問　題　11

かごの個数は 4 個以上である．

かごが 4 個のとき，みかんが 3 このかごが 0 個，みかんが 2 個のかごが 1 個でみかんは 2 個.

かごが 5 個のとき，みかんが 3 このかごが 1 個，みかんが 2 個のかごが 1 個でみかんは 5 個.

以下，かごが 1 つふえるごとにみかんが 3 個ふえるから，(かごの個数，みかんの個数)=(4,2),(5,5),(6,8),(7,11),(8,14),(9,17)

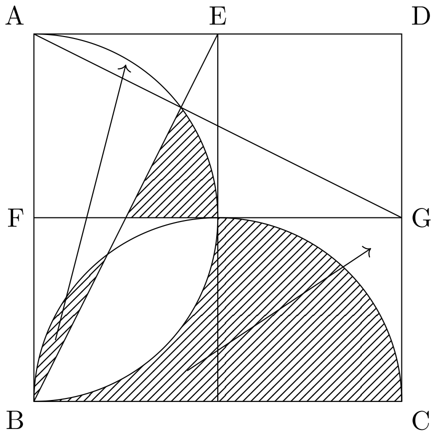
問　題　12

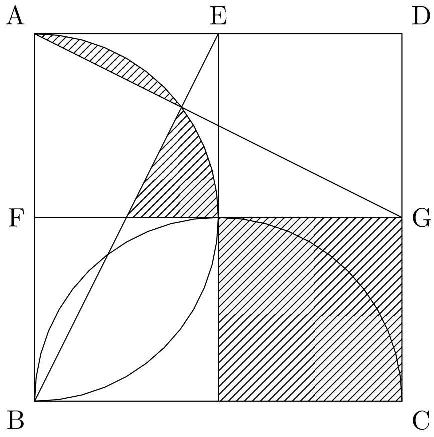
(方針)

斜線部分をうまく移動して，面積が求めやすい形にしましょう。

(解答)

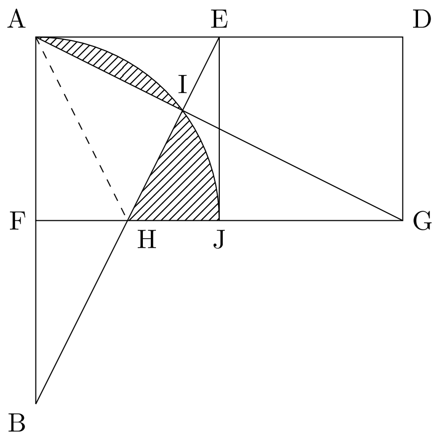
図 1 のように，E を通り BC と垂直な線と AG を引いて，図 2 のように図形を移動します。





正方形 ABCD の一辺の長さを$\boxed{2}$とします。

このとき，正方形 ABCD の面積は$\boxed{2} \times \boxed{2} = \boxed{4}$で，右下の正方形の面積は$\boxed{1} \times \boxed{1} = \boxed{1}$です。



扇形 FAJ の面積は$\boxed{1} \times \boxed{1} \times \dfrac{22}{7} \div 4 = \boxed{\dfrac{11}{14}}$です。AF=$\boxed{1}$, FH∶HJ= 1∶1 だから，FH=HJ=$\boxed{1}$です。また，JG=$\boxed{1}$だから，HG=$\boxed{\dfrac{1}{2}}+\boxed{1}=\boxed{\dfrac{3}{2}}$です。

したがって，三角形 AFH の面積は$\boxed{\dfrac{1}{2}}\times\boxed{1}\div 2 = \boxed{\dfrac{1}{4}}$，三角形 AHG の面積は$\boxed{\dfrac{3}{2}}\times\boxed{1}\div 2 = \boxed{\dfrac{3}{4}}$です。

三角形 ABE と三角形 FBH は相似で，AE∶FH=AB∶FB= 2∶1 だから，AE∶HG$= 2 : (1 + 2) = 2 : 3$ です。三角形 AIE と三角形 GIH は相似だから、AI∶IG=AE∶HG= 2∶3 です。

三角形 AHJ と三角形 GHJ の面積比は AI∶IG と同じだから，三角形 AHI の面積は (三角形 AHG の面積)$\times\dfrac{AI}{AI+IG} = \boxed{\dfrac{3}{4}} \times \dfrac{2}{2+3} = \boxed{\dfrac{3}{10}}$です。

よって，図 3 の斜線部分の面積は，

(扇形 FAJ の面積)−((三角形 AFH の面積)+(三角形 AHI の面積))

$=\boxed{\dfrac{11}{14}}-(\boxed{\dfrac{1}{4}}+\boxed{\dfrac{3}{10}})=\boxed{\dfrac{33}{140}}$です。

したがって，斜線部分の面積の合計は$\boxed{\dfrac{33}{140}}+\boxed{1}=\boxed{\dfrac{173}{140}}$だから，$\boxed{\dfrac{173}{140}} \div \boxed{4}=\boxed{\dfrac{173}{560}}$により，$\boxed{}$にあてはまる数は$\underline{\dfrac{173}{560}}$です。

問　題　13

(方針)

ビーカー図（やりとり図）などを書いて，ビーカーの重さと食塩の量がどう変化するかを丁寧に追いましょう。

(解答)

(*)，(**)，(*)，(**) の順に操作をしたビーカーを A，(**)，(*)，(*)，(**) の順に操作をしたビーカーを B とします。

A のビーカーのビーカー図（濃度は省略）は次のようになります。

$$\boxed{\dfrac{\boxed{}}{100}} \xrightarrow{(*)} \boxed{\dfrac{\boxed{}\times 0.75}{100}} \xrightarrow{(**)} \boxed{\dfrac{\boxed{}\times 0.75}{50}} \xrightarrow{(*)} \boxed{\dfrac{(\boxed{}\times 0.75)\times 0.5}{50}} \xrightarrow{(**)} \boxed{\dfrac{(\boxed{}\times 0.75)\times 0.5}{50}}$$

したがって，A のビーカーの濃度は $\boxed{} \times 0.75$ です。

また，B のビーカーのビーカー図（濃度は省略）は次のようになります。

$$\boxed{\dfrac{\boxed{}}{100}} \xrightarrow{(**)} \boxed{\dfrac{\boxed{}}{50}} \xrightarrow{(*)} \boxed{\dfrac{\boxed{}\times 0.5}{50}} \xrightarrow{(*)} \boxed{\dfrac{(\boxed{}\times 0.5)\times 0.5}{50}} \xrightarrow{(**)} \boxed{\dfrac{(\boxed{}\times 0.5)\times 0.5}{50}}$$

したがって，B のビーカーの濃度は $\boxed{} \times 0.5$ です。

$\dfrac{3}{4}$ は $\dfrac{1}{2}$ よりも大きいので，A のビーカーの濃度の方が B のビーカーの濃度よりも高く，

$$\boxed{} \times 0.75 - \boxed{} \times 0.5 = \boxed{} \times (0.75 - 0.5) = \boxed{} \times 0.25$$

だから，A と B のビーカーの濃度の差は $\boxed{} \times 0.25\%$ です。これが 1.25% と等しいので，$\underline{5}$ が $\boxed{}$ にあてはまります。

問 題 14

兄の動きに注目すると、兄はノンストップで学校から家を往復しており、その往復に 2 時間 40 分かかっている。このことから妹が学校についたのは 16 時 20 分から 1 時間 20 分経った 17 時 40 分の 8 分前、17 時 32 分であることがわかる。また兄と妹が郵便局であったのが 17 時であることから、郵便局は学校と家のちょうど真ん中に位置していることがわかる。よって妹が出発した時間は 17 時の 32 分前である、16 時 28 分と断定できる。また、往路に関して、兄と妹の速さの比が $4 : 5$ だとわかる。復路で二人が出会った場所が郵便局よりも 1600 m 家側だったことと、兄と妹の復路での速さの比が $4 : (5 \times 1.2)$、つまり $2 : 3$ であることから、学校から家までは 16 km だと言える。よって、兄は 32 km の道のノンストップでの往復に、2 時間 40 分かかったと言える。だから兄の速さは時速 12 km である。

問　題　15

＜解答＞

(1) 15 通り

(2) 99990.1

(3) 42 通り

＜解説＞

(1) 左が右よりも大きいものであるから、$5+4+3+2+1=$15 通り。

(2) 答えが最大になるためには一番左の数と、それ以外の 4 個の $\square$ の計算結果が大きくなれば良い。また、右 4 個の計算結果が大きくなることを優先すべきである。(結果の範囲が大きいから。) つまり、右 4 個の $\square$ を先に埋め、余った数で大きい方を一番左の $\square$ に入れればよい。

まず一番右の $\square$ は割る数なので最小 (0.0001) にすべきだ。次に真ん中の $\square$ は次に小さい 0.001。さて、ここで 1 か 10 をどう入れるかが問題になる。右から 2 番目の $\square$ に 10 を入れた場合、一番左の数を含めない計算結果は 99900 になるが、1 を入れた場合、99990 になる。よって後者が正しい選択になる。

よって、計算結果が最大になるのは、左から順に、0.1、10、0.001、1、0.0001 と入れる場合で、99990.1となる。

(3) マイナスを境に右方、左方と分けて考えると、両者の計算結果はともに 1 に 10、もしくは 0.1 が何回かかけられた数になる。

まずは 9 が最大個数つく計算結果を求める。

左方を大きく、右方を小さくするため、一番左の数は 10 であることが確定する。(他の 3 つはどれも小さくしたいから) また、これらはどれが 0.01,0.001,0.0001 になっても計算結果に 9 が 10 個含まれる。

よって 9 が 10 個つくのは $321=6$ 通りある。

次に 9 が 9 個つくものを考える。

まず一番左の数を 1 にしたら、それより右は 10 個の時と同様なので 6 通り。

次に一番左の数を 10 にする場合、それより右は 0.1,0.001,0.0001 のいずれかをそれぞれに当てはめればいいので、これも 6 通り。

よって合わせて 12 通りある。

最後に 9 が 8 個つくものを考える。

一番左の数を 0.1 にしたとき、それより右は 10 個の時と同様なので 6 通り。

一番左の数を 1 にしたとき、それより右は 0.1,0.001,0.0001 のいずれかをそれぞれに当てはめればいいので、これも 6 通り。

一番左の数を 10 にしたとき、それより右は 1,0.001,0.0001、もしくは 0.1,0.01,0.0001 のいずれかをそれぞれに当てはめればいいので、12 通り。よって合わせて 24 通りある。だから、合計 42 通りの並べ方がある。

問　題　16

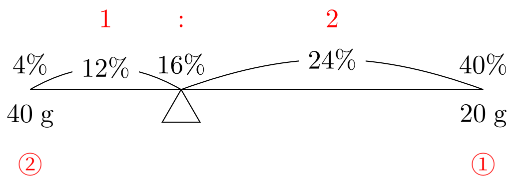
できあがった液体 Z は合わせて

$$60 + 75 + 15 = 150 \text{ g}$$

液体 Z 中の溶質 X の重さ 150g のうち、6.4% が溶質 X なので、60 g の液体 X のこさは

$$6.4 \times \frac{150}{60} = 16\%$$

下のてんびん図より，実際に取り出した A(4%) の量は 40 g，B(40%) の量は 20 g。



こさ 4% の液体とこさ 40% の液体をまぜて、16% の液体を 60 g 作りました。こさの差は、

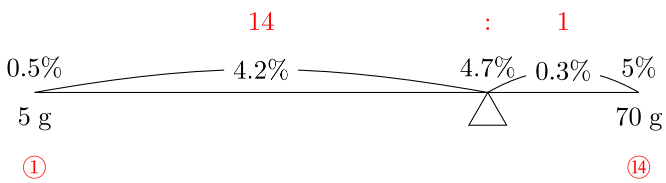
$(16 - 4) : (40 - 16) = 12 : 24 = 1 : 2$ です。

まぜる重さの比は、この逆比になるので、2 : 1 です。

液体 Z 中の溶質 Y の重さ 150g のうち、2.35% が溶質 Y なので、75 g の液体 Y のこさは

$$2.35 \times \frac{150}{75} = 4.7\%$$

下のてんびん図より，実際に取り出した C(0.5%) の量は 5 g，D(5%) の量は 70 g。



こさ 0.5% の液体 C とこさ 5% の液体 D をまぜて、4.7% の液体を 75 g 作りました。こさの差は、

$(4.7 - 0.5) : (5 - 4.7) = 4.2 : 0.3 = 14 : 1$ です。

まぜる重さの比は、この逆比になるので、1 : 14 です。

したがって，もともと取り出す予定だった液体の量はそれぞれ

- ビーカー A: 20 g
- ビーカー B: 40 g
- ビーカー C: 70 g
- ビーカー D: 5 g

問 題 17

(1) $(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,3),(2,5),(3,4),(3,5),(4,5),(5,6)$ の 11 組。

(2) 5

(3) 10

問　題　18

＜答え＞

(1) 4 通り
(2) 5 通り
(3) ウオのみ (1 組)

＜解説＞

(1) A を使う場合、AD と AE の 2 通り、A を使わない場合、BD と BE の 2 通り、あわせて 4 通りの選び方がある。選ぶ缶が決まったら、その組み合わせ 1 通りに対し、調合の仕方は 1 通り存在する。

(2) C を使う場合、残りの 2 つを考えるが、この時、A は 20g までという縛りがあるため、A は使えないことになる。（残りが AD もしくは AE の時、明らかに濃度が 5% より濃くなる。）よって残りの缶の組み合わせは、BD と BE の 2 通り。また、C を使わない場合、残りの缶の選び方として A を使わない BDE と、A を使う ABD、ABE の 3 通りある。よって 5 通り。

(3) 1 条件のみではそもそも調合の仕方が 1 通りに定まらないため、2 条件でなんとか定められないか探す。5 ヒントの中から 2 ヒントを選ぶ $5 \times 4 \div 2 \div 1 = 10$ 通りを根気よく調べ上げる。他の組み合わせは調合方法が 1 通りに定まらなかったり、濃度が 5% より濃くなってしまうなど、何かしら欠点がある。

問　題　19

地点 A〜D 間を太郎君と次郎君がノンストップで走り、往復する。太郎君は A を 8 時 8 分に、次郎君は D を 8 時 15 分に出発する。太郎君は上りの道を平坦な道の 0.75 倍、下りを 1.2 倍のスピードで走る。対して次郎君はずっと等速で走る。AB 間は上り、BC 間は下り、CD 間は平坦な道だった。次郎君が C についた 3 分後に、太郎君は C についた。また、次郎君が B についた 18 分後に、太郎君が D についた。そして、太郎君が D につくよりも 5 分半早く、次郎君が A についた。太郎君の下りの速さと、次郎君の走る速さが同じであるとき、次の問いに答えよ。

(1) 太郎君が B につく時間を求めよ。
(2) 復路にて二人が出会った時間を求めよ。

＜答え＞

(1) 8 時 28 分
(2) 9 時 38 分 38 と $\frac{7}{11}$ 秒

＜解説＞
問題文より太郎君が平坦な道を走る速さを 1 とすると、上りは 0.75、下り・次郎君のスピ－ドは 1.2 と表せる。
まずは行きの場面を考えよう。
また、次郎君は B から A に走るのに 12 分半かかったこともわかる。
ということは、太郎君が A から B に走るのにかかった時間は 20 分である。
よって太郎君が B につく時間は、8 時 8 分から 20 分経った (1) 8 時 28 分となる。
すると、BC 間にかかった時間が二人とも同じであること、CD 間にかかった時間が 6：5 であること、スタート時間、ゴールのタイム差から、CD 間は太郎が 30 分、次郎が 25 分かかった、ということがわかる。
そして、太郎のスタート時間と今までに明かした情報から、二人は BC 間を走るのにともに 15 分かかったことがわかる。
以上より、次郎君が A についた時間は 9 時 7 分 30 秒、太郎君が D につく時間は 9 時 13 分となる。
復路も同様に計算する。すると、9 時 35 分に次郎君が C に、太郎君は CD を 4:11 にわけたところまで走ったことがわかる。
あとはその「4」の部分を 2.2 倍速の太郎君が走ると考えて、求める時間は、9 時 35 分から $\frac{40}{11}$ 分経った、(2) 9 時 38 分 38 と $\frac{7}{11}$ 秒である。

問 題 20

(方針)

カードを選ぶ枚数で場合分けします。$2 \times 3 = 6$ であることに注意しましょう。

(解答)

x という数字が書かれたカードのことを $\boxed{x}$ と表すことにする。カードを選ぶ枚数で場合分けする。

(ア) 2 枚選ぶとき

$\boxed{2}$を選ぶとき，2 枚目のカードの選び方は$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$の 5 通りがある。

$\boxed{2}$を選ばず，$\boxed{3}$を選ぶとき，2 枚目のカードの選び方は$\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$の 3 通りがある。

$\boxed{2}$, $\boxed{3}$を選ばず，$\boxed{5}$を選ぶとき，2 枚目のカードの選び方は$\boxed{6}$, $\boxed{7}$, の 2 通りがある。

$\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{5}$を選ばず，$\boxed{6}$を選ぶとき，2 枚目のカードの選び方は$\boxed{7}$の 1 通りがある。

これらの積はいずれも異なるから，2 枚選ぶときに積として考えられる数は 11 通りある。

(イ) 3 枚選ぶとき

$\boxed{2}$を選ぶとき，他の 2 枚の選び方は (ア) の 11 通りから$\boxed{2}$と$\boxed{2}$を選ぶ 1 通りを除いた 10 通りが考えられる。しかし，$\boxed{3}$を含み$\boxed{6}$を含まない，$\boxed{2}$と$\boxed{3}$, $\boxed{3}$と$\boxed{5}$, $\boxed{3}$と$\boxed{7}$の 3 通りの選び方は，積がそれぞれ (ア) の$\boxed{3}$と$\boxed{6}$, $\boxed{5}$と$\boxed{6}$, $\boxed{5}$と$\boxed{6}$を選ぶときと等しくなるため除く。

$\boxed{2}$を選ばず，$\boxed{3}$を選ぶとき，他の 2 枚の選び方は$\boxed{5}$と$\boxed{6}$, $\boxed{5}$と$\boxed{7}$, $\boxed{6}$と$\boxed{7}$の 3 通りがあり，これらの積は今までのいずれとも異なる。

$\boxed{2}$, $\boxed{3}$を選ばず，$\boxed{5}$を選ぶとき，他の 2 枚の選び方は$\boxed{6}$と$\boxed{7}$の 1 通りがあり，これらの積は今までのいずれとも異なる。

したがって，3 枚選ぶときに積として考えられる数は 11 通りある。

(ウ) 4 枚選ぶとき

6 枚のカードから 4 枚選ぶときの選び方は，選ばない 2 枚の組合せを考えることで，(ア) と同じく 11 通りある。

しかし，$\boxed{2}$と$\boxed{3}$を含み$\boxed{6}$を含まない，$\boxed{2}$と$\boxed{3}$と$\boxed{2}$と$\boxed{5}$, $\boxed{2}$と$\boxed{3}$と$\boxed{2}$と$\boxed{7}$, $\boxed{2}$と$\boxed{3}$と$\boxed{5}$と$\boxed{7}$の 3 通りの選び方は，積がそれぞれ (イ) の$\boxed{6}$と$\boxed{2}$と$\boxed{5}$, $\boxed{6}$と$\boxed{2}$と$\boxed{7}$, $\boxed{6}$と$\boxed{5}$と$\boxed{7}$を選ぶときと等しくなるため除く。

したがって，4 枚選ぶときに積として考えられる数は 8 通りある。

(エ) 5 枚選ぶとき

6 枚のカードから 5 枚選ぶときの選び方は，選ばない 1 枚に書かれた数を考えることで，5 通りある。

しかし，$\boxed{6}$を含まない，$\boxed{2}$と$\boxed{3}$と$\boxed{2}$と$\boxed{5}$と$\boxed{7}$の選び方は，積が (ウ) の$\boxed{6}$と$\boxed{2}$と$\boxed{5}$と$\boxed{7}$と等しくなるため除く。

したがって，5 枚選ぶときに積として考えられる数は 4 通りある。

(オ) 6 枚選ぶとき

このときの選び方は 1 通りのみであり，積も (ア)〜(オ) のいずれとも異なる。したがって，6 枚選ぶときに積として考えられる数は 1 通りある。

よって，(ア)〜(オ) により，積として考えられる数は

$11 + 11 + 8 + 4 + 1 = 35$

により 35 通りあるから，$\boxed{\quad\quad\quad}$にあてはまる数は$\underline{35}$である。