**La comparaison asymptotique**

**et les notations de Landau**

L’objet de ce chapitre est d’étudier la comparaison asymptotique et les notations de Landau qui constituent un outil mathématique adéquat pour décrire la complexité des algorithmes.

**2.1 Introduction**

La comparaison asymptotique est une méthode de l’analyse mathématique qui consiste à étudier le comportement d’une fonction au voisinage de l’infini et à la classer parmi une classe de fonctions dites de référence.

Les notations asymptotiques dites de Landau ont été introduites en 1909 par le mathématicien allemand spécialisé en [théorie des nombres](http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9orie_des_nombres) Edmund de Landau (1877-1938). Il existe d’autres notations asymptotiques, notamment celles de Hardy et de Littelwood présentées en 1910 et celles de Vinogradov parues en 1930 [Wik, 2015]. Mais ce sont les notations de Landau qui sont utilisées en Informatique. Elles permettent d’exprimer les comparaisons asymptotiques entre fonctions de manière relativement aisée.

Les sections 2.2, 2.3 et 2.4 présentent respectivement les notations de Landau (Grand ), (grand ) et (grand ). La section 2.5 décrit quelques propriétés des notations asymptotiques et enfin la section 2.6 donne les fonctions de référence les plus utilisées dans la comparaison asymptotique.

**2.2 La notation asymptotique O (grand O)**

|  |
| --- |
| **2.2.1 Définition :**  Soit 2 fonctions numériques définies dans l’ensemble des nombres naturels N et à valeurs positives dans l’ensemble des nombres réels R :    où g joue le rôle de la fonction de référence et f celui de la fonction qu’on souhaite lui comparer.  On dit que la fonction est une borne supérieure asymptotique pour la fonction, et on note :  si et seulement si :  On dit alors que : ; ce qui se lit par : . |

**Remarque :** L’écriture n’est pas une égalité au sens mathématique du terme car l’égalité est une relation commutative qui se lit dans les 2 sens. Elle signifie plutôt que la fonction appartienne à l’ensemble des fonctions bornées supérieurement à l’infini par la fonction à une constante positive multiplicative près. C’est un abus d’écriture. Certains auteurs utilisent à la place de l’égalité la relation d’appartenance :

**2.2.2 Interprétation géométrique de la notation asymptotique Ο**

On représente dans un plan cartésien les graphes des fonctions (voir la figure 1).

**Figure 1. Interprétation géométrique de la notation Ο**

On remarque sur cette figure que : à partir du point la fonction est bornée supérieurement par la fonction. Formellement, cela s’écrit :

Ceci correspond à l’écriture en notation asymptotique :

**2.2.3 Exemple**

Soient les 2 fonctions :

Monter que :

**Démonstration :**

On utilise la technique de la majoration. C’est-à-dire, on majore une expression par une autre expression.

On a : (1)

On a aussi : (2)

(3)

En remplaçant les monômes de l’égalité (1) par les membres droits des inégalités (2) et (3), on déduit :

Il en résulte que :

Autrement dit :

**2.3 La notation asymptotique Ω (grand Ω)**

|  |
| --- |
| **2.3.1 Définition :**  Soit 2 fonctions numériques définies dans l’ensemble des nombres naturels N et à valeurs positives dans l’ensemble des nombres réels R :    où g joue le rôle de la fonction de référence et f celui de la fonction qu’on souhaite lui comparer.  On dit que la fonction est une borne inférieure asymptotique pour la fonction, et on note :  si et seulement si :  On dit alors que : ; ce qui se lit par : . |

**Remarque :** L’écriture n’est pas une égalité au sens mathématique du terme car l’égalité est une relation commutative qui se lit dans les 2 sens. Elle signifie plutôt que la fonction appartienne à l’ensemble des fonctions bornées inférieurement à l’infini par la fonction à une constante positive multiplicative près. C’est un abus d’écriture. Certains auteurs utilisent à la place de l’égalité la relation d’appartenance :

**2.3.2 Interprétation géométrique de la notation Ω**

On représente dans un plan cartésien les graphes des fonctions (voir la figure 2).



**Figure 2. Interprétation géométrique de la notation Ω**

On remarque sur cette figure que : à partir du point la fonction est bornée inférieurement par la fonction. Formellement, cela s’écrit :

Ceci correspond à l’écriture en notation asymptotique :

**2.3.3 Exemple**

Soient les 2 fonctions :

Monter que :

**Démonstration :**

On utilise là aussi, comme en 2.2.3, la même technique de la majoration.

On a :

Il en résulte que :

Autrement dit :

**2.4 La notation asymptotique Θ (grand Θ)**

|  |
| --- |
| **2.4.1 Définition :**  Soit 2 fonctions numériques définies dans l’ensemble des nombres naturels N et à valeurs positives dans l’ensemble des nombres réels R :    où g joue le rôle de la fonction de référence et f celui de la fonction qu’on souhaite lui comparer.  On dit que la fonction est une borne asymptotique pour la fonction, et on note :  si et seulement si :  On dit alors que : ; ce qui se lit par : . |

**Remarque :** L’écriture n’est pas une égalité au sens mathématique du terme car l’égalité est une relation commutative qui se lit dans les 2 sens. Elle signifie plutôt que la fonction appartienne à l’ensemble des fonctions bornées inférieurement et supérieurement à l’infini par la fonction à des constantes positives multiplicatives près. C’est un abus d’écriture. Certains auteurs utilisent à la place de l’égalité la relation d’appartenance :

**2.4.2 Interprétation géométrique de la notation Θ**

On représente dans un plan cartésien les graphes des fonctions (voir la figure 3).



**Figure 3. Interprétation géométrique de la notation Θ**

On remarque sur cette figure que : à partir du point la fonction est bornée inférieurement par la fonction et supérieurement par la fonction Formellement, cela s’écrit :

Ceci correspond à l’écriture en notation asymptotique :

**XXX**

**2.4.4 Equivalence entre la notation asymptotique**

**et les 2 notations asymptotiques et**

**2.4.3 Exemple**

Soient les 2 fonctions :

Monter que :

**Démonstration :**

Il suffit de reprendre les démonstrations des 2 exemples précédents (sections 2.2 et 2.3).

On a montré que : et

(d’après la proposition ci-dessus)

**2.4.4 Equivalence entre la notation asymptotique**

**et les 2 notations asymptotiques et**

On a le résultat suivant qui est une conséquence directe de la définition de la notation asymptotique

|  |
| --- |
| **Proposition :**  la notation asymptotique inclut les 2 autres notations et : |

**Démonstration :**

La démonstration est triviale.

On a :

**2.5 Propriétés des notations asymptotiques**

Les propriétés suivantes, parmi bien d’autres, permettent de simplifier le calcul des bornes asymptotiques d’une fonction. L’égalité n’est pas commutative : elle se lit dans un seul sens (telle qu’elle est écrite, soit de gauche à droite). On se limite ici à la notation asymptotique , mais ces propriétés restent, en général, valables pour les autres notations asymptotiques.

* (k est une constante réelle)

On démontre ces propriétés en utilisant une technique de démonstration relativement simple et basée sur la définition de la notation asymptotique. On donne à titre indicatif la démonstration de la 1ère propriété :

**Démonstration :**

On pose : et

(1)

(2)

On pose : et .

En sommant (1) et (2) avec les nouvelles valeurs et , on a :

**2.6 Les fonctions de référence**

Les fonctions de référence les plus utilisées pour la comparaison asymptotique sont les suivantes :

1- La fonction constante :

2- La fonction logarithmique :

3- La fonction racine carrée :

4- La fonction linéaire :

5- La fonction quasi-linéaire :

6- La fonction quadratique :

7- La fonction quasi-quadratique :

8- La fonction cubique :

9- La fonction polynomiale :

Cette fonction généralise les fonctions : racine carrée, linéaire, quadratique et

cubique.

10- La fonction exponentielle :

- etc.

On note alors respectivement en utilisant, par exemple, la notation :

1-

2-

3-

4-

5-

6-

7-

8-

9-

10-

- etc.