## ■　解答編（問題 41〜 問題 50）

**問　題　41**

《解答》

条件を満たす組 $(K,N)$ は存在しない

《解説》

任意の自然数 $p$ において、$p^2 \equiv 1,4,9,6,5,0 (mod 10)$ である。よって $N$ に入る数はこの 6 択となる。以降、$K0N1N$ を与式と表現する。

$N=4$ の場合、与式は $K0414$ となる。この値は下 2 桁が 14 であることから、偶数だが 4 の倍数ではないと読み取れるため、平方数にはなりえない。

$N=5$ の場合、与式は $K0515$ となる。しかし下 2 桁が 15 であることから、5 の倍数だが 25 の倍数でないことが読み取れるため、同じく平方数にはなりえない。

$N=0$ の場合も、下 2 桁が 00 ではなく 10 のため、10 の倍数ではあるが 100 の倍数ではないことが読み取れる。よって平方数にはなりえない。

これで $N$ に入る数字は、$1,6,9$ の 3 択まで絞り込めた。

ここで、任意の自然数 $p$ において、$p^2 \equiv 0,1 (mod 4)$ である。

$N=1,9$ の場合の下 2 桁は $11,19$ となるが、これらは共に (与式)$\equiv 3 (mod 4)$ である。よって平方数にはなりえない。

これで $N=6$ まで絞り込むことができた。このときの与式は $K0616$ である。

ここで 16 の倍数判定法について考えてみる。4 の倍数判定法では、100 が 4 の倍数だから下 2 桁が 4 の倍数かどうかで判定できた。8 の倍数判定法が下 3 桁なのも、1000 が 8 の倍数だからである。これらから推測すると、10000 は 16 の倍数になるので、16 の倍数かどうかは下 4 桁が 16 の倍数かどうかで判定できると分かる。

与式 $(K0616)$ について考えると $616 = 8 \times 77$ より、下 3 桁は 8 の倍数だが下 4 桁は 16 の倍数ではない。よって与式も 8 の倍数ではあるが 16 の倍数ではないと分かる。したがって $N=6$ も平方数にはなりえない。

以上より、全ての $N$ について平方数になりえないことが示せたため、$K0N1N$ が平方数となる組 $(K,N)$ は存在しない。

## 問　題　42

《解答》
条件を満たす組 $(a, b, c, d)$ は存在しない
《解説》

$11^4 = 14641$ より、$a \leqq 10$。
$a \leqq 9$ の場合は、(与式) $< 9^4 + 8^3 \times 3 = 8097$ より不適

よって $a = 10$ が確定する。しかし、$2345 = b^3 + c^2 + d < 9^3 \times 3 = 2187$ より矛盾。
よって題意を満たす組 $(a, b, c, d)$ は存在しない。

## 問　題　43

その人物の年齢は、16 進数における 10 歳である。つまり、16 歳である。
よって答えは (c) 16 歳。

《コメント》
16 進数における 8 歳ではない。

## 問　題　44

(i) $p = 2$ のとき、

$$N = p^p + 1$$

$$= 2^2 + 1$$

$$= 5$$

となるはずだが、これは完全数ではないので不適。

(ii) $p > 2$ のとき、$p$ は奇数であり、ゆえに $N$ は偶数の完全数である。

よってヒントより、ある正の整数 $n$ が存在して

$$N = 2^n \left(2^{n+1} - 1\right)$$

と書けて、さらにこの $2^{n+1} - 1$ は素数である。

いま、

$$N = p^p + 1$$

$$= (p+1)\left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k p^k\right)$$

であるが、この総和の部分については

$$\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k p^k$$

$$\equiv \sum_{k=0}^{p-1} 1$$

$$= p$$

$$= 1 \pmod 2$$

である。

ゆえに

$$(p+1)\left(\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k p^k\right) = 2^n \left(2^{n+1} - 1\right) \quad (2^{n+1} - 1 \text{ は素数})$$

という等式において、右辺の素因数を左辺の積に分ける方法は

$$\text{(a)} \begin{cases} p + 1 = 2^n \left(2^{n+1} - 1\right) \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k p^k = 1 \end{cases}$$

と

$$\text{(b)} \begin{cases} p + 1 = 2^n \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} (-1)^k p^k = 2^{n+1} - 1 \end{cases}$$

の二通り以外ありえない。

(a) もし

$$(\mathrm{a})\begin{cases}p+1=2^n\left(2^{n+1}-1\right)\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k p^k=1\end{cases}$$

であったとすると、第二式から

$$\frac{p^p+1}{p+1}=1$$

となってしまい不適。

(b) 次に

$$(\mathrm{b})\begin{cases}p+1=2^n\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k p^k=2^{n+1}-1\end{cases}$$

であったとする。

このとき二つの式から

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k p^k=2(p+1)-1$$

が得られる。

(i) $p=3$ のとき、一番初めの

$$N=p^p+1$$

に $p=3$ を代入することで

$$N=28$$

が得られ、これは完全数であるから成り立つ。

(ii) $p>3$ のとき、

$$\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k p^k=2(p+1)-1$$

を変形して

$$\left|\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k p^k-(2(p+1)-1)\right|=0$$

でなければならない。

しかし、

$$\left|\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k p^k-(2(p+1)-1)\right|$$

$$=\left|\sum_{k=0}^{p-1}(-1)^k p^k-2p-1\right|$$

$$\geq p^{p-1}-\sum_{k=0}^{p-2}p^{k-2}-2p-1$$

$$\geq p^{p-1}-\sum_{k=0}^{p-2}p^{p-2}-2p^{p-3}-p^{p-3}$$

$$=p^{p-3}(p-3)$$

$$>0$$

であるから不適。

以上から、答えは

$$(p,N)=(3,28)$$

である。

【コメント】

$p$ が素数であることは重要ではなく、2 以外の素数が全て奇数であることしか用いていない。

最後の不等式評価は、0 より大きいと示すべき値が実際には巨大であるため、おおざっぱな評価で問題ない。

## 問　題　45

【解答】

存在しない

【解説】

与式を変形すると

$$
\begin{aligned}
\frac{777^a + 77^b + 7}{7} &= 7777777 \\
111 \times 777^{a-1} + 11 \times 77^{b-1} + 1 &= 7777777 \\
111 \times 777^{a-1} + 11 \times 77^{b-1} &= 7777776 \\
11 \times 77^{b-1} &= 7777776 - 111 \times 777^{a-1} \\
&= 3(2592592 - 37 \times 777^{a-1})
\end{aligned}
$$

右辺は明らかに 3 の倍数だが、左辺は 3 の倍数ではない。よってこのような組 $(a, b)$ は存在しない。

**問　題　46**

(i) $x \in \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ のとき、逐一確かめて

$$(x, y) = (-1, \pm 2),\ (2, \pm 2),\ (3, \pm 8)$$

のみが適する。

(ii) $x \notin \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ のとき、

$$\begin{aligned}&(-5x-2) - \left(-2x^2+1\right)\\ &= 2x^2 - 5x - 3\\ &= (2x+1)(x-3)\end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned}&\left(2x^2+1\right) - (-5x-2)\\ &= 2x^2 + 5x + 3\\ &= (2x+3)(x+1)\end{aligned}$$

であるから、

$$\left(x^2-1\right)^2 < x^4 - 5x - 2 < \left(x^2+1\right)^2$$

が成り立つ。

元の方程式より、これら三項はどれも平方数であるから、いま $x^2-1$ が正であることより

$$x^4 - 5x - 2 = x^4$$

となるはずである。

しかしこれは整数解をもたない。

よって、不適。

以上から、求める整数解は

$$(x, y) = (-1, \pm 2),\ (2, \pm 2),\ (3, \pm 8)$$

である。

# 問　題　47

《解答》

$[0.017256, 0.022744]$

《解説》

大国 A の国民のうちのエイリアンの割合を，$p$ とする．

調査した 10000 人のうちエイリアンの人数を確率変数 $X$ とおくと，0 以上 10000 以下の整数 $r$ に対し

$$P(X = r) = {}_n\mathrm{C}_r 10000r \cdot p^r \cdot (1-p)^{10000-r}$$

が成り立つ．

したがって，確率変数 $X$ は二項分布に従い，

- 期待値は $10000p$
- 分散は $10000p(1-p)$

が成り立つ．

今，10000 は大きいのでこの分布を正規分布と見なすことができる．

ゆえに，確率変数 $Z$ を

$$Z = \frac{X - 10000p}{\sqrt{10000p(1-p)}}$$

と定めるとこれは正規分布に従い，

- 期待値は 0
- 分散は 1

が成り立つ．

正規分布表によると

$$P(0 \leq Z \leq 1.96) = 0.4750$$

であるから

$$P\left(-1.96 \leq \frac{X - 10000p}{\sqrt{10000p(1-p)}} \leq 1.96\right) = 0.9500$$

つまり

$$P\left(\frac{X}{10000} - 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{10000}} \leq p \leq \frac{X}{10000} + 1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{10000}}\right) = 0.95$$

が成り立ち，10000 は大きいことから

$$P\left(\frac{X}{10000} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{X}{10000}\left(1 - \frac{X}{10000}\right)}{10000}} \leq p \leq \frac{X}{10000} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{X}{10000}\left(1 - \frac{X}{10000}\right)}{10000}}\right) = 0.95$$

としてよい．

したがって，10000 人の調査においてちょうど 200 人がエイリアンであったので，信頼度 95% の信頼区間は

$$\left[\frac{200}{10000} - 1.96\sqrt{\frac{\frac{200}{10000}\left(1 - \frac{200}{10000}\right)}{10000}}, \frac{200}{10000} + 1.96\sqrt{\frac{\frac{200}{10000}\left(1 - \frac{200}{10000}\right)}{10000}}\right]$$

すなわち

$$[0.017256, 0.022744]$$

である．

《解答》

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1,2) \\ 1 & (n=3) \\ 2 & (n=4) \\ 3n-11 & (n \geq 5) \end{cases}$$

《解説》

$n$ について数学的帰納法を用いる．

(i) 設定より
$$a_1 = 0$$
である．

(ii) 設定より
$$a_2 = 0$$
である．

(iii) $a_3$ について考えると．
$$a_1 + a_2 = 0$$
であるから，
$$a_3 = 1$$
である．

(iv) $a_4$ について考えると．
$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_3 = 1 \end{cases}$$
であるから，
$$a_4 = 2$$
である．

(v) $a_5$ について考えると，
$$\begin{cases} a_1 + a_2 = 0 \\ a_1 + a_3 = 1 \\ a_1 + a_4 = 2 \\ a_2 + a_3 = 1 \\ a_2 + a_4 = 2 \\ a_3 + a_4 = 3 \end{cases}$$
であるから，
$$a_5 = 4 = 3 \cdot 5 - 11$$
である．

(vi) 5 以上の自由な整数 $k$ について，$a_1$ から $a_k$ まで《解答》が正しいことを仮定し，$a_{k+1}$ について考える．
仮定より
$$a_k = 3k - 11$$

であるから,

$$\begin{cases} a_3 + a_k = 1 + (3k-11) = 3k-10 \\ a_4 + a_k = 2 + (3k-11) = 3k-9 \end{cases}$$

であるため,

$$a_{k+1} \geq 3k-8$$

が必要.

仮に，1 以上 $k$ 以下の整数 $i$,$j$ を用いて

$$a_i + a_j = 3k-8$$

と表せると仮定すると,

- $i \leq 4$ または $j \leq 4$ のとき

$$a_i + a_j \leq a_4 + a_k < 3k-8$$

  であるため矛盾

- $i \geq 5$ かつ $j \geq 5$ のとき

$$a_i + a_j \equiv 1 + 1 \not\equiv 3k-8 \pmod 3$$

  であるため矛盾

となってあり得ない.

ゆえに,

$$a_{k+1} = 3k-8 = 3(k+1)-11$$

である.

以上から，全ての正の整数 $n$ に対して

$$a_n = \begin{cases} 0 & (n=1,2) \\ 1 & (n=3) \\ 2 & (n=4) \\ 3n-11 & (n \geq 5) \end{cases}$$

が示された.

## 問 題 49

複素数平面で考える．複素数を $\alpha = re^{i\theta}$ とすると，$\alpha$ を反転した点は $\dfrac{e^{i\theta}}{r}$，これを $y$ 軸に関して対称移動させると，$\dfrac{e^{i(\pi-\theta)}}{r} = -\dfrac{1}{re^{i\theta}} = -\dfrac{1}{\alpha}$，これを $x$ 軸方向に 2 だけ平行移動させると，$2 - \dfrac{1}{\alpha}$ である．以上のことをふまえて問題の状態を整理すると以下のようになる．$\mathrm{C}_n$ 上の点を $\alpha_n$ とする．

$$\begin{cases} |\alpha_1| = 1 \\ \alpha_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{\alpha_n} \end{cases}$$

この漸化式は解くことができる．$\alpha_1 = 1$ のときは常に $\alpha_n = 1$ となるので，$\alpha_n \neq 1$ のときを考える．

$$\alpha_{n+1} - 1 = \frac{\alpha_n - 1}{\alpha_n}$$
$$\frac{1}{\alpha_{n+1} - 1} = \frac{\alpha_n}{\alpha_n - 1} = \frac{1}{\alpha_n - 1} + 1$$

よって，

$$\frac{1}{\alpha_n - 1} = \frac{1}{\alpha_1 - 1} + (n-1)$$

これを整理すると

$$\alpha_n = \frac{n\alpha_1 - n + 1}{(n-1)\alpha_1 - n + 2}$$

これは $\alpha_1 = 1$ のときに常に $\alpha_n = 1$ になることも満たしている．

$$\alpha_1 = \frac{(n-2)\alpha_n - n + 1}{(n-1)\alpha_n - n}$$

$|\alpha_1| = 1$ なので，

$$\begin{aligned}
|(n-1)\alpha_n - n| &= |(n-2)\alpha_n - n + 1| \\
((n-1)\alpha_n - n)\,\overline{((n-1)\alpha_n - n)} &= ((n-2)\alpha_n - n + 1)\,\overline{((n-2)\alpha_n - n + 1)} \\
(n-1)^2|\alpha_n|^2 - n(n-1)(\alpha_n + \overline{\alpha_n}) + n^2 &= (n-2)^2|\alpha_n|^2 - (n-1)(n-2)(\alpha_n + \overline{\alpha_n}) + (n-1)^2 \\
(2n-3)|\alpha_n|^2 - 2(n-1)(\alpha_n + \overline{\alpha_n}) &= -2n + 1 \\
\left(\alpha_n - \frac{2(n-1)}{2n-3}\right)\overline{\left(\alpha_n - \frac{2(n-1)}{2n-3}\right)} &= \frac{-2n+1}{2n-3} + \left(\frac{2(n-1)}{2n-3}\right)^2 = \frac{1}{(2n-3)^2} \\
\left|\alpha_n - \left(1 + \frac{1}{2n-3}\right)\right| &= \left|\frac{1}{2n-3}\right|
\end{aligned}$$

$\alpha_n$ の軌跡が $\mathrm{C}_n$ となるので，$\mathrm{C}_n$ は中心 $\left(1 + \dfrac{1}{2n-3}, 0\right)$，半径 $\left|\dfrac{1}{2n-3}\right|$ の円である．

## 問　題　50

《解答》

$a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}+1$

《方針》

右辺は $(a_n-1)^2$ に近い見た目をしているので，それを踏まえた変形を行う．

《解法》

数列 $b_1, b_2, b_3, \dots$ を

$$b_n=a_n-1$$

により定めると，この数列は漸化式

$$\begin{cases} b_1=3 \\ b_{n+1}=b_n^2-2 \end{cases}$$

に従う．

$b_n$ がある実数 $x$ を用いて

$$b_n=x+\frac{1}{x}$$

と表されたとすると，漸化式より

$$\begin{aligned} b_{n+1}&=b_n^2-2 \\ &=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2 \\ &=x^2+\frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

となる．

方程式

$$b_1=x+\frac{1}{x}$$

の解は

$$x=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

なので，これより

$$b_n=\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^{n-1}}+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

が得られる．

したがって，

$$a_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2^n}+1$$

と求められた．