■　解答編（問題 1〜 問題 10）

問　題　1

解答

a について降べきの順に整理すると,

$$
\begin{aligned}
&(b+c)a^3+(2b^2+4bc+2c^2)a^2+(4b^2c+4bc^2+c^3+b^3)a+b^3c+2b^2c^2+bc^3\\
&=(b+c)a^3+2(b+c)^2a^2+(b+c)(b^2+3bc+c^2)a+bc(b+c)^2\\
&=(b+c)\{(a+c)b^2+(2a^2+c^2+3ac)b+ac^2+2a^2c+a^3\}\\
&=(b+c)(a+c)(b^2+2ab+a^2+bc+ac)\\
&=(b+c)(a+c)(a+b)(a+b+c)
\end{aligned}
$$

問 題 2

関数 $f(x)$ を
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
とおく.

(i) $a = 0$ のとき
$$f(x) = bx + c$$
でありこれは直線の式だから，最小値は $f(1)$ と $f(-1)$ の大きくない方である．よって最小値は
$$-|b| + c$$
である.

(ii) $a > 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフは下に凸であり，
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$
であるからグラフの軸は
$$\text{直線 } x = -\frac{b}{2a}$$
である.

(a) (軸) ≤ -1，つまり
$$2a \leq b$$
のとき，最小値は $f(-1)$，すなわち
$$a - b + c$$
である.

(b) $-1 \leq$ (軸) ≤ 1，つまり
$$-2a \leq b \leq 2a$$
のとき，最小値は $f(($軸$))$，すなわち
$$-\frac{b^2}{4a} + c$$
である.

(c) $1 \leq$ (軸)，つまり
$$b \leq -2a$$
のとき，最小値は $f(1)$，すなわち
$$a + b + c$$
である.

(iii) $a > 0$ のとき，$y = f(x)$ のグラフは上に凸であり，
$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c$$
であるからグラフの軸は
$$\text{直線 } x = -\frac{b}{2a}$$
である.

(a) (軸) ≤ 0，つまり
$$b \leq 0$$
のとき，最小値は $f(1)$，すなわち
$$a + b + c$$
である.

（b）$0 \leq$ (軸)，つまり

$$0 \leq b$$

のとき，最小値は $f(-1)$，すなわち

$$a - b + c$$

である．

以上から，最小値は

$$\begin{cases} -\dfrac{b^2}{4a} + c & (|b| < 2a) \\ a - |b| + c & (|b| \geq 2a) \end{cases}$$

問 題 3

$\boxed{\text{方針1}}$

最も簡単な判断方法を述べる．直線 $x = \dfrac{1}{2}$ および直線 $y = \dfrac{1}{2}$ によって分割された四つの領域においては，円の一部が描かれるはずであるから， ③ が適切であると判断することができる．

$\boxed{\text{方針2}}$

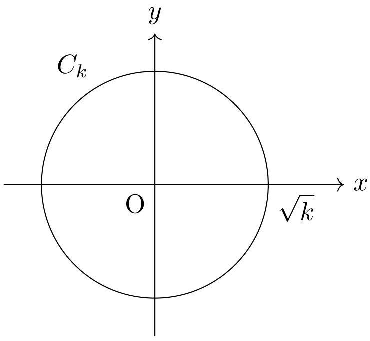
方針 1 より動的な考察をしてみる．
求める図形を W とする。

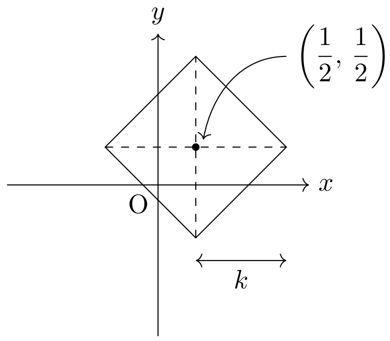
$$x^2 + y^2 = \left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y - \frac{1}{2}\right| \iff \exists k \geq 0, \quad x^2 + y^2 = k \quad \text{かつ} \quad \left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y - \frac{1}{2}\right| = k$$

であるから，$k \geq 0$ に対して 2 つの図形

$$\begin{aligned} C_k &: \text{円} & x^2 + y^2 &= k, \\ D_k &: \text{正方形} & \left|x - \frac{1}{2}\right| + \left|y - \frac{1}{2}\right| &= k \end{aligned}$$

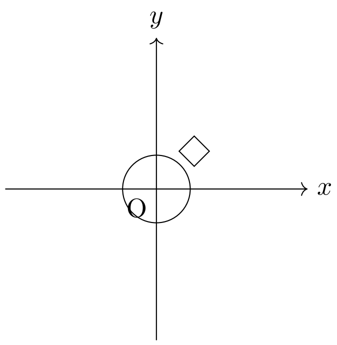
を定めるならば，W は，k が $k \geq 0$ 上を動くときの，C_k と D_k との交点の軌跡である。
C_k および D_k は次のような図形である。





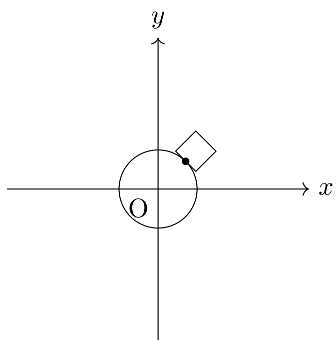
k を 0 から大きくしていくと，次のように交点の様子が変化する。ただし，k_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ はそれぞれある実数である。

(1) $0 \leqq k < k_1$ のとき



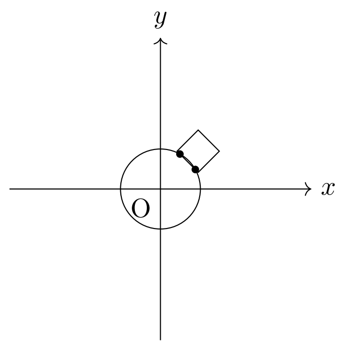
交点 0 個

(2) $k = k_1$ のとき



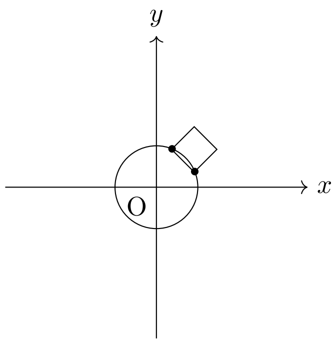
交点 1 個

(3) $k_1 < k < k_2$ のとき



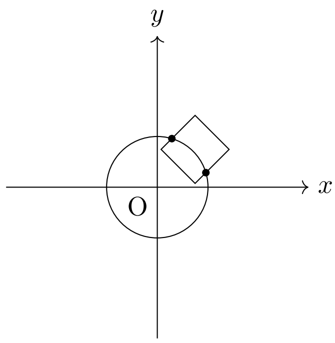
交点 2 個

(4)　$k = k_2$ のとき



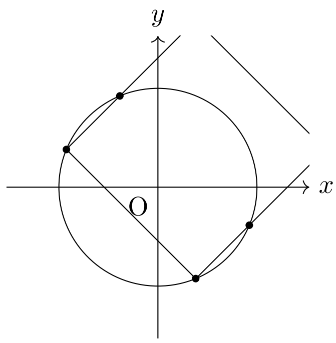
交点 2 個

(5)　$k_2 < k < k_3$ のとき



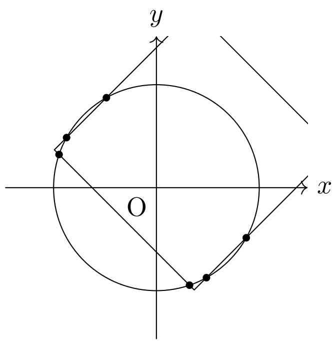
交点 2 個

(6)　$k = k_3$ のとき



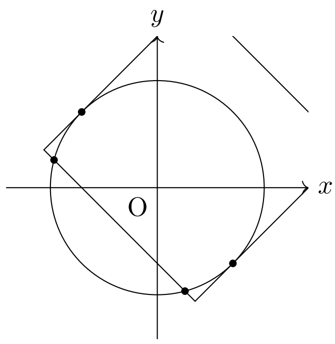
交点 4 個

(7)　$k_3 < k < k_4$ のとき



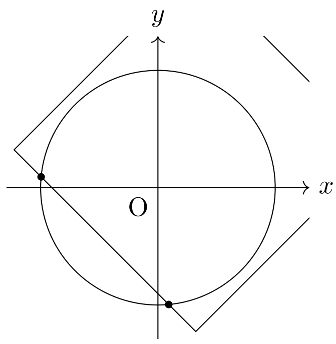
交点 6 個

(8)　$k = k_4$ のとき



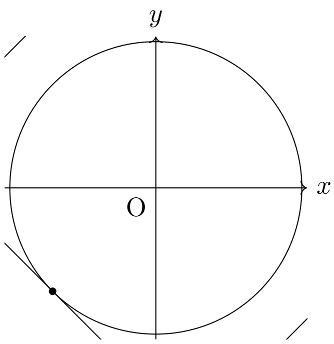
交点 4 個

(9)　$k_4 < k < k_5$ のとき



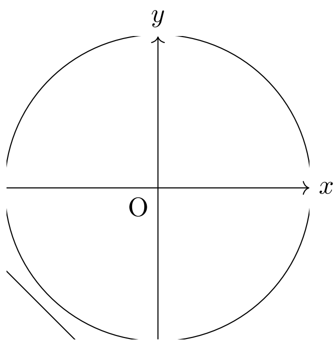
交点 2 個

(10)　$k = k_5$ のとき



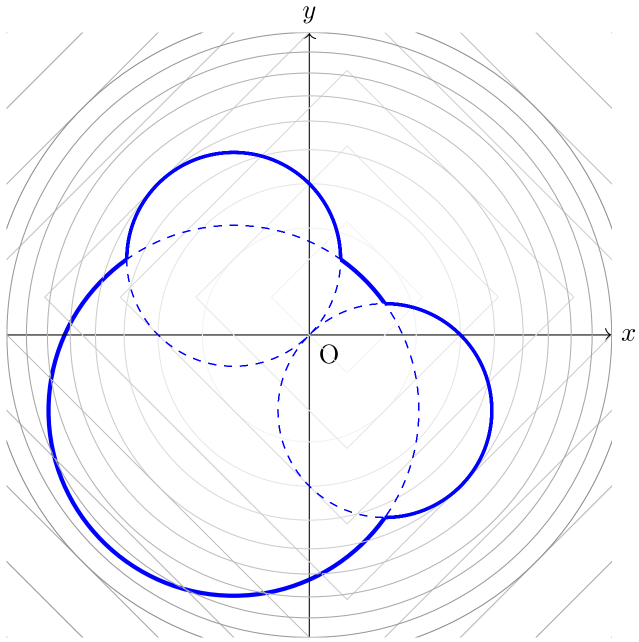
交点 1 個

(11)　$k_5 < k$ のとき



交点 0 個

これより，W の概形として次のような図を得る。これはどう見ても，③ クマの顔の輪郭，である。


y
x
O

《解答》
L の両端のうち，PQ の延長にあるものを点 A，PR の延長にあるものを点 B とする．
円に内接する四角形の性質より，
$$\angle PQR = \angle PBA$$
かつ
$$\angle PRQ = \angle PAB$$
であるから，
$$\triangle PQR \sim \triangle PBA$$
が成り立つ．
したがって，
$$QR : BA = PQ : PB$$
つまり
$$QR = AB \cdot \frac{PQ}{PB}$$
が成り立つ．
ここで，円周角の定理より
$$\angle AQB = 90^\circ$$
であるから，
$$\angle PQB = 90^\circ$$
であるため，$\triangle PQB$ で三角比より
$$\frac{PQ}{PB} = \cos \angle QPB$$
すなわち
$$\frac{PQ}{PB} = \cos \angle QPR$$
が成り立つ．
したがって，
$$QR = AB \cdot \cos \angle QPR$$
が得られる．
次に，$\triangle PQR$ の外接円の半径を r とすると，正弦定理より
$$r = \frac{QR}{2 \sin \angle QPR}$$
であるから，上の結果を代入して
$$r = \frac{AB \cdot \cos \angle QPR}{2 \sin \angle QPR}$$
が成り立つ．
ゆえに，三点 P,Q,R を通る円の面積は，
$$\pi r^2 = \pi \left(\frac{AB \cdot \cos \angle QPR}{2 \sin \angle QPR} \right)^2$$
である．
円周角の定理より，点 P のとり方によらず $\angle QPR$ は不変であるから，これより πr^2 は P のとり方によらず不変であることが示された．

問　題　5

元の本のページ数を $n(n > 65)$ としたとき, 最大値は,

$$\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}\cdot 65 \cdot 66 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 2145$$

最小値は,

$$\frac{1}{2}(n-65)(n-64) = \frac{1}{2}n^2 - \frac{129}{2}n + 2080$$

であり, その間の数字は黒塗りするページをずらせばすべて取るので,

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{129}{2}n + 2080 \leqq 12876 \leqq \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 2145$$

を満たす n が求める n である. これを解くことで,

$$\frac{1}{2}(\sqrt{120169} - 1) \leqq n \leqq \frac{1}{2}(\sqrt{103009} + 129)$$

$346^2 = 119716$, $347^2 = 120409$ より, $172.5 <$ (最左辺) < 173 となり, 最小の n は, 173 であり, $320^2 = 102400$, $321^2 = 103041$ より $224.5 <$ (最左辺) < 225 となり, 最大の n は 224.

問　題　6

《解答》

命題は $y=-1$ においても正しいので、全ての実数 x に対し

$$f\left(-1\right)=f\left(x-1\right)-x$$

が成り立つ。
よって、ある定数 c を用いて

$$f(x)=x+c$$

と書ける。
逆に、そのようなものは全て解としてふさわしい.
よって，答えは

$$f(x)=x+c\quad(c\text{ は定数})$$

である.

問　題　7

《解答》

- x が有理数のときを考える．有理数の定義より，x はある整数 $p,\, q\ (q \neq 0)$ を用いて

$$x = \frac{p}{q}$$

と書けるはずである．

このとき，

$$\begin{aligned} S(x) &= \{m + nx \mid m \text{ と } n \text{ は整数}\} \\ &= \left\{m + n\frac{p}{q} \mid m \text{ と } n \text{ は整数}\right\} \\ &= \left\{\frac{mq+np}{q} \mid m \text{ と } n \text{ は整数}\right\} \\ &\subset \left\{\frac{t}{q} \mid t \text{ は整数}\right\} \end{aligned}$$

となる．

よって，$S(x)$ の元 s であって

$$0 < s < \frac{1}{q}$$

を満たすものは存在しない．

ゆえに，$S(x)$ は稠密でない．

- x が無理数のときを考える．

実数 $a, b\ (a < b)$ を任意にとり，整数 N を

$$N > \frac{1}{b-a}$$

となるようにとる．

すると，

$$\frac{1}{N} < b - a$$

が成り立つ．

さて, 相異なる整数 $i,\, j$ に対して $(j-i)x$ は無理数であるから，ij と jx の小数部分は異なる．

よって，$N+1$ 個の実数 $x, 2x, \ldots, (N+1)x$ の小数部分は全て異なるので，相異なる整数 $k,\, l$ を適切にとれば，kx の小数部分と lx の小数部分の差の絶対値は $1/N$ より小さく，ゆえに $b-a$ よりも小さい．

したがって，適切に整数 u をとれば

$$-(b-a) < u + kx - lx < b - a$$

が成り立つ．

よって，さらに適切に整数 v をとれば

$$a < v(u + kx - lx) < b$$

すなわち

$$a < (uv) + (kv - lv)x < b$$

が得られる．

いま uv と $kv - lv$ は整数なので

$$(uv) + (kv - lv)x \in S(x)$$

である．

したがって，$S(x)$ は稠密である．

以上から，答えは，x が無理数であること．

問　題　8

【解答】

(i) $0 < \theta \leq 3\pi/2$ のとき、通過領域は、中心角 θ, 半径 $\sqrt{2}$ のおうぎ形に 3 辺 $(1, 1, \sqrt{2})$ の直角二等辺三角形が 2 つ接続した形になるので、面積は $\theta + 1$ である。

(ii) $3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$ のときを考える。
座標平面において 4 つの点

$$\begin{cases} \mathrm{O}(0,0) \\ \mathrm{A}_\theta, (\cos t,\ \sin t) \\ \mathrm{B}_\theta, (\cos t - \sin t,\ \sin t + \cos t) \\ \mathrm{C}_\theta, (-\sin t,\ \cos t) \end{cases}$$

をとり、この四点からなる正方形の通過領域を論じればよい。
直線 $\mathrm{B}_\theta\mathrm{C}_\theta$ の式は、$\theta = 3\pi/2$ のときを除き

$$\mathrm{B}_\theta\mathrm{C}_\theta : y = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(x + \sin\theta) + \cos\theta$$

である。
よってこのとき、それと直線 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$（直線 $x = 1$）の交点は

$$\left(1,\ \frac{\sin\theta}{\cos\theta}(1 + \sin\theta) + \cos\theta\right)$$

である。
この座標を変形すると、$\theta = 3\pi/2$ のときも含めて

$$\left(1,\ \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

と書ける。
したがって、通過領域は、中心角 θ, 半径 $\sqrt{2}$ のおうぎ形に、三角形（長さ $1 - \tan(\theta/2 + \pi/4)$ の辺に対する高さ 1 をもつ）が 2 つ接続した形になるので、面積は $1 + \theta - \tan(\theta/2 + \pi/4)$ である。

(iii) $2\pi \leq \theta$ のとき、通過領域は半径 $\sqrt{2}$ の円で固定されるので、その面積は 2π である。

したがって答えは

$$\begin{cases} 1 + \theta & \left(0 \leq \theta \leq \dfrac{3}{2}\pi\right) \\ 1 + \theta - \tan\left(\dfrac{\theta}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) & \left(\dfrac{3}{2}\pi \leq \theta \leq 2\pi\right) \\ 2\pi & (2\pi \leq \theta) \end{cases}$$

問　題　9

以下のように三角形を設定する．

外側の三角形:$\triangle \mathrm{ABC}$　$(\mathrm{AB}=3, \mathrm{BC}=\sqrt{5}, \mathrm{CA}=2\sqrt{2})$

内側の三角形:$\triangle \mathrm{DEF}$　$(\mathrm{DE}=\mathrm{DF}=x, \angle \mathrm{D}=90^\circ)$

余弦定理より，$\cos \mathrm{A}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \cos \mathrm{B}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}, \cos \mathrm{C}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ である．よって，$\tan A=1, \tan \mathrm{B}=2, \tan \mathrm{C}=3$

(i) 辺 AB 上に点 D がある場合

辺 BC 上に点 E，辺 CA 上に点 F があるものとする．辺 AB 上に下した点 E，F の垂線の足をそれぞれ点 G，H とする．$\angle \mathrm{ADF}=\theta$ とすると，$\angle \mathrm{DEG}=\theta$ となり，各辺の長さは以下のように表すことができる．

$$\mathrm{DG}=x\sin\theta, \mathrm{DH}=x\cos\theta, \mathrm{EG}=x\cos\theta, \mathrm{FH}=x\sin\theta$$

ここで，EG，FH はそれぞれ辺 AB の垂線なので．

$$\mathrm{BG}=\frac{\mathrm{EG}}{\tan \mathrm{B}}=\frac{1}{2}x\cos\theta, \mathrm{AH}=\frac{\mathrm{FH}}{\tan \mathrm{A}}=x\sin\theta$$

よって，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\mathrm{AH}+\mathrm{HD}+\mathrm{DG}+\mathrm{GB}\\&=\frac{3}{2}x\cos\theta+2x\sin\theta\\&=\frac{5}{2}x\sin(\theta+\alpha_1)=3 \quad (\text{ただし，} \tan\alpha_1=\frac{3}{4})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=\frac{6}{5\sin(\theta+\alpha_1)}\\ \triangle \mathrm{DEF}&=\frac{1}{2}x^2=\frac{18}{25\sin^2(\theta+\alpha_1)}\geq\frac{18}{25}\end{aligned}$$

等号成立は $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha_1$ のときであり，そのような θ は存在しうる．

(ii) 辺 BC 上に点 D がある場合

辺 CA 上に点 E，辺 AB 上に点 F があるものとする．(i) と同様に考える．

$\angle \mathrm{BDF}=\theta$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}&=\frac{4}{3}x\cos\theta+\frac{3}{2}x\sin\theta\\&=\frac{\sqrt{145}}{6}x\sin(\theta+\alpha_2)\\&=\sqrt{5} \quad (\text{ただし，}\tan\alpha_2=\frac{8}{9})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=\frac{6}{\sqrt{29}\sin(\theta+\alpha_2)}\\ \triangle \mathrm{DEF}&=\frac{1}{2}x^2=\frac{18}{29\sin^2(\theta+\alpha_2)}\geq\frac{18}{29}\end{aligned}$$

等号成立は $\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha_2$ のときであり，そのような θ は存在しうる．

(iii) 辺 CA 上に点 D がある場合

辺 AB 上に点 E，辺 BC 上に点 F があるものとする．(i) と同様に考える．$\angle\mathrm{CDF}=\theta$ とすると，

$$\begin{aligned}\mathrm{BC}&=2x\cos\theta+\frac{4}{3}x\cos\theta\\&=\frac{\sqrt{52}}{3}x\sin(\theta+\alpha_3)\\&=2\sqrt{2}\quad(\text{ただし，}\tan\alpha_3=\frac{3}{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x&=\frac{6}{\sqrt{26}\sin(\theta+\alpha_3)}\\\triangle\mathrm{DEF}&=\frac{1}{2}x^2=\frac{9}{13\sin^2(\theta+\alpha_3)}\geqq\frac{9}{13}\end{aligned}$$

等号成立は $\theta=\frac{\pi}{2}-\alpha_3$ のときであり，そのような θ は存在する．

(i),(ii),(iii) より，

$$\frac{18}{29}\leqq\frac{9}{13}\leqq\frac{18}{25}$$

なので，求めたい最小値は

$$\triangle\mathrm{DEF}_{\min}=\frac{18}{29}$$

である．

問　題　10

《解答》

$$(a > 0のとき)\quad -\frac{b^2}{3a} + c \geqq 0$$

$$(a < 0のとき)\quad -\frac{b^2}{3a} + c \leqq 0$$

《略解》

以降、$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ とする。
p がいかなる実数であっても、$f(x) = -p$ が実数解をただ 1 つもつということは、$f(x)$ が単調減少または単調増加ということである。つまり $a > 0$ なら $f'(x) \geqq 0$、$a < 0$ なら $f'(x) \leqq 0$ ということになる。
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ であり、平方完成すると $f'(x) = 3a(x + \dfrac{b}{3a})^2 - \dfrac{b^2}{3a} + c$ となる。
すなわち題意を満たす a, b, c の条件は、

$$(a > 0のとき)\quad -\frac{b^2}{3a} + c \geqq 0$$

$$(a < 0のとき)\quad -\frac{b^2}{3a} + c \leqq 0$$

となる。
【別解】
$f'(x) = 0$ の解が 1 つまたは 0 個であるような条件を求める.

$$3ax^2 + 2bx + c = 0$$

の判別式から,

$$(4b^2) - 4 \cdot (3a) \cdot c \leqq 0$$

これを整理すると,

$$b^2 - 3ac \leqq 0.$$

なお，本解の場合分けしてできた 2 つの不等式それぞれの両辺に $3a$ をかけてこの解を得る場合には $3a < 0$ のときに不等号が逆転することに注意する.