第二章：

本章目录 CONTENT

2.7 状态估计和传感器融合

2.7 状态估计和传感器融合

背景知识

- 状态估计：确定某一时刻目标的状态（速度，位置等）
- 高斯分布：

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

μ：均值　σ^2：方差

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^N \det(\Sigma)}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-\mu)^T \Sigma^{-1} (x-\mu)\right)$$

Σ：协方差矩阵

- 先验概率P(x)：根据已有经验推断事件发生的概率
- 似然估计P(z|x)：已知观测结果判断事件发生的概率
- 后验概率P(x|z)：给定条件下的概率，即根据先验概率和似然估计推断出事件发生的概率

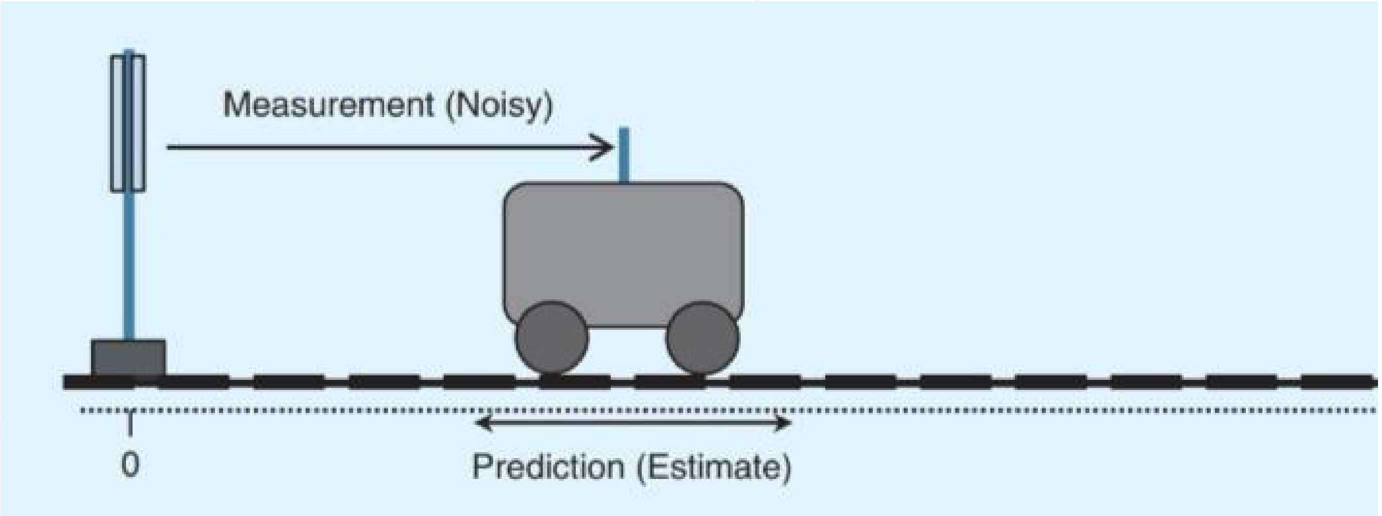
贝叶斯公式：

$$P(x|z) = \frac{P(x) \times P(z|x)}{P(z)}$$

卡尔曼滤波简单示例

问题描述

已知小车在道路上向右做匀速运动，在左侧安装了一个测量小车距离和速度传感器，传感器每1秒测一次小车的位置s和速度v，希望得到**第二秒**时的小车状态



用向量x_t来表示当前小车的状态，该向量也是最终的输出结果，被称作**状态向量。**

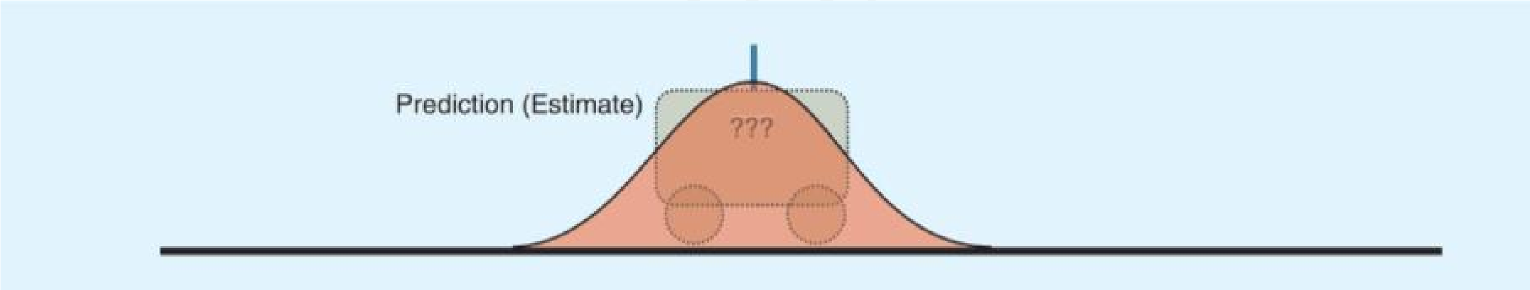
$$x_1 = \begin{bmatrix} s_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

x_1表示第一秒的状态

卡尔曼滤波简单示例

预测：

使用历史信息对未来的位置进行推测。根据第1秒小车的位置和速度，推测第2秒时，小车所在的位置应该如下图所示。图中红色区域的范围变大了，这是因为预测时加入了速度估计的**噪声**，是一个放大不确定性的过程。



得到预测状态xpre：

$$x_{pre} = \begin{bmatrix} s_1 + v_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

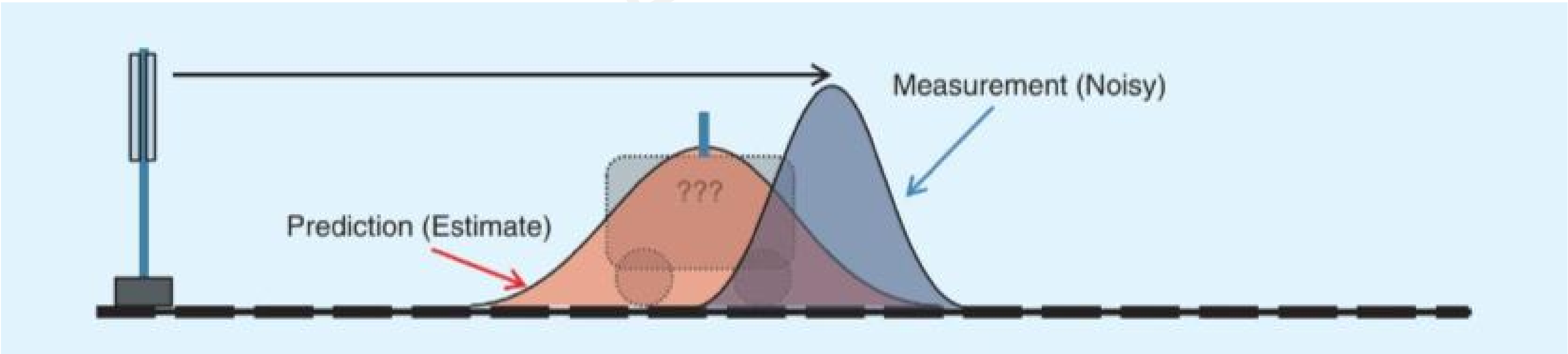
卡尔曼滤波简单示例

观测：

在第2秒时，传感器对小车的位置做了一次观测，我们认为小车在第2秒时观测值为z_2，用向量表示第2秒时的观测结果为：

$$z_2 = \begin{bmatrix} s_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

很显然，第二次观测的结果也是存在误差的，我们将预测的小车位置与实际观测到的小车位置放到一个图上，即可看到：



红色为预测位置，蓝色为观测到的位置

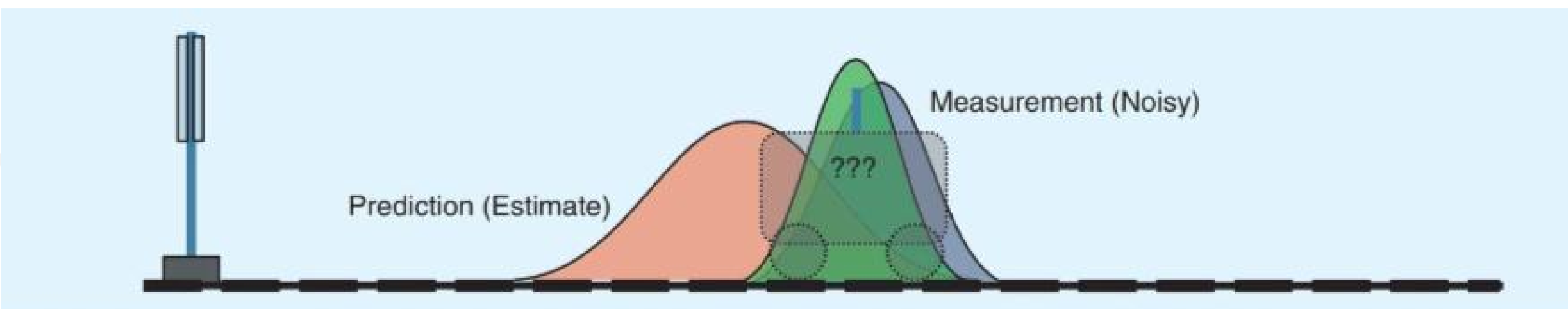
卡尔曼滤波简单示例

更新：

观测和预测的结果都在真值旁边，为了尽可能接近真值，需要对两个结果进行**加权平均**:

$$x_2 = w_1 * x_{pre} + w_2 * z_2$$

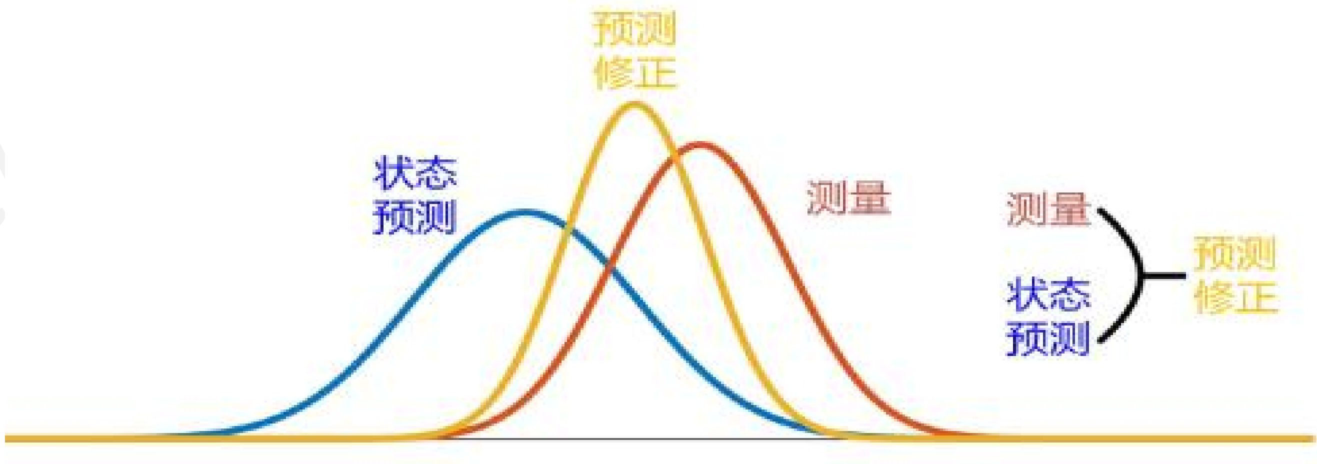
两个权值的计算是根据预测结果和观测结果的**不确定性**来的，这个**不确定性**就是高斯分布中的**方差**的大小，方差越大，波形分布越广，不确定性越高，这样一来给的权值就会越低。最终得到：



绿色的区域就是通过融合预测和测量的数据，对小车位置的最佳估计

卡尔曼滤波概述

- 卡尔曼滤波：是一种利用**线性系统**状态方程，通过系统输入输出观测数据，对系统状态进行最优估计的算法。
- 基本思想：采用信号与噪声的状态空间模型，利用**前一时刻的估计值**和**现时刻的观测值**来更新对状态变量的估计，求出**现在时刻的估计值**。
- 实质：预测——实测——修正



卡尔曼滤波算法原理

假设现在要进行火箭回收，在火箭降落到地表之前，需要知道火箭当前离地面的高度是多少，否则控制不当容易坠毁，这种情况下比较关心的**状态变量**就是**飞行器的离地高度**，然而飞行器的真实离地高度无法准确测量，所以需要对飞行器离地高度这个状态进行估计。

2.7 状态估计和传感器融合

卡尔曼滤波算法原理

1.状态预测：

$$Height^{(k)} = 0.95 \times Height^{(k-1)}$$

过程模型：

$$x_k^{'} = \alpha \hat{x}_{k-1}$$

加入**噪声**：

$$x_k^{'} = \alpha \hat{x}_{k-1} + w_k$$

$x_k^{'}$： k时刻预测值

$\hat{x}_{k-1}$： k-1时刻最优估计值

α： 常数系数（本例=0.95）

w_k： k时刻噪声

卡尔曼滤波算法原理

2.计算预测误差：

$$P_k^{'}=\alpha P_{k-1}\alpha^T$$

$P_k^{'}$： k时刻预测误差

P_{k-1}： k-1时刻最优估计值的误差

α^T： α的转置

3.观测模型：

$$z_k=x_k+v_k$$

z_k： k时刻的测量值

x_k： k时刻的真实值

v_k： 测量噪声

测量值来自传感器（GPS、气压计），测量的结果带有误差，也称为**噪声**，由传感器精密度引起。通常来说，这种噪声满足**高斯分布**，它服从**均值**为r、**方差**为δ的正态分布，均值r可通过测量或传感器厂商直接获得。

卡尔曼滤波算法原理

4.计算卡尔曼增益:

$$K_k = P'_k / (P'_k + r)$$

K_k： 卡尔曼增益

P'_k ： k时刻预测值的误差

r ： 测量噪声的均值

$\hat{x}_k$： k时刻最优估计值

x'_k ： k时刻预测值

z_k： k时刻测量值

5.计算最优估计值:

$$\hat{x}_k = x'_k + K_k(z_k - x'_k)$$

$$\Downarrow$$

$$\hat{x}_k = x'_k(1 - K_k) + K_k z_k$$

$$\Downarrow \qquad \Downarrow$$

$K_k=0$

$\hat{x}_k = x'_k$

$K_k=1$

$\hat{x}_k = z_k$

卡尔曼滤波算法原理

6.计算最优估计值的误差：

$$P_k=(1-K_k)P_k^{'}$$

P_k： k时刻最优估计值的误差

$P_k^{'}$ ： k时刻预测误差

K_k： 卡尔曼增益

第五步已经算出最优估计值，为什么还要计算最优估计值的误差?

$$P_{k+1}^{'}=\alpha P_k \alpha^T$$

卡尔曼滤波算法原理

总结：

预测

$$x'_k = \alpha\hat{x}_{k-1} + bu_k$$

$$P'_k = \alpha P_{k-1}\alpha^T$$

更新

$$K_k = P'_k/(P'_k + r)$$

$$\hat{x}_k = x'_k + K_k(z_k - x'_k)$$

$$P_k = (1 - K_k)P'_k$$

矩阵形式

$$\boldsymbol{x}'_k = \boldsymbol{A}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{B}u_k$$

$$\boldsymbol{P}'_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{A}^T$$

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}'_k\boldsymbol{H}^T(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}'_k\boldsymbol{H}^T + R)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \boldsymbol{x}'_k + \boldsymbol{K}_k(z_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}'_k)$$

$$\boldsymbol{P}_k = (I - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H})\boldsymbol{P}'_k$$

2.7 状态估计和传感器融合

无人车传感器

2.7 状态估计和传感器融合

无人车传感器

2.7 状态估计和传感器融合

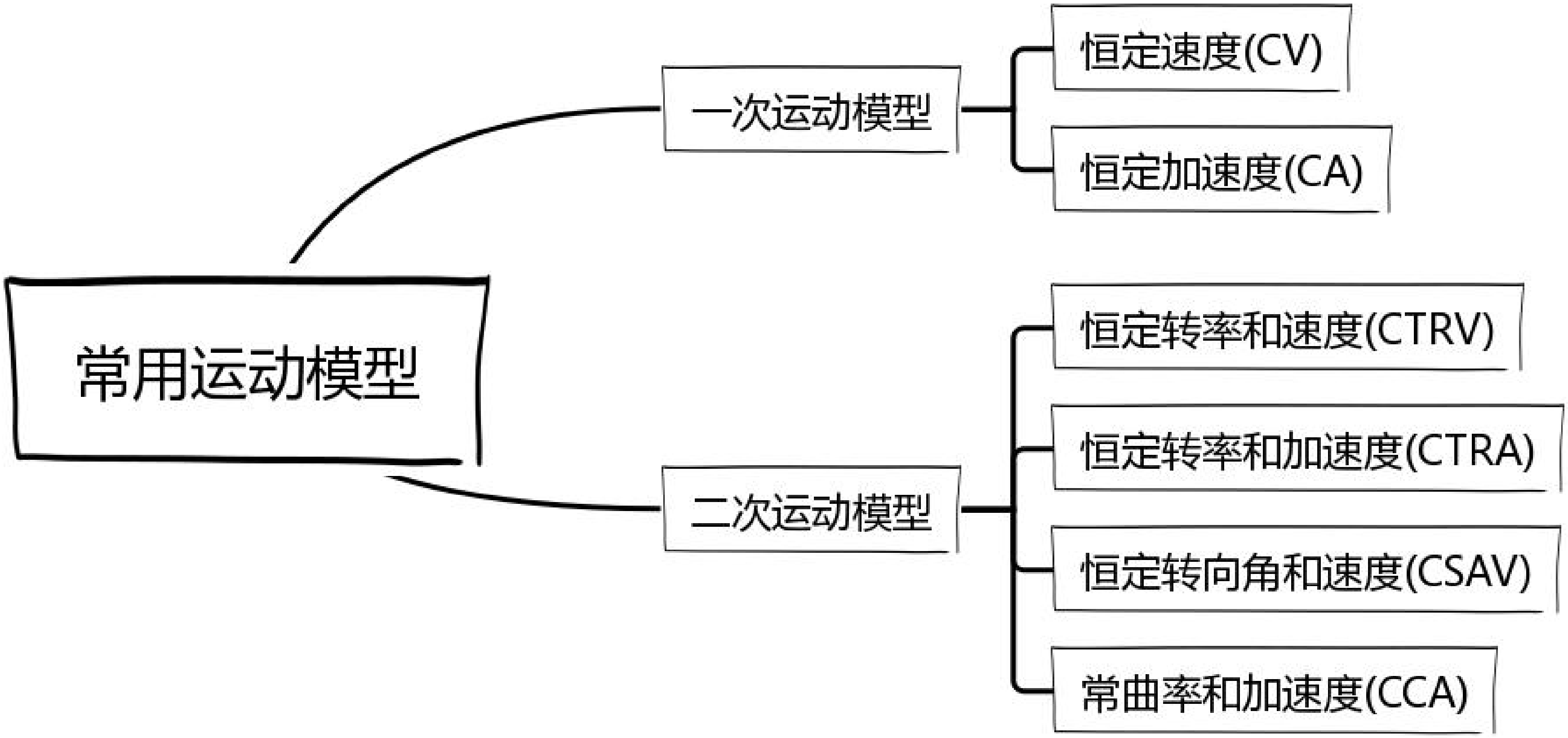
无人车传感器

2.7 状态估计和传感器融合

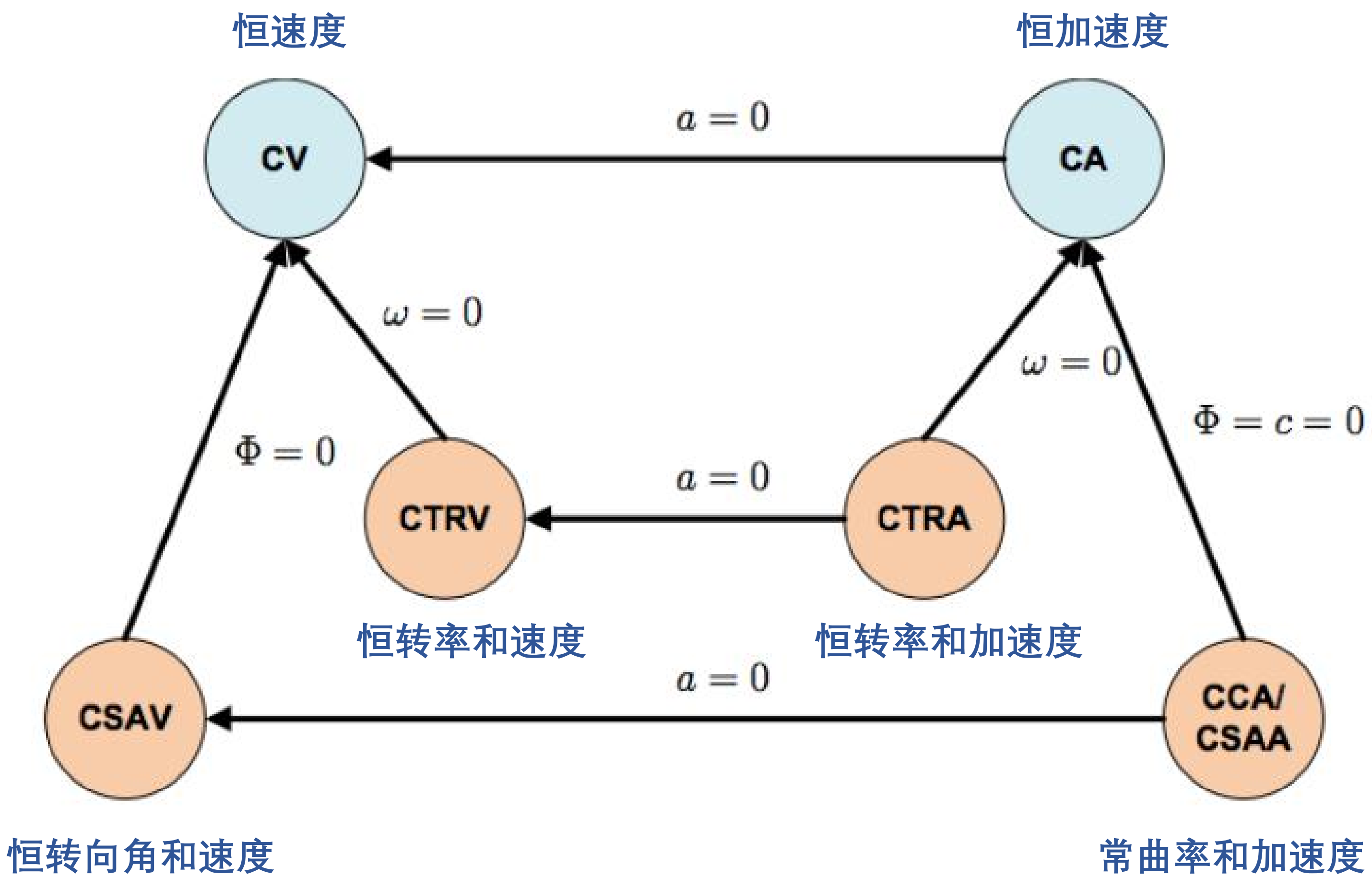
无人车传感器

2.7 状态估计和传感器融合

常用运动模型：



运动模型关系



α：加速度

ω：角速度

c：曲率

$\boldsymbol{\Phi}$：转向角

运动模型关系图

恒定速率（CV）模型：

① 状态空间：$\vec{x}(t) = (x,\ y,\ v_x,\ v_y)^T$

状态转移函数：$\vec{x}(t+\Delta t) = \begin{pmatrix} x(t)+\Delta t v_x \\ y(t)+\Delta t v_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}$

$(x,\ y)$表示目标**位置**，$(v_x,\ v_y)$表示目标在$(x,\ y)$上的**速度**。

② 状态空间：$x(k) = (x,\ y,\ \theta,\ v)^T$

状态转移函数：$x(k+1) = x(k) + \begin{pmatrix} v\cos\theta\Delta t \\ v\sin\theta\Delta t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(x,\ y)$表示目标**位置**，θ表示目标**与x轴的夹角**（逆时针为正），取值范围 $[0, 2\pi)$，v表示目标的**速度**。

卡尔曼滤波对行人状态估计

过程噪声q

- 用向量表示行人状态：$\vec{x}(t) = (P_x, P_y, v_x, v_y)^T$
- 生成过程模型，假设行人**匀速**：$x_{k+1} = Ax_k + q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}_k + q$
- 行人状态估计中的**过程噪声**其实就是行人突然的加减速度，考虑行人的加速度因素，模型变为：

$$x_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \Delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ v_x \\ v_y \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} a_x \Delta t^2 \\ \frac{1}{2} a_y \Delta t^2 \\ a_x \Delta t \\ a_y \Delta t \end{pmatrix}_k$$

$$\boldsymbol{P}'_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{A}^T \quad \Longrightarrow \quad \boldsymbol{P}'_k = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}$$

卡尔曼滤波对行人状态估计

- $q \sim N(0, Q)$,Q是过程噪声q的**协方差矩阵**　$\boldsymbol{P}_k^{'} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \sigma_{p_x}^2 & \sigma_{p_x p_y} & \sigma_{p_x v_x} & \sigma_{p_x v_y} \\ \sigma_{p_y p_x} & \sigma_{p_y}^2 & \sigma_{p_y v_x} & \sigma_{p_y v_y} \\ \sigma_{v_x p_x} & \sigma_{v_x p_y} & \sigma_{v_x}^2 & \sigma_{v_x v_y} \\ \sigma_{v_y p_x} & \sigma_{p_x p_y} & \sigma_{v_y v_x} & \sigma_{v_y}^2 \end{bmatrix}$$

- 矩阵对角位置为状态向量中每个变量自身的方差，比如$\sigma_{p_x}^2$为x方向位置在预测中表示不确定性的方差

- Q如何确定?

——通过**加速度的方差**来推导，由被追踪物体的**极限性质**来确定，如高速场景下汽车的最大加速度是8.8m/s^2，行人加速度0.5m/s^2。

卡尔曼滤波对行人状态估计

- 拆解过程噪声 $\boldsymbol{q} = \begin{bmatrix} \frac{a_x \Delta t^2}{2} \\ \frac{a_y \Delta t^2}{2} \\ a_x \Delta t \\ a_y \Delta t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$ 定义 $G = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^2}{2} \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \Delta t \end{bmatrix}$ $\alpha = \begin{bmatrix} a_x \\ a_y \end{bmatrix}$
- 根据协方差公式得:

$$\boldsymbol{Q} = E[\boldsymbol{q}\boldsymbol{q}^T] = G \cdot E[aa^T] \cdot G^T = \boldsymbol{G} \begin{bmatrix} \sigma_{a_x}^2 & \sigma_{a_{xy}} \\ \sigma_{a_{xy}} & \sigma_{a_y}^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{G}^T = \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{G}^T$$

- 一般情况下x和y方向的加速度没有相关性，所以记: $\boldsymbol{Q}_v = \begin{bmatrix} \sigma_{a_x}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{a_y}^2 \end{bmatrix}$
- 将Q_v重新带回Q，得:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{Q}_v\boldsymbol{G}^T = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^4}{4}\sigma_{a_x}^2 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2}\sigma_{a_x}^2 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^4}{4}\sigma_{a_y}^2 & 0 & \frac{\Delta t^3}{2}\sigma_{a_y}^2 \\ \frac{\Delta t^3}{2}\sigma_{a_x}^2 & 0 & \Delta t^2\sigma_{a_x}^2 & 0 \\ 0 & \frac{\Delta t^3}{2}\sigma_{a_y}^2 & 0 & \Delta t^2\sigma_{a_y}^2 \end{bmatrix}$$

σ_{a_x}
σ_{a_y}

卡尔曼滤波对行人状态估计

假设传感器可测得行人位置

观测向量与状态向量维度不一致

- 得观测向量 $\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}p_x\\p_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}p_x\\p_y\\v_x\\v_y\end{bmatrix}=\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}$

- 观测矩阵 $\boldsymbol{H}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

状态域到观测域的转换矩阵

- 观测噪声的协方差矩阵 $\boldsymbol{R}=\begin{bmatrix}\sigma_{p_x}^2&\sigma_{p_xp_y}\\\sigma_{p_xp_y}&\sigma_{p_y}^2\end{bmatrix}$

由传感器性质决定

2.7 状态估计和传感器融合

卡尔曼滤波：

时间更新（预测）

（1）根据上一刻状态预测下一刻

$$\boldsymbol{x}'_k=\boldsymbol{A}\hat{x}_{k-1}+\boldsymbol{B}u_k$$

（2）根据上一刻误差协方差预测下一刻

$$\boldsymbol{P}'_k=\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{A}^T+Q$$

测量更新（纠正）

（1）计算卡尔曼增益

$$\boldsymbol{K}_k=\boldsymbol{P}'_k\boldsymbol{H}^T(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}'_k\boldsymbol{H}^T+R)^{-1}$$

（2）根据测量值更新预测值

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\boldsymbol{x}'_k+\boldsymbol{K}_k(z_k-\boldsymbol{H}\boldsymbol{x}'_k)$$

（3）更新误差协方差

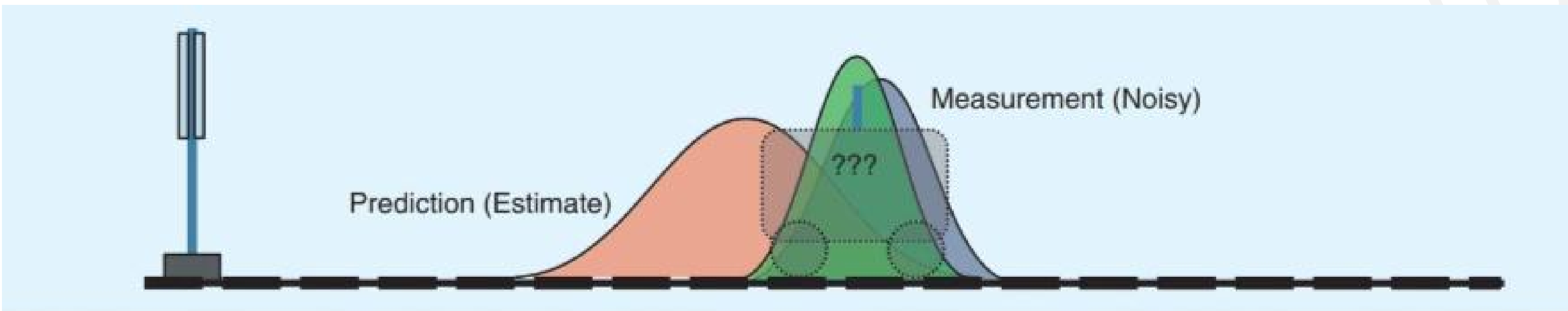
$$\boldsymbol{P}_k=(I-\boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H})\boldsymbol{P}'_k$$

初始化预测$\hat{x}_{k-1}$和$\boldsymbol{P}_{k-1}$

卡尔曼滤波流程图

2.7 状态估计和传感器融合

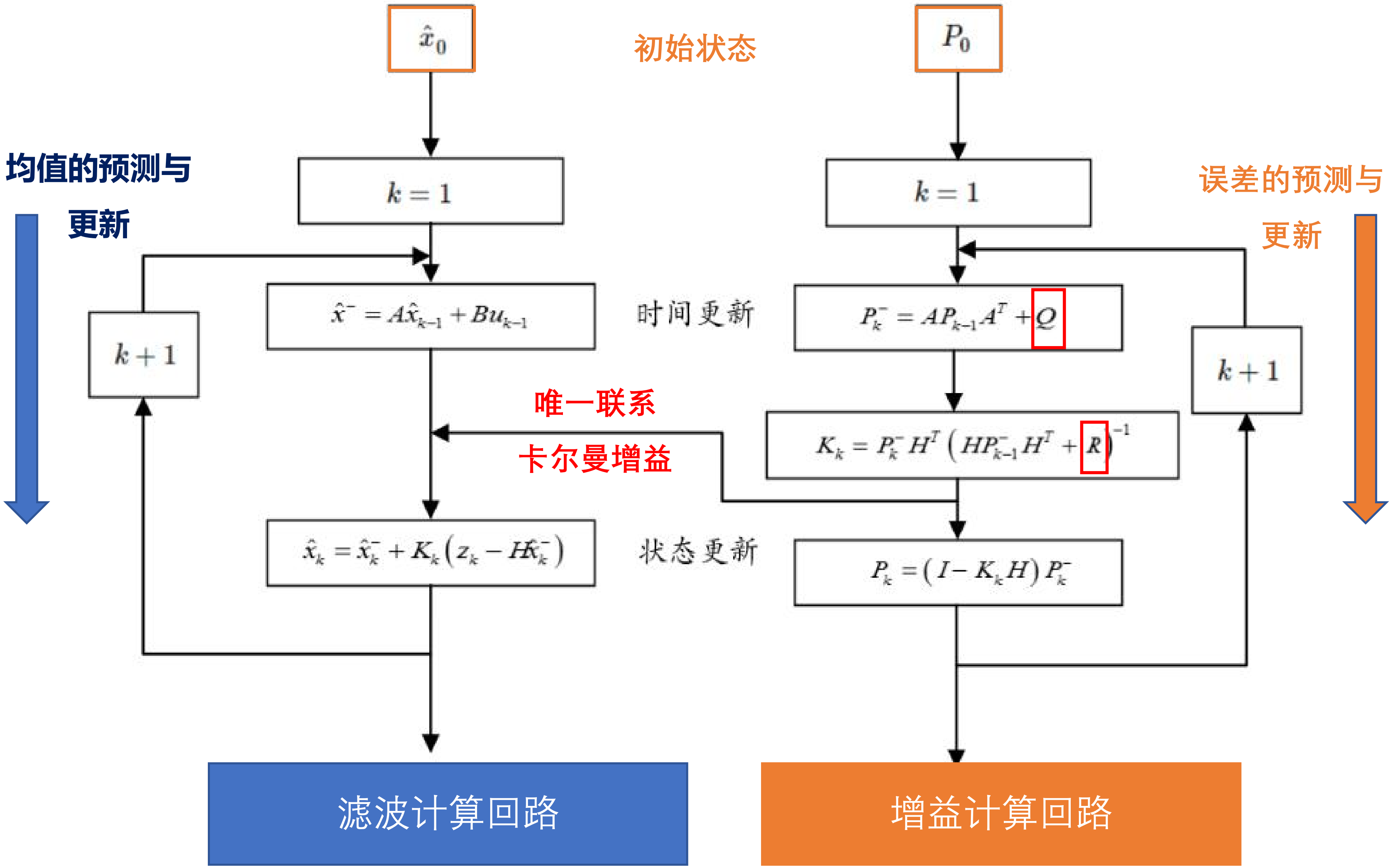
卡尔曼滤波:



- 观察这五个步骤，就是**求两个高斯分布的（预测和更新）的均值** x'_k、$\hat{x}_k$ **和协方差** P'_k、P_k
- 通过卡尔曼增益比较预测和观测的不确定性程度，来判断是更相信经验还是更相信传感器。

2.7 状态估计和传感器融合

卡尔曼滤波：



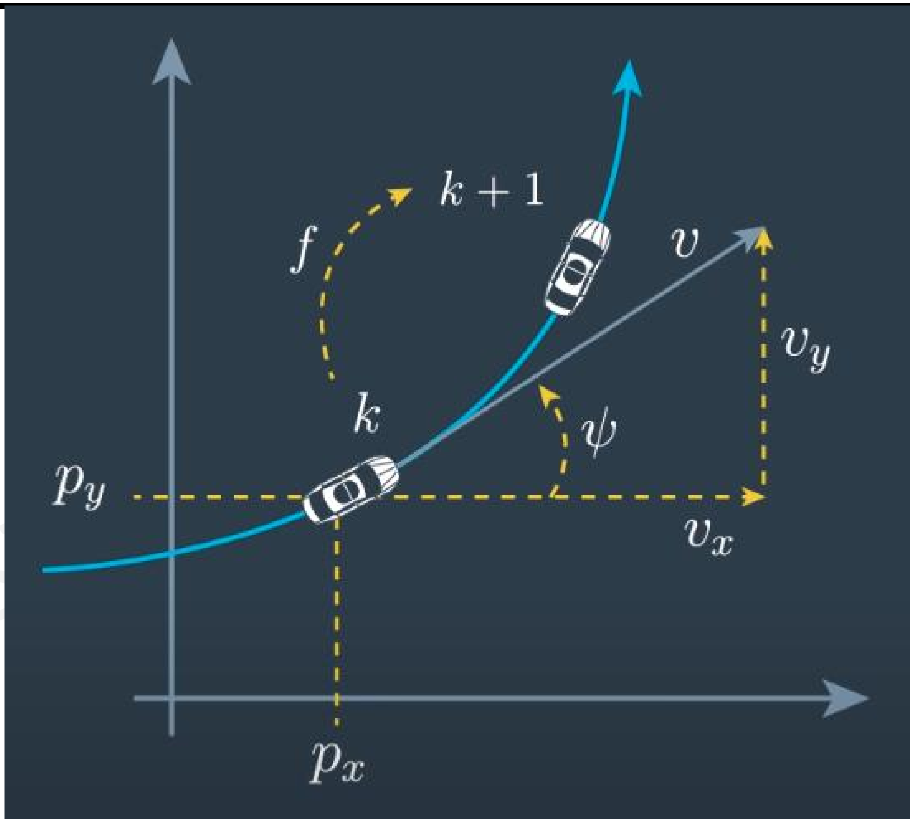
局限性

1.在组合信息大量冗余的情况下，计算量将以滤波器维数的三次方剧增，实时性不能满足；

2.传感器子系统的增加使故障随之增加，在某一系统出现故障而没有来得及被检测出时，故障会污染整个系统，使可靠性降低；

3.卡尔曼滤波可以对**线性系统**和**高斯噪声**进行精确的估计，但对与非线性系统和非高斯噪声的处理效果不佳。

恒定角速度-速度（CTRV）模型：



状态空间：$x(k) = (p_x, p_y, v, \psi, \omega)^T$

式中，(p_x, p_y)表示目标**位置**，v表示目标的**速度**，ψ为**偏航角**，是目标车辆在当前车辆坐标系下与x轴的夹角，逆时针方向为正，取值范围 $[0, 2\pi)$, ω是**偏航角速度。**

状态转移函数：

$$x(k+1) = x(k) + \begin{pmatrix} \frac{v}{\omega}\sin(\omega\Delta t + \psi_k) - \frac{v}{\omega}\sin(\psi_k) \\ -\frac{v}{\omega}\cos(\omega\Delta t + \psi_k) + \frac{v}{\omega}\cos(\psi_k) \\ 0 \\ \omega\Delta t \\ 0 \end{pmatrix}$$

由于正余弦函数，无法提出矩阵A
不符合卡尔曼滤波的先决条件

2.7 状态估计和传感器融合

扩展卡尔曼滤波（EKF）：

- 扩展卡尔曼滤波的本质是使用**线性变换来近似非线性变换**，线性变换中有一种强大的工具——泰勒展开。
- 多元函数泰勒展开： $T(x)=f(u)+(x-u)Df(u)+\frac{1}{2!}(x-u)^2D^2f(u)+\cdots$
- 其中，Df(u)是在该处的**雅克比矩阵**，由于 (x-u) 本身数值很小，平方就更小了，所以高阶级数忽略不计，一般我们就考虑**一阶**雅克比矩阵进行线性化近似。

① 雅可比矩阵： $\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x_n}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{bmatrix}$

$$x_k^{'}=A\hat{x}_{k-1}+Bu_k \quad\Rightarrow\quad x_k=g(x_{k-1},u)$$

$$P_k^{'}=AP_{k-1}A^T \quad\Rightarrow\quad P_k=J_AP_{k-1}J_A^T+Q$$

2.7 状态估计和传感器融合

扩展卡尔曼滤波（EKF）

$$x(k) = (p_x, p_y, v, \psi, \omega)^T, \quad x(k+1) = \begin{pmatrix} p_{x_k} + \frac{v}{\omega}\sin(\omega\Delta t + \psi_k) - \frac{v}{\omega}\sin(\psi_k) \\ p_{y_k} - \frac{v}{\omega}\cos(\omega\Delta t + \psi_k) + \frac{v}{\omega}\cos(\psi_k) \\ v \\ \psi_k + \omega\Delta t \\ \omega \end{pmatrix}$$

对各元素求偏导得J_A：

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{w}(-sin(\psi) + sin(\psi + \omega\Delta t)) & \frac{v}{w}(-cos(\psi) + cos(\psi + \omega\Delta t)) & \frac{v\Delta t}{\omega}cos(\omega\Delta t + \psi) - \frac{v}{\omega^2}(-sin(\psi) + sin(\omega\Delta t + \psi)) \\ 0 & 1 & \frac{v}{w}(-sin(\psi) + sin(\psi + \omega\Delta t)) & \frac{1}{w}(cos(\psi) - cos(\psi + \omega\Delta t)) & \frac{v\Delta t}{\omega}sin(\omega\Delta t + \psi) - \frac{v}{\omega^2}(cos(\psi) - cos(\omega\Delta t + \psi)) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

特殊情况下，当ω等于0：

$$J_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & cos(\psi)\Delta t & -sin(\psi)v\Delta t & 0 \\ 0 & 1 & sin(\psi)\Delta t & cos(\psi)v\Delta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ECUST

2.7 状态估计和传感器融合

扩展卡尔曼滤波（EKF）：

② 过程噪声：**直线加速度**和**偏航角加速度**（满足均值为0，方差为σ_a^2、σ_ω^2）

$$\text{noise} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \mu_a \cos(\psi) \\ \frac{1}{2}\Delta t^2 \mu_a \sin(\psi) \\ \Delta t \mu_a \\ \frac{1}{2}\Delta t^2 \mu_\omega \\ \Delta t \mu_\omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\Delta t^2 \cos(\psi) & 0 \\ \frac{1}{2}\Delta t^2 \sin(\psi) & 0 \\ \Delta t & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & \Delta t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mu_a \\ \mu_\omega \end{pmatrix} = \boldsymbol{G} \cdot \boldsymbol{\mu}$$

- 过程噪声的协方差矩阵Q：

$$Q = E[\text{noise} \cdot \text{noise}^{\mathrm{T}}] = E[G\mu\mu^T G^T] = G \cdot E[\mu\mu^T] \cdot G^T$$

- 一般情况下，线加速度和角加速度无相关性，所以得:

$$E[\mu\mu^T] = \begin{pmatrix} \sigma_a^2 & 0 \\ 0 & \sigma_\omega^2 \end{pmatrix}$$

2.7 状态估计和传感器融合

扩展卡尔曼滤波（EKF）：

预测状态向量为 $x(k) = (p_x, p_y, v, \psi, \omega)^T$

③ 测量：**激光雷达**：车辆位置（x，y）　**毫米波雷达**：

- 极坐标距离 $\boldsymbol{\rho}$
- 与x轴夹角 $\boldsymbol{\psi}$
- 相对距离变化率 $\dot{\boldsymbol{\rho}}$

- 对于激光雷达，观测模型是线性的，可得**观测矩阵**：$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

- 对于毫米波雷达雷达，预测映射到测量空间非线性的，表达式为：

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \psi \\ \dot{\rho} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2+y^2} \\ atan(y,x) \\ \frac{vx+vy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{pmatrix}$$

- 用$h(x)$表示非线性映射，求解$h(x)$的**雅克比矩阵**：

$$J_H = \begin{bmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{v}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x(vx+vy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{v}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{y(vx+vy)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2.7 状态估计和传感器融合

扩展卡尔曼滤波（EKF）：

Prediction

Project the state ahead

$$x_{k+1} = g(x_k, u)$$

Project the error covariance ahead

$$P_{k+1} = \boxed{J_A} P_k \boxed{J_A^T} + Q$$

Correction

Compute the Kalman Gain

$$K_k = P_k \boxed{J_H^T} \left(\boxed{J_H} P_k \boxed{J_H^T} + R \right)^{-1}$$

Update the estimate via measurement

$$x_k = x_k + K_k (z_k - h(x_k))$$

Update the error covariance

$$P_k = (I - K_k \boxed{J_H}) P_k$$

Initialize P, R, Q, I once

J are the Jacobians

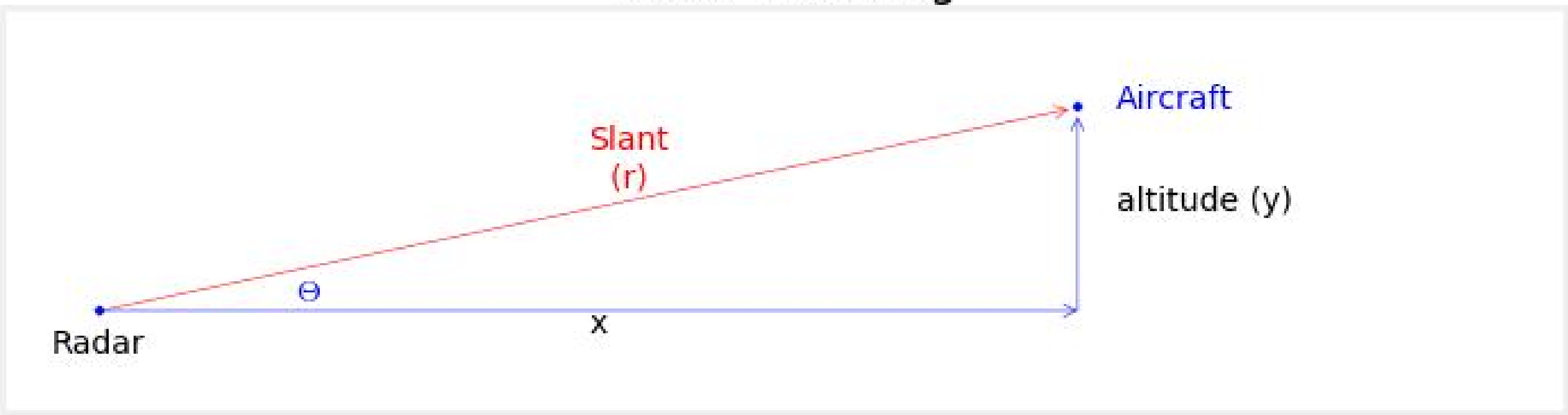
扩展卡尔曼滤波流程图

非线性的部分线性化，用**雅可比矩阵**代替状态转移矩阵和观测矩阵

扩展卡尔曼滤波（EKF）：

简单例子：假设一架飞机以**恒定水平速度**飞行（高度不变），地面上有一个雷达可以发射电磁波测量飞机到雷达的**距离r。**

Radar Tracking



我们想知道某一时刻飞机的水平位置和垂直高度，以**水平位置**、**水平速度**、**垂直高度**作为状态变量：

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} \text{distance} \\ \text{velocity} \\ \text{altitude} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \\ y \end{pmatrix}$$

扩展卡尔曼滤波（EKF）：

- 状态转移矩阵为:

$$A=\begin{pmatrix}1 & \Delta t & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- 过程噪声的协方差矩阵为:

$$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\Delta t^4\sigma_a^2 & \frac{1}{2}\Delta t^3\sigma_a^2 & 0\\ \frac{1}{2}\Delta t^3\sigma_a^2 & \Delta t^2\sigma_a^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

- 观测值与状态变量之间的关系为:

$$h(\hat{x})=\sqrt{x^2+y^2},$$

- 非线性映射$h(\hat{x})$的雅可比矩阵:

$$J_H=\begin{bmatrix}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & 0 & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{bmatrix}$$

2.7 状态估计和传感器融合

EKF存在以下缺点：

1. 需要计算非线性模型的雅克比矩阵，计算大，易出错，难得到。
2. 忽略高阶项，估计精度大受影响。
3. 模型不确定性的鲁棒性很差。
4. 在系统达到平稳状态时，将丧失对突变状态的跟踪能力。
5. 如果系统的误差传播函数不能很好地用线性函数来逼近，可能会导致滤波器发散。
6. 因为偏导数高阶导数省略问题和雅克比矩阵计算难度的问题，让EKF的效果不是很好。

无损卡尔曼滤波（UKF）：

- UKF思想：近似**概率分布**要比近似**非线性函数**更容易
- UKF核心：无损变换
- UKF是对**非线性函数**的**概率分布(均值μ**和方差**σ^2)**进行**近似(sigma points)**，用一系列确定的样本来逼近状态的后验概率分布。
- EKF 是通过**偏导数或连续差分**,经**雅克比矩阵**,对**非线性函数** f(x) 本身进行**近似(线性化)**，但是忽略了高阶导数。

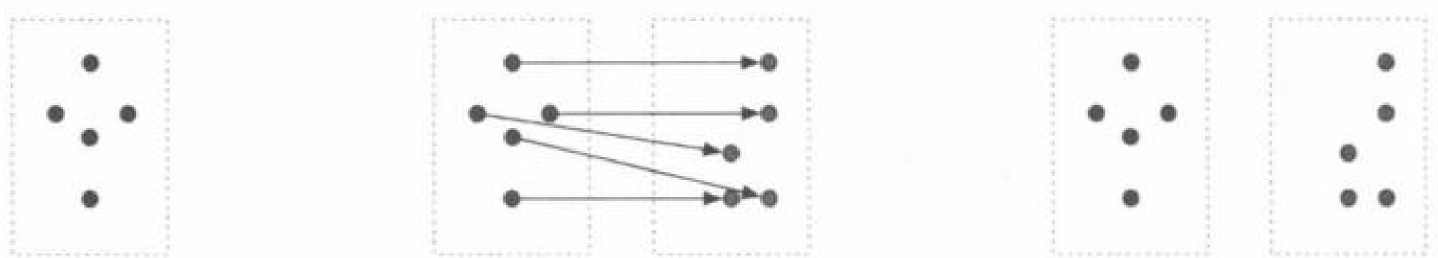


图 4-8　无损变换

无损卡尔曼滤波（UKF）算法流程：

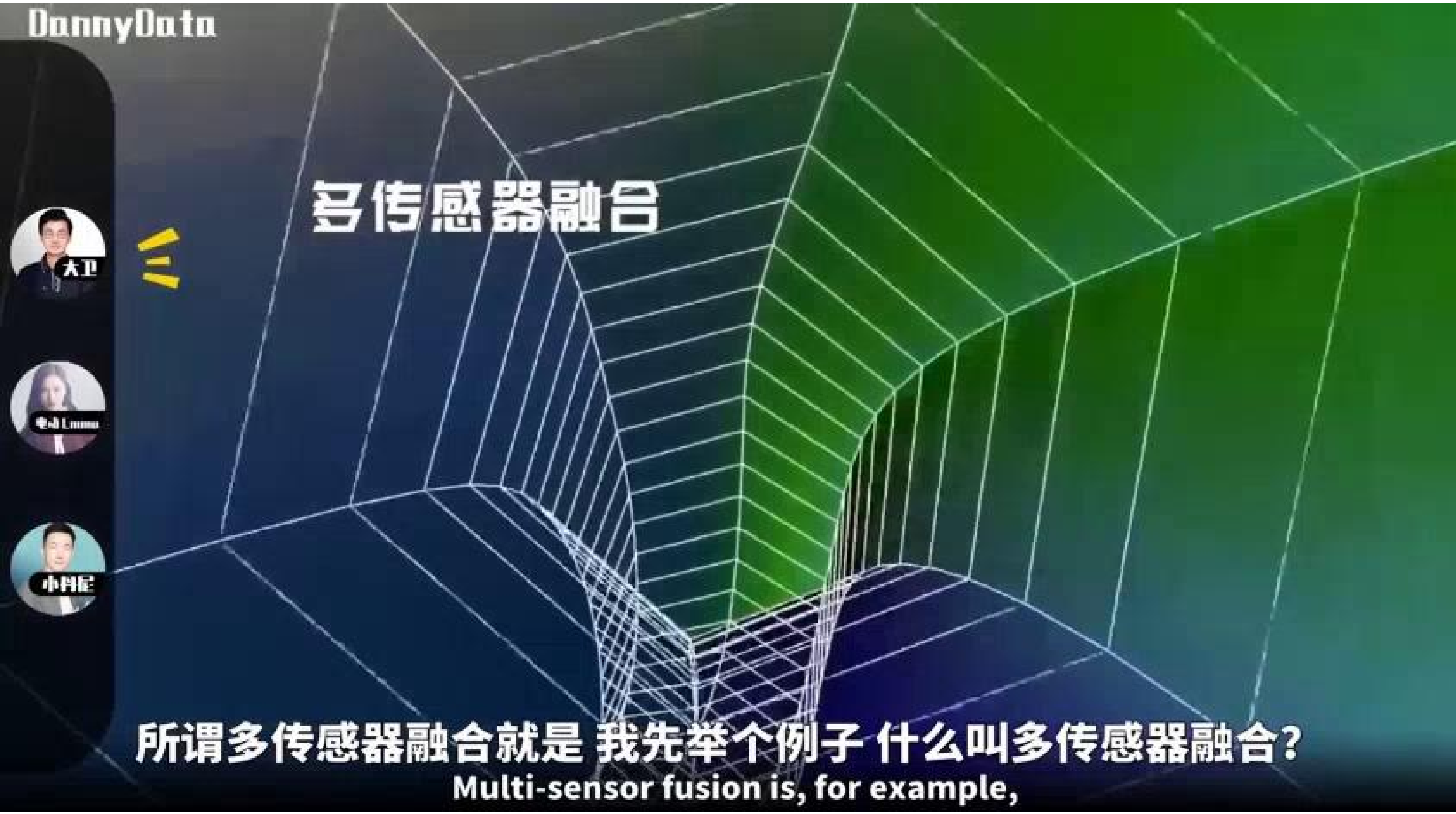
预测：

- 产生sigma point点集
- 基于模型预测sigma point点集
- 计算新的均值和方差

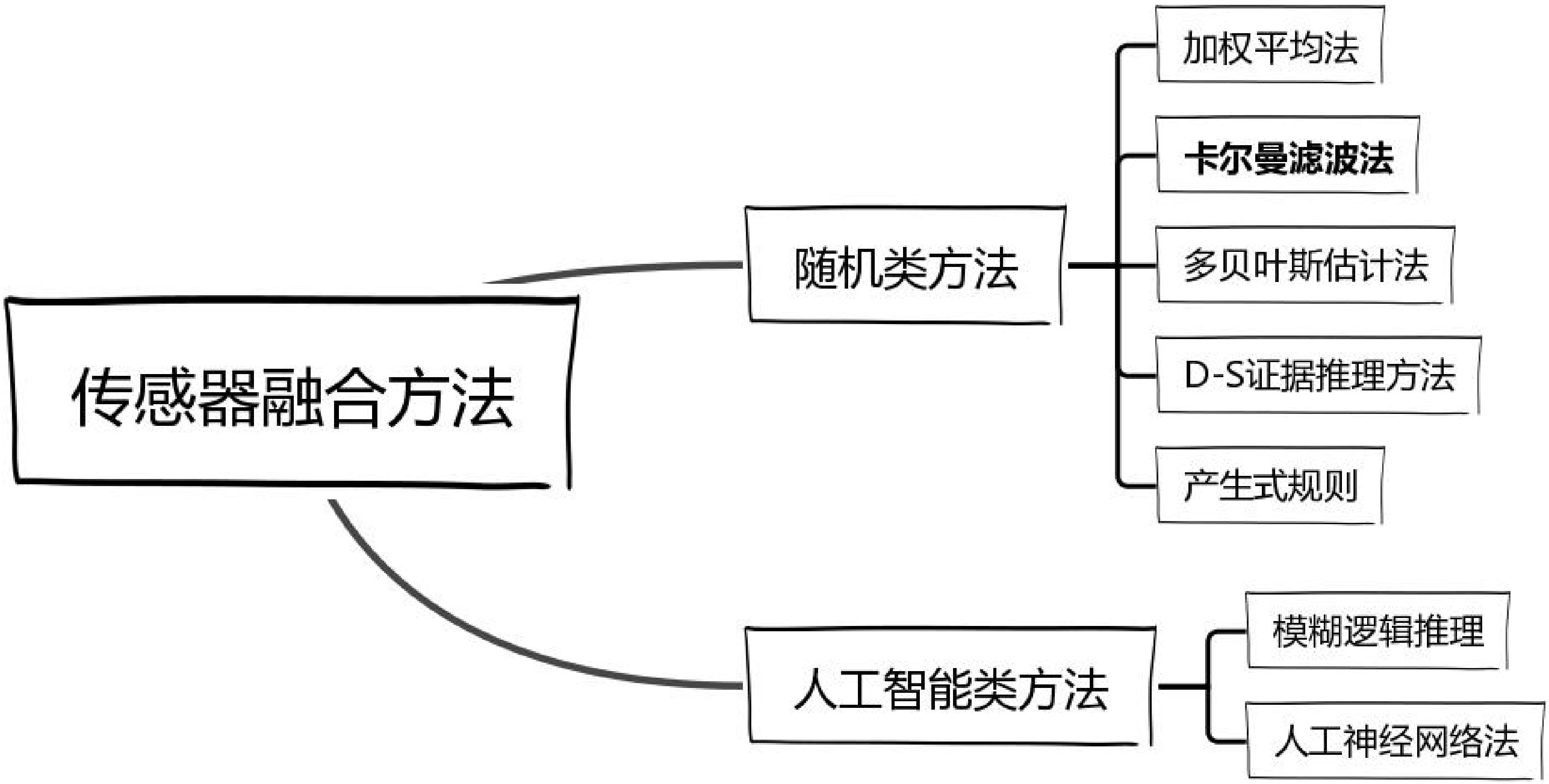
更新：

- 预测测量值（UKF独有）
- 根据sigma point点集更新系统状态

什么是传感器融合?

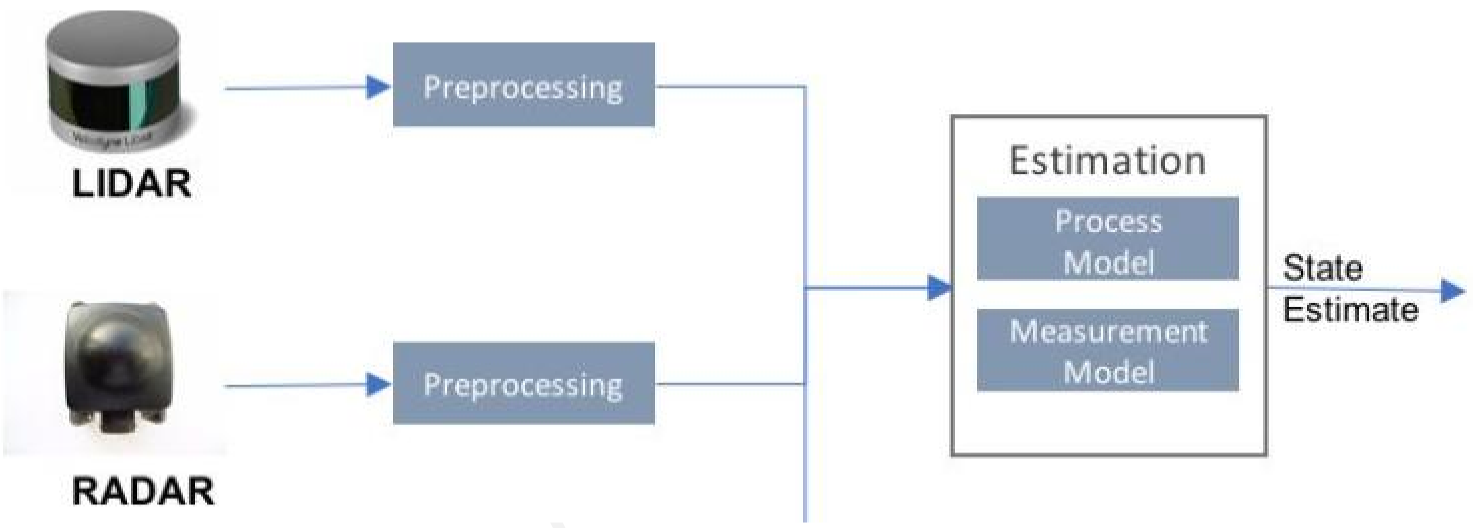

DannyData
多传感器融合
大卫
所谓多传感器融合就是 我先举个例子 什么叫多传感器融合?
Multi-sensor fusion is, for example,

传感器融合方法


传感器融合方法
随机类方法
加权平均法
卡尔曼滤波法
多贝叶斯估计法
D-S证据推理方法
产生式规则
人工智能类方法
模糊逻辑推理
人工神经网络法

2.7 状态估计和传感器融合

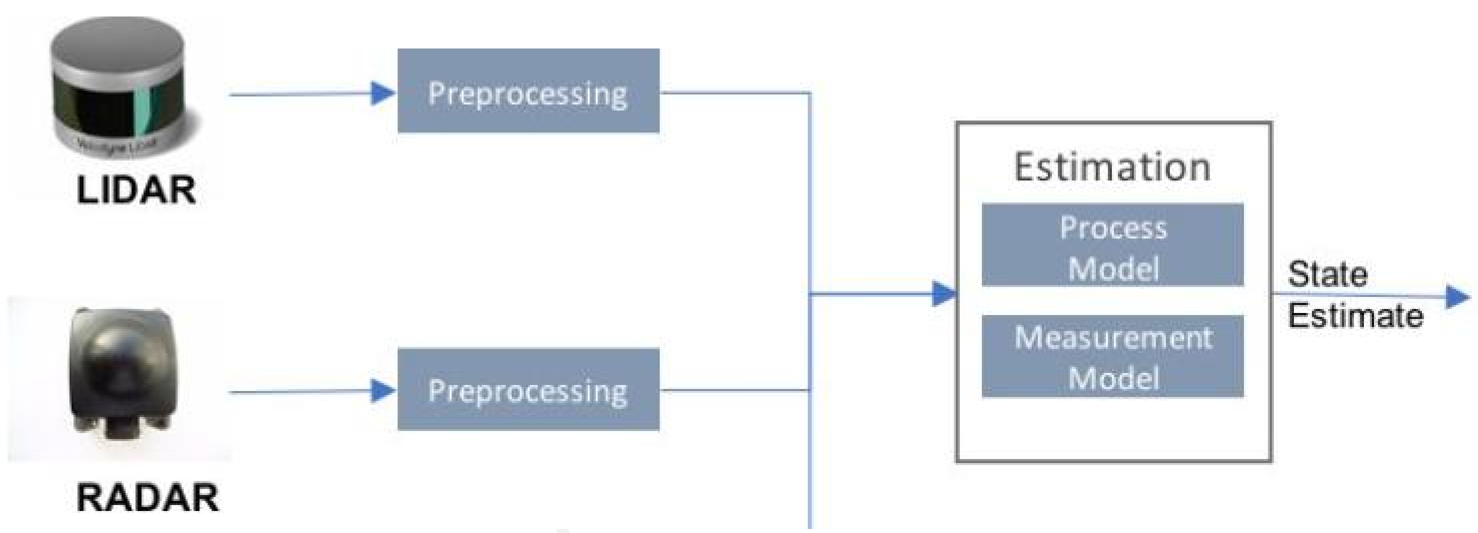
传感器融合



- 两个雷达测量数据**不在同一时间**得到：

  根据测量数据的先后顺序，依次进行卡尔曼滤波迭代：假如k-1时刻是激光雷达数据，则使用激光雷达的观测模型，计算得到k-1时刻的最优估计值，k时刻观测数据由毫米波雷达测得，再变换观测模型，计算k时刻最优估计值，每次卡尔曼滤波开始前先判断数据来源。

传感器融合

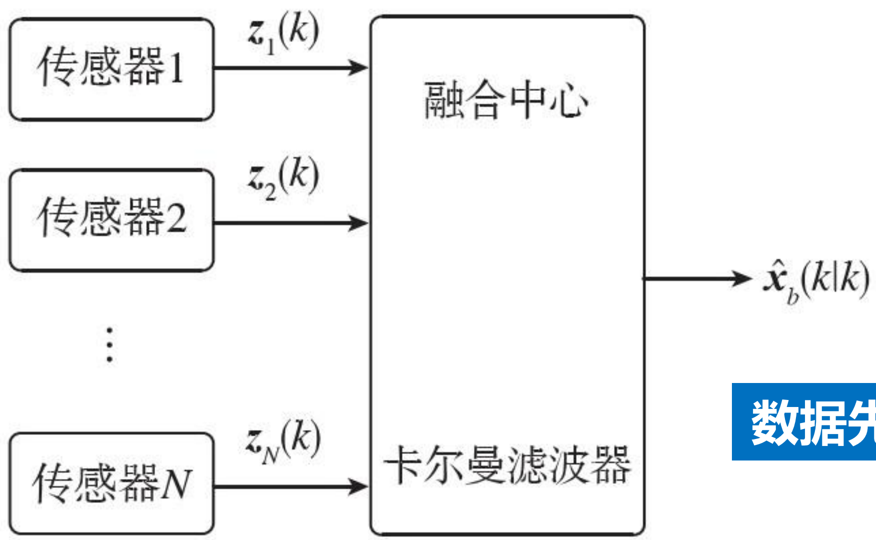


- 两个雷达测量数据**在同一时间**得到：

  k时刻同时收到激光雷达和毫米波雷达数据，先预测k时刻的状态，使用任意一个传感器进行更新，得到第一次k时刻最优估计值，再使用另一个传感器信息进行更新，得到k时刻最终的最优估计值。（使用第一次得到的最优估计值作为第二次的预测值，相当于一次卡尔曼滤波做了**一次预测**，**两次更新。**）

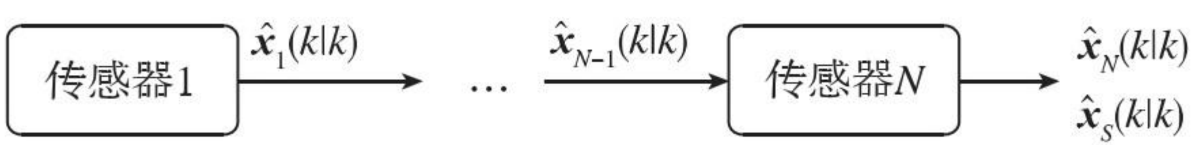
传感器融合

- 多个传感器同时获得数据



数据先融合，再滤波

（a）并行滤波

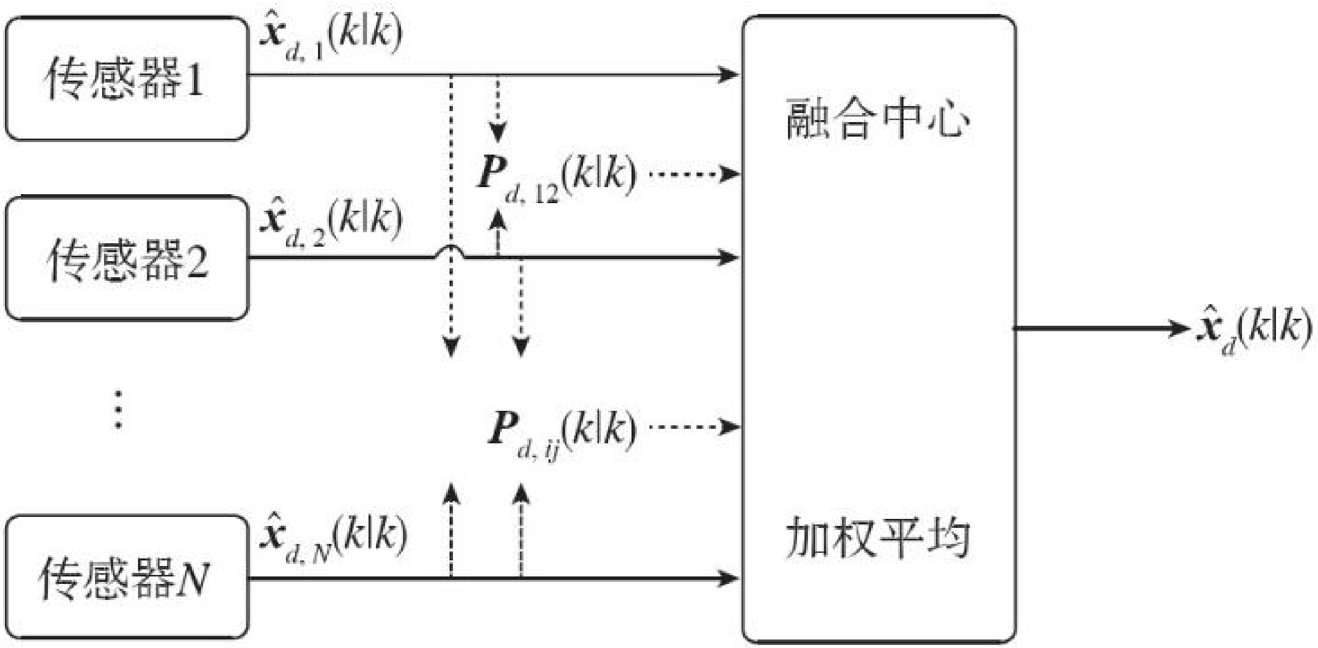


（b）顺序滤波

一次预测，N次更新

传感器融合

- 多个传感器同时获得数据



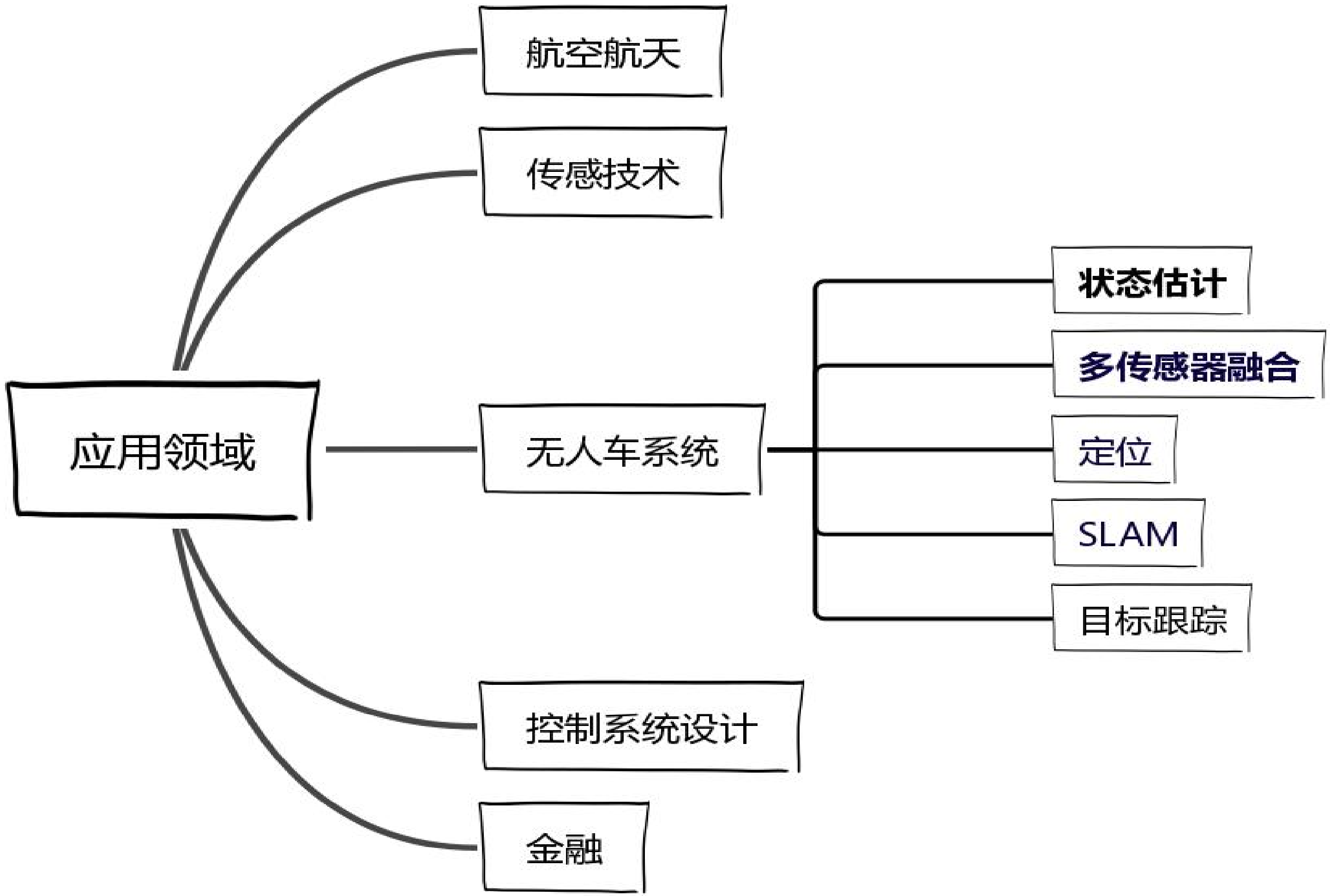
（c）状态向量融合

分别滤波，再加权融合

- 具体方法：联邦滤波、数据压缩滤波、信息融合、并行滤波、一致性算法

2.7 状态估计和传感器融合

卡尔曼滤波应用



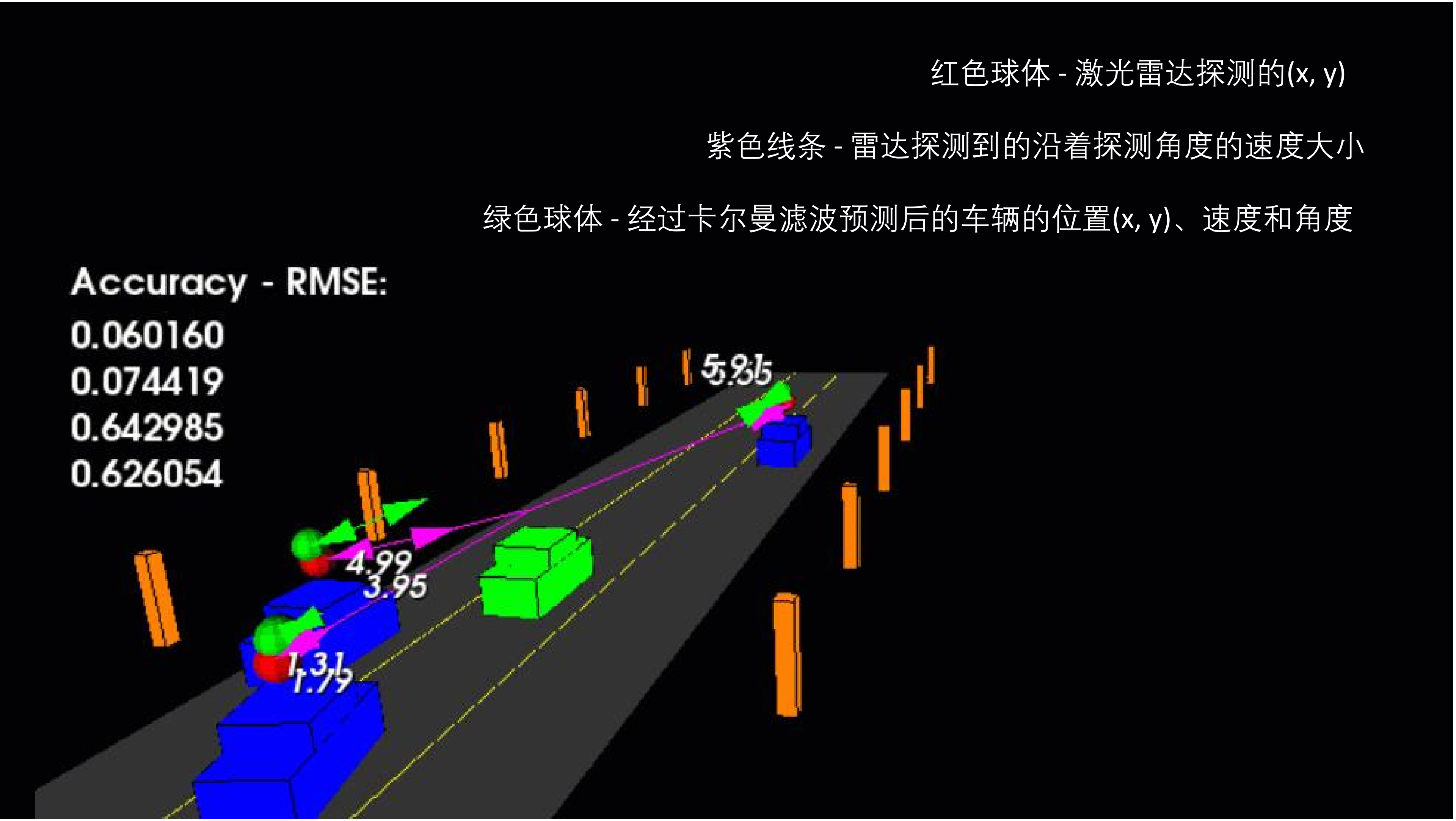
2.7 状态估计和传感器融合

基于卡尔曼滤波的单一目标追踪

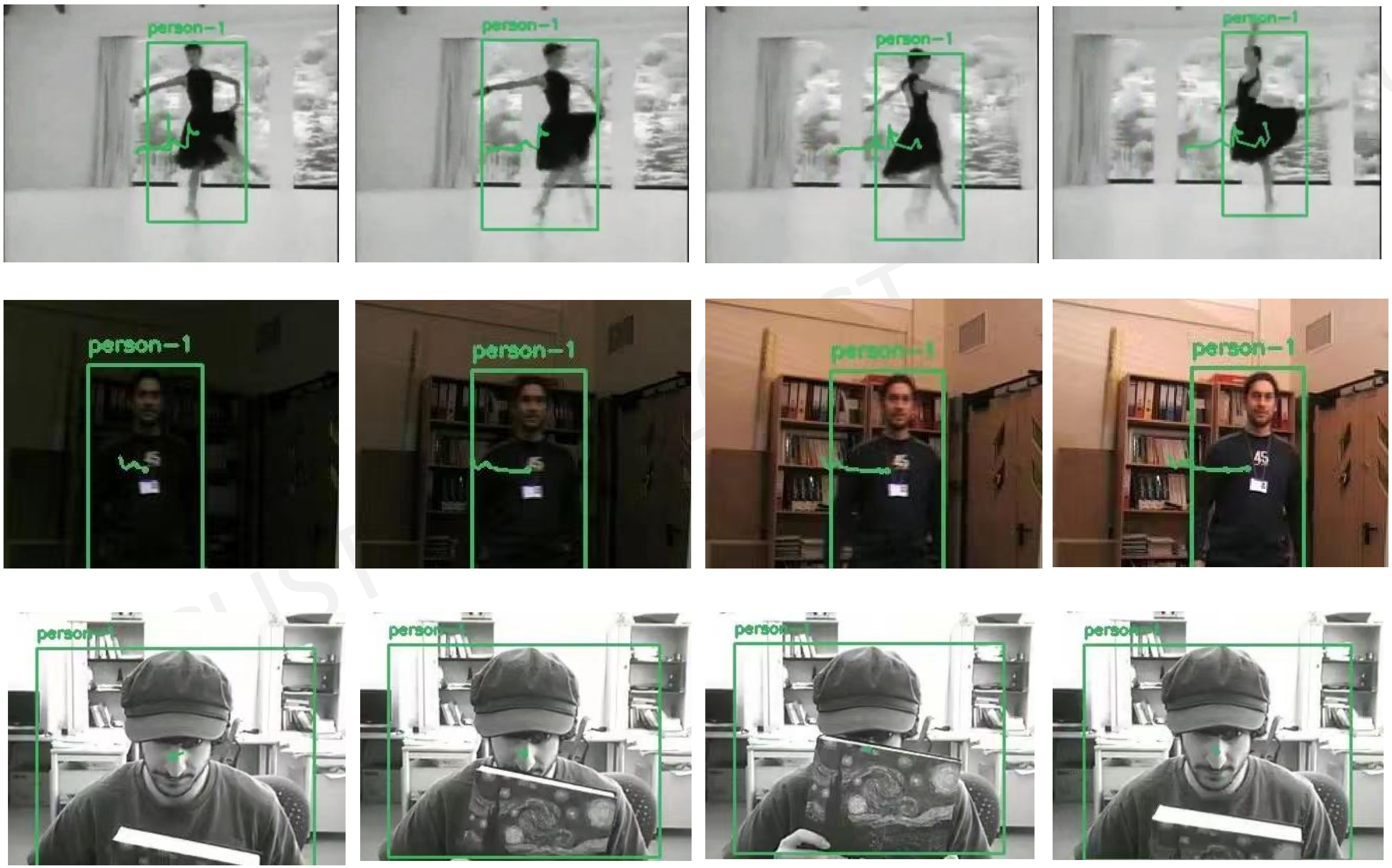
蓝色： 传感器的测量值
绿色： 目标位置的真值
红色： EKF最优估计值

2.7 状态估计和传感器融合

基于卡尔曼滤波的多目标追踪



基于卡尔曼滤波的SORT目标跟踪实验



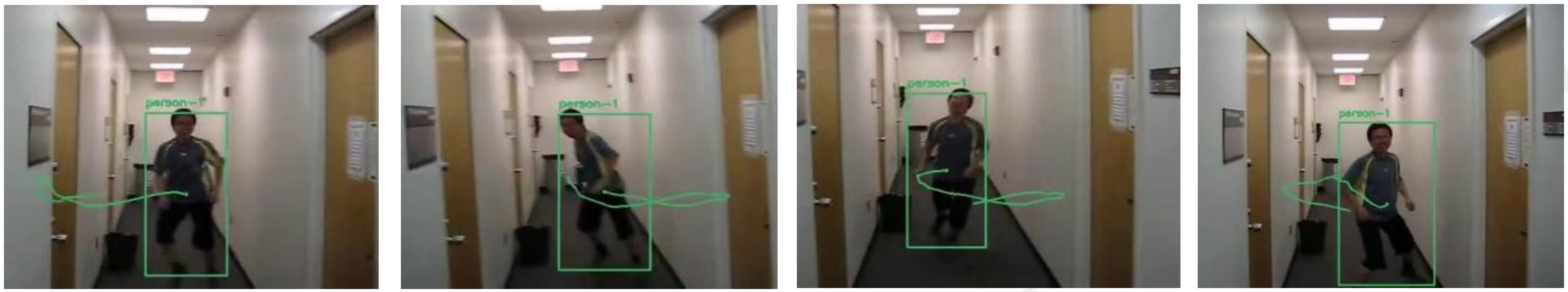
(a) 目标外观形变时的跟踪结果

(b) 光照变化时的跟踪结果

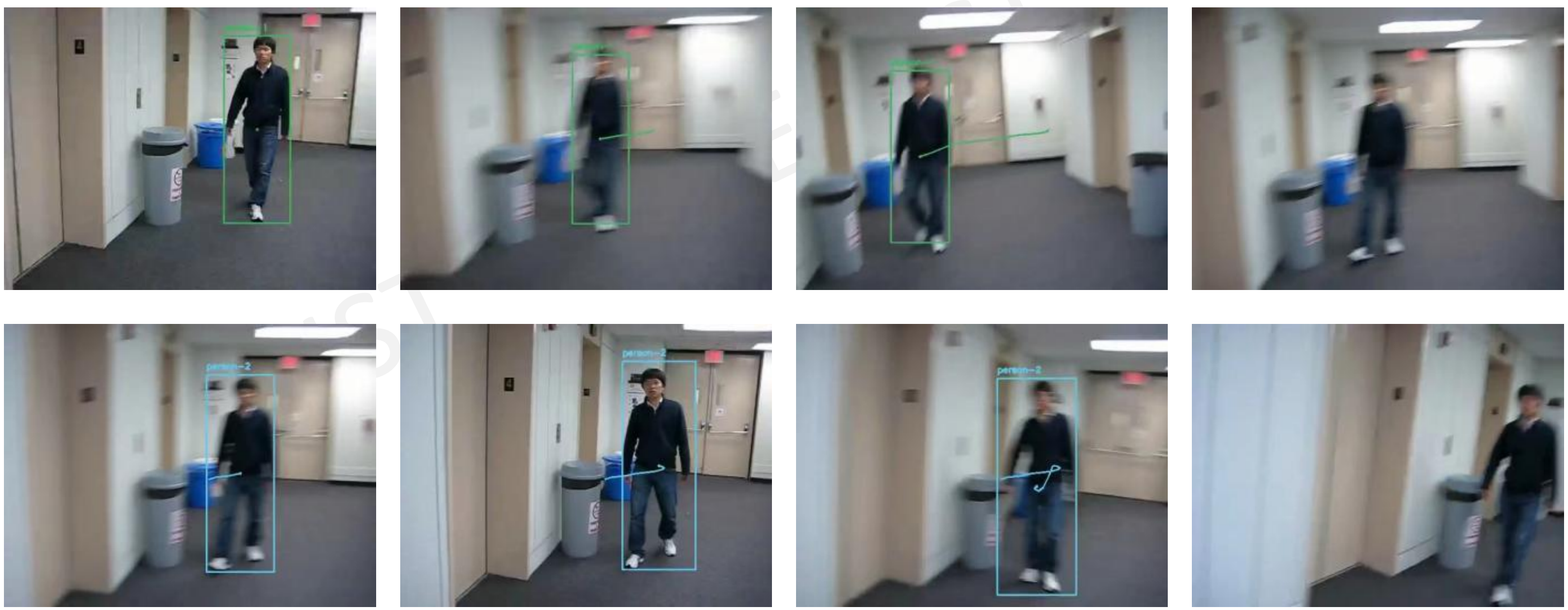
(c) 目标遮挡时的跟踪结果

2.7 状态估计和传感器融合

基于卡尔曼滤波的SORT目标跟踪实验



(d）目标**快速运动**时的跟踪结果



(e）镜头**运动模糊**时的跟踪结果

2.7 状态估计和传感器融合

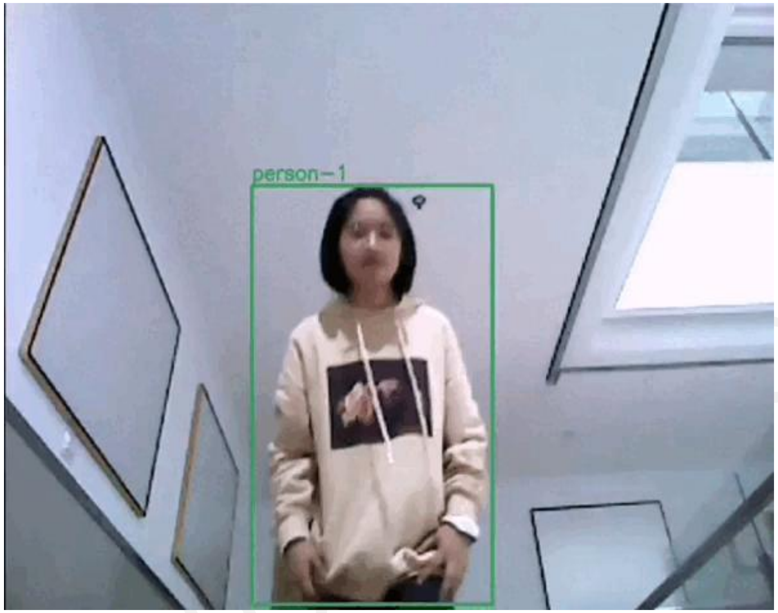
SORT算法在移动机器人上的实现：

小车直行跟踪效果

小车转弯跟踪效果

SORT算法在目标外观形变时的跟踪效果

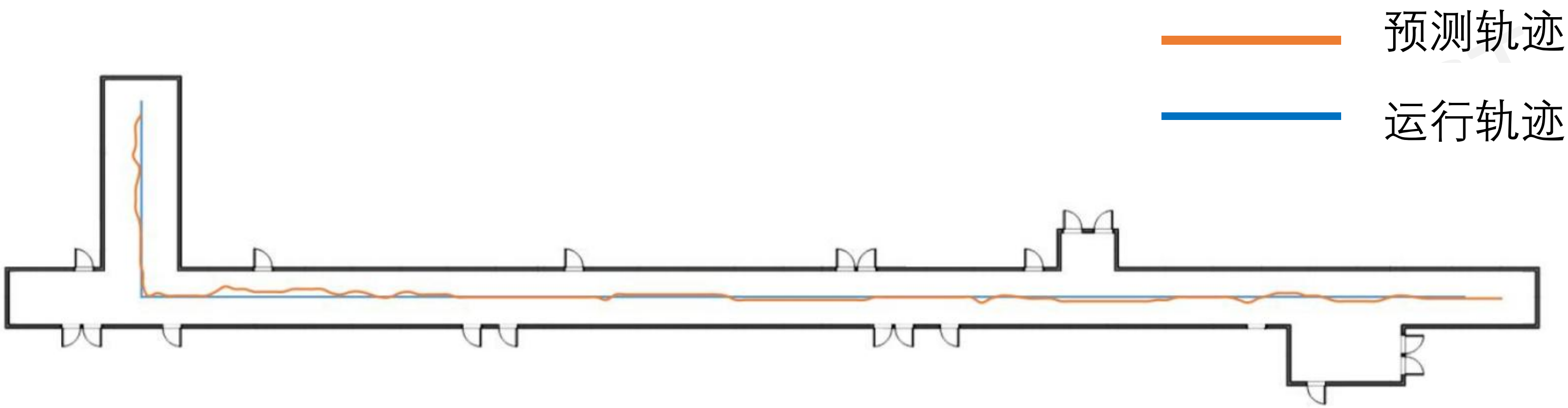
SORT算法在移动机器人上的实现：



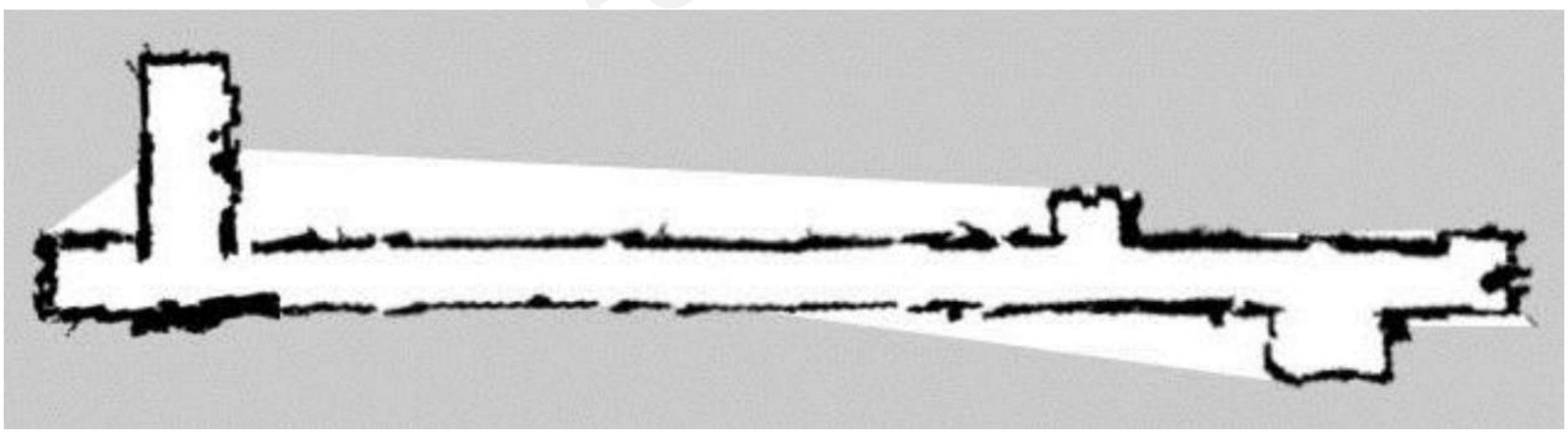
SORT算法在目标运动模糊时的跟踪效果

SORT算法在目标快速运动时的跟踪效果

卡尔曼滤波在定位与SLAM中的应用



栅格地图



2.7 状态估计和传感器融合

通过深度相机进行避障

谢谢！

THANK YOU FOR LISTENING