מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים – 234129
תרגיל בית 3 – פתרון

סמסטר חורף 2023-2024

המתרגל האחראי על התרגיל: אדם נייס

תאריך הגשה: 14.03.24

נושאי התרגיל: פונקציות, עוצמות ושקילות קבוצות, קבוצות בנות־מנייה, שיטת הלכסון

הוראות לפתרון התרגיל:

- בכל מקרה בו אתם מתבקשים להוכיח, עליכם לכתוב הוכחה פורמלית מלאה. עליכם לפרט את כל שלבי הפתרון.
- בכל מקרה בו אתם מנסים להפריך, נסו למצוא דוגמה נגדית קצרה ופשוטה ככל האפשר. זכרו (1) להגדירה במפורש, (2) להוכיח כי היא מקיימת את הנתונים, ו-(3) להוכיח כי אינה מקיימת את מסקנת הטענה.
- אם נדרש הסבר או נימוק בלבד, עליו להיות קצר אך בעל מבנה כללי של הוכחה (למשל הסבר/נימוק מדוע שתי קבוצות שוות צריך לכלול שני כיווני הכלה, וכו').

הוראות הגשה:

- ההגשה אלקטרונית דרך אתר הקורס.
- יש להגיש קובץ PDF בלבד.
- על הפתרון להיות **מוקלד**! אין להגיש פתרונות בכתב יד. איורים וציורים ניתן לצייר ביד.
- ההגשה היא בקבוצות של 3 סטודנטים.

תזכורת: הבדיקה היא מדגמית, ראו את סכמת הציונים באתר הקורס.

בהצלחה!

שאלה 1

תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר פונקציה $F : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך: לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$F(n) = \{f(m) \mid m \in \mathbb{N},\ m \leq n\}$$

(א) <u>תנו דוגמה</u> לפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שהיא על ואינה חח"ע, וחשבו עבורה את $F(5)$.

(ב) <u>הוכיחו</u>: אם f חח"ע, אז F חח"ע.

(ג) <u>הוכיחו / הפריכו</u>: אם F חח"ע, אז f חח"ע.

(ד) <u>הוכיחו / הפריכו</u>: אם f על, אז F על.

פתרון שאלה 1

(א) כדי שפונקציה תהיה **לא** חח"ע, נרצה שלפחות שני איברים i, j יישלחו לאותו איבר. לדוגמה, נוכל לוודא ש־$f(0) = f(1)$. ניעזר בשאר המקורות $\{2, 3, 4, ...\}$ על מנת "לפגוע" בשאר הטווח. נגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 1 \\ x - 2, & x > 1 \end{cases}$$

מתקיים $f(0) = f(1)$, ולכן f אינה חח"ע. לכל $y \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(y+2) = y$ ולכן f על.

$$F(5) = \{f(m) \mid m \in \mathbb{N},\ m \leq 5\} = \{f(0), f(1), f(2), f(3), f(4), f(5)\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

(ב) נניח כי f חח"ע, ויהיו $i, j \in \mathbb{N}$ כך ש־$j \neq i$. נניח בה"כ ש־$i > j$, ונראה כי $F(i) \neq F(j)$.

מרפלקסיביות היחס $\leq$ נובע $i \leq i$, אזי מהגדרת F מתקיים $f(i) \in F(i)$.

מאחר ש־$i > j$, **לא** מתקיים $i \leq j$, אז מהגדרת F מתקיים $f(i) \notin F(j)$.

נסיק כי $F(i) \neq F(j)$, ולכן F חח"ע.

(ג) הטענה נכונה.

נניח בשלילה ש־f אינה חח"ע, אזי קיימים $i, j \in \mathbb{N}$ שונים, בה"כ $i > j$, כך ש־$f(i) = f(j)$.

אינטואיטיבית, $F(i)$ לא מחדש כלום כי $F(j)$ הוסיף כבר את $f(i)$, שהוא בדיוק $f(j)$. פורמלית, נוכיח כי $F(i-1) = F(i)$.

$$\begin{aligned} F(i) &= \{f(m) | m \in \mathbb{N},\ m \leq i\} \\ &= \{f(m) | m \in \mathbb{N},\ m \leq i-1\} \cup \{f(i)\} \\ &= F(i-1) \cup \{f(j)\} = F(i-1) \end{aligned}$$

כאשר השוויון האחרון נובע מכך ש־$f(j) \in F(i-1)$ מאחר ש־$j \leq i-1$.

קיבלנו אפוא כי F אינה חח"ע, בסתירה לנתון, ולכן הנחת השלילה שגויה ו־f חח"ע.

(ד) הטענה אינה נכונה.

פונקציית הזהות $f(x) = x$ היא בוודאי על, אולם כל קבוצה $F(i)$ היא מן הצורה $F(i) = \{0, 1, 2, \ldots, i\}$, ובפרט איננה ריקה. כלומר, לא קיים איבר $i \in \mathbb{N}$ כך ש־$F(i) = \emptyset$.

שאלה 2

תהיינה A, B, C קבוצות. נתון כי $|A| = |B|$.

<u>הוכיחו</u> כי $|A^C| = |B^C|$.

<u>תזכורת</u>: Y^X היא קבוצת כל הפונקציות מ־X ל־Y.

פתרון שאלה 2

נתון כי $|A| = |B|$, ולכן קיימת פונקציה חח"ע ועל $f : A \to B$.

נוכיח כי קיימת פונקציה חח"ע ועל $h : A^C \to B^C$. לכל $g : C \to A$ נגדיר

$$h(g) = f \circ g$$

h מוגדרת היטב בשל היותה הרכבה של שתי פונקציות. נוכיח כי היא חח"ע ועל.

<u>h חח"ע</u>: תהיינה $g_1, g_2 \in A^C$ כך ש־$h(g_1) = h(g_2)$. נוכיח $g_1 = g_2$.

f הפיכה, לכן קיימת הפונקציה ההופכית $f^{-1} : B \to A$.

$$h(g_1) = f \circ g_1 = f \circ g_2 = h(g_2)$$

נרכיב משמאל את f^{-1} על שני הצדדים, ומאסוציאטיביות הרכבה ותכונות הופכית נקבל:

$$f^{-1} \circ (f \circ g_1) = f^{-1} \circ (f \circ g_2)$$
$$(f^{-1} \circ f) \circ g_1 = (f^{-1} \circ f) \circ g_2$$
$$I_A \circ g_1 = I_A \circ g_2$$
$$g_1 = g_2$$

<u>h על</u>: תהי $k \in B^C$. נוכיח שקיימת $g \in A^C$ כך ש־$h(g) = k$.

נגדיר $g = f^{-1} \circ k$. כמו קודם, נקבל $h(g) = f \circ (f^{-1} \circ k) = k$.

הוכחנו קיום פונקציה חח"ע ועל מ־A^C ל־B^C, ולכן הן שוות־עוצמה.

שאלה 3

פונקציה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ נקראת **מחזורית** אם קיים $p\geq 1$ טבעי כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f(n)=f(n+p)$.

(א) הוכיחו / הפריכו: לכל $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, אם $f\circ f$ מחזורית, אז f מחזורית.

(ב) הוכיחו שהקבוצה הבאה בת־מנייה:

$$X=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \mid f \text{ מחזורית}\}$$

(ג) הוכיחו באמצעות לכסון שהקבוצה הבאה אינה בת־מנייה:

$$Y=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \mid f \textbf{ אינה} \text{ מחזורית}\}$$

פתרון שאלה 3

(א) הטענה אינה נכונה.

נתבונן בפונקציה המוגדרת על ידי

$$f(n)=\begin{cases}0 & n \text{ זוגי} \\ 2n & n \text{ אי-זוגי}\end{cases}$$

f אינה מחזורית, כי לכל $p\geq 1$ מתקיים:

$$f(p+1+p)=f(2p+1)=2(2p+1)>2(p+1)\geq \underbrace{f(p+1)}_{2(p+1) \text{ או } 0}$$

כלומר המספר $n=p+1$ מקיים $f(n)\neq f(n+p)$.

הפונקציה $f\circ f$ לעומת זאת אכן מחזורית עם $p=1$, שכן לכל $n\in N$ מתקיים $f(f(n))=0$ ובפרט $f(f(n+1))=f(f(n))$.

(ב) נבנה את הקבוצה לעיל כאיחוד בן־מנייה של קבוצות בנות־מנייה.
נראה כי עבור $p\geq 1$ קבוצת הפונקציות בעלות מחזור p היא בת־מנייה:

$$X_p=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \mid \forall n\in\mathbb{N}\ f(n+p)=f(n)\}$$

הנ"ל נובע מכך שמספיק לקבוע את p הערכים הראשונים על מנת לקבוע את כל הפונקציות הללו.
נראה כי $|X_p|\leq|\mathbb{N}^p|$ באמצעות הפונקציה

$$\phi(f)=(f(0),f(1),...,f(p-1))$$

קל לוודא שזו אכן פונקציה, נראה חח"ע:
יהיו $f,g\in X_p$, ונניח ש-$\phi(f)=\phi(g)$. יהי $i\in\mathbb{N}$, נראה $f(i)=g(i)$:
נתבונן ב-$j=i \mod p$, כלומר $j<p$ כך ש- $j+p+...+p=i$.

אז $f(j)$ הוא האיבר ה-j ב-$\phi(f)$ ומהנחתנו זהו האיבר ה-j ב-$\phi(g)$ כלומר $g(j)$.
על כן
$$f(i) = f(j + p + ... + p) = f(j) = g(j) = g(j + p + ... + p) = g(i)$$
כלומר $f(i) = g(i)$, זה נכון לכל $i \in \mathbb{N}$ ועל כן $f = g$ כנדרש. אז $|X_p| \leq |\mathbb{N}^p|$ ומכיוון ש-$\mathbb{N}^p$ בת מנייה כך גם X_p. עתה מתקיים:
$$X = \bigcup_{p \geq 1} X_p$$
(הוכחה פשוטה על ידי הכלה דו כיוונית).
ואכן קיבלנו איחוד בן מניה של קבוצות בנות־מנייה, כנדרש.

(ג) נניח בשלילה ש־Y בת־מנייה.

לפי הגדרה, קיימת פונקציה חח"ע מ־Y ל־$\mathbb{N}$. לפי משפט, קיימת פונקציה על $g : \mathbb{N} \to Y$.

לכל $i \in \mathbb{N}$ נסמן $g_i = g(i)$.

נגדיר:
$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ g_{n-1}(n) + 1, & n > 0 \end{cases}$$

f מוגדרת היטב (נמקו).

לכל $p \geq 1$ מתקיים $f(0 + p) = f(p) = f_{n-1}(n) + 1 > 0 = f(0)$, אזי f אינה מחזורית, כלומר $f \in Y$.

לכל $i \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(i + 1) = f_i(i + 1) + 1 \neq f_i(i + 1)$ ועל כן $f \neq f_i$, כלומר $f \notin Y$.

הגענו לסתירה, ועל כן Y אינה בת־מנייה.

שאלה 4

תהי $\mathbb{Z}$ קבוצת המספרים השלמים.

נסמן: $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ ו־$\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.

הוכיחו באמצעות לכסון שהקבוצה הבאה אינה בת־מנייה:

$$\left\{X \subseteq \mathbb{Z} \mid X \subseteq \mathbb{Z}^+ \text{ או } X \subseteq \mathbb{Z}^-\right\}$$

פתרון שאלה 4

נסמן ב־Y את הקבוצה, ונניח בשלילה שהיא בת־מנייה.

לפי הגדרה, קיימת פונקציה חח"ע מ־Y ל־$\mathbb{N}$. לפי משפט, קיימת פונקציה על $g : \mathbb{N} \to Y$.

לכל $i \in \mathbb{N}$ נסמן $g(i) = X_i$.

נגדיר קבוצה באופן הבא:
$$X := \{i \in \mathbb{Z}^+ \mid i \notin X_{i-1}\}$$

מהתנאי $i \in \mathbb{Z}^+$ נובע ש-$X \subseteq \mathbb{Z}^+$ ועל כן $X \subseteq Y$.

לכל X_i מתקיים: אם $i \in X_{i-1}$ אז $i \notin X$ ואם $i \notin X_{i-1}$ אז $i \in X$, בפרט $X \neq X_{i-1}$ לכל $i \in \mathbb{Z}^+$, כלומר $X \neq X_i$ לכל $i \in \mathbb{N}$.

הגענו לסתירה, ועל כן Y אינה בת־מנייה.

שאלה 5

תהי $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} = a_0, a_1, a_2, ...$ סדרה של מספרים טבעיים.

(א) נאמר ש־$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ **סדרה מתקבעת** אם קיים $i \in \mathbb{N}$ כך שלכל $j \in \mathbb{N}$, אם $j > i$ אז $a_i = a_j$.

נסמן ב־X את קבוצת כל הסדרות המתקבעות של הטבעיים.

הוכיחו: X בת־מנייה.

(ב) נאמר ש־$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ **סדרה מגוונת** אם לכל $i, j \in \mathbb{N}$, אם $j \neq i$ אז $a_i \neq a_j$.

נסמן ב־Y את קבוצת כל הסדרות המגוונות של הטבעיים.

הוכיחו באמצעות לכסון ש־Y אינה בת־מנייה.

פתרון שאלה 5

(א) פתרון ראשון - באמצעות איחוד בן־מנייה של קבוצות בנות־מנייה:
נגדיר את הקבוצה X_i כקבוצת כל הסדרות של טבעיים אשר קבועות החל מהאיבר ה־i, כלומר:

$$X_i := \{\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} \mid \forall j > i : \ a_j = a_i\}$$

נראה כי $|X_i| \leq |\mathbb{N}^{i+1}|$ באמצעות הפונקציה $f(\{a_i\}) = (a_0, a_1, ..., a_i)$. הפונקציה מוגדרת היטב (נמקו).

נראה חח"ע: תהיינה $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}, \{b_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ סדרות ב־X_i כך ש־$f(\{a_i\}) = f(\{b_i\})$, אז לכל $j \leq i$ מתקיים מהגדרת f ש-$a_j = f(\{a_i\})_j = f(\{b_i\})_j = b_j$, ולכל $j > i$ מתקיים מהגדרת X_i ש־$a_j = a_i = b_i = b_j$ - כלומר $\{a_i\} = \{b_i\}$ כנדרש.
אז X_i בת־מנייה לכל i ולכן $X = \bigcup\limits_{i\in\mathbb{N}} X_i$ היא בת־מנייה כאיחוד בן־מנייה של קבוצות בנות־מנייה.

העשרה - פתרון נוסף על ידי הגדרת פונקציה חח"ע ישירה:
לכל $\{a_i\} \in X$ נסמן ב-$j_{\{a_i\}}$ את ה-j המינימלי כך שהחל ממנו $\{a_i\}$ קבועה. ניעזר בכך שכל מספר טבעי ניתן להצגה יחידה כמכפלת ראשוניים $\Pi p_i^{r_i}$. תהיה $p_0, p_1, ...$ מניה של המספרים הראשוניים. נגדיר פונקציה $f : X \to \mathbb{N}$ על ידי:

$$f(\{a_i\}) = \prod_{i=0}^{j_{\{a_i\}}} p_i^{a_i}$$

הפונקציה לעיל בוודאי מוגדרת היטב. נותיר לכם להראות כי עבור שתי סדרות מתקבעות שונות יתקבלו מספרים טבעיים שונים...

(ב) נניח בשלילה ש־Y בת־מנייה.

לפי הגדרה, קיימת פונקציה חח"ע מ־Y ל־$\mathbb{N}$. לפי משפט, קיימת פונקציה על $g : \mathbb{N} \to Y$.

נגדיר סדרה באופן הבא:

$$c_n = \begin{cases} g(0)_0 + 1 & n = 0 \\ g(n)_n + c_{n-1} + 1 & n > 0 \end{cases}$$

כלומר, כל איבר גדול ב־1 מהסכום של האיבר הקודם והאיבר המתאים בסדרה $g(n)$.

נשים לב ש־$c_{n+1} > c_n$ לכל $n \in \mathbb{N}$, כלומר $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ מונוטונית עולה ממש ולכן מגוונת.

לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $c_n > g(n)_n$ ולכן $c \neq g(n)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

קיבלנו סתירה, ולכן Y אינה בת־מנייה.

פתרון נוסף:

$$c_n = \begin{cases} 2n & g(n)_n \neq 2n \\ 2n + 1 & g(n))_n = 2n \end{cases}$$