מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים - 234129
תרגיל בית 2 – פתרון

סמסטר חורף 2023-2024

המתרגל האחראי על התרגיל: הילה זיו

תאריך הגשה: 22.02.24

נושאי התרגיל: יחסים, יחסי סדר ויחסי שקילות

הוראות לפתרון התרגיל:

- בכל מקרה בו אתם מתבקשים להוכיח, עליכם לכתוב הוכחה פורמלית מלאה. עליכם לפרט את כל שלבי הפתרון.
- בכל מקרה בו אתם מנסים להפריך, נסו למצוא דוגמה נגדית קצרה ופשוטה ככל האפשר. זכרו (1) להגדירה במפורש, (2) להוכיח כי היא מקיימת את הנתונים, ו-(3) להוכיח כי אינה מקיימת את מסקנת הטענה.
- אם נדרש הסבר או נימוק בלבד, עליו להיות קצר אך בעל מבנה כללי של הוכחה (למשל הסבר/נימוק מדוע שתי קבוצות שוות צריך לכלול שני כיווני הכלה, וכו').

הוראות הגשה:

- ההגשה אלקטרונית דרך אתר הקורס.
- יש להגיש קובץ PDF בלבד.
- על הפתרון להיות **מוקלד!** אין להגיש פתרונות בכתב יד. איורים וציורים ניתן לצייר ביד.
- ההגשה היא בקבוצות של 3 סטודנטים.

תזכורת: הבדיקה היא מדגמית, ראו את סכמת הציונים באתר הקורס.

בהצלחה!

שאלה 1

תהיינה A ו־B קבוצות. יהי S יחס דו־מקומי מעל A ויהי T יחס דו־מקומי מעל B.

נגדיר יחס דו־מקומי R מעל $A \times B$:

$$R = \{((a,b),(c,d)) \mid (a,c) \in S \text{ וגם } (b,d) \in T\}$$

(א) הוכיחו: אם S ו־T יחסי שקילות, אז R יחס שקילות.

(ב) הוכיחו: אם S ו־T יחסי סדר, אז R יחס סדר.

פתרון שאלה 1

(א) נניח כי S ו- T הם יחסי שקילות, כלומר הם רפלקסיביים, סימטריים וטרנזיטיביים.

נוכיח כי R יחס שקילות לפי ההגדרה:

- **רפלקסיביות:** יהא $(a,b) \in A \times B$. מרפלקסיביות היחסים S,T מתקיים כי $(a,a) \in S \wedge (b,b) \in T$ ומהגדרת היחס R נובע כי $((a,b),(a,b)) \in R$, כנדרש.
- **סימטריה:** יהיו $(a,b),(c,d) \in A \times B$ ונניח כי $((a,b),(c,d)) \in R$. אזי מהגדרת היחס R נובע כי $(a,c) \in S \wedge (b,d) \in T$. כעת מסימטריות היחסים S,T מתקיים כי $(c,a) \in S \wedge (d,b) \in T$. לבסוף מהגדרת R מתקיים כי $((c,d),(a,b)) \in R$, כנדרש.
- **טרנזיטיביות:** יהיו $(a,b),(c,d),(e,f) \in A \times B$ ונניח כי $((a,b),(c,d)) \in R$ וגם $((c,d),(e,f)) \in R$.
אזי מהגדרת היחס R נובע כי $(a,c) \in S \wedge (b,d) \in T$ וגם $(c,e) \in S \wedge (d,f) \in T$.
בפרט קיבלנו כי $(a,c),(c,e) \in S$ ולכן מטרנזיטיביות היחס S מתקיים כי $(a,e) \in S$.
באופן דומה, קיבלנו כי $(b,d),(d,f) \in T$ ומטרנזיטיביות היחס T מתקיים כי $(b,f) \in T$.
לבסוף, מהגדרת היחס R נובע כי $((a,b),(e,f)) \in R$, כנדרש.

(ב) נניח כי S ו- T הם יחסי סדר, כלומר הם רפלקסיביים, אנטי-סימטריים וטרנזיטיביים.

נוכיח כי R יחס סדר לפי ההגדרה:

נשים לב כי ההוכחה עבור רפלקסיביות וטרנזיטיביות זהה לסעיף א. לכן נוכיח רק אנטי-סימטריה:

- **אנטי־סימטריות:** יהיו $(a,b),(c,d) \in A \times B$ ונניח כי $((a,b),(c,d)) \in R$ וגם $((c,d),(a,b)) \in R$. נרצה להראות כי $(a,b) = (c,d)$. ואמנם, מהגדרת היחס R נובע כי $(a,c) \in S \wedge (b,d) \in T$ וגם $(c,a) \in S \wedge (d,b) \in T$. בפרט קיבלנו כי $(a,c),(c,a) \in S$ ולכן מאנטי-סימטריה של S מתקיים כי $a = c$. באופן דומה, קיבלנו כי $(b,d),(d,b) \in T$ ולכן מאנטי-סימטריה של T מתקיים כי $b = d$. סה"כ נובע כי $(a,b) = (c,d)$, כנדרש.

שאלה 2

תהי $A \neq \emptyset$ קבוצה ויהי $R \subseteq A \times A$ יחס דו־מקומי מעל A.

תהא $B = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$, ונגדיר יחס S מעל B:

$$S = \{(X,Y) \in B \times B \mid \exists x \in X,\ \exists y \in Y : (x,y) \in R\}$$

(א) הוכיחו / הפריכו: אם R רפלקסיבי, אז S רפלקסיבי.

(ב) הוכיחו / הפריכו: אם R סימטרי, אז S סימטרי.

(ג) הוכיחו / הפריכו: אם R טרנזיטיבי, אז S טרנזיטיבי.

פתרון שאלה 2

ראשית, נשים לב כי כיוון ש- $A \neq \emptyset$ ו- $A \subseteq A$ אז מהגדרת קבוצת חזקה והגדרת חיסור קבוצות מתקיים $A \in \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$. לכן מהגדרת B מתקיים כי $A \in B$ ומכאן נובע כי $B \neq \emptyset$.

(א) הוכחה: נניח כי R רפלקסיבי. יהא $X \in B$. נזכור כי $B = \mathcal{P}(A) \setminus \{\emptyset\}$ לכן מתקיים כי $X \neq \emptyset$ וגם $X \subseteq A$. אזי קיים $x \in X$ ומהגדרת הכלה $x \in A$. מרפלקסיביות היחס R (שהוגדר מעל הקבוצה A) מתקיים כי $(x,x) \in R$ ולכן מהגדרת S מתקיים $(X,X) \in S$, כנדרש.

(ב) הוכחה: נניח כי R סימטרי. יהיו $X,Y \in B$ ונניח כי $(X,Y) \in S$. אזי מהגדרת היחס S קיימים $x \in X, y \in Y$ כך ש- $(x,y) \in R$. מסימטריות R נובע כי $(y,x) \in R$ ולכן מהגדרת S מתקיים $(Y,X) \in S$, כנדרש.

(ג) הפרכה: ראשית נתחיל מאינטואיציה למה הטענה לא חייבת להיות נכונה. נניח כי $X,Y,Z \in B$ ומתקיים כי $(X,Y),(Y,Z) \in S$. אזי מהגדרת היחס S קיימים $x \in X, y_1, y_2 \in Y, z \in Z$ כך שמתקיים $(x,y_1) \in R \wedge (y_2,z) \in R$. שימו לב שאם $y_1 \neq y_2$ אין לנו דרך להשתמש בטרנזיטיביות R כדי להסיק משהו על S. לכן זוהי בדיוק "החולשה" בטענה ונבנה דוגמה נגדית שתקיים את המצב לעיל. נגדיר: $A = \{0,1,2\}$ ואת R להיות היחס $<$ שהוא יחס הסדר החזק הרגיל שאתם מכירים. עבור בחירת הקבוצות נזכור כי נרצה שהקבוצה Y תכיל לפחות שני איברים שונים. נבחר את הקבוצות באופן הבא: $X = Z = \{1\}, Y = \{0,2\}$. נשים לב כי אלו אכן קבוצות לא ריקות המקיימות $X,Y,Z \subseteq A$ ולכן $X,Y,Z \in B$. בנוסף נשים לב כי

$$1 < 2 \Rightarrow (1,2) \in R \Rightarrow (X,Y) \in S$$

$$0 < 1 \Rightarrow (0,1) \in R \Rightarrow (Y,Z) \in S$$

אבל $1 \not< 1$ ולכן לא קיימים $x \in X, z \in Z$ כך ש- $(x,z) \in R$ ומהגדרת S נובע $(X,Z) \notin S$. לכן, S לא יחס טרנזיטיבי, כפי שרצינו.

שאלה 3

תהי A קבוצה ויהי R יחס דו־מקומי מעל A.

נאמר ש־R **אידמפוטנטי** אם $R^2 = R$.

(א) הוכיחו: אם R אידמפוטנטי, אז $R^k = R$ לכל $k \geq 1$ טבעי.

(ב) הוכיחו: אם R יחס שקילות, אז R אידמפוטנטי.

(ג) הוכיחו / הפריכו: אם R אידמפוטנטי, אז R יחס שקילות.

פתרון שאלה 3

(א) נניח כי R אידמפוטנטי ונוכיח את הטענה באינדוקציה על $k \geq 1$ טבעי.

בסיס: עבור $k = 1$ מתקיים מהגדרת חזקות של יחסים $R^1 = R \circ I = R$, כנדרש.

הנחה: נניח כי $R^k = R$ עבור k כלשהו ונראה נכונות עבור $k+1$:

צעד:

$$R^{k+1} =^1 R \circ R^k =^2 R \circ R =^3 R^2 =^4 R$$

כאשר מעבר 1 נובע מהגדרת חזקות של יחסים, מעבר 2 נובע מהנחת האינדוקציה, מעבר 3 נובע מהגדרת חזקות של יחסים ומעבר 4 נובע מההנחה כי R אידמפוטנטי.

כנדרש.

(ב) נניח כי R יחס שקילות. נזכור כי לפי הגדרת הרכבת יחסים מתקיים

$$R^2 = \{(a,c) \in A \times A \mid \exists b \in A : (a,b) \in R \land (b,c) \in R\}$$

אם $R = \emptyset$ אז מהגדרת הרכבת יחסים נובע כי $R^2 = \emptyset$ ולכן $R^2 = R$. אחרת $R \neq \emptyset$ ונראה $R^2 = R$ בהכלה דו-כיוונית:

- $R \subseteq R^2$: יהא $(a,c) \in R$. מכך ש R יחס מעל הקבוצה A נובע כי $a, c \in A$. נסמן $b = c$. אזי $b \in A$ וכן $(a,b) \in R$. בנוסף, מרפלקסיביות R כיחס שקילות מתקיים $(b,c) = (c,c) \in R$. כלומר הראנו כי $\exists b \in A : (a,b) \in R \land (b,c) \in R$ ולכן $(a,c) \in R^2$, כנדרש. משרירותיות (a,c) והגדרת הכלה נסיק כי $R \subseteq R^2$.
- $R^2 \subseteq R$: יהא $(a,c) \in R^2$. אזי מהגדרת R^2 קיים $b \in A$ כך שמתקיים $(a,b) \in R \land (b,c) \in R$. מטרנזיטיביות היחס R כיחס שקילות מתקיים כי $(a,c) \in R$, כנדרש. משריריותיות (a,c) ומהגדרת הכלה נסיק $R^2 \subseteq R$.

כעת מההכלה הדו-כיוונית נסיק כי $R^2 = R$.

הראנו כי בכל מקרה מתקיים ש- $R^2 = R$ ולכן מהגדרת אידמפוטנטיות נובע כי R אידמפוטנטי, כנדרש.

(ג) הפרכה: ראשית, על מנת לקבל אינטואיציה נחשוב אלו מהתכונות של יחס שקילות חייבות להתקיים עבור R אם בכלל. לאחר שנתבונן בהגדרה של R^2 נוכל להסיק כי R חייב לקיים טרנזיטיביות, שכן בהנתן $a,b,c \in A$ כך שמתקיים $(a,b),(b,c) \in R$ אז מהגדרת R^2 נובע $(a,c) \in R^2$ ומההנחה ש R אידמפוטנטי נקבל מהגדרת שוויון כי $(a,c) \in R$, וזוהי בדיוק ההגדרה לטרנזיטיביות (הזכרו שראינו טענה דומה בתרגול 3 שאלה 2 סעיף 3). בנוגע לתכונות הרפלקסיביות והסימטריה, אין דרך להסיק שהן חייבות להתקיים אם R אידמפוטנטי. לכן נוכל לחשוב שיש להפריך את הטענה ונחפש דוגמה נגדית של יחס R שהוא כן טרנזיטיבי אבל לא יקיים לפחות אחד מבין רפלקסיביות וסימטריה. נציע את הדוגמה הנגדית הבאה: $A = \{0\}$ ו $R = \emptyset$ נשים לב כי זהו יחס טרנזיטיבי וסימטרי (באופן ריק) אך לא רפלקסיבי כי $0 \in A \wedge (0,0) \notin R$ ולכן אינו יחס שקילות. נותר רק להראות כי $R^2 = R$. ואמנם, מתקיים מהגדרת הרכבת יחסים כי $R^2 = R \circ R = \emptyset \circ \emptyset = \emptyset$ שכן אין אף זוג איברים ב A שנמצא ביחס R. לכן קיבלנו $R^2 = R$, כלומר R אידמפוטנטי. סה"כ הראנו דוגמה ליחס אידמפוטנטי שאינו יחס שקילות, לכן הטענה לא בהכרח נכונה.