問　題　31

《解答》
$\dfrac{9}{16}$

《解説》
まず，$\triangle \mathrm{DAE} \equiv \triangle \mathrm{DCG}$ を示す．

(i) 四角形ABCD は正方形であるから，

$$\mathrm{DA} = \mathrm{DC}$$

が成立する．

(ii) 四角形DEFG は正方形であるから，

$$\mathrm{DE} = \mathrm{DG}$$

が成立する．

(iii) 四角形ABCD は正方形であるから，

$$\angle \mathrm{ADC} = 90^\circ$$

であるため，

$$\angle \mathrm{EDC} = 90^\circ - \angle \mathrm{ADE}$$

が成り立つ．

一方で，四角形DEFG は正方形であるから，

$$\angle \mathrm{EDG} = 90^\circ$$

であるため，

$$\angle \mathrm{EDC} = 90^\circ - \angle \mathrm{CDG}$$

が成り立つ．

以上で，$\angle \mathrm{EDC}$ が二通りで表されたので，それらは等しく、

$$90^\circ - \angle \mathrm{ADE} = 90^\circ - \angle \mathrm{CDG}$$

となる．

したがって，

$$\angle \mathrm{ADE} = \angle \mathrm{CDG}$$

が成立する．

以上から，$\triangle \mathrm{DAE}$ と $\triangle \mathrm{DCG}$ は二組の辺とその間の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle \mathrm{DAE} \equiv \triangle \mathrm{DCG}$$

が示された．

合同な三角形の対応する角は等しいため

$$\angle \mathrm{DAE} = \angle \mathrm{DCG}$$

が得られるが，四角形ABCD は正方形であるから，

$$\angle \mathrm{DAB} = 90^\circ$$

つまり

$$\angle \mathrm{DAE} = 90^\circ$$

であるため，これらから

$$90^\circ = \angle\mathrm{DCG}$$

が成り立つ．
また，四角形DEFG は正方形であるから，

$$\angle\mathrm{DCB} = 90^\circ$$

も成り立つ．
ここで，

$$\angle\mathrm{GCB} = \angle\mathrm{DCG} + \angle\mathrm{DCB}$$

であるから，上の二つの結果を代入して

$$\angle\mathrm{GCB} = 90^\circ + 90^\circ$$

つまり

$$\angle\mathrm{GCB} = 180^\circ$$

が得られるため，三点 G, C, B は同一直線上に存在することがわかる．
したがって斜線部の面積は 三角形DCG と 三角形GFH の面積の和である．
準備として，三角形AED について論じる．

(i) 四角形ABCD は正方形であるから，

$$\angle\mathrm{DAB} = 90^\circ$$

つまり

$$\angle\mathrm{DAE} = 90^\circ$$

が成立する．

(ii) 図の設定から

$$\mathrm{AD} = 1$$

が成立する．

(iii) 図の設定から

$$\mathrm{AD} = 1$$

であり，四角形ABCD は正方形であるから，

$$\mathrm{AD} = \mathrm{AB}$$

となるので，

$$\mathrm{AB} = 1$$

が得られる．
点 E は辺 AB 上にあるから，

$$\mathrm{AE} + \mathrm{EB} = \mathrm{AB}$$

であるので，代入して

$$\mathrm{AE} + \mathrm{EB} = 1$$

が成り立つ．
ここで

$$\mathrm{AE} = \mathrm{EB}$$

と設定されているので

$$\mathrm{AE} + \mathrm{AE} = 1$$

となり，つまり

$$\mathrm{AE} = \frac{1}{2}$$

が成立する．

以上から，三角形AED は

$$\begin{cases} \angle \mathrm{DAE} = 90^\circ \\ \mathrm{AD} = 1 \\ \mathrm{AE} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

を満たす直角三角形である．
また，その面積は

$$\begin{aligned} \triangle \mathrm{DAE} &= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{AD} \cdot \mathrm{AE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

と求められる．
それでは 三角形DCG と 三角形GFH の面積を求めよう．

(a) 三角形DCG の面積について論じる．
まず

$$\triangle \mathrm{DCG} \equiv \triangle \mathrm{DAE}$$

がすでに示されている．
合同な図形の面積は等しいから，これより

$$\triangle \mathrm{DCG} = \triangle \mathrm{DAE}$$

が成り立つ．
先に求めた通り

$$\triangle \mathrm{DAE} = \frac{1}{4}$$

であるから，これより，

$$\triangle \mathrm{DCG} = \frac{1}{4}$$

と求められた．

(b) 三角形GFH の面積について論じる．
まず，$\triangle \mathrm{GFH} \sim \triangle \mathrm{DAE}$ を示す．

(i) 四角形DEFG は正方形であるから，

$$\angle \mathrm{GFE} = 90^\circ$$

つまり

$$\angle \mathrm{GFH} = 90^\circ$$

が成立する．
一方で，四角形ABCD は正方形であるから，

$$\angle \mathrm{DAB} = 90^\circ$$

つまり

$$\angle \mathrm{DAE} = 90^\circ$$

が成立する．
以上から，$\angle\mathrm{GFH}$ と $\angle\mathrm{DAE}$ はともに直角であるから

$$\angle\mathrm{GFH}=\angle\mathrm{DAE}$$

が成立する．

(ii) 三角形GFH において，内角の和は 180° であるため

$$\angle\mathrm{GFH}+\angle\mathrm{FHG}+\angle\mathrm{HGF}=180^\circ$$

となる．
四角形DEFG は正方形であるから，

$$\angle\mathrm{GFE}=90^\circ$$

つまり

$$\angle\mathrm{GFH}=90^\circ$$

が成立するので，これを上の式に代入して

$$90^\circ+\angle\mathrm{FHG}+\angle\mathrm{HGF}=180^\circ$$

すなわち

$$\angle\mathrm{HGF}=90^\circ-\angle\mathrm{FHG}$$

が得られる．
四角形DEFG は正方形であるから，

$$\angle\mathrm{DGF}=90^\circ$$

であるため，

$$\angle\mathrm{HGD}+\angle\mathrm{HGF}=90^\circ$$

となるから，上で得た関係式を代入して

$$\angle\mathrm{HGD}+90^\circ-\angle\mathrm{FHG}=90^\circ$$

すなわち

$$\angle\mathrm{HGD}=\angle\mathrm{FHG}$$

つまり

$$\angle\mathrm{FHG}=\angle\mathrm{CGD}$$

が成り立つ．
ここで，合同な三角形の対応する角は等しいから，

$$\triangle\mathrm{DCG}\equiv\triangle\mathrm{DAE}$$

より

$$\angle\mathrm{CGD}=\angle\mathrm{AED}$$

が成り立つ．
したがって，

$$\angle\mathrm{FHG}=\angle\mathrm{AED}$$

が成立する．

以上から，$\triangle\mathrm{GFH}$ と $\triangle\mathrm{DAE}$ は二組の角がそれぞれ等しいので，

$$\triangle\mathrm{GFH} \sim \triangle\mathrm{DAE}$$

が示された．

次に，この相似について相似比を求める．

四角形DEFG は正方形であるから，

$$\mathrm{GF} = \mathrm{DE}$$

となる

三角形AED が直角三角形で，DE はその斜辺であるから，三平方の定理より

$$\mathrm{DE} = \sqrt{\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AE}^2}$$

が成り立ち，

$$\begin{cases} \mathrm{AD} = 1 \\ \mathrm{AE} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

をここに代入して

$$\begin{aligned} \mathrm{DE} &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

が得られる．

よって

$$\mathrm{GF} = \sqrt{\frac{5}{4}}$$

である．

したがって，$\triangle\mathrm{GFH}$ と $\triangle\mathrm{DAE}$ の相似比は

$$\mathrm{GF} : \mathrm{DA} = \sqrt{\frac{5}{4}} : 1$$

となり，面積比は

$$\mathrm{GF}^2 : \mathrm{DA}^2 = \frac{5}{4} : 1$$

となる．

先に求めた通り

$$\triangle\mathrm{DAE} = \frac{1}{4}$$

であるから，これより，

$$\begin{aligned} \triangle\mathrm{GFH} &= \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{4} \\ &= \frac{5}{16} \end{aligned}$$

と求められた．

以上の二つを

$$(\text{斜線部の面積}) = \triangle\mathrm{DCG} + \triangle\mathrm{GFH}$$

に代入することで，

$$\begin{aligned}
(\text{斜線部の面積}) &= \triangle\mathrm{DCG} + \triangle\mathrm{GFH} \\
&= \frac{1}{4} + \frac{5}{16} \\
&= \frac{9}{16}
\end{aligned}$$

となる．

よって，求めるべき面積は $\dfrac{9}{16}$ である．

《参考》

$\mathrm{AE} = \mathrm{EB}$ の条件を無くして $\mathrm{AE} = t$ とおくと，同様にして斜線部の面積は $\dfrac{1}{2}t^3 + t$ と求められる．

本問ではその $t = \dfrac{1}{2}$ の場合を出題した．

直線 XA, l は単位円の接線であるから,

$$\angle \mathrm{XAC} = \angle \mathrm{DCA}$$

が成り立つ。また, 円周角の定理より,

$$\angle \mathrm{CXA} = \angle \mathrm{ADC}$$

が成り立つ。また,

$$\mathrm{AC} = \mathrm{CA}$$

であるから, 2 つの角とその間の辺の長さが等しいので,

$$\triangle \mathrm{XAC} \equiv \triangle \mathrm{DCA}$$

が成り立つ。よって,

$$\mathrm{XA} = \mathrm{CD}$$

である。同様に,

$$\mathrm{XB} = \mathrm{CE}$$

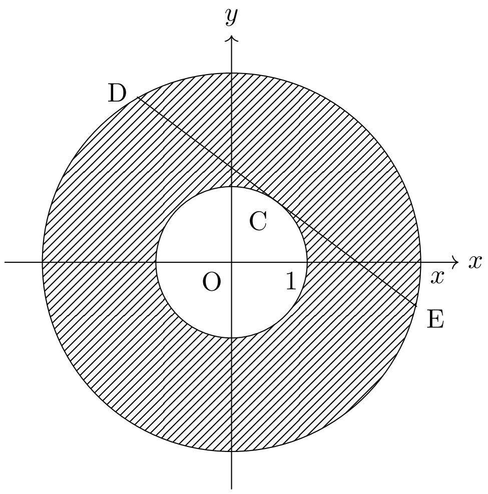
である。今,

$$\mathrm{XA} = \mathrm{XB}$$

であるから,

$$\mathrm{CD} = \mathrm{CE} = \sqrt{x^2 - 1}$$

が成り立つ。すなわち, DE の動く部分を図示すると,



半径 x の円から半径 1 の円をくりぬいた部分であるから, 求める部分の面積 S は

$$\boxed{(x^2 - 1)\pi}$$

問 題 33

《解答》

半径を r とすれば条件は

$$\frac{1}{2}\pi r^2 = \pi r + 2r$$

と書け，$r > 0$ に注意してこれを解くと

$$r = \frac{2\pi + 4}{\pi}$$

が得られる．

したがって、答えは $\dfrac{2\pi + 4}{\pi}$.

【解答】

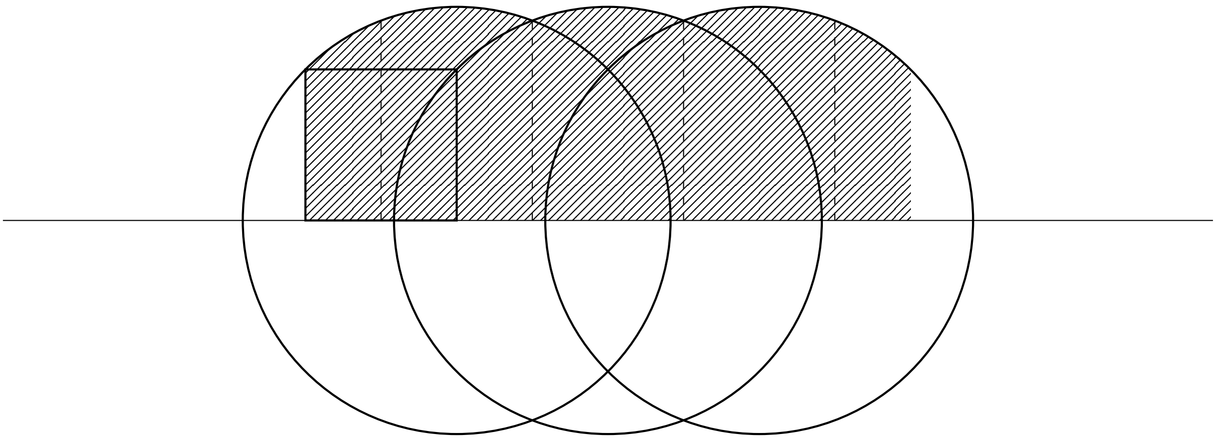
(1) 通過領域は、$m \times n$ の長方形から $(m-2)\times(n-2)$ の長方形を除いた図形であるから、その面積は

$$
\begin{aligned}
&mn-(m-2)(n-2)\\
=&mn-(mn-2m-2n+4)\\
=&mn-mn+2m+2n-4\\
=&2m+2n-4
\end{aligned}
$$

と計算できる。
よって答えは

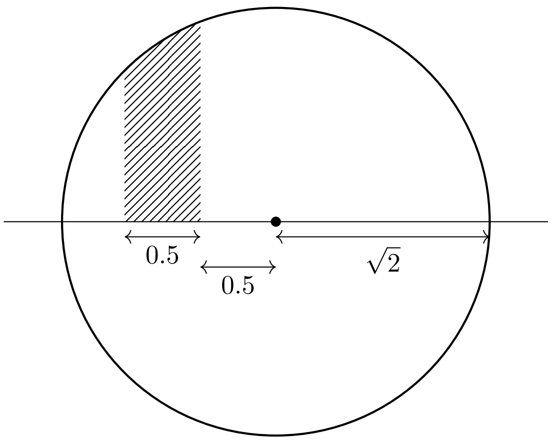
$$\boxed{2m+2n-4}$$

(2) まず k を 1 以上の整数として、直線の上で 1×1 の正方形を k 回転がしたときの通過領域について考える。このときの通過領域は、下図のように、基準の線と、2 本の両端の線と、k 個の円の上部で構成される図になる。

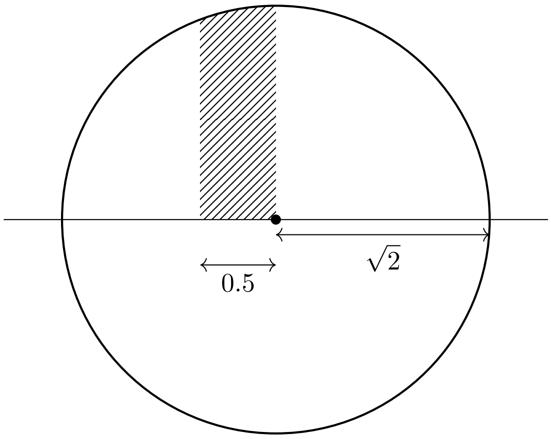


（図：$k=3$ のとき）

この領域の面積を S_k とする。
領域



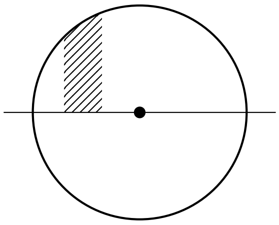
の面積を A とし、領域

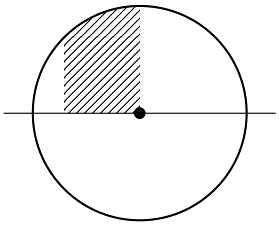
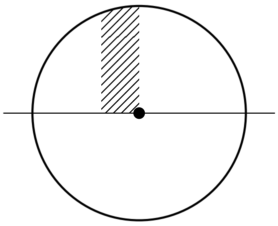


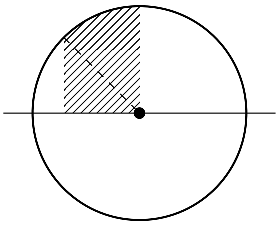
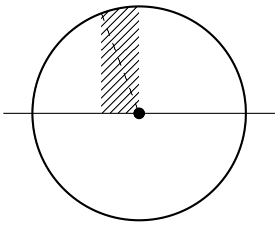
の面積を B とすると、

$$S_k = 2A + 2kB$$

が成り立つ。
A を求めると、(簡単のため単に図を描いて面積を表すものとして、)

$A =$ 

$=$  $-$ 

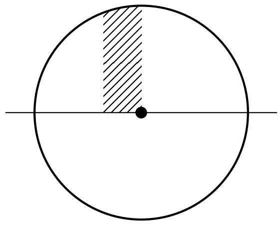
$=$  $-$ 

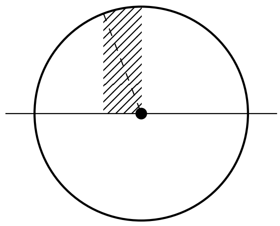
$$= \left(\pi\sqrt{2}^2 \cdot \frac{45^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1\right) - \left(\pi\sqrt{2}^2 \cdot \frac{X^\circ}{360^\circ} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\pi X}{180} - \frac{\sqrt{7}}{8}$$

となる。ただし、おうぎ形の面積の公式と直角三角形の面積の公式を利用している。

同じように、B を求めると、

$B =$ 

$=$ 

$$= \pi \sqrt{2}^2 \cdot \frac{X}{360} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$= \frac{\pi X}{180} + \frac{\sqrt{7}}{8}$$

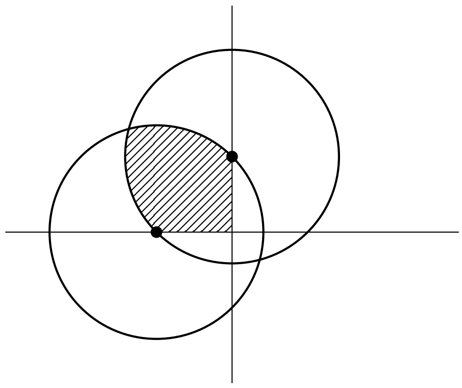
となる。
したがって、

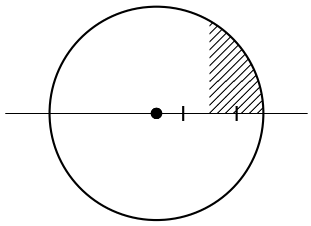
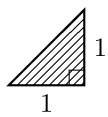
$$S_k = 2A + 2kB$$

$$= 2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{\pi X}{180} - \frac{\sqrt{7}}{8}\right) + 2k\left(\frac{\pi X}{180} + \frac{\sqrt{7}}{8}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} + 1 + \left(\frac{\pi X}{90} + \frac{\sqrt{7}}{4}\right)(k-1)$$

である。
次に、四隅で正方形の進行方向が 90 度変わったとき、その前後で二度通る領域の面積を C として、これを求めると、

$C =$ 

$=$  $\times 2 \quad +$ 

$$= \left(\pi\sqrt{2}^2 \cdot \frac{60}{360} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \right) \times 2 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$$

$$= \frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

となる。

以上から、最終的に求めるべき面積は

$$2S_{m-1} + 2S_{n-1} - 4C$$

$$\begin{aligned} &= 2\left(\frac{\pi}{2} + 1 + \left(\frac{\pi X}{90} + \frac{\sqrt{7}}{4} \right)(m-2) \right) \\ &\quad + 2\left(\frac{\pi}{2} + 1 + \left(\frac{\pi X}{90} + \frac{\sqrt{7}}{4} \right)(n-2) \right) \\ &\quad - 4\left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

$$= \boxed{\left(\frac{\pi X}{45} + \frac{\sqrt{7}}{2} \right)(m+n-4) + 2\sqrt{3} + 2 - \frac{2}{3}\pi}$$

である。

【コメント】

中学生向けの難問です。m, n は整数に限らなくても問の状況設定を考えることができますが、著しく複雑になると思います。

問　題　35

(c)(d)

【解説】

(a) 負の数に 5.4 をかけると、より絶対値が大きな負の数になります。よってこれは -4.696 より小さいです。

(b) 積は $(-4.696) \times 4.2$ に等しいので、(a) と同様です。

(c) 負の数に 0.821 をかけると、より絶対値が小さな負の数になります。よってこれは -4.696 より大きいです。

(d) 負の数と負の数をかけると正の数になります。よってこれは -4.696 より大きいです。

問　題　36

〈解答のみ〉

(1) 面 ABCD の方から立方体を見て、座標を設定する.

ここで P の y 座標と Q の y 座標を足すと 1 になることを考えると、$P(t, -2t+1)$ に対して、$Q(2t, 2t)$ とおける $(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2})$.

したがって、

$$
\begin{aligned}
PQ &= \sqrt{(t-2t)^2 + ((-2t+1)-(2t))^2} \\
&= \sqrt{t^2 + 16t^2 - 8t + 1} \\
&= \sqrt{17\left(t - \frac{4}{17}\right)^2 + \frac{1}{17}}
\end{aligned}
$$

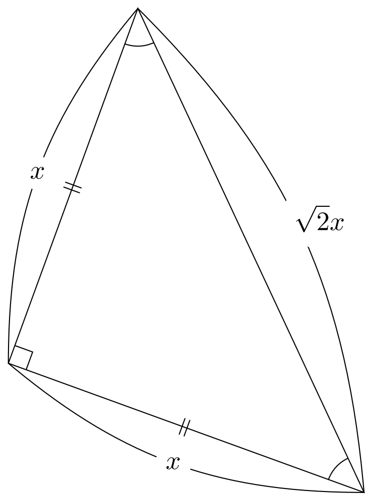
より、$t = \frac{4}{17}(0 \leqq t \leqq \frac{1}{2}$を満たす$)$ のときに、$min\frac{1}{\sqrt{17}}$ をとる.

問 題 37

斜辺は $\sqrt{2}x$ として長さ x について解くと，条件は一本の式で拾えて，

$$x + x + \sqrt{2}x = \frac{1}{2}x^2 \iff x\{x - (4 + 2\sqrt{2})\} = 0$$

$x > 0$ からして $z = 4 + 2\sqrt{2}$ である．



問　題　38

(1) 45 を素因数分解すると

$$45 = 3^2 \times 5$$

です。

よって、n は、

$$n = 5 \times (\text{正の整数})^2$$

と書ける数です。

そのようなものを小さい方から 3 つ求めると、

一番に

$$n = 5 \times 1^2 = 5$$

であり、次に

$$n = 5 \times 2^2 = 20$$

であり、最後に

$$n = 5 \times 3^2 = 45$$

です。

つまり答えは、5, 20, 45。

(2) $\sqrt{45x}$ が整数となるような正の数 x のうち、最も小さいものは、

$$\sqrt{45x} = 1$$

を満たします。

これより、根号の中は 1 である必要があるので

$$45x = 1$$

ですので、この一次方程式を解いて

$$x = \frac{1}{45}$$

です。

【コメント】

よく見る応用問題では最小の整数だけを答えさせるものが多いと思ったので、さらに発展させてみました。

問　題　39

【解答】

黒の個数が白の個数より少ない行や列がある場合、そのような行や列を 1 つ選んで操作を施す。このとき、全体の黒の個数は増加する。
全体の黒の個数は多くても n^2 までしか大きくならないから、このプロセスを繰り返せば有限回で終了する。
そのとき、全ての行と列において黒の個数は白の個数以上になっている。

【コメント】
白や黒は一般の実数値にしても同様のことが成り立つ。すなわち、全ての行や列それぞれにおいて、マスに書かれた実数の和は 0 以上にできる。

問　題　40

つるが x 匹、かめが y 匹として、問題文を連立方程式にすると

$$\begin{cases} x + y = a \\ 2x + 4y = b \end{cases}$$

となる。
この式を x や y について解くと、

$$\begin{cases} x = 2a - \dfrac{b}{2} \\ y = \dfrac{b}{2} - a \end{cases}$$

となります。
ここで、求める条件は x と y がともに 0 以上の整数になることです。
よって、答えは

$$\boxed{\text{bは偶数であり、2a≦b≦4a}}$$

です。