

第四章 经典分散运动控制

4.1 关节电机的开环控制模型

华东理工大学信息科学与工程学院

卿湘运

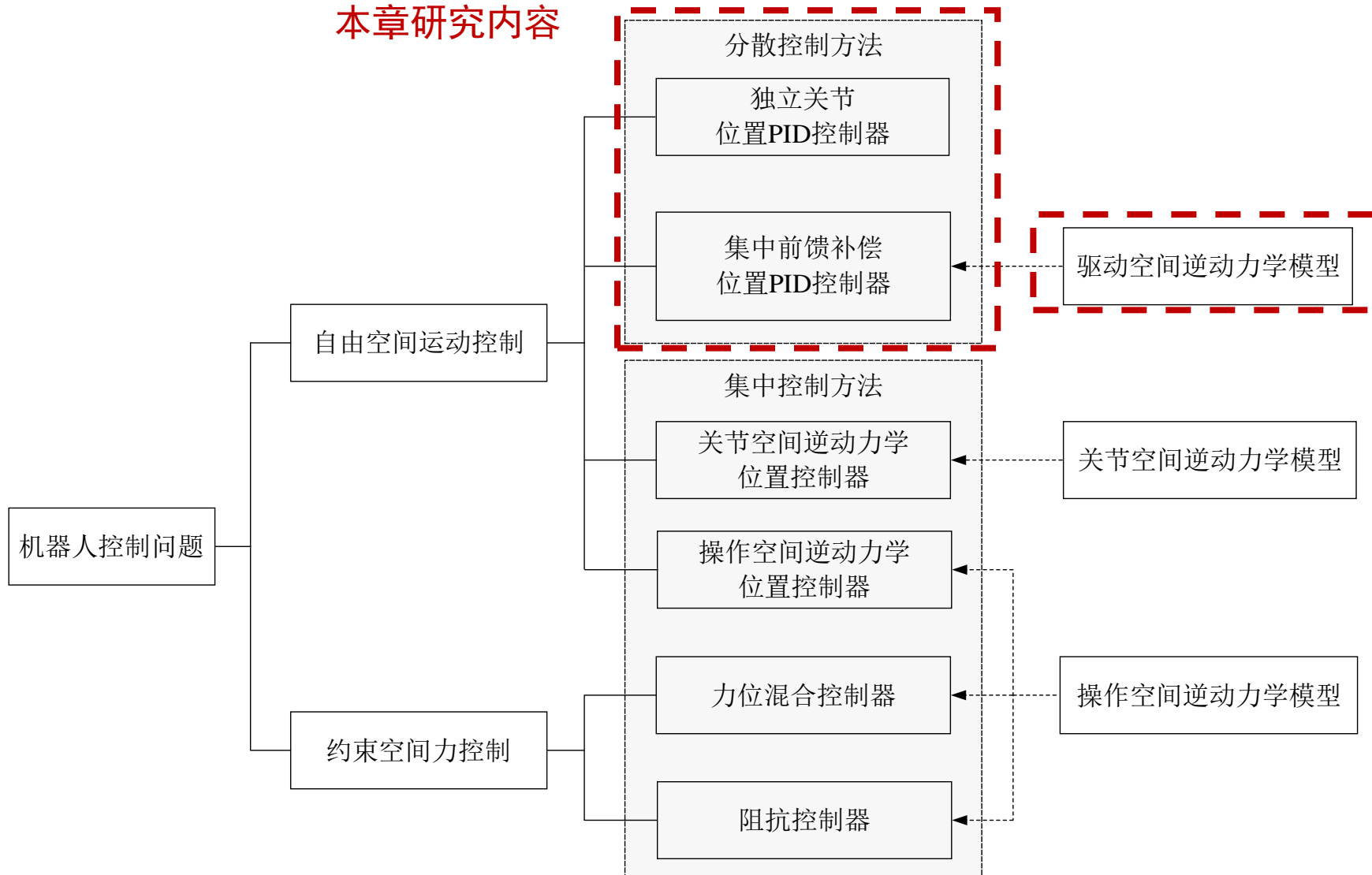
2024年1月

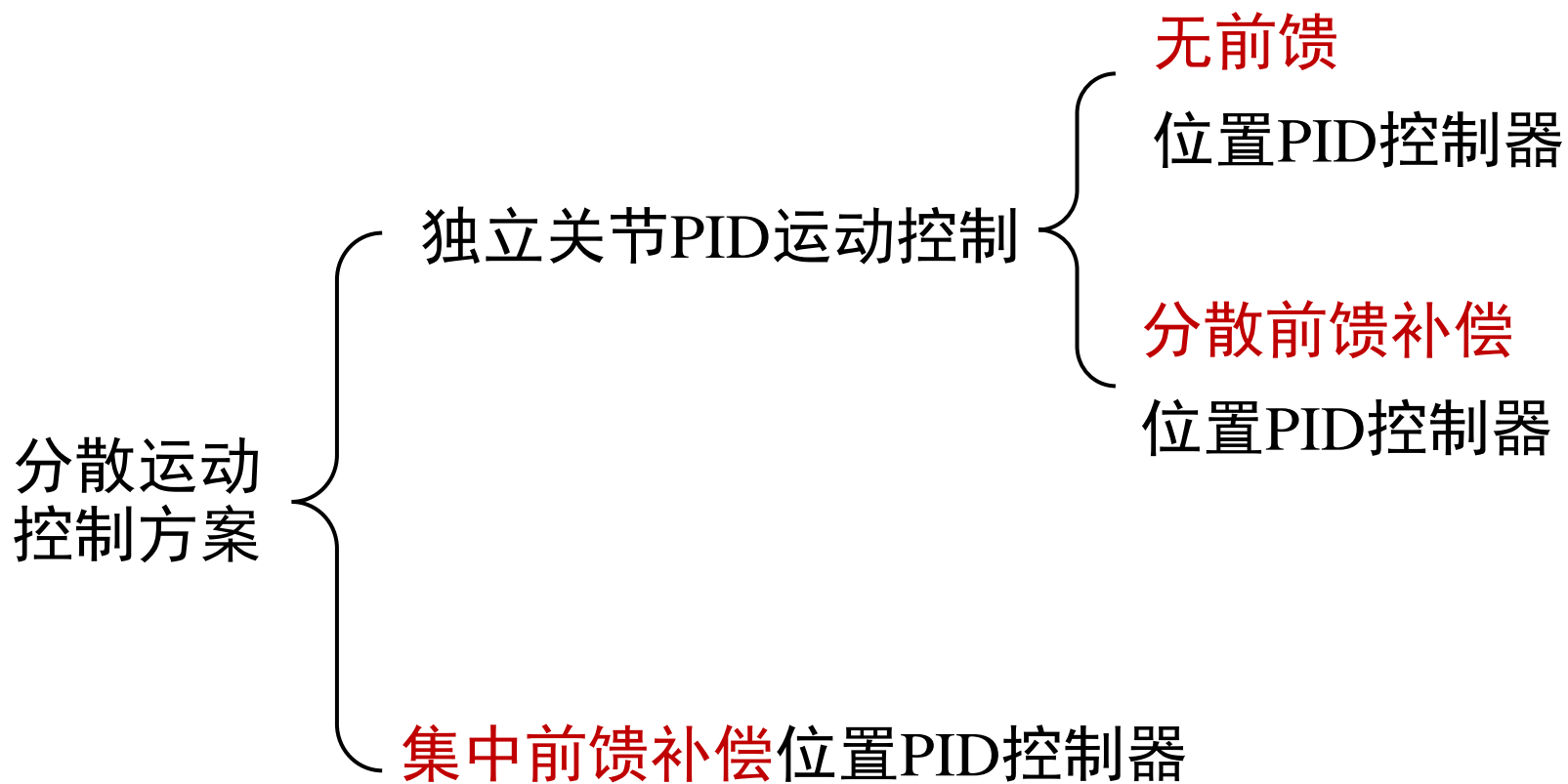
- 一. 关节电机的开环控制模型
- 二. 逆动力学方程的非线性与分解方法
- 三. 独立关节位置PID控制器
- 四. 集中前馈补偿位置PID控制器
- 五. PID控制器的离散化



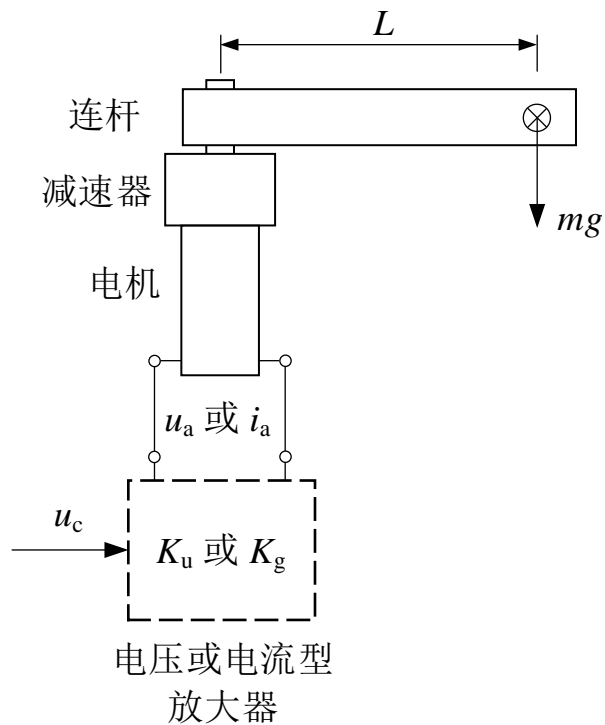
机械臂控制问题及方法分类

本章研究内容

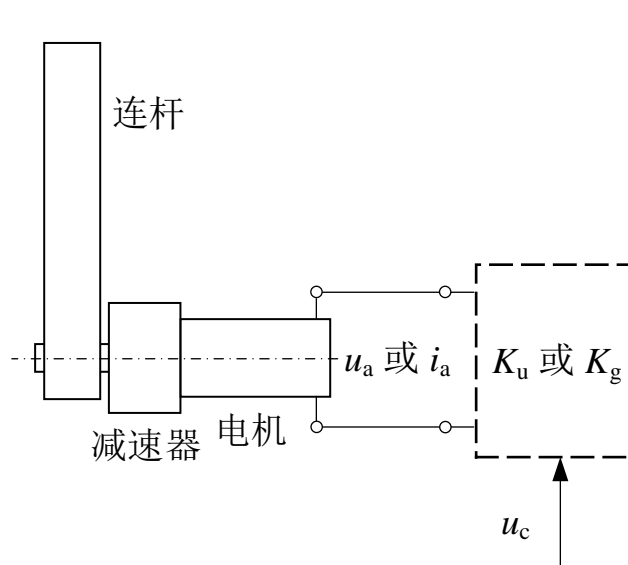




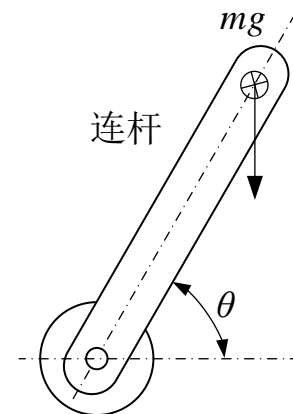
● 单关节机器人模型



连杆在水平面内旋转



连杆在竖直面内旋转



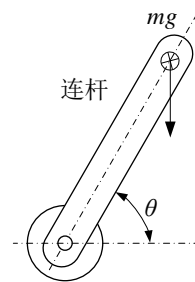
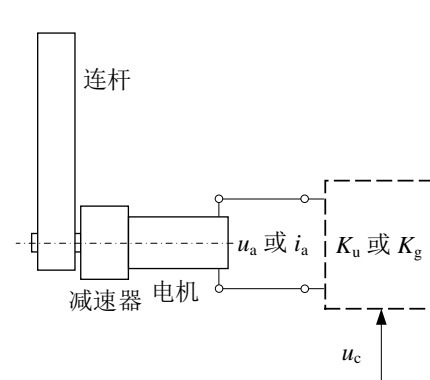
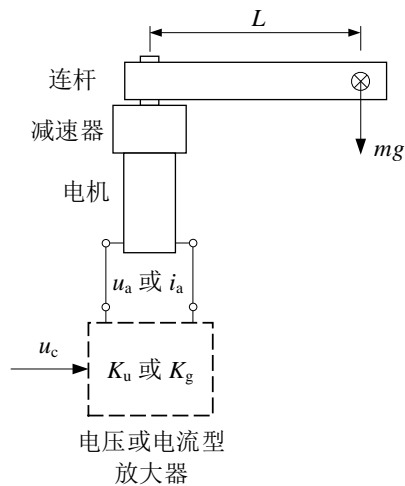
† 单关节机器人开环控制模型

● 基本概念

- **开环状态**——机器人关节仅由放大器和伺服电机驱动，而没有控制器进行闭环控制
- **速度模式**——电机由电压型放大器驱动时的工作状态
- **力矩模式**——电机由电流型放大器驱动时的工作状态

● 目标

- 建立速度和力矩模式关节电机的**开环控制模型**，研究两种模式下，关节电机对阶跃控制信号 u_c 的**开环速度响应**



● 模型参数

	项目	符号	取值	单位
电机参数	额定电压	u_r	24	V
	额定转速	ω_r	258	rad/s
	额定转矩	τ_r	8.82×10^{-2}	N·m
	额定电流	i_r	1.09	A
	电枢电阻	R_a	2.49	Ω
	电枢电感	L_a	6.10×10^{-4}	H
	转矩常数	K_a	8.22×10^{-2}	(N·m)/A
	感应电动势常数	K_e	8.24×10^{-2}	V/(rad/s)
	转子惯量	I_r	1.19×10^{-5}	Kg·m ²
	转子阻尼	B_r	4.10×10^{-4}	(N·m)/(rad/s)
系统参数	连杆质量	m	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	L	0.1	m
	负载惯量	I_l	5.0×10^{-3}	Kg·m ²
	关节阻尼	B_l	2.0×10^{-2}	(N·m)/(rad/s)
	电压增益	K_u	3	无
	跨导增益	K_g	1	A/V
	重力加速度	g	9.8	m/s ²

说明：连杆质量包括电机和减速器质量，转动惯量 $I_l = mL^2$ ，减速器传动比 N 待定

● 速度模式电机驱动机器人关节的原理

➤ 其中：

K_u ——放大器电压增益

N ——传动比

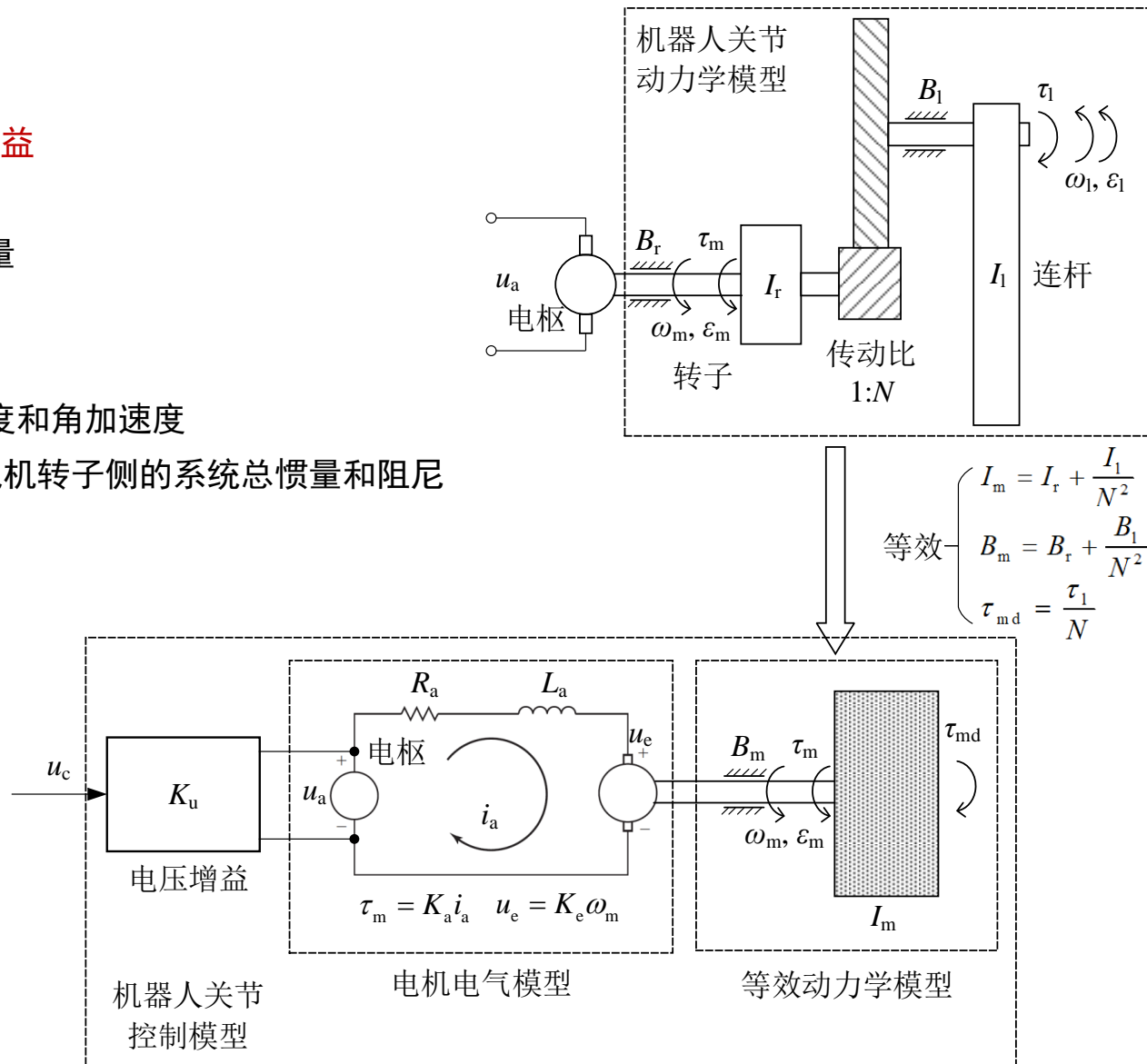
I_l ——机器人连杆惯量

B_l ——关节阻尼

τ_l ——关节负载转矩

ω_l, ε_l ——关节角速度和角加速度

I_m, B_m ——等效到电机转子侧的系统总惯量和阻尼



速度模式关节电机开环控制模型

● 转动惯量等效到转子侧 —— 不考虑关节负载和阻尼

➤ 减速器两侧变量关系

$$\omega_m = N\omega_l \quad \varepsilon_m = N\varepsilon_l \quad \tau_{im} = \frac{\tau_l}{N}$$

➤ 关节侧动力学方程

$$\varepsilon_l = \frac{\tau_l}{I_l}$$

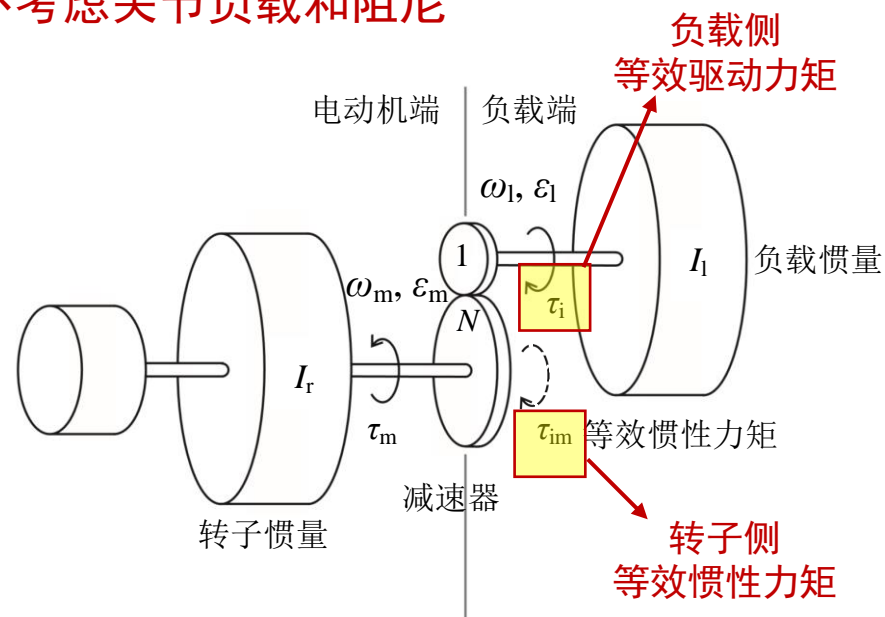
➤ 转子侧动力学方程

$$\tau_m - \tau_{im} = I_r \varepsilon_m \quad \Rightarrow \quad \tau_m - \frac{\varepsilon_l I_l}{N} = I_r \varepsilon_m \quad \Rightarrow \quad \tau_m - \frac{\varepsilon_m I_l}{N^2} = I_r \varepsilon_m$$

$$\tau_m = \left(I_r + \frac{I_l}{N^2}\right) \varepsilon_m = \boxed{I_m} \varepsilon_m$$

➤ 电机转子侧等效转动惯量

$$I_m = I_r + \frac{I_l}{N^2}$$



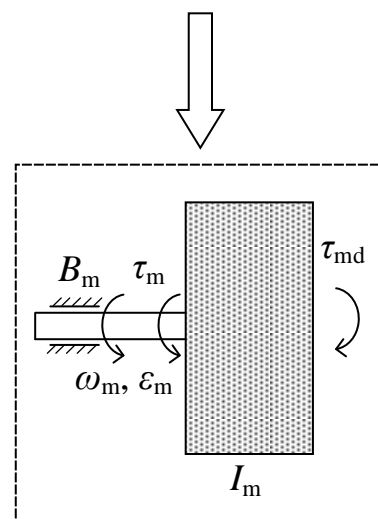
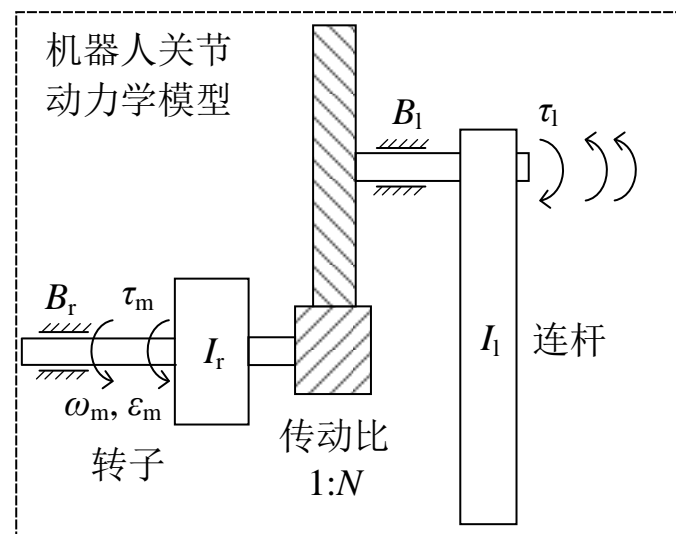
● 转子侧的等效动力学模型

- 电机动力学模型 $I_m \varepsilon_m + B_m \omega_m + \tau_{md} = \tau_m$
 等效惯量 等效阻尼 等效负载转矩
 (也是单关节机器人驱动空间动力学方程)

- 等效转动惯量 $I_m = I_r + \frac{I_l}{N^2}$

- 等效阻尼 $B_m = B_r + \frac{B_l}{N^2}$ 推导方法同 I_m

- 等效负载转矩 $\tau_{md} = \frac{\tau_l}{N} = \begin{cases} 0, & \text{水平面} \\ \frac{mgL \cos \theta}{N}, & \text{竖直面} \end{cases}$
 如果未知, 将被控制器视为干扰力矩
 对于示例中的单关节机器人成立



等效动力学模型

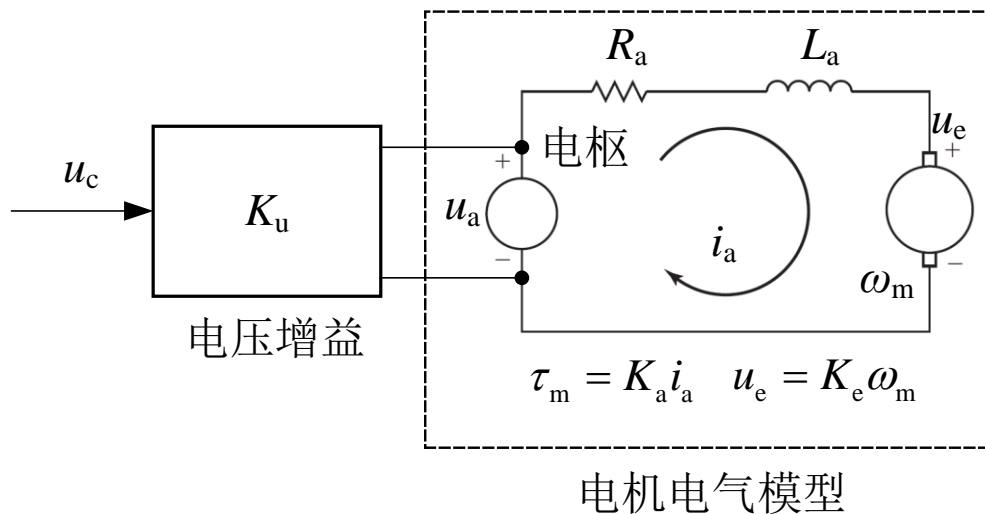
● 速度模式电机的电气模型

➤ 电机电气模型 $R_a i_a + L_a \dot{i}_a + u_e = u_a$

➤ 感应电动势 $u_a = K_u u_c$

➤ 电枢电压 $u_e = K_e \omega_m$

➤ 电磁转矩 $\tau_m = K_a i_a$



● 模型变量关系

➤ 等效量

$$I_m = I_r + \frac{I_1}{N^2}$$
$$B_m = B_r + \frac{B_1}{N^2}$$
$$\tau_{md} = \frac{\tau_1}{N}$$

代入
⇒

➤ 电机动态方程

$$u_a - u_e = L_a \dot{i}_a + R_a i_a$$
$$\tau_m - \tau_{md} = I_m \varepsilon_m + B_m \omega_m$$
$$\tau_m = K_a i_a$$
$$u_e = K_e \omega_m$$

➤ 放大器增益

+

$$u_a = K_u u_c$$

电压增益

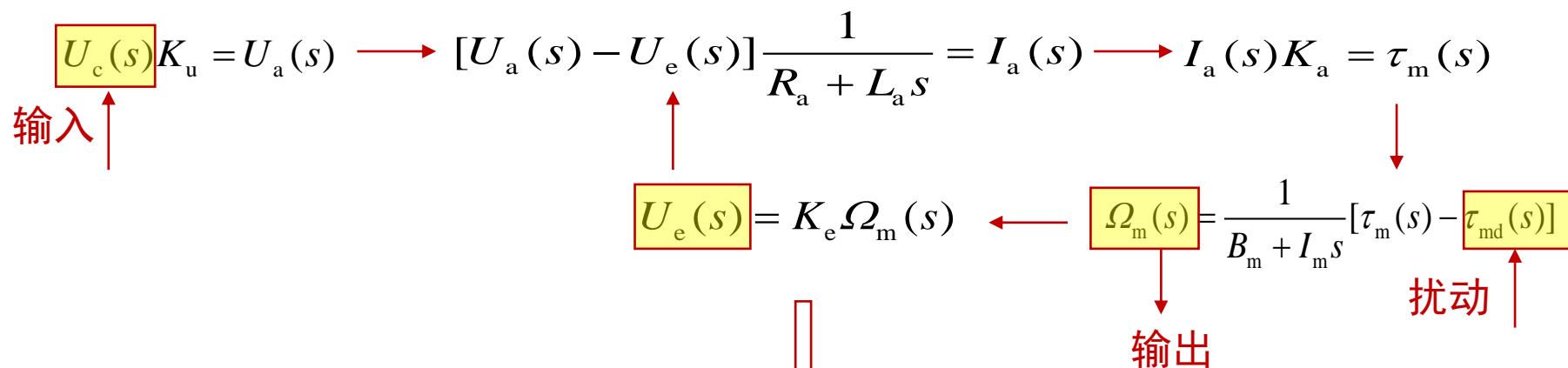
拉氏变换

$$I_a(s) = \frac{1}{R_a + L_a s} [U_a(s) - U_e(s)]$$
$$\Omega_m(s) = \frac{1}{B_m + I_m s} [\tau_m(s) - \tau_{md}(s)]$$
$$\tau_m(s) = K_a I_a(s)$$
$$U_e(s) = K_e \Omega_m(s)$$
$$U_a(s) = K_u U_c(s)$$

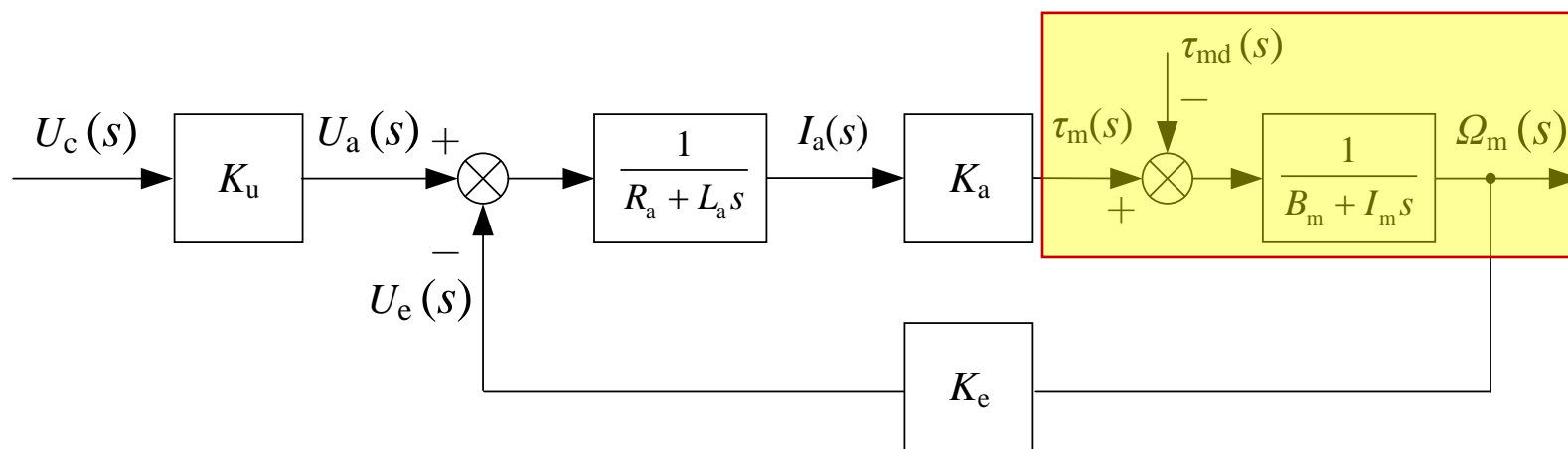
速度模式关节电机开环控制模型

● 开环模型

➤ 物理信号的传递关系

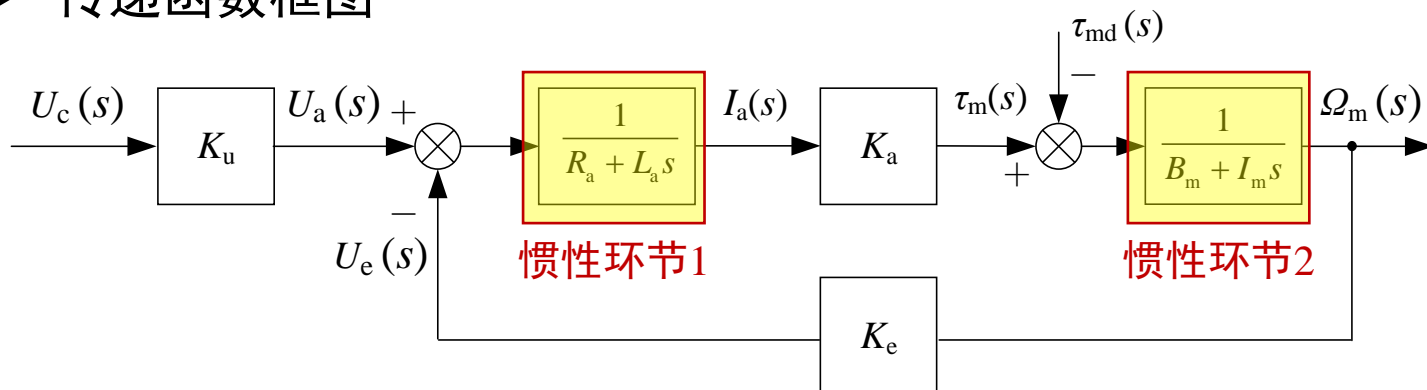


➤ 系统结构图



● 传递函数的简化

➤ 传递函数框图



➤ 两个惯性环节的另一种表达形式

$$\frac{1}{R_a + L_a s} \Rightarrow \frac{1/R_a}{1 + T_e s}$$

$$\frac{1}{B_m + I_m s} \Rightarrow \frac{1/B_m}{1 + T_f s}$$

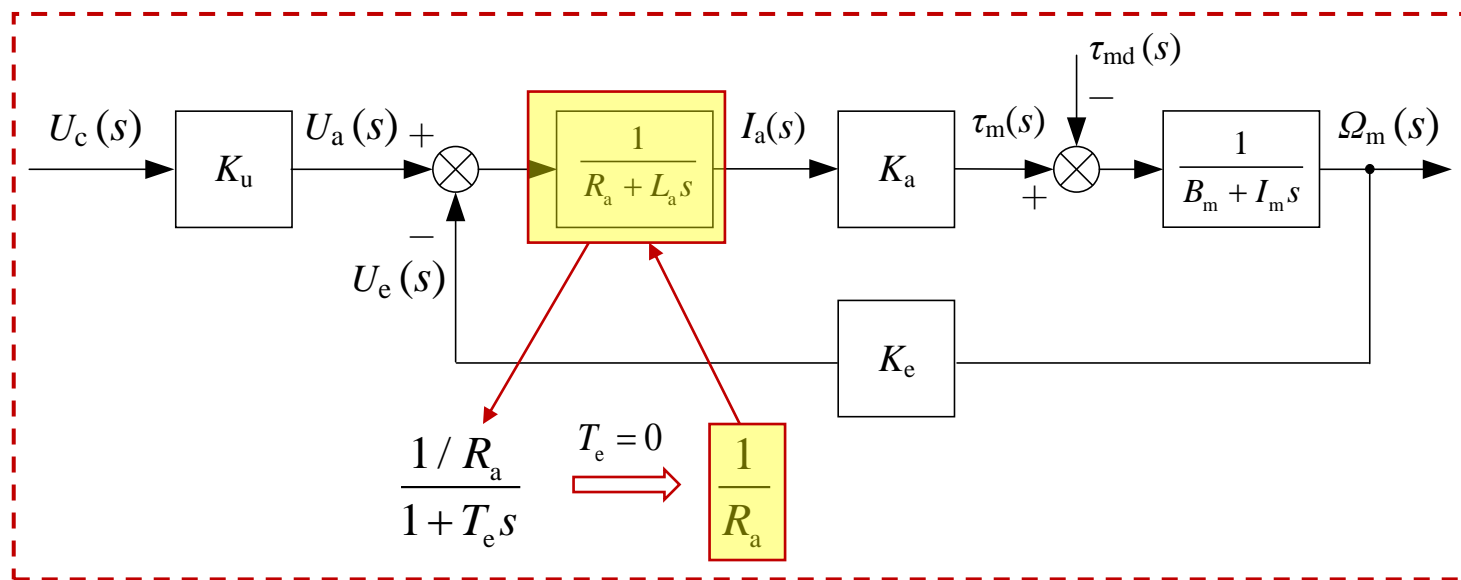
➤ 定义

- $T_e = L_a / R_a$ —— 系统（电机）的**电气时间常数**
- $T_f = I_m / B_m$ —— 系统的**机械时间常数**

➤ 一般情况下： $T_e \ll T_f$ 两者相差一个数量级

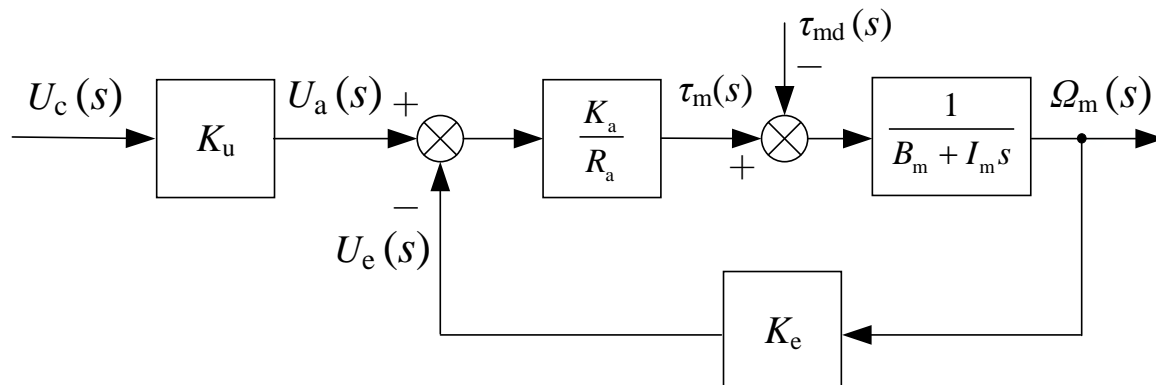
➤ 工程上，可假设： $T_e = 0$

● 传递函数的简化

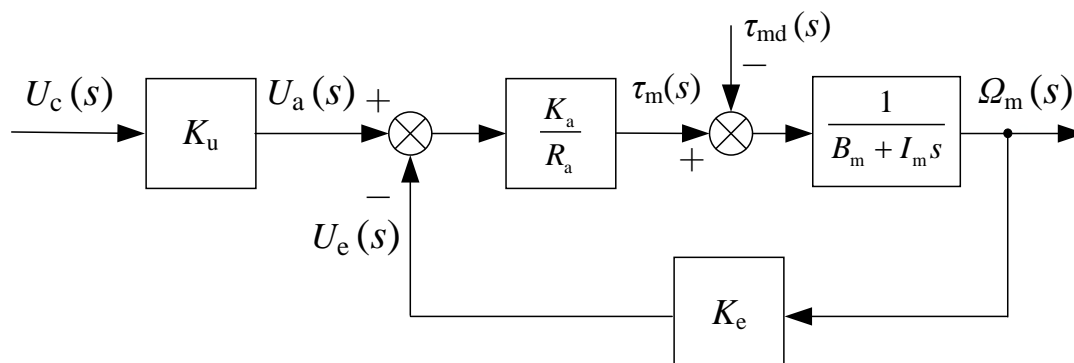


简化

➤ 工程化的电机速度模型



● 速度模式电机的开环模型



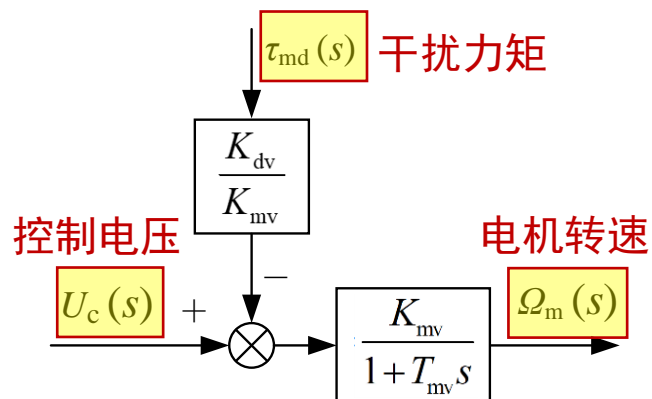
➤ 输入-输出关系
$$\Omega_m(s) = \frac{K_{mv}}{1 + T_{mv}s} U_c(s) - \frac{K_{dv}}{1 + T_{mv}s} \tau_{md}(s)$$

其中，定义如下参数：

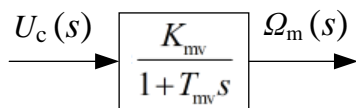
- 时间常数 —— $T_{mv} = \frac{R_a I_m}{K_e K_a + R_a B_m}$
- 开环增益 —— $K_{mv} = \frac{K_a K_u}{K_e K_a + R_a B_m}$
- 干扰增益 —— $K_{dv} = \frac{1}{K_e K_a / R_a + B_m}$

● 速度模式电机简化的结构图

$$\Omega_m(s) = \frac{K_{mv}}{1 + T_{mv}s} U_c(s) - \frac{K_{dv}}{1 + T_{mv}s} \tau_{md}(s)$$

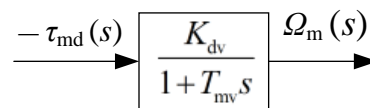


➤ 电压-速度模型



$$\frac{\Omega_m(s)}{U_c(s)} = \frac{K_{mv}}{1 + T_{mv}s}$$

➤ 干扰-速度模型

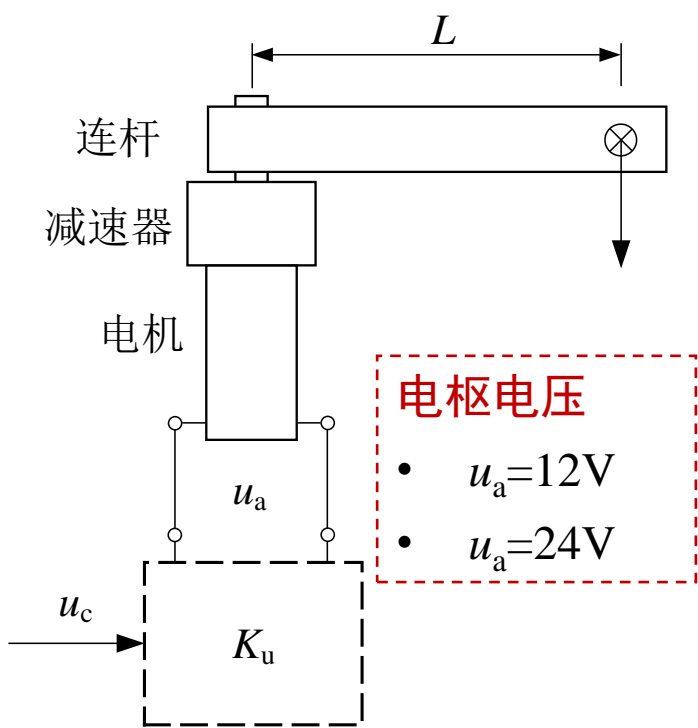


$$\frac{\Omega_m(s)}{\tau_{md}(s)} = \frac{K_{dv}}{1 + T_{mv}s}$$

速度模式关节电机的开环响应

● 水平工况

➤ 传动比 $N=10$



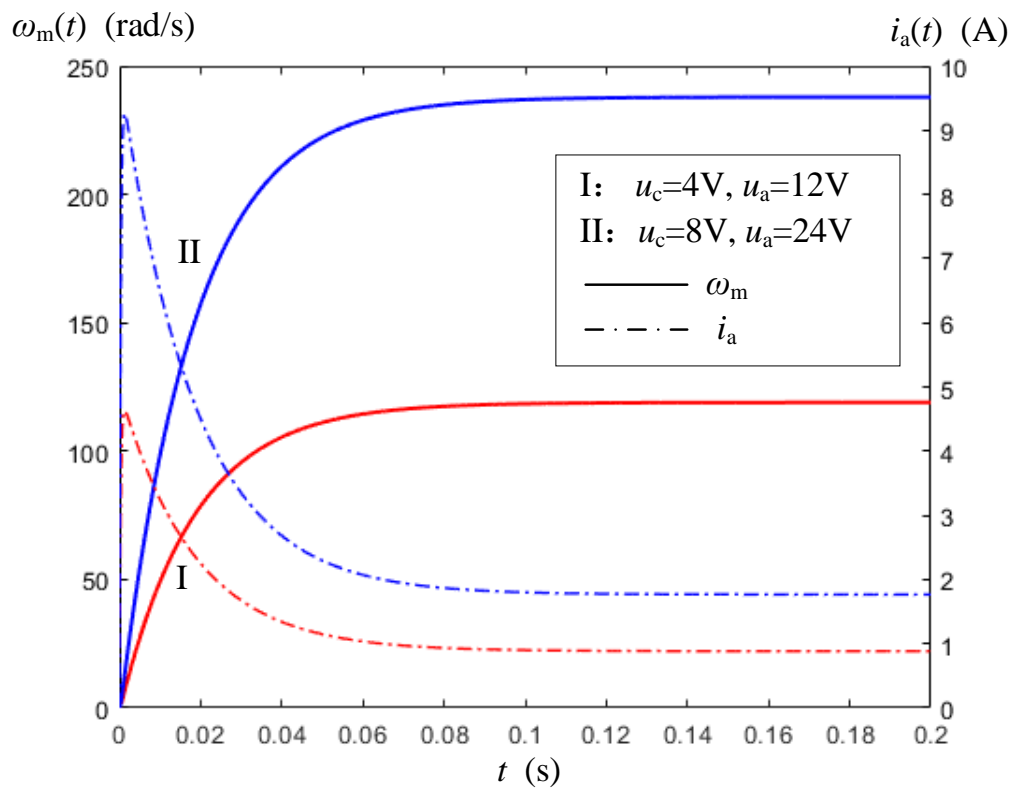
电枢电压

- $u_a=12V$
- $u_a=24V$

控制电压

- $u_c=4V$
- $u_c=8V$

系统参数	参数	符号	数值	单位
	连杆质量	m	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	L	0.1	m
	负载惯量	I_l	5.0×10^{-3}	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
	关节阻尼	B_l	0.02	$(\text{N} \cdot \text{m})/(\text{rad/s})$
	电压增益	K_u	3	无
	重力加速度	g	9.8	m/s^2

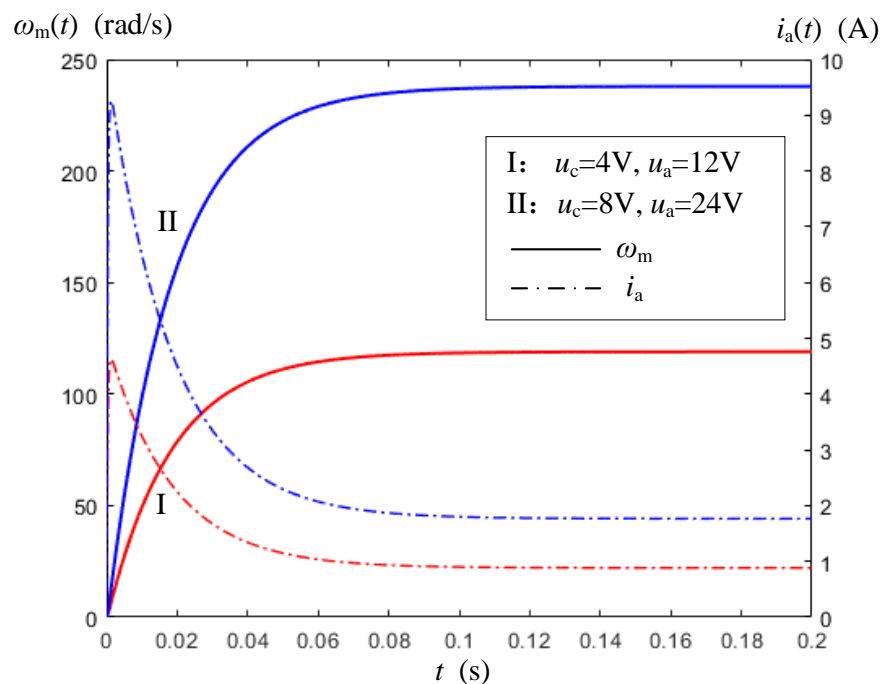




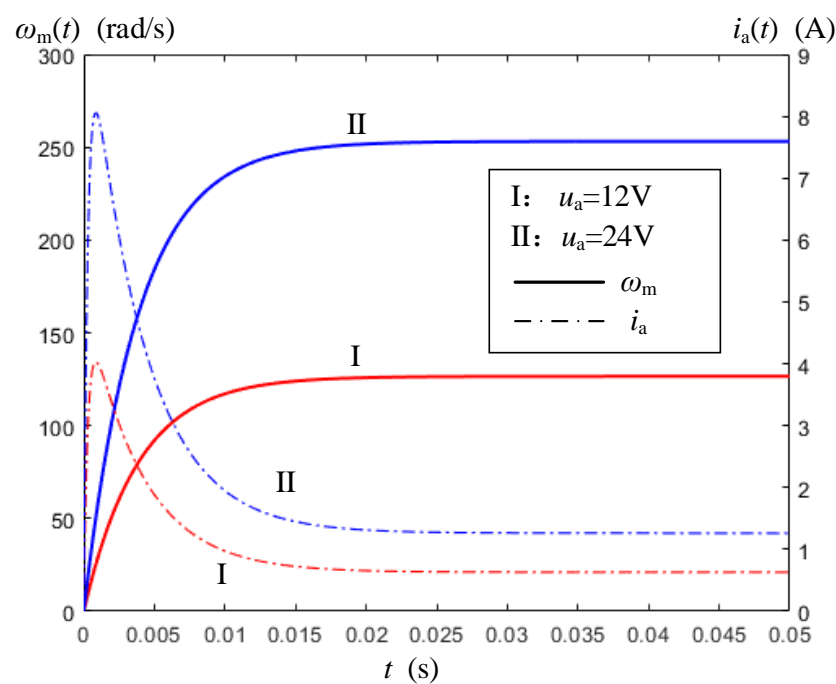
速度模式关节电机的开环响应

● 水平工况关节与电机空载开环响应对比

➤ 水平工况



➤ 空载

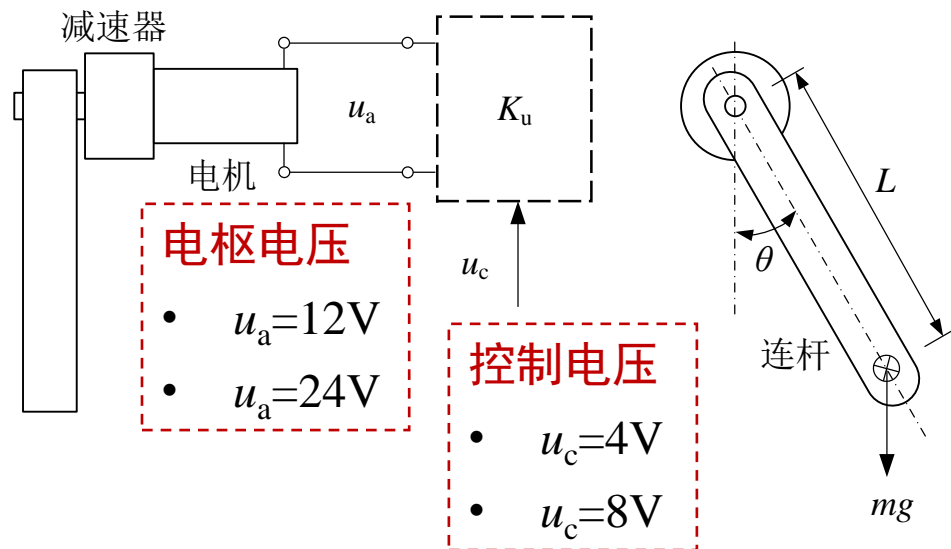


- 上升时间比空载大——惯量大
- 转速低于空载转速——关节阻尼大
- 电流大于空载电流——关节阻尼大

速度模式关节电机的开环响应

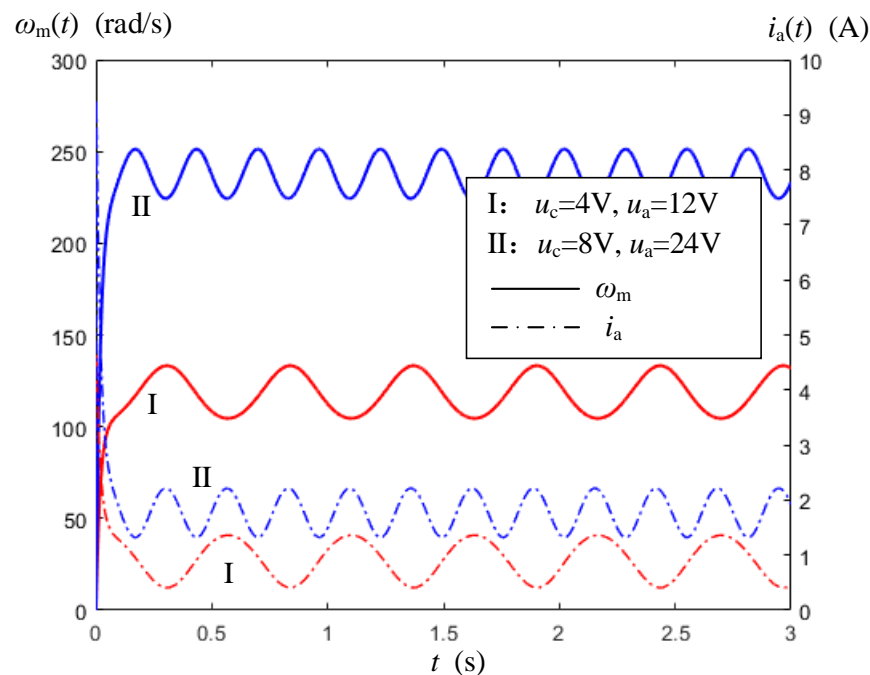
● 竖直工况

➤ 传动比 $N=10$



- 周期干扰下，速度波动
- 波动幅度与控制电压大小无关
- 电流波动与速度波动相差 180° 相位
- 感应电动势负反馈抑制速度波动

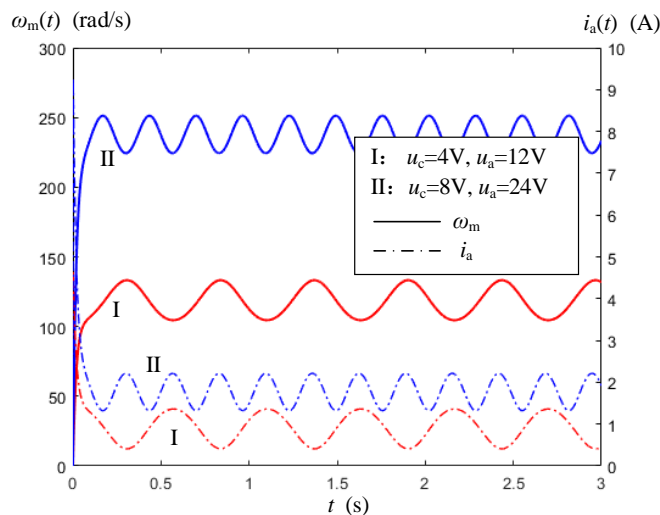
系统参数	参数	符号	数值	单位
	连杆质量	m	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	L	0.1	m
	负载惯量	I_l	5.0×10^{-3}	Kg·m ²
	关节阻尼	B_l	0.02	(N·m)/(rad/s)
	电压增益	K_u	3	无
	重力加速度	g	9.8	m/s ²



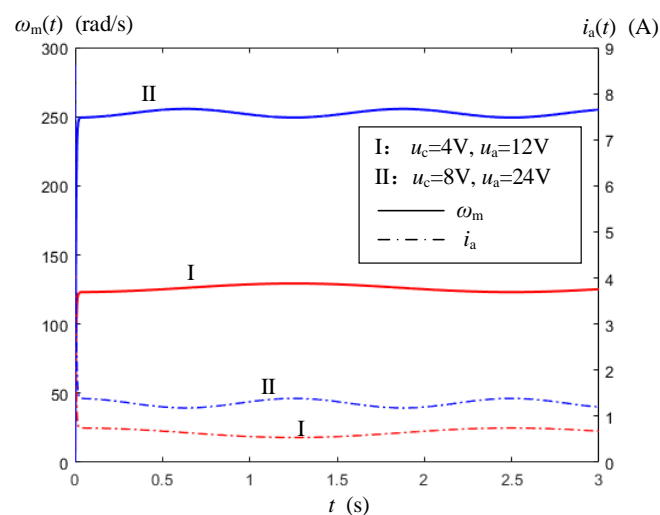
速度模式关节电机的开环响应

● 垂直工况不同传动比对比

➤ $N=10$



➤ $N=50$



减速比	控制电压	平均电流	平均速度	波动幅度	波动率
$N=10$	4V	0.88A	119 rad/s	27 rad/s	22.7%
	8V	1.77A	238 rad/s	27 rad/s	11.3%
$N=50$	4V	0.64A	126 rad/s	6 rad/s	1.2%
	8V	1.28A	253 rad/s	7 rad/s	2.7%

➤ 增加传动比可减小波动的原因

- 传动比增加，等效负载惯量和等效关节阻尼成平方倍减小
- 负载转矩成正比减小

➤ 惯量匹配

$$I_m = I_r + \frac{I_l}{n^2} \leq 5I_r$$

● 力矩模式电机驱动机器人关节的原理

➤ 其中：

K_g ——放大器跨导增益

N ——传动比

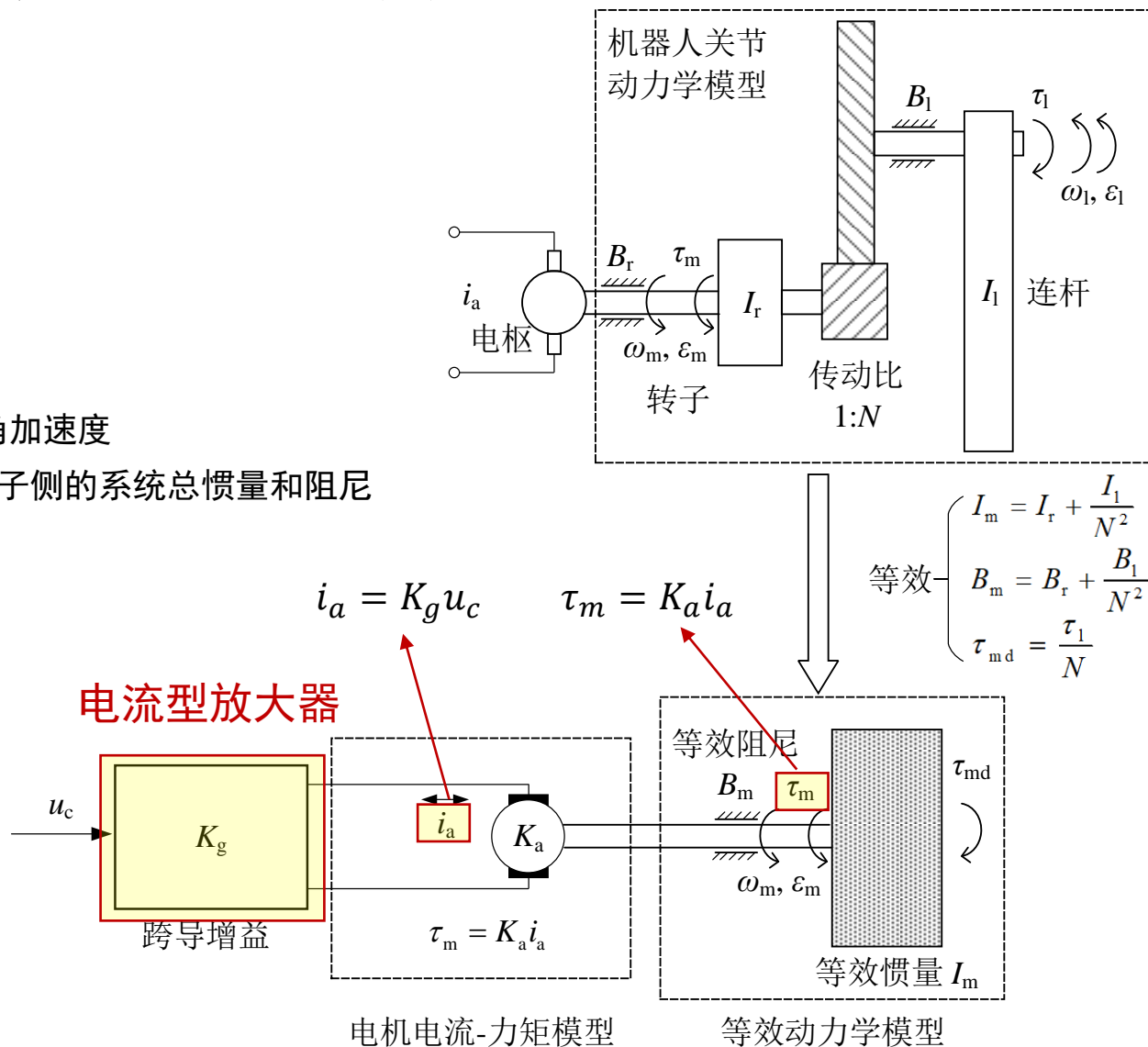
I_l ——机器人连杆惯量

B_l ——关节阻尼

τ_l ——关节负载转矩

ω_l, ε_l ——关节角速度和角加速度

I_m, B_m ——等效到电机转子侧的系统总惯量和阻尼



● 模型变量关系

➤ 等效量

$$\begin{aligned} I_m &= I_r + \frac{I_1}{N^2} \\ B_m &= B_r + \frac{B_1}{N^2} \\ \tau_{md} &= \frac{\tau_1}{N} \end{aligned}$$

代入
⇒

➤ 电机动态方程

$$\begin{aligned} \tau_m - \tau_{md} &= I_m \dot{\omega}_m + B_m \omega_m \\ \tau_m &= K_a i_a \end{aligned}$$

➤ 放大器增益

+

$$i_a = K_g u_c$$

跨导增益

拉氏变换

$$\begin{aligned} \Omega_m(s) &= \frac{1}{B_m + I_m s} [\tau_m(s) - \tau_{md}(s)] \\ \tau_m(s) &= K_\tau U_c(s) \end{aligned}$$

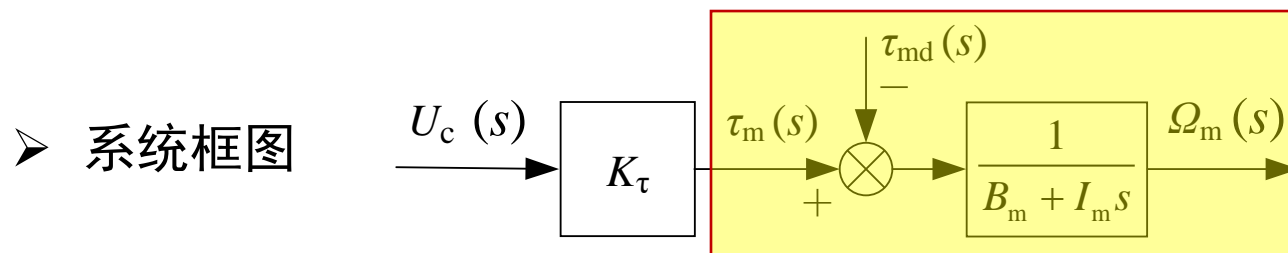
➤ 其中：

$$K_\tau = K_g K_a \quad \text{—— 力矩增益}$$

● 传递函数

$$\Omega_m(s) = \frac{K_\tau}{B_m + I_m s} U_c(s) - \frac{1}{B_m + I_m s} \tau_{md}(s)$$

↓ 电机动力学模型



➤ 用时间常数表达的传递函数

$$\Omega_m(s) = \frac{K_{m\tau}}{1 + T_{m\tau}s} U_c(s) - \frac{K_{d\tau}}{1 + T_{m\tau}s} \tau_{md}(s)$$

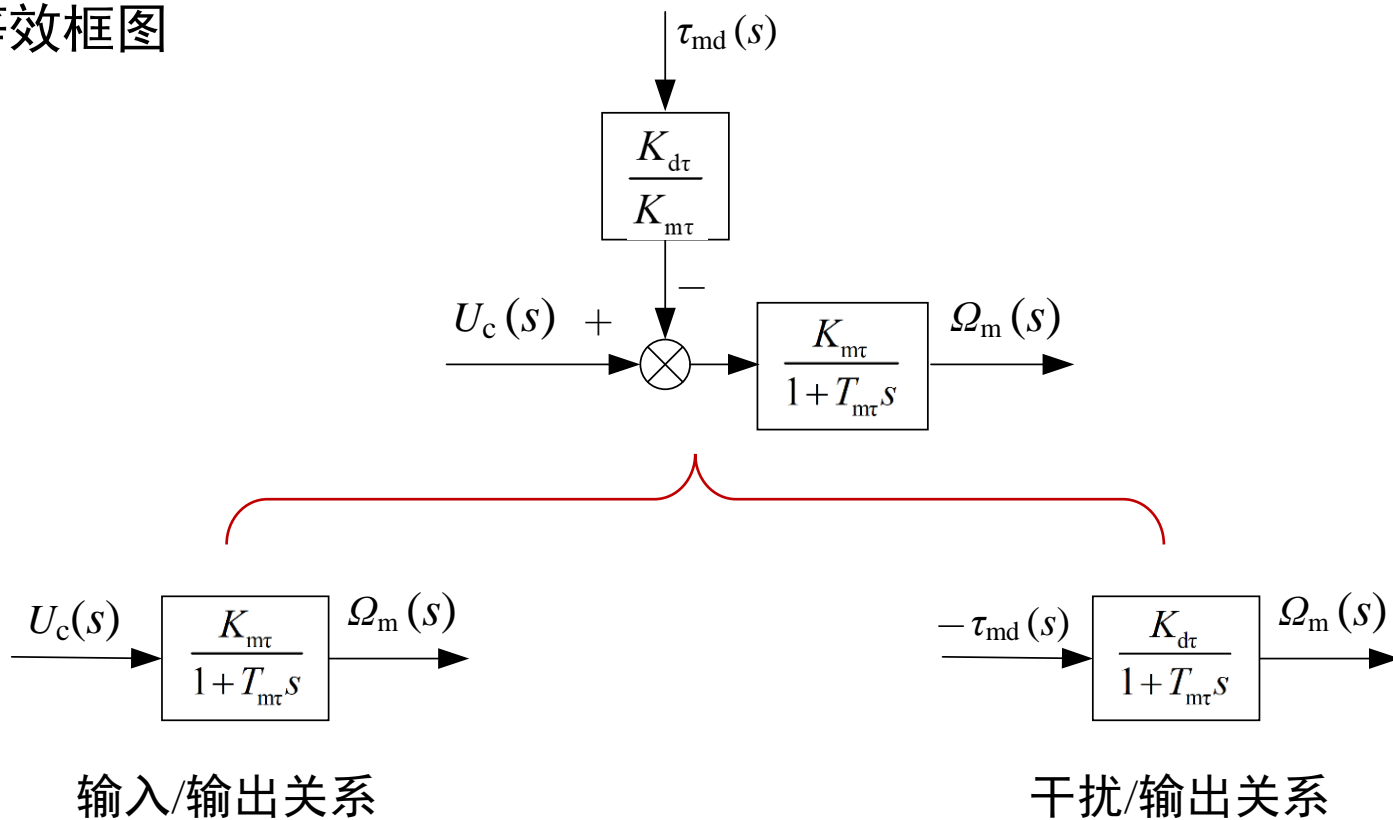
- 时间常数—— $T_{m\tau} = \frac{I_m}{B_m}$
- 开环增益—— $K_{m\tau} = \frac{K_\tau}{B_m}$
- 干扰增益—— $K_{d\tau} = \frac{K_{m\tau}}{K_\tau} = \frac{1}{B_m}$

● 传递函数

$$\Omega_m(s) = \frac{K_{m\tau}}{1 + T_{m\tau}s} U_c(s) - \frac{K_{d\tau}}{1 + T_{m\tau}s} \tau_{md}(s)$$



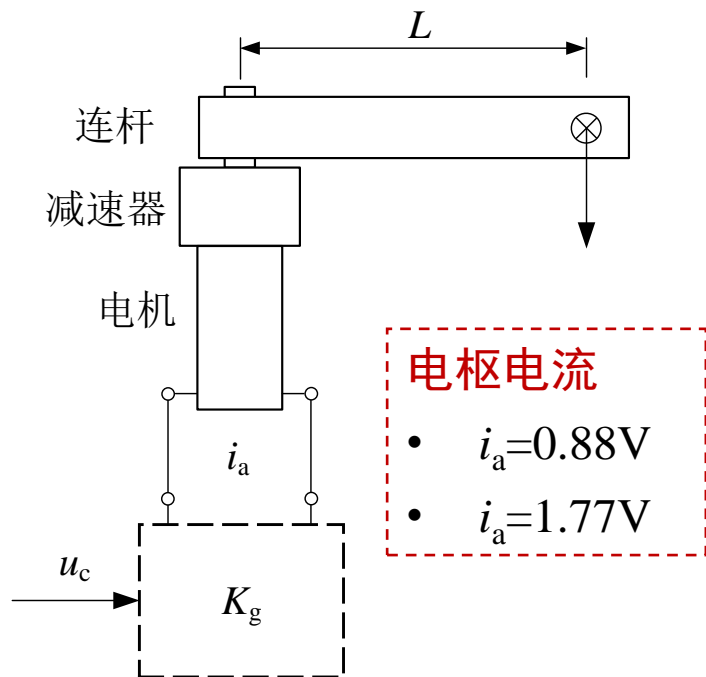
➤ 等效框图



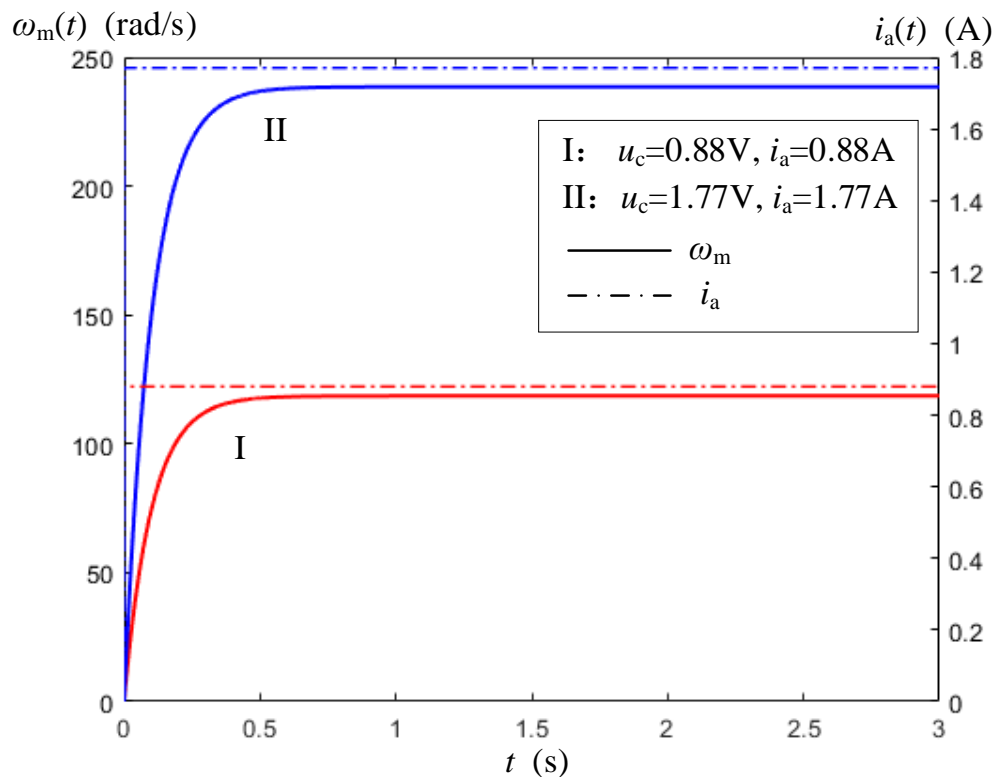
力矩模式关节电机的开环响应

● 水平工况

➤ 传动比 $N=10$



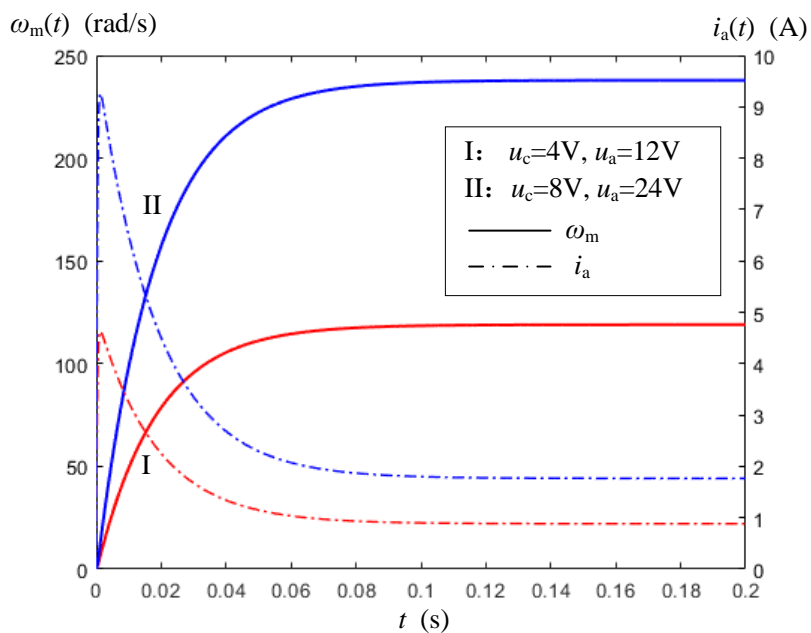
系统参数	参数	符号	数值	单位
	连杆质量	m	0.5	Kg
	连杆质心距转轴距离	L	0.1	m
	负载惯量	I_1	5.0×10^{-3}	$\text{Kg} \cdot \text{m}^2$
	关节阻尼	B_1	0.02	$(\text{N} \cdot \text{m})/(\text{rad/s})$
	跨导增益	K_g	1	无
	重力加速度	g	9.8	m/s^2



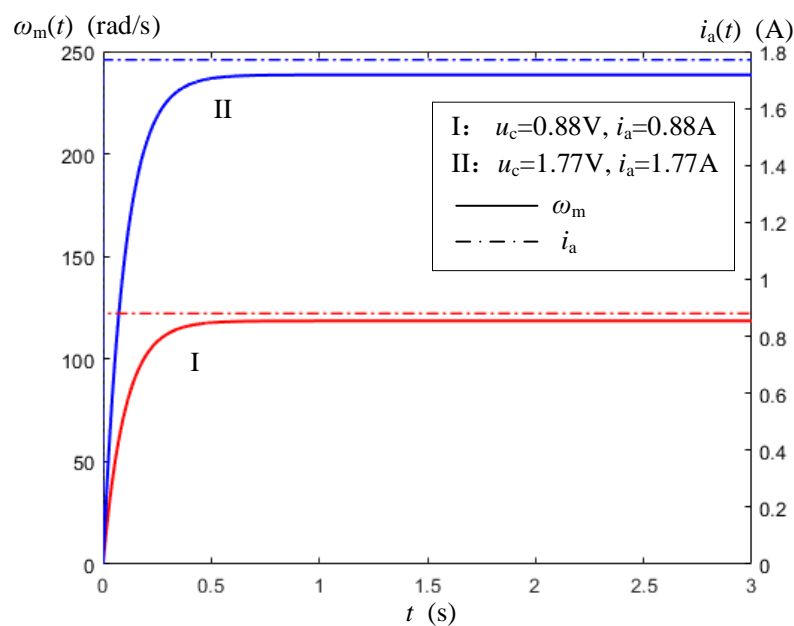
† 力矩模式关节电机的开环响应

● 与速度模式响应的对比

➤ 速度模式



➤ 力矩模式

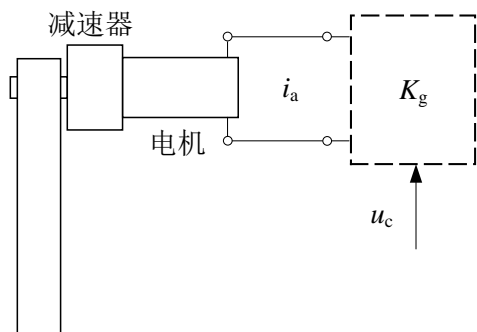
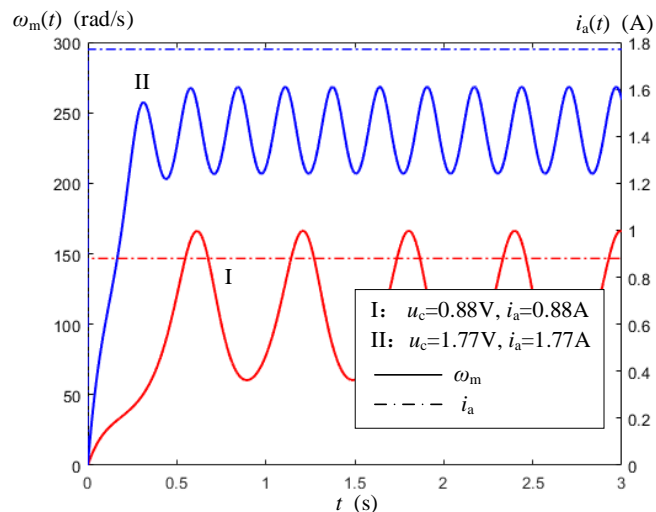


- 开环状态下力矩模式电流恒定，在示例给定的控制电压下启动力矩比速度模式小，导致启动时间变长
- 闭环状态下，可以利用控制电压力矩获得恒定的大启动力矩

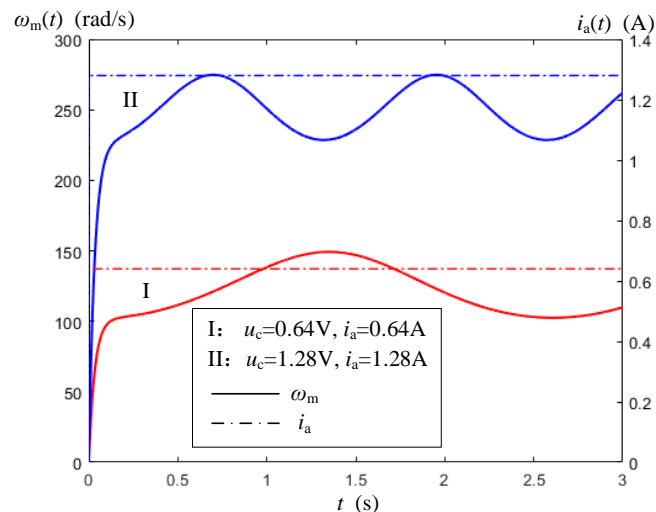
✦ 力矩模式关节电机的开环响应

● 垂直工况

➤ $N=10$



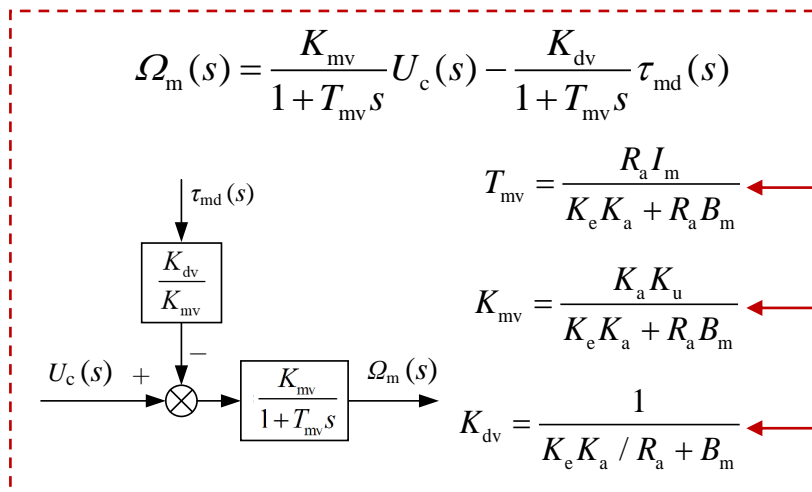
➤ $N=50$



减速比	控制电压	平均电流	平均速度	波动幅度	波动率
$N=10$	0.88V	0.88A	119 rad/s	106 rad/s	89.1%
	1.77V	1.77A	239 rad/s	61 rad/s	25.5%
$N=50$	0.64V	0.64A	126 rad/s	46 rad/s	36.5%
	1.28V	1.28A	253 rad/s	46 rad/s	18.2%

- 力矩模式下，感应电动势带来的速度负反馈被抑制，使电流恒定，造成系统转速对负载波动更敏感
- 在闭环系统中，速度闭环控制器可抑制速度波动
- 大传动比仍然有抑制波动的效果

➤ 速度模式电机开环模型



$$T_{mv} = \frac{R_a I_m}{K_e K_a + R_a B_m}$$

$$K_{mv} = \frac{K_a K_u}{K_e K_a + R_a B_m}$$

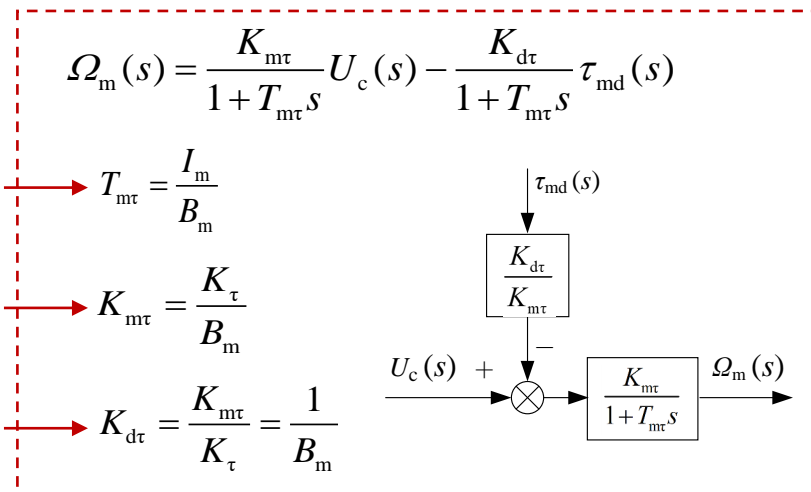
$$K_{dv} = \frac{1}{K_e K_a / R_a + B_m}$$

时间常数

开环增益

干扰增益

➤ 力矩模式电机开环模型

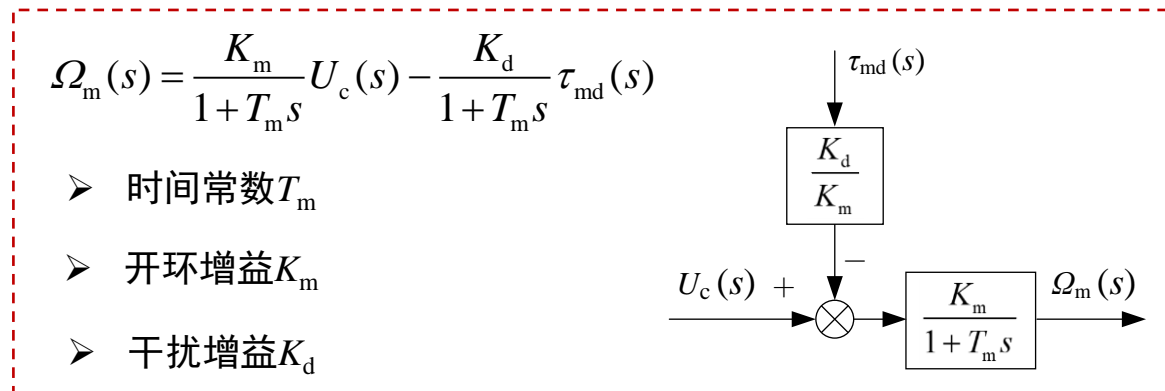


$$T_{m\tau} = \frac{I_m}{B_m}$$

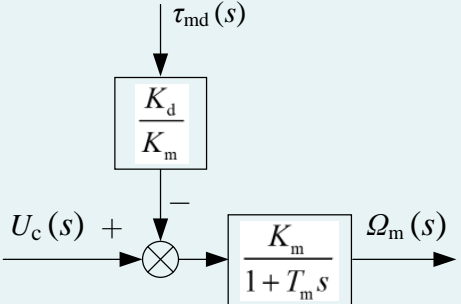
$$K_{m\tau} = \frac{K_\tau}{B_m}$$

$$K_{d\tau} = \frac{K_{m\tau}}{K_\tau} = \frac{1}{B_m}$$

➤ 通用电机模型



✦ 速度模式与力矩模式的比较

项目	速度模式	力矩模式	对比
传递函数和结构图	$\Omega_m(s) = \frac{K_m}{1 + T_m s} U_c(s) - \frac{K_d}{1 + T_m s} \tau_{md}(s)$ 		力矩模式下，电机输出力矩正比于控制电压 $\tau_m = K_\tau u_c$ ，物理意义明确，有利于复杂控制器的设计
时间常数	$T_m = T_{mv} = \frac{R_a I_m}{K_e K_a + R_a B_m}$	$T_m = T_{m\tau} = \frac{I_m}{B_m}$	$T_{mv} < T_{m\tau}$ 速度模式开环时间常数小
开环增益	$K_m = K_{mv} = \frac{K_a K_u}{K_e K_a + R_a B_m}$	$K_m = K_{m\tau} = \frac{K_\tau}{B_m}$	K_{mv} ：定值 $K_{m\tau}$ ：一般可调节
干扰增益	$K_d = K_{dv} = \frac{1}{\frac{K_e K_a}{R_a} + B_m}$	$K_d = K_{d\tau} = \frac{1}{B_m}$	$K_{dv} < K_{d\tau}$ 开环状态，速度模式对干扰力矩更不敏感



速度模式和力矩模式电机特点和适用场景

➤ 速度模式

- 放大器成本低
- 对负载波动的敏感度低，易于实现稳定控制
- 控制信号与电机力矩存在非线性关系，难以根据动力学方程补偿扰动
- 不利于实现力矩控制
- 闭环状态下，对控制信号的响应速度低于力矩模式
- 适用于大传动比机器人的点位控制

➤ 力矩模式

- 放大器成本相对较高
- 闭环时能够始终以最大力矩启动电机，能实现准时间最优控制
- 控制电压与机器人关节力矩成正比，有利于实现关节力矩控制
- 物理意义明确，更易于动力学建模和验证复杂控制算法，以补偿干扰力矩
- 系统更敏感，整定控制器参数难度相对较大
- 适用于要求跟踪动态信号的工业机器人和力控制

课后作业

作业

- 1、简述有刷直流伺服电机速度模式和力矩模式的特点及适用场合。