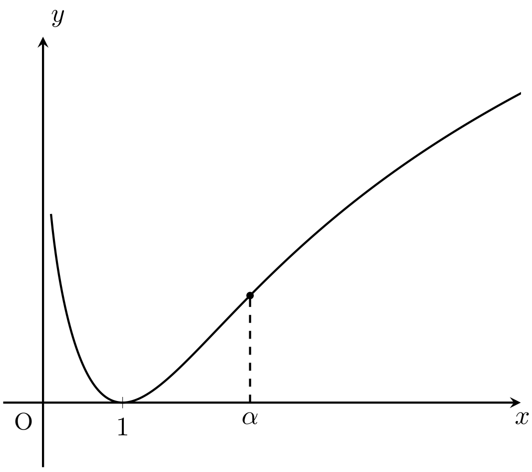
$\displaystyle\lim_{x\to 0+}(x-\log x)=\infty$ より, $x\to 0+$ のとき $y\to\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}(x-\log x)=\infty$ より, $x\to\infty$ のとき $y\to\infty$

変曲点の x 座標を α とおくと, 増減は下表

x	(0)	...	1	...	α	...	(∞)
y'	$\times$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$\times$
y''	$\times$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$\times$
y	(∞)	↘	極小	↗	変曲点	↗	(∞)

グラフは下図となる.



問　題　49

積分区間内において非積分関数は常に正だから、

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x} dx$$

が成り立つ。

一方で、

$$
\begin{aligned}
\exp\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x}dx\right) &= \exp\left(\log\left(1+\frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= 1+\frac{\pi}{2} \\
&= 1+4\cdot\frac{\pi}{8} \\
&= 1+4\int_0^{\frac{\pi}{8}} d\theta \\
&< 1+4\int_0^{\frac{\pi}{8}} \left(1+\tan^2\theta\right)d\theta \\
&= 1+4\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \\
&= 1+4\left(\sqrt{2}-1\right) \\
&= 4\sqrt{2}-3 \\
&< 4\sqrt{2.0164}-3 \\
&= 4\cdot 1.42-3 \\
&= 2.68 \\
&< \frac{65}{24} \\
&= \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24} \\
&< \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\int_0^1 \frac{(1-t)^4}{24}e^t dt \\
&= \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\int_0^1 \frac{(1-t)^3}{6}e^t dt \\
&= \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}e^t dt \\
&= \frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\int_0^1 \frac{(1-t)^1}{1}e^t dt \\
&= \frac{1}{1}+\int_0^1 \frac{(1-t)^0}{1}e^t dt \\
&= 1+\int_0^1 e^t dt \\
&= 1+(e-1)
\end{aligned}
$$

となるから、

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x} dx < 1$$

が成り立つ。

ゆえに

$$0 < \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x} dx < 1$$

であるから、整数部分を答えればそれは 0 である。

【コメント】

たとえば定積分の値を、台形の面積を用いて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+x} dx < \left(\frac{1}{1+0} + \frac{1}{1+\frac{\pi}{2}} \right) \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

と評価しようとしても、右辺の値は 1 より大きいため失敗してしまいます。

π や e の値は有名なので、不等式

$$1 + \frac{\pi}{2} < e$$

が成り立つことは想像に難くありません。よって、「あまり誤差の大きくない」π や e の評価方法とは何かを応用する力が求められます。

問　題　50

【解答】

(1) 数学的帰納法による．$n=0$ は正しい．$n=k$ で正しければ，部分積分を用いて $n=k+1$ でも正しい．よって全ての非負整数 n で正しい．

(2)
$$\int_0^x \frac{(x-x)^n}{n!}e^t dt < \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t dt < \int_0^x \frac{(x-0)^n}{n!}e^t dt$$
であるから両端の定積分を計算し (1) の不等式に代入すればよい．

(3) 問 (2) の不等式に $x=1$ を代入して
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}+\frac{e^0}{n!} < e < \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}+\frac{e}{n!}$$
であるから，変形してはさみうちの定理を用いれば答えは e.

(4) 問 (1) と同様にして，いくらでも微分可能な関数 $f(x)$ について，全ての非負整数 n に対して
$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt$$
が成り立つ．

三角関数や，x の絶対値が小さいときの $\log(1+x)$, $\sqrt{1+x}$ などを試すと，面白いだろう．