מבוא לתורת הקבוצות ואוטומטים – 234129
תרגיל בית 1 – פתרון

סמסטר חורף 2023-2024

<u>המתרגל האחראי על התרגיל:</u> אלון ירושלמי

<u>תאריך הגשה:</u> 08.02.24

<u>נושאי התרגיל:</u> קבוצות - הכלה, פעולות על קבוצות, מכפלה קרטזית וקבוצת החזקה

<u>הוראות לפתרון התרגיל:</u>

- בכל מקרה בו אתם מתבקשים להוכיח, עליכם לכתוב הוכחה פורמלית מלאה. עליכם לפרט את כל שלבי הפתרון.
- בכל מקרה בו אתם מנסים להפריך, <u>נסו למצוא דוגמה נגדית קצרה ופשוטה ככל האפשר</u>. זכרו (1) להגדירה במפורש, (2) להוכיח כי היא מקיימת את הנתונים, ו-(3) להוכיח כי אינה מקיימת את מסקנת הטענה.
- אם נדרש הסבר או נימוק בלבד, עליו להיות <u>קצר</u> אך בעל מבנה כללי של הוכחה (למשל הסבר/נימוק מדוע שתי קבוצות שוות צריך לכלול שני כיווני הכלה, וכו').

<u>הוראות הגשה:</u>

- ההגשה אלקטרונית דרך אתר הקורס.
- יש להגיש קובץ PDF בלבד.
- על הפתרון להיות **מוקלד!** אין להגיש פתרונות בכתב יד. איורים וציורים ניתן לצייר ביד.
- ההגשה היא בקבוצות של 3 סטודנטים.

<u>תזכורת:</u> הבדיקה היא מדגמית, ראו את סכמת הציונים באתר הקורס.

בהצלחה!

שאלה 1

תהיינה A, B, C קבוצות.

נגדיר את **ההפרש הסימטרי** בין שתי קבוצות A, B כך:

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

(א) חשבו: $\{2,3,4,5\} \triangle \{1,2,3\}$

(ב) הוכיחו: $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$

(ג) הוכיחו: אם $A \triangle C = B \triangle C$ אז $A = B$.

(ד) הוכיחו / הפריכו: קיימת קבוצה D כך ש־$A \triangle D = B \triangle D$.

(ה) הוכיחו / הפריכו: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

פתרון שאלה 1

(א) יש לחשב את $\{2,3,4,5\} \triangle \{1,2,3\}$.

לפי הגדרה, עלינו לחשב את $(\{2,3,4,5\} \setminus \{1,2,3\}) \cup (\{1,2,3\} \setminus \{2,3,4,5\})$

נזכיר את הגדרת הפרש קבוצות: $A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$. נחשב כל צד בנפרד:

$$\{\underline{2}, \underline{3}, 4, 5\} \setminus \{1, \underline{2}, \underline{3}\} = \{4, 5\}$$
$$\{1, \underline{2}, \underline{3}\} \setminus \{\underline{2}, \underline{3}, 4, 5\} = \{1\}$$

אז: $\{2,3,4,5\} \triangle \{1,2,3\} = \{4,5\} \cup \{1\} = \{1,4,5\}$.

(ב) צריך להוכיח: $A \setminus B = A \triangle (A \cap B)$. יהי x איבר כלשהו, אז מתקיים:

$$\begin{aligned}
& x \in A \triangle (A \cap B) && \iff \text{(הגדרת } \triangle \text{)} \\
& x \in (A \setminus (A \cap B)) \cup ((A \cap B) \setminus A) && \iff \text{(הגדרת איחוד)} \\
& x \in A \setminus (A \cap B) \ \vee \ x \in (A \cap B) \setminus A && \iff \text{(הגדרת הפרש)} \\
& (x \in A \ \wedge \ x \notin A \cap B) \vee (x \in A \cap B \ \wedge \ x \notin A) && \iff \text{(הגדרת חיתוך)} \\
& (x \in A \ \wedge \ x \notin A \cap B) \vee (x \in A \ \wedge x \in B \ \wedge \ x \notin A) && \iff (*) \\
& x \in A \ \wedge \ x \notin A \cap B && \iff \text{(שלילת הגדרת חיתוך)} \\
& x \in A \ \wedge \ (x \notin A \ \vee x \notin B) && \iff \text{(דה־מורגן)} \\
& (x \in A \wedge \ x \notin A) \ \vee \ (x \in A \ \wedge x \notin B)) && \iff (*) \\
& x \in A \ \wedge x \notin B && \iff \text{(הגדרת הפרש)} \\
& x \in A \setminus B
\end{aligned}$$

$(*)$ לא יכול להתקיים $x \in A$ וגם $x \notin A$, ולכן צד זה של ה־$\vee$ אינו רלוונטי.

(ג) אנו מתבקשים להוכיח שוויון קבוצות, ולכן נַראה הכלה דו־כיוונית.

נוכיח כי $A \subseteq B$, הכיוון השני סימטרי.

יהי $x \in A$. נפריד למקרים:

- אם $x \in C$, מהגדרת הפרש $x \notin A \setminus C$ וגם $x \notin C \setminus A$.
  מהגדרת איחוד $x \notin (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$, כלומר $x \notin A \triangle C$.
  מהנתון נובע $x \notin B \triangle C$, כלומר $x \notin (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$, ולכן, $x \notin B \setminus C$ וגם $x \notin C \setminus B$.
  מהגדרת הפרש $x \in C \ \vee \ x \notin B$ **וגם** $x \in B \ \vee \ x \notin C$.
  הנחנו כי $x \in C$, ולכן חייב להתקיים $x \in B$.
- אם $x \notin C$, מהגדרת הפרש $x \in A \setminus C$.
  מהגדרת איחוד $x \in (A \setminus C) \cup (C \setminus A)$, כלומר $x \in A \triangle C$.
  מהנתון נובע $x \in B \triangle C$, כלומר $x \in (B \setminus C) \cup (C \setminus B)$, ולכן, $x \in B \setminus C$ או $x \in C \setminus B$.
  מהגדרת הפרש $x \notin C \ \wedge \ x \in B$ **או** $x \notin B \ \wedge \ x \in C$.
  הנחנו כי $x \notin C$, ולכן חייב להתקיים $x \in B$.

(ד) <u>הטענה אינה נכונה!</u>

הוכיחו/הפריכו: קיימת קבוצה D כך ש־$A \triangle D = B \triangle D$.

נשים לב שהשאלה היא האם לכל A, B קיימת D כך ש־$A \triangle D = B \triangle D$.

כדי להפריך, עלינו לבחור A, B במפורש ולהראות שאין אף קבוצה D שגורמת לשוויון להתקיים.

<u>הפרכה</u>: נבחר $A = \{1\}, B = \emptyset$. אכן $A \neq B$.

נניח בשלילה שקיימת קבוצה D כך ש־$A \triangle D = B \triangle D$.

לפי סעיף ג, מתקיים $A = B$, בסתירה לכך שהן שונות.

לכן, הנחת השלילה שגויה, ולא קיימת D כזו.

(ה) <u>הטענה נכונה!</u>

הוכיחו/הפריכו: $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

אינטואיציה: ניתן לראות בקלות ע״י דיאגרמות וון.

<u>הוכחה</u>: יהי x.

$$
\begin{array}{lll}
x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B) & \iff & (\text{הגדרת הפרש}) \\
x \in A \cup B \ \wedge \ x \notin A \cap B & \iff & (\text{הגדרת איחוד וחיתוך}) \\
(x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin A \vee x \notin B) & \iff & (\text{תכונות קשרים לוגיים}) \\
[x \in A \wedge (x \notin A \vee x \notin B)] \vee [x \in B \wedge (x \notin A \vee x \notin B)] & \iff & (\text{תכונות קשרים לוגיים}) \\
[(\underline{x \in A \wedge x \notin A}) \vee (x \in A \wedge x \notin B)] & & \\
\quad \vee [(x \in B \wedge x \notin A) \vee (\underline{x \in B \wedge x \notin B})] & \iff & (*) \\
(x \in A \wedge x \notin B) \ \vee \ (x \in B \wedge x \notin A) & \iff & (\text{הגדרת הפרש}) \\
x \in A \setminus B \ \vee \ x \in B \setminus A & \iff & (\text{הגדרת איחוד}) \\
x \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A) & \iff & (\text{הגדרת הפרש סימטרי}) \\
x \in A \triangle B & &
\end{array}
$$

שאלה 2

תהיינה A, B, C קבוצות. <u>הוכיחו / הפריכו</u>:

(א) $A \subseteq B$ אם"ם $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

(ב) $A \setminus B = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$

(ג) $\mathcal{P}(A \cap B) \;=\; \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$

(ד) $\mathcal{P}(A \triangle B) = \mathcal{P}(A) \triangle \mathcal{P}(B)$

(ה) $(A \times A) \setminus (B \times C) = (A \setminus B) \times (A \setminus C)$

(ו) אם $A \neq \emptyset$ וידוע כי $A \times (B \cup C) = A \times (B \cap C)$, אז $B = C$

פתרון שאלה 2

(א) <u>הטענה נכונה!</u> $A \subseteq B$ אמ"מ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

הוכחה: תהיינה A, B קבוצות. נוכיח את השקילות ע"י הוכחת גרירה בשני הכיוונים:

<u>כיוון ראשון</u>: נתון $A \subseteq B$. צריך להוכיח $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

תהי קבוצה X.

$X \in \mathcal{P}(A) \Longleftarrow$ מהגדרת קבוצת חזקה

$X \subseteq A \Longleftarrow$ מהנתון ומטרנזיטיביות הכלה

$X \subseteq B \Longleftarrow$ מהגדרת קבוצת חזקה

$X \in \mathcal{P}(B)$.

מסקנה: מהגדרת הכלה, $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

<u>כיוון שני</u>: נתון $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$. צריך להוכיח $A \subseteq B$.

כל קבוצה מוכלת בעצמה $A \subseteq A \Longleftarrow$ מהגדרת קבוצת חזקה $\Longleftarrow$

$A \in \mathcal{P}(A) \Longleftarrow$ מהנתון והגדרת הכלה

$A \in \mathcal{P}(B) \Longleftarrow$ מהגדרת קבוצת חזקה

$A \subseteq B$.

מסקנה מ(1) ו(2): השקילות מתקיימת!

(ב) <u>הטענה אינה נכונה!</u> הוכיחו\הפריכו: $A \backslash B = \mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B)$

הפרכה: נגדיר במפורש A, B: $A = \{1\}, B = \emptyset$. אז:

$A \backslash B = \{1\}, \mathcal{P}(A) = \{\{1\}, \emptyset\}, \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}, \mathcal{P}(A) \backslash \mathcal{P}(B) = \{\{1\}\}$

וכן מתקיים $\{1\} \neq \{\{1\}\}$.

(ג) <u>הטענה נכונה!</u> הוכיחו/הפריכו: $\mathcal{P}(A\cap B)=\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)$.

נוכיח. יהיו A,B קבוצות. תהי X קבוצה.

$$\begin{aligned}
&X\in\mathcal{P}(A\cap B) &&\iff \text{(הגדרת קבוצת חזקה)}\\
&X\subseteq A\cap B &&\iff \text{(הגדרת הכלה)}\\
&\forall x\in X: x\in A\cap B &&\iff \text{(הגדרת חיתוך)}\\
&\forall x\in X: x\in A\wedge x\in B &&\iff \text{(תכונות הקשר וגם)}\\
&(\forall x\in X: x\in A)\wedge(\forall x\in X: x\in B) &&\iff \text{(הגדרת הכלה)}\\
&X\subseteq A\ \wedge\ X\subseteq B &&\iff \text{(הגדרת קבוצת חזקה)}\\
&X\in\mathcal{P}(A)\ \wedge\ X\in\mathcal{P}(B) &&\iff \text{(הגדרת חיתוך)}\\
&X\in\mathcal{P}(A)\cap\mathcal{P}(B)
\end{aligned}$$

(ד) <u>הטענה אינה נכונה!</u> הוכח/הפרך: $\mathcal{P}(A\triangle B)=\mathcal{P}(A)\triangle\mathcal{P}(B)$.

דוגמה נגדית:

$$A=\emptyset, B=\emptyset, A\triangle B=\emptyset, \mathcal{P}(A\triangle B)=\{\emptyset\}=\mathcal{P}(A)=\mathcal{P}(B),$$

$$\mathcal{P}(A)\triangle\mathcal{P}(B)=\emptyset$$

מתקיים $\{\emptyset\}\neq\emptyset$!

(ה) <u>הטענה אינה נכונה!</u> הוכיחו/הפריכו: $(A\times A)\setminus(B\times C)=(A\backslash B)\times(A\backslash C)$.

הפרכה: נגדיר במפורש A,B,C.

$$A=\{2,3\}, B=\{2\}, C=\emptyset$$

$$A\times A=\{(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$$

$$B\times C=\emptyset$$

$$(A\times A)\setminus(B\times C)=\{(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}$$

נסתכל גם על הצד השני:

$$A\backslash B=\{3\}$$

$$A\backslash C=\{2,3\}$$

$$(A\backslash B)\times(A\backslash C)=\{(3,2),(3,3)\}$$

ניתן לראות:

$$\{(2,2),(3,3),(2,3),(3,2)\}\neq\{(3,2),(3,3)\}$$

(ו) <u>הטענה נכונה!</u> הוכיחו/הפריכו: אם $A\neq\emptyset$ וידוע כי $A\times(B\cup C)=A\times(B\cap C)$ אז $B=C$.

הוכחה: תהינה A,B,C קבוצות.

$A\times(B\cup C)=A\times(B\cap C)$ $\Longleftarrow$ הגדרת שיוויון קבוצות

$\forall(a,x):((a,x)\in A\times(B\cup C))\leftrightarrow((a,x)\in A\times(B\cap C))$ $\Longleftarrow$ מהגדרת מכפלה קרטזית

$\forall(a,x):(a\in A\wedge x\in B\cup C)\leftrightarrow(a\in A\wedge x\in B\cap C)$ $\Longleftarrow$ תכונה של $\forall$

$\forall a \forall x : (a \in A \wedge x \in B \cup C) \leftrightarrow (a \in A \wedge x \in B \cap C) \Longleftarrow$ נתון ש$A \neq \emptyset$, לכן קיים $a_0 \in A$. מה שמתקיים לכל a מתקיים בפרט לa_0.

$\forall x : (a_0 \in A \wedge x \in B \cup C) \leftrightarrow (a_0 \in A \wedge x \in B \cap C) \Longleftarrow$ הטענה $a_0 \in A$ שקולה לאמת, לכן ניתן להתעלם ממנה בביטוי "וגם".

$\forall x : (x \in B \cup C) \leftrightarrow (x \in B \cap C) \Longleftarrow$ מהגדרת שיוויון קבוצות

$B \cup C = B \cap C$

שאלה 3

תהי $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} = A_0, A_1, A_2, ...$ סדרת קבוצות.

נאמר שקבוצה B היא **גבול** של הסדרה $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ אם:

- לכל $b \in B$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$, מתקיים $b \in A_n$.
- לכל $b \notin B$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$, מתקיים $b \notin A_n$.

במקרה זה, נאמר ש־$(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **מתכנסת** ל־B.

(א) הוכיחו: סדרת הקבוצות $A_n = \{0, 1, ..., n\}$ מתכנסת ל־$\mathbb{N}$.

(ב) הוכיחו: סדרת הקבוצות $B_n = \begin{cases} \{0\} & n \text{ זוגי} \\ \{1\} & n \text{ אי־זוגי} \end{cases}$ אינה מתכנסת לאף קבוצה.

פתרון שאלה 3

(א) צריך להוכיח שסדרת הקבוצות A_n מתכנסת ל$\mathbb{N}$.

לפי הגדרת התכנסות, צריך להוכיח ש$\mathbb{N}$ הוא גבול של הסדרה (A_n).

לפי הגדרת גבול, יש להוכיח את שני התנאים הבאים:

- יהי $b \in \mathbb{N}$. נגדיר $N = b$. יהי $n > N$.
  $b \in A_n$ מיידית מהגדרת A_n - שכן $b = N < n$.
- יהי $b \notin \mathbb{N}$ כלומר, b אינו מספר טבעי.
  עבור $N = 0$, לכל $n > N$ אז $b \notin A_n$.
  יהי $n > N$. מהגדרת הסדרה, $A_n \subseteq \mathbb{N}$, אבל $b \notin \mathbb{N}$, אז $b \notin A_n$.

הראינו כי $\mathbb{N}$ מקיימת את שני התנאים בהגדרת גבול של סדרה ביחס לסדרה $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
אז $\mathbb{N}$ היא גבול של הסדרה $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$. אז מהגדרת התכנסות, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ מתכנסת ל-$\mathbb{N}$.

(ב) צריך להוכיח שסדרת הקבוצות B_n אינה מתכנסת לאף קבוצה.

נניח בשלילה כי קיימת קבוצה C כך ש$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ מתכנסת לC. אז מהגדרת התכנסות, C היא גבול של הסדרה $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$. נחלק למקרים:

<u>מקרה 1</u>: $0 \in C$.

מהגדרת גבול של סדרה, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$, מתקיים $0 \in B_n$.

מתקיים ש- $n_0 = 2N + 1$ הוא מספר אי זוגי, וגם גדול מN. אז $0 \in B_{n_0}$. אבל מהגדרת B_n, מתקיים $B_{n_0} = B_{2N+1} = \{1\}$ כלומר $0 \notin B_{n_0}$. קיבלנו סתירה!

<u>מקרה 2</u>: $0 \notin C$.

מהגדרת גבול של סדרה, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$, מתקיים $0 \notin B_n$.

מתקיים ש- $n_0 = 2N + 2$ הוא מספר זוגי, וגם גדול מN. (שימו לב! $2N$ הוא אמנם מספר זוגי, אך אינו בהכרח גדול מN, אם $N = 0$!). אז $0 \notin B_{n_0}$.

מצד שני, מהגדרת B_n: $B_{n_0} = B_{2N+2} = \{0\}$ לכן $0 \in B_n$. קיבלנו סתירה!

מסקנה: לא קיימת קבוצה C כנ"ל.