第　102　問

A を m 次複素正方行列とする。また, ある行列列 $\{A_n\}$ が以下の漸化式により定められている。

$$A_{n+1} = AA_n + E,\ A_0 = E$$

このとき, ある自然数 n において, $A_n = O$ となるならば, A は対角化可能であることを示せ。

作問者：negi_0613_

解答

まず,

$$A_n = A^n + \cdots + A + E$$

となることを数学的帰納法を用いて示す。

$n = 0$ のとき 当然成り立つ。
$n = k$ のとき

$$A_k = A^k + \cdots + A + E$$

が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} A_{k+1} &= A(A^k + \cdots + A + E) + E \\ &= A^{k+1} + \cdots + A + E \end{aligned}$$

より, $n = k+1$ でも成り立つ。

よって数学的帰納法から示された。
$\psi_A(t)$ を A の最小多項式とし, ある自然数 n で $A_n = O$ となるとする.
$A^n + \cdots + A + E = O$ であるから, $f(t) = t^n + \cdots + t + 1$ とすると, $f(A) = O$ となるため,

$$\psi_A(t) \big| f(t) \tag{$\star$}$$

が成り立つ.
ここで,

$$f(t) = \prod_{k=1}^{n} \left(t - e^{2\frac{k}{n+1}\pi i} \right)$$

と複素数係数範囲内で因数分解でき, 代数学の基本定理からこの根は複素数範囲ないでちょうど $n+1$ 個であり, それら全てが異なるので, $f(t)$ は重根を持たないことが分かる.
よって, $(\star)$ より $\psi_A(t)$ も重根を持たず, A は対角化可能である.