מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים למדמ"ח
234129
תרגיל בית 4

לין אליאס
213473861

אמיר
325477784

וסים
214363315

שאלה 1:

סעיף א:

הטענה נכונה.
נתון שL שפה חיונית מסוג 1 **וצ"ל** שL שפה חיונית מסוג 2.
הוכחה:
יהי $w \in \Sigma^*$, נגדיר מילה $u \in \Sigma^*$ ומקיימת גם $u \in L$.

$\Leftarrow$ $u \in L \wedge w \in \Sigma^*$
$\Downarrow$ הגדרת שרשור
$w \cdot u \in \Sigma^* \cdot L$
$\Downarrow$ L שפה חיונית מסוג 1
$wu \in L$

$\Leftarrow$ הראנו שלכל מילה $w \in \Sigma^*$ קיימת $u \in \Sigma^*$ כך ש $wu \in L$ וזו בעצם הגדרת שפה חיונית מסוג 2.

סעיף ב:

לא נכון, נתן דוגמה נגדית:
נגדיר את השפה L: כך שלכל $L = \{\omega | \forall a \in \Sigma$ זוגי $\#_a\}$
נוכיח למה זאת שפה חיונית מסוג 2
לכל $u \in \Sigma^*$ קיים $x \in \Sigma^*$ כך ש $u \bullet x \in L$
הוכחה:
אם $\#_u$ זוגי אז המילה שייכת ל ω לכן נבחר $x = \varepsilon$ ואז מתקיים $u * x = \varepsilon * \#_u = \#_u$ ($\#_u$ זוגי)
אם $\#_u$ אי זוגי אז ניקח x להיות מילה כלשהי ב Σ^* ואז אם הייה $\#_x$ אי זוגי אז $\#_u * \#_x$ זוגי לכן שייך ל L, ואם הייה $\#_x$ זוגי אז גם מתקיים $\#_u * \#_x$ זוגי לכן שייך ל L.
שפה זו אינה שפה חיונית מסוג 1:
ניקח $w \in L$ כך ש $\#_w$ זוגי אז אם ניקח $x \in \Sigma^*$ כך ש $\#_x$ אי זוגי, מתקיים $x \bullet L$ אז מתקיים $\#_{x \bullet L}$ הוא אי זוגי לכן היא לא שפה חיונית מסוג 1.

שאלה 2:

L שפה מעל א"ב Σ : $L^{+} = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^{i}$

צ"ל : $L = L^{+} \Leftrightarrow L^{2} \subseteq L$

הוכחה :

כיוון ראשון $\Rightarrow$

נתון : $L = L^{+}$

נוכיח ש $L^{2} \subseteq L$ כלומר לכל $u \in L^{2}$ מתקיים ש $u \in L$

יהי $u \in L^{2}$

$\Downarrow$ מהנתון ש ..... $L^{+} = L^{1} \cup L^{2} \cup L^{3}$

$u \in L^{+}$

$\Downarrow$ מהנתון ש $L^{+} = L$

$u \in L$

כיוון שני $\Leftarrow$

נתון : $L^{2} \subseteq L$

נוכיח ש $L = L^{+}$ כלומר נוכיח הכלה דו-כיוונית

- נוכיח טענת עזר: אם $L^{2} \subseteq L$ אז $L^{i+1} \subseteq L^{i}$ $\forall i \geq 1$, נוכיח הטענה באינדוקציה:

<u>בסיס:</u> עבור $i = 1$ מתקיים מהנתון ש $L^{2} \subseteq L$

<u>צעד:</u> נניח שמתקיים $L^{i+1} \subseteq L^{i}$ $\forall i \geq 1$

ונוכיח שמתקיים גם $L^{i+2} \subseteq L^{i+1}$

$\Leftarrow$

יהיו $u \cdot v \in L^{i+2}$

$\Downarrow$ הגדרת חזקה

$u \cdot v \in L^{i+1} \cdot L$

$\Downarrow$ הגדרת שרשור

$u \in L^{i+1} \wedge v \in L$

$\Downarrow$ הנחת האינדוקציה

$u \in L^{i} \wedge v \in L$

$\Downarrow$ הגדרת שרשור

$u \cdot v \in L^{i+1}$

הוכחנו את הטענה.

לפי טענת העזר מתקיים מהנתון ...... $L \supseteq L^{2} \supseteq L^{3} \supseteq L^{4}$

ואז מתקיים לפי הגדרת איחוד ש $L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i = L$ ואז $L = L^+$

■

שאלה 3:

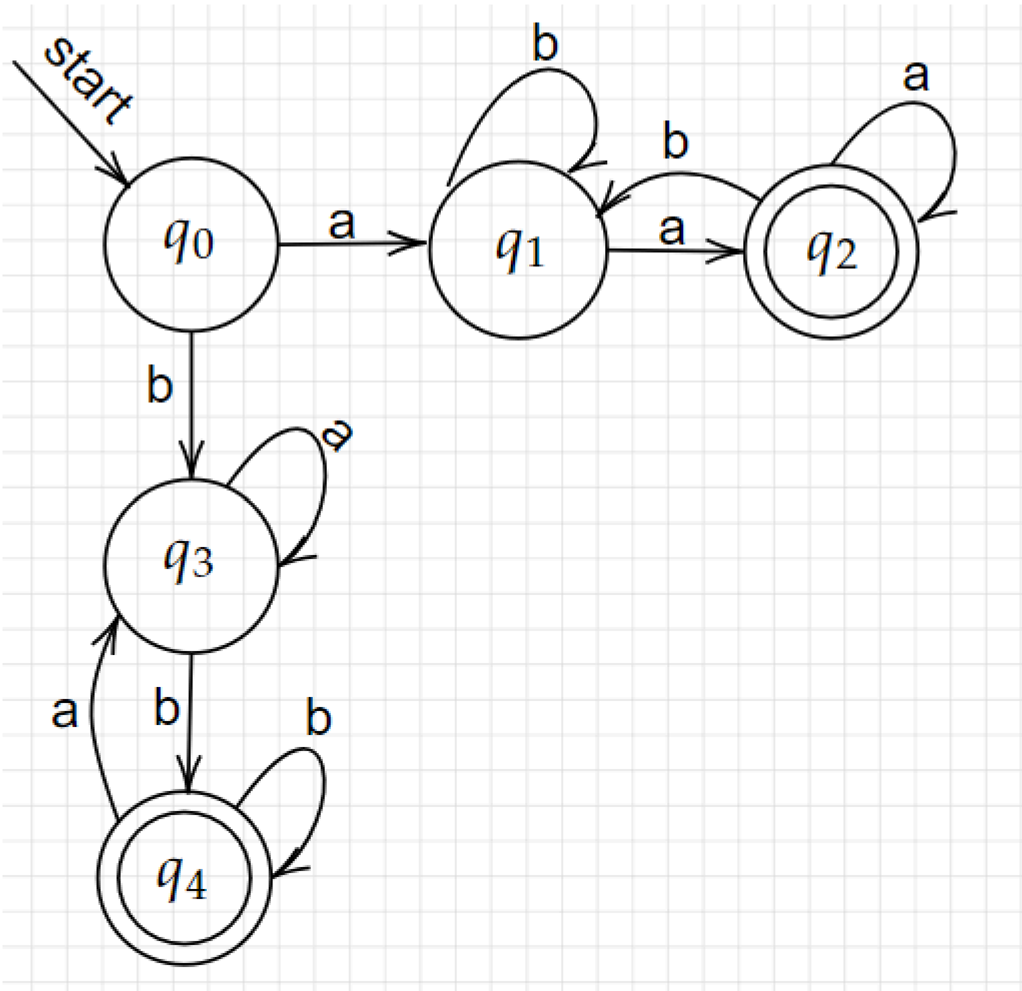
סעיף א :-

$L_1 \;=\; \{\sigma\omega\sigma \,|\, \sigma \in \Sigma \,,\; \omega \;\in \Sigma^* \}$

נבנה אוטומט באופן הבא:

$$A \;=\{Q \,,\, \Sigma,\; q_{0_4},\; \delta \,, F\}$$

$Q \;=\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ $\qquad F \;=\{q_2, q_4\}$ $\qquad \Sigma \;=\{a, b\}$



האוטומט מרוכב מחמשה מצבים q_0, q_1, q_2, q_3, q_4 . שנים מהם הם מצבים מקבלים q_2, q_4.

q_2 מצב מקבל כך שהאות הראשונה היא a וגם האחרונה .

q_4 מצב מקבל כך שהאות הראשונה היא b וגם האחרונה .

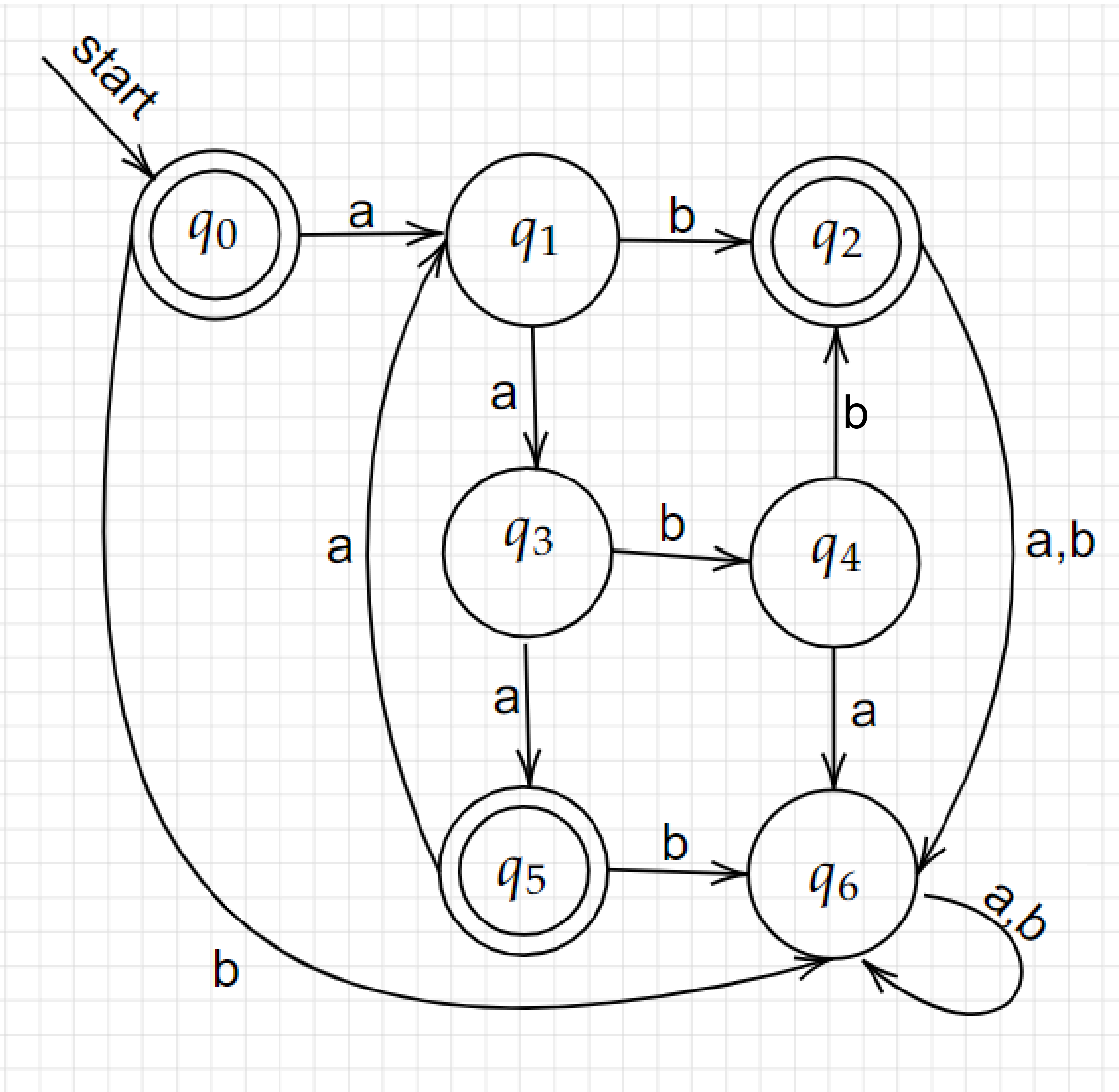
<u>סעיף ב:-</u>

$L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in N \,,\ m = n \% 3\}$

נבנה אוטומט באופן הבא:

$A = \{Q \,,\ \Sigma,\ q_{0_6} \,,\ \delta \,, F\}$

$\Sigma = \{a, b\}$ $F = \{q_0, q_2, q_5\}$ $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$



האוטומט מרוכב משש מצבים, כך ש שלושה מהם הם מצבים מקבלים q_0, q_2, q_5

q_0 מכיוון ש $\varepsilon \in \{a^n b^m \mid n, m \in N \,,\ m = n \% 3\}$

q_2 מתקבל כשמתקיים $(m \% 3 = 2) \wedge (m \% 3 = 1)$

q_5 מתקבל כשמתקיים $(m \% 3 = 0)$

נקרא ל q_6 במלקודת והיא מתקבלת כשמקבלים אות לא בסדר הנכון למשל (כל המלים המתחילות ה b)

אם קיבלנו את המצב q_6 באיזה שהוא קלט, נתקע ולא נצליח לצאת ממנו למצב אחר. כלומר לא ניתן להשלים את המילה למילה מתקבלת.

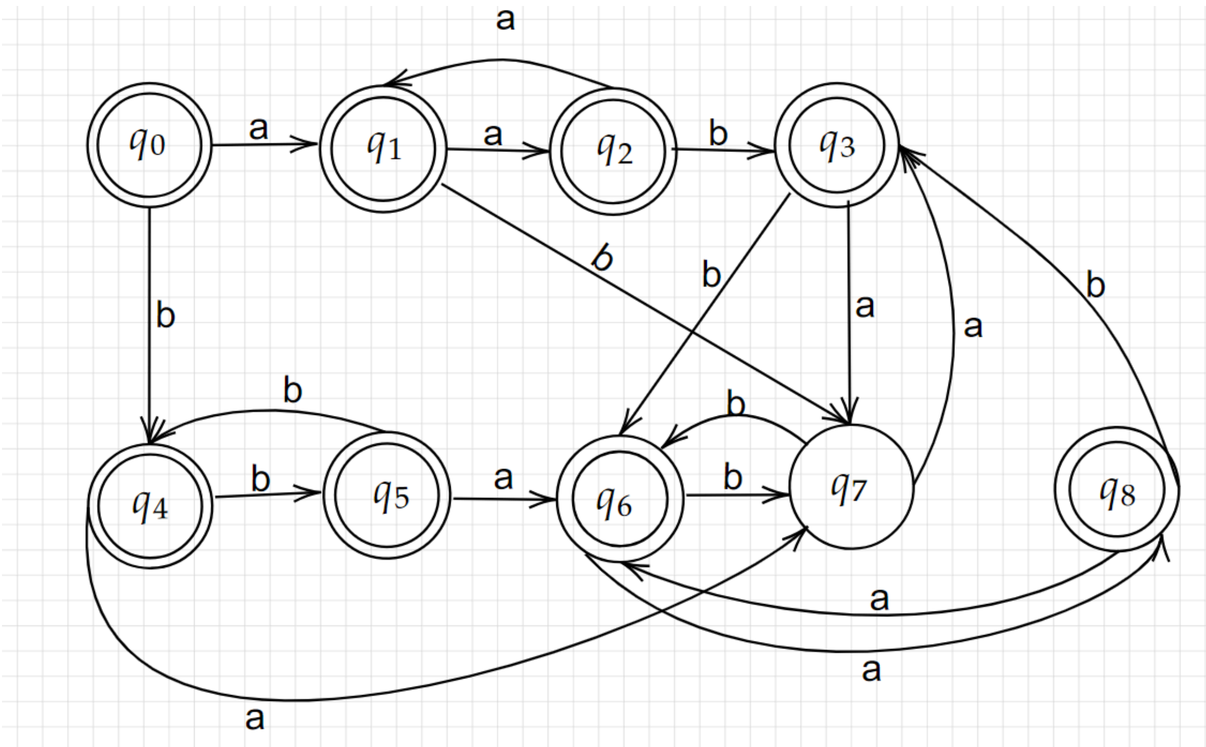
סעיף ג:-

$L_3 = \{\omega \in \Sigma^* \mid$ זוגי $\#_a(\omega) \bullet \#_b(\omega)$

נבנה אוטומט באופן הבא:

$$A = \{Q, \Sigma, q_{0_8}, \delta, F\}$$

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_8\}$ $\quad$ $F = \{q_3, q_6, q_8\}$ $\quad$ $\Sigma = \{a, b\}$



האוטומט מרוכב משמונה מצבים, כך ש שבעה מהם מצבים מקבלים $\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_8\}$

q_0 מתקבל כשמתקיים, $\#_a$ הוא אפס ו- $\#_b$ הוא אפס

q_1 ו q_2, מתקבל כשמתקיים, $\#_b$ הוא אפס

q_3 מתקבל כשמתקיים, $\#_a$ הוא זוגי ו- $\#_b$ אי זוגי

q_4 ו q_5, מתקבל כשמתקיים, $\#_a$ הוא אפס

q_6 מתקבל כשמתקיים, $\#_a$ הוא אי זוגי ו- $\#_b$ זוגי

q_8 מתקבל כשמתקיים, $\#_a$ הוא זוגי ו- $\#_b$ זוגי

שאלה 4:

צ"ל: $L(A) = L = \{bwb \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{b\}$
כלומר צ"ל ש- $v \in L \Leftrightarrow v \in L(A)$

מהגדרת שפת האס"ד בעצם צ"ל: $\delta^*(q_0, v) \in F \Leftrightarrow v \in L$

וממבנה האוטומט ($F = \{q_1\}$) בעצם צ"ל $\delta^*(q_0, v) = q_1 \Leftrightarrow v \in L$

נעשה זאת באינדוקציה על אורך המילה v.

נוכיח את שתי הטענות הבאות:

1. $L1 = L(q_1) = \{b - \text{מילה שמסתיימת ב}\}$
2. $L2 = L(q_2) = \{a - \text{מילה שמסתיימת ב}\}$

__בסיס:__

תהי $v \in \Sigma^*$ כך ש- $|v| = 0$ כלומר $v = \varepsilon$

טענה 1:

$\varepsilon \notin L1$ (מילה שמסתיימת ב $b -$)

ולפי הגדרת δ^* מתקיים גם ש- $\delta^*(q_0, \epsilon) = q_0 \neq q_1$

כלומר מהגדרת שפת מצב: $\varepsilon \notin L(q_1)$

טענה 2:

$\varepsilon \notin L2$ (מילה שמסתיימת ב $a -$)

ולפי הגדרת δ^* מתקיים גם ש- $\delta^*(q_0, \epsilon) = q_0 \neq q_2$

כלומר מהגדרת שפת מצב: $\varepsilon \notin L(q_2)$

$\Leftarrow$ שתי הטענות מתקיימות באופן ריק.

__צעד:__

נניח ש**שתי הטענות** נכונות עבור $v \in \Sigma^*$ מאורך עד n.

תהי מילה $u \in \Sigma^*$ כך ש- $|u| = n + 1$.

נסמן: $u = v\sigma$ כאשר $v \in L$ ו- $\sigma \in \{a, b\}$

עבור טענה 1:

$v\sigma \in L1$

ממבנה המילה $\Updownarrow$

$v \in L , \sigma = b$

הנחת האינדוקציה של טענה 1 $\Updownarrow$

$v \in L(q_1) , \sigma = b$

הגדרת שפת מצב $\Updownarrow$

$\delta^*(q_0, v) = q_1 , \sigma = b$

דרך אחת להכנס ל q_1 $\Uparrow$ $\Updownarrow$ $\Downarrow$ מבנה האוטומט

$\delta^*(q_0, v\sigma) = \delta(\delta^*(q_0, v) , \sigma) = \delta (q_1, b) = q_1$

(שוויון ראשון לפי הגדרת δ^* ושוויון שלישי נובע מהצבה)

$\Updownarrow$

$v\sigma \in L(q_1)$

$\Updownarrow$

$u \in L(q_1)$

עבור טענה 2:

$v\sigma \in L2$

ממבנה המילה $\Updownarrow$

$v \in L , \sigma = a$

הנחת האינדוקציה של טענה 1 $\Updownarrow$

$v \in L(q_1) , \sigma = a$

הגדרת שפת מצב $\Updownarrow$

$\delta^*(q_0, v) = q_1 , \sigma = a$

דרך אחת להכנס ל q_1 $\Uparrow$ $\Updownarrow$ $\Downarrow$ מבנה האוטומט

$\delta^*(q_0, v\sigma) = \delta(\delta^*(q_0, v) , \sigma) = \delta (q_1, a) = q_1$

(שוויון ראשון לפי הגדרת δ^* ושוויון שלישי נובע מהצבה)

$\Updownarrow$

$$v\sigma \in L(q_2)$$

$$\Updownarrow$$

$$u \in L(q_2)$$

$\blacksquare$