# מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים למדמ"ח
# 234129
# תרגיל בית 1


**לין אליאס**
**213473861**

**אמיר**
**325477784**

**וסים**
**214363315**

# **שאלה 1**

**סעיף א:**

$\{2,3,4,5\} \triangle \{1,2,3\} = \{2,3,4,5\} \setminus \{1,2,3\} \cup \{1,2,3\} \setminus \{2,3,4,5\} = \{4,5\} \cup \{1\} = \{1,4,5\}$

**סעיף ב:**

יהי $x$

$x \in A \triangle (A\cap B)$

$\Updownarrow$ **לפי הנתון**

$x \in (A \setminus (A\cap B)) \cup ((A\cap B) \setminus A)$

$\Updownarrow$ **הגדרת חיתוך**

$x \in (A \setminus (A\cap B))$ או $x \in ((A\cap B) \setminus A)$

**נחלק לשני האגפים לפי הגדרת החיסור:**

אגף שמאל:

$x \in (A\cap B)$ וגם $x \notin A$

$\Updownarrow$ **הגדרת חיתוך**

$x \in B$ וגם $x \in A$ וגם $x \notin A$

$\Updownarrow$

לא מתקיים ש $x \notin A$ וגם $x \in A$ לכן הביטוי FALSE ולא משפיע על קשר "או".

אגף ימין:

$x \in A$ וגם $x \notin (A \setminus (A\cap B))$

$\Updownarrow$ **הגדרת משלים**

$x \in A$ וגם $x \in (\overline{A \cap B})$

$\Updownarrow$ **כללי דה מורגן**

$x \in A$ וגם $x \in \overline{A} \cup \overline{B})$

$\Updownarrow$ **הגדרת משלים + איחוד**

$\Updownarrow$ **הגדרת משלים + איחוד**

$x \in A$ וגם $(x \notin A$ או $x \notin B)$

$\Updownarrow$ **תכונות קשרים לוגיים**

$(x \in A$ וגם $x \notin B)$ או $(x \in A$ וגם $x \notin A)$

$\Updownarrow$ $\Updownarrow$

$x \in A\setminus B$ <u>לא מתקיים ש $x \in A$ וגם $x \notin A$ לכן הביטוי FALSE ולא משפיע על קשר "או".</u>

$\blacksquare$

**<u>סעיף ג:</u>**

נתון : $A \triangle C = B \triangle C$

צ"ל: $A = B$

הוכחה :

1) נוכיח $A \subseteq B$

יהי $X$

- נחלק למקרים:
- $X \in A$ וגם $X \notin C$

$\Downarrow$ מהגדרת $\triangle$

$X \in A \triangle C$

$\Downarrow$ לפי הנתון ומהגדרת שוויון

$X \in B \triangle C$

נראה ש $X \in B$, אז נניח בשלילה $X \notin B$

לפי שמה הגדרנו $\Leftarrow$ $X \notin C$

$\Downarrow$ מהגדרת $\triangle$

$X \notin B \triangle C$

בסתירה לנתון

$\Leftarrow X \in B$

אז לפי הגדרת הכלה $A \subseteq B$ במקרה הזה.

- $X \in A$ וגם $X \in C$

$\Downarrow$ מהגדרת $\triangle$

$X \notin A \triangle C$

$\Downarrow$ לפי הנתון ומהגדרת שוויון

$X \notin B \triangle C$

$\Downarrow$ לפי הגדרת $\triangle$ וכי $X \in C$

$X \in B$

אז לפי הגדרת הכלה $A \subseteq B$ גם במקרה הזה.

- $X \notin A$ וגם $X \in C$

⇓ מהגדרת $\triangle$

$X \in A \triangle C$

⇓ לפי הנתון ומהגדרת שוויון

$X \in B \triangle C$

⇓ לפי הגדרת $\triangle$ וכי $X \in C$

$X \in B$

אז לפי הגדרת הכלה $B \subseteq A$ גם במקרה הזה.

הראינו שבכל המקרים של האיברים השייכים ל A מתקיים שהם גמ שייכים ל B
עכשיו נראה שזה גם מתקיים לכל האיברים ששיכים ל B, אז נראה שגם $A \subseteq B$

2) נוכיח $A \subseteq B$

יהי $X$

- נחלק למקרים:
- $X \in B$ וגם $X \notin C$

⇓ מהגדרת $\triangle$

$X \in B \triangle C$

⇓ לפי הנתון ומהגדרת שוויון

$X \in A \triangle C$

נראה ש $X \in A$, אז נניח בשלילה $X \notin A$

לפי שמה הגדרנו $\Leftarrow X \notin C$

⇓ מהגדרת $\triangle$

$X \notin A \triangle C$

בסתירה לנתון

$\Leftarrow X \in A$

אז לפי הגדרת הכלה $A \subseteq B$ במקרה הזה.

- $X \in B$ וגם $X \in C$

⇓ מהגדרת $\triangle$

$X \notin B \triangle C$

⇓ לפי הנתון ומהגדרת שוויון

$X \notin A \triangle C$

⇓ לפי הגדרת $\triangle$ וכי $X \in C$

$X \in A$

אז לפי הגדרת הכלה $A \subseteq B$ גם במקרה הזה.

- $X \notin B$ וגם $X \in C$

$\Downarrow$ מהגדרת $\triangle$

$X \in B \triangle C$

$\Downarrow$ לפי הנתון ומהגדרת שוויון

$X \in A \triangle C$

$\Downarrow$ לפי הגדרת $\triangle$ וכי $X \in C$

$X \in A$

אז לפי הגדרת הכלה $A \subseteq B$ גם במקרה הזה.

לסיכום, יש הכלה דו-כיוונית בין A ו B

$\Leftarrow$ A=B

■

**<u>סעיף ד:</u>**

נכתוב טענה שקולה: לכל A, B מתקיים שיש קבוצה D כך שתקיים $A \Delta D = B \Delta D$

$\Leftarrow$ הטענה לא נכונה, נתן דוגמא נגדית:

$$B = \{3, 4\} \quad A = \{1, 2\}$$

$\Leftarrow$ לפי ההוכחה של הסעיף הקודם מתקיים $A \Delta C = B \Delta C$ רק כאשר $A = B$ אבל בדוגמה הנגדית מתקיים ש $A \neq B$

$\Leftarrow$ לכן הטענה אינה נכונה ולא מתקיימת לכל A, B

**<u>סעיף ה:</u>**

יהי x כך ש

$x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

**⇕ הגדרת חיסור**

$x \in (A \cup B)$ וגם $x \notin (A \cap B)$

**⇕ הגדרת משלים**

$x \in (A \cup B)$ וגם $x \in (\overline{A \cap B})$

**⇕ כללי דה מורגן**

$x \in (A \cup B)$ וגם $x \in (\overline{A} \cup \overline{B})$

**⇕ הגדרת איחוד + משלים**

$(x \in A$ או $x \in B)$ וגם $(x \notin A$ או $x \notin B)$

**⇕ תכונות קשרים לוגיים**

$(x \in A$ וגם $x \notin A)$ או $(x \in A$ וגם $x \notin B)$ וגם $(x \in B$ וגם $x \notin A)$ או $(x \in B$ וגם $x \notin B)$

**⇕ לא מתקיים ש $x \notin A$ וגם $x \in A$, ולא מתקיים $x \notin B$ וגם $x \in B$ לכן שני הביטויים FALSE ולא משפיעים על קשר "או".**

$(x \in A$ וגם $x \notin B)$ וגם $(x \in B$ וגם $x \notin A)$

**⇕ הגדרת חיסור**

$x \in (A \setminus B)$ או $x \in (A \setminus B)$

**⇕ הגדרת איחוד**

$x \in ((A \setminus B) \cup (B \setminus A))$

**⇕ הגדרת $\Delta$**

$x \in A \Delta B$

■

## שאלה 2:

סעיף א :

כיוון 1:- $\Leftarrow$

נתון $A \subseteq B$ ונוכיח ש- $p(A) \subseteq p(B) \quad p(B) \subseteq p(A)$

יהי X : $x \in A$ , מהנתון $\leftarrow$ $x \in B$ (*)

תהי C , כך ש- $C \in P(A)$

$\Downarrow$ (הגדרת קבוצת החזקה)

$\forall X \in C \quad , \quad X \in A$

מ-(*) נקבל $\leftarrow$ $X \in B$

$\Downarrow$ (הגדרת קבוצת החזקה)

$C \in P(B)$

כך הוכחנו ש- $P(A) \subseteq P(B)$ .

כיוון 2:- $\Rightarrow$

נתון : $P(A) \subseteq P(B)$ צ"ל ש- $A \subseteq B$

תהי F : $F \in P(A)$ $\Leftarrow$ מהנתון מתקיים $F \in P(B)$

$\Downarrow$ (מהגדרת קבוצת החזקה)

$\forall X \in F$ מתקיים ש $X \in A$ , $X \in B$

$\Downarrow$ (הגדרת הכלה)

$A \subseteq B$ $\blacksquare$

סעיף ב :

**הטענה לא נכונה**, אז נתן דוגמה נגדית.

תהי_ $A = \{1, 2\}$

$B = \{3, 4\}$

מתקיים ש- $A \backslash B = \{1, 2\}$

אבל

$P(A) = \{\{2\}, \{1\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$

$P(B) = \{\{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \emptyset\}$

מתקיים ש- $P(A) \backslash P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

והוא לא שווה ל- $A \backslash B = \{1, 2\}$

$\blacksquare$

<u>סעיף ג :</u>

**הטענה נכונה.**

תהי C כך ש- $C \in P(A) \cap P(B)$

$\Updownarrow$ (הגדרה איחוד)

$C \in P(A) \wedge C \in P(B)$

$\Updownarrow$ (הגדרת קבוצת קבוצות)

$C \subseteq P(A) \wedge C \subseteq P(B)$

$\Updownarrow$ (הכלה הגדרת $+$ קבוצה חזקה)

$\forall X \in C \quad : \quad X \in A \wedge X \in B$

$\Updownarrow$ (הגדרת איחוד)

$\forall X \in C \qquad X \in A \cap B$

$\Updownarrow$ (הגדרת קבוצת חזקה)

$C \subseteq P(A \cap B)$

$\Updownarrow$ (הגדרת קבוצת חזקה)

$C \in P(A \cap B)$

$\blacksquare$

<u>סעיף ד :</u>

**הטענה לא נכונה**, אז נתן דוגמה נגדית.

$A = \{1, 3\}$

$B = \{1, 2\}$

$P(A\Delta B) = P(\{3, 2\}) = \{\{3\}, \{2\}, \{2, 3\}, \emptyset\}$

$P(A) = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \emptyset\}$

$P(B) = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \emptyset\}$

$P(A)\Delta P(B) = \{\{3\}\{1, 3\}\} \cup \{\{2\}, \{1, 2\}\} = \{\{3\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

**אז נקבל ש** $P(A)\Delta P(B) \neq P(A\Delta B)$

סעיף ה:

צריך להוכיח ש: (A × A) \ (B × C) = (A \ B) × (A \ C)

דוגמה נגדית:

A={1,2}  B={2}  C={1,3}

$A \times A = \{1, 2\} \times \{1, 2\}$

= {{Ø},{1,1},{1,2},{2,1},{2,2}}

$B \times C = \{2\} \times \{1, 3\}$

={{2,1},{2,3},{Ø}}

(A × A) \ (B × C)

={{1,1},{1,2},{2,2},}

(A \ B) × (A \ C) =

A\B={1,2}\{2}={1}

A\C={1,2}\{1,3}={2}

(A \ B) × (A \ C)=

$\{1\} \times \{2\} = \{\{1, 2\}\}$

לכן מהדוגמה התקיים ש : $\{\{1, 1\}, \{1, 2\}, \{2, 2\}\} \neq \{\{1, 2\}\}$

אז $(A \times A) \setminus (B \times C) \neq (A \setminus B) \times (A \setminus C)$

סעיף ו:

**הטענה נכונה**

מהנתון : $A \neq \emptyset$ $\Leftarrow$ קיים a כך ש- $a \in A$

$A \times (B \cup C) = A \times (B \cap C)$ צ"ל $B = C$

תהיינה A,B,C קבוצות

יהי X , נוכיח ש- $B \cup C = B \cap C$ $\quad X \in B \cup C$

$\Updownarrow$ מהנתון

$a \in A \wedge X \in B \cup C$

$\Updownarrow$ הגדרת מכפלה קרטיזת

$(a, x) \in A \times (B \cup C)$

$\Updownarrow$ מהנתון

$(a, x) \in A \times (B \cap C)$

$\Updownarrow$ הגדרת מכפלה קרטיזת

$a \in A \wedge X \in B \cap C$

$\Updownarrow$ הגדרנו $a \in A = true$ לכן לא משפיעה על גם

$X \in B \cap C$

הראינו ש $B \cap C = B \cup C$*

עכשיו B=A יהי $X \in B \cap C \wedge X \in B \cup C$

$\Updownarrow$ הגדרת חיתוך ואיחוד

$(X \in B \wedge X \in C) \wedge (X \in B \vee X \in C)$

$\Updownarrow$ לפי תכונות קשרים לוגיים

$(X \in B \wedge X \in C \wedge X \in B) \vee (X \in C \wedge X \in B \wedge X \in C)$

$\Updownarrow$ לפי תכונות קשרים לוגיים

$(X \in B \wedge X \in C) \vee (X \in C \wedge X \in B)$

$\Updownarrow$ לפי תכונות קשרים לוגיים

$X \in B \wedge X \in C$

$\Updownarrow$ הגדרת שוויון

B=C ■

## שאלה 3

סעיף א :

צ"ל: $A_n = \{0, 1,....., n\}$ מתכנסת ל $N$.

הוכחה:

נתחיל להוכיח ש N היא הגבול של $A_n$

נוכיח תנאי 1 -

יהי $b \in N$ נבחר N=b יהי n>N נראה ש- $b \in A_n$ , $A_n$ מכיל את כל הטבעיים בין 0 ל- n(כולל)

בפרט $0 \le N \le n$ אז $N = b,$ $b \in A_n$ .

נוכיח תנאי 2 -

יהי $b \notin N$ נבחר N=0 יהי n>N ונראה ש- $b \notin A_n$ , לפי הגדרת $A_n$ כל האיברים בה טבעיים

אז $b \notin A_n$.

← הוכנו את שני התנאים אזי לפי הגדרת הגבול ⇐ $N$ גבול של $A_n$

⇐ מהגדרת התכנסות, $A_n$ מתכנסת ל $N$.

■

סעיף ב :

צ"ל: $B_n$ אינה מתכנסת לאף קבוצה.

הוכחה:

תהי קבוצה $L$ נוכי ש- $L$ אינה גבול של $B_n$ ולכן מהגדרת התכנסות $B_n$ אינה מתכנסת ל $L$.

נחלק למקרים, ונראה שכל מקרה $L$ אינה גבול של $B_n$

נניח בשלילה ש- $L$ גבול של $B_n$:

מקרה 1 : $0 \in L$, מהגדרת גבול, קיים $N$ ∋N כך שלכל $n \in N$ כך ש- $n > N$ אז $0 \in B_n$

אבל $B_{2N+1} = \{1\} \notin 0$ , קיבלנו סתירה.

מקרה 2 : $0 \notin L$ , מהגדרת גבול, קיים $N$ ∋N כך שלכל $n \in N$ כך ש- $n > N$ אז $0 \notin B_n$

בפרט יתקיים עבור $n_0 = 2N + 2$ , $n_0 > N$ לכן $0 \notin B_n$ , אבל 2N+2 זוגי לכן מהגדרת $B_n$

$0 \in B_n$ , קיבלנו סתירה.

מסקנה - $L$ אינו גבול של $B_n$ אזי הסדרה אינה מתכנסת ל- $L$.

■