מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים למדמ"ח
234129
תרגיל בית 2

לין אליאס
213473861

אמיר
325477784

וסים
214363315

<u>שאלה 1 :</u>

א)

נתון : S ו T יחסי שקילות

צ"ל: R יחס שקילות

הוכחה:

נוכיח רפלקסיביות, סימטריות, טרנזיטיביות

⇐**רפלקסיביות**:

יהי a , b כך ש $(a , b) \in A \times B$

צ"ל : $((a , b), (a , b)) \in R$ (לפי הגדרת רפלקסיביות)

$\leftarrow (a , b) \in A \times B$

$\Downarrow$ הגדרת מכפלה קרטיזת

$a \in A \wedge b \in B$

$\Downarrow$מהנתון ש- S ו T יחסי שקילות לכן רפלקסיביות

$(a , a) \in S \wedge (b , b) \in T$

$\Downarrow$הגדרת R

$((a , b), (a , b)) \in R$

⇐**סימטריות**:

יהיו $a, c \in A$ $b, d \in B$

כך ש- $((a , b), (c , d)) \in R$

צ"ל : $((c , d), (a , b)) \in R$ (לפי הגדרת סימטריות)

$\leftarrow ((a , b), (c , d)) \in R$

$\Downarrow$הגדרת R

$(a , c) \in S \wedge (b , d) \in T$

$\Downarrow$מהנתון ש- S ו T יחסי שקילות לכן סימטריות

$(c , a) \in S \wedge (d , b) \in T$

$\Downarrow$הגדרת R

$((c , d), (a , b)) \in R$

⇐טרנזיטיביות:

יהיו $a,c,x \in A$ $b,d,y \in B$

כך ש- $((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(x,y)) \in R$

צ"ל : $((a,b),(x,y)) \in R$

$$((a,b),(c,d)) \in R \wedge ((c,d),(x,y)) \in R$$

$\Downarrow$הגדרת R

$$(a,c) \in S \wedge (b,d) \in T \wedge (c,x) \in S \wedge (d,y) \in T$$

$\Downarrow$מהנתון ש- S ו T יחסי שקילות לכן טרנזיטיביות

$$(a,x) \in S \wedge (b,y) \in T$$

$\Downarrow$הגדרת R

$$((a,b),(x,y)) \in R$$

$\Leftarrow$ R יחס שקילות כך שהוא יחס טרנזיטיבי, רפלקסיבי וסימטרי

■

ב)

נתון : S ו T יחסי סדר

צ"ל: R יחס סדר

הוכחה:

נוכיח רפלקסיביות, אנטי-סימטריות, טרנזיטיביות

בסעיף הקודם הוכחנו רפלקסיביות וטרנזיטביות אז נוכיח רק אנטי-סימטריות:

יהיו $a, c \in A$ $b, d \in B$

כך ש- $((a, b), (c, d)) \in R \wedge ((c, d), (a, b)) \in R$

צ"ל: $(a, b) = (c, d)$ כלומר $a = c$ ו $b = d$

הוכחה:

$\Leftarrow ((a, b), (c, d)) \in R \wedge ((c, d), (a, b)) \in R$

$\Downarrow$ הגדרת R

$(b, d) \in T \wedge (a, c) \in S \wedge (a, c) \in S \wedge (b, d) \in T$

$\Downarrow$מהנתון ש- S ו T יחסי סדר לכן אנטי-סימטריות

$a = c \wedge b = d$

$\Downarrow$

$(a, b) = (c, d)$

$\Leftarrow$לכן R הוא יחס סדר כי הוא רפלקסיבי אטי-סימטרי וטרנזיטיבי (אם S ו T יחסי סדר)

■

שאלה 2:

<u>סעיף א:-</u>

נתון :R רפלקסיבי

צ"ל: S רפלקסיבי

קיימת קבוצה C כך ש- $C \in B$ ← מהנתון $A \neq 0$ לכן כי $B = P(A)/\{0\}$ אז גם B גם אינה קבוצה ריקה וזה מהגדרת קבוצת החזקה

ואז: $C \in B$ צ"ל $(C,C) \in S$

$\Downarrow$ הגדרת B

$C \in P(A) \wedge C \notin \{0\}$

$\Downarrow$ $\exists c \in C$ E לכן טענת אמת לא משפיעה על גם

$C \in P(A)$

$\Downarrow$ הגדרה קבוצת חזקה

$C \subseteq A$

$\Downarrow$

$\exists c \in C : c \in A$

$\Downarrow$ R רפלקסיפי ומהגדרת היחס R

$(c,c) \in R$

$\Downarrow$ הגדרת S

$(C,C) \in S$

סעיף ב:-

נתון R סימטרי

צ"ל S סימטרי

תהי F,C כך ש $(F,C) \in S$ צ"ל $(C,F) \in S$

$\Downarrow$ הוכחנו F,C קיימות ושייכות ל S בסעיף הקודם

(F,C)$\in S$

$\Downarrow$ הגדרת S והגדרת מכפילה קרטיזת

$F \in B \land C \in B$

$\Downarrow$ הגדרת S

$* \; \exists f \in F , \exists c \in C \quad : (f,c) \in R$

$\Downarrow$ R סימטרי

$(c,f) \in R$

$\Downarrow$ מ * + הגדרת S

$(C,F) \in B \times B$

$(C,F) \in S$

סעיף ג:

הטענה לא נכונה.

נתן דוגמה נגדית:

ניקח $A = \{1,2\}$

ואז לפי הנתון - $B = \{\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

וניקח $R \subseteq A \times A$ $R = \{(1,1),(2,2)\}$ כך ש R הוא יחס דו מקומי מעל A וגם R הוא טרנזיטיבי באופן ריק לכן הוא מקיים את תנאי השאלה.

נראה ש S אינו טרנזיטיבי כך ש S הוא יחס מעל B

וניקח $(\{1\},\{1,2\})$שהוא שייך ליחס S , מקיים את התנאים שנדרשים

- $\{1\} \in B \land \{1,2\} \in B$

$\exists x \in \{2\}, \exists y \in \{1,2\} : (x,y) \in R$

ניקח $(\{1,2\},\{2\})$ שהוא שייך ליחס S , מקיים את התנאים שנדרשים

- $\{1,2\} \in B \land \{1\} \in B$

$\exists x \in \{1,2\}, \exists y \in \{2\} : (x,y) \in R$

אבל מתקיים ש $S \notin (\{1\},\{2\})$ כך שהוא לא מקיים את התנאים
לכן הטרנזטיביות ב-S לא מתקיימתה כי כדי שתתקיים את הטרנזטיביות, חייב
להתקיים $S \in (\{1\},\{2\})$

שאלה 3:
סעיף א:

נתון: R אידמפוטנטי, כלומר $R^2 = R$

צ"ל: $R^k = R$ לכל $k \geq 1$ טבעי

הוכחה:

תחילה נבין את הנתון, $R^2 = R$ כלומר, לפי חזקות של יחסים $R \circ R = R$
נוכיח באמצעות אינדוקציה:

בסיס: נוכיח עבור k = 1 ⇐ $R^1 = R^0 \cdot R = R$

צעד
: (הנחת האינדוקציה) נניח שעבור k הטענה מתקיימת, כלומר $R^k = R$, נוכיח שזה גם מתקיים עבור k + 1:

$$R^{k+1} = R$$

⇕ **לפי תכונות חזקות של יחסים**

$$R^k \circ R = R$$

⇕ **לפי הנחת האינדוקציה**

$$R \circ R = R$$

⇕ **לפי הנתון**

$$R^2 = R$$

⇐קיבלנו ביטוי נכון לפי הנתון עם מעברים של אם"ם, לכן הנחת האינדוקציה אכן נכונה.

⇐$R^k = R$ לכל $k \geq 1$ טבעי.

■

סעיף ב:

נתון: R יחס שקילות, $R \subseteq A \times A$.

צ"ל: R אידמפוטנטי, כלומר $R^2 = R = R \circ R$.

הוכחה:

כדי להוכיח את השוויון בין שני היחסים נראה הכלה דו כיוונית לפי הגדרת שוויון קבוצות, כלומר $R^2 \supseteq R$ וגם $R^2 \subseteq R$:

כיוון ראשון, $R^2 \subseteq R$**:**

יהי $(a, c) \in R^2$

$$(a, c) \in R^2$$

$\Downarrow$ **לפי הנתון** R^2 **ומהגדרת ההרכבה**

$\exists b \in A$ כך ש $- (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R$

$\Downarrow$ **לפי הנתון R יחס שקילות אז R טרנזיטיבי**

$$(a, c) \in R$$

כיוון שני, $R^2 \supseteq R$**:**

יהי $a \in A$

$$a \in A$$

$\Downarrow$ **R יחס שקילות ולכן הוא רפלקסיבי.**

$$(a, a) \in R$$

$\Downarrow$ **הרכבת יחסים.**

$$(a, a) \in R \circ R$$

$\Downarrow$ **הגדרת** R^2.

$$(a, a) \in R^2$$

$\Leftarrow$ הראנו בכל כיוון שיש איבר כללי כלשהו בצד אחד שנמצא גם בצד השני ובעצם הראנו $R^2 \supseteq R$ וגם $R^2 \subseteq R$ לפי הגדרת הכלה.

$\Leftarrow$ לפי הגדרת שוויון קבוצות וההוכחה להכלה הדו כיוונית מתקבל ש$R^2 = R$.

■

סעיף ג:

הטענה אינה נכונה!

<u>ניתן דוגמא נגדית:</u>

תהי: $A = \{1, 2\}$.
נגדיר: $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$
לפי הנתון (כלומר הגדרת יחסים): $R^2 = R \circ R = \{(1, 1), (1, 2)\}$
אז הR שבחרנו מקיים את התנאי.
כעת נראה ש R הוא לא יחס שקילות:

יחס שקילות הוא יחס שמקיים רפלקסיביות, טרנזיטיביות וסימטריות. מספיק שאחת מהתכונות לא תתקיים וזה ישלול שR הוא יחס שקילות.
נשים לב שסימטריות לא מתקיימת בדוגמא הנ"ל,כי $R \in (1, 2)$ אך $R \notin (2, 1)$
ומזה נובע ש R אינו יחס שקילות כי הוא לא מקיים את כל תנאי יחס השקילות לפי הגדרת היחס. לכן לפי בחירתנו לR הוא אכן אידמפוטנטי אך אינו יחס שקילות.