■　解答編（問題 51〜 問題 60）

問　題　51

(1)

$$\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{a_n-\dfrac{4}{b_n}}{\dfrac{1}{4}b_n-\dfrac{1}{a_n}}$$

分子と分母に $4a_nb_n$ をかけると

$$=\frac{4a_n(a_nb_n-4)}{b_n(a_nb_n-4)}=4\cdot\frac{a_n}{b_n}$$

このとき $a_mb_m=4$ を満たすある自然数 m が存在するとすると, $a_{m+1}=b_{m+1}=0$ となるので, 条件に反する. すなわち, 全ての自然数 n で $a_nb_n\neq 4$ となるので, 前の式では約分ができる.

$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$ は公比 4 の等比数列なので

$$\frac{a_n}{b_n}=4^{n-1}\cdot\frac{a_1}{b_1}=4^{n-1}$$

$\dfrac{a_n}{b_n}=4^{n-1}$ が示される.

(2)　数学的帰納法で示す. (1) より, $b_n=\dfrac{a_n}{4^{n-1}}$ なので, $a_{n+1}=a_n-\dfrac{4^n}{a_n}$ となる.

$n=1$ のとき, $a_1=1=\dfrac{2^1}{\tan(2^0\theta)}$ となり, 成り立つ.

$n=m$ のときに成り立つとすると, $a_m=\dfrac{2^m}{\tan(2^{m-1}\theta)}$ であるので漸化式にこれを代入する.

$$a_{m+1}=a_m-\frac{4^m}{a_m}=\frac{2^m}{\tan(2^{m-1}\theta)}-4^m\cdot\frac{\tan(2^{m-1}\theta)}{2^m}=2^{m+1}\cdot\frac{1-\tan^2(2^{m-1}\theta)}{2\tan(2^{m-1}\theta)}$$

tan の倍角の公式を適応すると, $a_{m+1}=\dfrac{2^{m+1}}{\tan(2^m\theta)}$ となり, $n=m+1$ のときに成り立つ.

数学的帰納法より, $a_n=\dfrac{2^n}{\tan(2^{n-1}\theta)}$ となる.

(3)　(1), (2) より, $b_n=\dfrac{a_n}{4^{n-1}}=\dfrac{4}{2^n\tan(2^{n-1}\theta)}$ である.

$$a_{n+1}=a_n-\frac{4}{b_n}=a_n-2^n\tan(2^{n-1}\theta)\Leftrightarrow a_{n+1}-a_n=-2^n\tan(2^{n-1}\theta)$$

漸化式は階差数列となっているので, a_{n+1} を和で表せる.

$$a_{n+1}=a_1-\sum_{k=1}^{n}2^k\tan(2^{k-1}\theta)$$

(2) より, $a_{n+1}=\dfrac{2^{n+1}}{\tan(2^n\theta)}$ であるから, 和を右辺に移項すると, 欲しい総和は

$$\sum_{k=1}^{n}2^k\tan(2^{k-1}\theta)=a_1-a_{n+1}=1-\frac{2^{n+1}}{\tan(2^n\theta)}$$

となる.

問　題　52

小数部分の漸化式

実数 x に対して, $\lfloor x \rfloor$ は x を超えない最大の整数とする.
実数列 $\{a_n\}$ は次の式を満たす.

$$a_1 > 0,\ a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor$$

a_1 を有理数とするとき, $a_N = 0$ となる自然数 N が存在することを示せ.

$a_n = 0$ となる自然数 n を N とするとすると, 第 $N+1$ 項以降は数列 $\{a_n\}$ が生成できないので,
$1 \leqq n \leqq N$, $a_n \neq 0$ を満たす n で議論する. 数列 $\{b_n\}$ を用いて, $a_n = \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$ $(b_n \neq 0)$ とおく.

$$a_{n+1} = \frac{1}{a_n} - \left\lfloor \frac{1}{a_n} \right\rfloor \Leftrightarrow \frac{b_{n+2}}{b_{n+1}} = \frac{b_n}{b_{n+1}} - \left\lfloor \frac{b_n}{b_{n+1}} \right\rfloor \qquad \therefore b_{n+2} = b_n - \left\lfloor \frac{b_n}{b_{n+1}} \right\rfloor b_{n+1}$$

$\{b_n\}$ の漸化式はユークリッドの互除法の余りを計算するので, 余りが 0 になることを言えばよい.
2 数 A, B の最大公約数を $\gcd(A,\ B)$ と表すとする. まず $\gcd(b_n,\ b_{n+1}) = \gcd(b_{n+1},\ b_{n+2})$ を示す.
$d = \gcd(b_n,\ b_{n+1})$, $d' = \gcd(b_{n+1},\ b_{n+2})$ とおく.

$\left\lfloor \dfrac{b_n}{b_{n+1}} \right\rfloor$ は整数かつ b_n, b_{n+1} は d の約数なので $b_{n+2} = b_n - \left\lfloor \dfrac{b_n}{b_{n+1}} \right\rfloor b_{n+1}$ より, b_{n+2} は d の約数である.
b_{n+1}, b_{n+2} は d の約数なので, d' は d を割り切る.

$\left\lfloor \dfrac{b_n}{b_{n+1}} \right\rfloor$ は整数かつ b_{n+1}, b_{n+2} は d' の約数なので $b_n = b_{n+2} + \left\lfloor \dfrac{b_n}{b_{n+1}} \right\rfloor b_{n+1}$ より, b_n は d' の約数である.
b_n, b_{n+1} は d' の約数なので, d は d' を割り切る.

よって, $\gcd(b_n,\ b_{n+1}) = \gcd(b_{n+1},\ b_{n+2})$ である. ここで b_{n+2} は b_n を b_{n+1} で割った余りであるから, $\{b_n\}$ は非負整数の単調減少列で, $b_m = 0$ となるある自然数 m を取れる.
故に $a_{m-1} = \dfrac{b_m}{b_{m-1}} = 0$ で $a_N = 0$ となる自然数 N の存在が示された.

問　題　53

まず、$z+1/z$ が実数となる複素数 z $(z \neq 0)$ を特定する。
実数 $x,\, y$ を用いて
$$z = x + yi$$
とおく。
すると、
$$z + \frac{1}{z} = x + yi + \frac{1}{x+yi}$$
$$= x + yi + \frac{x-yi}{x^2+y^2}$$
$$= \frac{x^3+xy^2+x}{x^2+y^2} + \frac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2}i$$
と計算できるから、これが実数になることは
$$\frac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2} = 0$$
と同値である。
いま
$$\frac{x^2y+y^3-y}{x^2+y^2} = \frac{y\left(x^2+y^2-1\right)}{x^2+y^2}$$
であるから、これが 0 になるのは
$$y = 0 \quad \text{または} \quad x^2+y^2 = 1$$
のときに他ならない。
この式を変数 z で表示すれば
$$z \text{ が実数} \quad \text{または} \quad |z| = 1$$
と同値である。
以上から、0 でない複素数 z を $z+1/z$ が実数であるように動かすときの z^2+az の実部の動く範囲とは、
$$\left\{ z^2+az \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\} \cup \left\{ \left(z^2+az\right) \text{ の実部} \;\middle|\; z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \right\}$$
である。

(i) $\left\{ z^2+az \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\}$ は、
$$\left\{ z^2+az \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\}$$
$$= \left\{ \left(z+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} \;\middle|\; z \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\}$$
$$= \begin{cases} \left[-\dfrac{a^2}{4}, \infty\right) & (a \neq 0) \\ (0, \infty) & (a = 0) \end{cases}$$
である。

(ii) $\left\{\left(z^2+az\right)\text{ の実部} \;\middle|\; z\in\mathbb{C}, |z|=1\right\}$ は、

$$
\begin{aligned}
&\left\{\left(z^2+az\right)\text{ の実部} \;\middle|\; z\in\mathbb{C}, |z|=1\right\}\\
=&\left\{\left((\cos\theta+i\sin\theta)^2+a\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)\right)\text{ の実部} \;\middle|\; \theta\in\mathbb{R}\right\}\\
=&\left\{\cos^2\theta-\sin^2\theta+a\cos\theta \;\middle|\; \theta\in\mathbb{R}\right\}\\
=&\left\{2\cos^2\theta+a\cos\theta-1 \;\middle|\; \theta\in\mathbb{R}\right\}\\
=&\left\{2t^2+at-1 \;\middle|\; -1\le t\le 1\right\}\\
=&\left\{2\left(t+\frac{a}{4}\right)^2-\frac{a^2}{8}-1 \;\middle|\; -1\le t\le 1\right\}\\
=&\begin{cases}
[1+a,1-a] & (a\le -4)\\
\left[-\dfrac{a^2}{8}-1, 1+|a|\right] & (-4\le a\le 4)\\
[1-a,1+a] & (4\le a)
\end{cases}
\end{aligned}
$$

である。

以上から、0 でない複素数 z を $z+1/z$ が実数であるように動かすとき、z^2+az の実部の動く範囲は

$$
\begin{cases}
[1+a,1-a]\cup\left[-\dfrac{a^2}{4},\infty\right) & (a\le -4)\\
\left[-\dfrac{a^2}{8}-1,1-a\right]\cup\left[-\dfrac{a^2}{4},\infty\right) & (-4\le a<0)\\
[-1,1]\cup[0,\infty] & (a=0)\\
\left[-\dfrac{a^2}{8}-1,1+a\right]\cup\left[-\dfrac{a^2}{4},\infty\right) & (0<a\le 4)\\
[1-a,1+a]\cup\left[-\dfrac{a^2}{4},\infty\right) & (4\le a)
\end{cases}
$$

となるから、不等式を解くことで、これは

$$
\begin{cases}
\left[-\dfrac{a^2}{4},\infty\right) & \left(a\le -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\le a\right)\\
\left[-\dfrac{a^2}{8}-1,\infty\right) & \left(-2\sqrt{2}\le a<2\sqrt{2}\right)
\end{cases}
$$

となる。

したがって、0 でない複素数 z を $z+1/z$ が実数であるように動かすとき、z^2+az の実部の最小値は

$$\begin{cases} -\dfrac{a^2}{4} & \left(a \leq -2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2} \leq a\right) \\ -\dfrac{a^2}{8}-1 & \left(-2\sqrt{2} \leq a < 2\sqrt{2}\right) \end{cases}$$

問　題　54

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0, \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0, \overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=1$ となるので, $\triangle\mathrm{OAB}$ を底面としたときに AC が高さとなる。($\mathrm{AB}\perp\mathrm{AC}, \mathrm{AO}\perp\mathrm{AC}$ より)

$$\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{OAB}\cdot\mathrm{AC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2) 水面と OA, OC の交点を P, Q とすると $H_{水}$ の最大値を考えるには, $\triangle\mathrm{PBQ}$ の最小値を考えればよい。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると水の体積は容器の $\frac{1}{4}$ なので, $st=\frac{1}{4}$ となる。$(0\leqq s\leqq 1, 0\leqq t\leqq 1)$ また, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0, \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0, \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$ より,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}&=(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=st+3=\frac{13}{4}\\
|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=s^2+13\\
|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=9t^2+3\\
\triangle\mathrm{BPQ}&=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{(s^2+3)(9t^2+3)-\left(\frac{13}{4}\right)^2}\\
&=\frac{1}{2}\sqrt{3(s^2+9t^2)-1}\\
&\geqq\frac{1}{2}\sqrt{3\cdot 2\sqrt{9s^2t^2}-1}\\
&=\frac{\sqrt{14}}{4}
\end{aligned}$$

等号成立は $s=3t$ つまり, $s=\frac{\sqrt{3}}{2}, t=\frac{\sqrt{3}}{6}$ のときで, 確かにそのような s, t は存在する。よって,

$$\triangle\mathrm{PBQ}_{\min}=\frac{\sqrt{14}}{4}$$

水の体積 $V_{水}$ は容器の体積の $\frac{1}{4}$ なので, $V_{水}=\frac{\sqrt{6}}{12}$ よって, $H_{水}$ の最大値は

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{PBQ}_{\min}\cdot H_{水}=V_{水}$$
$$H_{水}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

である。

【補足】

$\triangle\mathrm{ABC}$ に対して $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は以下のように簡単に計算することができる。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cos\theta=c\cdot b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2}$$

問　題　55

《解説》

対数関数は単調増加なので，自己交差点の偏角 ϕ について，ある正の整数 k が存在して

$$\log(\phi) = -\log(\phi - (2k-1)\pi)$$

が成立する．
これより

$$\phi(\phi - (2k-1)\pi) = 1$$

であるから，二次方程式を解くことで

$$\phi = \frac{(2k-1)\pi + \sqrt{(2k-1)^2\pi^2 + 4}}{2}$$

が得られる．
よって，座標は

$$\left(\log\left(\frac{(2k-1)\pi + \sqrt{(2k-1)^2\pi^2+4}}{2}\right)\cos\left(\frac{(2k-1)\pi + \sqrt{(2k-1)^2\pi^2+4}}{2}\right),\right.$$
$$\left.\log\left(\frac{(2k-1)\pi + \sqrt{(2k-1)^2\pi^2+4}}{2}\right)\sin\left(\frac{(2k-1)\pi + \sqrt{(2k-1)^2\pi^2+4}}{2}\right)\right)$$

(k は正の整数)

問　題　56

複素数平面において，$\mathrm{O}(0), \mathrm{A}(2), \mathrm{P}(z^2)$ とする．
$|z| = r, \arg(z) = \theta$ とすると，$|z|^2 = r^2, \arg(z^2) = 2\theta$ である．よって，$\mathrm{OA} = 2, \mathrm{OP} = r^2, \angle\mathrm{AOP} = 2\theta$ となる．
ここで，問題文より，

$$|z|^2 + |z^2 - 2| \leqq 2\sqrt{2}$$

よって，

$$\mathrm{AP} \leqq 2\sqrt{2} - r^2$$

余弦定理より，($\cos\theta = \cos(-\theta)$ より，点 P が第 $3, 4$ 象限にあるときも同様に議論できる．)

$$\cos 2\theta = \frac{\mathrm{OA}^2 + \mathrm{OP}^2 - \mathrm{AP}^2}{2\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OP}} \geq \frac{2^2 + (r^2)^2 - (2\sqrt{2} - r^2)^2}{2\cdot 2\cdot r^2} = \frac{\sqrt{2}r^2 - 1}{r^2}$$
$$r^2\cos 2\theta \geq \sqrt{2}r^2 - 1$$
$$r^2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \geq \sqrt{2}r^2 - 1$$

これを直交座標系に変換すると，

$$x^2 - y^2 \geq \sqrt{2}(x^2 + y^2) - 1$$
$$(\sqrt{2} - 1)x^2 + (\sqrt{2} + 1)y^2 \leqq 1$$
$$\frac{x^2}{\sqrt{2} + 1} + \frac{y^2}{\sqrt{2} - 1} \leqq 1$$

これは楕円になるので，求めたい面積 S は

$$\mathrm{S} = \pi\sqrt{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \pi$$

コメント

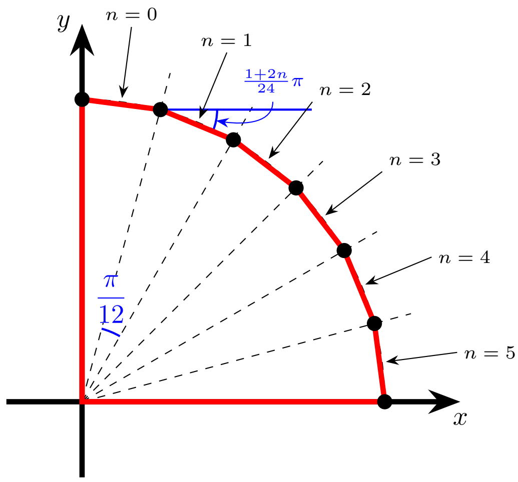
z^2 の軌跡から z の軌跡を考えたいときは，複素数平面を極座標に変換してから直交座標に変換すると上手くいくことが多いです．(当社比)

問　題　57

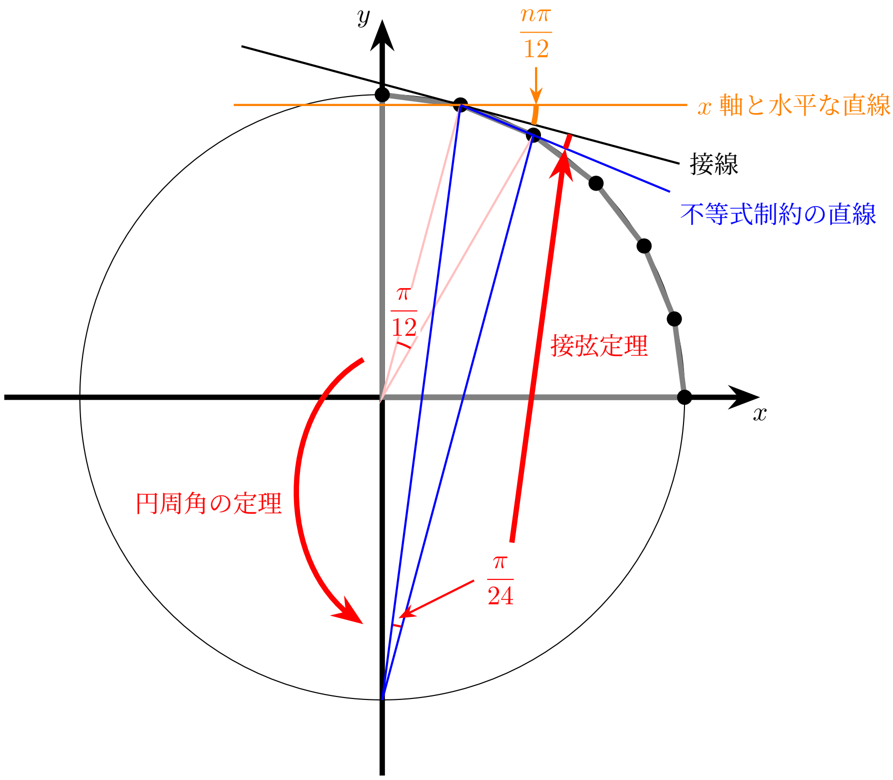
本問は，**線形計画問題**と呼ばれる問題である．**線形計画問題**として高校数学でよくとりあげられるのは，x, y が正であるという条件以外に 2 本の直線による不等式制約がある場合がほとんどであるうが，本問では不等式制約を 6 本まで増やしてみた．
実際に制約条件

$$\begin{cases} 0 \leqq x \\ 0 \leqq y \\ y \leqq -\tan\left(\dfrac{1+2n}{24}\pi\right)\left(x - 4\cos\left(\dfrac{6-n}{12}\pi\right)\right) + 4\sin\left(\dfrac{6-n}{12}\pi\right) \quad (n = 0, 1, 2, 3, 4, 5) \end{cases}$$

を図示してみると，以下の様になる．



実際，x 軸と y 軸以外の 6 つの条件は，半径 4 の四分円の円周を 15° ずつ切り分けたときの隣り合う 2 つの切断点，極座標で $(r:\theta) = (4:\dfrac{n\pi}{12})$ と $(r:\theta) = (4:\dfrac{(n+1)\pi}{12})$ を結ぶ直線である (図中で 2 つの隣り合う黒丸を結ぶ直線)．
これらの直線の傾きを求めてみる．$n = 0, ..., 5$ のそれぞれの直線のうち，赤線で示した線分の部分と，座標平面の原点がなす二等辺三角形の頂角は $\dfrac{\pi}{12}$ であり，この頂角を円周上のどこかの点に移動して円周角の定理で頂角が半分の $\dfrac{\pi}{24}$ としてから接弦定理を用いると，この線分の x 座標が小さい方の端点における四分円の接線と線分がなす角は $\dfrac{\pi}{24}$ となる．また，この接線は x 軸と $\dfrac{n\pi}{12}$ の角をなす．これを足せばたしかに $\dfrac{1+2n}{24}\pi$ の角度が現れる．



結局，制約条件の交点は $(r:\theta) = (4:\dfrac{n\pi}{12})\quad(n=0,...,6)$ と $(0,0)$ の 8 点である．
線形計画問題では，最大値を与える点は制約式の交点のどれかであることが知られている (詳しい証明は略)．
よって，求めるべき点は今絞り込んだ 8 点のいずれか．
しかし，8 点でもまだ多いため，さらに絞り込むことを考える．最大値を求めたい関数は $\sqrt{3}x+y$ であるから，

$$k = \sqrt{3}x + y$$

とおいて変形すると，

$$y = -\sqrt{3}x + k = -\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot x + k$$

となり，これは x 軸と 60° の角をなす右下がりの直線であることがわかる．
この直線を $(0,0)$ と $(0,4)$ のそれぞれを通るように設定してみれば，少なくとも $(0,0)$ が最大値を与えることはないことがわかる．よって，$(r:\theta)=(4:15n)\quad(n=0,...,6)$ を候補に考える．
さらに，今求めた直線の角度と制約条件の直線の角度を利用して絞り込む．

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$$
$$(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=0$$
$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=4$$

よって，$\mathrm{OA}=2$，問題文の条件より $\mathrm{BC}=\mathrm{OA}=2$ となる．
$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=x,|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=y$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0,\mathrm{BC}=2$ より，

$$x^2+y^2=4$$
$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}xy$$

点 O から $\triangle\mathrm{ABC}$ に下した垂線の足を H とし，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

H は垂線の足なので以下の条件を満たす

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0\end{cases}$$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\left(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=-2,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=-1$ なので，

$$\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2+sx^2=0\\ \overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=-1+ty^2=0\end{cases}$$

よって，$s=\dfrac{2}{x^2},\quad t=\dfrac{1}{y^2}$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+s^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+t^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2+2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+2st\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=4+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{y^2}-\frac{8}{x^2}-\frac{2}{y^2}\\&=4-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{y^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OH}\\&=\frac{1}{6}xy\sqrt{4-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=\frac{1}{6}\sqrt{4x^2y^2-4y^2-x^2}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{4(4-y^2)y^2-4y^2-(4-y^2)}\\&=\frac{1}{6}\sqrt{-4\left(y^2-\frac{13}{8}\right)^2+\frac{105}{16}}\leqq\frac{\sqrt{105}}{24}\end{aligned}$$

等号成立は $x=\dfrac{\sqrt{38}}{4},y=\dfrac{\sqrt{26}}{4}$ のとき，つまり，$\mathrm{AB}=\dfrac{\sqrt{38}}{4},\mathrm{BC}=2,\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{26}}{4},\mathrm{OA}=2,\mathrm{OB}=\dfrac{\sqrt{38}}{4},\mathrm{OC}=\dfrac{\sqrt{58}}{4}$ のときであり，これは問題文の条件を満たし，このような四面体は確かに存在している．
よって，四面体 OABC の体積の最大値は

$$V_{\max}=\frac{\sqrt{105}}{24}$$

である．

問　題　59

複素数平面上において O(0) とする。
$\alpha+\beta=\gamma$ より、$\alpha-0=\gamma-\beta$ なので、四角形 OACB は平行四辺形である。(①)
次に、$\alpha\beta|\gamma|=\gamma^2$ の偏角に注目すると

$$\arg(\gamma)=\frac{\arg(\alpha)+\arg(\beta)}{2}$$

よって、OC は $\angle$AOB の二等分線になっている。 ① と合わせると四角形 OACB はひし形である。(②)
よって、$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{AC}=\mathrm{BC}=x$ とし、$\alpha\beta|\gamma|=\gamma^2$ の大きさに注目すると

$$|\gamma|=x^2$$

よって、$\mathrm{OC}=x^2$ である。OC の中点を M とすると、 ② より AB の中点も M となり、$\mathrm{CM}\perp\mathrm{AM}$ となる。
$\mathrm{CM}=\dfrac{x^2}{2}$, $\mathrm{AC}=x$、三平方の定理より

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{AM}=2\sqrt{x^2-\frac{x^4}{4}}$$

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{CM}\cdot\mathrm{AB}=\frac{x^2}{2}\sqrt{x^2-\frac{x^4}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^6-\frac{x^8}{4}}$$

よって、$f(x)=x^6-\dfrac{x^8}{4}$ の増減を確認する。

$$f'(x)=6x^5-2x^7=2x^5(3-x^2)$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{27}{4}$	$\searrow$

$x=\sqrt{3}$ の時に最大となる。また、$\alpha=\sqrt{3},\ \beta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i,\ \gamma=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}i$ の時に問題文の条件を満たしながら $x=\sqrt{3}$ となるので、$x=\sqrt{3}$ となるような $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は確かに存在している。
よって、$\triangle$ABC の面積の最大値は

$$(\triangle\mathrm{ABC})_{\max}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{27}{4}}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

である。

問　題　60

《解答》

複素数における絶対値の定義より

$$
\begin{aligned}
&\Bigl||x+yi|+zi\Bigr| \\
=&\left|\sqrt{x^2+y^2}+zi\right| \\
=&\sqrt{x^2+y^2+z^2}
\end{aligned}
$$

と計算できる．よってこれは対称式である．