

第四章 经典分散运动控制

4.2 驱动空间动力学方程的非线性与分解

华东理工大学信息科学与工程学院

卿湘运

2024年1月



机器人逆动力学方程的非线性

● 问题

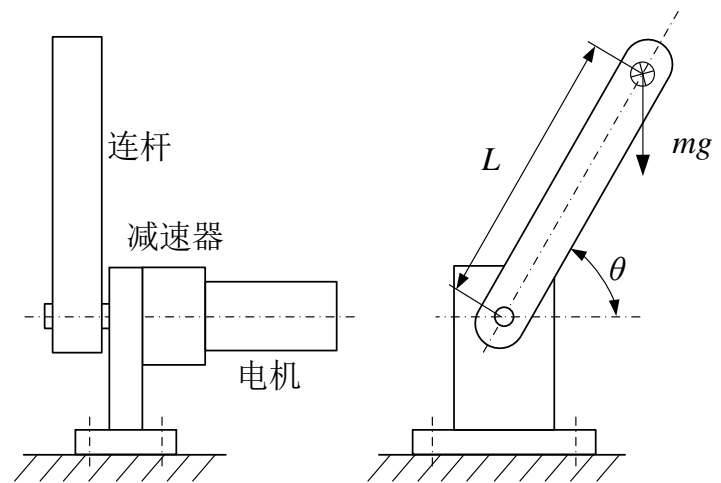
- 经典PID控制器建立在线性定常系统的假设之上，而机器人系统通常是非线性系统，为什么仍然能用PID控制器实现各关节的独立控制
- 机器人关节电机的动力学模型在何种情况下表现为非线性
- 决定机器人电机动力学模型非线性程度的主要因素是什么
- 对于非线性程度不同的机器人，如何设计单关节PID控制器

● 思路

- 考察机器人逆动力学模型的非线性特点
- 讨论逆动力学模型线性分解方法，得到分离的线性简化模型和非线性干扰模型
- 研究影响非线性程度的主要因素
- 针对不同非线性程度的机器人，讨论关节独立PID控制器的原理

● 实例1 — 单关节机器人逆动力学方程的非线性

➤ 电机减速器传动比 $N=10$ ，忽略减速器内部传动元件的惯量，分析在机器人全工作空间， $\theta \in [0^\circ, 360^\circ]$ ，驱动空间逆动力学方程中，干扰矩的波动范围。



	项目	符号	取值	单位
电机参数	额定电压	u_r	24	V
	额定转速	ω_r	258	rad/s
	额定转矩	τ_r	8.82×10^{-2}	N·m
	额定电流	i_r	1.09	A
	电枢电阻	R_a	2.49	Ω
	电枢电感	L_a	6.10×10^{-4}	H
	转矩常数	K_a	8.22×10^{-2}	(N·m)/A
	感应电动势常数	K_e	8.24×10^{-2}	V/(rad/s)
	转子惯量	I_r	1.19×10^{-5}	Kg·m ²
	转子阻尼	B_r	4.10×10^{-4}	(N·m)/(rad/s)
系统参数	连杆质量	m	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	l	0.1	m
	负载惯量	I_l	5.0×10^{-3}	Kg·m ²
	关节阻尼	B_l	2.0×10^{-2}	(N·m)/(rad/s)
	电压增益	K_u	3	无
	跨导增益	K_g	1	A/V
	重力加速度	g	9.8	m/s ²

† 机器人逆动力学方程的非线性

● 实例1 — 单关节机器人逆动力学方程的非线性

➤ 分析驱动空间逆动力学方程

• 逆动力学方程 $\tau_m = I_m \varepsilon_m + B_m \omega_m + \tau_{md}$

线性项

惯性力矩 阻尼力矩 干扰力矩

- 单关节机器人的干扰力矩仅包含重力矩

$$\tau_{md} = \tau_{mG} = \frac{mgL \cos \theta}{N}$$

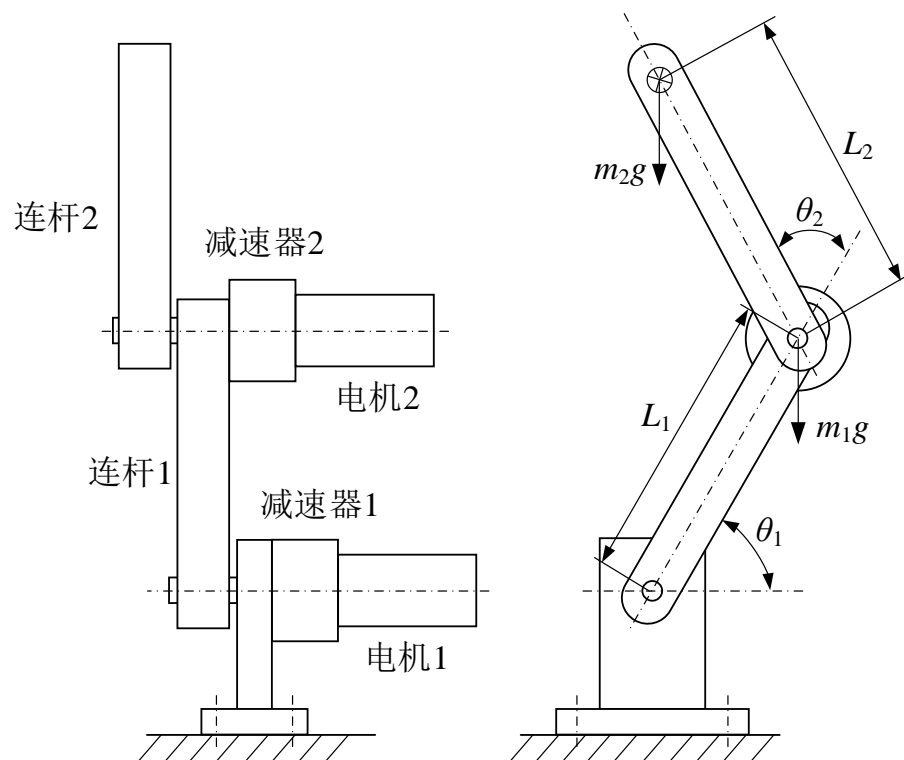
非线性项

- 电机模型是线性项
- 干扰力矩 τ_{md} 随机器人关节转角非线性变化，其波动范围为： $-4.9 \sim +4.9 \times 10^{-2} \text{N}\cdot\text{m}$
- 机器人逆动力学方程非线性

● 实例2 — 平面2R机器人逆动力学方程的非线性

➤ $L_1=L_2=L=0.1\text{m}$ 、 $m_1=m_2=m=0.5\text{Kg}$ 、 $I_{r1}=I_{r2}=I_r=1.19\times 10^{-5}\text{Kg}\cdot\text{m}^2$ 、 $g=9.8\text{ m/s}^2$ ，两关节减速器相同，传动比 $N_1=N_2=N=10$ ，关节阻尼 B_{11} 、 B_{12} 和电机转子阻尼 B_{r1} 、 B_{r2} 均为常数，忽略电机和减速器质量，在驱动空间进行如下计算和分析。

1. 写出两关节电机的逆动力学方程，并指出其中的线性项和非线性项
2. 计算全工作空间内，重力矩的变化范围
3. 计算全工作空间内，广义质量矩阵 $M_m(\theta)$ 各元素的变化范围
4. 当两关节均以加速度 $\ddot{\theta}_1 = \ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta} = \pi(\text{rad/s}^2)$ 运转时，计算惯性力矩的变化范围
5. 当两关节均以速度 $\dot{\theta}_{1\max} = \dot{\theta}_{2\max} = \dot{\theta} = \frac{\pi}{4}(\text{rad/s})$ 匀速运转时，离心-科氏力矩的变化范围



● 实例2 — 平面2R机器人逆动力方程的非线性

解：

(1)

- 忽略末端力，机器人驱动空间逆动力学方程通式

$$\boldsymbol{\tau}_m = \mathbf{M}_m(\boldsymbol{\theta})\boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{V}_m(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{B}_m\boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{G}_m(\boldsymbol{\theta})$$

其中： $\boldsymbol{\varepsilon}_m$ —— 加速度； $\boldsymbol{\omega}_m$ —— 速度； $\boldsymbol{\theta}$ —— 关节位置； $\boldsymbol{\tau}_m$ —— 电机电磁力矩

- 逆动力学方程的具体形式

$$\begin{pmatrix} \tau_{m1} \\ \tau_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{m1} \\ \varepsilon_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{m1} & 0 \\ 0 & B_{m2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_{m1} \\ \omega_{m2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{mG1} \\ \tau_{mG2} \end{pmatrix}$$

- 关节电机1和关节电机2的逆动力学方程

$$\begin{aligned} \tau_{m1} &= \boxed{M_{11}\varepsilon_{m1} + M_{12}\varepsilon_{m2}} + \boxed{V_{11}\omega_{m1} + V_{12}\omega_{m2}} + \boxed{B_{m1}\omega_{m1}} + \boxed{\tau_{mG1}} \\ \tau_{m2} &= \boxed{M_{21}\varepsilon_{m1} + M_{22}\varepsilon_{m2}} + \boxed{V_{21}\omega_{m1} + V_{22}\omega_{m2}} + \boxed{B_{m2}\omega_{m2}} + \boxed{\tau_{mG2}} \end{aligned}$$

惯性力矩 离心-科氏力矩 阻尼力矩 重力矩

† 机器人逆动力学方程的非线性

● 实例2 — 平面2R机器人逆动力方程的非线性

广义质量矩阵: $\mathbf{M}_m(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{mL^2}{N^2} (3 + \boxed{2 \cos \theta_2}) + I_r & \boxed{\frac{mL^2}{N^2} (1 + \cos \theta_2)} \\ \boxed{\frac{mL^2}{N^2} (1 + \cos \theta_2)} & \frac{mL^2}{N^2} + I_r \end{pmatrix}$

非线性项 非线性耦合项

离心-科氏力矩阵: $\mathbf{V}_m(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \boxed{-\frac{3mL^2 \dot{\theta} \sin \theta_2}{N^2}} \\ \boxed{\frac{mL^2 \dot{\theta} \sin \theta_2}{N^2}} & 0 \end{pmatrix}$

非线性耦合项 非线性耦合项

阻尼矩阵: $\mathbf{B}_m = \begin{pmatrix} B_{m1} & 0 \\ 0 & B_{m2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{B_{11}}{N_1^2} + B_{r1} & 0 \\ 0 & \frac{B_{11}}{N_2^2} + B_{r2} \end{pmatrix}$

重力矩: $\mathbf{G}_m(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \tau_{mG1} \\ \tau_{mG2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2mgL \cos \theta_1 + mgL \cos(\theta_1 + \theta_2)}{N} \\ \frac{mgL \cos(\theta_1 + \theta_2)}{N} \end{pmatrix}$

非线性项

● 实例2 — 平面2R机器人逆动力方程的非线性

(2) 全工作空间重力矩的变化范围（单位： $\times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$ ）

关节编号	1	2
重力矩	-15~+15	-5~+5

(3) 全工作空间广义质量矩阵 $\mathbf{M}_m(\boldsymbol{\theta})$ 各元素的变化范围（单位： $\times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{m}^2$ ）

元素	\mathbf{M}_{11}	\mathbf{M}_{22}	$\mathbf{M}_{12}=\mathbf{M}_{21}$
取值	6.19~26.19	6.19	0~10

(4) 两关节均以加速度 $\ddot{\theta} = \pi(\text{rad/s})$ 运行，关节电机角加速度为： $\varepsilon_{m1} = \ddot{\theta}_1 N_1 = \ddot{\theta} N$ ， $\varepsilon_{m2} = \ddot{\theta}_2 N_2 = \ddot{\theta} N$ ，惯性力矩的变化范围（单位： $\times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$ ）

关节编号	1	2
惯性力矩	0.19~1.14	0.19~0.51

(5) 两关节均以速度 $\dot{\theta} = \frac{\pi}{4}(\text{rad/s})$ 的运行，关节电机角速度为： $\omega_{m1} = \dot{\theta}_1 N_1 = \dot{\theta} N$ ， $\omega_{m2} = \dot{\theta}_2 N_2 = \dot{\theta} N$ ，离心-科氏力矩的变化范围（单位： $\times 10^{-2} \text{ N}\cdot\text{m}$ ）

关节编号	1	2
离心-科氏力矩	-0.09~+0.09	-0.03~+0.03



机器人逆动力学方程的非线性

● 机器人逆动力学方程的特点

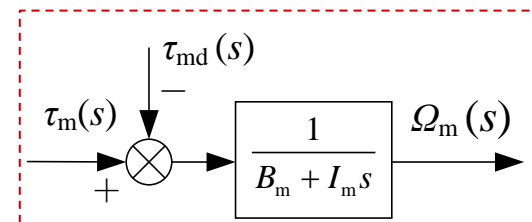
- **时变、非线性** —— n 关节机器人，机器人驱动空间逆动力学方程的每一行对应着一个关节电机的逆动力学方程，其中的广义质量矩阵 M_m 、离心-科氏力矩阵 V_m 和 G_m 等，都是关节位置和速度的函数
- **耦合** —— M_m 的对角线元素相当于关节电机的等效转动惯量，通常是一个变量。 M_m 和 V_m 的非对角线元素会把一个关节的加速度和速度，耦合为其他关节的**动态力矩**
- 多输入、多输出、时变、强耦合的非线性系统

● 设计关节电机独立PID控制器的思路

- 分解机器人关节电机逆动力学模型，获得如下形式的驱动空间逆动力学方程

$$\tau_m = \underbrace{I_m \varepsilon_m + B_m \omega_m}_{\text{线性模型}} + \underbrace{\tau_{md}}_{\text{干扰模型}}$$

等价 \longleftrightarrow



- 针对线性部分设计PID控制器
- 针对过大的干扰力矩，设计补偿控制量

驱动空间逆动力学方程的分解

● 实例 — 分解平面2R机器人逆动力学方程

解：

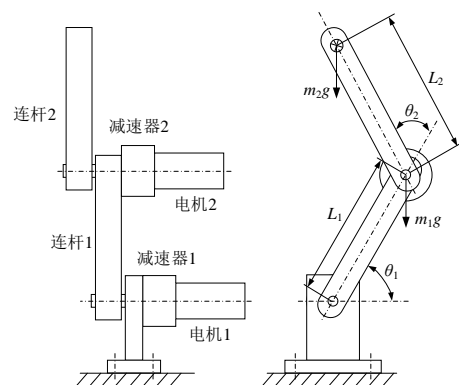
➤ 关节电机1逆动力学方程

$$\tau_{m1} = \boxed{M_{11}\varepsilon_{m1} + M_{12}\varepsilon_{m2} + V_{11}\omega_{m1} + V_{12}\omega_{m2}} + \boxed{B_{m1}\omega_{m1}} + \boxed{\tau_{mG1}}$$

如何从与本关节加速度相关的
惯性力矩中分离非线性部分？

非线性项

线性项



目标形式

$$\tau_m = \boxed{I_m\varepsilon_m} + \boxed{B_m\omega_m} + \boxed{\tau_{md}}$$

? ✓ ?

➤ 考察

$$M_{11} = \frac{mL^2}{N^2} (3 + 2 \cos \theta_2) + I_r = \bar{M}_{11} + \Delta M_{11}$$

其中：

➤ $\bar{M}_{11} = \frac{3mL^2}{N^2} + I_r$ —— 平均等效转动惯量

➤ $\Delta M_{11} = \frac{2mL^2}{N^2} \cos \theta_2$ —— 等效转动惯量的波动量

† 驱动空间逆动力学方程的分解

● 实例 — 分解平面2R机器人逆动力学方程

- 分解惯性力矩

$$M_{11}\varepsilon_{m1} = \boxed{\bar{M}_{11}\varepsilon_{m1}} + \boxed{\Delta M_{11}\varepsilon_{m1}}$$

线性部分 非线性部分

目标形式

$$\tau_m = \boxed{I_m\varepsilon_m} + \boxed{B_m\omega_m} + \boxed{\tau_{md}}$$

√ √ √

- 逆动力学方程变为

$$\tau_{m1} = \boxed{\bar{M}_{11}\varepsilon_{m1} + \Delta M_{11}\varepsilon_{m1}} + M_{12}\varepsilon_{m2} + V_{11}\omega_{m1} + V_{12}\omega_{m2} + B_{m1}\omega_{m1} + \tau_{mG1}$$

- 令 $I_{m1} = \bar{M}_{11}$, 得

$$\tau_{m1} = \boxed{I_{m1}\varepsilon_{m1} + B_{m1}\omega_{m1}} + \boxed{\Delta M_{11}\varepsilon_{m1} + M_{12}\varepsilon_{m2} + V_{11}\omega_{m1} + V_{12}\omega_{m2} + \tau_{mG1}}$$

线性项 干扰力矩

- 令

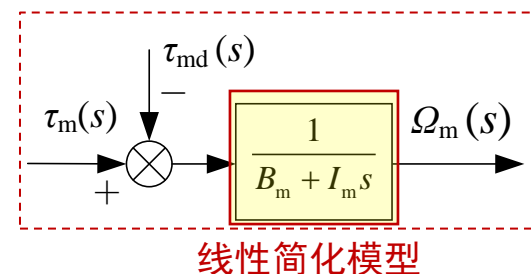
$$\tau_{md1} = \Delta M_{11}\varepsilon_{m1} + M_{12}\varepsilon_{m2} + V_{11}\omega_{m1} + V_{12}\omega_{m2} + \tau_{mG1}$$

- 得关节1逆动力学模型的分解形式

$$\tau_{m1} = \boxed{I_{m1}\varepsilon_{m1} + B_{m1}\omega_{m1}} + \boxed{\tau_{md1}}$$

线性简化模型 干扰模型

等价



† 驱动空间逆动力学方程的分解

● 实例 — 分解平面2R机器人逆动力学方程

➤ 关节电机2的逆动力学方程

$$\tau_{m2} = M_{21}\varepsilon_{m1} + \boxed{M_{22}}\varepsilon_{m2} + V_{21}\omega_{m2} + V_{22}\omega_{m2} + B_{m2}\omega_{m2} + \tau_{mG2}$$

$$M_{22} = \frac{mL^2}{N^2} + I_r = \bar{M}_{22} + \Delta M_{22}$$

其中：

➤ $\bar{M}_{22} = \frac{mL^2}{N^2} + I_r$ ——平均等效转动惯量

➤ $\Delta M_{22} = 0$ ——等效转动惯量的波动量

➤ 合并所有的干扰力矩

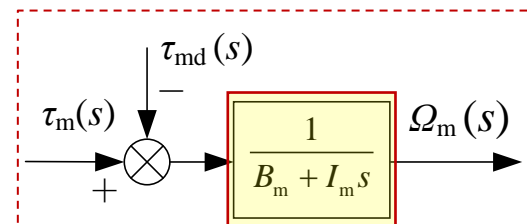
$$\tau_{md2} = \Delta M_{22}\varepsilon_{m2} + M_{21}\varepsilon_{m1} + V_{21}\omega_{m1} + V_{22}\omega_{m2} + \tau_{mG2}$$

➤ 令 $I_{m2} = \bar{M}_{22}$ ，得关节2逆动力学模型的分解形式

$$\tau_{m2} = \boxed{I_{m2}\varepsilon_{m2} + B_{m2}\omega_{m2}} + \boxed{\tau_{md2}}$$

线性简化模型 干扰模型

等价
↔



线性简化模型



驱动空间逆动力学方程的分解

● 实例 — 分解平面2R机器人逆动力学方程

- 合并两个关节电机的等效逆动力学模型

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boxed{\bar{\mathbf{M}}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{B}_m \boldsymbol{\omega}_m} + \boxed{\boldsymbol{\tau}_{md}}$$

线性简化模型 干扰模型

$$\boldsymbol{\tau}_{md} = \Delta \mathbf{M}_m(\boldsymbol{\theta}) \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{V}_m(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) \boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{G}_m(\boldsymbol{\theta})$$

其中：

- $\bar{\mathbf{M}}_m = \begin{bmatrix} \bar{M}_{11} & 0 \\ 0 & \bar{M}_{22} \end{bmatrix}$ —— 主惯性矩阵

- $\Delta \mathbf{M}_m(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \Delta M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & \Delta M_{22} \end{bmatrix}$ —— 非线性惯性矩阵

● 任意多关节机器人逆动力学方程的分解

- 自由空间多关节机器人驱动空间逆动力学模型

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{M}_m(\boldsymbol{q})\boldsymbol{\varepsilon}_m + \boldsymbol{V}_m(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{\omega}_m + \boldsymbol{B}_m\boldsymbol{\omega}_m + \boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{q})$$

其中：

- $\boldsymbol{M}_m(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{q})\boldsymbol{N}^{-1}$ —— 广义质量矩阵
 - $\boldsymbol{V}_m(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}})\boldsymbol{N}^{-1}$ —— 科氏力和离心力耦合系数矩阵
 - $\boldsymbol{B}_m = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{N}^{-1}$ —— 粘滞阻尼系数矩阵，为对角阵，其对角线元素为电机转子侧等效阻尼 B_m
 - $\boldsymbol{G}_m(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{N}^{-1}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{q})$ —— 重力矢量
 - \boldsymbol{N} —— 各关节线性传动机构的传动比矩阵，为常值对角阵
 - $\boldsymbol{\tau}_m$ —— 电机输出力矩矢量
- 驱动空间广义质量矩阵可拆分为线性项和非线性项

$$\boldsymbol{M}_m(\boldsymbol{q}) = \overline{\boldsymbol{M}}_m + \Delta\boldsymbol{M}_m(\boldsymbol{q})$$

其中：

- $\overline{\boldsymbol{M}}_m$ —— **主惯性矩阵**，常数对角阵，代表各电机的平均总等效惯量 I_m ，与机器人位形无关
- $\Delta\boldsymbol{M}_m(\boldsymbol{q})$ —— **非线性惯性矩阵**，代表对角线上等效惯量的波动量和非对角线上的等效耦合惯量，随机器人位形变化



驱动空间逆动力学方程的分解

● 任意多关节机器人逆动力学方程的分解

- 对逆动力学模型进行分解

$$\boldsymbol{\tau}_m = \boldsymbol{\tau}_{ml} + \boldsymbol{\tau}_{md}$$

其中：

- $\boldsymbol{\tau}_{ml}$ ——线性力矩矢量，包含线性惯性力矩和阻尼力矩

$$\boldsymbol{\tau}_{ml} = \overline{\mathbf{M}}_m \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{B}_m \boldsymbol{\omega}_m$$

- $\boldsymbol{\tau}_{ml}$ 的每一行对应一个关节电机的线性简化模型，可以据此设计电机位置PID控制器，以及速度和加速度前馈补偿项
- 干扰力矩较小时，可由PID控制器抑制

- $\boldsymbol{\tau}_{md}$ ——干扰力矩矢量，包含波动-耦合惯性力矩、离心-科氏力矩和重力矩

$$\boldsymbol{\tau}_{md} = \Delta \mathbf{M}_m(\mathbf{q}) \boldsymbol{\varepsilon}_m + \mathbf{V}_m(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \boldsymbol{\omega}_m + \mathbf{G}_m(\mathbf{q})$$

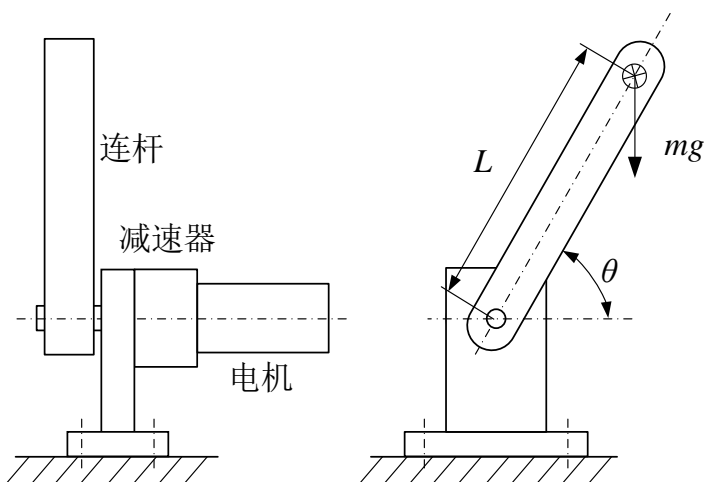
- $\boldsymbol{\tau}_{md}$ 的每一行对应一个关节电机所受干扰力矩，可以据此在PID控制器上附加非线性力矩集中前馈补偿项，克服较大的干扰力矩

● 问题

- 决定干扰力矩大小的关键因素是什么？
- 干扰力矩量级不同，关节电机位置PID控制器的实现有何不同？

● 实例1 — 单关节机器人的干扰力矩

- 电机减速器传动比 N 可变，忽略减速器内部传动元件惯量，分析电机减速器的传动比和机器人工作状态对干扰力矩大小的影响，以决定是否需要在控制器中加以补偿。



	项目	符号	取值	单位
电机参数	额定电压	u_r	24	V
	额定转速	ω_r	258	rad/s
	额定转矩	τ_r	8.82×10^{-2}	N·m
	额定电流	i_r	1.09	A
	电枢电阻	R_a	2.49	Ω
	电枢电感	L_a	6.10×10^{-4}	H
	转矩常数	K_a	8.22×10^{-2}	(N·m)/A
	感应电动势常数	K_e	8.24×10^{-2}	V/(rad/s)
	转子惯量	I_r	1.19×10^{-5}	Kg·m ²
	转子阻尼	B_r	4.10×10^{-4}	(N·m)/(rad/s)
系统参数	连杆质量	m	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	l	0.1	m
	负载惯量	I_l	5.0×10^{-3}	Kg·m ²
	关节阻尼	B_l	2.0×10^{-2}	(N·m)/(rad/s)
	电压增益	K_u	3	无
	跨导增益	K_g	1	A/V
	重力加速度	g	9.8	m/s ²



关节干扰力矩影响因素与分散控制方案原理

● 实例1 — 单关节机器人的干扰力矩

(1)

➤ 分别取传动比 $N=10$ 、50

➤ 把参数代入

$$I_m = I_r + \frac{I_l}{N^2} \quad B_m = B_r + \frac{B_l}{N^2}$$

➤ 得

传动比	I_m $\times 10^{-5} \text{Kg} \cdot \text{m}^2$	$\frac{I_r}{I_m}$	$\frac{5I_r}{I_m}$	B_m $\times 10^{-4} (\text{N} \cdot \text{m}) / (\text{rad/s})$	$\frac{B_r}{B_m}$
$N=10$	6.19	19%	0.96	6.1	67%
$N=50$	1.39	86%	4.28	4.18	98%

➤ 分析

- $N=10$ 时, I_r 与 I_m 之间的关系为惯量匹配要求的临界值 $I_m \leq 5I_r$
- $N=50$ 时, I_r 和 B_r 是 I_m 和 B_m 中的主导项, 机器人模型偏差 (负载惯量 I_l 和关节阻尼 B_l) 影响较小



关节干扰力矩影响因素与分散控制方案原理

● 实例1 — 单关节机器人的干扰力矩

(2)

➤ 取 $\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{2} \text{rad/s}$ 、 $\ddot{\theta}_{max} = 2\pi \text{ (rad/s}^2\text{)}$ 、 $N=10$ 或 50

➤ 把参数代入

$$\tau_m = I_m \varepsilon_m + B_m \omega_m + \tau_{md}$$

➤ 得

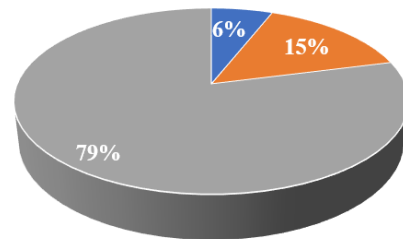
传动比	总力矩 τ_m	线性力矩 ($\times 10^{-2} \text{N}\cdot\text{m}$)				干扰力矩波动范围 $\Delta\tau_{md} = \tau_{mdmax}$		
		惯性力矩 $I_m \varepsilon_m$		阻尼力矩 $B_m \omega_m$		与电机额定转矩之比 ($\tau_r = 8.82 \times 10^{-2} \text{N}\cdot\text{m}$)		
		取值	占比	取值	占比			
$N=10$	6.25	0.39	6%	0.96	15%	4.90	79%	56%
$N=50$	4.70	0.44	9%	3.28	70%	0.98	21%	11%

➤ $N = 10$

- 动态条件下，干扰力矩占电机总输出力矩的79%，是主导项，不能忽略
- 干扰力矩的波动范围是电机额定转矩的56%，不能视为小扰动

➤ $N = 50$

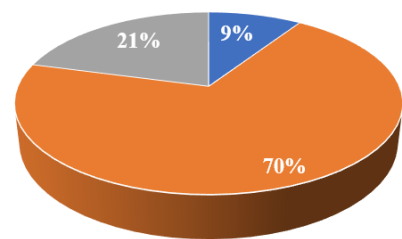
- 动态条件下，干扰力矩占比仅为21%，线性力矩是主导项
- 干扰力矩波动范围仅为电机额定转矩的11%，可被视为小扰动



$N = 10$

■ 惯性力矩
■ 阻尼力矩
■ 干扰力矩

} 线性力矩

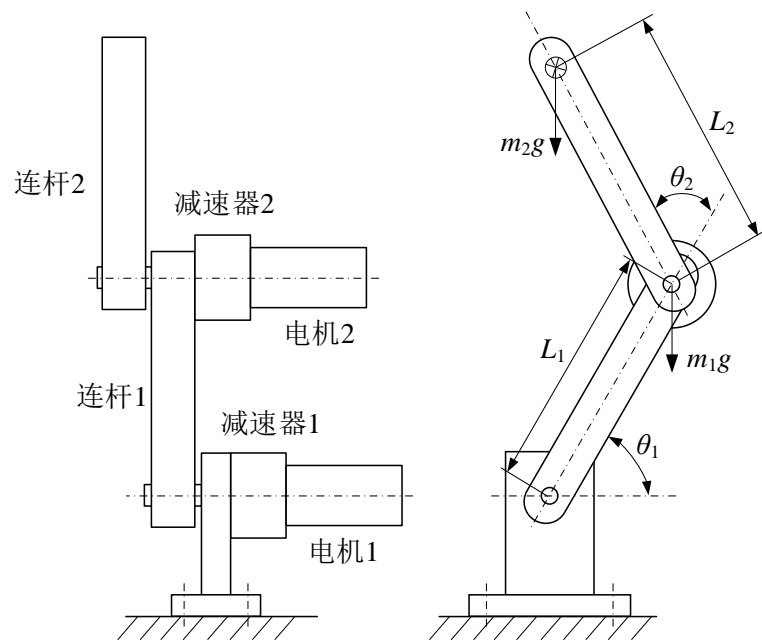


$N = 50$

总力矩中各力矩的占比

● 实例2 — 平面2R机器人力矩分析

- 两关节减速器相同，传动比 $N_1=N_2=N$ ，关节最高转速 $\dot{\theta}_{1max} = \dot{\theta}_{2max} = \dot{\theta}_{max}$ ，关节最高加速度 $\ddot{\theta}_{1max} = \ddot{\theta}_{2max} = \ddot{\theta}_{max}$ ，忽略电机和减速器质量



	项目	符号	取值	单位
电机参数	额定电压	u_r	24	V
	额定转速	ω_r	258	rad/s
	额定转矩	τ_r	8.82×10^{-2}	N·m
	额定电流	i_r	1.09	A
	电枢电阻	R_a	2.49	Ω
	电枢电感	L_a	6.10×10^{-4}	H
	转矩常数	K_a	8.22×10^{-2}	(N·m)/A
	感应电动势常数	K_e	8.24×10^{-2}	V/(rad/s)
	转子惯量	I_r	1.19×10^{-5}	Kg·m ²
	转子阻尼	B_r	4.10×10^{-4}	(N·m)/(rad/s)
系统参数	连杆质量	m	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	l	0.1	m
	负载惯量	I_l	5.0×10^{-3}	Kg·m ²
	关节阻尼	B_l	2.0×10^{-2}	(N·m)/(rad/s)
	电压增益	K_u	3	无
	跨导增益	K_g	1	A/V
	重力加速度	g	9.8	m/s ²



关节干扰力矩影响因素与分散控制方案原理

● 实例—平面2R机器人力矩分析

解：

(1)

➤ 分别取 $N=10$ 、 50 ，计算 ΔM_{11} 、 ΔM_{22} 、 \bar{M}_{11} 、 \bar{M}_{22}

➤ 得

(单位： $\times 10^{-5} \text{ Nm}^2$ ，比值无量纲)

传动比	ΔM_{11}	ΔM_{22}	$M_{12}=M_{21}$	\bar{M}_{11}	\bar{M}_{22}	$\frac{I_r}{\bar{M}_{11}}$	$\frac{I_r}{\bar{M}_{22}}$
$N=10$	$-10 \sim +10$	0	$0 \sim 10$	16.19	6.19	7%	19%
$N=50$	$-0.4 \sim +0.4$	0	$0 \sim 0.4$	1.79	1.39	66%	86%

➤ 分析

- 大传动比时， $M_m(\theta)$ 非对角线元素 M_{12} 和 M_{21} 很小，可忽略
- 传动比越大，转子惯量在 $M_m(\theta)$ 主对角线元素中所占比例越大，用主对角线元素平均值代替电机总等效惯量时，误差较小

● 实例—平面2R机器人力矩分析

(2)

➤ 取 $\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{4} \text{rad/s}$ 、 $\ddot{\theta}_{max} = \pi(\text{rad/s}^2)$ 或 $\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{2} \text{rad/s}$ 、 $\ddot{\theta}_{max} = 2\pi(\text{rad/s}^2)$ ， $N=50$

➤ 把参数代入

$$\begin{aligned}\tau_m &= \overline{M}_m \varepsilon_m + B_m \omega_m + \tau_{md} \\ \tau_{md} &= \Delta M_m(\theta) \varepsilon_m + V_m(\theta, \dot{\theta}) \omega_m + G_m(\theta)\end{aligned}$$

➤ 得

(单位: $\times 10^{-5} \text{Nm}^2$, 比值无量纲)

速度		$\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{4} \text{rad/s}$		$\dot{\theta}_{max} = \frac{\pi}{2} \text{rad/s}$	
加速度		$\ddot{\theta}_{max} = \pi (\text{rad/s}^2)$		$\ddot{\theta}_{max} = 2\pi (\text{rad/s}^2)$	
关节		1	2	1	2
总力矩		5.91	3.21	10.73	6.06
线性力矩	平均惯性力矩	0.28	0.22	0.56	0.44
	阻尼力矩	1.64	1.64	3.28	3.28
	合计	1.92	1.86	3.84	3.72
	占比	33%	58%	36%	61%
干扰力矩	非线性惯性力矩	0.13	0.06	0.25	0.13
	向心力+科氏力矩	0.92	0.31	3.70	1.23
	合计	1.05	0.37	3.95	1.36
	占比	18%	12%	37%	22%
	重力矩	2.94	0.98	2.94	0.98
	占比	50%	31%	27%	16%

➤ 分析

- 耦合力矩不仅取决于传动比，而且受机器人运行速度和加速度的影响
- 当机器人工作于高速、高动态时，耦合力矩不能忽略；
- 只有当传动比很大时，重力矩才能被视为小扰动



● 总结

- 传动比越大，干扰力矩影响越小，提高传动比有利于简化控制器设计
- 大传动比机器人工作在低速、低动态时，耦合力矩小，可视为小扰动
- 高速、高动态时，耦合力矩在总力矩中占比明显增加，不能视为小扰动
- 只有传动比很大时，才能把重力矩视为小扰动

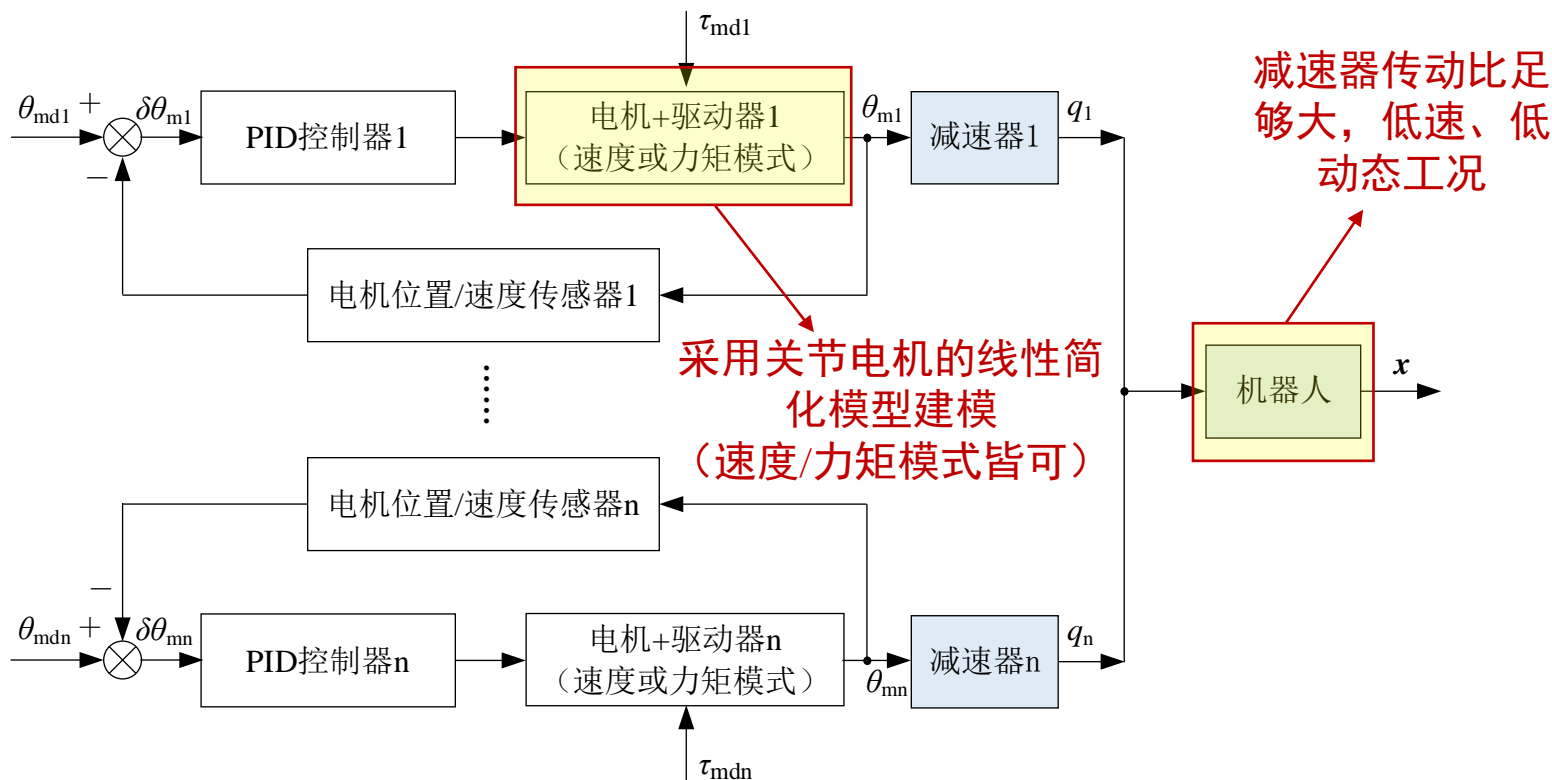
● 关节电机位置PID控制器设计思路

- 大传动比、低速、低动态机器人，可由简单的PID控制器对关节电机分别进行控制
- 小传动比或者高速、高动态机器人，可以在独立PID控制器的基础上，附加干扰力矩补偿控制量



关节干扰力矩影响因素与分散控制方案原理

● 独立关节位置PID控制器方案原理



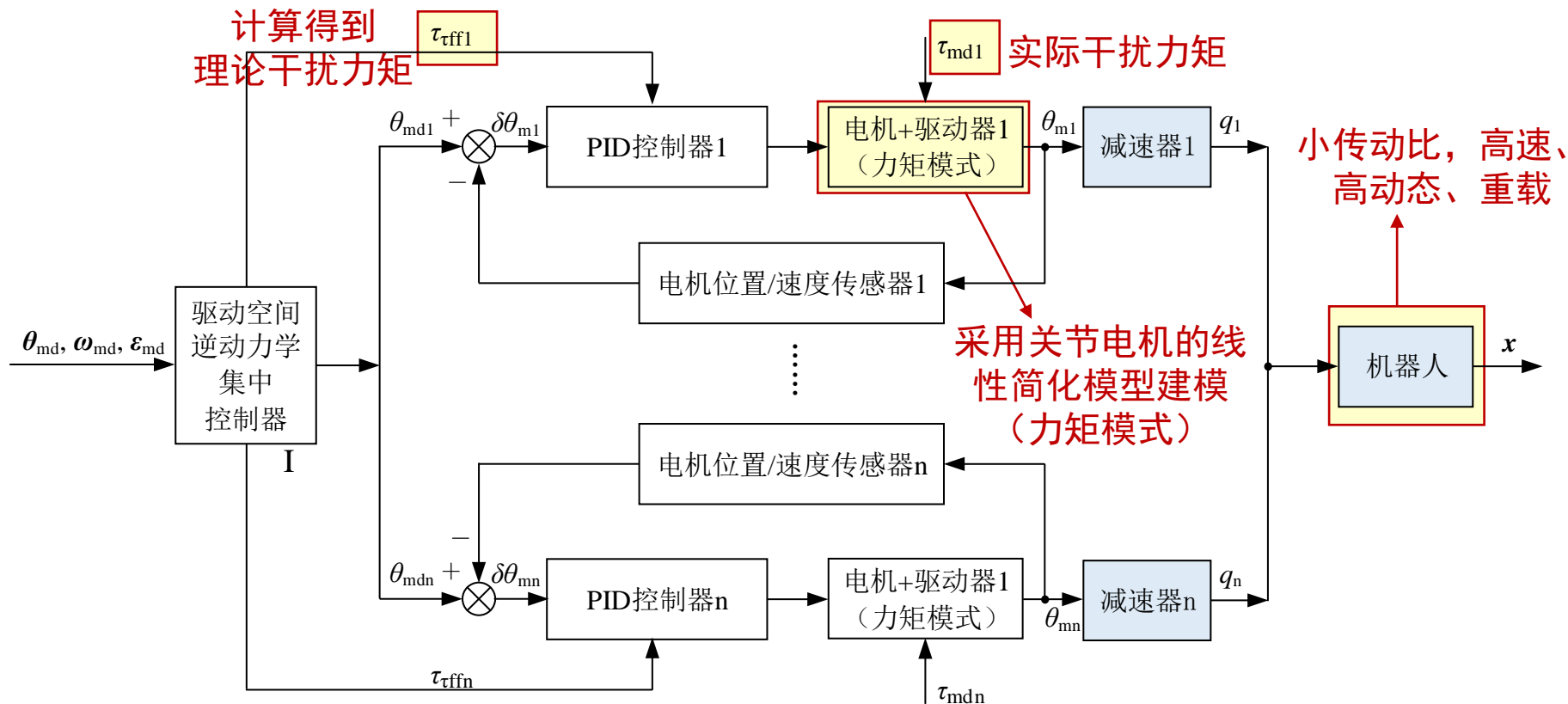
➤ 独立关节位置PID控制器特点

- 干扰力矩 τ_{md} 被视为小扰动，系统对干扰的抑制能力由PID控制器参数决定
- 电机既可以工作在速度模式，也可以工作在力矩模式
- 根据关节电机的线性简化模型和控制器参数，可以设计速度和加速度前馈，提高对动态信号的跟随性能
- 各控制器可独立运行在低成本单片机上，控制系统简单



关节干扰力矩影响因素与分散控制方案原理

● 集中前馈补偿位置PID控制器的方案原理



➤ 集中前馈补偿位置PID控制器特点

- 根据各关节电机的期望位置、速度和加速度，提前计算出理论干扰力矩 τ_{ff} ，作为集中前馈发送给独立关节位置PID控制器，精确补偿非线性力矩
- 要求有一个集中控制器，且电机只能工作在力矩模式