■　解答編（問題 11〜 問題 20）

問　題　11

$x^2+y^2 \leq 1$ より，実数 θ と，0 以上 1 以下の実数 r を用いて

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

とおける．
このとき，

$$ax^2+bxy+cy^2 = r^2\left(a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta\right)$$

である．
まず，実数 α を用いて

$$\begin{aligned} & a\cos^2\theta + b\cos\theta\sin\theta + c\sin^2\theta \\ =& a\frac{1+\cos 2\theta}{2} + b\frac{\sin 2\theta}{2} + c\frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ =& \frac{a+c}{2} + \frac{a-c}{2}\cos 2\theta + \frac{b}{2}\sin 2\theta \\ =& \frac{a+c}{2} + \sqrt{\left(\frac{a-c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}\sin(2\theta+\alpha) \end{aligned}$$

と変形できるから，この部分の最小値は

$$\frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2}$$

である．
次に，これと 0 の大小を比べると，

$$\begin{aligned} & \frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2} > 0 \\ \iff & a+c > \sqrt{(a-c)^2+b^2} \\ \iff & \begin{cases} a+c>0 \\ (a+c)^2 > (a-c)^2+b^2 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a+c>0 \\ b^2-4ac<0 \end{cases} \end{aligned}$$

である．
したがって，$ax^2+bxy+cy^2$ の最小値は

$$\begin{cases} 0 & \text{if } \left(a+c>0 \land b^2-4ac<0\right) \\ \dfrac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+b^2}}{2} & \text{otherwise} \end{cases}$$

である．

問　題　12

《解答》

1

《解説》

直線 OP が y 軸と平行になることはない.

直線 OP の傾きを m とすると

$$\text{直線 } OP : y = mx$$

であるから点 P の座標は

$$P\left(m, m^2\right)$$

である.

このとき

$$\text{直線 } OQ : y = -\frac{1}{m}x$$

であるので点 Q の座標は

$$Q\left(-\frac{1}{m}, \frac{1}{m^2}\right)$$

である.

点 P と点 Q を結ぶと

$$\text{直線 } PQ : y = \left(m - \frac{1}{m}\right)x + 1$$

であるから,

$$\begin{aligned} \triangle POQ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot m + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{m} \\ &= \frac{1}{2}\left(m + \frac{1}{m}\right) \end{aligned}$$

であり，相加平均と相乗平均の関係から，これは $m = 1$ のとき最小値 1 をとる.

問　題　13

【解答】

$x=0$ または $y=0$ または $n=1$ または「$x+y=0$ かつ n が奇数」

【証明】

(1) $x=0$ または $y=0$ または $n=1$ または「$x+y=0$ かつ n が奇数」のとき，あきらかに

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

が成り立つ.

(2) そうでないとき，必要なら両辺を y^n で割ることで,

$$(x+1)^n = x^n + 1$$

が成り立たないことを示せばよい.

$f_n(x)$ を

$$f_n(x) = (x+1)^n - (x^n+1)$$

と定める.

(i) n が偶数のとき,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n\,(x+1)^{n-1} - nx^{n-1} \\ &= n\left((x+1)^{n-1} - x^{n-1}\right) \end{aligned}$$

である.

いま $n-1$ は奇数であるから

$$(x+1)^{n-1} \quad \mathrm{v.s.} \quad x^{n-1}$$

の大小関係は

$$x+1 \quad \mathrm{v.s.} \quad x$$

の大小関係と同じなので，これより常に

$$(x+1)^{n-1} - x^{n-1} \geq 0$$

すなわち

$$f_n'(x) \geq 0$$

である.

ここで

$$f_n(0) = 0$$

であるから，方程式

$$f_n(x) = 0$$

の解のうち

$$x \neq 0$$

であるものは一つもない.

(ii) n が奇数のとき,

$$n \geq 3$$

であり,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n\left(x+1\right)^{n-1} - nx^{n-1} \\ &= n\left(\left(x+1\right)^{n-1} - x^{n-1}\right) \\ &= n\left(\left(x+1\right)^{n-1} - \left(x^{n-1}-1\right)\right) - n \\ &= nf_{n-1}\left(x\right) - n \end{aligned}$$

である.

場合分け (1) より

$$f_{n-1}(x) \;:\; \text{単調増加}$$

であるから，これより

$$f_n'(x) \;:\; \text{単調増加}$$

である.

よって，方程式

$$f_n'(x) = 0$$

の実数解は高々 1 つである.

したがって，ロルの定理より方程式

$$f_n(x) = 0$$

の実数解は高々 2 つである.

ここで

$$f_n(-1) = 0$$

かつ

$$f_n(0) = 0$$

であるから，方程式

$$f_n(x) = 0$$

の実数解のうち

$$x \neq -1, 0$$

であるものは一つもない.

以上から，$y=1$ と特殊化された状態において『$x=0$ または $n=1$ または「$x+1=0$ かつ n が奇数」』でないと,

$$(x+1)^n = x^n + 1$$

は成り立たない.

よって一般には,『$x=0$ または $y=0$ または $n=1$ または「$x+y=0$ かつ n が奇数」』でないと,

$$(x+y)^n = x^n + y^n$$

は成り立たない.

したがって，求める必要十分条件は $x=0$ または $y=0$ または $n=1$ または「$x+y=0$ かつ n が奇数」である.

問　題　14

《解答》

点 $\mathrm{P}(x, y)$ と点 $(2, 0)$ の中点は

$$\text{点}\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y}{2}\right)$$

である．

ゆえに，点 (x, y) が求める軌跡の上にある必要十分条件は

$$(2x-2)^2 + (2y)^2 = 1$$

つまり

$$(x-1)^2 + (y)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

であるから，答えは**点** $(1, 0)$ **を中心とする半径** $1/2$ **の円.**

問 題 15

xyz 座標空間上で考える。A を原点とし,

$$\begin{cases} \boldsymbol{e}_x = \overrightarrow{\mathrm{AE}} = (1,0,0) \\ \boldsymbol{e}_y = \overrightarrow{\mathrm{AD}} = (0,1,0) \\ \boldsymbol{e}_z = \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (0,0,1) \end{cases}$$

とおく。このとき, s,t,u を 0 以上 1 以下の実数として,

$$\begin{cases} \mathrm{AP}:\mathrm{PB} = s : 1-s \\ \mathrm{CQ}:\mathrm{QG} = t : 1-t \\ \mathrm{ER}:\mathrm{RH} = u : 1-u \end{cases}$$

を満たすとすれば,

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AP}} = s\boldsymbol{e}_z \\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = t\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z \\ \overrightarrow{\mathrm{AR}} = \boldsymbol{e}_x + u\boldsymbol{e}_y \end{cases}$$

を満たす。三角形 PQR の重心を X とおくと,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AX}} &= \frac{\overrightarrow{\mathrm{AP}} + \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{AR}}}{3} \\ &= \frac{t+1}{3}\boldsymbol{e}_x + \frac{u+1}{3}\boldsymbol{e}_y + \frac{s+1}{3}\boldsymbol{e}_z \end{aligned}$$

今, $0 \leqq s \leqq 1, 0 \leqq t \leqq 1, 0 \leqq u \leqq 1$ より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \leqq \frac{s+1}{3} \leqq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \leqq \frac{t+1}{3} \leqq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \leqq \frac{u+1}{3} \leqq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

を満たすので, s,t,u は独立に動くから, 求める部分の体積は,

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$

問 題　16

《解答》

(1) 曲線 $xy = 1$ の式を y について解けば

$$y = \frac{1}{x} \quad (x \neq 0)$$

となるから，x で微分をすると

$$y' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

である．

よって，曲線 $xy = 1$ 上の点を，0 でない実数 t を用いて

$$\left(t, \frac{1}{t}\right)$$

とおけば，その点における接線の式は

$$y = -\frac{1}{t^2}(x - t) + \frac{1}{t}$$

すなわち

$$yt^2 - 2t + x = 0$$

となる．

t を変えたときにこの直線が同じものになることはないから，点 (a, b) を通るような曲線 $xy = 1$ の接線の個数は,

$$bt^2 - 2t + a = 0$$

を満たす 0 でない実数 t の個数である．

(a) $a = 0$ のときを考える．

(i) $b = 0$ のとき，この方程式を満たす 0 でない実数 t は存在しない．

(ii) $b \neq 0$ のとき，この方程式を満たす 0 でない実数 t は $2/b$ のただ 1 つ．

(b) $a \neq 0$ のときを考える．

(i) $b = 0$ のとき，この方程式を満たす 0 でない実数 t は $a/2$ のただ 1 つ．

(ii) $b \neq 0$ のとき，この方程式を満たす 0 でない実数 t の個数は，二次方程式

$$bt^2 - 2t + a = 0$$

の相異なる実数解の個数であり,

$$(\text{判別式}) = 4 - 4ab$$

により解決できる．よって

- $ab < 1$ なら 2 つ
- $ab = 1$ なら 1 つ
- $ab > 1$ なら 0

となる．

以上を整理して，答えは

$$\begin{cases} 0 & (a = 0 \text{ かつ } b = 0,\ \text{または } ab > 1) \\ 1 & (a = 0 \text{ かつ } b \neq 0,\ \text{または } a \neq 0 \text{ かつ } b = 0,\ \text{または } ab = 1) \\ 2 & (a \neq 0 \text{ かつ } b \neq 0 \text{ かつ } ab < 1) \end{cases}$$

である．

(2) 一般に

$$xy = \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{4}$$

であるから，問 (1) の曲線

$$xy = 1$$

と問 2 の曲線

$$x^2 - y^2 = 1$$

は，相似である．

よって問 (1) の答えを参考にして，問 (2) の答えは

$$\begin{cases} 0 & (a = 0 \text{ かつ } b = 0,\ \text{または } a^2 - b^2 > 1) \\ 1 & (a = b \text{ かつ } b \neq 0,\ \text{または } a = -b \text{ かつ } b \neq 0,\ \text{または } a^2 - b^2 = 1) \\ 2 & (a \neq b \text{ かつ } a \neq -b \text{ かつ } a^2 - b^2 < 1) \end{cases}$$

である．

(3) 問 (2) と同様にして，点 (a, b) を通るような，曲線 $y^2 - x^2 = 1$ の接線の個数は

$$\begin{cases} 0 & (a = 0 \text{ かつ } b = 0,\ \text{または } b^2 - a^2 > 1) \\ 1 & (a = b \text{ かつ } b \neq 0,\ \text{または } a = -b \text{ かつ } b \neq 0,\ \text{または } b^2 - a^2 = 1) \\ 2 & (a \neq b \text{ かつ } a \neq -b \text{ かつ } b^2 - a^2 < 1) \end{cases}$$

である．

ここで，曲線 $|x^2 - y^2| = 1$ が二か所で共通の接線をもつことはない．

よって，これと問 (2) を組み合わせて，答えは

$$\begin{cases} 0 & (a = 0 \text{ かつ } b = 0) \\ 2 & (a = b \text{ かつ } b \neq 0,\ \text{または } a = -b \text{ かつ } b \neq 0,\ \text{または } |a^2 - b^2| > 1) \\ 3 & (|a^2 - b^2| = 1) \\ 4 & (a \neq b \text{ かつ } a \neq -b \text{ かつ } |a^2 - b^2| < 1) \end{cases}$$

である．

問　題　17

《解答》

結論を述べれば n が奇数であることが必要十分条件である．

以下，それを示す．

(i) 条件を満たすような $f(x)$，$(g_k(x))_{k=1,2,\ldots,n}$ が存在すると仮定し，n が奇数であることを導く．

右辺

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x)|x-k|$$

について，x が十分小さいとき多項式

$$-\sum_{k=1}^{n} g_k(x)(x-k)$$

に一致し，x が十分大きいとき多項式

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x)(x-k)$$

に一致する．

よって左辺 $|f(x)|$ についても，x が十分大きいときと十分小さいときで，一致する多項式に -1 倍の違いがある．

ゆえに，x の次数は奇数である．

次に，右辺

$$\sum_{k=1}^{n} g_k(x)|x-k|$$

において，無限回微分が可能でない点を全て挙げれば

$$x = 1, 2, \ldots, n$$

である．

よって，方程式 $f(x) = 0$ の解について

$$x = 1, 2, \ldots, n$$

の重複度はそれぞれ奇数であり，その他の実数解の重複度は偶数である．

また一般論より，$f(x)$ を実数範囲で因数分解したとき，1 次でない因数は 2 次である．

ゆえに，$f(x)$ の次数が奇数であるために n は奇数である必要がある．

(ii) n が奇数であるとき，

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(x-k)\right| = \left(\prod_{k=1}^{n}(x-k)\right)\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\mathrm{sgn}(x-k)$$

の右辺を展開すればよい．

以上から，求める条件は，n が奇数であること．

問　題　18

《解答》

格子点 (a, b) と直線 $px + qy = 0$ との距離を d とすると

$$d = \frac{|pa + qb|}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

となる．
p と q が正の整数であるから，適切に整数 a,b を定めれば

$$pa + qb = 1$$

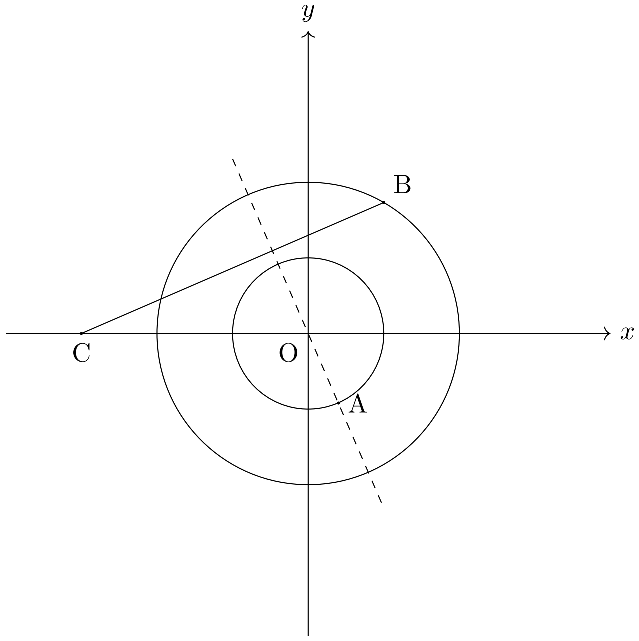
とできるのはよく知られた事実である．
よって d の最小値は

$$\frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}}$$

である．

問　題　19

(1) 解答: $\boxed{\text{三角形 ABC の垂心が原点と一致するとき。}}$



以下, そのことを証明する。

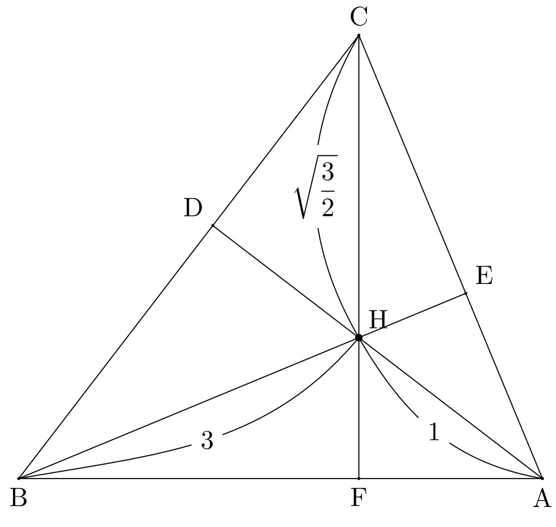
まず, $\mathrm{C}(-c, 0)$ としても一般性を失わない。

今, B を円周上のある一点に固定して考えると, 三角形 ABC の面積が最大になるのは, BC の長さは一定であるから, A と直線 BC の距離が最大の時である。これはすなわち, AO⊥BC となる A のうち, 直線 BC から遠い方である。

次に, この条件のもと, B を動かすと, A のときと同様に AC⊥BO のとき, 三角形 ABC の面積が最大になる。

以上のことから, AO⊥BC, AC⊥BO が同時に成り立つとき面積が最大になるので, 求める答えは, 三角形 ABC の垂心と原点が一致する時。

(2) (1) より, 次の図のような三角形の面積を求めればよい。



図のように点 D, E, F を取る。HE$=x$ とおけば, 相似から

$$\mathrm{HD} = 3x$$

が成り立つ。三平方の定理から,

$$\mathrm{CD}^2+\mathrm{AD}^2=\mathrm{AC}^2$$

が成り立つので,

$$\frac{3}{2}-9x^2+(1+3x)^2=\left(\sqrt{\frac{3}{2}-x^2}+\sqrt{1-x^2}\right)^2$$

これを整理すれば,

$$\frac{5}{2}+6x=\frac{5}{2}-2x^2+2\sqrt{\left(\frac{3}{2}-x^2\right)(1-x^2)}$$

$$\left(x^2+3x\right)^2=\left(\frac{3}{2}-x^2\right)(1-x^2)$$

$$6x^3+9x^2=-\frac{5}{2}x^2+\frac{3}{2}$$

$$6x^3+\frac{23}{2}x^2-\frac{3}{2}=0$$

今,

$$6x^3+\frac{23}{2}x^2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}(3x-1)(4x^2+9x+3)$$

であるから, この解は

$$x=\frac{1}{3},\frac{-9\pm\sqrt{33}}{8}$$

このうち, 正であるものは,

$$x=\frac{1}{3}$$

のみ。求める面積 S は,

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\left(3+\frac{1}{3}\right)\left(\sqrt{\frac{3}{2}-\frac{1}{9}}+\sqrt{1-\frac{1}{9}}\right)\\&=\frac{5}{3}\left(\frac{5}{6}\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)\\&=\frac{5}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

問　題　20

$a = 2 - \sqrt[3]{7}$ とする. このとき,

$$
\begin{aligned}
2^3 - \sqrt[3]{7}^3 &= (2 - \sqrt[3]{7})^3 + 3 \cdot 2\sqrt[3]{7}(2 - \sqrt[3]{7}) \\
&= a^3 + 6\sqrt[3]{7}a \\
&= 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ.
ここで,

$$f(x) = x^3 + 6\sqrt[3]{7} - 1$$

とすると, $x = a$ は $f(x) = 0$ の 1 つの実数解である.
また,

$$f'(x) = 3x^2 + 6\sqrt[3]{7} > 0$$

より, 任意の実数 x において $f(x)$ は連続で単調増加な関数である.
したがって, グラフ $y = f(x)$ は x 軸とただ 1 点で交わり, その 1 点の x 座標は $x = a = 2 - \sqrt[3]{7}$ である.

$$
\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{6\sqrt[3]{7}}\right) &= \frac{1}{6^3 \cdot 7} + 6\sqrt[3]{7}\frac{1}{6\sqrt[3]{7}} - 1 \\
&= \frac{1}{6^3 \cdot 7} > 0 \\
f\left(\frac{1}{7\sqrt[3]{7}}\right) &= \frac{1}{7^3 \cdot 7} + 6\sqrt[3]{7}\frac{1}{7\sqrt[3]{7}} - 1 \\
&= \frac{1}{7^4} + \frac{6}{7} - 1 \\
&= \frac{1 - 7^3}{7^4} < 0
\end{aligned}
$$

であり, $f(x)$ は単調俗化関数なので, 中間値の定理より,

$$\frac{1}{7\sqrt[3]{7}} < a < \frac{1}{6\sqrt[3]{7}}$$

すなわち,

$$\frac{1}{7\sqrt[3]{7}} < 2 - \sqrt[3]{7} < \frac{1}{6\sqrt[3]{7}}$$