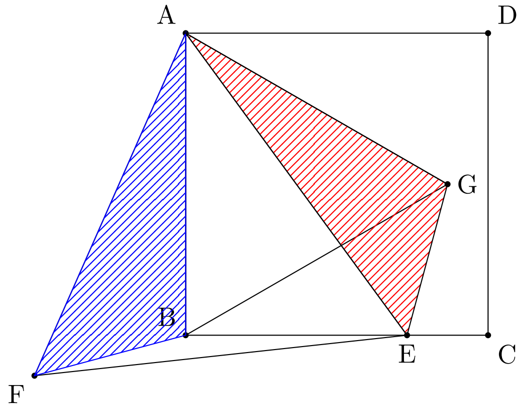
■　解答編（問題 1〜 問題 10）

問　題　1

次のように, 三角形 ABG が正三角形となるように点 G をとる。



このとき, $\triangle$AFB と $\triangle$AEG について,

$$\begin{cases} \mathrm{AF} = \mathrm{AE} \\ \mathrm{AB} = \mathrm{AG} \\ \angle\mathrm{FAB} = \angle\mathrm{EAG} = 60^\circ - \angle\mathrm{BAE} \end{cases}$$

が成り立つので, $\triangle\mathrm{FAB} \equiv \triangle\mathrm{EAG}$ が成り立つ。よって,

$$\angle\mathrm{AGE} = \angle\mathrm{ABF} = 105^\circ$$

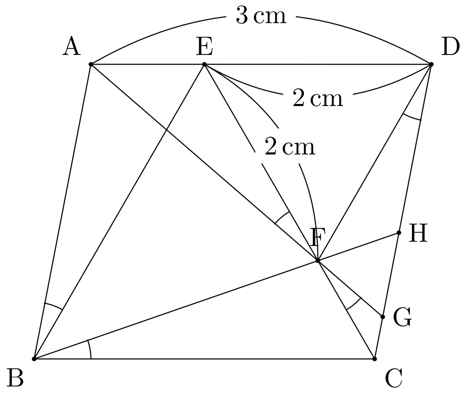
これより, $\angle$GEC を計算すれば,

$$\begin{aligned} \angle\mathrm{GEC} &= \angle\mathrm{BGE} + \angle GBE \\ &= 30^\circ + 45^\circ \\ &= 75^\circ \end{aligned}$$

このことから 3 点 D, G, E は同一直線上にあることがわかる。
今, BF = GE であるから, BF : DE = 1 : 2 である。

問 題 2

図のように点をとる.



このとき,

$$\triangle \mathrm{ABE} \equiv \triangle FBC$$
$$\triangle \mathrm{CFH} \sim \triangle CDE$$
$$\triangle \mathrm{AEF} \sim \triangle FHD$$

が成り立つので, $\triangle$FHG が正三角形であることの注意すれば, $\mathrm{FC} = 1\,\mathrm{cm}, \mathrm{EF} = 2\,\mathrm{cm}, \mathrm{ED} = 2\,\mathrm{cm}, \mathrm{CG} : \mathrm{GH} : \mathrm{HD} = 1 : 2 : 4$ である. ここで, 特に $\triangle\mathrm{AEF} \sim \triangle\mathrm{FHD}$ であることに注意すれば, CG=①cm とおくと, 1 :⑦=②: 2. すなわち, $7\times$ ① $\times$ ① $= 1$ が成り立つ. 求める面積は⑦×⑦= 49×①×①= 7. よって $7\,\mathrm{cm}^2$.

問　題　3

《こたえ》

(1) できるよ！
(2) できるよ！
(3) 実はできないんだ…

《せつめい》

(1) 星のトゲの先っぽから、2 コとなりのトゲまでまっすぐ書いてみよう！
(2) まわりをぐるっと一周するように書いてみてね！
(3) 葉っぱのぶぶんが、ぜったいに一筆書きできないんだ…

《保護者の方へ》
一筆書きできる図形には、ある条件があります。それは「奇数本の線が集まっている点」が 0 個または 2 個でなくちゃいけない、ということです。一筆書きするときには、ある点に向かって線を引き、またその点から別の点に行きます。この「出て入る」という動作には 2 本の線が必要なんです。線が奇数本集まっているということは、「出る」か「入る」が 1 個増えているということになります。つまりこの点が、最初に出る「スタート」や最後に出る「ゴール」になるわけです。
今回の問題では、(1)(2) は「奇数本集まっている点」が 0 個のため、そこからスタートしても必ずクリアできます。しかし (3) は花の葉の部分に「奇数本集まっている点」が 3 個ある (3 本、3 本、7 本) ため、その部分がどうしても一筆書きできないのです。実は葉っぱのスジを 2 本とも消すと、一筆書きできるようになるんです。余力のあるお子さんには、ぜひやらせてみてください。

考え方のポイント

ゴールである「20 マス目」にたどり着くには、その一歩手前はどんな状況だったかを考えてみましょう。

- コインを投げて裏が出てゴールする場合、その前に 19 マス目にいなければなりません。
- コインを投げて表が出てゴールする場合、その前に 18 マス目にいなければなりません。

つまり、**「20 マス目までの進み方の数」は、「19 マス目までの進み方の数」と「18 マス目までの進み方の数」を足したもの**になります。

この考え方を使って、最初のマスから順番に調べてみましょう。

- 1 マス目までの進み方
  - **裏**を 1 回出す → 1 通り
- 2 マス目までの進み方
  - **裏** → **裏**と出す
  - **表**を 1 回出す
  - 合計 2 通り
- 3 マス目までの進み方
  - これは「1 マス目までの進み方 (1 通り)」と「2 マス目までの進み方 (2 通り)」を足せばいいので、$1+2=$ **3 通り**
- 4 マス目までの進み方
  - 「2 マス目までの進み方 (2 通り)」と「3 マス目までの進み方 (3 通り)」を足せばいいので、$2+3=$ **5 通り**

進み方の数を並べてみると、次のようになっています。
1, 2, 3, 5, ...
これは、「**2 つ前の数と 1 つ前の数を足すと、次の数になる**」という規則に従ったならび方になっていますね。このような数列を「**フィボナッチ数列**」と呼びます。
この規則に従って、20 番目の数まで計算していきましょう。

マス目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
通り	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
マス目	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
通り	144	233	377	610	987	1597	2584	4181	6765	10946

20 番目の数は **10946** となりました。

答え

太郎さんがゴールするまでの表と裏の出方は **10946 通り** あります。

問　題　5

【解答】
分数の値は、分母が大きいほど小さく、分子が大きいほど大きくなる。

$\frac{97943}{101561}$ と $\frac{97931}{101573}$ を比べると、ひとつめの分数のほうが分子が大きくて分母が小さいから、こちらの方が値が大きい。

よって答えは $\dfrac{97943}{101561}$。

問 題 6

まずは，$1:00 \sim 2:00, \cdots, 10:00 \sim 11:00$ のそれぞれの時を考えましょう．これらのそれぞれの間において，長針は「12」の位置から 2 回時計回りに，1 回反時計回りに回転する一方で，短針は長針よりもゆっくり回転し，一度も「12」の位置を通りません．なので，それぞれの間に長針と短針は 3 回重なります．

次に，$0:00 \sim 1:00$ の間を考えましょう．$0:00$ ちょうどで長針と短針は「12」の位置で重なり，それ以降，$0:30$ まで，長針と短針は時計方向に回ります．この間に，長針は短針より早く回り，短針は 1 周もせず，長針は 2 周します．なので，$0:00 \sim 0:30$ の間 ($0:00$ も含める) は長針と短針は 2 回重なります．また，$0:30 \sim 1:00$ の間は，短針は時計回りにゆっくり回転し，一度も「12」の位置を通らない一方で，長針は反時計回りに 1 回転します．なので，$0:30 \sim 1:00$ の間は長針と短針は 1 回重なります．以上から，$0:00 \sim 1:00$ の間 ($0:00$ も含める) は長針と短針は 3 回重なります．

最後に，$11:00 \sim 12:00$ の間を考えましょう．$11:00 \sim 11:30$ の間は，短針は時計回りにゆっくり回転し，一度も「12」の位置を通らない一方で，長針は時計回りに 2 回転します．なので，この間に長針と短針は 2 回重なります．また，$11:30 \sim 12:00$ の間 ($12:00$ も含める) は，短針は「12」の位置から少し反時計回りに回転した位置から「12」の位置にゆっくり移動し，長針は「12」の位置から「12」の位置へ反時計回りに 1 周します．$12:00$ に長針と短針が「12」の位置で重なることに注意すると，$11:30 \sim 12:00$ の間 ($12:00$ も含める) は長針と短針は 2 回重なることが分かります．以上から，$11:00 \sim 12:00$ の間 ($12:00$ も含める) は長針と短針は 4 回重なることが分かります．

以上から，求める回数は $3 \times 11 + 4 = 37$ 回であると分かります．

問　題　7

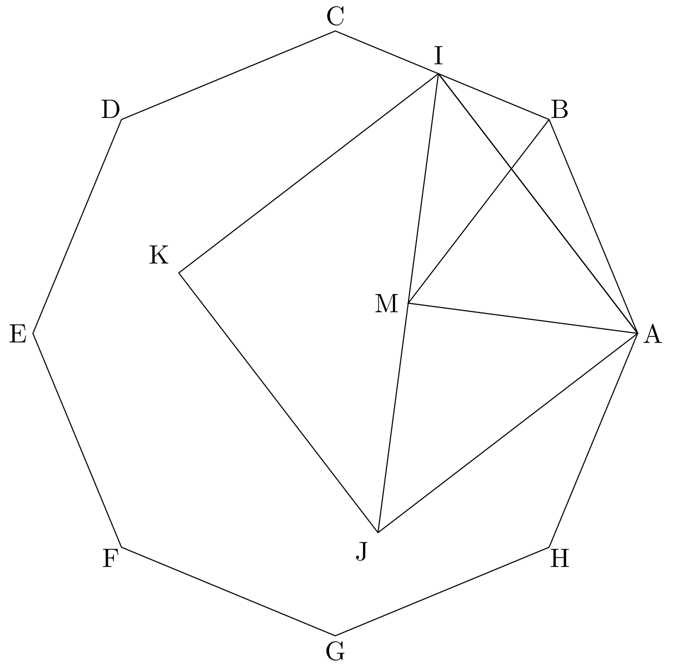
下図のように, 点 K, J, M をとる。ただし, 四角形 AIKJ は正方形であり, M はその中心である。このとき, $\angle\mathrm{BAI} = 15^\circ, \angle\mathrm{ABI} = 135^\circ$ から,

$$\angle\mathrm{AIB} = 30^\circ$$

である。辺 BC を B の方へ延長した線と, 点 A から下ろした垂線が交わる点を P とする。これにより, $\triangle\mathrm{ABP}$ は直角二等辺三角形, $\triangle\mathrm{API}$ は角度が $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の直角三角形となる。よって, $\mathrm{AI} = 2 \times \mathrm{AP}$ が成り立つ。
また, $\triangle\mathrm{ABP}$ の面積は, 対角線を AB ($1\,\mathrm{cm}$) とする正方形の面積の半分であるから, $1 \times 1 \div 2 \div 2 = 0.25\,\mathrm{cm}^2$ となる。この面積は $\mathrm{AP} \times \mathrm{AP} \div 2$ とも表せるので, $\mathrm{AP} \times \mathrm{AP} = 0.5$ である。
したがって, 求める正方形の面積 ($\mathrm{AI} \times \mathrm{AI}$) は,

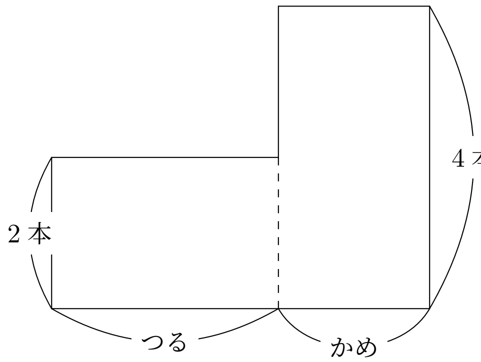
$$\begin{aligned}\mathrm{AI} \times \mathrm{AI} &= (2 \times \mathrm{AP}) \times (2 \times \mathrm{AP}) \\ &= 4 \times (\mathrm{AP} \times \mathrm{AP}) \\ &= 4 \times 0.5 = 2\end{aligned}$$

となり, 答えは $\boxed{2\,\mathrm{cm}^2}$ である。

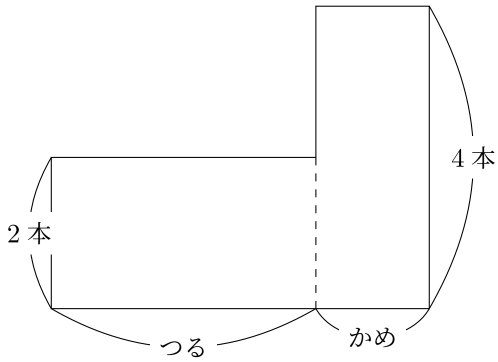


問　題　8

つるの足の数は 2 本, かめの足の数は 4 本であることに注意する。2 つの動物園にいるつるの数とかめの数とその足の本数の関係を図示すると次のようになる。

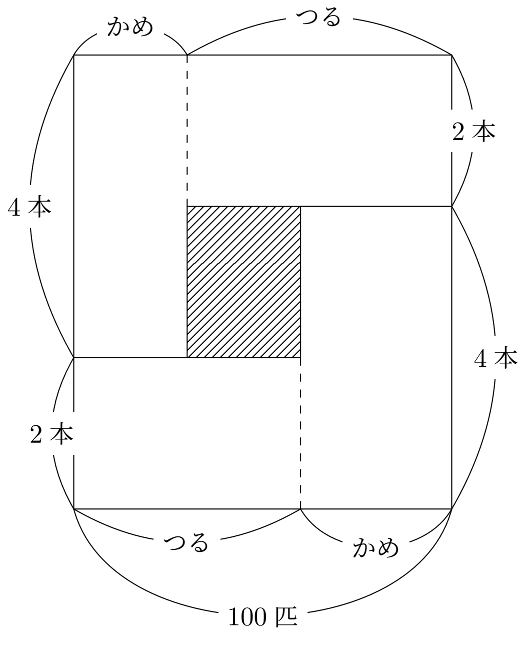


早稲田動物園



作問動物園

さて, この 2 つの動物園はどちらもつるとかめを合わせて 100 匹飼っていて同じ数であるから, 作問動物園の方の図をひっくり返して次のようにできる。



足の本数はこの面積と考えられる。よって, 図の斜線部の面積は

$$6 \times 100 - 540 = 60$$

である。つるとかめの足の本数の差は 2 本であるから, 斜線部分の匹数は,

$$60 \div 2 = 30$$

よって, 30 匹である。以上からかめは

$$100 - 30 = 70$$

より, $\boxed{70匹}$。

解答

四角形 ABCD は平行四辺形であるので、

$\angle ADC = \angle ABC = 60^\circ$、$\angle BAD = \angle BCD = 120^\circ$

とわかる。

このとき、AB : BC = 1 : 2 なので、辺 BC、AD の中点をそれぞれ F、G としたとき、三角形 ABF、FGA、GFC、CGD はそれぞれ正三角形となり、平行四辺形 ABCD の面積は 12 なので、それぞれの正三角形の面積は $12 \times \dfrac{1}{4} = 3$ となる。(図 1)

ここで、辺 CD の中点を H とすると、図 2 より三角形 BEC と CED は二等辺三角形なので、

$\angle EFB = \angle EHC = 90^\circ$

であり、また $\angle FCH = 120^\circ$ であるので、$\angle FEH$ は平行四辺形 FCDE により、$\angle FEH = 360^\circ - (90^\circ + 90^\circ + 120^\circ) = 60^\circ$

とわかり、$\angle BED = 2\angle FEH$ なので、$\angle BED = 120^\circ$ となる。

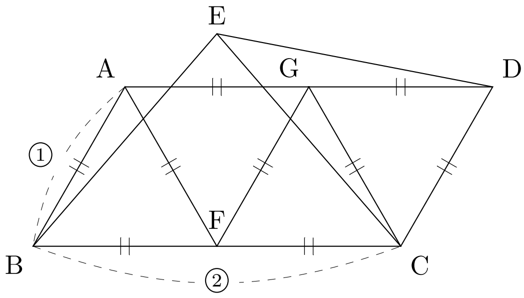


図 1

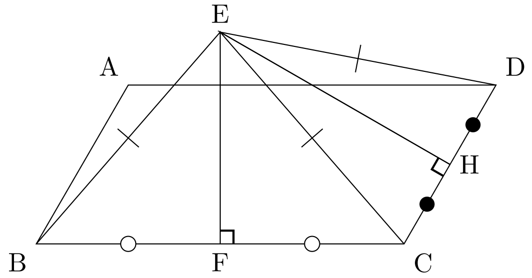


図 2

次に図 1 の図形を 3 つ用意し、点 E を中心として 120° ずつ回転したものを描くと、図 3 のような図形になる。

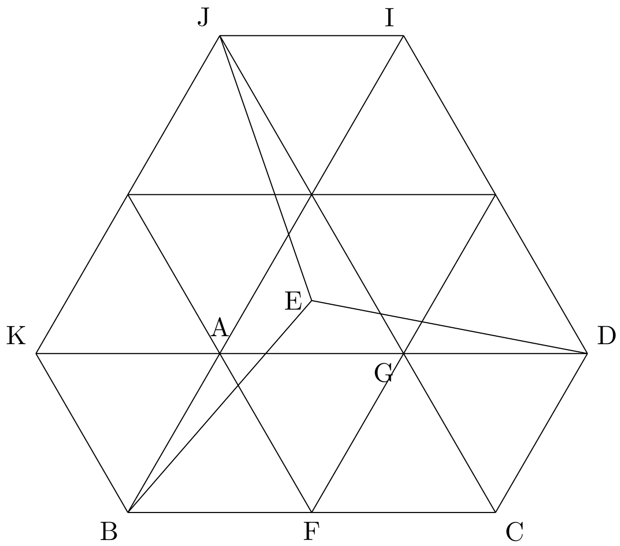


図 3

図 3 のように、全体の六角形の頂点をそれぞれ B、C、D、I、J、K としたとき、六角形 BCDIJK は正三角形 ABF が 13 個組み合わさったものとわかるので、この面積は $3 \times 13 = 39$。

ここで、四角形 BCDE、DIJE、JKBE は合同であることから、

四角形 BCDE の面積は$\underline{39 \div 3 = 13}$と求まる。

問　題　10

(方針)

四則演算は，基本的には左側から順に計算しますが，①かっこの中の式，②掛け算・割り算，③足し算・引き算の順番に計算します。$\dfrac{1}{9}$ など，小数では表せない数があるので，今回は小数を分数に直してから計算しましょう。

(解答)

$\left(0.0875+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{7}{80}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{27}{80}$,

$\dfrac{1}{8}-1\div\left(9-\dfrac{1}{9}\right)=\left(\dfrac{1}{8}-1\div\dfrac{80}{9}\right)=\dfrac{10}{80}-\dfrac{9}{80}=\dfrac{1}{80}$,

$20\dfrac{\boxed{}}{26}=\dfrac{520+\boxed{}}{26}$

だから，$=$ の左側の式は

$(\dfrac{27}{80}\div\dfrac{1}{80}-1)\times\dfrac{520+\boxed{}}{26}=(27-1)\times\dfrac{520+\boxed{}}{26}=520+\boxed{}$

です。

また，$=$ の右側の式について，

$\left(29-\dfrac{1}{4}\right)\times 18.4=\dfrac{116-1}{4}\times\dfrac{92}{5}=\dfrac{115}{4}\times\dfrac{92}{5}=23\times 23=529$

です。

よって，$520+\boxed{}=529$ だから $\boxed{}$ には$\underline{9}$があてはまります。

(コメント)

0.0875 は，$0.875=\dfrac{1}{8}$ の $\dfrac{1}{10}$ 倍と考えるとわかりやすいです。