Proof

Induction

Linear algebra

Theory of computation
- Automata
- Computability
- Complexity
  ใช้เวลาการทำงานยังไงเท่าไหร่

Randomized Algorithms
- Probability
  Etc. - Expectation
  - Variance

Proof

เทคนิคการพิสูจน์ (Logic)

- **Direct proof** พิสูจน์ทางตรง

อยากพิสูจน์ว่า $p \equiv T$ Etc. นาย A หนักไม่ถึง 80 ก็ชั่งนน.ให้ดู

เอาของอย่างหนึ่งหนัก 80 มาใช้ตาชั่งสองแขนวัด (พิสูจน์ทางอ้อม)

ถ้า.... กำหนดให้ ... แล้วเราจะได้ว่า...

"$p \to q$" $\Rightarrow$

p	q	p→q
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

Ex. ถ้า $\underbrace{a \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}}_{p}$

จะได้ว่า $\underbrace{a^2 \text{ เป็นจำนวนเต็มคู่}}_{q}$

เมื่อไหร่ก็ตามที่ p เป็นจริง q ต้องเป็นจริงด้วยเสมอ คนละความหมาย ใช้ไม่ได้!

proof : เมื่อ a เป็นจำนวนคู่ แสดงว่ามีจำนวนเต็มที่ $a = 2m$ / ให้ $\underbrace{m \in \mathbb{Z} \text{ แสดงว่า } a = 2m}$ ✗

พิจารณา $a^2 = (2m)^2$

$= 4m^2$

$= 2(2m^2)$

$a^2 = 2$ (จำนวนเต็ม) $\longrightarrow$ a^2 เป็นจำนวนคู่

ให้ p เป็นจริง

p เป็นเท็จจริงอยู่แล้วไม่ต้องสน

Theorem สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ

ถ้า $\underbrace{a^2 \text{ เป็นจำนวนคี่}}_{p}$ $\longrightarrow$ จะได้ว่า $\underbrace{a \text{ ต้องเป็นจำนวนคี่}}_{q}$

proof (direct proof)

เนื่องจาก a^2 เป็นจำนวนคี่ $\rightarrow$ [เขียนในรูป $2m+1$ $\exists m \in \mathbb{Z}$

there exist

แสดงว่าต้องมี $m \in \mathbb{Z}$ ที่

$a^2 = 2m+1$

พิจารณา $a = \begin{cases} \sqrt{2m+1} \\ -\sqrt{2m+1} \end{cases}$ ยากแล้ว direct proof เริ่มตัน

พิสูจน์ทางอ้อม (บางครั้ง direct proof แก้ออกได้ไม่ง่าย)

$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$

→ **contra positon** ทางอ้อม

proof by contra position

contra positive preposition of $p \to q$

เราจะแสดงว่า ถ้า $\underbrace{a \text{ เป็นจำนวนคู่}}_{\sim q}$ $\longrightarrow$ $\underbrace{a^2 \text{ เป็นจำนวนคู่}}_{\sim p}$

พิสูจน์ไปแล้วด้านบน

$\therefore$ ถ้า a^2 เป็นจน.คี่ → a เป็นจน.คี่

- พิสูจน์อะไรที่มีความ general life ค่อนข้างสูงมากๆ

proof by cases (แยกกรณี) ทางอ้อม

Etc.

a
$$\begin{cases} a > 0 & \_\_\_\_ \\ a < 0 & \_\_\_\_ \\ a = 0 & \_\_\_\_ \end{cases}$$

ในถุงมีถุงเท้า 3 คู่ สี แดง 1 เหลือง 1 เขียว 1
ถ้าหยิบถุงเท้าจากถุงมา 4 ข้างจะได้คู่สีที่เหมือนกันอย่างน้อย 1 คู่
proof: พิจารณาเมื่อ หยิบมาได้ 3 ข้าง

case

1: ใน 3 ข้างมีคู่ที่สีเหมือนกัน ✓

2: ใน 3 ข้างที่หยิบสีไม่ซ้ำกันเลย ✓
แดง 1, เหลือง 1, เขียว 1

proof by Contradiction ทางอ้อม

"p" เป็น จริง

อยากแสดง
ให้เห็นว่า p ≡ T

Assume ~p เป็นจริง, ข้อขัดแย้ง
แสดงให้เห็นว่าทำให้เกิด "contradiction"

$\underbrace{Q \wedge \sim Q}_{\text{เป็นไปไม่ได้}}$

~p เป็นจริงไม่ได้
แสดงว่า ~p ต้องเป็นจริง

$\underbrace{\sim p \rightarrow \boxed{Q \wedge \sim Q}^{F}}_{T}$

ต้อง F

$T \rightarrow F$ F

$F \rightarrow F$ T

∴ p เป็นจริง

Theorem.

"√2 is irrational" อตรรกยะ

Proof (by contradiction)

สมมติให้ √2 เป็นจำนวนตรรกยะ
แสดงว่า √2 เขียนในรูป
ผลหารของ $\underbrace{\text{จำนวนเต็ม 2 ตัวได้}}_{\text{มีได้หลายคู่}}$
เช่น x2 บนล่าง

ให้ a และ b
เป็นจนเต็มที่ไม่มีตัวประกอบร่วมกัน

$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$a^2 = 2b^2$

สังเกตว่า a^2 เป็นจน.คู่ ดังนั้น a
เป็นจำนวนคู่

[a^2 เป็นจน.คู่ → a เป็นจน.คู่]

ให้ m เป็นจำนวนเต็มที่ $a = 2m$

$(2m)^2 = 2b^2$

$4m^2 = 2b^2$

$\boxed{b^2 = 2m^2}$

∴ b^2 เป็นจนคู่ → b เป็นจน.คู่

บางคนอาจจะจบ บทพิสูจน์เลย

a และ b มีตัวประกอบร่วม (2)

เกิด contradiction #

Theorem : $\underbrace{\text{จำนวนเฉพาะ}}_{\text{prime}}$ มีจำนวนไม่จำกัด

proof : สมมติให้ จน.เฉพาะมีทั้งสิ้น n ตัว
ให้ $S = \{p_1, p_2, \dots p_n\}$ เป็น set ของ จน.เฉพาะทั้งหมด } assume $\sim p$ เดาได้ว่าจะทำ contradiction

พิจารณา $L = \overbrace{p_1 \cdot p_2 \cdots p_n}^{\text{คูณ}} + 1$

1. ถ้า L เป็นจำนวนเฉพาะ เกิดข้อขัดแย้ง
2. ถ้า L ไม่ใช่จำนวนเฉพาะ แสดงว่าต้องมีจน.เฉพาะบางตัวหารมันลงตัว } ถ้ามีจน.เฉพาะ q ที่หาร L ลงตัว ต้องไม่อยู่ใน set S ($q \notin S$) แต่ S คือ set จน.เฉพาะทั้งหมด L หารจะเหลือเศษ 1 } เกิดข้อขัดแย้ง

เป็น contradiction ที่มีการแยก case

Summary (overall)
- Direct
- Contra position
- Cases
- contradiction
- Induction

Mathematical Induction

ต้องการพิสูจน์ "P(k)" เป็นจริง $\forall k = 1, 2, 3, \dots$

$P(1)$ ✓
$P(2)$ ✓
$P(3)$ ✓
สรุปไม่ได้ ✗

$P(k) \rightarrow P(k+1)$ $\forall k = 1, 2, 3, \dots$
สรุปได้

Theorem $1+2+3+4+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ $\forall n \geq 1$

proof : Basis step: เมื่อ n=1

$$1 = \frac{1(2)}{2} = 1 \checkmark$$

Inductive step ถ้า $1+2+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$
จะได้ว่า $1+2+\dots+n+1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$

$P(1)$
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

พิจารณา $1+2+3+\dots+(n+1)$

$$= \underbrace{(1+2+3+\dots+n)} + (n+1)$$
$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$
$$= (n+1)\left[\frac{n}{2} + \frac{2}{2}\right]$$
$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \checkmark$$

$P(k)\ \forall\ k = 1, 2, \ldots$

$P(1) \checkmark \wedge (P(k) \rightarrow P(k+1))$

$\downarrow$ change

$P(2)$

จะสรุปได้แค่ว่า เป็นจริงตั้งแต่ 2 เป็นต้นไป ✗

$P(1) \wedge P(k) \rightarrow P(k+2)$ ✗ เป็นตัวคู่ไม่รู้จริงหรือเปล่า

$p(1) \wedge p(2) \wedge P(k) \rightarrow P(k+2)$ ✓

Etc. $P(k) \rightarrow P(k+3)$ ค่าง่ายสุด k เป็น 8 เป็นต้นไป

Basis $\rightarrow P(8), P(9), P(10)$

∴ Strong Induction

Basis : $P(1)$ ✓

$[p(1) \wedge p(2) \wedge \ldots \wedge P(k)] \rightarrow P(k+1)$ ✓

$\underbrace{\underbrace{p(1) \rightarrow p(2)}\quad p(3)}\quad P(4)\ \ldots$

Etc. ประโยคนี้เป็นจริงสำหรับ P ทุกตัวที่ less than n เป็นต้น

- Prove that for any integer $n \geq 1$
  $n^3 - n$ is a multiple of 6

proof.

เมื่อ $n = 1$ $\quad 1^3 - 1 = 0$ หารด้วย 6 ลงตัว ✓

Inductive step ถ้า $n^3 - n$ หารด้วย 6 ลงตัว

$(n+1)^3 - (n+1)$ หารด้วย 6 ลงตัวด้วย

พิจารณา $(n+1)^3 - (n+1) = n^3 - 3n^2 + 3n - n$

$= \underbrace{(n^3 - n)}_{\text{หารด้วย 6 ลงตัว}} + \underbrace{3\underbrace{n^2 + 3n)}_{3\boxed{n(n+1)}}}_{\text{หาร 6 ลงตัวด้วย}}$

$\boxed{n(n+1)}$ หาร 2 ลงตัว

prove that $\sum_{k=1,n} \sum_{\{a_1, a_2, \dots, a_k\} \subseteq \{1,2,\dots,n\}} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdots a_k} = n$

sum overall non empty subsets of $\{1, \dots, n\}$

proof by Induction on n

$\sum \frac{1}{a \dots} = \frac{1}{1} = 1 = n$ ✓

$\{1,2,3\}$

$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$

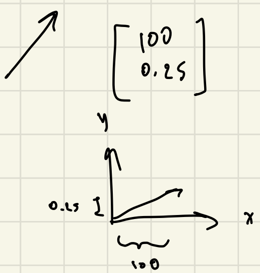
Inductive step แสดงว่า

$$\sum_{\{a_1, \dots a_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} \frac{1}{a_1 \cdots a_n} = n \rightarrow \sum_{\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{1, \dots, n+1\}} \frac{1}{a_1, \dots, a_{n+1}} = n+1$$

$$\sum_{\{a_1 \dots a_k\} \subseteq \{1, \dots, n+1\}} \frac{1}{a_1, \dots, a_k} = \sum_{\{a_1, \dots, a_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}} \frac{1}{a_1 \cdots a_k} + \sum \frac{1}{\dots}$$

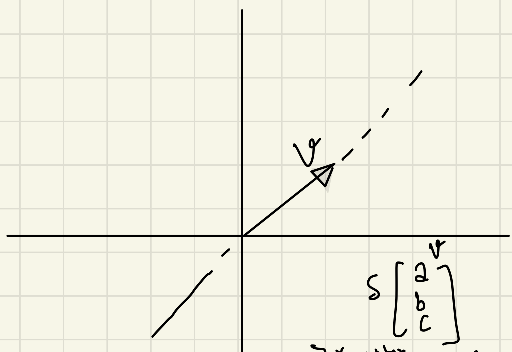
$$= n + \frac{1}{n+1}$$

Linear Algebra



$\begin{bmatrix} 100 \\ 0.25 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 100 \\ 0.25 \\ 78 \end{bmatrix}$ บอกระยะ ทิศทางและ dimension

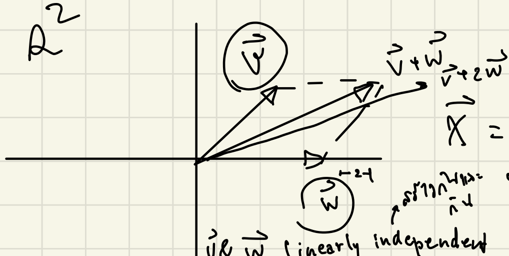


$s \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ ($\vec{v}$)

ได้ vector อะไรก็ได้ในแนวเดียวกัน

$= \begin{bmatrix} sa \\ sb \\ sc \end{bmatrix}$

R^2



$\vec{v}$ & $\vec{w}$ linearly independent

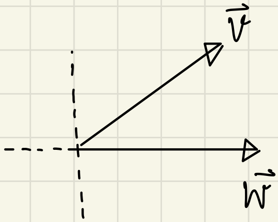
จะ span ได้ทั่ว R^2 (ระนาบ 2D)

สร้างจากทั้งคู่

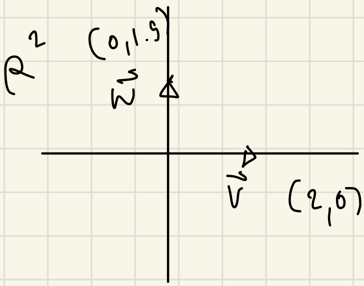
$\vec{X}$ = linear combination ของ $\vec{v}$ และ w ถ้าสามารถเขียนได้ในรูป

$\vec{X} = a\vec{v} + b\vec{w}$

ไปได้ทั่วทุกที่ของระนาบ 2D ($\vec{v} \neq \vec{w}$) เลย

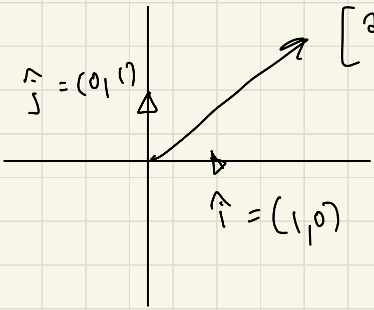


vector 3 ตัว span ทั่ว R^3
ถ้า linearly independent



basis ของ R^2

V, "basis" คือ set ของ linearly independent vector ที่ span แล้วได้ V

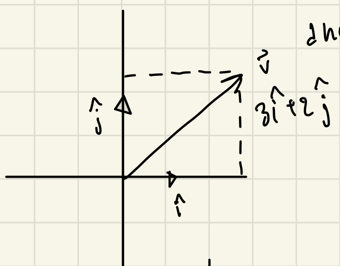


$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$

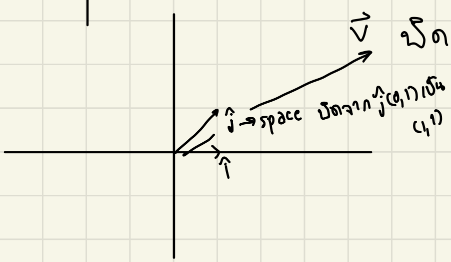
↳ $= a\hat{i} + b\hat{j}$

Matrix → infomation ที่บอก Transformation ของ space

any vector can be presented by $\hat{i}$ and $\hat{j}$



$$\begin{array}{cc} \text{transform} & \text{vectorเดิม} \\ \begin{bmatrix} \hat{i}_{new} & \hat{j}_{new} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \end{array}$$



$\vec{v}$ บิด space

$= 3\hat{i} + 2\hat{j}$

$= 3\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\vec{u} = a\hat{i} + b\hat{j}$

$a(\hat{i}_{new}) + b(\hat{j}_{new})$

$= a\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}$

Matrix vector Mul

transform vector

$\hat{i}$ หลัง transform

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}$$

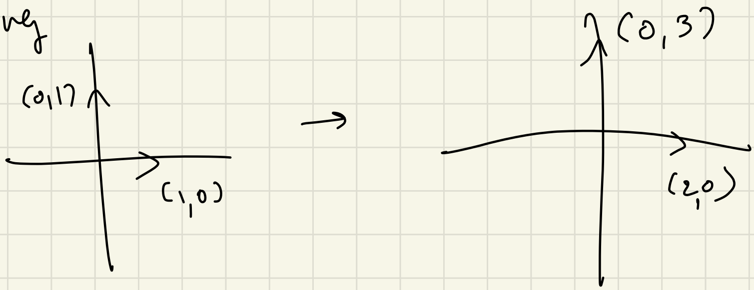
$\hat{j}$ หลัง transform

$\hookrightarrow x\hat{i} + y\hat{j}$

vector คือ object in space

Matrix tell transformation of space

Scaling



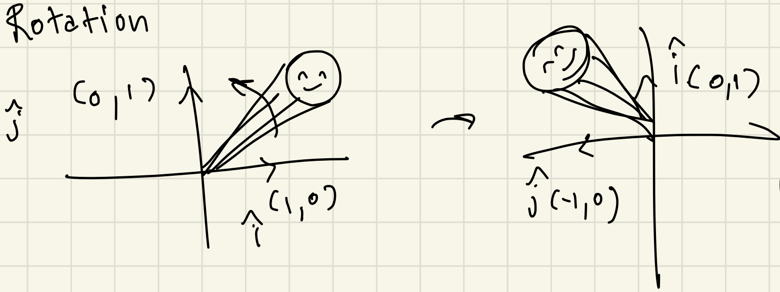
transformation

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$$

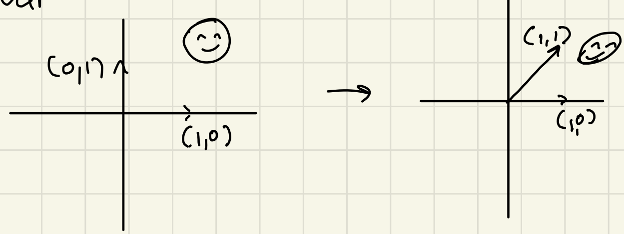
Matrix of scaling

Rotation



$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

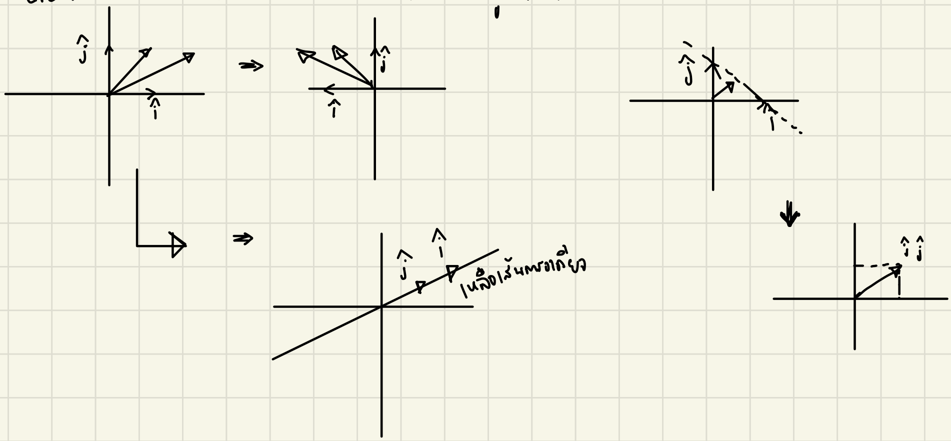
shear



$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Linear Algebra

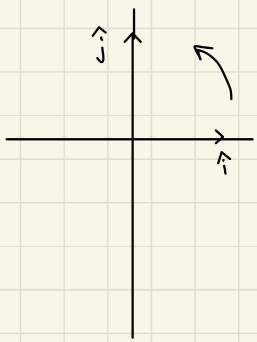
transform → อะไรที่เป็นเส้นตรงจะยังคงเป็นเส้นตรงอยู่ ไม่มีการบิดโค้งขึ้น



Matrix - Vector Mul

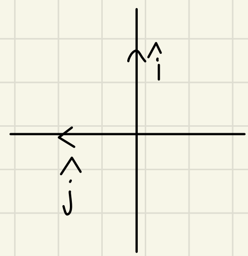
Matrix - Matrix Mul

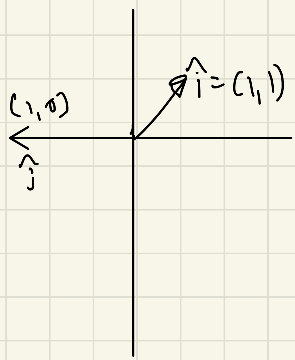
⇒ shear $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



Rotate 90°

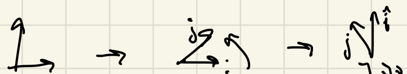
$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$





$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right] = \bigcirc \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



สลับที่ไม่ได้

$$\underset{2\times 3}{\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times 2}{\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

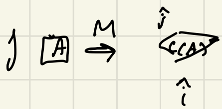
Determinant

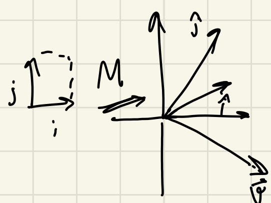
$$\det\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = ad - bc$$

"determinant"
คือ volumn ที่ขยายขึ้นเป็นกี่เท่า
ของ volumn เดิม

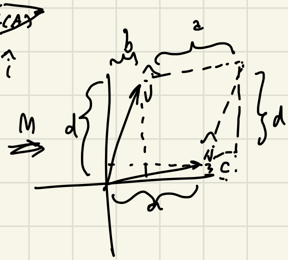
c = determinant ของ M

det M = -c

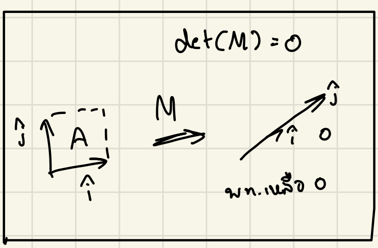


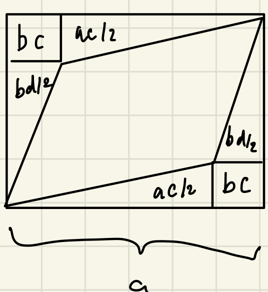


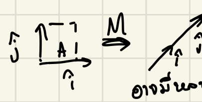
$M \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$



M^{-1} ↳ transformation ที่นำ Coordinate sys. หลังกลับไปเป็นแบบเดิม inverse transformation







det(M) = 0

อาจมีหลายตัวที่ transform มาแล้วได้แบบเดียวกัน หรือไม่มีเลย

det(M)=0 เลยหา M^{-1} ไม่ได้

$$= (a+b)(c+d) - 2bc - ac - bd + ac + ad + bc + bd - 2bc - ac - bd$$
$$= ad - bc$$

System of Linear eq.

$$2x + 5y = -3 \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$4x + 3y = 2$$

ถ้าสมการ

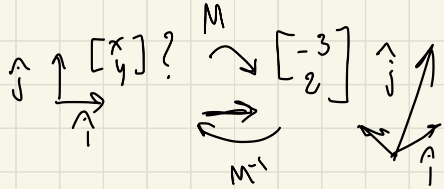
linearly

independent

↓

มี infinite ans,

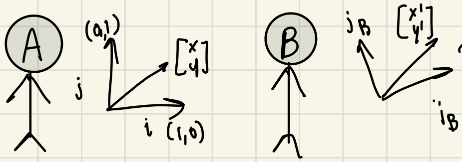
หรือ non ans. ก็ได้



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = M^{-1}\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$A = U^{-1} M U$$

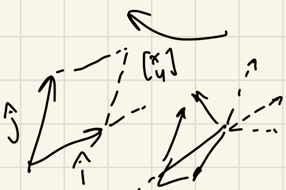
$$B = A^{-1} M A$$



$$x'\begin{bmatrix} \hat{i}_B \end{bmatrix} + y'\begin{bmatrix} \hat{j}_B \end{bmatrix}$$

$$= x'\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} + y'\begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} \qquad \hat{i}_B = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

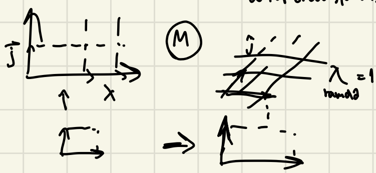
$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \qquad \hat{j}_B = \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix}$$



$$[M^{-1}]\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\text{Rotate } 90^\circ}\underbrace{[M]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}$$

Eigen vector / Eigen Value

↳ ผ่าน transformation Matrix น ได้ค่าเหมือน เอา M x ค่าคงที่ (เหมือน) Scale

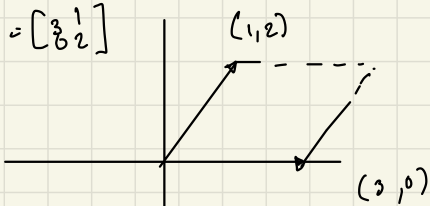


$\lambda = 1$ lambda

$$\boxed{M\vec{x} = \lambda\vec{x}}$$
scalar

บาง transformation อาจไม่มี Eigen vector etc. rotate

$(0,1)$ $\hat{j}$, $\hat{i} = (1,0)$ ⇒ $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$



Eigen
↳ หา vector ที่หลัง transform แล้วชี้ทิศเดิม

$$M\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$M\vec{v} = \lambda \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I \text{ ไม่เปลี่ยน}} \vec{v}$$

ตอนแยก Scalar vector ผ่านไม่ได้ ใช้ I ช่วย

$$M\vec{v} = \lambda I \vec{v}$$

$$M\vec{v} - \lambda I \vec{v} = \vec{0}$$

$$(M - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

อยากได้ $\vec{v}$ ที่ไม่ใช่ $\vec{0}$ ที่หลัง transform แล้วชี้ทิศเดิม

∴ transformation ของเราต้องลด dimension space ลดลง

↳ det ต้องมีค่าเป็น 0 (ของ $M - \lambda I$)

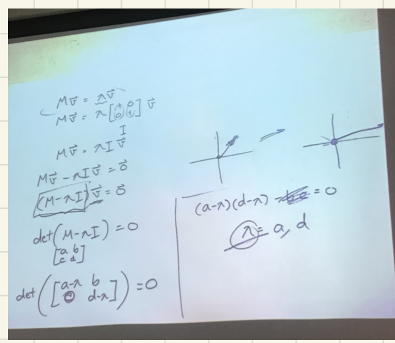
$$\det(M - \lambda I) = 0$$

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$$\det\left(\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix}\right) = 0$$

$(a-\lambda)(d-\lambda) - \cancel{bc} = 0$

$\lambda = a, d$



Theory of Computation

ศึกษา limit ของ computer โดยไม่สนเวลา เป็นหมื่นปีก็นับแล้วปัญหานั้นๆ มนุษย์ solve ได้หรือเปล่า

ศึกษาหาความสามารถของ แบบจำลอง$\underbrace{\text{เครื่องจักรคำนวณ}}_{\text{automata}}$

automata โมเดลที่จำลองเครื่องจักรต่างๆ

↳ โหดสุด → เทียบเท่า computer → ซับซ้อนมาก

ภาษาๆหนึ่ง → ปัญหาๆหนึ่ง

หมายความว่า ถ้า $\boxed{A}$ recognize ภาษาได้

คือ แก้ปัญหาได้

(อยากรู้ มีภาษาไหนที่ $\boxed{A}$ recognize ได้/ไม่ได้บ้าง

เราจะมองปัญหาเชิงคำนวณ ทุกปัญหาในรูปของภาษา Etc. ให้ string w มาตัวนึง ส่ง string ให้ automata automata จะส่ง output มา 2 อย่าง accept / reject   Σ (alphabet)

Σ = {a,b}

ส่ง aa → $\boxed{A}$ (automata) → accept (output)

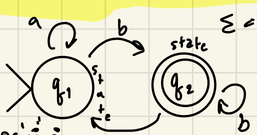
ab → $\boxed{A}$ → reject

aba → $\boxed{A}$ → accept

set ของ string w ที่ accept ด้วย automata A จะเรียกว่า ภาษา (language) ที่ A recognize

Finite automata (พลังน้อยสุดใน automata ทั้งหมด)

Deterministic Finite Automata (DFA)



Σ = {a,b}

อ่าน a อยู่ที่เดิม

อ่าน b ไป q_2

Etc. ถ้าจบแล้ว

อยู่ q_2 จะ accept

อยู่ q_1 จะ reject

ไป q_2 อยู่ที่ q_1

abaab   Final อยู่ q_2 → accept

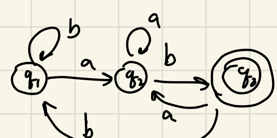
อยู่ q_1 ไป q_1 ↳ ไป q_2 (q_2 วง 2 วง = กำหนดเป็น Final state ไว้)

$L(M) = \{w \in \{a,b\}^* : w \text{ ลงท้ายด้วย } b\}$

DFA

- set of state → จำกัดเอาไว้
- start state → เริ่มต้น
- transition function → input แต่ละแบบย้ายไป state ไหน
- Final states (ถ้าอ่าน string ไปหยุดที่ state เหล่านี้จะ accept)
  ↳ symbol ◎

Recognize ภาษากลุ่มไหนได้บ้าง? design แบบไหนที่ลงท้าย ab

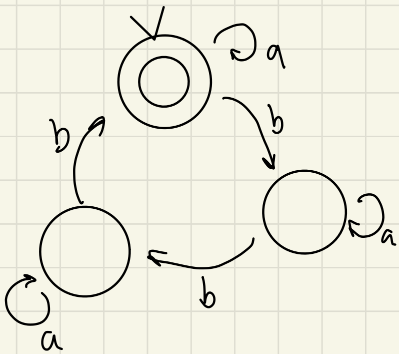


DFA ที่ accept string ที่ลงท้าย ab

$L(M_2) = \{w \in \{a,b\}^* ; w \text{ ลงท้ายด้วย } ab\}$

$\Sigma = \{a, b\}$ สร้าง DFA ที่ recognize

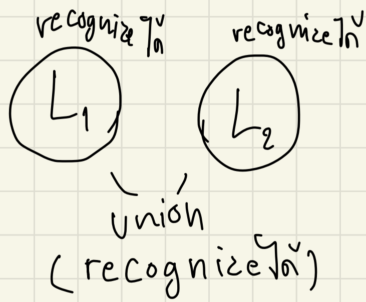
$L_1 = \{ w \in \{a,b\}^* :$ w มีจำนวน "b" หารด้วย 3 ลงตัว $\}$



$L_2 \{ w \in \{a,b\}^* :$ w มีจำนวน "b" หารด้วย 5 ลงตัว $\}$

$L_3 = L_1 \cup L_2$

↳ สร้าง 15 state



$L_4 = \{ w : w = u \cdot v$ โดยที่ $u \in L_1, v \in L_2 \}$

string มาต่อกัน
u ต่อ v

splite ก่อน

หน้า $b \% 3 = 0$

หลัง $b \% 5 = 0$

1 ภาษา = 1 ปัญหา

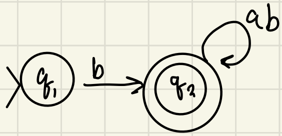
NFA : Nondeterministic Finite Automata

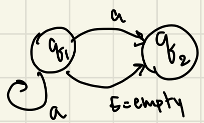
DFA → อ่าน อะไรไปไหน

NFA → ยอมให้ไม่มีที่ไป → reject

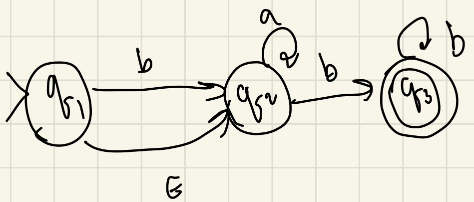
DFA + → มีทางเลือกไปหลายทางได้ → etc. เลือก อยู่ที่เดิมหรือไป

→ สามารถเดินโดยไม่ต้องอ่าน input ได้





ถ้ามีซักทางที่อ่าน w จนครบ
และหยุดที่ Final state ได้
จะถือว่า M accepts w



bb ✓

abb ✓

อ่าน a เลยไม่มีทางไป → แห้วดิ → reject

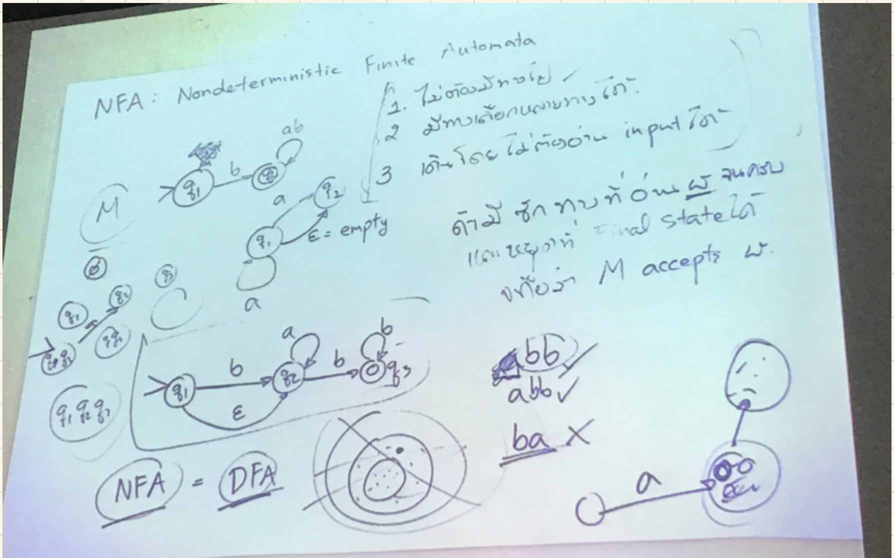
เลือกไป empty string ก่อน → รับอยู่

q_2 เหมือนเดิม → bb → accept

ba ✗

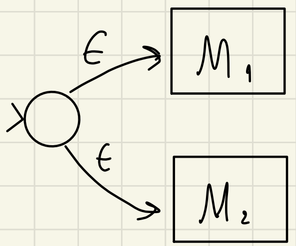
NFA = DFA เพิ่มความยืดหยุ่น
(3 ข้อ)

ไม่ขยาย limit
อยู่ดี ภาษาที่ recognize
ได้ยังเท่าเดิม ถ้าสร้าง NFA ได้ DFA ก็สร้างได้



DFA / NFA — regular language

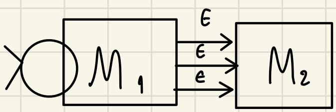
regular expression



L_1

$L_1 \cup L_2$

L_2



$L_1 \cdot L_2$

$L_1 \cup L_2$
$L_1 \cdot L_2$
L_1^*
→ ทำได้

$w \in L_1$

$L_1^* \ \{w^i : i \geq 0,\ w \in L_1\}$

w^*

เอาสมาชิกใน L_1 ตัวไหนก็ได้มาต่อกันกี่รอบก็ได้

$ab^*aa \cup ba^*$ → ทำ DFA / NFA ได้แน่นอน (ถ้าเป็น regular expression)

ต้องอ่าน

$L = \{w \in \{a,b\}^* :$ w มีจำนวน a, b เท่ากัน$\}$ → ทำไม่ได้
recognize ไม่ได้

push down automata ทำได้
another level of automata

highest level → turing Machine
→ same level of computer

Randomized Algorithm

Probability มีการทดลองเป็น "เชิงสุ่ม"
ทำซ้ำหลายๆครั้งผลอาจไม่เหมือนเดิม

Ω = เซตของ outcome ทั้งหมด

sample space $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

$\Omega = \{$ต่ำ, สูง$\}$

outcome INF ตัวก็ได้

Event $E \subseteq \Omega$

$E_1 = \{2,4,6\}$

ความน่าจะเป็น ของ Event $E \subseteq \Omega$ ใดๆ

เป็น function $Pr[E] \to R$ ที่มีคุณสมบัติต่อไปนี้

1. $Pr[E] \geq 0$
2. สำหรับ Event E_1, E_2 ที่ $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

$$Pr[E_1 \cup E_2] = Pr[E_1] + Pr[E_2]$$

3. $Pr[\Omega] = 1$

$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Prob แต่ละตัว เท่ากัน

$$\sum_{w \in \Omega} Pr[w] = 1$$

$$Pr[w] = \frac{1}{|\Omega|}$$

map outcome ออกมาเป็น จำนวนได้

Random Variable

คือ function map on $\Omega \to \mathbb{R}$
เปลี่ยน outcome ใดๆ ให้เป็นรูปของตัวเลข

Ex. โยนเหรียญ 1 เหรียญ

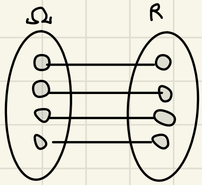
$\Omega = \{H, T\}$

$$X = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าออกหัว} \\ 0 & \text{ถ้าออกก้อย} \end{cases}$$

Expected value (Expectation) *ออกสอบ

ค่าเฉลี่ยของ random varieble X

$$E[X] = \sum_{w \in R} X_w \Pr[w]$$



$$E[X] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} i \Pr[X=i]$$

$1, \underbrace{2, 3, 4, 5, 6}$

$\left(\frac{1}{2}\right)$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$

X = แต้มของลูกเต๋า 1 ลูก

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) + \dots + 6\left(\frac{1}{6}\right) = 3.5$$

$$E[X] = 1\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(\frac{1}{10}\right) + \dots + 6\left(\frac{1}{10}\right) =$$

โดยเฉลี่ยผลที่ได้เท่าไหร่ ? โดยเฉลี่ยแล้ว algo ใช้เวลาเท่าไหร่ ?

Linearity of Expectation

$Z = aX$

uppercase แทน random varieble
lowercase แทน scalar

$$E[Z]$$
$$= E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y]$$

Ex.

Balls and Bins

$\sqcup \ \sqcup \ \sqcup \ \dots \ \sqcup$ มีถัง n ถัง โยนบอล m ลูก

โดยเฉลี่ยมีถังว่างกี่ใบ

ให้ X เป็น r.v (random variable) แทนถังว่าง

$$E[X] = ?$$

Ex. $E[X] = \sum_{w \in R} X_w \Pr[w]$ → ต้องหา outcome ทุกแบบ แล้วหา sum ทั้งหมด

ยาก

สำหรับถังที่ i ใดๆ ให้ X_i เป็น r.v ที่

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{ถ้าถังที่ } i \text{ ว่าง} \\ 0 & \text{ถ้าถังที่ } i \text{ ไม่ว่าง} \end{cases}$$

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] = \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$E[X_i] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} k \Pr[X_i = k]$$

$$= 0 \cdot \Pr[X_i = 0] + 1 \Pr[X_i = 1]$$

$$= \Pr[X_i = 1]$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$ ลงถังอื่นหมดเลย

$$= \sum_{i=1}^{n} E[X_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

$$= n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m < 1$$

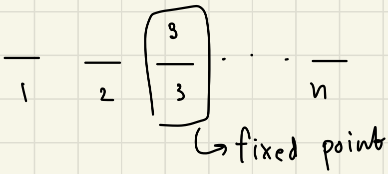
$$E[X] = n\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n\right)^{m/n} < 1 \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \approx \frac{1}{e}$$

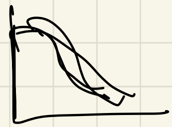
$$n < e^{m/n}$$

$$n \log < m$$

$$m > n \log n$$

Permutation ของเลข n ตัว





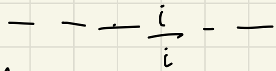
ตำแหน่งที่ permutation ได้เลขตรงกับตำแหน่ง

สุ่ม permutation โดยเฉลี่ย # fixed point เป็นเท่าไหร่

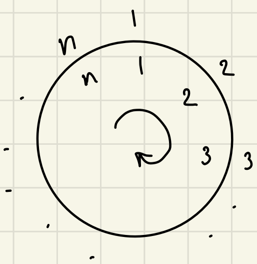
ให้ X เป็น r.v แทนจำนวน fixed point

$E[X] = ?$ ให้ $X_i = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i \text{ เป็น fixed point} \\ 0 & \text{กรณีอื่นๆ} \end{cases}$

$$\begin{aligned} E[X] &= E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i\right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} E[X_i] \\ &= \sum_{i=1}^{n} Pr[X_i = 1] = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1 \end{aligned}$$



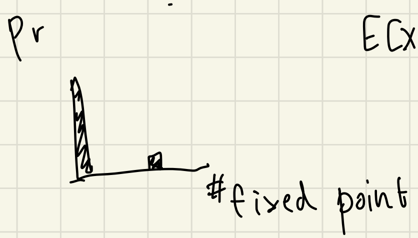
โดยเฉลี่ยจะมี fixed point เป็น 1



มีโต๊ะกลม วางจานข้าวตอนแรกวางตรง
หลังจากนั้นสุ่ม → หมุน

$$E[X] = \cancel{0 \cdot Pr[X=0]}^{\,0} + n \underbrace{Pr[X=n]}_{\frac{1}{n}}$$

$$E[X] = 1_{\#}$$

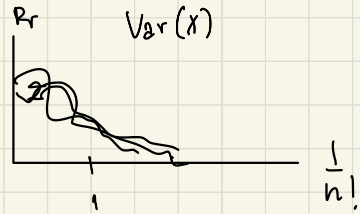


Variance

$\mu = E[X]$

$E[(X - E[X]^2)]$

$Var(X) = E[(X - \mu)^2]$



Expectation → ค่ากลาง ตัวแทน

Variance → ความใกล้เคียงค่ากลาง