# מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים - 234129
# תרגיל בית 4

סמסטר חורף 2023-2024

<u>המתרגל האחראי על התרגיל:</u> אסף שהם

<u>תאריך הגשה:</u> 28.03.24

<u>נושאי התרגיל:</u> שפות פורמליות, אוטומט סופי דטרמיניסטי, אוטומט מכפלה, תכונות סגור בסיסיות

<u>הוראות לפתרון התרגיל:</u>

- בכל מקרה בו אתם מתבקשים להוכיח, עליכם לכתוב הוכחה פורמלית מלאה. עליכם לפרט את כל שלבי הפתרון.
- בכל מקרה בו אתם מנסים להפריך, <u>נסו למצוא דוגמה נגדית קצרה ופשוטה ככל האפשר</u>. זכרו (1) להגדירה במפורש, (2) להוכיח כי היא מקיימת את הנתונים, ו-(3) להוכיח כי אינה מקיימת את מסקנת הטענה.
- אם נדרש הסבר או נימוק בלבד, עליו להיות <u>קצר</u> אך בעל מבנה כללי של הוכחה (למשל הסבר/נימוק מדוע שתי קבוצות שוות צריך לכלול שני כיווני הכלה, וכו').

<u>הוראות הגשה:</u>

- ההגשה אלקטרונית דרך אתר הקורס.
- יש להגיש קובץ PDF בלבד.
- על הפתרון להיות **מוקלד!** אין להגיש פתרונות בכתב יד. איורים וציורים ניתן לצייר ביד.
- ההגשה היא בקבוצות של 3 סטודנטים.

<u>תזכורת:</u> הבדיקה היא מדגמית, ראו את סכמת הציונים באתר הקורס.

# בהצלחה!

## שאלה 1

יהי $\Sigma$ א"ב, ותהא $L \neq \emptyset$ שפה לא ריקה מעל $\Sigma$.

נאמר ש־$L$ היא שפה חיונית מסוג 1 אם $L = \Sigma^* \cdot L$.

נאמר ש־$L$ היא שפה חיונית מסוג 2 אם לכל $u \in \Sigma^*$ קיימת $x \in \Sigma^*$ כך ש $u \cdot x \in L$ (כלומר כל מילה ניתן להשלים למילה בשפה).

הערה: המונח "שפה חיונית" הוא תרגום מאולץ של המושג liveness.

**(א)** הוכיחו / הפריכו: אם $L$ היא שפה חיונית מסוג 1 אז היא שפה חיונית מסוג 2.

**(ב)** הוכיחו / הפריכו: אם $L$ היא שפה חיונית מסוג 2 אז היא שפה חיונית מסוג 1.

## פתרון שאלה 1

**(א)** הטענה נכונה.

תהי $L$ שפה חיונית מסוג 1. תהי $u \in \Sigma^*$. מכיוון ש־$L \neq \emptyset$, קיימת $x \in L$ ומהגדרת שרשור שפות נקבל ש־$u \cdot x \in \Sigma^* \cdot L$.

$L$ חיונית מסוג 1, כלומר $L = \Sigma^* \cdot L$ ולכן $u \cdot x \in L$. הראינו אם כך שלכל $u \in \Sigma^*$ קיימת מילה $x \in \Sigma^*$ כך ש־$u \cdot x \in L$, ולכן $L$ שפה חיונית מסוג 2.

**(ב)** הטענה שגויה.

נראה דוגמה נגדית: נגדיר $L = \{aa\}^*$ מעל $\Sigma = \{a\}$, כלומר כל המילים מאורך זוגי.

נטען ראשית ש־$L$ היא שפה חיונית מסוג 2. אכן, לכל $u \in \Sigma^*$ מתקיים $u \cdot u \in L$.

כעת נראה ש־$L$ אינה שפה חיונית מסוג 1. מתקיים, למשל, $a \cdot aa = aaa \in \Sigma^* \cdot L$

אך $aaa \notin L$. לכן $L \neq \Sigma^* \cdot L$ כלומר $L$ אינה שפה חיונית מסוג 1.

## שאלה 2

תהי $L$ שפה מעל א"ב $\Sigma$.
נגדיר:

$$L^+ = \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i$$

הוכיחו: $L = L^+$ אם"ם $L^2 \subseteq L$.

## פתרון שאלה 2

$\Leftarrow$: נניח כי $L = L^+$. לכל $w \in L^2$ מתקיים $w \in \bigcup_{i=1}^{\infty} L^i = L^+$ מהגדרת איחוד. לכן $L^2 \subseteq L^+$ ומהנתון נסיק $L^2 \subseteq L$.

$\Rightarrow$: נניח כי $L^2 \subseteq L$. נוכיח באינדוקציה ש־$L^n \subseteq L$ לכל $n > 1$ טבעי.

- בסיס: עבור $n = 1$ אכן $L^1 = L \subseteq L$.
- צעד: נניח שמתקיים $L^n \subseteq L$ עבור $n > 1$ טבעי.

תהי $w \in L^{n+1}$. מהגדרת שרשור, $w \in L^n \cdot L$, כלומר קיימות $u \in L^n$ ו־$v \in L$ כך ש־$w = uv$. מה"א נסיק $u \in L$, אז נקבל $w = uv \in L \cdot L = L^2$. הנחנו כי $L^2 \subseteq L$, ולכן $w \in L$. קיבלנו אפוא כי $L^{n+1} \subseteq L$.

כעת, $L \subseteq L^+$ כמו קודם, מהגדרת איחוד. תהי $w \in L^+$, אז קיים $i > 1$ טבעי כך ש־$w \in L^i$. לפי הטענה שהוכחנו, $L^i \subseteq L$, ולכן $w \in L$. קיבלנו $L^+ \subseteq L$, ומהכלה דו־כיוונית נסיק $L = L^+$.

## שאלה 3

<u>בנו אוטומט סופי דטרמיניסטי</u> לכל אחת מהשפות הבאות מעל $\Sigma = \{a, b\}$:

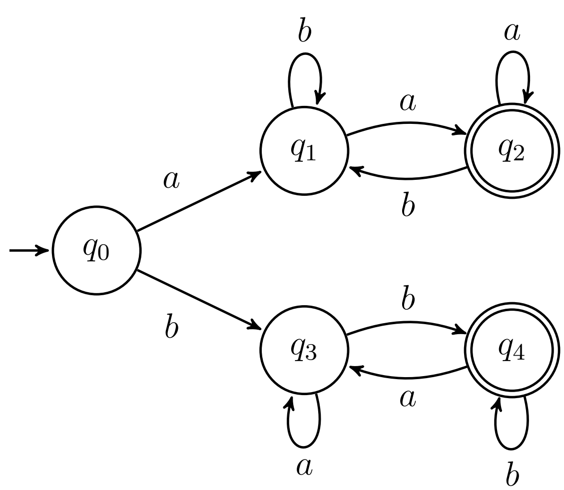
**(א)** $L_1 = \{\sigma w \sigma \mid \sigma \in \Sigma,\ w \in \Sigma^*\}$

**(ב)** $L_2 = \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N},\ m = n \bmod 3\}$

**(ג)** $L_3 = \{w \in \Sigma^* \mid \text{זוגי } \#_a(w) \cdot \#_b(w)\}$

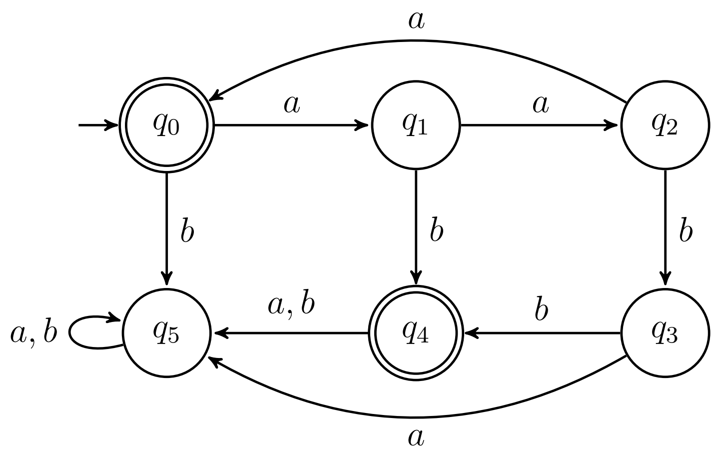
## פתרון שאלה 3

**(א)** נגדיר אוטומט $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ כך ש־$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $F = \{q_2, q_4\}$, ו־$\delta$ מוגדרת ע"י השרטוט:




הרעיון: מפרידים למקרים לפי האות הראשונה, ואז דואגים שהאות האחרונה תתאים.

**(ב)** נגדיר אוטומט $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$ כך ש־$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, $F = \{q_0, q_4\}$, ו־$\delta$ מוגדרת ע"י השרטוט:



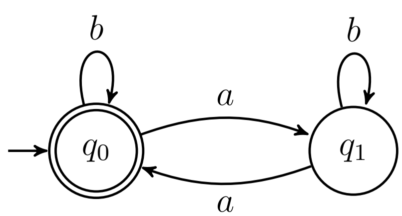

הרעיון: שלושת המצבים העליונים מייצגים את השאריות האפשריות של מספר ה־$a$־ים. מכל אחד אנו מאפשרים בדיוק את השארית המתאימה, ואם יש יותר מדי אותיות או אות לא מתאימה, עוברים לבור.

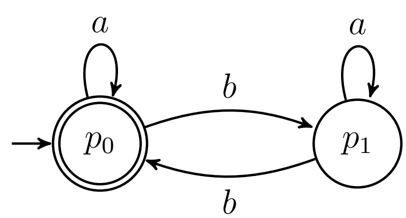
**(ג)** ניתן לבנות את האוטומט ישירות, או להבחין שמתקיים

$$L_3 = \{w \mid \text{זוגי } \#_a(w)\} \cup \{w \mid \text{זוגי } \#_b(w)\}$$

ולבנות אוטומט מכפלה לאיחוד עבור השפות הללו, משני האוטומטים הבאים:

$$A_1 = (\{q_0, q_1\}, \Sigma, q_0, \delta_1, \{q_0\}) \qquad A_2 = (\{p_0, p_1\}, \Sigma, p_0, \delta_2, \{p_0\})$$




כאשר $\delta_1$ מתוארת בשרטוט משמאל, ו־$\delta_2$ בשרטוט מימין.

אוטומט המכפלה מתואר ע"י $A = (Q, \Sigma, (q_0, p_0), \delta, F)$ כאשר

$$Q = \{q_0, q_1\} \times \{p_0, p_1\}$$

$$F = (F_1 \times Q_2) \cup (Q_1 \times F_2)$$

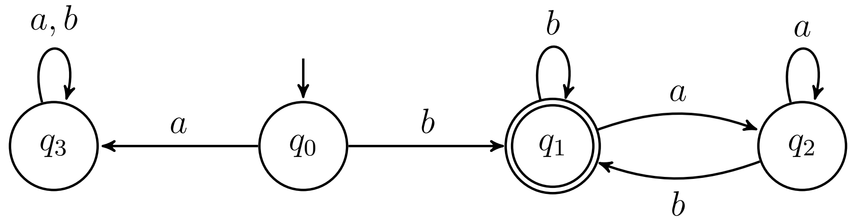
ולכל $q \in \{q_0, q_1\}$, $p \in \{p_0, p_1\}$, $\sigma \in \Sigma$:

$$\delta((q, p), \sigma) = (\delta_1(q, \sigma), \delta_2(p, \sigma))$$

## שאלה 4

יהי $\Sigma = \{a,b\}$ א"ב.

נגדיר אוטומט $A = (Q,\Sigma,q_0,\delta,F)$ כך ש־$Q = \{q_0,q_1,q_2,q_3\}$, $F = \{q_1\}$, ו־$\delta$ מוגדרת ע"י השרטוט:



תהי $L = \{bwb \mid w \in \Sigma^*\} \cup \{b\}$ שפת כל המילים מעל $\Sigma$ שמתחילות ומסתיימות ב־$b$.

הוכיחו: $L(A) = L$.

## פתרון שאלה 4

כדי להוכיח כי $w \in L$ אם"ם $w \in L(A)$, נסמן $L' = \{bwa : w \in \Sigma^*\}$ וננסח טענות אינדוקטיביות:

$$\textbf{(1)} \qquad \delta^*(q_0,w) = q_0 \iff w = \epsilon$$

$$\textbf{(2)} \qquad \delta^*(q_0,w) = q_1 \iff w \in L$$

$$\textbf{(3)} \qquad \delta^*(q_0,w) = q_2 \iff w \in L'$$

נוכיח את הטענות במקביל באינדוקציה על מבנה המילה:

בסיס: עבור $w = \varepsilon$ מתקיים $\delta^*(q_0,\varepsilon) = q_0$ לפי הגדרה, ולכן $(1)$ נכון.

בפרט, $\delta^*(q_0,\varepsilon) \neq q_1$, ובנוסף ידוע כי $\varepsilon \notin L$, ולכן $(2)$ נכון באופן ריק, ובאותו אופן גם $(3)$.

צעד: נניח ששלוש הטענות נכונות עבור מילה $u \in \Sigma^*$, ונוכיח את נכונותן עבור $w = u\sigma$ כאשר $\sigma \in \Sigma$.

טענה $(1)$ נכונה באופן ריק, שכן $\delta^*(q_0,w) = \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma)$ ואין אף מעבר שנכנס ל־$q_0$, לכן בהכרח $\delta^*(q_0,w) \neq q_0$, ובנוסף ידוע כי $w \neq \varepsilon$.

$$\begin{aligned}
\textbf{(2)} \qquad \delta^*(q_0,w) = q_1 \quad &\iff \quad \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma) = q_1 \\
&\iff \quad \delta^*(q_0,u) \in \{q_0,q_1,q_2\} \ \wedge \ \sigma = b \\
&\iff \quad (u = \varepsilon \ \vee \ u \in L \ \vee \ u \in L') \ \wedge \ \sigma = b \\
&\iff \quad w \in \{bvb : v \in \Sigma^*\} \cup \{b\} = L
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\textbf{(3)} \qquad \delta^*(q_0,w) = q_2 \quad &\iff \quad \delta(\delta^*(q_0,u),\sigma) = q_2 \\
&\iff \quad \delta^*(q_0,u) \in \{q_1,q_2\} \ \wedge \ \sigma = a \\
&\iff \quad (u \in L \ \vee \ u \in L') \ \wedge \ \sigma = a \\
&\iff \quad w \in \{bva : v \in \Sigma^*\} = L'
\end{aligned}$$

כעת,

$$w \in L \iff \delta^*(q_0,w) = q_1 \iff \delta^*(q_0,w) \in F \iff w \in L(A)$$

(השלימו את הנימוקים של כל המעברים)

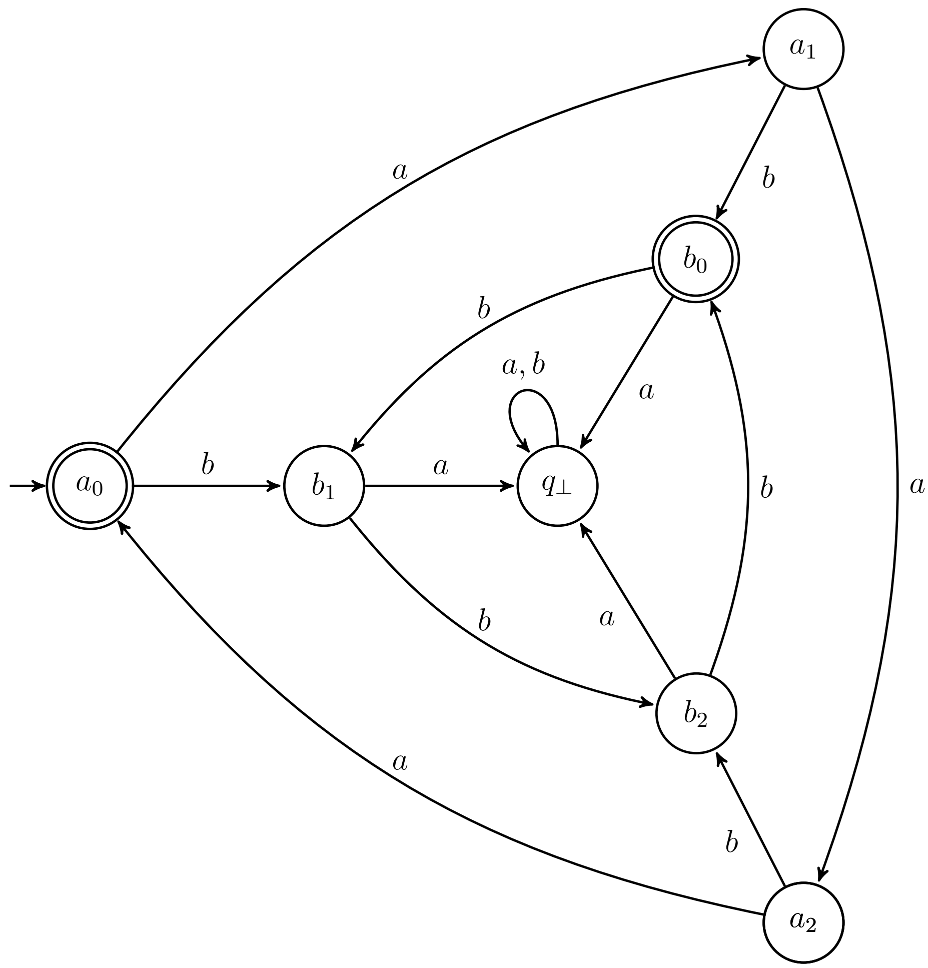
## נספח – פתרון אחר לשאלה 3 סעיף ב'

זהו הפתרון עבור השפה שבה שארית החלוקה ב־3 של מספר ה־$a$־ים ומספר ה־$b$־ים זהה.

נגדיר אוטומט $A = (Q, \Sigma, a_0, \delta, F)$ כך ש־$Q = \{\sigma_i : \sigma \in \Sigma, 0 \leq i \leq 2\} \cup \{q_\perp\}$, $F = \{a_0, b_0\}$, ו־

$$\delta(q,\sigma) = \begin{cases} q_\perp & q = q_\perp \vee \exists i(q = b_i) \wedge \sigma = a \\ \sigma_{(i+1) \mod 3} & \exists i(q = \sigma_i) \\ b_{(1-i) \mod 3} & \exists i(q = a_i) \wedge \sigma = b \end{cases}$$

להלן השרטוט:




הערות על הבניה: הבחינו כי "שפת המצב" (המילים שמגיעות ל-) צומת $a_i$ הן המילים של רצף $'a'$ באורך משארית 3 של $i$.

ובאופן דומה, שפת המצב של צומת $b_i$ הן מילים מהצורה $a^n b^m$ עבורן $i = m - n \mod 3$ וכל מילה שאינה שייכת ל $\{a\}^* \cdot \{b\}^*$ מגיעה למצב "הבור" $q_\perp$ וכך מילה מתקבלת אמ"מ היא ב$L_2$ ( זו עדיין אינה הוכחה פורמאלית, לשם כך נשאר להוכיח בעיקר (באינדוקציה פשוטה) את הטענות על שפת המצב של $a_i, b_i$ )