**第　71　問**

次の値を求めよ.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n}$$

作問者：negi_0613_

## 解答

解法 1

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{ni} - e^{-ni}}{2ni}(-1)^n \\
&= \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e^i)^n}{n} - \frac{1}{2i}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-e^{-i})^n}{n} \\
&= -\frac{1}{2i}\mathrm{Log}(1+e^i) + \frac{1}{2i}\mathrm{Log}(1+e^{-i}) \\
&= \frac{1}{2i}\mathrm{Log}\left(\frac{1+e^{-i}}{1+e^i}\right) \\
&= \frac{1}{2i}\mathrm{Log}(e^{-i}) \\
&= \frac{1}{2i}\cdot(-i) \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

但し, 途中の変形では, $|e^i| = |\cos 1 + i \sin 1| = 1$ であり, $\mathrm{Log}(1-z)$ の $z = 0$ まわりでの Taylor 展開

$$\mathrm{Log}(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$$

の収束半径が $|z| \leqq 1$ であることを用いている。

解法 2 $f(x) = x$ の $-\pi < x < \pi$ は,

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \cos nx dx \\ b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} x \sin nx dx \end{cases}$$

を用いて,

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とフーリエ級数展開できる。

$x\cos nx$ が奇関数なので, $a_n = 0$ であり, $b_n$ を計算すれば,

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx \\
&= \frac{2}{n}(-1)^{n+1}
\end{aligned}$$

である。よって,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^{n+1}\sin nx$$

である。この式に, $x = 1$ を代入すれば,

$$1 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin n}{n}$$

ゆえに,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\sin n}{n} = -\frac{1}{2}$$