■　解答編（問題 21〜 問題 30）

問　題　21

《解答》

n を正の整数とする.
等比数列の和の公式より，実数 x に対して

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

が成り立つ.
両辺 $x=0$ から $x=\dfrac{1}{2}$ まで積分することで,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left[\frac{x^{k+1}}{k+1}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \left[-\log(1-x)\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx$$

すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k k} = \log 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx$$

が得られる.
ここで

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx &\leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-\frac{1}{2}}dx \\ &= \frac{2}{2^{n+1}(n+1)} \end{aligned}$$

という不等式が成り立つので，はさみうちの定理から

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^n}{1-x}dx = 0$$

が成立する.
したがって,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k k} = \log 2$$

である.

問　題　22

頂角を 2θ, 母線の長さを r として U は $(0,0,0),(r,0,0),(r\cos 2\theta,0,r\sin 2\theta)$ の三点からなる二等辺三角形を z 軸まわりに 1 回転させた通過領域に等しい．この三角形の面積は $r^2\sin\theta\cos\theta$ であり重心は $\left(\dfrac{2r\cos^2\theta}{3},\dfrac{r\sin 2\theta}{3}\right)$ であるからパップス・ギュルダンの定理より

$V=2\pi\cdot\dfrac{2r\cos^2\theta}{3}\cdot r^2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{4\pi}{3}r^3\cdot\sin\theta\cos^3\theta$ ここで，円錐の高さを h とすると $\cos\theta=\dfrac{h}{r},\sin\theta=\dfrac{\sqrt{r^2-h^2}}{r}$ であるから $V=\dfrac{4\pi}{3}\cdot\dfrac{h^3\sqrt{r^2-h^2}}{r}$,

さらに $r=\dfrac{1}{h}$ であるから $V=\dfrac{4\pi}{3}\cdot\sqrt{h^6-h^{10}}$ となる．

$\dfrac{d}{dh}(h^6-h^{10})=10h^5\left(\dfrac{3}{5}-h^4\right)$ であるから V は $h=\sqrt[4]{\dfrac{3}{5}}$ において最大値 $\dfrac{4\pi}{5}\sqrt[4]{\dfrac{4}{15}}$ をとる．

[別解]

V を求める際，パップス・ギュルダンの定理を用いずに大きな円錐から小さな円錐を二つ除く（解答略）

問 題 23

(1) 実数 x, y を用いて $z = x + yi$ とおくと，$c(z)^2$ は

$$
\begin{aligned}
c(z)^2 &= \left((\cos x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)i\right)^2 \\
&= (\cos x)^2\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 \\
&\quad - (\sin x)^2\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \\
&\quad - 2\,(\cos x)\,(\sin x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)i
\end{aligned}
$$

であり，$s(z)^2$ は

$$
\begin{aligned}
a(z)^2 &= \left((\sin x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) + (\cos x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)i\right)^2 \\
&= (\sin x)^2\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 \\
&\quad - (\cos x)^2\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \\
&\quad + 2\,(\cos x)\,(\sin x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)i
\end{aligned}
$$

であるから，それらの和は

$$
\begin{aligned}
c(z)^2 + s(z)^2 &= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} - \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

となる．

これで示された．

(2) 実数 a と b を用いて $c(z) = a + bi$ とする．まず方程式

$$c(a + bi) = 0$$

を解こう．

方程式は

$$(\cos a)\left(\frac{e^b + e^{-b}}{2}\right) - (\sin a)\left(\frac{e^b - e^{-b}}{2}\right)i = 0$$

となるので，実部と虚部それぞれ比較して

$$
\begin{cases}
(\cos a)\left(\dfrac{e^b + e^{-b}}{2}\right) = 0 \\
(\sin a)\left(\dfrac{e^b - e^{-b}}{2}\right) = 0
\end{cases}
$$

となる．

第一式より

$$\cos a = 0$$

が得られ，そのとき $\sin a \neq 0$ なので第二式より

$$\frac{e^b - e^{-b}}{2} = 0$$

つまり

$$b = 0$$

が得られる．
以上から，

$$c\left(c\left(z\right)\right) = 0 \iff c(z) = n_1\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n_1 \text{ は整数})$$

が成り立つ．
次に，実数 x と y を用いて $c(z) = x + yi$ として，方程式

$$c(x + yi) = n_1\pi + \frac{\pi}{2} \quad (n_1 \text{ は整数})$$

を解こう．
簡略化のため，右辺を P とおく．$|P| > 1$ に注意しておく．
すると方程式は

$$(\cos x)\left(\frac{e^y + e^{-y}}{2}\right) - (\sin x)\left(\frac{e^y - e^{-y}}{2}\right)i = P$$

となるから，実部と虚部それぞれ比較して

$$\begin{cases} (\cos x)\left(\dfrac{e^y + e^{-y}}{2}\right) = P \\ (\sin x)\left(\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = 0\right) = 0 \end{cases}$$

となる．
第二式より

$$\sin x = 0 \lor \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 0$$

である．

(i) $x = 2\pi n_2 \quad (n_2 \text{ は整数})$ のとき，第一式は

$$\frac{e^y + e^{-y}}{2} = P$$

となる．これは $P \geq 1$ のときにのみ実数解 y を持つ．
そのとき方程式は

$$\left(e^y\right)^2 - 2P\left(e^y\right) + 1 = 0$$

となるから，二次方程式を解いて

$$y = \log\left(P \pm \sqrt{P^2 - 1}\right)$$

が得られる．

(ii) $x = 2\pi n_2 + \pi \quad (n_2 \text{ は整数})$ のとき，第一式は

$$-\frac{e^y + e^{-y}}{2} = P$$

となる．これは $P \leq -1$ のときにのみ実数解 y を持つ．
そのとき方程式は

$$\left(e^y\right)^2 + 2P\left(e^y\right) + 1 = 0$$

となるから，二次方程式を解いて

$$y = \log\left(-P \pm \sqrt{P^2 - 1}\right)$$

が得られる．

(iii) $\dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = 0$，すなわち $y = 0$ のとき，第一式は

$$\cos x = P$$

となるが，今 $|P| > 1$ だったから不適.

以上から，方程式

$$c(c(z)) = 0$$

の複素数解を全て求めると

$$z = n_2\pi + \log\left(n_1\pi + \frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\left(n_1\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}\right) i \quad (n_1 \text{ は非負整数，} n_2 \text{ は整数})$$

である.

問　題　24

$$g(n)=\int_{-n\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x|+|\sin x||\cos x|+|\cos x|}{(e^{-\cos 2x}+1)(e^{x}+1)}dx, \qquad f(x)=\frac{|\sin x|+|\sin x||cosx|+|\cos x|}{e^{-\cos 2x}+1}$$

とすると，$g(n)=\displaystyle\int_{-n\pi}^{n\pi}\frac{f(x)}{e^{x}+1}dx$ と表せる。
ここで，任意の x について，

$$f(-x)=\frac{|-\sin x|+|-\sin x||\cos x|+|\cos x|}{e^{-\cos 2x}+1}=f(x)$$

なので，$f(x)$ は連続した偶関数であることがわかる。
また $g(n)$ について，

$$g(n)=\int_{-n\pi}^{n\pi}\frac{f(x)}{e^{x}+1}dx=\int_{-n\pi}^{0}\frac{f(x)}{e^{x}+1}dx+\int_{0}^{n\pi}\frac{f(x)}{e^{x}+1}dx \qquad (*)$$

より，$\displaystyle\int_{-n\pi}^{0}\frac{f(x)}{e^{x}+1}dx$ を $x=-t$ で置換すると，

$$\int_{-n\pi}^{0}\frac{f(x)}{e^{x}+1}dx=\int_{n\pi}^{0}\frac{f(-t)}{e^{-t}+1}(-dt)=\int_{0}^{n\pi}\frac{e^{t}f(t)}{e^{t}+1}dt$$

となり，t を x ににあおして $(*)$ を計算すると，

$$(*)=\int_{0}^{n\pi}\left(\frac{e^{x}f(x)}{e^{x}+1}+\frac{f(x)}{e^{x}+1}\right)dx=\int_{0}^{n\pi}\frac{(e^{x}+1)f(x)}{e^{x}+1}dx=\int_{0}^{n\pi}f(x)dx$$

これより，$g(n)=\displaystyle\int_{0}^{n\pi}f(x)dx$ と表せる。
ここで，$f(x)$ は周期 π の関数であるので，任意の x において，$f(x+\pi)=f(x)$ が成立する。よって，

$$\int_{0}^{n\pi}f(x)dx=n\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

となる。
以上より，元の問題は

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}g(n)=\lim_{n\to\infty}\int_{0}^{\pi}\frac{|\sin x|+|\sin x||\cos x|+|\cos x|}{e^{-\cos 2x}+1}dx=\int_{0}^{\pi}f(x)dx$$

となるので，これを計算すればよい。
ここで，任意の x において，

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{2}+x\right)&=\frac{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|+\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|+\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\right|}{e^{-\cos 2x}+1}\\
&=\frac{|\sin x|+|\sin x||-\cos x|+|-\cos x|}{e^{\cos 2x}+1}\\
f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)&=\frac{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|+\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|+\left|\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|}{e^{-\cos 2x}+1}\\
&=\frac{|\sin x|+|\sin x||-\cos x|+|-\cos x|}{e^{\cos 2x}+1}
\end{aligned}$$

であるので，$f\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=f\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ が成立するとわかる。これより，$0\leqq x\leqq\pi$ において，$\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)dx$ となるので，$\displaystyle\int_{0}^{\pi}f(x)dx$ は絶対値を外して，

$$\int_{0}^{\pi}f(x)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}f(x)dx=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x+\sin x\cos x+\cos x}{e^{-\cos 2x}+1}dx \qquad (*')$$

と表せる。これを分解すると，

$$(\ast') = 2\left(\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{e^{-\cos 2x}+1}dx}_{①} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{e^{-\cos 2x}+1}dx}_{②} + \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{e^{-\cos 2x}+1}dx}_{③}\right)$$

となるので，①，②，③ について，それぞれ考える。

＜ ① について＞

$\cos x = a$ で置換すると，

$$① = \int_1^0 \frac{1}{e^{1-2a^2}+1}(-da) = \int_0^1 \frac{1}{e^{1-2a^2}+1}da = \int_0^1 \frac{1}{e^{1-2x^2}+1}dx$$

＜ ② について＞

$\sin x = b$ で置換すると，

$$② = \int_0^1 \frac{1}{e^{2b^2-1}+1}db = \int_0^1 \frac{1}{e^{2x^2-1}+1}dx$$

＜ ③ ＞について

$\sin x = c$ で置換すると，

$$\begin{aligned} ③ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x\cos x}{e^{\cos x}+1}e^{\cos 2x}dx = \int_0^1 \frac{ce^{1-2c^2}}{e^{1-2c^2}+1}dc &= \int_0^1 -\frac{1}{4}\cdot\frac{(e^{1-2c^2}+1)'}{e^{1-2c^2}+1}dc \\ &= -\frac{1}{4}\left[\log(e^{1-2c^2}+1)\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

以上より，

$$\begin{aligned} (\ast') = 2(① + ② + ③) &= 2\left(\int_0^1\left(\frac{1}{e^{1-2x^2}+1} + \frac{1}{e^{2x^2-1}+1}\right) + ③\right) \\ &= 2\left(\int_0^1\left(\frac{1}{e^{1-2x^2}+1} + \frac{e^{1-2x^2}}{e^{1-2x^2}+1}\right)dx + ③\right) \\ &= \frac{5}{2} \end{aligned}$$

よって

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\int_{-n\pi}^{n\pi}\frac{|\sin x| + |\sin x||\cos x| + |\cos x|}{(e^{-\cos 2x}+1)(e^x+1)}dx = \frac{5}{2}}$$

問 題　25

方程式の左辺を

$$f(x)=\int_0^{2\pi}|\sin(xt)|\,dt$$

とおく.

また，x を超えない最大の整数を $\lfloor x\rfloor$ で表すこととする.

(i) $x=0$ のとき

$$f(0)=\int_0^{2\pi}0dt=0$$

である．よって不適.

(ii) $x>0$ のときを考える.

まず，置換積分により

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{2\pi}|\sin(xt)|\,dt\\&=\int_0^{2\pi x}\frac{|\sin u|}{x}du\\&=\frac{1}{x}\int_0^{2\pi\lfloor x\rfloor}|\sin(u)|\,du+\frac{1}{x}\int_{2\pi\lfloor x\rfloor}^{2\pi x}|\sin(u)|\,du\end{aligned}$$

と書ける.

ここで,

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi\lfloor x\rfloor}|\sin(u)|\,du\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor-1}\int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)}|\sin(u)|\,du\\&=\sum_{k=0}^{\lfloor x\rfloor-1}4\\&=4\lfloor x\rfloor\end{aligned}$$

であるから,

$$f(x)=\frac{4\lfloor x\rfloor}{x}+\frac{1}{x}\int_0^{2\pi(x-\lfloor x\rfloor)}|\sin(u)|\,du$$

が成り立つ.

(a) $0\leq x-\lfloor x\rfloor<0.5$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{4\lfloor x\rfloor}{x}+\frac{1}{x}\int_0^{2\pi(x-\lfloor x\rfloor)}\sin(u)\,du\\&=\frac{4\lfloor x\rfloor}{x}-\frac{1}{x}\Big[\cos(u)\Big]_0^{2\pi(x-\lfloor x\rfloor)}\\&=\frac{4\lfloor x\rfloor+1-\cos(2\pi x)}{x}\end{aligned}$$

となる.

よって，方程式

$$f(x)=4$$

は，方程式

$$\frac{4\lfloor x\rfloor+1-\cos(2\pi x)}{x}=4$$

と同値であり，これは方程式

$$4\left(x-\lfloor x\rfloor\right)+\cos\left(2\pi\left(x-\lfloor x\rfloor\right)\right)-1=0$$

と同値である．
そこで，

$$x-\lfloor x\rfloor=t$$

とおいて，

$$4t+\cos(2\pi t)-1=0$$

を満たす 0 以上 0.5 未満の実数 t を求める．
関数 $g_1(t)$ を

$$g_1(t)=4t+\cos(2\pi t)-1$$

と定めると，

$$g_1'(t)=4-2\pi\sin(2\pi t)$$

であり，

$$g_1''(t)=-4\pi^2\cos(2\pi t)$$

であるから，$g_1(t)$ の符号は

t	0	$\cdots$		$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$		$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$g_1''(t)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$g_1'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g_1(t)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0

と求めることができる．
よって

$$4t+\cos(2\pi t)-1=0$$

を満たす 0 以上 0.5 未満の実数 t は

$$t=0,\frac{1}{4}$$

であるから，$0\leq x-\lfloor x\rfloor<0.5$ なる正実数 x に対して方程式

$$f(x)=4$$

は

$$x-\lfloor x\rfloor=0,\ \frac{1}{4}$$

と同値である．
(b) $0.5\leq x-\lfloor x\rfloor<1$ のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{4\lfloor x\rfloor}{x}+\frac{1}{x}\int_0^{\pi}\sin(u)du-\int_{\pi}^{2\pi(x-\lfloor x\rfloor)}\sin\left(u\right)du\\&=\frac{4\lfloor x\rfloor}{x}+\frac{2}{x}+\frac{1}{x}\Big[\cos\left(u\right)\Big]_{\pi}^{2\pi(x-\lfloor x\rfloor)}\\&=\frac{4\lfloor x\rfloor+3+\cos\left(2\pi x\right)}{x}\end{aligned}$$

となる．
よって，方程式

$$f(x)=4$$

は，方程式

$$\frac{4\lfloor x\rfloor+3+\cos(2\pi x)}{x}=4$$

と同値であり，これは方程式

$$4(x-\lfloor x\rfloor)-\cos(2\pi(x-\lfloor x\rfloor))-3=0$$

と同値である．

そこで，

$$x-\lfloor x\rfloor=t$$

とおいて，

$$4t-\cos(2\pi t)-3=0$$

を満たす 0.5 以上 1 未満の実数 t を求める．

関数 $g_2(t)$ を

$$g_2(t)=4t-\cos(2\pi t)-3$$

と定めると，

$$g_2'(t)=4+2\pi\sin(2\pi t)$$

であり，

$$g_2''(t)=4\pi^2\cos(2\pi t)$$

であるから，$g_2(t)$ の符号は

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$		$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$		$\cdots$	1
$g_2''(t)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$g_2'(t)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$g_2(t)$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0

と求めることができる．

よって

$$4t-\cos(2\pi t)+1=0$$

を満たす 0 以上 0.5 未満の実数 t は

$$t=\frac{1}{2},\frac{3}{4}$$

であるから，$0.5\leq x-\lfloor x\rfloor<1$ なる正実数 x に対して方程式

$$f(x)=4$$

は

$$x-\lfloor x\rfloor=\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}$$

と同値である．

以上から，正の実数 x に対して方程式

$$f(x)=4$$

の解は

$$x=\frac{k}{4}\quad k\text{ は正の整数}$$

であることが分かった．

(iii) $x < 0$ のときを考えると，

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^{2\pi} |\sin(xt)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} |-\sin(xt)|\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} |\sin(-xt)|\, dt \\ &= f(-x) \end{aligned}$$

であるから，方程式

$$f(x) = 4$$

は方程式

$$f(-x) = 4$$

と同値である．

よって，負の実数 x に対して方程式

$$f(x) = 4$$

の解は

$$x = \frac{k}{4} \quad k\text{ は負の整数}$$

であることが分かった．

以上から，方程式

$$\int_0^{2\pi} |\sin(xt)|\, dt = 4$$

の解は

$$x = \frac{k}{4} \quad k\text{ は 0 以外の整数}$$

である．

問 題　26

(1) 実数 x, y を用いて $z = x + yi$ とおくと，$c(z)^2$ は

$$\begin{aligned}
c(z)^2 &= \left((\cos x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - (\sin x) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) i \right)^2 \\
&= (\cos x)^2 \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2 \\
&\quad - (\sin x)^2 \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 \\
&\quad - 2 (\cos x) (\sin x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) i
\end{aligned}$$

であり，$s(z)^2$ は

$$\begin{aligned}
a(z)^2 &= \left((\sin x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) + (\cos x) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) i \right)^2 \\
&= (\sin x)^2 \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2 \\
&\quad - (\cos x)^2 \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 \\
&\quad + 2 (\cos x) (\sin x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) i
\end{aligned}$$

であるから，それらの和は

$$\begin{aligned}
c(z)^2 + s(z)^2 &= \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2 - \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2 \\
&= \frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} - \frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} \\
&= 1
\end{aligned}$$

となる．

これで示された．

(2) $|c(x + yi)|$ を変形していくと

$$\begin{aligned}
&|\cos (x + yi)| \\
=& \left| (\cos x) \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right) - (\sin x) \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right) i \right| \\
=& \sqrt{(\cos x)^2 \left(\frac{e^y + e^{-y}}{2} \right)^2 + (\sin x)^2 \left(\frac{e^y - e^{-y}}{2} \right)^2} \\
=& \sqrt{(\cos x)^2 \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y} + 2}{4} \right) + (\sin x)^2 \left(\frac{e^{2y} + e^{-2y} - 2}{4} \right)} \\
=& \sqrt{\frac{e^{2y} + e^{-2y}}{4} + \frac{1}{2} \left(1 - 2 \sin^2 x \right)}
\end{aligned}$$

となる．

したがって

$$
\begin{aligned}
&|\cos(x+yi)| = 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{e^{2y}+e^{-2y}}{4} + \frac{1}{2}\left(1-2\sin^2 x\right) = 1 \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{e^{2y}-2+e^{-2y}}{4} = \sin^2 x \\
\Longleftrightarrow\ & \frac{e^{y}-e^{-y}}{2} = \pm\sin x \\
\Longleftrightarrow\ & \left(e^{y}\right)^2 \mp 2(\sin x)\left(e^{y}\right) - 1 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & y = \log\left(\pm\sin x + \sqrt{\sin^2 x + 1}\right)
\end{aligned}
$$

となる．

ゆえに，求めるべき面積を S とおくと

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi}\left(\log\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x+1}\right) - \log\left(-\sin x + \sqrt{\sin^2 x+1}\right)\right)dx \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\left(\sin x + \sqrt{\sin^2 x+1}\right)dx \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^1 \frac{(\sin x)}{\sqrt{1+(\sin x)^2 y^2}}dy\right)dx \\
&= \begin{cases} 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \le y \le 1 \\ 0 \le z \le \dfrac{(\sin x)}{\sqrt{1+(\sin x)^2 y^2}} \end{cases} \quad \text{を満たす点 } (x,y,z) \text{ 全体の体積の 4 倍} \\
&= 4\int_0^1\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x)}{\sqrt{1+(\sin x)^2 y^2}}dx\right)dy
\end{aligned}
$$

ここで $-\cos x$ を t とおき，y を $\tan\theta$ とおくことで

$$
\begin{aligned}
S =& 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{-1}^{0} \frac{1+\tan^2\theta}{\sqrt{1+\left(1-t^2\right)\left(\tan^2\theta\right)}}dt\right)d\theta \\
=& 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\int_{-1}^{0} \frac{1}{(\cos\theta)\sqrt{1-(\sin\theta)^2 t^2}}dt\right)d\theta \\
=& 4\lim_{\alpha\to+0}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\theta}{(\sin\theta)(\cos\theta)}d\theta \\
=& 4G
\end{aligned}
$$

と計算できる．よって答えは $4G$ である．

問　題　27

(1) 以降，$f(x) = \alpha$ なる x が存在するとき，そのような x のうち i 番目に大きな値を記号 $W_i(\alpha)$ で表す。

$$f'(x) = (1+x)e^x \qquad \text{および} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$$

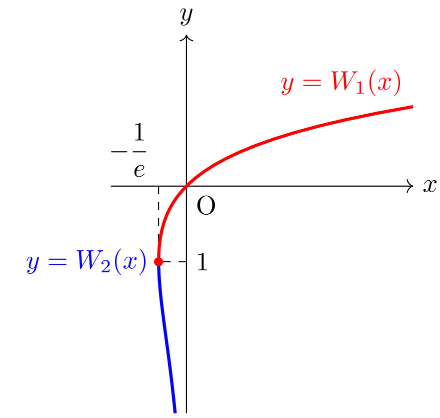
より，次の表を得る。

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	$-1/e$ (最小)	$\nearrow$	(∞)

したがって，各 α に対し $f(x) = \alpha$ となる x の個数は

$$\begin{array}{ll} \alpha < -\dfrac{1}{e} \text{ のとき} & 0 \text{ 個} \\ \alpha = \dfrac{1}{e} \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \\ -\dfrac{1}{e} < \alpha < 0 \text{ のとき} & 2 \text{ 個} \\ 0 < \alpha \text{ のとき} & 1 \text{ 個} \end{array} \qquad \cdots\cdots \text{（答）}$$

ゆえに，$W_1(\alpha)$ および $W_2(\alpha)$ を x の関数とみるならば，$f(x)$ の連続性からそれらも連続な関数であり，それぞれの定義域は $-\dfrac{1}{e} \leqq \alpha$ および $-\dfrac{1}{e} < \alpha < 0$ である。



(2) まずは $(x, y) \in C$ なる x の範囲を求める。方程式

$$x^y y^x = 2^{xy} \qquad (\bigstar)$$

の両辺を $\dfrac{1}{xy}$ 乗して $(x,\ y > 0)$,

$$x^{\frac{1}{x}} y^{\frac{1}{y}} = 2$$

を得る。また両辺の対数をとって $(x,\ y > 0)$,

$$\frac{\log x}{x} + \frac{\log y}{y} = \log 2 \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\log y}{y} = \log 2 - \frac{\log x}{x}.$$

関数　$g(y) = \dfrac{\log y}{y}$　に対し,

$$g'(y) = \frac{1 - \log y}{y^2}$$

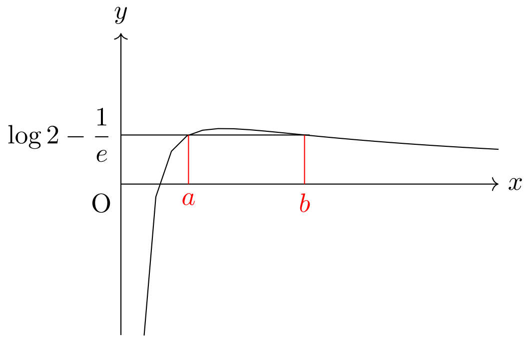
であるから，$z = g(y)$ の取りうる値の範囲は

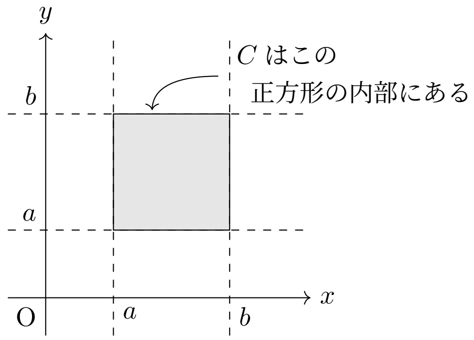
$$z \leqq g(e) = \frac{1}{e}$$

である。ゆえに，($\bigstar$) を満たす y が少なくとも一つ存在するための x の条件は，

$$\log 2 - \frac{\log x}{x} \leqq \frac{1}{e} \qquad \text{すなわち} \qquad \frac{\log x}{x} \geq \log 2 - \frac{1}{e}\,(>0)^{\text{注}\,1}.$$

関数 $g(x)$ は上に凸な関数であったから，上の条件を満たす x は，$a \leqq x \leqq b$ の形であらわされる。元の方程式 ($\bigstar$) は x と y に関して対称であったから，y の取りうる範囲も $a \leqq y \leqq b$ の形であらわされる (要約すれば，C は $y = x$ に対称な正方形に内接する)。





次に，式 ($\bigstar$) を y について解く。便宜上 $c = \log 2 - \dfrac{\log x}{x}$ とおくと，

$$\frac{\log y}{y} = c \qquad \text{すなわち} \qquad \log y = cy \qquad \text{よって} \qquad -cy \cdot e^{-cy} = -c.$$

ゆえに

$$-cy = W_i(-c)$$

したがって

$$y = \frac{W_i(-c)}{-c}.$$

x と c の関係は、次のとおりである。

x	a	$\cdots\cdots\cdots\cdots$	b
$-c$	$-\dfrac{1}{e}$	$-\dfrac{1}{e}$より大きな値	$-\dfrac{1}{e}$

ゆえに，曲線 C は

$$\begin{array}{ll} x = a \text{ のとき} & y = W_1(a) \\ a < x < b \text{ のとき} & y = W_1(x), \quad y = W_2(x) \\ x = b \text{ のとき} & y = W_1(b) \end{array}$$

$W_i(x)$ の連続性により，C が閉じた閉曲線であることが示された。

[注 1] $\quad \log 2 - \dfrac{1}{e} = \dfrac{1}{e}\left(\log 2^e - 1\right) > \dfrac{1}{e}\left(\log 4 - 1\right) > 0.$

問　題　28

《解答》

曲線

$$y = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

は、曲線

$$\frac{x+y}{2} = \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{x-y}{2}$$

と書ける。

ここで、複素数平面において

$$(x+yi)\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{x-y}{2} + \frac{x+y}{2}i$$

であるから、問題の曲線は、曲線

$$y = \sin x + x$$

を原点中心で時計回りに 45° 回して $\sqrt{2}$ 倍した図形である。

ゆえに求める面積は、

$$\begin{aligned} & 2\int_0^\pi ((\sin x + x) - x)\,dx \\ =& 2\left[-\cos x\right]_0^\pi \\ =& 4 \end{aligned}$$

である。

問 題 29

《解答》

(i) $p < 0$ のとき，

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

であるから，実数 $f(0)$ をどのように決めても連続にならない．

(ii) $p = 0$ のとき，0 以外の実数 x に対して

$$f(x) = 1$$

であるから，

$$f(0) = 1$$

と定めれば微分可能になる．

(iii) $0 < p < 1$ のとき，

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

であるから，

$$f(0) = 0$$

と定めれば連続になる．

しかし，$x = 0$ での微分係数が存在すると仮定すると

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|^p}{x}$$

の極限が存在することになるが，これは発散するのであるから，微分可能でない．

(iv) $p = 1$ のとき，

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

であるから，

$$f(0) = 0$$

と定めれば連続になる．

しかし，$x = 0$ での微分係数が存在すると仮定すると

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

の極限が存在することになるが，右極限は 1, 左極限は -1 であり，一致しないから，微分可能でない．

(v) $p > 1$ のとき，

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

であるから，

$$f(0) = 0$$

と定めれば連続になる．

また，$x = 0$ での微分係数は

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x|^p}{x} = 0$$

であり，微分可能．

以上から，答えは

- $p < 0$ のとき (a)
- $0 < p \leq 1$ のとき (b)
- $p = 0, p > 1$ のとき (c)

問　題　30

《解答》

まず

$$y + xy' = \frac{1-y+x}{1+y-x} + 2x$$

を変形すると

$$y - x + x\left(y' - 1\right) = \frac{1-y+x}{1+y-x}$$

となる．

よって，正の実数 x に対する関数 z を

$$z = y - x$$

と定めれば

$$z + x\frac{dz}{dx} = \frac{1-z}{1+z}$$

すなわちこれより

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1-2z-z^2}{1+z}$$

が得られる．

(i) x によらず常に

$$z = -1 + \sqrt{2}$$

であるとすると，

$$y = x - 1 + \sqrt{2}$$

であり，方程式は成立する．

(ii) x によらず常に

$$z = -1 - \sqrt{2}$$

であるとすると，

$$y = x - 1 - \sqrt{2}$$

であり，方程式は成立する．

(iii) (i) および (ii) でないときを考える．

$$x\frac{dz}{dx} = \frac{1-2z-z^2}{1+z}$$

より

$$\frac{1+z}{1-2z-z^2}\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

である．

両辺 x で不定積分すると，左辺において置換積分の公式を適用できて

$$\int \frac{1+z}{1-2z-z^2}dz = \int \frac{1}{x}dx$$

が成り立つ．

これより

$$-\frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{z+1+\sqrt{2}} + \frac{1}{z+1-\sqrt{2}}\right)dz = \int \frac{1}{x}dx$$

であるから，

$$\ln\left(\left|\left(z+1+\sqrt{2}\right)\left(z+1-\sqrt{2}\right)\right|\right) = -2\ln\left(x\right) + C_1$$

が得られる（C_1 は定数）.

これより

$$z^2 + 2z - 1 = \frac{C}{x^2}$$

が導かれる（C は定数）.

二次方程式の解の公式よりこれを解いて

$$z = -1 \pm \sqrt{2 + \frac{C}{x^2}}$$

となる.

z は正の実数 x に対して定義されているから

$$C > 0$$

である必要があり，そのときは

$$y = x - 1 \pm \sqrt{2 + \frac{C}{x^2}}$$

でこれは適する.

以上から，解は

$$y = x - 1 + \sqrt{2 + \frac{C}{x^2}}, \quad y = x - 1 - \sqrt{2 + \frac{C}{x^2}} \quad (C \geq 0)$$

である.