מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים למדמ"ח
234129
תרגיל בית 5

לין אליאס
213473861

אמיר
325477784

וסים
214363315

שאלה 1:

א) נגדיר אוטומט סופי אי-דיטרמנסטי $A = (Q, \Sigma, I, R, F)$ כך ש-

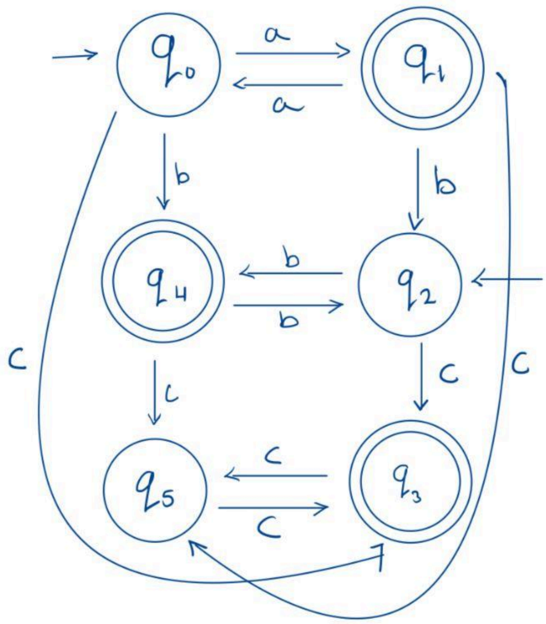
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$ נתון

$I = \{q_0, q_2\}$

R כמו בשרטוט

$F = \{q_0, q_3, q_4\}$



נימוק קצר:

מהגדרת האוטומט, ניתן לרוץ על מילים שמתחילות ב-a או b או c, אבל סדר הופעתן הוא קבוע כלומר בהתחלה רצף של a-ים ואחריו רצף של b-ים ובסוף רצף של c-ים (אם קיים הרצף, כלומר ייתכן שרצף מהם יהיה רק). בנוסף לכך כאשר מתחילים ברצף אות מסוימת לא ניתן לחזור לאות שהייתה לפניה. ⇐ כמו כן האוטומט עוקב אחר זוגיות של כל אות , כך שניתן להגיע למצב מקבל רק כאשר סכום האיתיות במילה הוא אי זוגי.

ב) גדיר אוטומט סופי אי-דיטרמנסטי $B = (Q, \Sigma, I, R, F)$ כך ש-

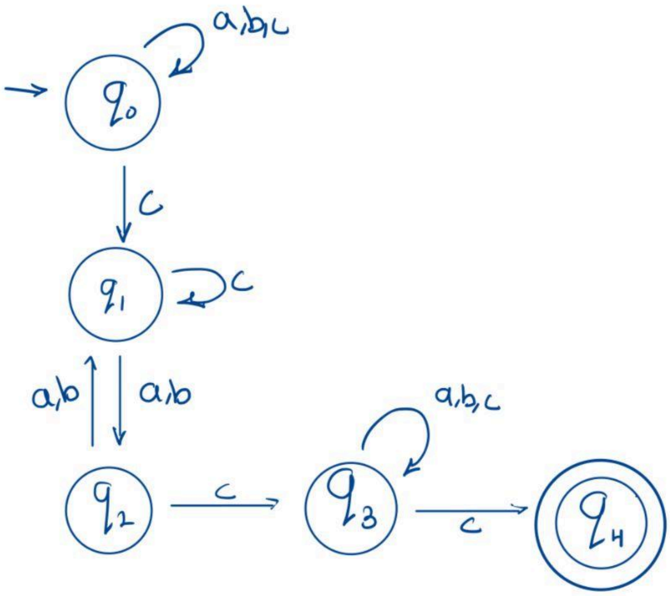
$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$

$\Sigma = \{a, b, c\}$ נתון

$I = \{q_0\}$

R כמו בשרטוט

$F = \{q_4\}$



<u>נימוק קצר:</u>

האוטומט מקבל מילים מעל הא"ב {a,b,c}, כאשר כל מילה היא רצף של מילים מעל {a,b}* (אפשר ריקה) ומסתיימת ב-c. לאחר כל מילה מסוג זה, אפשר להגיע למצב מקבל רק לאחר יציאה מהמצב q2. יוצאים מ-q2 רק לאחר קריאת רצף איזוגי של a ו-b, ולפני זה, בתחילת המילה, יש רצף חופשי של a ו-b עם c אחריו. אחרי מציאת רצף איזוגי, המצב הבא חופשי לרוץ על כל רצף מעל {a,b,c} עד לקריאת ה-c האחרונה והגעה למצב מקבל.

שאלה 2:

נתון L שפה רגולרית. לכן מהגדרת שפה רגולרית, קיים אס"ד עבור L, נסמנו ב-A, כך ש- $L(A) = L$: $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

נגדרי אוטומט NFA עבור השפה L', נסמנו B, באופן הבא :

$$B = (Q', \Sigma, I, R, F')$$

כך ש-

$$Q' = Q \times \Sigma \times \{0, 1\} = \{(q, \sigma, X) | q \in Q, \sigma \in \Sigma, x \in \{0, 1\}\}$$
$$I = \{(\delta(q_0, \sigma), \sigma, 0) | \sigma \in \Sigma$$

$$F' = \{(p, \sigma, 1) | p \in F, \sigma \in \Sigma \}$$
$$R = \{ ((q, \sigma, 0) , \tau , (\delta(q, \tau), \sigma, 0)) | q \in Q, \sigma, \tau \in \Sigma \} \cup$$
$$\{ ((q, \sigma, 0) , \sigma , (p, \sigma, 1)) | q \in Q, \sigma \in \Sigma \} \cup$$
$$\{ ((q, \sigma, 1) , \tau , (\delta(q, \tau), \sigma, 1)) | q \in Q, \sigma, \tau \in \Sigma \}$$

נראה ש : $L(B) = L'$

כיוון ראשון $\Leftarrow$

תהי $w \in L'$. מהגדרת השפה L' , ניתן להביע את w בצורה : $u\sigma v$,

כך ש- $\sigma uv \in L$, $\sigma \in \Sigma$, $u, v \in \Sigma^*$

תהיינה $u, v \in \Sigma^*$, $\sigma \in \Sigma$ המקיימות $\sigma uv \in L, w = u\sigma v$

נגדיר $p_0 \in I$ $p_0 = (\delta(q_0, \sigma), \sigma, 0)$

לכן p_0 הוא מצב התחלתי באוטומט B שבנינו. נרוץ על המילה w מהמצב ההתחלתי p_0 באופן הבא:

נתון לפי הגדרת R, שקיימים מעברים על ידי קריאת כל אות ב-Σ מכל מצב מהצורה $(q, \sigma, 0)$ למצב מהצורה $(\delta(q, \tau), \sigma, 0$), כאשר $q \in Q$ ו- τ היא האות שנקראה. לכן כיוון ש- $u \in \Sigma^*$, אז ניתן לרוץ על בצורה הזאת לפי היחס:

$\{((q,\sigma,0), \tau, (\delta(q,\tau),\sigma,0))|q \in Q, \ \sigma,\tau \in \Sigma\}$, כאשר q משתנה לפי הפונקציה δ (כיוון שלפי הגדרת Q' מתקיים ש- $q \in Q$). אזי נרוץ על החלק u עד שמגיעים למצב, נסמנו p_1 , כך ש- $p_1 = (\delta^*(\delta(q_0,\sigma),u),\sigma,0)$

לפי הגדרת R, קיים מעבר על ידי קריאת האות σ מ- p_1 למצב, נסמנו p_2 , המוגדר - $p_2 = (\delta^*(\delta(q_0,\sigma),u),\sigma,1)$, לכן נמשיך את הריצה ונעבור עם קריאת σ למצב הנ"ל (p_2).

(המעבר קיים כיוון ש- $\sigma \in \Sigma$ ו- $\delta^*(\delta(q_0,\sigma),u \in Q$ מהגדרת δ^* לכן מהגדרת R המעבר קיים ומתואר חוקית ב-R)

לאחר מכן נשאר לקרוא את החלק v, והקריאה ממשיכה מהמצב p_2,

שוב לפי הגדרת היחס R, לאחר מעבר מדגל 0 לדגל 1, ניתן רק לעבור למצבים מהצורה $(q,\sigma,1)$, כאשר q משתנה לפי הפונקציה δ, (כיוון שלפי הגדרת Q' מתקיים ש- $q \in Q$). אזי כאשר רצים על החלק u מ- p_2, מגיעים למצב, נסמנו p_3 , כך ש-

$p_3 = (\delta^*(\delta^*(\delta(q_0,\sigma),u),v),\sigma,1)$

לפי הגדרת δ^* ולפי הגדרת שרשור מתקיים:

$$p_3 = (\delta^*(\delta^*(\delta(q_0,\sigma),u),v),\sigma,1) = (\delta^*(\delta(q_0,\sigma u),v),\sigma,1) = (\delta^*(\delta(q_0,\sigma uv),\sigma,1)$$

נתון לפי הדגרת L': $\sigma uv \in L$

אז מהגדרת פונקצית מעברים ב- δ^* (DFA) מתקיים: $(\delta^*(q_0,\sigma uv) \in F$

אז מהגדרת F': $p_3 \in F'$

כלומר שהריצה הנ"ל היא ריצה מקבלת. כיוון שמצאנו עבור w ריצה מקבלת ב-B ,

$w \in L(B)$

כיוון שני $\Leftarrow$

תהי $w \in L(B)$

אז לפי הגדרת שפת אוטומט NFA, קיימת עבור w ריצה מקבלת ב-B.

מהגדרת האוטומט, הריצה חייבת להתחיל באחד המצבים ההתחלתיים, והם מהצורה $(\delta(q_0, \sigma), \sigma, 0))$ לכן:

תהי $\sigma \in \Sigma$ כך ש- $((\delta(q_0, \sigma), \sigma, 0))$ הוא המצב ההתחלתי שממנו מתחילה ריצה מתקבלת כלשהי של w, נסמנו p_0.

כיוון שנתון שהריצה הנ"ל מתקבלת, אזי היא צריכה להגיע למצב מקבל מהקבוצה F',

לכן מהגדרת F' המספר 0 שנמאה במצב ההתחלתי חייב להשתנות במהלך הריצה ל-1. מהגדרת האוטומט, המעבר היחידי המקיים זאת הוא המעבר המתרחש כאשר קוראים σ מתישהו בתהליך הריצה ממצב מהצורה $(q, \sigma, 0)$ כאשר $q \in Q$

נסמן את המצב שממנו קוראים את ה-σ שהופכת את הדגל 0 ל-1 ב- $p_1 = (q_1, \sigma, 0)$

(זה לא חייב להיות המופע הראשון של σ)

לפי הגדרת R, בקריאת σ מ- p_1 עוברים למצב $(q_1, \sigma, 1)$. נסמן מצב זה ב- p_2.

לאחר מכן, ממשיכה הריצה עד להגעה למצב מקבל, כלומר (לפי הגדרת F') שמגיעים בסוף למצב מהצורה $(p, \sigma, 1)$ כאשר $p \in F$. נסמן מצב זה ב- p_3.

נסמן את שרשור האותיות הנקראות מ- p_0 עד q_1 ב- u , ואת שרשור האותיות הנקראות מ- q_2 עד p_3 ב- u. אזי מקבלים שניתן לייצג את w כשרשור: $w = u\sigma v$

מהגדרת R:

המעברים תוך הריצה על החלק u מגיעים רק למצבים מהצורה $(q, \sigma, 0)$, כאשר q משתנה לפי הפונקציה δ, (כיוון שלפי הגדרת Q' מתקיים ש- $q \in Q$). אזי נובע:

$p_1 = (\delta^*(\delta(q_0, \sigma), u), \sigma, 0)$

לאחר מכן קוראים את σ ומגיעים ל- $p_2 = (\delta^*(\delta(q_0, \sigma), u), \sigma, 1)$

כמו כן בחלק הריצה על v מגיעים למצבים מהצורה$(q, \sigma, 1)$, כאשר q משתנה לפי הפונקציה δ,(כיוון שלפי הגדרת Q' מתקיים ש- $q \in Q$). אזי נובע:

$$p_3 = (\delta^*(\delta^*(\delta(q_0, \sigma), u), v), \sigma, 1)$$

u, v הן מילים מעל Σ, אזי $u, v \in \Sigma^*$. לפי הגדרות ופונקצית מעברים ב-DFA (δ^*):

$$\delta^*(\delta^*(\delta(q_0, \sigma), u), v) = \delta^*(\delta(q_0, \sigma u), v) = \delta^*(q_0, \sigma uv)$$

נתון ש- p_3 הוא מצב מקבל, כלומר $p_3 \in F'$ אזי מהגדרת F' מתקיים:

$$\delta^*(q_0, \sigma uv) \in F$$

כלומר שהמילה σuv מתקבלת בשפת האוטומט A,

ואז מהנתון ש- A הוא אוטומט עבור השפה L, כלומר ש- L(A) = L, נובע:

$$\sigma uv \in L$$

לכן, מצאנו ייצוג עבור w מהצורה $w = u\sigma v$ כך ש- $\sigma \in \Sigma$, $u, v \in \Sigma^*$ כך שמתקיים $w \in L' \Leftarrow \sigma uv \in L$

לסיכום, כיוון שקיימת הכלה דו כיוונית בין L' ו- $L(B)$, אזי מתקיים: $L(B) = L'$

לכן האוטומט שבנינו אכן מקיים את הנדרש. לפי משפט: לכל אוטומט NFA קיים אוטומט DFA שקול. לכן לפי המשפט, כיוון שמצאנו NFA עבור השפה L', אז קיים אוטומט סופי דיטירמיניסטי שקול שמקבל את השפה הנתונה. L' שפה רגולרית.

■

שאלה 3:

נתון $A = (Q, \Sigma, q_0, \delta, F)$

נגדיר B אוטומט אי דיטרמנסטי בצורה הבאה

$B = (Q', \Sigma, I, R, F')$

$Q' = P(Q)/\phi$

$I = \{q_0\}$

$F' = \{D \cup S | S \subseteq Q\}$

$R = \{(x, \sigma_i, \{x \cup q_i\}) | x \in Q', q_i, S^*(q_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, ..., \sigma_i), 1 \le i \le n)$

$\cup \{(y, \sigma_i, y) | y \in Q' : Q \subseteq Y, 1 \le i \le n\}$

בנינו את האוטומט האי-דטרמיניסטי כך שהוא שומר את תתי הקבוצות שעבר בהם עד כה והוא מגיע למצב מקבל אם לאחר ריצה על המילה קבוצת המצבים תהיה מהצורה $D \cup S$.

אנחנו מגדירים את המעברים על האוטומט באמצעות המעברים באוטומט A ובצורה הזאת אנו מקבלים רק את המילים שמקיימים ריצה טובה על A .

<u>נראה הכלה דו כיוונית :</u>

כך ש $L(B) = L$

<u>כיוון ראשון :</u> תהי $w \in L$, נראה שקיימת עליה ריצה מקבלת ב B

הריצה של B על w מתבצעת באופן הבא

$$\tau = q_1 \xrightarrow{\sigma_1} q_2 \xrightarrow{\sigma_2} .... \xrightarrow{\sigma_n} q_n$$

קימת על W ריצה מקבלת ב B לכן הריצה של A על W היא ריצה טובה .

לפי הגדרה B מתקיים

$\sigma_1 \qquad \sigma_2 \qquad \qquad \sigma_k$

$\{q_0\} \to \{q_0, q_1\} \to \{q_0, q_1, q_2\}......... \to \{q_0, q_1, q_2,...., q_k\}$

כך ש $D \subseteq \{q_0, q_1, q_2,...., q_k\}$

כלומר הראינו שקיימת על ריצה מקבלת ב B

כך ש $w \in L(B)$.

<u>כיוון שני :</u>

תהי $w \in L(B')$ נראה ש $w \in L$ כלומר קיימת עליה ריצה מקבלת ב B.

אם w התקבלה בשפה $L(B')$ אז המצב האחרון שהיא הגיעה אליו הוא מהצורה $\{q_0, q_1, q_2,....., q_n\}$

כלומר הוא עבר במצבים $q_0.... q_n$ - לפי הגדרת B' ולכן קיימת עליו ריצה ב B מהצורה

$\sigma_1 \quad \sigma_2 \qquad \sigma_n$

$\tau = q_1 \to q_2 \to .... \to q_n$

ולכן $w \in L$.

<u>שאלה 4:-</u>

<u>סעיף א:</u>

$$L_1 = \{a^i b^j \mid i, j \in N, i - j = 2024\}$$

נראה שהשפה לא מקיימת את **תנאי למת הניפוח**

יהי i טבעי כך ש $i > 2024$

נבחר מילה $z = a^i b^{i-2024}$

מתקיים ש $z \in L$ **כי** $i - (i - 2024) = 2024$

יהי פירוק $z = uvw$ **כך ש** $|uv| \le i$, $|v| \ge 1$

מכיוון ש $|uv| \le i$ **, וממבנה המילה נוכל לסמן :**

$$u = a^k$$
$$v = a^t$$
$$w = a^{i-t-k} b^{i-2024}$$

כך ש :

$$k + t < i$$
$$t \ge 1$$

נבחר $m = 0$ **מכיוון ש W מתחילה ב a אז מתקיים**

$$uv^m w = uw = a^k a^{i-t-k} b^{i-2024} = a^{i-t} b^{i-2024} \notin L_1$$

$$\Downarrow$$

$$m = 0$$

מכיוון ש $t > 1$ **אז לא מתקיים התנאי של השפה**

$$a^{i-t} b^{i-2024} \to (i - t) - (i - 2024) = i - t - i - 2024 =- t + 2024 \neq 2024$$

$$\downarrow$$

$$t \ge 1$$

קיבלנו שהפה לא מקיימת את תנאי למת הניפוח לכן היא לא ריגולרית

סעיף ב:

הטענה נכונה לכן נבנה אוטומט המתאים לשפה

נגדיר אוטומט סופי אי-דיטרמנסטי $A = (Q, \Sigma, I, R, F)$ כך ש-

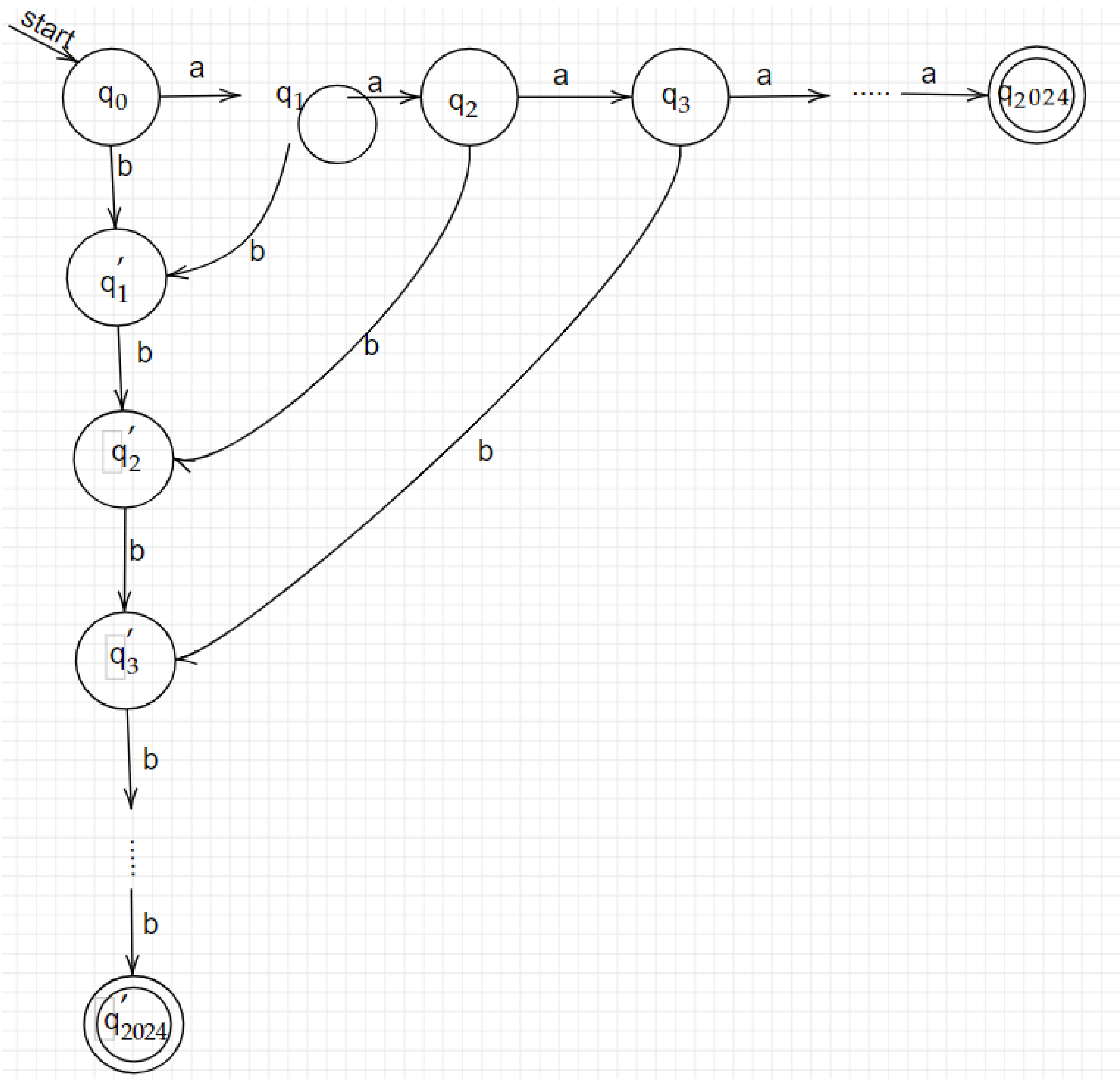
$Q = \{q_{0\rightarrow 2024}, q'_{1\rightarrow 2024}\}$

$\Sigma = \{a, b\}$

$I = \{q_0\}$

R כמו בשרטוט

$F = \{q_{2024}, q'_{2024}\}$



לפי הגדרת האוטומט רץ בהתחלה על האות a i פעמים כך ש i מספר כלשהו
אחרי שקבל i פעמים האות a, אם $i = 2024$ אז q_{2024} הוא מצב מקבל .

אחרת, הוא עובר למצב אחר וירוץ j פעמים כך ש מקיים $j = 2024 - i$ ומגיע למצב q'_{2024} כך שמתקיים $i + j = 2024$ והוא מצב מקבל

שאלה 5:

נתון L שפה רגולרית.
צ"ל ש- L שפת שרשרת.
הוכחה:

תהי L שפה רגולרית,
אזי לפי למת הניפוח קיים $n > 0$ כך שלכל $w \in L$ מתקיים $|w| \geq n$.
לכל מילה כזאת קיים פירוק מהצורה $w = uvx$ כך ש $|uv| \geq n$, $|v| > 0$.
ולכל $i \geq 0$ טבעי מתקיים $uv^ix \in L$

בגלל שזה לכל i אז קיימים אינסוף מילים כאלה לפי ה-i

ואז לפי ההגדרה מתקיים: $w_0 = uvx = w \quad (i = 0)$

$$w_i = uv^ix$$
$$w_{i+1} = uv^{i+1}x$$
$$\Downarrow \text{נחסיר}$$
$$|w_{i+1}| - |w_i| = |uv^{i+1}x| - |uv^ix| = |v^{i+1}| - |v^i| < |v| \leq n$$

בעצם ממה שקיבלנו $|w_{i+1}| - |w_i| < n$ ומזה ש $|v| > 0$ הגדרנו סדרת מילים אינסופית כך שהיא מקיימת את התנאי הדרוש ולכן L שפת שרשרת.