מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים - 234129
תרגיל בית 3

סמסטר חורף 2023-2024

המתרגל האחראי על התרגיל: אדם נייס

תאריך הגשה: 14.03.24

נושאי התרגיל: פונקציות, עוצמות ושקילות קבוצות, קבוצות בנות־מנייה, שיטת הלכסון

הוראות לפתרון התרגיל:

- בכל מקרה בו אתם מתבקשים להוכיח, עליכם לכתוב הוכחה פורמלית מלאה. עליכם לפרט את כל שלבי הפתרון.
- בכל מקרה בו אתם מנסים להפריך, נסו למצוא דוגמה נגדית קצרה ופשוטה ככל האפשר. זכרו (1) להגדירה במפורש, (2) להוכיח כי היא מקיימת את הנתונים, ו-(3) להוכיח כי אינה מקיימת את מסקנת הטענה.
- אם נדרש הסבר או נימוק בלבד, עליו להיות קצר אך בעל מבנה כללי של הוכחה (למשל הסבר/נימוק מדוע שתי קבוצות שוות צריך לכלול שני כיווני הכלה, וכו').

הוראות הגשה:

- ההגשה אלקטרונית דרך אתר הקורס.
- יש להגיש קובץ PDF בלבד.
- על הפתרון להיות **מוקלד**! אין להגיש פתרונות בכתב יד. איורים וציורים ניתן לצייר ביד.
- ההגשה היא בקבוצות של 3 סטודנטים.

תזכורת: הבדיקה היא מדגמית, ראו את סכמת הציונים באתר הקורס.

בהצלחה!

שאלה 1

תהי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקציה. נגדיר פונקציה $F : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כך: לכל $n \in \mathbb{N}$,

$$F(n) = \{f(m) \mid m \in \mathbb{N},\ m \leq n\}$$

(א) תנו דוגמה לפונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ שהיא על ואינה חח"ע, וחשבו עבורה את $F(5)$.

(ב) הוכיחו: אם f חח"ע, אז F חח"ע.

(ג) הוכיחו / הפריכו: אם F חח"ע, אז f חח"ע.

(ד) הוכיחו / הפריכו: אם f על, אז F על.

שאלה 2

תהיינה A, B, C קבוצות. נתון כי $|A| = |B|$.

הוכיחו כי $|A^C| = |B^C|$.

תזכורת: Y^X היא קבוצת כל הפונקציות מ־X ל־Y.

שאלה 3

פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ נקראת **מחזורית** אם קיים $p \geq 1$ טבעי כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $f(n) = f(n+p)$.

(א) הוכיחו / הפריכו: לכל $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, אם $f \circ f$ מחזורית, אז f מחזורית.

(ב) הוכיחו שהקבוצה הבאה בת־מנייה:

$$X = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{מחזורית } f\}$$

(ג) הוכיחו באמצעות לכסון שהקבוצה הבאה אינה בת־מנייה:

$$Y = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \text{אינה מחזורית } f\}$$

שאלה 4

תהי $\mathbb{Z}$ קבוצת המספרים השלמים.

נסמן: $\mathbb{Z}^+ = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$ ו־$\mathbb{Z}^- = \{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$.

הוכיחו באמצעות לכסון שהקבוצה הבאה אינה בת־מנייה:

$$\left\{X \subseteq \mathbb{Z} \mid X \subseteq \mathbb{Z}^+ \text{ או } X \subseteq \mathbb{Z}^-\right\}$$

שאלה 5

תהי $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}} = a_0, a_1, a_2, ...$ סדרה של מספרים טבעיים.

(א) נאמר ש־$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ **סדרה מתקבעת** אם קיים $i \in \mathbb{N}$ כך שלכל $j \in \mathbb{N}$, אם $j > i$ אז $a_i = a_j$.

נסמן ב־X את קבוצת כל הסדרות המתקבעות של הטבעיים.

<u>הוכיחו</u>: X בת־מנייה.

(ב) נאמר ש־$\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ **סדרה מגוונת** אם לכל $i, j \in \mathbb{N}$, אם $j \neq i$ אז $a_i \neq a_j$.

נסמן ב־Y את קבוצת כל הסדרות המגוונות של הטבעיים.

<u>הוכיחו באמצעות לכסון</u> ש־Y אינה בת־מנייה.