問　題　21

(方針)

正多角形ができるときの多くは，x が 12 以外の 6 の倍数のときである。ただし，問題文の例のように 6 の倍数ではないが正多角形ができる場合もあるため，まずは x が小さいときにどうなるか調べる。

(解答)

(i) x が 12 以上のとき
このとき，x が 6 の倍数のときに限り，線が円周上の点以外で交わらないため，正多角形ができる。ただし x が 12 のときは，できる図形が線分になるため条件を満たさない。$2026 = 6 \times 337 + 3$ だから，$6 \times 3, 6 \times 4, ..., 6 \times 337$ の 335 個のときに正多角形ができる。

(ii) x が 12 未満のとき
このとき，x は $7, 8, 9, 10, 11$ であり，それぞれについて調べると x が $7, 8, 9$ のときに正多角形になる。

よって (i)，(ii) により求める数は,
$(6 \times 3 + 6 \times 4 + ... + 6 \times 337) + (7 + 8 + 9)$
$= 6 \times \{(3 + 337) \times 335 \div 2 + 4\}$
$= 6 \times 56954 = 341724$
だから，$\boxed{}$にあてはまる数は<u>341724</u>である。

(コメント)

中学生以上の人で因数分解を習った場合は，以下のように考えることもできる。

別解 (i) まで同じ。

(ii) のとき，1 回目の操作で移動する点は，S と円の中心で対称な点 (今回の場合は S から右回りに 6 つ先の点) より先にある。

ここで，右回りに 6 つ先の点に移動することは，左回りに $x - 6$ 個先の点に移動することと同じだから，$x - 6$ 個先の点に移動することを y 回繰り返し，一度も S を通過することなく S に戻るから，方程式 $(x - 6)y = x$ が成り立つ。

因数分解して，$(x - 6)(y - 1) = 6$ だから，x が 7 以上,y が 3 以上の整数だから $x - 6$，$y - 1$ が正の整数なことに注意すると、x と y の組 (x, y) は $(9, 3), (8, 4), (7, 7)$ の 3 組 ($(12, 2)$ は y が 3 以上ではないから含まれない) である。したがって x が $7, 8, 9$ のときに正多角形になる。

(以下省略)

この解法は，右回りに移動する距離が大きくても採用できる。

問　題　22

(1) 5 (2) 8 (3) 13 (4) 21 (5) 34 (6) 12 (7) 20 (8) 33 (9) 54 (10) 88 (11) オ (12) 1 (13) 13 (14) 21 (15) 34 (16) 55 (17) 89 (18) オ (19) 1 (20) ア

問　題　23

(方針)

・図 2 は，三角すい F-IBJ の展開図です。(2) の表面積では，(1) で求めた面積がどこに関連しているのか考えましょう。

・(3) で体積を直接求めるのは大変なので，全体 (立体 X) から部分 (点 I と点 K を含まない立体) を引きましょう。

(解答)

(1) SV=VT=WT=UW= 3 だから，
(三角形 RVW の面積)=(正方形 RSTU の面積)−{(三角形 RSV の面積)−(三角形 RUW の面積)−(三角形 VWT の面積)}
$= 6 \times 6 - (3 \times 6 \div 2 + 3 \times 6 \div 2 + 3 \times 3 \div 2) = \dfrac{27}{2}$
したがって，三角形 RVW の面積は$\underline{\dfrac{27}{2}(= 13.5)\mathrm{cm}^2}$である。

(2) 立体 X は図 3 のようになる。図 3 のように点 Q と Y を定める。

IB=BJ= 3cm，BF= 6cm，QZ=ZY= $\dfrac{3}{2}$cm，ZF= 3cm だから，三角すい F-IBJ から三角すい F-QZY を取り除いた立体の体積は，$(3 \times 3 \div 2) \times 6 \div 3 - (\dfrac{3}{2} \times \dfrac{3}{2} \div 2) \times 3 \div 3 = 9 - \dfrac{9}{8} = \dfrac{63}{8}\mathrm{cm}^3$ である。
したがって，図 4 の立体の体積は，$\dfrac{63}{8} \times 2 = \dfrac{63}{4}\mathrm{cm}^3$ である。立体 X は，図 1 の立方体から図 4 の立体 4 つを取り除いたものだから，その体積は $6 \times 6 \times 6 - \dfrac{63}{4} \times 4 = 216 - 63 = \underline{153\mathrm{cm}^3}$である。

(3) 点 I と K を含まない立体について考える。この立体は，正方形 EFGX を底面とする高さが 2cm の直方体から，図 4 の立体のうち底面 MFN から 2cm までの部分 (すなわち三角錐 B-MFN のうち底面 MFN から 2cm までの部分)4 つを取り除いたものである。
「図 4 の立体のうち底面 MFN から 2cm までの部分 (すなわち三角錐 B-MFN のうち底面 MFN から 2cm までの部分)」は，図 5 のようになる (含まれない部分は点線で表している)。この図で，点 Q' は Q'M= 2cm である辺 BM 上の点，点 Y' は Y'N= 2cm である辺 BN 上の点，点 Z' は Z'F= 2cm である辺 BF 上の点である。三角形 BMF と三角形 BQ'Z' は相似で，Z'F= 2cm により BZ'= 4cm だから，相似は $6 : 4 = 3 : 2$ である。したがって Q'Z'= $3 \times \dfrac{2}{3} = 2$cm，同様にして Z'Y'= 2cm。よって，点 I と K を含まない立体の体積は，
(正方形 EFGX を底面とする高さが 2cm の直方体の体積)−{(三角すい B-MFN の体積)−(三角すい Q'Z'Y' の体積)}×4
$= (6 \times 6 \times 2) - \{(3 \times 3 \div 2) \times 6 \div 3 - (2 \times 2 \div 2) \times 4 \div 3\} \times 4 = 72 - \dfrac{76}{3} = \dfrac{140}{3}\mathrm{cm}^3$ だから，点 I と K の両方を含む立体の体積は，$153 - \dfrac{140}{3} = \underline{\dfrac{319}{3}\mathrm{cm}^3}$である。

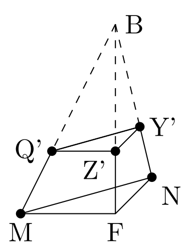


図 5

問　題　24

(1) 6

(2) $(4,6),(5,5),(6,4)$

(3) $(2,2,2,2,2),(5,5,5,5,5)$

(4) はじめは 1、2 回目は 1 または 2 しかありえない。

(i) $(1,1)$ と出た場合: $(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)$

(ii) $(1,2)$ と出た場合: $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$

問 題 25

(1) 1 の段はカードを 2 枚使わないといけないので ×。同じカードを使わずにできる九九は $2\times3=6$、$2\times4=8$ のみ。

(2) 1 桁の数を引くと 1 桁の数になる 2 桁の数は、少なくとも 10 の位が 1 である。

引かれる数	引く数	引く数 (除く)	場合の数
12	3	6	6
13	4		6
14	5	7	4
15	6		4
16	7	8	2
17	8		2

よって求める場合の数は 24 通り。

(3) 2 桁 +2 桁の最大値が $92+84$ などの 176 なので百の位は 1 確定。また、これにより 10 の位は $2,3,4,5,6,7,8$ のいずれかになる。そして計算結果の 1 の位が 0 なので 1 の位のペアは $(2,8),(3,7),(4,6)$ が考えられる。

作る数	10 の位の場合の数	1 の位の場合の数	場合の数
120	(3, 8), (5, 6)	(4, 6), (3, 7)	②, ②
130	(5, 7)	(2, 8)(4, 6)	④
140	(5, 8), (6, 7)	(3, 7), (2, 8)	②, ②
150	(6, 8)	(3, 7)	②
160	(7, 8)	(4, 6)	②

よって求める場合の数は 16 通り。

問　題　26

(**方針**)

桁数ごとに区切って考えましょう。

(**解答**)

(1) 1〜9 のうち，4 と 9 を使わない数は，$1, 2, 3, 5, 6, 7, 8$ の 7 個あるから，使うカードの枚数は 7 枚。

10〜99 のうち，4 と 9 を使わない数は，十の位に来ることができるのは 1〜3，5〜8 の 7 通り，一の位に来ることができるのは 0〜3，5〜8 の 8 通りだから，$7 \times 8 = 56$ 個。したがって使うカードの枚数は $2 \times 56 = 112$ 枚。

100〜999 のうち，4 と 9 を使わない数は，百の位に来ることができるのは 1〜3，5〜8 の 7 通り，十の位に来ることができるのは 0〜3，5〜8 の 8 通り，一の位に来ることができるのも 0〜3，5〜8 の 8 通りだから，$7 \times 8 \times 8 = 448$ 個。したがって使うカードの枚数は $3 \times 448 = 1344$ 枚。

1000〜1999 のうち，4 と 9 を使わない数は，千の位は 1 のみで，百の位に来ることができるのは 0〜3，5〜8 の 8 通り，十の位に来ることができるのも 0〜3，5〜8 の 8 通り，一の位に来ることができるのも 0〜3，5〜8 の 8 通りだから，$1 \times 8 \times 8 \times 8 = 512$ 個。したがって使うカードの枚数は $4 \times 512 = 2048$ 枚。

よって，1 から 1999(実際は 1999 を作ることはできないため 1888) までを作るのに使うカードの枚数は，$7 + 112 + 1344 + 2048 = 3511$ 枚だから，2000 以降の数を作るのに使うカードは $3535 - 3511 = 24$ 枚。1 つの数を作るのに 4 枚のカードを使うから，2000 以降の数を $24 \div 4 = 6$ 個作ったことになる。よって 2000 以降に作った数は $2000, 2001, 2002, 2003, 2005, 2006$ だから，$\boxed{}$にあてはまる数は2006である。

(2) 1〜9 のうち，8 が書かれたカードを使うのは 8 を作るときのみだから 1 枚。

10〜99 のうち，8 が書かれたカードを使うのは，一の位が 8 のときと十の位が 8 のときだから，

十の位が $1, 2, 3, 5, 6, 7$ のとき，$1 \times 6 = 6$ 枚

十の位が 8 のとき，88 を作るときに 2 枚使うことに注意して，$1 \times 7 + 2 \times 1 = 9$ 枚

したがって使う 8 のカードの枚数は $6 + 9 = 15$ 枚。

100〜999 のうち，8 が書かれたカードを使うのは，0〜99 を作るときに使う 8 のカードが $1 + 15 = 16$ 枚だから，

百の位が $1, 2, 3, 5, 6, 7$ のとき，$16 \times 6 = 96$ 枚

百の位が 8 のとき，一の位と十の位で使う 8 のカードの枚数は 16 枚，百の位で使う 8 のカードの枚数は，百の位が 8 の数字の個数が ((1) と同じように考えて)$1 \times 8 \times 8 = 64$ 個あるから 64 枚だから，$16 + 64 = 80$ 枚

したがって使う 8 のカードの枚数は $96 + 80 = 176$ 枚。

また 1000 を作るときに 8 のカードは使わないから 0 枚。

よって，1 から 1000 まで作ったときに使った 8 のカードの枚数は，$1 + 15 + 176 + 0 = 192$ だから192 枚。

問　題　27

(方針)

n の一の位によって$\{\boxed{n\times n}\}$と$\{\boxed{n}\times\boxed{n}\}$がどう変わるのかを追いましょう。

(解答)

n の一の位が 0〜9 のとき，$\{\boxed{n\times n}\}$と$\{\boxed{n}\times\boxed{n}\}$の値は下の表のように対応する。

n の一の位	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\{\boxed{n}\times\boxed{n}\}$	1	0	1	4	9	6	5	6	9	4
$\{\boxed{n\times n}\}$	9	0	3	8	5	4	5	8	3	0

したがって，$\{\boxed{n}\times\boxed{n}\}$と$\{\boxed{n\times n}\}$が等しくなるのは n の一の位が 1 か 6 のときである。1 から 100 までの整数のうち，一の位が 1 のものは $1, 11, 21, \ldots, 91$ の 10 個，一の位が 6 のものは $6, 16, 26, \ldots, 96$ の 10 個だから，$\boxed{}$にあてはまる数は$\underline{20}$である。

問 題 28

(1) (5,6)

(2) (5,6,5), (3,1,1), (1,3,1), (1,1,3), (2,2,1), (2,1,2), (1,2,2)

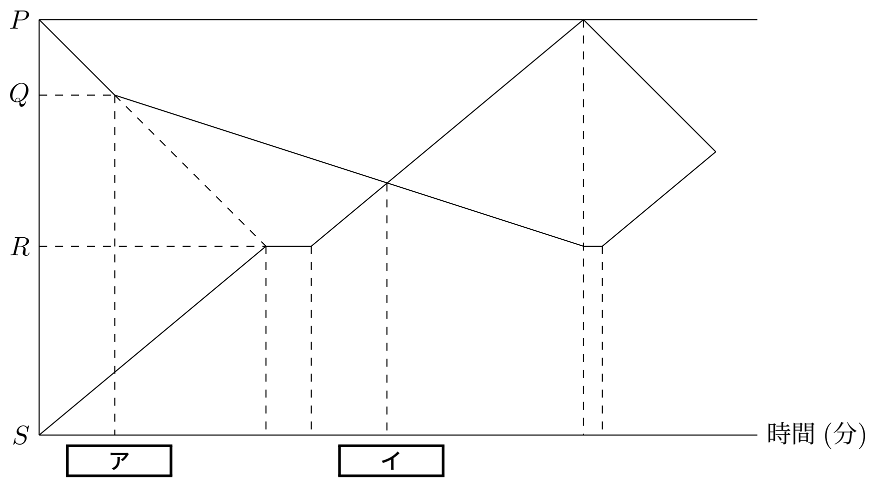
(3) (1) 3 (2) 5 (3) 3 (4) 5 (5) 1 (6) 5 (7) (5,6,5,3) (8) 16

(方針)

A と B のダイヤグラムを書きましょう。(2) では，具体的な距離の値が与えられていないため，PQ の距離を$\boxed{1}$などとして考えましょう。

(解答)

A と B のダイヤグラムは次のようになる。



(1) まず，A に着目する。A は 2 人が出発してから $\boxed{\text{ア}}$ 分後に故障したため，それまでの $\dfrac{10}{31}$ 倍の速さで R まで行った。$PQ:QR=1:2$ により，本来 Q に着いてから $\boxed{\text{ア}}\times 2$ 分後に R に着くはずだったが，実際はその $\dfrac{31}{10}$ 倍の時間がかかっている。したがって，A が出発してから R に着くまでにかかった時間は，

$\boxed{\text{ア}}+(\boxed{\text{ア}}\times 2)\times\dfrac{31}{10}=\boxed{\text{ア}}\times\dfrac{36}{5}$ 分である。

次に，B に着目する。B は予定通り R に着いてから 12 分後に R を出発し，P に向かっている。B は Q を通ってから 24 分後に P に着いているから，$PQ:QR=1:2$ により，R を出発してから P に着くまでにかかった時間は $24\times(1;2)=72$ 分である。本来 A は 2 人が出発してから $\boxed{\text{ア}}\times 3$ 分後に R に着くから，B が R に着いたのは 2 人が出発してから $\boxed{\text{ア}}\times 3$ 分後である。したがって，B が出発してから P に着くまでにかかった時間は，

$\boxed{\text{ア}}\times 3+12+72=\boxed{\text{ア}}\times 3+84$ 分である。

よって，$\boxed{\text{ア}}\times\dfrac{36}{5}=\boxed{\text{ア}}\times 3+12+72=\boxed{\text{ア}}\times 3+84$ だから，$\boxed{\text{ア}}\times\left(\dfrac{36}{5}-3\right)=\boxed{\text{ア}}\times\dfrac{21}{5}=84$

よって，$\boxed{\text{ア}}$ にあてはまる数は<u>20</u>である。

(2) PQ の距離を $\boxed{1}$ とおくと，QR の距離は $\boxed{2}$ である。B は川を上るとき，Q についてから 24 分後に P に着いたから，川を上るときの船の速さは分速$\boxed{\dfrac{1}{24}}$と表せる。また，(1) により，A は川を下るとき，P から 20 分後に Q に着いたから，川を下るときの船の速さは分速$\boxed{\dfrac{1}{20}}$と表せる。さらに，故障後の A の速さは $\boxed{\dfrac{1}{20}}\times\dfrac{10}{31}=\boxed{\dfrac{1}{62}}$と表せる。

A の船が故障した時点での 2 人の間の距離は$\boxed{2}$である。A の船が故障してから $20\times 2=40$ 分後に B は R に着き，12 分間とどまっている。その間の 52 分間に A が進んだ距離は$\boxed{\dfrac{1}{62}}\times 52=\boxed{\dfrac{26}{31}}$である。B が R から出発するときの 2 人の間の距離は$\boxed{2}-\boxed{\dfrac{26}{31}}=\boxed{\dfrac{36}{31}}$であり，2 人の速さは合わせて$\boxed{\dfrac{1}{24}}+\boxed{\dfrac{1}{62}}=\boxed{\dfrac{31+12}{24\times 31}}=\boxed{\dfrac{43}{24\times 31}}$だから，B が R を出発してから$\boxed{\dfrac{36}{31}}\div\boxed{\dfrac{43}{24\times 31}}=\boxed{\dfrac{36\times 24}{43}}=20\dfrac{4}{43}$ 分後に 2 人の間の距離は 0 になる。

B が R を出発するのは，2 人が出発してから $20\times 3+12=72$ 分後だから，

$72+20\dfrac{4}{43}=92\dfrac{4}{43}$ により，$\boxed{\quad イ \quad}$ にあてはまる数は $\underline{92\dfrac{4}{43}}$ である。

問　題　30

《解答例》

$$
\begin{aligned}
1+2\times 3-6 =&1\\
1-2-3+6 =&2\\
(1-2)\times(3-6) =&3\\
1\times 2\div(3\div 6) =&4\\
1+2\div(3\div 6) =&5\\
1+2-3+6 =&6\\
(-1)\times(2-3)+6 =&7\\
1-2+3+6 =&8\\
(-1+2)\times 3+6 =&9\\
-1+2+3+6 =&10
\end{aligned}
$$

（これは一つの解答例です。別解が存在することがあります。）