



CENTRE DE RECHERCHE EN AUTOMATIQUE DE  
NANCY  
ÉCOLE CENTRALE DE NANTES

---

STING 2021

Modèles de segmentation bayésienne pour  
les images polarimétriques : application  
en bio-imagerie

---

Auteur :

*Wassim BOURBIA*

*Élèves ingénieur 2ème année  
Option mathématiques  
appliquées*

Encadrants :

*Julien FLAMANT  
Chercheur CNRS, CRAN  
Radu S. STOICA  
Professeur Université de  
Lorraine, IECL Nancy*

Du 6 Mars au 28 Août 2021

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction et contexte du stage</b>	<b>2</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Problématique . . . . .	2
1.3	Présentation du laboratoire . . . . .	3
1.4	Organisation du rapport . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Champ de Markov en traitement d'image</b>	<b>4</b>
2.1	Simulation d'un champ de Markov . . . . .	4
2.1.1	Introduction . . . . .	4
2.1.2	Description de l'image . . . . .	4
2.1.3	Modélisation probabiliste de l'image . . . . .	5
2.1.4	Équivalence champ de Markov - champ de Gibbs . . . . .	5
2.1.5	Quelques MRF (Markov Random Field) fondamentaux . . . . .	7
2.1.6	Echantillonnage de MRF . . . . .	8
2.2	Validation des échantillonneurs . . . . .	11
2.2.1	1 <sup>re</sup> statistique suffisante : valeurs prises par les pixels . . . . .	11
2.2.2	2 <sup>me</sup> statistique suffisante : nombre de paire voisins différents deux à deux	13
2.3	Application : segmentation . . . . .	14
2.3.1	Cadre bayésien . . . . .	14
2.3.2	Segmentation . . . . .	15
2.3.3	Recuit simulé . . . . .	16
2.4	Simulations avec le modèle de Potts supervisé . . . . .	16
2.4.1	Modèle et initialisation . . . . .	16
2.4.2	Résultats des simulations . . . . .	17
2.5	Conclusion . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Segmentation conjointe d'images</b>	<b>20</b>
3.1	Image sous plusieurs angles . . . . .	20
3.2	Description de la lumière polarisée . . . . .	20
3.3	Traitement de l'information polarimétrique . . . . .	21
3.3.1	Représentation en niveau de gris . . . . .	21
3.3.2	Représentation en Stokes . . . . .	21
3.3.3	Représentation en HSL . . . . .	22
3.4	Formalisme pour la segmentation . . . . .	22
3.5	Simulations d'une segmentation sur des données contrôlées . . . . .	23
3.6	Conclusion . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Estimation des paramètres de classe</b>	<b>24</b>
4.1	Méthode classique de clustering . . . . .	24
4.1.1	Algorithme K-means . . . . .	24
4.1.2	Espace des paramètres de Stokes . . . . .	25
4.2	Méthode bayésienne . . . . .	26
4.2.1	Modèle et algorithme . . . . .	26
4.2.2	Résultats . . . . .	27
4.3	Conclusion . . . . .	28

<b>5</b>	<b>Étude de données réelles</b>	<b>29</b>
5.1	Images polarimétriques en extérieur . . . . .	29
5.2	Images polarimétriques appliquées à la biologie . . . . .	30
5.3	Images prises au microscope polarisant . . . . .	31
5.4	Conclusion . . . . .	33
<b>6</b>	<b>Conclusion générale du stage</b>	<b>34</b>
6.1	Bilan . . . . .	34
6.2	Axes d'améliorations et de poursuites . . . . .	34
6.3	Expérience personnelle . . . . .	34

# Remerciement

Avant toute chose, je tiens sincèrement à remercier toutes les personnes qui ont contribué au bon déroulement de mon stage.

J'adresse mes premiers remerciements à **Cédric Févotte** qui m'a aidé dans ma recherche de stage. Son écoute et ses conseils m'ont permis de cibler mes candidatures, et de trouver ce stage qui était en totale adéquation avec mes attentes.

Je tiens à remercier vivement mes deux encadrants de stage pour leur accompagnement. **Julien Flamant** pour s'être montré disponible, pédagogue et très clair dans ce qu'il attendait de moi. Grâce à lui, j'ai pu vite me familiariser avec les algorithmes MCMC et le traitement de l'information polarimétrique, dont je n'avais pas les bases au début de mon stage. Je veux également mettre en valeur sa capacité qui est de rapidement trouver une erreur subtile noyée dans un long code ou encore de comprendre les idées que j'ai pu proposer sans forcément qu'elles soient rigoureusement bien expliquées. Je le remercie également pour sa patience et les relectures qu'il a pu apporter à ce rapport. **Radu S. Stoica** pour ses idées de contrôle d'algorithmes qui apportent de la consistance à ce travail. Ainsi que pour sa façon de voir sur le long terme qui a permis de sélectionner les idées réalisables dans le temps imparti. Assez régulièrement, nous avons pu faire des états d'avancement, ce qui fait que je ne me suis pas un instant senti perdu. Ils m'ont également permis de faire valoir mon travail et de le présenter devant des doctorants et des chercheurs, ce qui est très formateur.

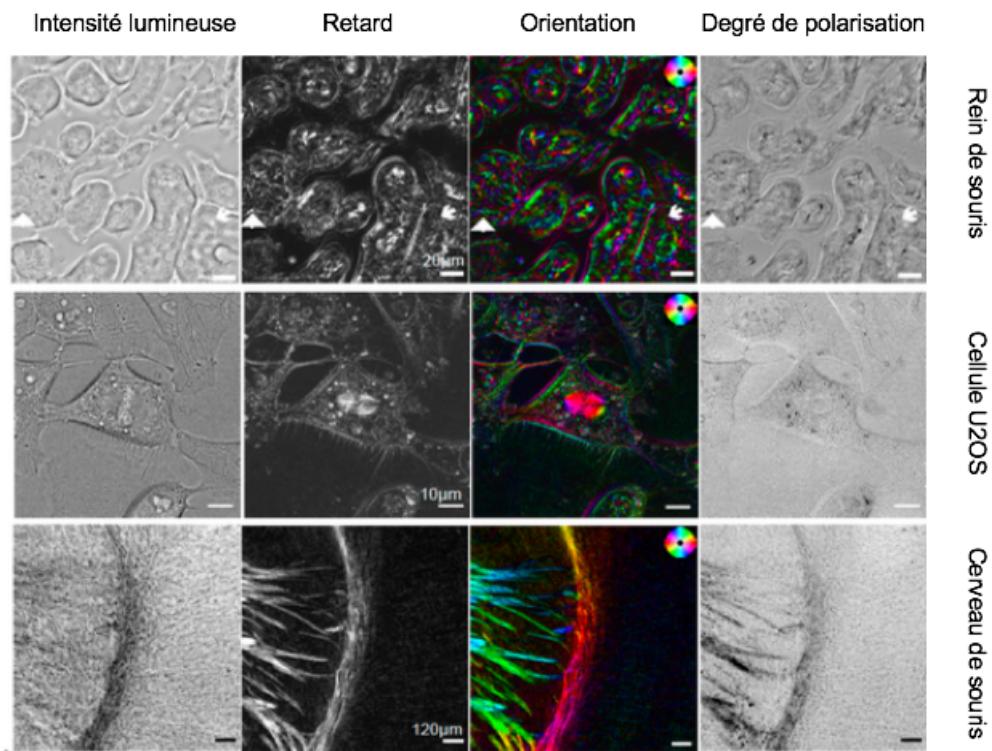
J'ai fortement apprécié l'accueil de toute l'équipe et les moments passés avec eux. En particulier, **Clémence Prevost** et **Phillipe Flores** qui m'ont partagé leur expérience en thèse et d'autres conseils méthodologiques. De même, merci à **David Brie** pour sa joie de vivre contagieuse.

# 1 Introduction et contexte du stage

## 1.1 Motivation

Les techniques d'imagerie qui exploitent les propriétés de polarisation de la lumière sont de plus en plus populaires en biologie, car l'imagerie polarimétrique permet d'obtenir de nombreuses informations qui sont inaccessibles aux autres méthodes d'imagerie conventionnelles [9]. À titre d'exemple, la Figure 1 illustre certains des avantages des mesures polarimétriques en bio-imagerie : par rapport à l'imagerie conventionnelle, basée uniquement sur l'intensité, les informations de polarisation fournissent des informations physiques et morphologiques cruciales ainsi qu'un contraste d'image accru.

FIGURE 1 – En ligne : trois scènes biologiques différentes [7]. En colonne : image d'intensité lumineuse standard, le retard dû à la biréfringence du milieu, l'orientation de l'axe optique et le degré de polarisation. Les trois dernières quantités ne peuvent être obtenues qu'en mesurant l'état de polarisation de la lumière.



## 1.2 Problématique

L'information sur la polarisation est généralement décrite à l'aide des paramètres de Stokes, un ensemble de quatre paramètres énergétiques qui doivent être estimés à partir de plusieurs mesures d'intensité bruitées. Ce stage se concentrera sur le problème de la segmentation des images représentée par les paramètres Stokes et développera des algorithmes efficaces pour sa résolution.

Le second objectif de ce stage sera l'application de la méthodologie proposée à l'imagerie biologique cellulaire. En particulier, un objectif sera d'étudier le potentiel des mesures polarimétriques pour caractériser la sénescence cellulaire (i.e. le vieillissement cellulaire). Ce travail sera effectué au sein de l'équipe Signaux Multidimensionnels faisant partie du département BioSis.

### 1.3 Présentation du laboratoire

Le Centre de recherche en automatique de Nancy (CRAN) est un laboratoire de recherche en automatique fondé en 1980 à Nancy. C'est aujourd'hui une unité mixte de recherche (UMR 7039) entre l'Université de Lorraine (UL) et le Centre national de la recherche scientifique (CNRS). Au 1er janvier 2021, le laboratoire compte 109 enseignants-chercheurs, 4 émérites, 9 chercheurs CNRS, 10 autres chercheurs de l'UL, de l'ICL et du CHU ou d'organismes externes, 10 post-docs, 84 doctorants et 33 (dont 28 CDI et 5 CDD) ingénieurs, techniciens ou administratifs.

Les recherches menées au CRAN concernent l'Automatique définie comme la science de la modélisation, de l'analyse, de la commande et de la supervision des systèmes dynamiques mais aussi le traitement du signal et le génie informatique. Le CRAN mène également des recherches interdisciplinaires associant l'automatique, le traitement du signal et de l'image avec la biologie et la médecine.

Lien vers leur site web : <http://www.cran.univ-lorraine.fr>

### 1.4 Organisation du rapport

La section 2 est une introduction aux techniques markoviennes et établit des notions de base. Elle amène la définition des champs markoviens et des champs de Gibbs et traite des techniques d'échantillonnage (échantillonner de Gibbs, de Métropolis, recuit simulé) utiles pour l'exploration des différentes distributions a posteriori rencontrées dans ce manuscrit. L'application de ces outils à la segmentation dans le cas d'une image en niveau de gris suivra. Le formalisme utilisé ici est celui présenté dans le document "champs de markov en traitement d'image"[3].

La section 3 est une présentation de l'information en imagerie polarimétrique ainsi que d'un modèle bayésien pour la segmentation reprenant le formalisme de la section précédente. Le traitement de la polarisation pour l'imagerie y est détaillé.

Dans la section 4, se trouveront différentes méthodes d'estimations des hyperparamètres liés au modèle de segmentation. Une première approche consiste à utiliser les méthodes de clustering classiques (K-Means). Une seconde stratégie est une estimation bayésienne de ces hyperparamètres.

Des applications sur des images réelles seront finalement donnés dans la section 5. Les images à segmenter sont obtenues en extérieur comme en laboratoire pour permettre d'avoir des applications à différentes échelles.

## 2 Champ de Markov en traitement d'image

### 2.1 Simulation d'un champ de Markov

#### 2.1.1 Introduction

Une image numérique se présente et se manipule sous forme d'un tableau bidimensionnel (ou  $d$ -dimensionnel) d'une variable entière quantifiée. L'information véhiculée par cette représentation va en réalité bien au delà de la seule donnée des niveaux de gris en chaque site, et la description d'une image se fait en termes de zones, contours, structures définis par les contrastes, textures, etc. qui peuvent être présents dans l'image. Le niveau de gris en un pixel n'est donc souvent pas significatif en lui-même, mais dans ses relations et interactions avec ses voisins. Cette propriété des images, à savoir les interactions locales entre niveaux de gris voisins pour définir les différentes régions de l'image, va nous permettre d'utiliser un formalisme markovien.

#### 2.1.2 Description de l'image

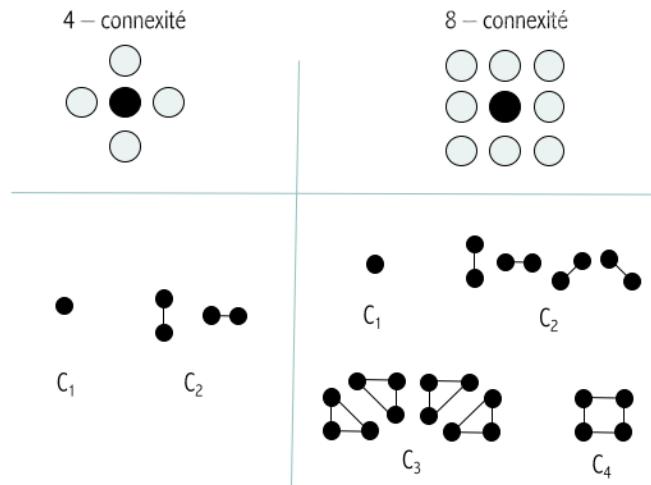
L'image est formée d'un ensemble fini  $S$  de sites  $s_i$  correspondant aux pixels.  $S$  est donc essentiellement un réseau discret fini, partie de  $\mathbb{Z}^d$ , si on note  $d$  la dimension de l'espace. À chaque site est associé un descripteur, représentant l'état du site et qui peut être son niveau de gris, une étiquette, ou une information plus complexe, et prenant ses valeurs dans  $E$ .

La notion d'interactions locales nécessite de structurer les relations spatiales entre les différents sites du réseau. Pour ce faire, on munit  $S$  d'un système de voisinage  $\mathcal{V}$  défini de la façon suivante :

$$\mathcal{V}_s = \{t\} \text{ t.q } \begin{cases} s \notin \mathcal{V}_s \\ t \in \mathcal{V}_s \implies s \in \mathcal{V}_t \end{cases}$$

À partir d'un système de voisinage, un système de cliques peut être déduit : une clique est soit un singleton de  $S$ , soit un ensemble de sites tous voisins les uns des autres. En fonction du système de voisinage utilisé, le système de cliques sera différent et fera intervenir plus ou moins de sites comme illustré sur la figure 2. On notera  $C$  l'ensemble des cliques relatif à  $\mathcal{V}$ , et  $C_k$  l'ensemble des cliques de cardinal  $k$ .

FIGURE 2 – Les cliques associées à divers systèmes de voisinage en dimension  $d = 2$



Les interactions locales entre niveaux de gris (ou descripteurs) de sites voisins peuvent alors s'exprimer comme un potentiel de clique. Soit  $c$  une clique, on lui associe le potentiel  $U_c$  dont la valeur dépend des niveaux de gris (ou descripteurs) des pixels constituant la clique. En poursuivant ce raisonnement, on peut définir l'énergie globale de l'image comme la somme des potentiels de toutes les cliques :

$$\text{Énergie globale : } U(x) = \sum_{c \in C} U_c(x)$$

et l'énergie locale en un site comme la somme des potentiels de toutes les cliques auxquelles il appartient :

$$\text{Énergie locale au site } s : U_s(x) = \sum_{c \in C/s \in c} U_c(x)$$

### 2.1.3 Modélisation probabiliste de l'image

La définition des champs de Markov qui sera donnée dans la section suivante nécessite une modélisation probabiliste de l'image. Ainsi, l'image dont nous disposons va être considérée comme une réalisation d'un champ aléatoire. Soit  $s$  un site de l'image, on peut en effet lui associer une variable aléatoire  $X_s$  prenant ses valeurs dans  $E$ . Le niveau de gris  $x_s$  en  $s$  n'est ainsi qu'une réalisation de la v.a  $X_s$ . On définit alors le champ aléatoire  $X = (X_s, X_t, \dots)$  prenant ses valeurs dans  $\Omega = E^{|S|}$ .

Dans ce cadre probabiliste, l'image considérée est simplement une réalisation  $x$  du champ. La probabilité globale de  $x$ ,  $P(X = x)$ , permet d'accéder en quelque sorte à la vraisemblance de l'image, et les probabilités conditionnelles locales d'une valeur en un site permettent de mesurer le lien statistique entre un niveau de gris et le reste de l'image. Pour cela, nous faisons l'hypothèse que le champ  $X$  est un champ de Markov.

### 2.1.4 Équivalence champ de Markov - champ de Gibbs

Considérons  $x_s$  la valeur du descripteur prise au site  $s$  et  $x^s = (x_t)_{t \neq s}$  la configuration de l'image excepté le site  $s$ . La définition d'un champ de Markov est alors la suivante :  **$X$  est un champ de Markovssi la probabilité conditionnelle locale en un site n'est fonction que de la configuration du voisinage du site considéré** ce qui s'exprime de façon formelle :

$$P(X_i = x_i | x^i) = P(X_i = x_i | x_j, j \in \mathcal{V}_i)$$

Ainsi, le niveau de gris en un site ne dépend que des niveaux de gris des pixels voisins de ce site. Dans le cas des images naturelles cette hypothèse se justifie bien, une connaissance locale d'une image suffit à réaliser son interprétation partielle pourvu que le système de voisinage soit bien choisi.

Nous pouvons maintenant définir le champ de Gibbs de potentiel associé au système de voisinage  $\mathcal{V}$  : **c'est le champ aléatoire  $X$  dont la probabilité est une mesure de Gibbs associée au système de voisinage  $\mathcal{V}$** , ce qui implique :

$$P(X = x) = \frac{\exp(-U(x))}{Z} = \frac{\exp(-\sum_{c \in C} U_c(x))}{Z}$$

Avec  $Z = \sum_{x \in \Omega} U(x)$  une constante de normalisation aussi appelée fonction de partition de Gibbs. En pratique, il est quasi-impossible de calculer cette constante au vu du très grand nombre de configuration de cliques possible.

### Théorème 1 : Hammersley-Clifford [3]

Sous les hypothèses :

- ensemble de sites  $S$  fini ou dénombrable,
- système de voisinage  $\mathcal{V}$  borné,
- espace des états  $E$  discret

$X$  est un champ de Markov relativement à  $\mathcal{V}$  et  $P(X = x) > 0$ ,  $\forall x \in \Omega$

$$\iff$$

$X$  est un champ de Gibbs de potentiel associé à  $\mathcal{V}$

Ce théorème et la forme bien spécifique de probabilité de  $X$  qui en résulte, va permettre de lier les probabilités globales et locales comme nous allons le voir maintenant. En effet, si nous cherchons à écrire la probabilité conditionnelle locale  $P(X_s = x_s | X^s = x^s)$ <sup>1</sup>, nous avons grâce au résultat précédent :

$$P(X_s = x_s | X^s = x^s) = \frac{P(X = x)}{P(X^s = x^s)} = \frac{\exp(-U(x_s, x^s))}{\sum_{\xi \in E} \exp(-U(\xi, x^s))}$$

En notant  $V_s = (x_t, t \in \mathcal{V}_s)$ , on définit  $U_s$  l'énergie locale par :

$$U_s(x_s | V_s) = \sum_{c \in C / s \in c} U_c(x_s, V_s)$$

On peut écrire l'énergie globale  $U(x)$  sous la forme :

$$U(x) = U_s(x_s | V_s) + \sum_{c \in C / s \notin c} U_c(x)$$

En simplifiant l'expression de la probabilité conditionnelle locale en supprimant les termes communs on a :

$$\begin{aligned} P(X_s = x_s | X^s = x^s) &= \frac{\exp(-U_s(x_s | V_s) - \sum_{c \in C / s \notin c} U_c(x))}{\sum_{\xi \in E} (\exp(-U_s(\xi | V_s) - \sum_{c \in C / s \notin c} U_c(x)))} \\ &= \frac{\exp(-U_s(x_s | V_s))}{\sum_{\xi \in E} \exp(-U_s(\xi | V_s))} \end{aligned}$$

L'expression obtenue, qui ne fait intervenir que les potentiels des cliques contenant le site  $s$  (ce qui nous permet de retrouver au passage l'hypothèse markovienne), est très importante. En effet, autant il n'est pas possible partant d'une configuration  $x$  d'accéder à sa probabilité à cause de la constante de normalisation, autant il est possible de calculer en chaque site la probabilité conditionnelle locale. Cette expression sera à la base de tous les algorithmes de simulation de champs markoviens que nous verrons dans la section suivante.

---

1.  $(x_s, x^s)$  est une réalisation de  $X$

### 2.1.5 Quelques MRF (Markov Random Field) fondamentaux

Pour expliciter la forme que peut prendre l'énergie  $U(x)$  Nous présentons ici quelques uns des champs de Markov les plus utilisés en traitement d'images. Comme indiqué précédemment, ces champs sont définis par leur voisinage et leurs fonctions de potentiel.

#### Modèle d'Ising

Ce modèle est le plus ancien et a été développé lors de l'étude du ferro-magnétisme en physique statistique [4]. L'espace des descripteurs est celui des états des spins, i.e  $E = \{-1, 1\}$  (espace binaire), et les potentiels sont des potentiels en tout ou rien :

$$U_{c=(s,t)}(x_s, x_t) = -\beta x_s x_t$$

Les potentiels des cliques d'ordre 1 (clique constituée par un seul spin) sont de la forme  $-Bx_s$ . L'énergie totale s'écrit :

$$U(x) = - \sum_{c=(s,t) \in C} \beta x_s x_t - \sum_{s \in S} B x_s$$

Lorsque  $\beta$  est positif, les configurations les plus probables correspondent à des sites voisins de même descripteur, ce qui donne des réalisations constituées par des larges zones homogènes. La taille de ces régions est gouvernée par la valeur de  $\beta$  que l'on appellera paramètre de régularisation.

La variable  $B$  représente le champ magnétique externe relatif au potentiel d'ordre 1, il favorise à priori par son signe un spin ou un autre. Par la suite, de façon intuitive, cette quantité relative aux cliques d'ordre 1, sous une autre forme, nous permettra d'introduire le terme d'attache aux données propre à chaque pixel.

#### Modèle de Potts

Il s'agit d'une extension du modèle d'Ising pour un espace m-aire, i.e  $E = \{0, \dots, m-1\}$ . Les potentiels sont comme précédemment en tout ou rien mais définis seulement pour les cliques d'ordre 2 :

$$U_{c=(s,t)}(x_s, x_t) = \begin{cases} -\beta : x_s = x_t \\ \beta : x_s \neq x_t \end{cases}$$

De même pour définir l'énergie globale de ce modèle on ajoutera un terme  $f(x_s)$  pour introduire si nécessaire un terme d'attache aux données.

Il est possible de définir des modèles utilisant des pondérations différentes en fonction des directions des cliques, et de privilégier ainsi certaines directions. Ainsi, ces modèles permettent également de prendre en compte différentes relations entre les régions (i.e entre différentes valeurs des descripteurs). On peut par exemple définir des pondérations  $\beta(x_s, x_t)$  pour  $x_s, x_t \in E$ .

### 2.1.6 Echantillonnage de MRF

Nous avons vu que la définition d'un champ de Markov passe par la définition de sa fonction d'énergie  $U$ . Celle-ci nécessite la définition d'un système de voisinage, qui définit alors le système de cliques, et de fonctions de potentiel associées aux cliques. Ces fonctions de potentiel permettent d'accéder à la probabilité globale d'une configuration, et aux probabilités conditionnelles locales.

Le problème qui se pose alors est, étant défini un champ de Markov, comment pouvons-nous réaliser le tirage d'une configuration (une image ici) en suivant la loi de probabilité de Gibbs caractéristique de ce champ ? Deux algorithmes d'échantillonnage classiques d'un champ de Markov sont :

#### L'échantillonneur de Gibbs

Cet algorithme repose sur la construction itérative d'une chaîne de Markov. À la convergence [3], i.e après un nombre d'itérations suffisant, les images construites sont des réalisations tirées selon la loi de Gibbs globale.

---

#### **Algorithme 1 : Mise à jour d'un site selon l'échantillonneur de Gibbs**

---

La méthode de construction de l'image à l'itération  $n$ , partant de l'image à l'itération  $n-1$  se fait par mise à jour successive des sites de l'image. À l'étape  $n$  :

- **Choix d'un site s**
- **Calcul de la probabilité de transition** : au site  $s$ , selon la configuration des voisins  $V_s$  pour l'image  $x^{(n-1)}$ , calcul de la probabilité conditionnelle locale :

$$P(X_s = x_s | X^s = x^s) = \frac{\exp(-U_s(x_s | V_s))}{\sum_{\xi \in E} \exp(-U_s(\xi | V_s))}$$

- 
- **Mise à jour du site** : par tirage aléatoire selon la loi  $P(X_s = x_s | X^s = x^s)$
- 

On considère que l'algorithme a convergé après un grand nombre d'itérations ou lorsque le nombre de changements est faible. Le choix du site  $s$  considéré à l'étape  $n$  peut se faire de n'importe quelle façon à condition de balayer tous les sites un très grand nombre de fois (théoriquement un nombre infini de fois).

## L'algorithme de Métropolis

Cet algorithme repose sur un principe similaire à l'échantillonneur de Gibbs, et il s'agit également d'un algorithme de relaxation probabiliste<sup>2</sup>. Mais ici la mise à jour en un site s'effectue de façon différente.

---

### Algorithme 2 : Mise à jour d'un site selon l'algorithme de Métropolis

---

La méthode de construction de l'image à l'itération n, partant de l'image à l'itération n-1 se fait par mise à jour successive des sites de l'image. À l'étape n :

- **Choix d'un site s**
- **Choix d'un descripteur  $\lambda$  de E** selon une loi uniforme
- **Calcul de la variation d'énergie  $\Delta U$  pour  $x_s^{(n-1)} \rightarrow \lambda$**  :

$$\Delta U = U_s(\lambda | V_s^{(n-1)}) - U_s(x_s^{(n-1)} | V_s^{(n-1)})$$

- **Mise à jour du site** : selon la valeur de  $\Delta U$  :

1.  $\Delta U < 0 : x_s^{(n)} = \lambda$

2.  $\Delta U \geq 0 : x_s^{(n)} = \lambda$  avec probabilité  $p = \exp(-\Delta U)$  sinon revenir au choix du descripteur.
- 

La différence avec l'échantillonneur de Gibbs réside dans le tirage au sort du nouveau descripteur, au lieu de considérer la loi définie par tous les descripteurs. Comme on ne considère que la variation énergétique entre les 2 configurations, l'algorithme de Métropolis est plus rapide à chaque étape que l'échantillonneur de Gibbs. Mais la convergence peut être plus lente car le taux d'acceptation est strictement inférieur à 1 (les transitions ne sont pas toujours acceptées, contrairement au cas de l'échantillonneur de Gibbs).

## Parcours des sites

Les échantillonneurs précédent nécessitent de choisir un site à chaque étape. Les méthodes usuelles consistent à tirer un site selon une loi uniforme, ou d'effectuer un balayage classique, ligne par ligne, de l'image. Ces méthodes ont été testés mais sont très chères en temps de calcul.

Une autre approche est d'échantillonner plusieurs sites en même temps. Il faut cependant respecter une condition qui nous permettra d'assurer les propriétés des échantillonneurs. Si un site vient d'être mis à jour et que c'est au tour de son voisin de l'être il doit prendre en compte la nouvelle valeur de ce premier. On ne peut donc pas échantillonner tous les sites en même temps. Ainsi pour passer outre cette condition, nous allons sélectionner un ensemble de sites de telle sorte qu'aucun des sites sélectionnés n'ont un voisin dans ce même ensemble.

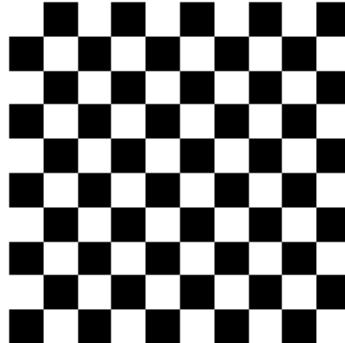
Pour comparer les différentes méthodes de parcours de sites, nous nous exerçons sur une image représentée ici par une matrice  $N \times N$ .

---

2. Algorithme de "relaxation", car il procède par mise à jour successive des sites, et "probabiliste" car celle-ci est fondée sur un tirage aléatoire.

Une première idée serait d'échantillonner tous les sites en deux étapes, en procédant par une approche en damier. Par exemple dans le cas 4-connexe<sup>3</sup>, d'abord échantillonner l'ensemble des sites en blanc puis l'ensemble des sites en noir comme illustré sur la figure suivante :

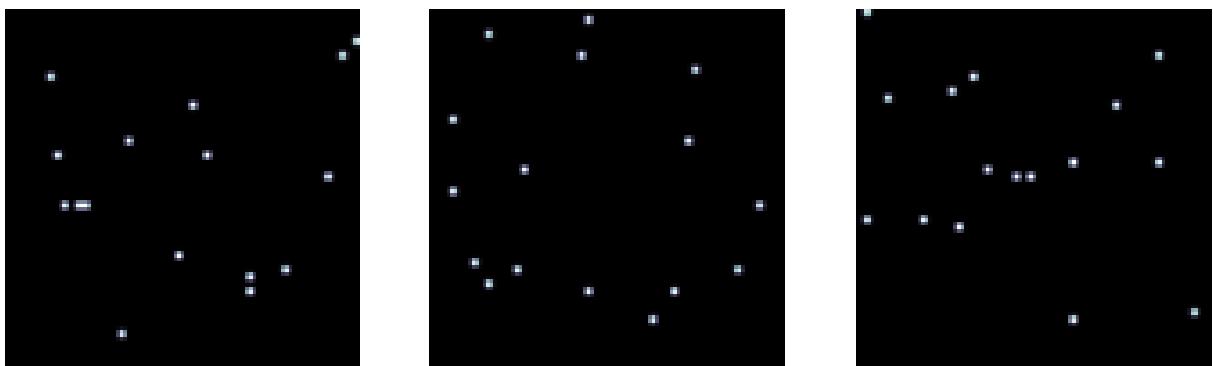
FIGURE 3 – Représentation de la configuration 'damier' pour N=10



Côté algorithmique, cette solution permet d'utiliser le calcul en parallèle et d'avoir une complexité  $O(N)$  et de ne pas faire une boucle dans une autre en procédant ligne par ligne, ce qui rendait sa complexité  $O(N^2)$ .

Pour encore optimiser le temps de calcul, une autre méthode est d'échantillonner un sous-ensemble de sites de façon aléatoire. On prendra un ensemble de sites de cardinal très faible devant la valeur du nombre de sites total ( $N^2$ ) pour ne pas avoir à vérifier que les sites sélectionnés ne sont pas voisins deux à deux. Par exemple, en 4-connexité, si on prend à chaque étape 30 sites sur 10 000, pour un site fixé la probabilité qu'un autre site sélectionné lui soit voisin est inférieure à  $\frac{29*4}{10^4} \approx 10^{-3}$ .

FIGURE 4 – Exemples de répartition des sites à échantillonner en simultané pour N=100



Les points en blancs seront échantillonnés en même temps. Puis de façon aléatoire nous passerons à une autre configuration de nouveaux points blancs à échantillonner.

Dans la suite de ce rapport, si il n'y a pas de précisions, les simulations seront faites en 4-connexité.

---

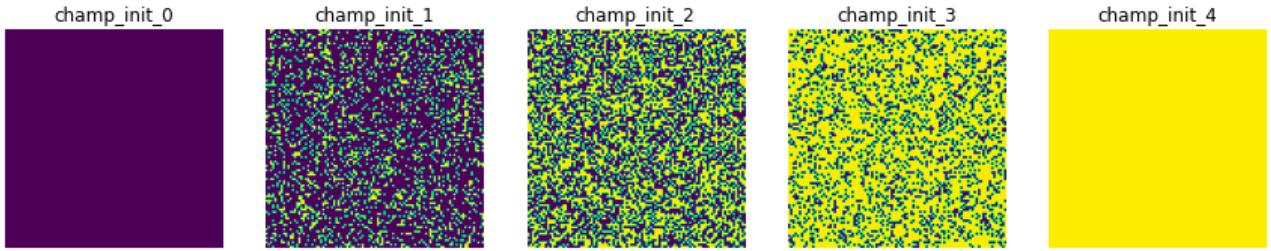
3. En 8-connexité, on peut imaginer une décomposition en superpixel 2x2 et échantillonner la même composante de chaque superpixel en même temps.

## 2.2 Validation des échantillonneurs

Nous allons dans cette section évaluer les performances de la procédure d'échantillonnage. Pour simplifier la présentation, nous nous intéressons uniquement à l'échantillonneur de Gibbs combiné au modèle de Potts avec un parcours des sites de façon aléatoire.

Nous considérons un modèle d'Ising (Potts à 2 classes)  $E = \{0, 1\}$  et plusieurs images de départ en variant le nombre de site de descriptif '1'. Ces sites occuperont entre 0 et 100 % de l'espace par pas de 25 %.

FIGURE 5 – champ initiaux



La couleur d'un site indique sa classe. Violet pour la classe '0' et jaune pour '1'.

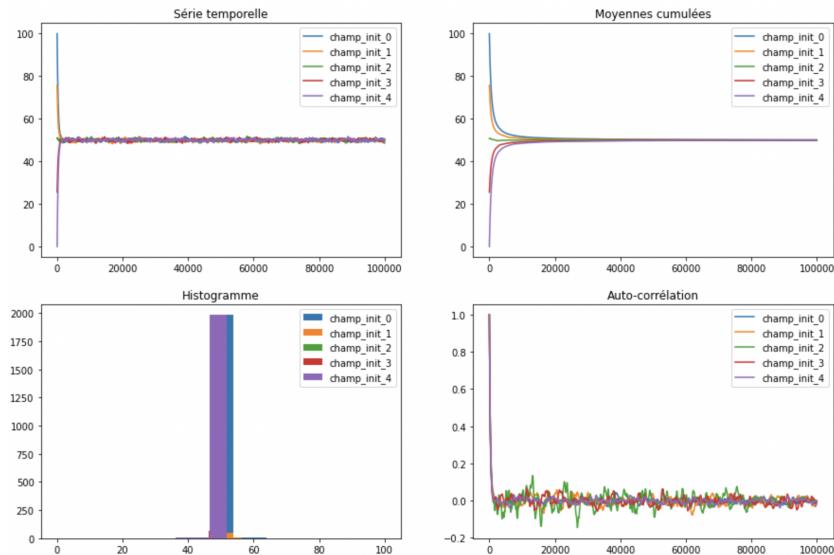
### 2.2.1 1<sup>re</sup> statistique suffisante : valeurs prises par les pixels

La première statistique pour évaluer notre échantillonneur est le nombre de total de descripteurs égaux à '1' pris par les sites pour chaque réalisation  $x$  du champ aléatoire  $X$ , qui se formalise de la façon suivante :

$$s_1(x) = \sum_{s \in S} 1_{x_s=1}$$

**Lorsque  $\beta = 0$  :**

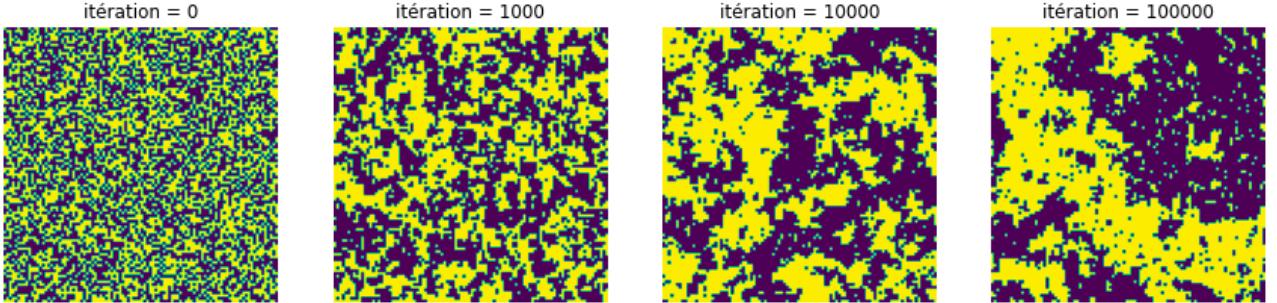
FIGURE 6 – ( $s_1$ ) au fil des itérations en pourcentage, histogramme et auto-corrélation ( $\beta = 0$ )



On voit que peu importe l'image de départ, la situation convergera vers une image dont les sites associés au label '0' sont aussi nombreux que ceux associés au label '1'. De plus, les images échantillonées semblent se décorrélérer au fil des itérations.

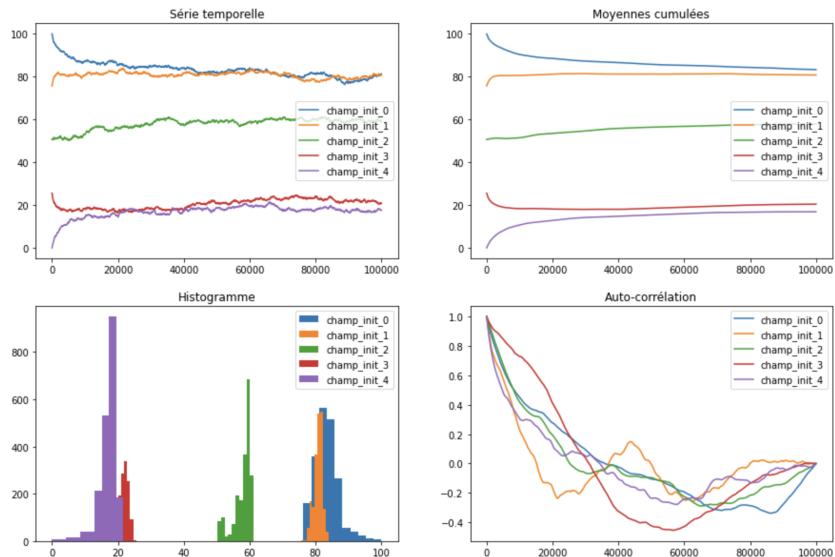
**Lorsque  $\beta = 0.44$  :**

FIGURE 7 – Régularisation critique,  $\beta = 0.44$ , évolution au fil des itérations (champ<sub>init</sub><sub>2</sub>)



À cette valeur du paramètre de régularisation,  $\beta = 0.44$ , que l'on appelle valeur critique [3], débute la formation de zones homogènes.

FIGURE 8 – ( $s_1$ ) au fil des itérations en pourcentage, histogramme et auto-corrélation ( $\beta = 0.44$ )



Le modèle d’Ising est un modèle de physique statistique utilisé pour modéliser différents phénomènes dans lesquels des particules à deux états interagissent localement. Ce modèle va nous permettre de simuler la transition de phase ferromagnétique-paramagnétique autour de la température de Curie d’un matériau fictif.[5]

Le ferromagnétisme dépend de la température. Il existe en effet une température de Curie dépendante du matériau en dessous de laquelle il est ferromagnétique et au dessus de laquelle il devient paramagnétique. On appelle ce phénomène une transition de phase. On peut montrer que le paramètre  $\beta$  est inversement proportionnelle à la température et que la valeur 0.44 correspond à la température de Curie en l’absence de champ extérieur.

### Lorsque $\beta = 3$ :

Plus la régularisation est importante plus les zones homogènes deviennent larges. On aura convergence vers une image toute violette si les sites de classes '0' sont en majorité dans l'image initiale ou toute en jaune dans le cas inverse.

FIGURE 9 – Régularisation forte,  $\beta = 3$ , évolution au cours des itérations

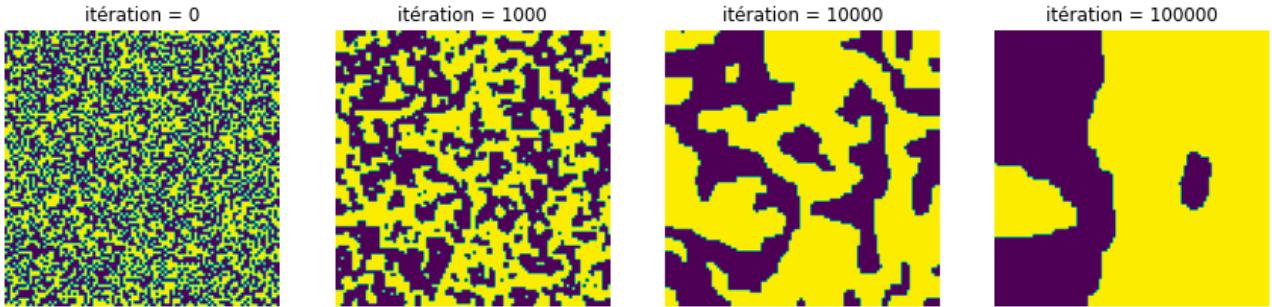
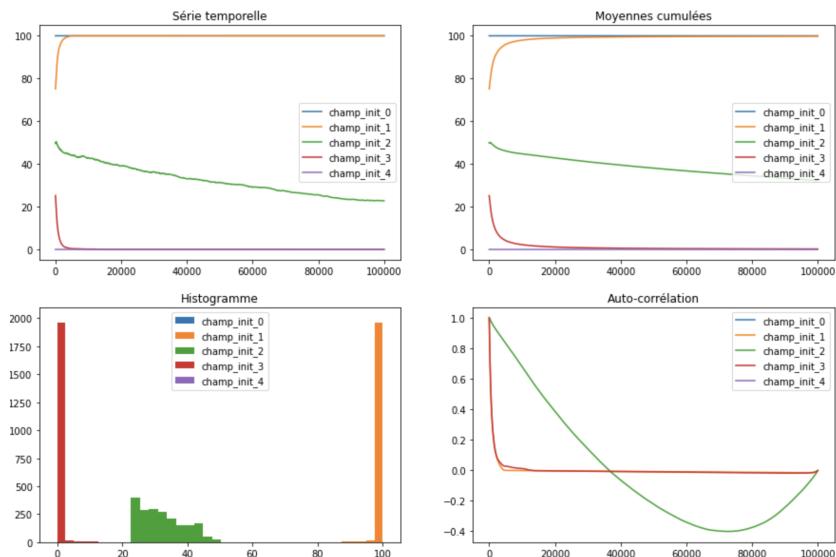


FIGURE 10 – ( $s_1$ ) au fil des itérations en pourcentage, histogramme et auto-corrélation ( $\beta = 3$ )



### 2.2.2 2<sup>me</sup> statistique suffisante : nombre de paire voisins différents deux à deux

Une deuxième statistique qui nous assure le bon fonctionnement de notre algorithme et de vérifier le nombre de paire de voisins différents deux à deux :

$$s_2(x) = \sum_{s \in S} \sum_{t \in V_s} 1_{x_s \neq x_t}$$

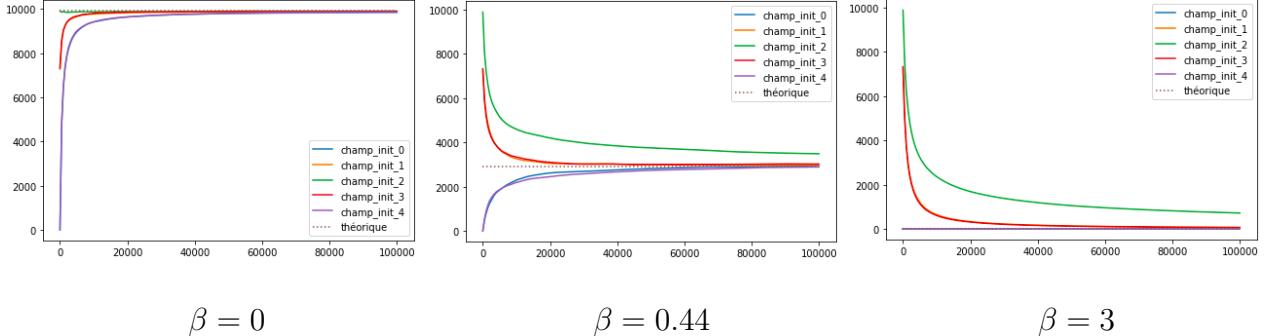
Pour être sûr de ne pas compter deux fois une paire de voisin, nous allons parcourir chaque site de coordonées [i,j] de cette façon : si le voisin de coordonées [i+1,j] existe alors comparer sa valeur avec le site [i,j]. De même pour le voisin de coordonées [i,j+1].

En faisant cela pour tous les sites nous sommes sûrs de dénombrer toutes les paires de voisins et de les comptabiliser qu'une seule fois.

On note  $V_N$  la suite qui au rang  $N$  associe le nombre de paire de voisins total pour une image de taille  $N \times N$  :

$$V_N = 2N^2 - 2N$$

FIGURE 11 – Moyenne cumulée de  $(s_2)$  au cours des itérations,  $N = 100$



- $\beta = 0$  : la valeur du nombre de point différent converge vers  $\frac{V_{100}}{2} = \frac{19800}{2} = 9900$  qui se traduit par le fait qu'après un très grand nombre d'itérations, chaque site à autant de voisin d'une classe comme d'une autre.
- $\beta = 0.44$  : le nombre de paire de voisin semble converger vers une constante. Ce phénomène est lié à la transition de phase. [10]
- $\beta = 3$  : Comme in fine toute l'image sera uniforme, les sites auront le même descriptif associé.

## 2.3 Application : segmentation

Nous avons étudié dans la section précédente des algorithmes de simulation permettant de générer des réalisations d'un champ de Markov donné. Nous abordons ici leur utilisation en tant qu'outils de traitement d'images pour la segmentation.

### 2.3.1 Cadre bayésien

On peut modéliser le problème dans un cadre bayésien de la façon suivante. Nous disposons d'une certaine donnée (image) que nous noterons  $y$  et que nous pouvons considérer comme une réalisation d'un champ aléatoire  $Y$ . Nous cherchons une réalisation  $x$  de l'image segmentée, que nous pouvons modéliser comme un champ de Markov  $X$ .  $X$  est le champ des étiquettes (labels) dans ce cas, les espaces de configurations ne sont donc pas nécessairement les mêmes pour  $X$  et  $Y$ .

Ces deux champs sont liés par le processus d'acquisition de l'image, qui conduit du champ idéal  $X$ , le processus image originel que nous cherchons, au champ bruité  $Y$  que nous observons. La segmentation a pour objectif d'inverser le processus et donc de remonter à une réalisation de  $X$  à partir de l'observation des données bruitées  $y$ .

On peut par exemple utiliser le critère du maximum a posteriori et rechercher la configuration  $\hat{x}$  maximisant la probabilité de  $X$  conditionnellement à la donnée  $y$  i.e  $P(X = x|Y = y)$ . Or la règle de Bayes permet d'écrire :

$$P(X = x|Y = y) = \frac{P(Y = y|X = x)P(X = x)}{P(Y = y)}$$

Expression dans laquelle il s'agit alors d'analyser chacun des termes  $P(Y = y|X = x)$  et  $P(X = x)$ , sachant que  $P(Y)$  est une constante (indépendante de la réalisation  $x$ ). Le

premier terme  $P(Y = y|X = x)$  décrit justement le processus d'observation et d'acquisition des données. L'hypothèse la plus courante (dont la validité reste à justifier) consiste à supposer l'indépendance conditionnelle des pixels (bruit non corrélé par exemple) :

$$P(Y = y|X = x) = \prod_s P(Y_s = y_s|X_s = x_s)$$

Par ailleurs, on fait sur le champ  $X$  recherché une hypothèse markovienne selon un voisinage  $\mathcal{V}$  et un modèle donné dépendant de l'application. On peut alors écrire :

$$P(X = x) = \frac{\exp(-U(x))}{Z}$$

Si on revient maintenant à la distribution a posteriori, celle-ci s'exprime par :

$$P(X = x|Y = y) \propto e^{-\mathcal{U}(x|y)}$$

$$\text{avec } \mathcal{U}(x|y) = \sum_{s \in S} -\ln(P(y_s|x_s)) + \sum_{c \in C} U_c(x).$$

Par conséquent, sous les hypothèses précédentes, on constate que la distribution a posteriori est une distribution de Gibbs et que donc le champ  $X$  conditionnellement à  $y$  est également un champ de Markov (théorème de Hammersley-Clifford) et de fait la probabilité de transition d'un site ne dépend que des descriptifs de ses voisins. Ainsi, il est possible de simuler des réalisations de ce champ à l'aide de l'échantillonneur de Gibbs ou de l'algorithme de Métropolis.

### 2.3.2 Segmentation

Dans le cas de la segmentation le terme  $P(Y = y|X = x)$  traduit la probabilité de réalisation d'une configuration donnée connaissant son étiquetage (i.e connaissant la classe de chaque pixel). En supposant l'indépendance des sites les uns par rapport aux autres, et en supposant que le niveau de gris  $y_s$  en un site  $s$  ne dépend que de l'étiquette  $x_s$  en ce site, on a :

$$P(Y = y|X = x) = \prod_s P(y_s|x_s)$$

Si  $y$  est une image en niveau de gris, les valeurs des probabilités conditionnelles sont données par l'histogramme conditionnel des niveaux de gris pour une classe donnée. Par exemple, si on suppose que chaque classe  $i$  a une distribution gaussienne de moyenne  $\mu_i$  et d'écart-type  $\sigma_i$ , on a :

$$P(y_s|x_s = i) = \frac{\exp\left(\frac{-(y_s - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}$$

Si comme précédemment on fait une hypothèse markovienne sur  $X$  et qu'on se limite aux cliques d'ordre 2, on a :

$$P(X = x) = \frac{\exp(-\beta \sum_{(s,t) \in C_2} \phi(x_s, x_t))}{Z}$$

D'où l'énergie à posteriori :

$$\mathcal{U}(x|y) = \sum_s \frac{(y_s - \mu_{x_s})^2}{2\sigma_{x_s}^2} + \ln(\sqrt{2\pi}\sigma_{x_s}) + \beta \sum_{(s,t) \in C_2} \phi(x_s, x_t)$$

Le champ des labels conditionnellement à  $y$  est markovien et d'énergie de Gibbs  $\mathcal{U}(x|y)$ . Le terme d'ordre 1 exprime le respect des données (le niveau de gris doit correspondre à la classe), et le terme d'ordre 2 la contrainte de régularisation introduite.

### 2.3.3 Recuit simulé

Dans le cas de l'estimateur MAP, la configuration  $x$  qui nous intéresse est celle maximisant la probabilité a posteriori, donc la réalisation la plus probable du champ de Gibbs, ou encore celle qui minimise l'énergie  $\mathcal{U}(x|y)$ . Un algorithme a été proposé pour atteindre cet (ou ces) état(s) d'énergie minimale, il s'agit du recuit simulé [3].

---

#### Algorithm 3 : Recuit simulé

---

Comme les algorithmes de simulation, c'est un algorithme itératif qui construit la solution au fur et à mesure.

- Choix d'une température initiale  $T^{(0)}$  "grande"
  - Choix d'une configuration initiale  $x^{(0)}$  quelconque
  - tant que le taux le changement est grand, à l'étape  $n$  :
    1. Simulation d'une configuration  $x^{(n)}$  pour la loi de Gibbs d'énergie  $\frac{\mathcal{U}(x)}{T^{(n)}}$  à partir de la configuration  $x^{(n-1)}$ ; la simulation peut se faire par l'échantillonneur de Gibbs ou l'algorithme de Métropolis.
    2. Diminution lente de la température  $T^{(n)} = aT^{(n-1)}$  ( $a \leq 1$ )
- 

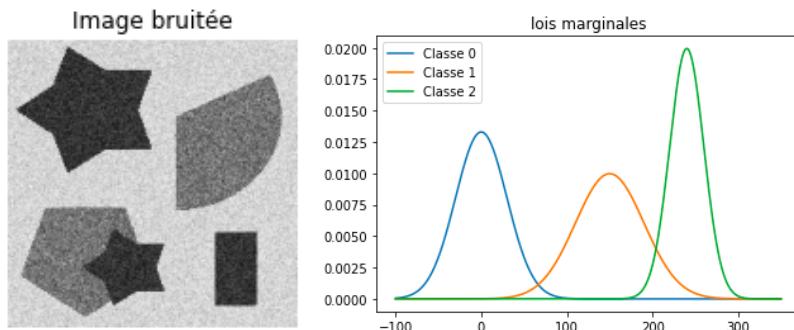
En pratique des décroissances géométriques sont utilisées pour la température, souvent sans dégradation notable des résultats obtenus par rapport à la décroissance logarithmique idéale proposée par les initiateurs de cet algorithme. Le schéma à décroissance logarithmique garantit la convergence vers le maximum a posteriori mais reste très lent.

## 2.4 Simulations avec le modèle de Potts supervisé

### 2.4.1 Modèle et initialisation

Nous allons proposer une simulation simple pour tester notre segmenteur. Pour ce faire, nous générerons une image en niveau de gris bruitée puis essayer de remonter au champ des étiquettes.

FIGURE 12 – Image simple à segmenter et loi marginales des classes



On définit ici trois classes :  $E = \{0 : \text{'Blanc'}, 1 : \text{'Gris'}, 2 : \text{'Noir'}\}$ . On suppose que l'intensité de blanc ici prend une valeur entre -100 (blanc) et 350 (noir) (dans cet exemple), nous allons prendre  $\mu_0 = 0$ ,  $\mu_1 = 150$ ,  $\mu_2 = 240$ ,  $\sigma_0 = 30$ ,  $\sigma_1 = 40$ ,  $\sigma_2 = 20$  et générer une image en niveaux de gris suivant les marginales associées. C'est à dire, connaissant la classe  $i$  associée à un pixel nous allons tirer une réalisation de la v.a qui suit  $N(\mu_i, \sigma_i^2)$  comme illustré sur la Figure 11.

Ainsi, nous allons comme définit dans la section 2.3.2 choisir un modèle gaussien avec les hyperparamètres  $\mu_i, \sigma_i$  définit plus tôt et ajouter le terme de régularisation lié au champs de Potts.

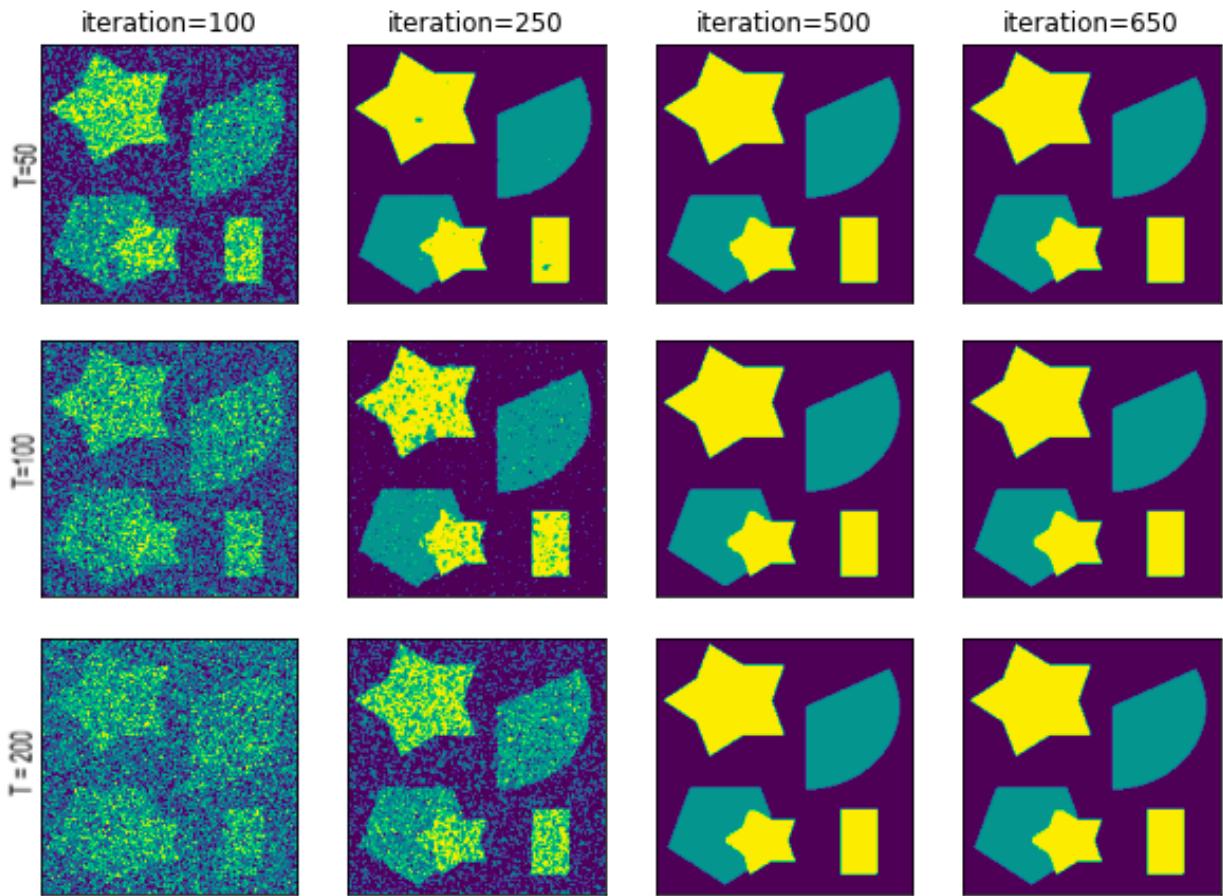
Dans ce cas d'école, les paramètres de classes  $\mu_i, \sigma_i$  sont connus mais ça ne sera pas le cas en pratique. Cette première approche permet de tester la fidélité de notre segmenteur dans une situation maîtrisée.

#### 2.4.2 Résultats des simulations

Ces simulations ont été réalisées avec un jeu de plusieurs paramètres à contrôler, à savoir :

- $\beta$  : Paramètre de régularisation
- $T$  : Température initiale du recuit simulé
- $a$  : Coefficient de décroissance géométrique du recuit simulé<sup>4</sup>

FIGURE 13 – Simulations de segmentation ( $\beta = 3, a = 0.99$ )



Sur la Figure 12 on entend par "iteration" : "étape de refroidissement" qui comporte à elle seule plus de 3 000 itérations au sens de celle de l'échantillonneur de Gibbs avec une température constante.

Une façon de quantifier le taux d'erreur et de surveiller la statistique suivante :

$$s_3(x^{(reel)}, x^{(simule)}) = \sum_{s \in S} 1_{x_s^{(reel)} \neq x_s^{(simule)}}$$

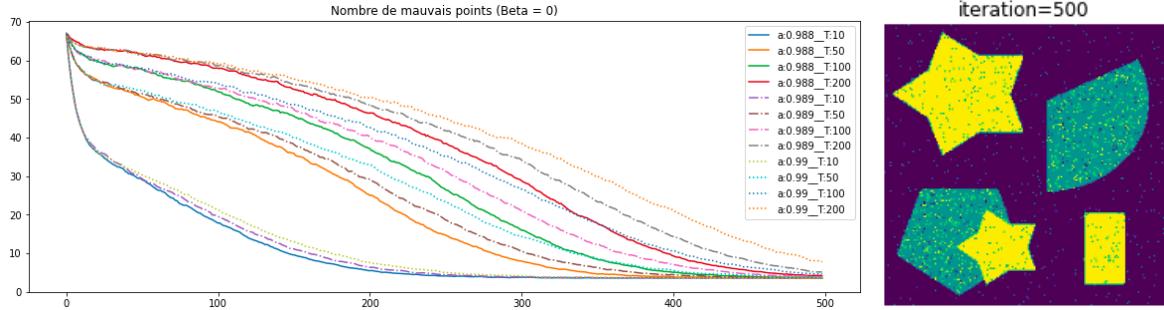
Elle nous permet de quantifier le nombre de site mal attribués.

---

4.  $T \leftarrow a*T$  à la fin d'une étape de refroidissement

Des premiers résultats que l'on pouvait anticiper sont ceux avec  $\beta = 0$  :

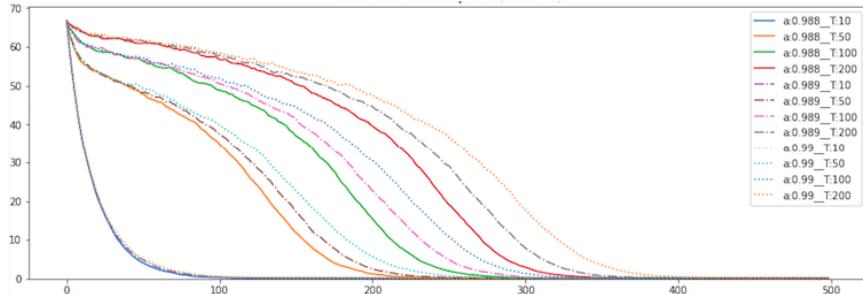
FIGURE 14 –  $s_3$  au cours des étapes de refroidissement en pourcentage ( $\beta = 0$ )



Peu importe la configuration des paramètres avant le lancement de la simulation, le schéma converge vers un champ de label bruité comme illustré sur la figure ci-dessus. Ceci est notamment du au fait qu'il n'y ait pas de régularisation. L'erreur résiduelle avoisine les 8 % : comprendre que 8 % des points sont mal attribués.

Dans le soucis de résoudre le problème d'éparpillement des points. Nous allons faire ces mêmes simulations avec  $\beta = 3$  :

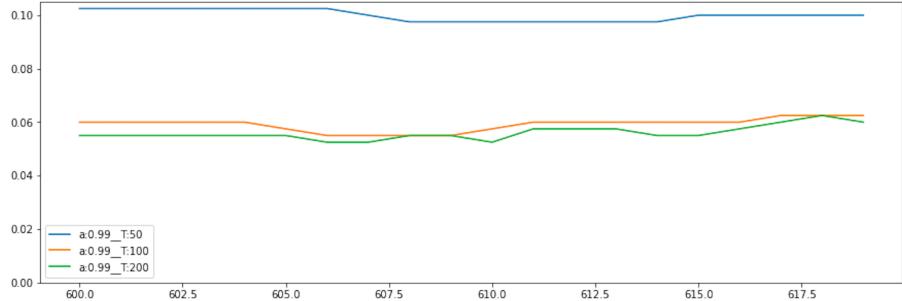
FIGURE 15 –  $s_3$  au cours des étapes de refroidissement en pourcentage ( $\beta = 3$ )



Avec ce paramètre de régularisation, le seuil de l'erreur résiduelle ne franchit pas les 0.1%. Les différentes erreurs se font sur les contours des formes à retranscrire, notamment lorsque la forme présente des pointes (le site à l'extrémité de celles-ci voit qu'il a plus de 3 voisins sur 4 d'une classe autre que la bonne et donc subit le coût de la régularisation). Une amélioration de ce segmenteur serait de choisir un modèle de régularisation qui prend en compte la forme des contours.

Par ailleurs, on remarque que plus  $T$  et  $a$  sont grands plus le schéma prend du temps à converger mais produit un résultat de meilleure qualité :

FIGURE 16 –  $s_3$  au cours des étapes de refroidissement en pourcentage ( $\beta = 3$ ), dernières étapes



En mettant en lumière les dernières itérations, on voit que pour  $a$  fixé, la performance est meilleure pour  $T$  grand comme laisse prédire la théorie. On remarque également que pour  $T = 50$  l'erreur résiduelle reste constante au fil des étapes, sûrement car le schéma est tombé très tôt dans un minimum local.

## 2.5 Conclusion

Nous avons abordé dans ce chapitre comment la segmentation pouvait prendre forme dans un cadre bayésien paramétrique, en y introduisant un modèle d'attache aux données et de régularisation avec un formalisme Markovien. L'approche repose sur l'équivalence entre le champ de Markov et le champ de Gibbs qui a permis de définir sa loi de probabilité en terme d'énergie. Nous avons finis par évoquer les algorithmes de synthèse permettant d'échantillonner selon une loi de Gibbs, et le recuit simulé permettant de trouver une configuration d'énergie minimale.

Nos algorithmes et échantillonneurs ont été mis à l'épreuve à l'aide de simulations numériques sur des cas synthétiques contrôlés. Les résultats obtenus sont en accord avec ce qui est attendu théoriquement.

Une approche MPM<sup>5</sup> a été étudiée mais les performances sont moins intéressantes que ceux de la stratégie MAP, utilisée ici.

$$\hat{x}_s^{MPM} = \underset{x_s \in E}{\operatorname{argmax}} p(x_s|y) \quad \hat{x}^{MAP} = \underset{x}{\operatorname{argmax}} p(x|y)$$

Notons la différence intuitive entre ces approches : la première mesure la perte par la proportion des pixels mal classés, alors que la deuxième pénalise de la même manière toutes les images de classes différentes de la vraie image, même si la différence porte sur un seul pixel.

---

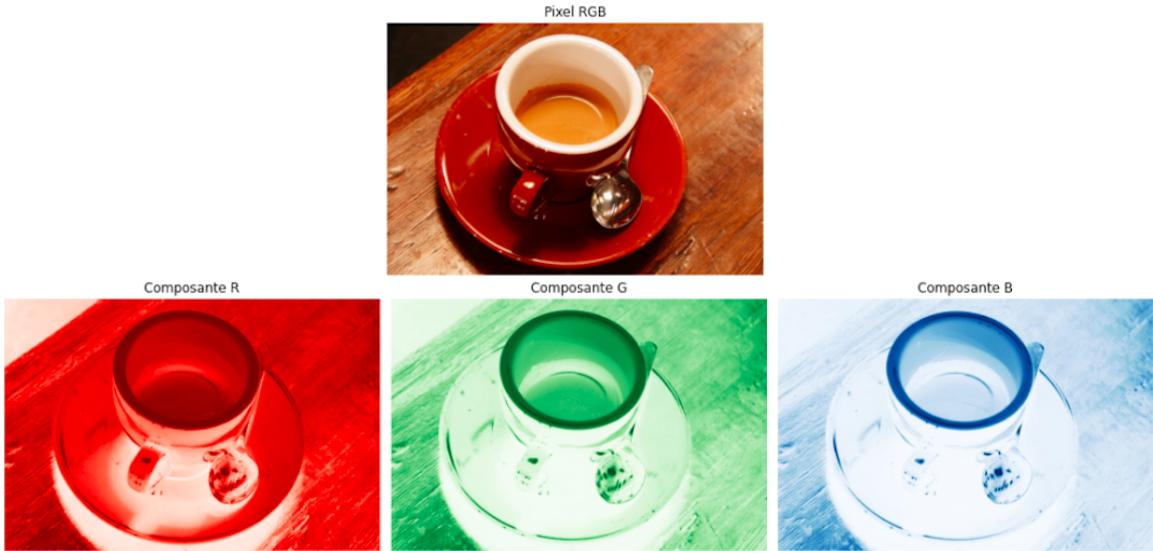
5. Maximum des marginales a Posteriori

### 3 Segmentation conjointe d'images

#### 3.1 Image sous plusieurs angles

Le champ des étiquettes  $X$  que nous cherchons à retranscrire peut provenir d'une image comme de plusieurs. En effet, on peut voir un objet sous plusieurs de ses facettes. Par exemple, on peut à partir des filtres rouges, bleu et vert d'une image faire de la segmentation par analyse conjointe.

FIGURE 17 – Décomposition d'une image en couleur



On peut étendre ce principe à  $m$  mesures d'image.

#### 3.2 Description de la lumière polarisée

L'essence du stage prend forme ici. En effet, la matière a une empreinte sur la polarisation de la lumière lorsque cette dernière la traverse ou la reflète. Une vitre ne va pas réagir de la même façon qu'un mur en ciment sous l'exposition d'une source de lumière. Cette information supplémentaire peut-être récupérée par le biais des coefficients de Stokes.

En 1852 George Gabriel Stokes montre que l'état de polarisation de la lumière peut-être décrit suivant 4 paramètres, appelés paramètres de Stokes [8]. On note  $S = (S_0, S_1, S_2, S_3)^T$ , avec  $S$  ,  $S_i$  respectivement le vecteur et les paramètres de Stokes. Dans la nature et dans le cadre des expériences menées dans notre laboratoire, la lumière est généralement partiellement linéairement polarisée. On réduit alors le vecteur  $S$  à ses 3 premières composantes.

Une méthode [2] pour approximer les valeurs des Stokes à l'aide d'une caméra polarimétrique consiste à effectuer 4 mesures d'une même configuration observable avec à chaque fois un angle du polariseur différent , de sorte que :

$$S = \begin{pmatrix} S_0 \\ S_1 \\ S_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_0 + M_{90} \\ M_0 - M_{90} \\ M_{45} - M_{135} \end{pmatrix}$$

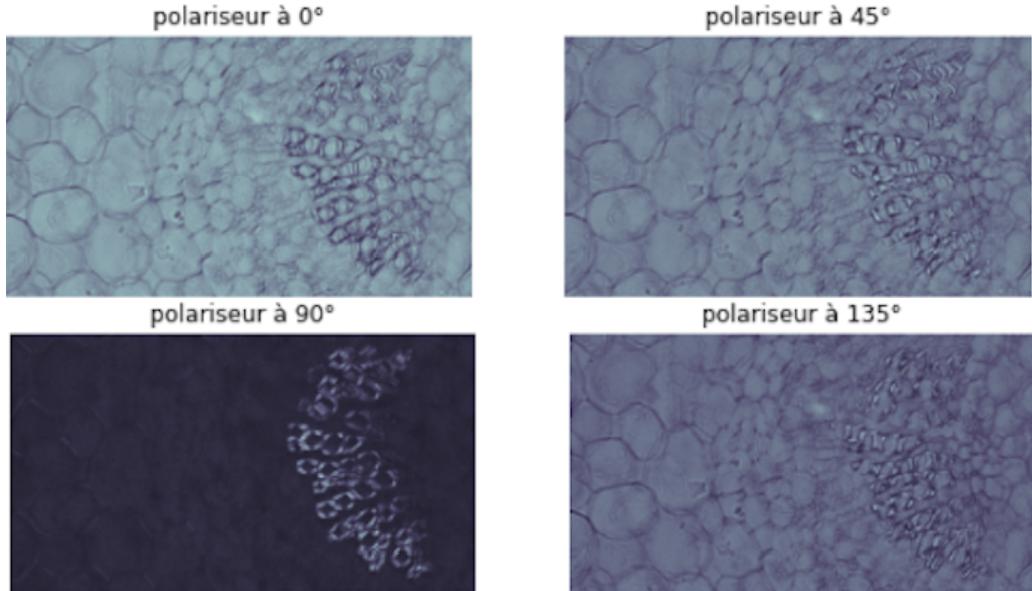
Avec  $M_\theta$  la mesure de l'image pour  $\theta$  comme angle du polariseur.

### 3.3 Traitement de l'information polarimétrique

#### 3.3.1 Représentation en niveau de gris

Le point de départ pour travailler avec l'information polarimétrique sont les mesures brutes. Comme énoncé précédemment, pour décrire complètement l'état de polarisation : 4 mesures avec des orientations du polariseur spécifiques peuvent suffir.

FIGURE 18 – Observation d'une feuille de jasmin d'hiver au microscope polarisant



(Objectif : x400 , excitation : lumière polarisée à  $0^\circ$ )

Sur la figure ci-dessus, nous avons zoomé sur une partie de la feuille qui réagissait aux changement d'angle du polariseur comme on le souhaitait. C'est à dire, qui nous donne une information supplémentaire et sépare les objets. Lorsque le polariseur est en phase avec l'excitation ( $0^\circ$ ) on distingue vaguement le bulbe du reste de la feuille tandis qu'en polarisation croisée ( $90^\circ$ ) les deux parties sont bien distinguées.

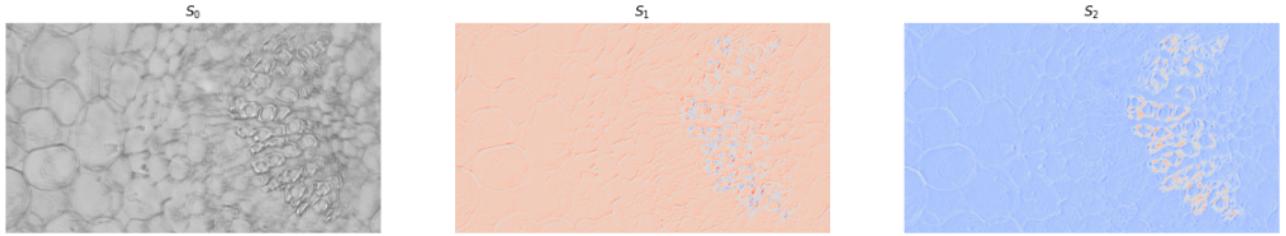
#### 3.3.2 Représentation en Stokes

On associe alors à chaque pixel  $s$  le vecteur de mesures :  $y_s = (M_0^{(s)}, M_{45}^{(s)}, M_{90}^{(s)}, M_{135}^{(s)})^T$ . Ainsi on définit une estimation du vecteur de Stokes en chaque pixel  $S_s$  de la façon suivante :

$$y_s = AS_s = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} S_s \quad \Leftrightarrow \quad S_s = A^+ y_s$$

Avec  $A$  la matrice dite de mesure et  $A^+$  sa pseudo inverse.

FIGURE 19 – Conversion des mesures en paramètres de Stokes



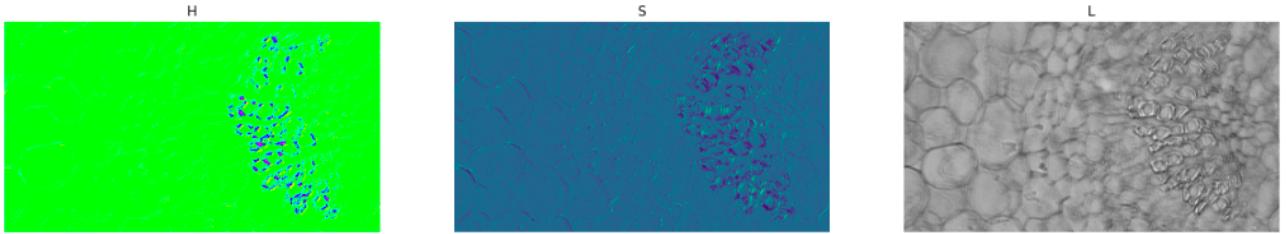
Physiquement ces paramètres sont interprétables.  $S_0$  caractérise l'intensité lumineuse standard, que l'on voit à l'oeil nu.  $S_1$ ,  $S_2$  mettent en valeur la polarisation linéaire de lumière, i.e, l'angle et le degré de polarisation.

### 3.3.3 Représentation en HSL

Une autre façon de représenter l'information polarimétrique est de la décomposer suivant les 3 canaux HSL (Hue Saturation Lightness) [6] tel que :

$$H = \tan^{-1}\left(\frac{S_1}{S_2}\right) \quad S = \sqrt{\left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2 + \left(\frac{S_1}{S_0}\right)^2} \quad L = \frac{S_0}{255}$$

FIGURE 20 – Conversion des paramètres de Stokes en paramètres HSV



$L$  et  $S_0$  sont égaux à un facteur près, ils représentent donc physiquement la même chose.  $S$  met en valeur le degrés de polarisation de la lumière et  $H$  son angle de polarisation. En général, cette représentation permet de visualiser la polarisation sous forme d'image en couleur.

## 3.4 Formalisme pour la segmentation

À présent, nous avons nos données. Il est nécessaire donc d'ajouter à notre modèle le terme d'attache aux données qui va pondérer le choix d'une classe pour un pixel donné.

Cette pondération se traduit par le choix de la loi  $P(Y = y|X = x)$ . En première approche, on suppose pour chaque pixel que :

$$y_s = AS_s + \epsilon, \quad \epsilon \sim N(0, \Sigma)$$

$y_s \in R^4$  : vecteur de mesure,  $S_s \in R^3$  : Vecteur de Stokes,  $\epsilon$  : bruit.

Nous allons supposer que le bruit est lié à la mesure, ainsi il est décorrélé et uniforme d'où :

$$\Sigma = \sigma_{x_s}^2 I_4$$

On obtient alors, pour chaque classe  $i$  les paramètres de classes suivants :  $S_i = (S_{i,0}, S_{i,1}, S_{i,2})^T$  et  $\sigma_i$  qui sont respectivement les centroïdes de la classe  $i$  et écart-type.

Le modèle de vraisemblance choisi dans ce cas de figure prend la forme suivante :

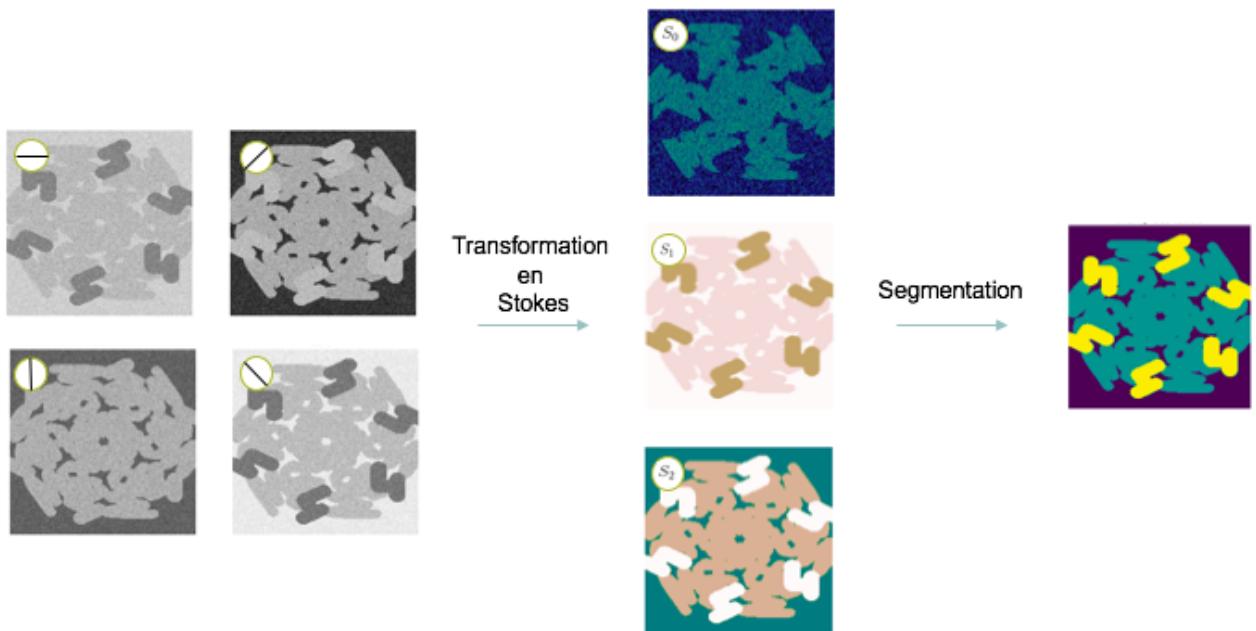
$$P(Y_s = y_s | X_s = i) \propto \exp\left(\frac{(y_s - AS_i)^H(y_s - AS_i)}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right)$$

Avec  $u^H$  le conjugué hermitien de  $u$ .

### 3.5 Simulations d'une segmentation sur des données controlées

Comme précédemment, nous avons simulé des données synthétiques dont nous connaissons les paramètres de classes et cherchons à remonter à la carte des étiquettes.

FIGURE 21 – Image bruitée générée, convertit en paramètres de Stokes puis segmentée



Les conclusions quant aux variations des hyperparamètres  $\beta$ ,  $T^{(0)}$  et  $a$  de notre algorithme sont les mêmes que celles de la section 2.4. Le choix d'une température initiale grande et d'un coefficient de décroissance lent offre une meilleure fiabilité des résultats au détriment du temps de calcul. Le paramètre de régularisation joue sur la surface des zones segmentées.

### 3.6 Conclusion

De la même façon que dans la section précédente, lorsque le modèle est parfaitement connu, on réussit parfaitement à retranscrire la carte des étiquettes que l'on souhaite. Cependant, en pratique, on ignore tout : le nombre de classe, les paramètres de classes ainsi que les hyperparamètres de l'algorithme.

Dans le chapitre suivant nous allons proposer différentes méthodes pour estimer ces inconnues et travailler avec des données réelles.

Par ailleurs, la représentation qui a présenté les meilleures performances est celle donnée par les paramètres de Stokes. Elle est notamment celle qui permet la retranscription la plus fidèle de la carte des étiquettes lorsqu'on impose un bruit en entrée de plus en plus grand.

## 4 Estimation des paramètres de classe

Les paramètres de l'algorithme  $\beta$ ,  $T^{(0)}$  et  $a$  seront dans cette section choisis de façon manuelle. Le nombre de classes et les paramètres de chaque classe  $(\mu_i, \sigma_i)$  seront, eux, estimés dans cette section.

### 4.1 Méthode classique de clustering

#### 4.1.1 Algorithme K-means

Une première méthode pour estimer les paramètres est de faire du clustering. Nous utiliserons l'algorithme K-means sur une base de donnée que nous allons montrer comment construire ci-après.

En entrée, nous disposons des mesures brutes (images polarisées à 0,45,90 et 135°) à partir desquelles nous allons retranscrire les paramètres de Stokes pour chaque site. Enfin nous allons construire une DataFrame où chaque ligne correspond à un site et où en colonnes se trouve les paramètres de Stokes respectifs à la ligne :

FIGURE 22 – Forme de la DataFrame pour l'algorithme K-means

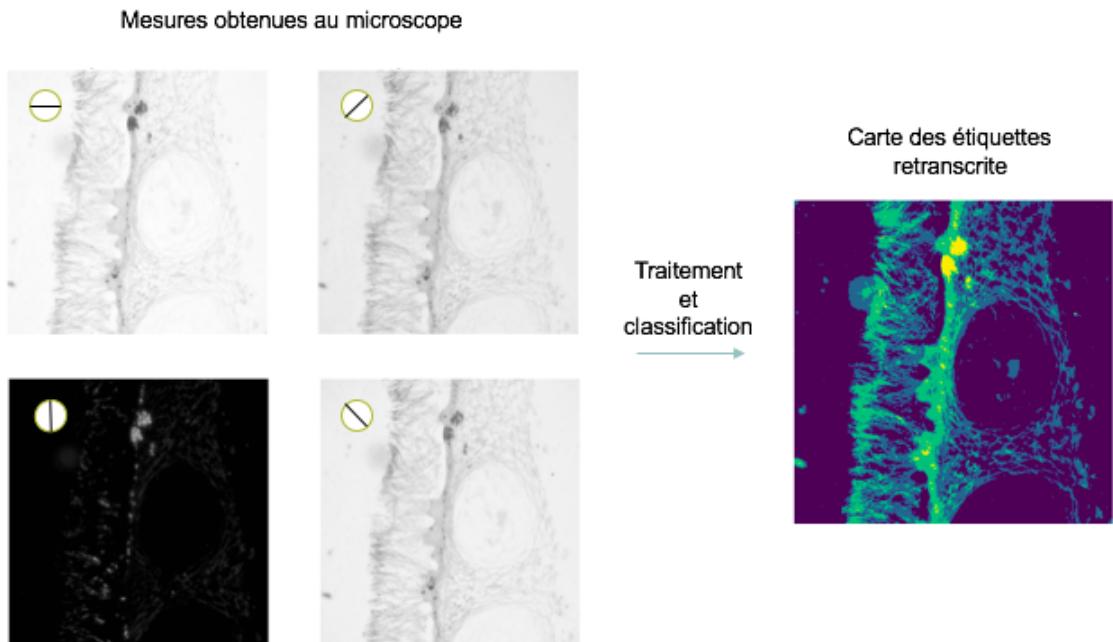
	s_0	s_1	s_2
0	241.5	190.0	-3.0
1	238.5	192.0	-5.0
2	241.5	194.0	-3.0
3	241.0	195.0	-3.0
4	239.5	192.0	-5.0

Dans un premier temps, nous allons déterminer le nombre de classes nécessaire  $e$ . Pour ce faire, on utilise soit une méthode comme la méthode du coude soit on l'estime manuellement lorsqu'on connaît le système étudié.

Lorsque  $e$  est fixé on applique l'algorithme K-means sur nos données, qui va à chaque ligne lui associer une étiquette. On reconstruit ensuite une image connaissant le rang de chaque site dans cette base de données pour former une carte première carte des étiquettes (Figure 23) qui va nous permettre de calculer les paramètres de classes  $\mu_i, \sigma_i$  pour chaque classe  $i$ , respectivement en calculant les moyennes et les écarts-types.

À la suite de cette première initialisation par K-means on applique notre algorithme de segmentation complet, pour lisser certaines zones et attribuer à certains points isolés une classe plus appropriée.

FIGURE 23 – Classification par K-means d'un jeu d'images obtenu au microscope ( $e=4$ )

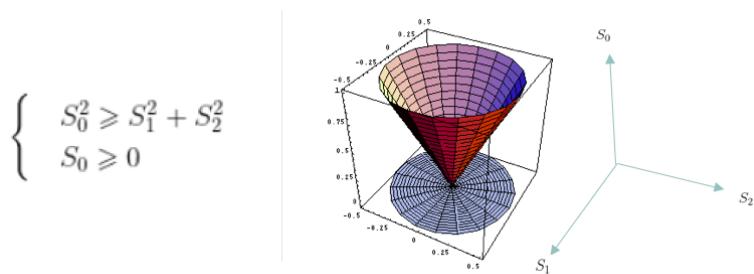


#### 4.1.2 Espace des paramètres de Stokes

L'algorithme K-means naïf utilise une distance Euclidienne pour le calcul des moyennes et donc pour former ses clusters.

En réalité la physique montre que les paramètres de Stokes doivent respecter certaines conditions qui font que l'espace dans lequel ils vivent n'est pas euclidien comme l'illustre la Figure 24 suivante :

FIGURE 24 – Conditions que doivent satisfaire les paramètres de Stokes entre eux



Certaines centroïdes peuvent alors ne pas respecter les conditions citées ci-haut et ainsi ne pas être fidèle à la physique établie. Ce qui pourrait produire des résultats dégénérés.

## 4.2 Méthode bayésienne

### 4.2.1 Modèle et algorithme

À présent, on cherche à estimer  $\mu_i = (\mu_{i,0}, \mu_{i,1}, \dots, \mu_{i,k})^T$ , les  $k$  paramètres de classes pour la classe  $i$ . Dans notre étude  $k = 3$  et  $\mu_i$  correspond aux 3 paramètres de Stokes caractérisant une classe. On suppose connaître  $E$  et les  $\sigma_i$  dans un premier temps. On pose  $e = \#E$  et  $\mu = (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_i, \dots, \mu_e)$ .

On cherche :  $(\hat{x}, \hat{\mu}) = \underset{x, \mu}{\operatorname{argmax}} p(x, \mu | y, \sigma)$

Avec :  $p(x, \mu | y, \sigma) = p(x | \mu, y, \sigma)p(\mu) \propto \exp -U(x, \mu)$

En utilisant toujours un a priori gaussien sur les données et un modèle de Potts pour la régularisation on a :

$$U(x, \mu) = \sum_{i \in E} \sum_{s \in S} 1_{\{x_s=i\}} \frac{(y_s - \mu_i)^H (y_s - \mu_i)}{2\sigma^2} + \beta \sum_{s \in S} \sum_{t \in V_s} 1_{\{x_s=x_t\}} + \gamma U(\mu)$$

Ici le terme  $U(\mu)$  va être choisi de tel sorte à favoriser certains  $\mu_i$  ( $i \in E$ ). Par exemple :

$$U(\mu) = \sum_{i \in E} 1_{\{\mu_i \in D_\mu\}}$$

En particulier, on souhaiterait que :  $D_\mu = \{u = (u_0, u_1, u_2)^T \in R^3, u_0 > 0, u_0^2 \geq u_1^2 + u_2^2\}$   
Nous verrons par la suite que ce terme sera constant car nous ferons en sorte que les  $\mu_i$  seront toujours dans l'espace approprié.

Ainsi l'algorithme que nous proposons pour déterminer les paramètres qui maximisent cette probabilité est le suivant :

---

#### Algorithme 4 : Recuit simulé et a priori sur les paramètres

---

##### Initialisation

- Choix température initiale  $T^{(0)}$  et coefficient de refroidissement géométrique  $a$
- Choix de configurations initiales  $x^{(0)}, \mu^{(0)}$  quelconques

##### Début

- À l'étape n :
    - Échantillonner  $x^{(n)} \sim p(x, \mu = \mu^{(n-1)} | y, \sigma)^{\frac{1}{T^{(n)}}}$  avec l'échantillonneur de Gibbs
    - Échantillonner  $M$  fois  $\mu^{(n)} \sim p(x = x^{(n)}, \mu | y, \sigma)^{\frac{1}{T^{(n)}}}$  avec l'échantillonneur de Metropolis-Hastings
    - Diminution lente de la température :  $T^{(n+1)} = aT^{(n)}$
- 

Lors de l'échantillonnage de  $\mu$  nous allons procéder par étape et échantillonner les  $\mu_i$  les uns après les autres. Pour chacun d'entre eux, nous proposerons un prochain candidat selon une gaussienne de moyenne le candidat actuel et d'écart-type  $r$  puis nous vérifions qu'il soit bien contenu dans  $D_\mu$ . Cette étape sera répétée  $M$  fois pour chaque  $\mu_i$ .

L'algorithme suivant explicite l'échantillonnage des paramètres de classes à l'étape  $n$  :

---

**Algorithme 5 : Métropolis-Hastings pour  $\mu^{(n)}$** 


---

- Pour chaque classe  $i \in E$  :

$$\nu_i^{(0)} \leftarrow \tilde{\mu}_i^{(n-1)}$$

- À l'étape  $m$  :

- Tirage d'un candidat  $\nu_i^{(m)} \sim \mathcal{N}(\nu_i^{(m-1)}, rI_{\text{card}(\mu_i^{(n-1)})})$  vérifiant  $\nu_i^{(m)} \in D_\mu$

-  $\alpha = \min(1, (\frac{p(x=x^{(n)}, \nu_i^{(m)})|y, \sigma_i)}{p(x=x^{(n)}, \nu_i^{(m-1)})|y, \sigma_i)})^{\frac{1}{T(n)}}$  et tirage de  $\omega \sim \mathcal{U}(0, 1)$

- Accepter  $\nu_i^{(m)}$  si  $\alpha > \omega$  sinon revenir au début de l'étape

$$\mu_i^{(n)} \leftarrow \nu_i^{(M)}$$


---

#### 4.2.2 Résultats

On applique l'algorithme 4 sur les données synthétiques de la Figure 20, en partant d'un champ  $x^{(0)}$  et de paramètres de classes  $\mu^{(0)}$  totalement aléatoires.

FIGURE 25 – Évolution de la segmentation du champ  $X$  au cours des itérations ( $\beta = 3, r = 10$ )

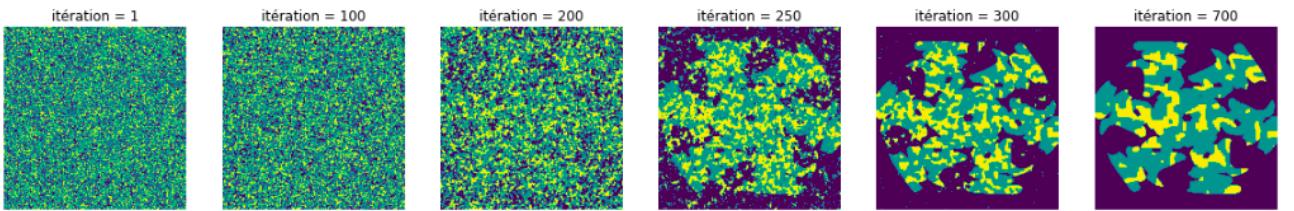
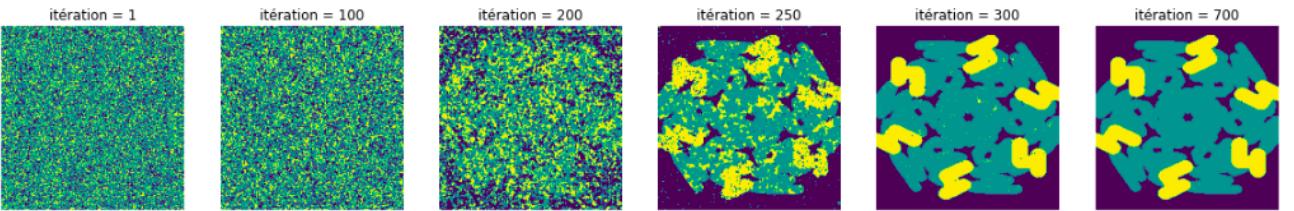
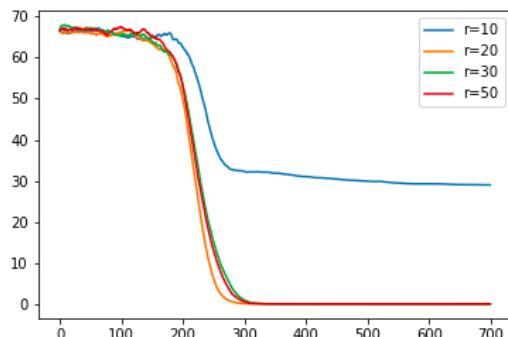


FIGURE 26 – Évolution de la segmentation du champ  $X$  au cours des itérations ( $\beta = 3, r = 50$ )



Cette simulation a été réalisée avec plusieurs combinaisons d'hyperparamètres  $\beta, r, T^{(0)}, a$  différentes. Les conclusions quant aux variations de  $\beta, T^{(0)}, a$  sont les mêmes que celles présentées dans les sections précédentes. Comme on peut le voir sur ces figures : un choix de  $r$  trop petit pourrait coincer les paramètres de classe dans un minimum local. En fixant tous les paramètres et en faisant varier la variance  $r$  de la loi de proposition, on constate les résultats suivants :

FIGURE 27 –  $s_3$  au cours des étapes de refroidissement en pourcentage



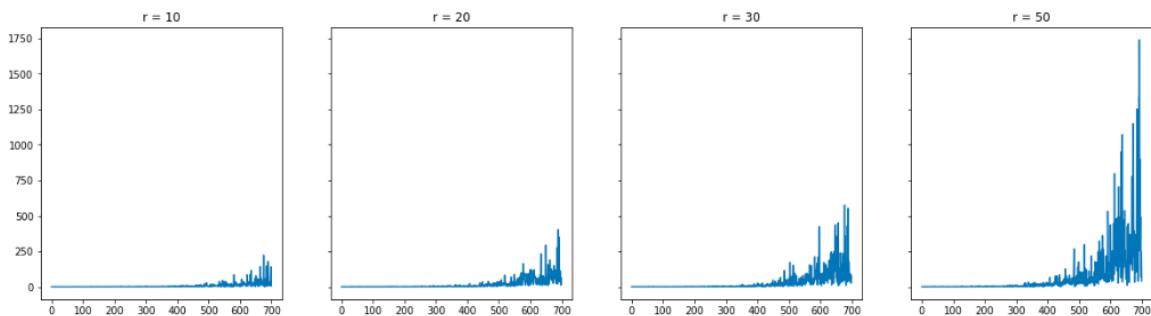
Pour rappel  $s_3$  est la statistique qui compte le nombre de sites aux descriptifs mal attribués pour une réalisation de  $X$  donnée.

En regardant seulement l'erreur entre la réalisation de  $X$  à l'itération  $n$  on pourrait penser qu'à partir d'un  $r_0$  assez grand, l'algorithme converge vers la solution idéale et ce à la même vitesse pour n'importe quel  $r \geq r_0$ .

La figure 27 montre dans cet exemple qu'à partir de  $n \geq 350$  on obtient la réalisation  $x$  idéale quelque soit  $r \geq 20$  et donc on pourrait penser qu'il se passe la même chose.

Cette théorie est rejetée avec la présentation du nombre de paramètres de classes rejetés au cours des itérations lors de leur échantillonnage avec l'algorithme de Métropolis-Hastings.

FIGURE 28 – Évolution du nombre de rejet des paramètres de classe au cours des itérations



Il faut donc veiller à bien choisir  $r$  pour trouver un compromis entre une optimisation du temps de calcul et une convergence vers un minimum global.

### 4.3 Conclusion

Conformément à la théorie, la méthode bayésienne permet une convergence vers le couple  $(\hat{x}, \hat{\mu})$  qui maximise la probabilité a posteriori. Nous avons également pu ajouter une contrainte sur le tirage des paramètres de classes pour que ceux-ci respectent la géométrie de l'espace des paramètres de Stokes.

La remarque faite sur les hyperparamètres de l'algorithme reste cohérente avec ce qu'on a vu plus tôt. On y ajoute une précision quant au choix du paramètre  $r$  plus celui-ci est grand plus on peut tirer des points éloignés et ainsi ne pas exclure la probabilité d'être dans un minimum local. En revanche, on prend plus de temps à converger car on rejette plus de points.

Ici on suppose connaitre les paramètres  $\sigma_i$ . C'est également l'hypothèse que nous ferons lors des essais avec des données réelles, en supposant que ces derniers sont liés à un bruit de mesure. Néanmoins, on pourrait de la même façon que pour les  $\mu_i$  les estimer.

## 5 Étude de données réelles

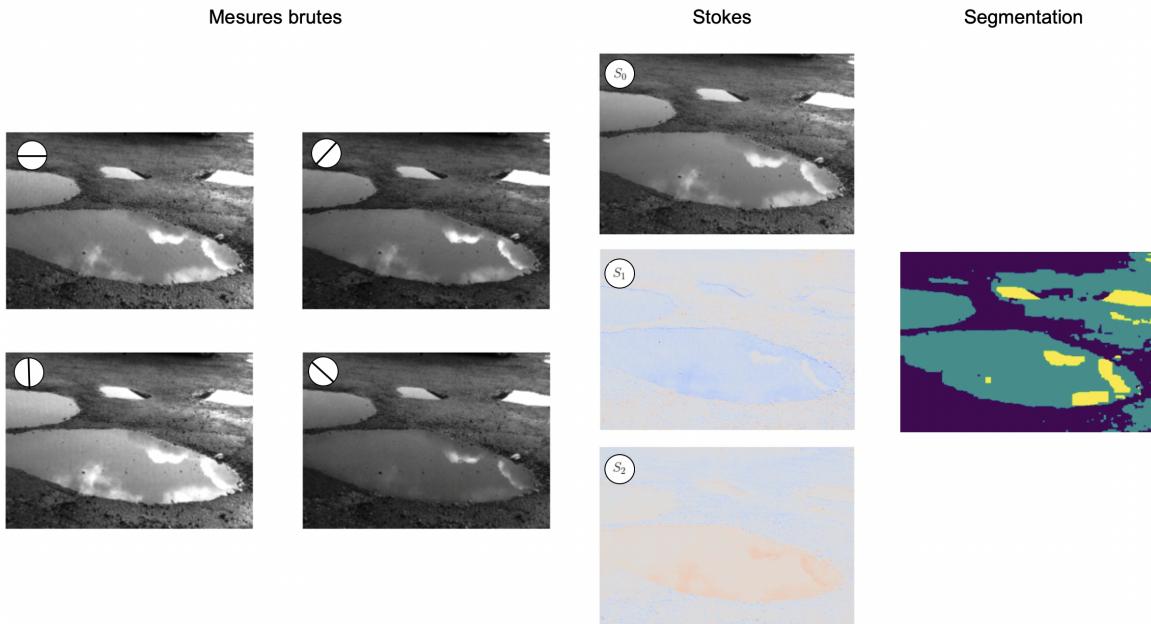
### 5.1 Images polarimétriques en extérieur

Les premières images polarimétriques auxquelles nous avons appliqué notre segmenteur sont des images en extérieur, issues d'une base de données [6] mise à disposition par des chercheurs de *ViBot*. Utilisant une caméra permettant d'avoir instantanément plusieurs images avec un angle de polariseur différent<sup>6</sup> pour chacune d'entre elles, cette base de données propose des photos de murs, fenêtres et de flaques d'eau.

Dans la figure suivante, nous présentons l'application de notre segmenteur sur un exemple de flaques d'eau. La représentation en Stokes permet d'avoir une interprétation de l'information polarisée. L'image  $S_0$  permet une segmentation sur l'intensité en niveau de gris standard.  $S_1$  caractérise les zones horizontalement polarisées ; plus une zone est rouge plus elle est polarisée horizontalement. Même principe pour  $S_2$  qui caractérise la polarisation à 45°.

En supposant qu'il y a 3 classes dans cette image ( $e = 3$ ) on obtient la carte des étiquettes à droite sur cette même figure. Notre algorithme a réussi à distinguer majoritairement, les zones d'eau des zones de sol et de nuages. Il n'y a pas de points isolés contrairement à ce qu'on pourrait obtenir en utilisant la segmentation par K-means. Le résultat est satisfaisant néanmoins on remarque que l'algorithme a du mal à distinguer l'eau du sol lorsque le sol est mouillé.

FIGURE 29 – Segmentation d'images polarimétriques d'une flaques d'eau ( $e=3$ )

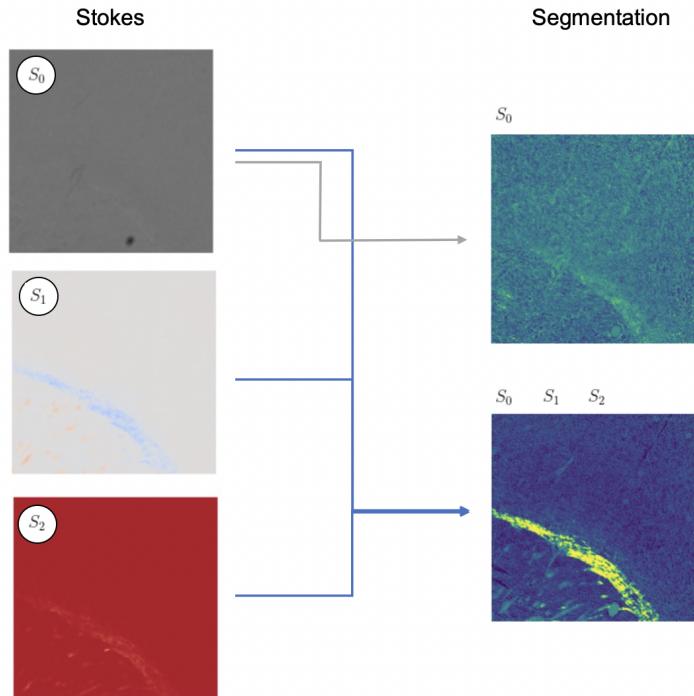


6. 4 angles différents au total : 0°, 45°, 90° et 135°.

## 5.2 Images polarimétriques appliquées à la biologie

Une deuxième base de données [7], présente cette fois-ci des mesures à l'échelle mésoscopique. Nous avons choisi de présenter l'analyse d'une coupe de cerveau de souris. Cet exemple est intéressant car il souligne l'intérêt de l'information polarimétrique. En effet sur la figure suivante, on voit qu'en intensité lumineuse standard ( $S_0$ ) : l'information ne permet pas de segmenter l'image. En revanche, ce qu'apporte la représentation en Stokes est très signifiante et permet la distinction de différentes parties.

FIGURE 30 – Segmentation d'images polarimétriques d'une coupe de cerveau de souris (e=3)



Grâce à cette segmentation on peut distinguer [7] :

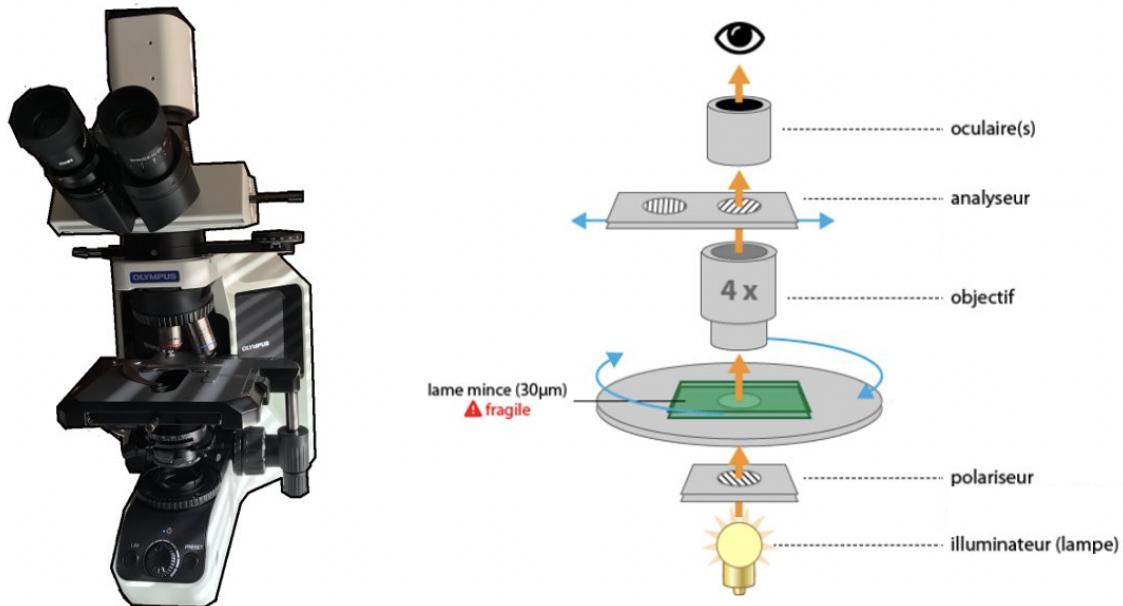
- le corpus calleux (*membrane en jaune*)
- le cortex (*zone bleue sans les points verts à l'intérieur*)
- le caudoputamen (*zone bleue avec les points verts à l'intérieur*)

Les informations intéressantes pour la segmentation sont, ici, invisible à l'oeil nu.

### 5.3 Images prises au microscope polarisant

Ce stage a également permis la manipulation d'un microscope polarisant pour obtenir des données. Nous avons observé toutes sortes d'échantillons, tels que des cellules de végétaux, des ailes d'insectes, des bactéries ou des chromosomes. Pour cela nous avons utilisé le microscope *BX – 53* de la marque *OLYMPUS* qui est dans la configuration suivante :

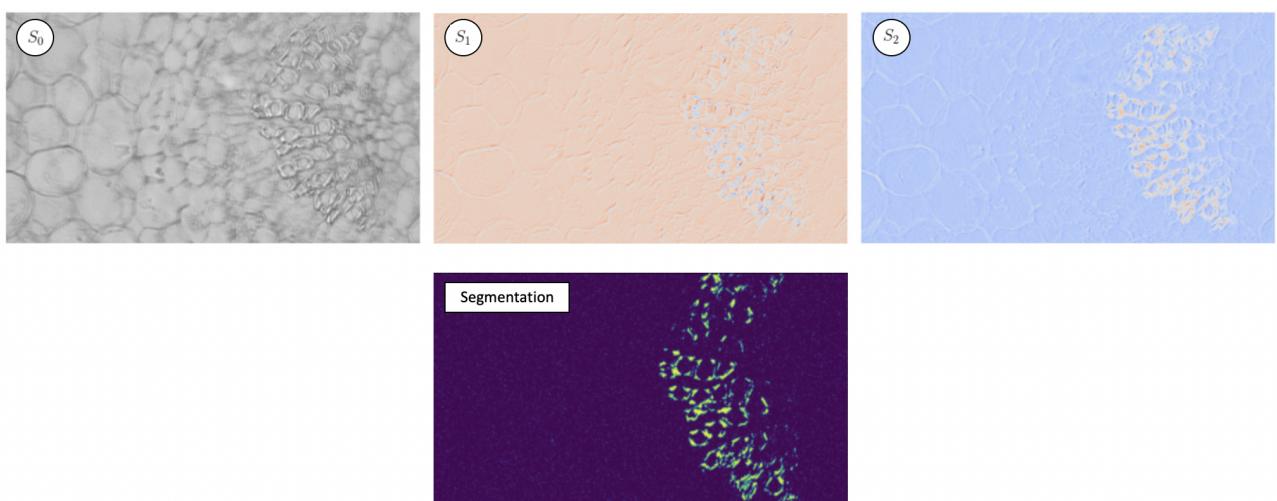
FIGURE 31 – Microscope polarisant OLYMPUS et schéma de mesure



Une caméra de la même marque a été ajoutée au-dessus de ce microscope et à l'aide du logiciel associé, la récupération des images fut très simple.

Cette partie du stage fut un moment riche en échanges avec l'équipe des biologistes pour la préparation des échantillons et l'interprétation de ces derniers. La figure suivante en est un premier exemple :

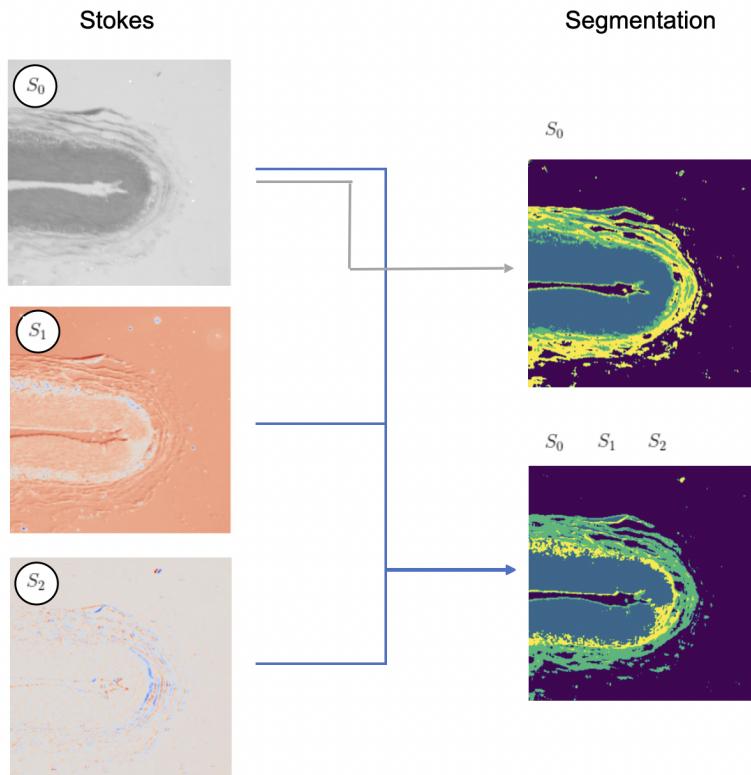
FIGURE 32 – Segmentation d'un échantillon d'une feuille de jasmin d'hiver ( $e=2$ )



On voit dans l'observation de cette feuille de jasmin d'hiver que l'information polarimétrique permet de mieux distinguer le bulbe du reste de la feuille. Cet exemple montre aussi l'importance du bon choix du paramètre de régularisation  $\beta$ . Si on régularise trop, on risque de trop lisser et ainsi de perdre l'information contenue par les fines membranes du bulbe (en jaune).

Un palliatif pour résoudre ce problème serait d'introduire un terme qui prend en compte les contours.

FIGURE 33 – Segmentation d'un échantillon d'une coupe d'artère ( $e=4$ )



Dans ce deuxième exemple, on voit de nouveau l'intérêt de l'information polarimétrique pour la segmentation en comparant les résultats obtenus en faisant la segmentation sur  $S_0$  puis simultanément sur tous les paramètres de Stokes. Encore une fois, l'information sur la polarisation de la lumière permet une meilleure distinction des zones que l'information apportée par  $S_0$  seule.

On observe sur la carte des étiquettes (*en bas à droite*) : l'adventice (vert), la média (jaune), l'intima (bleu), le fond lumineux (violet).

## 5.4 Conclusion

L'algorithme que nous avons conçu semble s'adapter à tout type d'observation tant que les paramètres de Stokes peuvent être représentés. Le nombre de classes ainsi que le paramètre de régularisation sont dans ces cas choisis à l'aide d'une expertise extérieure. En effet, ceux-là dépendent de l'utilisation et de la précision que l'on souhaite.

Un des objectifs de ce stage a été de s'intéresser aux caractéristiques polarimétriques dans l'observation de cellules sénescentes.

Une accumulation de cellules sénescentes dans le corps humain peut provoquer des cancers, des maladies neurodégénératives, etc. Il est nécessaire de les identifier. Pour ce faire, les biologistes utilisent un procédé manuel, onéreux en temps et qui peut être imprécis. Pour répondre à ce besoin, nous avons pensé à faire de la segmentation d'image puis un traitement (compter, mesurer des diamètres, etc.). Ce qui a donné l'idée de l'observation avec un microscope polarisant est le fait que lors de la préparation des échantillons de ces cellules, le biologiste y injecte un marquage<sup>7</sup>, ce qui, au contact de ces dernières, provoquerait une éventuelle cristallisation. Les cristaux, de par les propriétés de birefringence qu'ils présentent, sont intéressants à observer en lumière polarisée.

Nous avons pu avoir un échantillon mais malheureusement rien d'intéressant au niveau polarimétrique ne s'est dégagé. Une explication possible réside dans un marquage insuffisamment prononcé des cellules sénescentes. Entre l'instant du marquage et l'expérience, les cellules ont été conservées au froid et auraient pu être gelées. Une autre piste serait de refaire l'expérience en observant le paramètre  $S_3$  qui caractérise la polarisation circulaire. Enfin, il n'est pas non plus à exclure que la réaction ne provoque pas réellement de cristallisation.

---

7. Marquage bêta-galactosidase

# 6 Conclusion générale du stage

## 6.1 Bilan

L'algorithme de segmentation développé dans ce stage a été convaincant lors des simulations sur les données synthétiques car en les construisant nous savons exactement ce que l'on chercherait à observer. La satisfaction des résultats avec des données réelles n'est pas absolue mais relative à l'utilisation que l'on souhaite en faire. Pour cette raison, les choix du paramètre de regularisation et du nombre de classes y sont arbitraires.

Les applications peuvent être variées, de la vision par ordinateur en véhicule autonome [6] à l'utilisation pour la biologie. On peut également générer des bases de données d'images polarimétriques avec les cartes des étiquettes associées qui sont très peu présentes sur internet.

## 6.2 Axes d'améliorations et de poursuites

Ce stage aura également permis de dégager quelques pistes d'améliorations pour l'algorithme général :

- Le terme d'attache aux données peut prendre en compte les contours des objets.
- Le modèle d'attache aux données choisi ici est gaussien, ce qui de prime abord semble suffisant mais reste assez simple. On peut éventuellement imaginer un bruit autre que gaussien mais suivant une loi plus complexe et adaptée au problème. Bruit de Poisson par exemple.
- L'ouvrage est consacré à l'étude d'images polarimétriques mais en réalité en changeant le terme d'attache aux données on peut généraliser le cas à de la segmentation conjointe d'images.
- La mise à jour des sites se fait à l'aide d'un échantillonneur de Gibbs<sup>8</sup> et bien que le fait de le faire simultanément sur plusieurs sites pour augmenter la rapidité d'exécution, cela reste terriblement long. Une solution serait d'utiliser l'algorithme de Swendsen-Wang[1] à la place.
- Selon l'usage, l'estimation du nombre de classes ainsi que le paramètre de régularisation pourraient être estimées de manière automatique.

## 6.3 Expérience personnelle

Ce que j'ai fortement apprécié dans ce stage, c'est son caractère pluridisciplinaire. En effet, j'ai eu la joie d'aborder le sujet sous toutes ses facettes. Commençant par la compréhension des phénomènes physiques puis passant par leur modélisation avec les bons outils mathématiques et le développement d'algorithmes pour les traiter pour enfin les programmer et les appliquer à des cas concrets. Il est également très plaisant de pouvoir manipuler des échantillons au microscope et de produire ses propres données. L'avantage d'être ingénieur généraliste, comme souhaite former notre école, a pris tout son sens ici et m'a permis au cours de ce stage d'avoir un aperçu de ce que pourrait être l'innovation en croisant les disciplines.

Sur le plan humain, j'ai eu la chance d'être au sein d'une équipe bienveillante, talentueuse et inspirante avec laquelle j'ai pu énormément apprendre sur le domaine de la recherche.

---

8. Voir Algorithme 1

## Références

- [1] Song-Chun Zhu Adrian Barbu. Generalizing swendsen-wang to sampling arbitrary posterior probabilities. *IEEE TRANSACTIONS ON PATTERN ANALYSIS AND MACHINE INTELLIGENCE, VOL. 27, NO. 8*, 2005.
- [2] Robert Smyth Daniel Barrett Beth Schaefer, Edward Collett and Beth Fraher. Measuring the stokes polarization parameters. *American journal of Physics*, 2007.
- [3] Marc Sigelle et Florence Tupin. Champs de markov en traitement d image. *Telecom Paris*, 1999.
- [4] Ernst Ising. Beitrag zur theorie des ferromagnetisms. *Zeitschrift fur Physik*, 1925.
- [5] Fraval Julie. Modèle d'ising. *CEREMADE Dauphine*, 2018.
- [6] Yifei Zhang Ralph Seulin Nathan Crombez Marc Blanchon, Olivier Morel and Desire Sibide. Outdoor scenes pixel-wise semantic segmentation using polarimetry and fully convolutional network. *HAL*, 2019.
- [7] J. Folkesson et al. S.-M. Guo, L.-H. Yeh. Revealing architectural order with quantitative label-free imaging and deep learning. *eLife*, vol. 9, e55502, 2020.
- [8] George Gabriel Stokes. Composition and resolution of streams of polarized light from multiple sources. *Mathematical and Physical Papers*, 1901.
- [9] V. V. Tuchin. Polarized light interaction with tissues. *Journal of biomedical optics*, vol. 21, no. 7, 2016.
- [10] Y. Velenik. Le modèle d'ising. *Unige*, 2009.