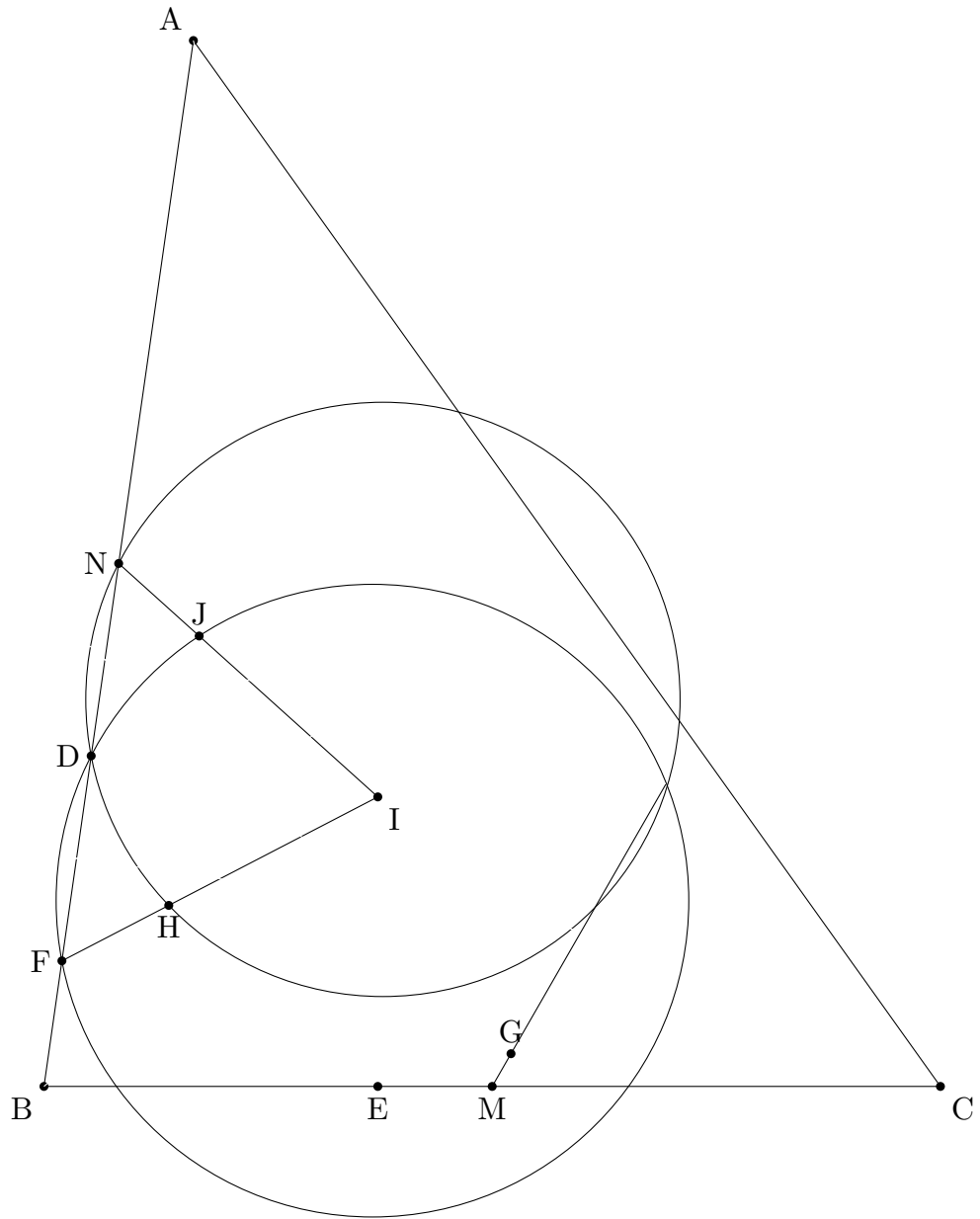


第 n 問

$AC > AB$ を満たす鋭角三角形 ABC について、内接円を ω とし内心を I とする。また、 ω と AB, BC の接点をそれぞれ D, E とする。さらに、 AB, BC の中点をそれぞれ M, N とし、 C から AB におろした垂線の足を F とする。 AI に対して E と対称な点を G 、 D から FI, NI に対しておろした垂線の足をそれぞれ H, J とするとき、三角形 HDN の外接円、三角形 FDJ の外接円、 MG は一点で交わることを示せ。

作問者：negi_0613_

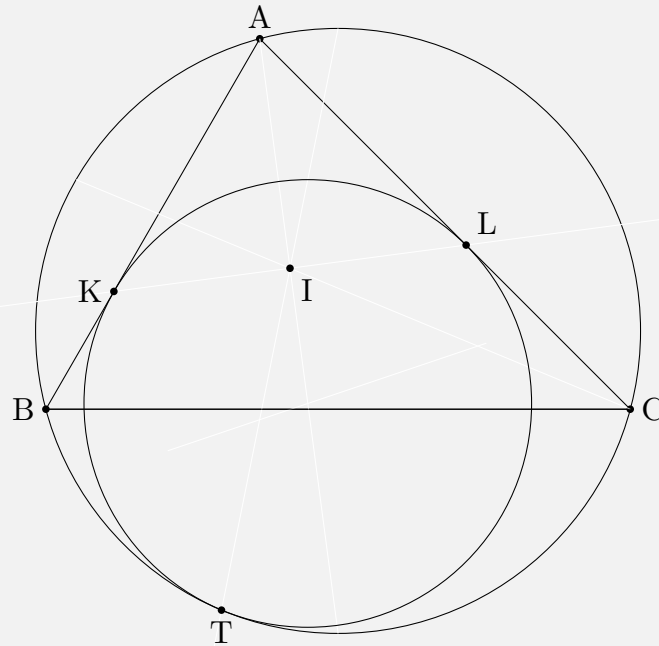
参考図



解答

補題 1

次の図において、4 点 B, K, I, T が同一円周上にある。(補題 1) ただし、ここでの点の取り方は問題文の通りではない。



但し、 I は三角形 ABC の内心、 K, L, T はそれぞれの接点である。

三角形 ABC の外接円を Γ 、三角形 KLT の外接円を Ω とする。

TK と Γ の交点を X とする。このとき、 Ω と Γ は T を中心とする相似であるから、 Ω の X における接線と Γ の K における接線は平行である。よって、その対応を考えれば、 $\widehat{AX} = \widehat{BX}$ が成り立つ。

補題 2

次に、図において、
以降この円を九点円と呼ぶ。

補題 3

内接円と九点円は接する。(フォイエルバッハの定理)

さて、本題に入る。以降、点は問題文の通りにとるものとする。

ここで、補題 3 より内接円と九点円は接し、その点を F_e とする。また、九点円を補題 1 の Γ 、内接円を補題 1 における Ω と考えれば、4 点 J, D, F, F_e 及び 4 点 N, D, H, F_e は同一円周上にある。すなわち、3 点 F_e, G, M が同一直線上にあることを示せば題意が示される。