"ทำดีกว่านี้ไม่ได้"

Binary search & Lower bounds for sorting

"divide & conquer"

$\le A[i]$ $\ge A[i]$

Obs: ดูที่ $A[i]$

→ $A[i] = x$ ✓

$A[i] < x$

$A[i] > x$

มี Array $A[1, \dots, n]$ ข้อมูลเรียงตามค่าจากน้อยไปมาก

Query: x หา i ที่ $A[i] = x$

หรือตอบว่า NOT FOUND

```
left ← 1 ;  right ← n
while left ≤ right                  ทำกี่รอบ
    i ← ⌊(left + right)/2⌋
    if A[i] = x ⇒ return i          (เจอ)
    else if A[i] < x : left ← i+1   (น้อยไป)
    else : right ← i-1              (มากไป)
```

$O(1)$

init: n

PROGRESS: จำนวน candidate $(right - left + 1)$ ลดลงอย่างน้อย 1/2 เท่า

จบเมื่อ #candidate = $\underline{1}$ (วนอีก 1 รอบ)

ถ้า run k รอบ #candidate $\le \frac{n}{2^k}$

Solve $\frac{n}{2^k} \le 1$; $k = \lceil \log_2 n \rceil = O(\log n)$

▷▷ คำถาม: ทำดีกว่านี้ได้หรือไม่? (lower bound)

ex สมมติว่า $A[1] = x$ ถามที่ $i = 1$ → ครั้งเดียวจบ!

อ่านค่า $A[i], x$

$\boxed{\le = \ge}$

Settings: เปรียบเทียบค่าเท่านั้น (Comparison-based model)

Information theoretically bound

▶ Input: $A[1, \dots, n]$; $A[i] = i$ [1|2|3|4|·|·····|n]

Query: x

Operation เทียบ x กับ $A[i]$ ได้ 3 ค่า <, =, >

Deterministic
ไม่มีการสุ่ม

< > > < < =

จบการทำงาน ⇒ output $i = x$

$A[i] = x$

▶ เนื่องจาก alg. เป็น deterministic จะตอบคำตอบเดิมเสมอ ถ้าผลลัพธ์ของการเปรียบเทียบเหมือนเดิม

ex: Comp: <, >, <, <, >, (=) → (10)

สมมติไม่มี (=)

เนื่องจากคำตอบที่เป็นไปได้มี n $\boxed{\text{แบบ}}$ ⇒ รูปแบบของผลลัพธ์ของการเปรียบเทียบที่ algorithm จะเห็นได้ $\geq$ n แบบ

สมมติว่า algorithm ตอบได้เสมอโดยถามไม่เกิน k ครั้ง (ไม่รวม =)

รูปแบบของคำตอบของการเปรียบเทียบที่เห็นได้ $\leq 2^k$

ดังนั้น $2^k \geq n \Rightarrow k \geq \log_2 n$ ■

$\boxed{\text{lowerbound}}$

Sorting lowerbound (Comparison-based sorting)

ถ้า algorithm ใช้แค่การเปรียบเทียบระหว่างข้อมูล ⇒ ต้องเปรียบเทียบอย่างน้อย

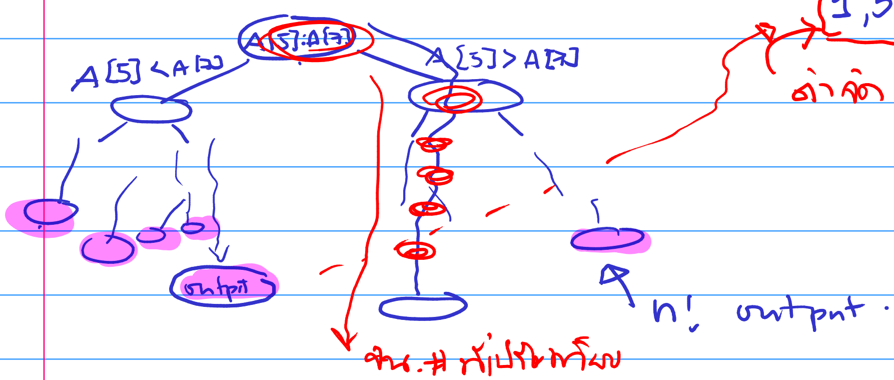
→ Assume input ไม่ซ้ำ / มีค่า 1 - n

output: return ลำดับของ index ของข้อมูลได้ด้วย

1, 5, 3, 4, 2 ⇒ 1, 2, 3, 4, 5

$\boxed{1, 5, 3, 4, 2}$

ถ้าจัดเรียงข้อมูล n ตัว : มี n! แบบ.



ให้ k เป็นจำนวนครั้งที่ (มากที่สุด) sorting algorithm เปรียบเทียบข้อมูลในการจัดเรียงข้อมูล n ตัว

⇒ output ที่เป็นไปได้ $\leq 2^k$ แบบ

แต่เรารู้ว่า $2^k \geq n!$

⇒ $k \geq \log_2 n!$??

$$\left(\frac{n}{2}\right)^{\left(\frac{n}{2}\right)} \leq \underbrace{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots\left(\frac{n}{2}+1\right)}_{n/2}\left(\frac{n}{2}\right)\cdots 2\cdot 1 \leq n^{n}$$

$$k \geq \log_2 n! \geq \log_2\left[(n/2)^{(n/2)}\right] = \left(\frac{n}{2}\right)\log_2\left(\frac{n}{2}\right) = \underline{\Omega(n\log n)}$$