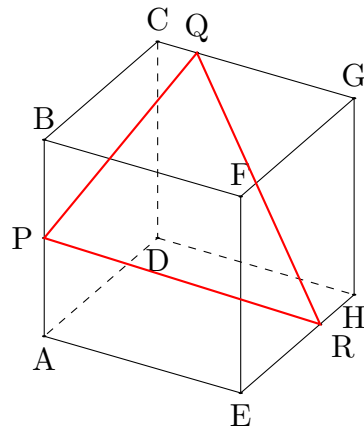


第 54 問

図のように、1 辺の長さが 1 の立方体  $ABCD-EFGH$  がある。辺  $AB$  上に点  $P$ 、辺  $CG$  上に点  $Q$ 、辺  $EH$  上に点  $R$  をとるとき、三角形  $PQR$  の重心が動き得る領域の体積を求めよ。



作問者：negi\_0613\_

## 解答

$xyz$  座標空間上で考える。A を原点とし、

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \overrightarrow{AE} = (1, 0, 0) \\ \vec{e}_y = \overrightarrow{AD} = (0, 1, 0) \\ \vec{e}_z = \overrightarrow{AB} = (0, 0, 1) \end{cases}$$

とおく。このとき、 $s, t, u$  を 0 以上 1 以下の実数として、

$$\begin{cases} AP : PB = s : 1 - s \\ CQ : QG = t : 1 - t \\ ER : RH = u : 1 - u \end{cases}$$

を満たすとするば、

$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = s\vec{e}_z \\ \overrightarrow{AQ} = t\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z \\ \overrightarrow{AR} = \vec{e}_x + u\vec{e}_y \end{cases}$$

を満たす。三角形 PQR の重心を X とおくと、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} &= \frac{\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AR}}{3} \\ &= \frac{t+1}{3}\vec{e}_x + \frac{u+1}{3}\vec{e}_y + \frac{s+1}{3}\vec{e}_z \end{aligned}$$

今、 $0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1, 0 \leq u \leq 1$  より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &\leq \frac{s+1}{3} \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} &\leq \frac{t+1}{3} \leq \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} &\leq \frac{u+1}{3} \leq \frac{2}{3} \end{aligned}$$

を満たすので、 $s, t, u$  は独立に動くから、求める部分の体積は、

$$\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$$