

Modèles mathématiques appliqués à la biologie

Wassim Taher

Mars 2025

Table des matières

1	Conditions Limites	3
2	Formulations	3
2.1	Formulations forte	3
2.2	Formulation Variationnelle mixte	4
3	Formulation discrétisée en espace par la méthode des éléments finis	5
4	Stabilisation du schéma	5
5	Stabilité inconditionnel	9
6	Implémentation et résultat	10
7	Formulation semi-discrète	13
8	Implémentation et résultat du schéma explicite Dirichlet	14
9	Implémentation et résultat du schéma explicite Robin	16
10	Précision des schémas	17

Introduction

Nous allons étudier une bifurcation, soit Ω le domaine ainsi que son bord $\Gamma = \Gamma_{in} \cup \Gamma_{out}^1 \cup \Gamma_{out}^2 \cup \Gamma_{wall}$ que nous noterons : $\partial\Omega$

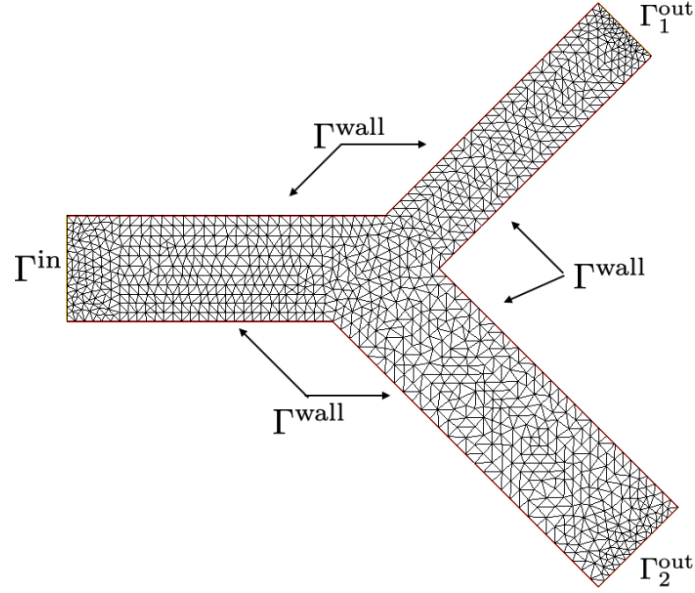


FIGURE 1 – Le domaine Ω représentant la bifurcation.

Nous utiliserons plusieurs constantes :

$$\begin{cases} p^f = 1 \\ \mu = 0.035 \\ \tau = 8 \\ p_d = 8.133322 \end{cases}$$

Nous allons donc étudier l'équation de Navier-Stokes suivante :

$$\begin{cases} \rho^f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) - \operatorname{div} \sigma(u, p) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \operatorname{div} u = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (1)$$

en définissant σ , u et ϵ tel que :

$$\sigma(u, p) = 2\mu \epsilon(u) - pI \quad \epsilon(u) = \frac{1}{2} (\nabla u + (\nabla u)^\top)$$

$$u(x, t = 0) = 0, \quad \forall x \in \Omega$$

Nous avons les conditions aux bords suivants :

$$\begin{cases} u = 0 & \text{sur } \Gamma_{wall} \times (0, T), \\ u = u_{in} & \text{sur } \Gamma_{in} \times (0, T), \\ \sigma(u, p)n - \frac{\rho^f}{2} |u \cdot n|_- u = -p_{out,1}n & \text{sur } \Gamma_1^{out} \times (0, T), \\ \sigma(u, p)n - \frac{\rho^f}{2} |u \cdot n|_- u = -p_{out,2}n & \text{sur } \Gamma_2^{out} \times (0, T) \end{cases} \quad (2)$$

Notons $|x|_- := \min\{0, x\}$. De plus, sur le bord et plus spécifiquement sur Γ^{in} nous écrivons :

$$u_{\text{in}}(x, t) = (\tilde{g}(t)(0.4 - x_2)x_2, 0), \quad x = (x_1, x_2)$$

Avec $\tilde{g} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$. Nous posons $g : [0, 0.8] \rightarrow \mathbb{R}$, ainsi \tilde{g} est l'extension par périodicité de g définie telle que :

$$g(t) = \begin{cases} 1000 \cdot \sin(\frac{\pi t}{0.4}) & \text{si } t \in [0, 0.4], \\ 0 & \text{si } t \in [0.4, 0.8] \end{cases}$$

Pour finir, nous avons donc que la pression est définie tel que ,

$$p_{\text{out},i} = p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_i^{\text{out}}} u \cdot n \quad , R_{d,i} > 0 \quad (3)$$

1 Conditions Limites

Sur Γ_{out} , nous choisissons des conditions de Neumann en intégrant une "recette énergétique" qui permet d'assurer une pression bien définie (contrainte de stress non négative). Nous imposons des conditions de Dirichlet homogènes sur Γ_{wall} , avec $u = 0$. Enfin, Sur Γ_{in} , nous appliquons des conditions de Dirichlet non homogènes, définies par $u = u_{\text{in}}$.

2 Formulations

Dans cette section, nous allons, à l'aide du schéma en temps semi-implicite vu en cours, semi-discrétiser en temps les équations (1) et (3) afin d'obtenir une formulation forte ainsi qu'une formulation variationnelle mixte associée au schéma.

2.1 Formulations forte

Tout d'abord, effectuons une discrétisation en temps. Pour ce faire, nous considérons une partition de l'intervalle temporel $[0, T]$ en sous-intervalles $[t_{n-1}, t_n]$ pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, où les instants discrets sont définis par $t_n = n \cdot \tau$. Le pas de discrétisation temporelle est donné par $\tau = \frac{T}{N}$. Soit $n \in \{1, \dots, N\}$:

$$u^n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad p^n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

avec comme approximation :

$$u(x, t_n) \approx u^n, \quad p(x, t_n) \approx p^n$$

Nous avons aussi l'approximation de la dérivée temporelle suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t_n) \approx \frac{u^n - u^{n-1}}{\tau}$$

Nous obtenons donc la Formulation Forte suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho^f \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u \right) - \text{div}(\sigma(u, p)) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \text{div}(u) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{wall}} \times (0, T), \\ u = u_{\text{in}} & \text{sur } \Gamma^{\text{in}} \times (0, T), \\ \sigma(u, p)n - \frac{\rho^f}{2} |u \cdot n|_- u = -p_{\text{out},i} n, & \text{sur } \Gamma_{\text{out}}^i \times (0, T), \quad i \in \{1, 2\}, \\ u(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ p_{\text{out},i} = p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{\text{out}}^i} u \cdot n & \text{sur } (0, T), \end{array} \right. \quad (4)$$

Ce qui nous permet d'avoir la Formulation Forte discrétiser en temps suivante :

$$(FF) \left\{ \begin{array}{ll} \rho^f \left(\frac{u^n - u^{n-1}}{\tau} \right) + \rho^f u^{n-1} \cdot \nabla u^n - \operatorname{div}(\sigma(u^n, p^n)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(u^n) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma^{\text{wall}}, \\ u^n = u_{\text{in}} & \text{sur } \Gamma^{\text{in}}, \\ \sigma(u^n, p^n)n - \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n|_- u^n = -p_{\text{out},i} n & \text{sur } \Gamma_{\text{out}}^i, \\ p_{\text{out},i} = p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{\text{out}}^i} u^{n-1} \cdot n & i \in \{1, 2\}, \end{array} \right. \quad (5)$$

2.2 Formulation Variationnelle mixte

Soit, $v \in X$ et $q \in M$ tel que :

$$X = \{s \in H^1(\Omega)^2, \quad s = 0 \quad \text{sur } \Gamma_{\text{wall}}, \quad s = u_{\text{in}} \text{ sur } \Gamma_{\text{in}}\} \quad \text{et} \quad M = L_0^2(\Omega)$$

En multipliant la 1er condition de (5) à v et en intégrant sur Ω :

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^f u^n}{\tau} \cdot v - \int_{\Omega} \frac{\rho^f u^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_{\Omega} \rho^f (u^{n-1} \cdot \nabla u^n) \cdot v - \underbrace{\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u^n, p^n)) \cdot v}_R = 0.$$

Concentrons-nous dorénavant sur R , par Green, nous avons :

$$- \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u^n, p^n) \cdot v = \int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla v - \int_{\partial\Omega} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot v$$

En développant sur chaque bord le dernier terme,

$$- \int_{\partial\Omega} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot v = - \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{in}}} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot v}_{v=u_{\text{in}}} - \underbrace{\int_{\Gamma_{\text{wall}}} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot v}_{v=0} - \int_{\Gamma_{\text{out}}^1} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot v - \int_{\Gamma_{\text{out}}^2} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot v$$

Concernant les intégrales sur Γ_{out}^i , nous avons en utilisant (2) :

$$\begin{aligned} - \int_{\Gamma_{\text{out}}^1} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot v &= \int_{\Gamma_{\text{out}}^1} \left(p_{\text{out}}^1 n - \frac{\rho^f}{2} |u^n n|_- \cdot u^n \right) v \\ - \int_{\Gamma_{\text{out}}^2} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot v &= \int_{\Gamma_{\text{out}}^2} \left(p_{\text{out}}^2 n - \frac{\rho^f}{2} |u^n n|_- \cdot u^n \right) v \end{aligned}$$

D'ailleurs, pour $\operatorname{div}(u^n) = 0$ de la (FF), en multipliant par q et en intégrant par Ω , nous avons :

$$\int_{\Omega} q \cdot \operatorname{div}(u^n) = 0$$

Ainsi nous avons la Formulation Variationnel mixte suivante :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\rho^f u^n}{\tau} \cdot v - \int_{\Omega} \frac{\rho^f u^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_{\Omega} \rho^f (u^{n-1} \cdot \nabla u^n) \cdot v + \int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla v - \int_{\Gamma_{\text{in}}} n^T \sigma(u^n, p^n) \cdot u_{\text{in}} \\ + \int_{\Gamma_{\text{out}}^1} \left(p_{\text{out}}^1 n - \frac{\rho^f}{2} |u^n n|_- \cdot u^n \right) v + \int_{\Gamma_{\text{out}}^2} \left(p_{\text{out}}^2 n - \frac{\rho^f}{2} |u^n n|_- \cdot u^n \right) v + \int_{\Omega} q \cdot \operatorname{div}(u^n) = 0. \end{aligned}$$

3 Formulation discrétisée en espace par la méthode des éléments finis

Soit $X_h \subset X$ et $M_h \subset M$ tel que $\dim(M_h) < +\infty$, $\dim(X_h) < +\infty$. L'objectif est d'obtenir une approximation des champs de vitesse $u_h^n : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ et de pression $p_h^n : \Omega \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$. La formulation variationnelle discrète est donnée par, soit $\forall (v, q) \in X_h \times M_h$:

$$(FD) \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \frac{\rho^f u_h^n}{\tau} \cdot v - \int_{\Omega} \frac{\rho^f u_h^{n-1}}{\tau} \cdot v + \int_{\Omega} \rho^f (u_h^{n-1} \cdot \nabla u_h^n) \cdot v \\ + \int_{\Omega} \sigma(u_h^n, p_h^n) : \nabla v - \int_{\Gamma_{in}} n^T \sigma(u_h^n, p_h^n) \cdot u_{in} \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^{n-1} \cdot n \right) n - \frac{\rho^f}{2} |u_h^{n-1} \cdot n|_- u_h^n \right) \cdot v = 0. \\ \int_{\Omega} \operatorname{div}(u_h^n) q = 0 \end{array} \right.$$

Le choix des espaces d'éléments finis est crucial pour assurer l'existence et l'unicité de la solution. Afin d'obtenir un problème bien posé, il est nécessaire d'utiliser une paire d'espaces d'éléments finis satisfaisant la condition d'inf-sup de Ladyzhenskaya-Babuška-Brezzi (LBB).

L'approximation $\mathbb{P}_2/\mathbb{P}_1$, où la vitesse u_h est discrétisée avec des éléments finis de Lagrange quadratiques (\mathbb{P}_2), et la pression p_h avec des éléments linéaires (\mathbb{P}_1). Cette combinaison est stable sans nécessiter de stabilisation supplémentaire.

4 Stabilisation du schéma

Rappelons schéma sous les conditions aux limites suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\rho^f}{\tau} (u^n - u^{n-1}) + \rho^f u^{n-1} \nabla u^n - \operatorname{div}(\sigma(u^n, p^n)) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \operatorname{div}(u^n) = 0 & \text{sur } \Omega, \\ u^n = 0 & \text{sur } \Gamma_{wall}, \\ u^n = u_{in} & \text{sur } \Gamma_{in}, \\ \sigma(u^n, p^n) n - \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n|_- u^n = -p_{out,i}^n & \text{sur } \Gamma_{out}, \\ p_{out,i}^n = p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{out}^i} u^{n-1} \cdot n. & \end{array} \right. \quad (6)$$

Nous supposons dans cette question que $u_{in} = 0$ sur Γ_{in} . Nous multiplions par u^n la première équation de (6) et nous intégrons sur Ω , soit $n \geq 1$:

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^f}{\tau} (u^n - u^{n-1}) u^n + \int_{\Omega} \rho^f u^{n-1} \nabla u^n \cdot u^n - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u^n, p^n)) u^n = 0.$$

Par Green :

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^f}{\tau} (u^n - u^{n-1}) u^n + \int_{\Omega} \rho^f u^{n-1} \nabla u^n \cdot u^n + \int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla u^n + \int_{\partial\Omega} -\sigma(u^n, p^n) \cdot n \cdot u^n = 0$$

En effectuant une condition limite sur Γ_{out} ,

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^f}{\tau} (u^n - u^{n-1}) u^n + \int_{\Omega} \rho^f u^{n-1} \nabla u^n \cdot u^n + \int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla u^n + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} \left(p_{out}^i - \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n|_- u^n \right) \cdot u^n = 0$$

En divisant l'intégral par p_{out}^i ,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\rho^f}{\tau} (u^n - u^{n-1}) u^n + \int_{\Omega} \rho^f u^{n-1} \nabla u^n \cdot u^n + \int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla u^n \\ + \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{out}^i} u^{n-1} \cdot n \right) \cdot n - \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n|_- u^n \right) u^n = 0. \end{aligned}$$

Décomposons cette équation en quatre termes :

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_{\Omega} \frac{\rho^f}{\tau} (u^n - u^{n-1}) u^n, \\
T_2 &= \int_{\Omega} \rho^f u^{n-1} \nabla u^n \cdot u^n, \\
T_3 &= \int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla u^n, \\
T_4 &= \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{out}^i} u^{n-1} n \right) \cdot n - \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n| u^n \right) u^n
\end{aligned}$$

Développement des termes

T₁ :

Commençons par T_1 , nous appliquons l'identité remarquable $(a - b)a = \frac{1}{2}(a^2 - b^2 + (a - b)^2)$:

$$\frac{\rho^f}{2\tau} (\|u^n\|_{L_{\Omega}^2}^2 - \|u^{n-1}\|_{L_{\Omega}^2}^2 + \|u^n - u^{n-1}\|_{L_{\Omega}^2}^2) = \int_{\Omega} \frac{\rho^f}{\tau} (u^n - u^{n-1}) u^n$$

T₂ :

Concernant T_2 , nous utilisons également que $\nabla u^n \cdot u^n = \frac{1}{2} \nabla |u^n|^2$:

$$\int_{\Omega} \rho^f u^{n-1} \nabla u^n \cdot u^n = \int_{\Omega} \frac{\rho^f}{2} u^{n-1} \nabla |u^n|^2 = \sum_{i=1}^2 \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_{out}^i} u^{n-1} \cdot n \cdot |u^n|^2$$

T₃ :

Suite à cela, étudions T_3

$$\int_{\Omega} \sigma(u^n, p^n) : \nabla u^n = \int_{\Omega} (2\mu \varepsilon(u^n) - p^n I) : \nabla u^n.$$

En séparant les termes :

$$= 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u^n) : \nabla u^n - \int_{\Omega} p^n \nabla \cdot u^n.$$

Or, nous savons que :

$$\nabla \cdot u^n = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

Donc :

$$T_3 = 2\mu \int_{\Omega} \varepsilon(u^n) : \varepsilon(u^n).$$

Enfin, en exprimant en norme :

$$= 2\mu \|\varepsilon(u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

T₄ :

Pour finir, en développant T_4 ,

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} \left(\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{out}^i} u^{n-1} n \right) n - \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n| u^n \right) u^n.$$

Décomposons l'intégrale :

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} p_d u^n n + \sum_{i=1}^2 R_{d,i} \int_{\Gamma_{out}^i} u^{n-1} n \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right) - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n| u^n \cdot u^n$$

Nous appliquons la première identité de la question 4 :

$$\sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_{out}^i} p_d u^n n + R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} - u^n) n \right) \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right) + R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n \cdot n \right|^2 - \int_{\Gamma_{out}^i} \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n|_- |u^n|^2 \right)$$

Montrons que le terme :

$$\int_{\Gamma_{out}^i} \frac{\rho^f}{2} |u^{n-1} \cdot n|_- |u^n|^2$$

soit nul ou positif.

$$\sum_{i=1}^2 \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} \cdot n - |u^{n-1} \cdot n|_-) |u^n|^2.$$

Si $u^{n-1} \cdot n > 0$, $|u^{n-1} \cdot n|_- = 0$, donc :

$$u^{n-1} \cdot n \cdot |u^n|^2 > 0.$$

Si $u^{n-1} \cdot n < 0$, $|u^{n-1} \cdot n|_- = u^{n-1} \cdot n$, donc :

$$u^{n-1} \cdot n - u^{n-1} \cdot n = 0.$$

Somme des \mathbf{T}_i :

En sommant l'ensemble des termes, nous obtenons,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^f}{2} \left(\|u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u^n - u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} \cdot n - |u^{n-1} \cdot n|_-) \cdot |u^n|^2 \\ & + 2\mu \|\varepsilon(u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^2 \left(\int_{\Gamma_{out}^i} p_d u^n n + R_{d,i} \left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} - u^n) n \right) \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right) + R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right|^2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi donc,

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^f}{2} \left(\|u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2\mu \|\varepsilon(u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = -\frac{\rho^f}{2} \|u^n - u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \sum_{i=1}^2 \frac{\rho^f}{2} \int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} \cdot n - |u^{n-1} \cdot n|_-) |u^n|^2 - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} p_d u^n n \\ & \quad - \underbrace{\sum_{i=1}^2 R_{d,i} \left\{ \left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} - u^n) n \right) \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right) \right\}}_{T_5} - \sum_{i=1}^2 R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right|^2 = 0 \end{aligned}$$

\mathbf{T}_5 :

Concentrons-nous sur T_5 , plus particulièrement sur le i -ème terme. Nous utilisons que $-A \leq |A|$:

$$-R_{d,i} \left\{ \left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} - u^n) n \right) \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right) \right\} \leq \left| R_{d,i} \left\{ \left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} - u^n) n \right) \left(\int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right) \right\} \right|$$

Nous appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur $\left| \int_{\Gamma_{out}^i} \underbrace{(u^{n-1} - u^n)}_a \cdot \underbrace{n}_b \right|$:

$$R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} (u^{n-1} - u^n) n \right| \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right| \leq R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right| \|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Gamma_{out}^i)} \|n\|_{L^2(\Gamma_{out}^i)}$$

D'après l'inégalité de Trace, nous avons,

$$\|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Gamma_{out}^i)} \leq \sqrt{\frac{C_T}{h}} \|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Omega)}.$$

De plus, en usant du fait que la normale est unitaire,

$$\|n\|_{L^2(\Gamma_{out}^i)} = \sqrt{|\Gamma_{out}^i|}$$

Nous obtenons donc,

$$R_{d,i} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right| \sqrt{\frac{C_T}{h}} \|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{|\Gamma_{out}^i|}.$$

Finalement, nous utilisons l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$ avec :

$$a = \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right|, \quad b = \sqrt{\frac{C_T}{h}} \|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{|\Gamma_{out}^i|}.$$

Ainsi, nous obtenons la borne suivante :

$$\leq R_{d,i} \left(\frac{1}{2} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right|^2 + \frac{C_T}{2h} |\Gamma_{out}^i| \|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)$$

Somme des \mathbf{T}_i :

Finalement, nous pouvons rassembler l'ensemble des 5 termes et obtenir :

$$\begin{aligned} & \frac{\rho^f}{2\tau} \left(\|u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2\mu \|\varepsilon(u^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -\frac{\rho^f}{2\tau} \|u^n - u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & - \sum_{i=1}^2 \left\{ \int_{\Gamma_{out}^i} p_d u^n n - R_{d,i} \frac{C_T}{2h} |\Gamma_{out}^i| \|u^{n-1} - u^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \underbrace{\frac{R_{d,i}}{2} \left| \int_{\Gamma_{out}^i} u^n n \right|^2}_{\leq 0} \right\} \end{aligned}$$

Donc,

$$\leq \|u^n - u^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \left(-\frac{\rho^f}{2\tau} + \sum_{i=1}^2 R_{d,i} \frac{C_T}{2h} |\Gamma_{out}^i| \right) - \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} p_d u^n n.$$

Stabilité :

Pour conclure, le schéma est stable si et seulement si :

$$\begin{aligned} & -\frac{\rho^f}{2\tau} + \frac{C_T}{2h} \sum_{i=1}^2 |\Gamma_{out}^i| R_{d,i} \leq 0. \\ & \Leftrightarrow \frac{\rho^f}{\tau} \geq \frac{C_T}{h} \sum_{i=1}^2 R_{d,i} |\Gamma_{out}^i| \\ & \Leftrightarrow \tau \leq \frac{\rho^f h}{C_T \sum_{i=1}^2 R_{d,i} |\Gamma_{out}^i|} \end{aligned}$$

Nous avons ainsi une stabilité sous la condition précédente.

5 Stabilité inconditionnel

Répetons les étapes précédentes, soit l'équation **H(2)** :

$$\int_{\Omega} \frac{\rho^f}{\tau} ((u_h^{n-1} - u_h^n) \cdot u_h^n) + \int_{\Omega} \rho^f u_h^n \nabla u_h^n u_h^n + \int_{\Omega} \sigma(u_h^n, p_h^n) : \nabla u_h^n$$

$$+ \sum_{i=1}^2 \int_{\Gamma_{out}^i} \left[\left(p_d + R_{d,i} \int_{\Gamma_{out}^i} (u_h^{n-1} n) \cdot n \right) \cdot n - \frac{\rho^f}{2\tau} |u_h^{n-1} n|_- \cdot u_h^n + \underbrace{\frac{R_{d,i} |\Gamma_{out}^i|}{2} (u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n \cdot n}_{T_6} \right] u_h^n = 0$$

T₆ :

Etudions donc le terme T_6 :

$$T_6 = \sum_{i=1}^2 \frac{R_{d,i} |\Gamma_{out}^i|}{2} \int_{\Gamma_{out}^i} \underbrace{(u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n}_a \cdot \underbrace{n \cdot u_h^n}_b$$

En utilisant l'identité,

$$ab = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - (a - b)^2),$$

Nous avons ,

$$T_6 = \sum_{i=1}^2 \frac{R_{d,i} |\Gamma_{out}^i|}{4} \left(\underbrace{\|(u_h^n - u_h^{n-1})n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2}_{S1} + \|u_h^n \cdot n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1} n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right)$$

Revenons à **H(2)** :

$$\underbrace{\frac{\rho^f}{2\tau} \left(\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2}_A$$

$$= \frac{\rho^f}{2\tau} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\rho^f}{2} \int_{\partial\Omega} |u_h^n|^2 (u_h^{n-1} \cdot n - |u_h^{n-1} \cdot n|_-)$$

$$- \sum_{i=1}^2 p_d \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n - R_{d,i} \underbrace{\left| \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right|^2}_{S2} - R_{d,i} \underbrace{\left(\int_{\Gamma_{out}^i} (u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n \right)}_B \underbrace{\left(\int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right)}_B - T_6$$

B :

Concertrons-nous sur B :

$$B \leq R_{d,i} \sqrt{2} \underbrace{\left| \int_{\Gamma_{out}^i} (u_h^n n) \right|}_a \underbrace{\|(u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n\|_{L^2(\partial\Omega)} \|1\|_{L^2(\partial\Omega)} \frac{1}{\sqrt{2}}}_b$$

En utilisant $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$,

$$\leq \frac{R_{d,i}}{2} \left(2 \underbrace{\left| \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n \right|^2}_{S2} + \frac{1}{2} \underbrace{\|(u_h^n - u_h^{n-1}) \cdot n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2}_{S1} |\Gamma_{out}^i| \right)$$

Ainsi nous remarquons que les termes S1 et S2 s'annulent, nous pouvons donc revenir a A .

A :

$$\begin{aligned}
A &\leq - \sum_{i=1,2} p_d \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n - \frac{R_{d,i} |\Gamma_{out}^i|}{4} \left(\|u_h^n \cdot n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1} \cdot n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right) \\
&\Leftrightarrow \frac{\rho^f}{2\tau} \left(\|u_h^n\|_{L^2(\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) + \sum_{i=1,2} \frac{R_{d,i} |\Gamma_{out}^i|}{4} \left(\|u_h^n \cdot n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 - \|u_h^{n-1} \cdot n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 \right) + 2\mu \|\varepsilon(u_h^n)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq - \sum_{i=1,2} p_d \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^n \cdot n
\end{aligned}$$

Pour conclure, si nous sommions le tout et le multiplions à τ , soit $n = 1, \dots, N$ nous avons :

$$\begin{aligned}
&\frac{\rho^f}{2} \|u_h^N\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1,2} \frac{\tau R_{d,i} |\Gamma_{out}^i|}{4} \|u_h^N \cdot n\|_{L^2(\partial\Omega)}^2 + 2\mu\tau \sum_{m=1}^N \|\varepsilon(u_h^m)\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&\leq \frac{\rho^f}{2} \|u_h^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1,2} \frac{\tau R_{d,i} |\Gamma_{out}^i|}{4} \|u_h^0 \cdot n\|^2 - \sum_{m=1}^N \sum_{i=1,2} p_d \int_{\Gamma_{out}^i} u_h^m \cdot n
\end{aligned}$$

Le schéma est inconditionnellement stable, car l'approximation à l'instant dépend uniquement des termes évalués à l'instant 0 ainsi que des termes de pression à l'instant n qui sont négligeables.

6 Implémentation et résultat

En mettant tout en oeuvre sur **FreeFem+**, nous obtenons le maillage ainsi que les résultats suivant :

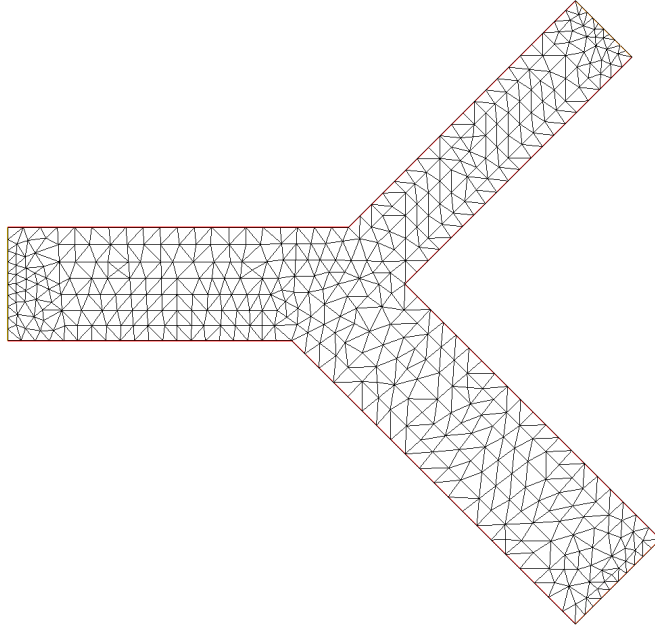


FIGURE 2 – Maillage du domaine Ω

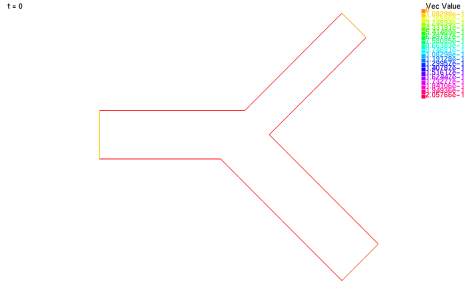


FIGURE 3 – Vecteur vitesse au temps 0

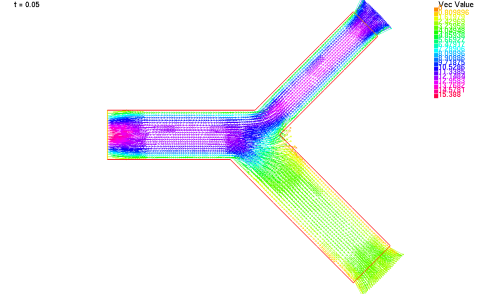


FIGURE 4 – Vecteur vitesse au temps 0.05

Nous observons un flux d'entrée relativement important, ainsi qu'une dispersion du flux au niveau des deux sorties. De plus, la vitesse est plus élevée sur Γ_{out}^1 que sur Γ_{out}^2 , ce qui peut s'expliquer par la largeur de la sortie, qui est plus fine sur Γ_{out}^1 que sur Γ_{out}^2 .

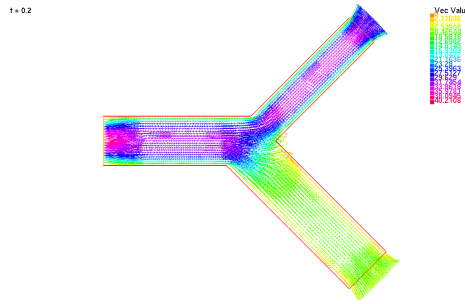


FIGURE 5 – Vecteur vitesse au temps 0.2

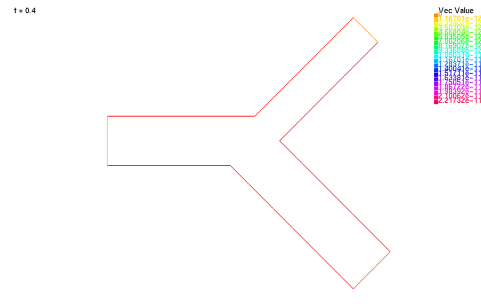


FIGURE 6 – Vecteur vitesse au temps 0.4

Suite à cela, la vitesse augmente jusqu'à ce que le temps atteigne 0.2, avec une valeur de 40. Ensuite, elle diminue et s'annule lorsque le temps atteint 0.4.

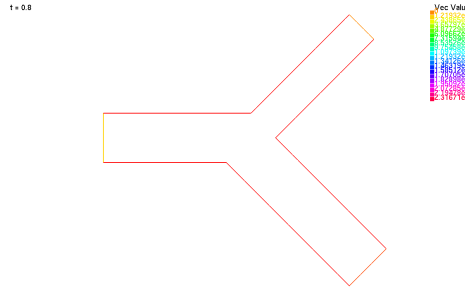


FIGURE 7 – Vecteur vitesse au temps 0.8

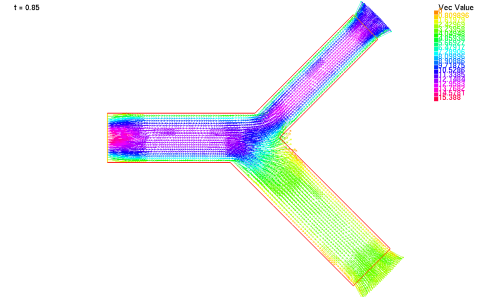


FIGURE 8 – Vecteur vitesse au temps 0.85

Pour finir, la vitesse reste nulle jusqu'à ce que le temps dépasse 0.8, et à 0.85, elle reprend les mêmes valeurs qu'à 0.05. Ceci s'explique par la définition de la fonction \tilde{g} et plus précisément par g :

$$g(t) = \begin{cases} 1000 \cdot \sin(\frac{\pi t}{0.4}) & \text{si } t \in [0, 0.4], \\ 0 & \text{si } t \in [0.4, 0.8] \end{cases}$$

Nous observons bien une périodicité, ce qui explique que les vecteurs à $t = 0.05$ soient égaux à ceux à $t = 0.85$. De plus, cela explique pourquoi les vecteurs sont nuls lorsque $t \in [0.4, 0.8]$, ainsi que la croissance des valeurs entre $t \in [0.0, 0.2]$ et leur décroissance entre $t \in [0.2, 0.4]$, ce qui est dû au comportement sinusoïdal.



FIGURE 9 – Flux de sortie sur Γ_{out}^1

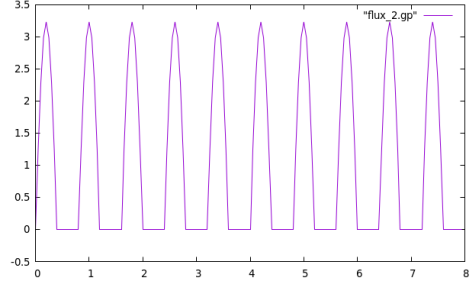


FIGURE 10 – Flux de sortie sur Γ_{out}^2

Nous observons ici un flux positif, tronqué entre $t \in [0.0, 0.4]$, périodique et en corrélation avec la fonction \tilde{g} . Comme mentionné précédemment, le flux sur Γ_{out}^1 est supérieur à celui sur Γ_{out}^2 .

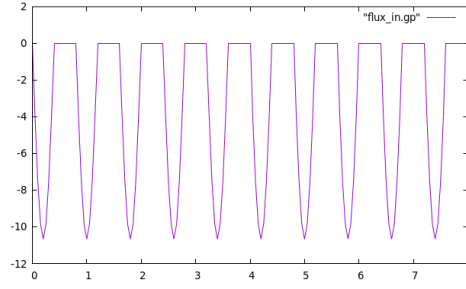


FIGURE 11 – Flux d'entrée

Par ailleurs, le flux entrant est bien négatif, en corré avec \tilde{g} et surtout bien à la somme des flux sortants.

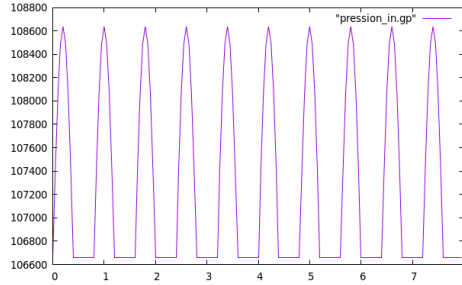


FIGURE 12 – Pression d'entrée

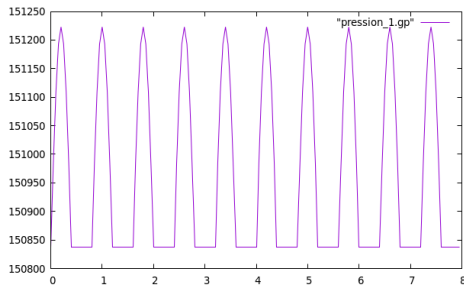


FIGURE 13 – Pression de sortie sur Γ_{out}^1

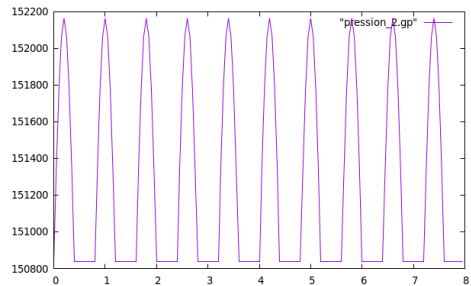


FIGURE 14 – Pression de sortie sur Γ_{out}^2

Pour conclure, la pression sur Γ_{out}^2 est supérieure à celle sur Γ_{out}^1 . Quant à la pression en entrée, elle est drastiquement inférieure à celle en sortie.

7 Formulation semi-discrète

Dans cette section, nous allons nous interesser au schéma Implicite, explicite Dirichlet et explicite Robin du problème suivant : vitesse du fluide $u : \Omega^f \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^2$, la pression du fluide $p : \Omega^f \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et le déplacement vertical du solide $\eta : \Sigma \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ et la vitesse verticale du solide $\dot{\eta} : \Sigma \times (0, T) \rightarrow \mathbb{R}$ avec les constantes suivantes :

$$\begin{cases} \rho^f = 1.0 & \mu = 0.035 \\ \rho^s = 1.1 & E = 0.75 \\ v = 0.5 & P_{max} = 2 \times 10^4 \\ C_1 = E \frac{\epsilon}{2(1+v)} & C_0 = E \frac{\epsilon}{R^2(1-v^2)} \\ T = 1.5 \times 10^{-2} & T^* = 5 \times 10^{-3} \\ u(0) = 0 & \eta(0) = 0 & \dot{\eta}(0) = 0 \end{cases}$$

Le domaine du fluide est $\Omega^f = [0, L] \times [0, R]$, l'interface fluide-solide $\Sigma = [0, L] \times \{R\}$, avec $L = 6$ et $R = 0.5$. La pression sinusoïdale est :

$$P(t) = P_{\max} \frac{1 - \cos\left(\frac{2\pi t}{T^*}\right)}{2}$$

Ainsi, nous avons le problème suivant :

$$\text{Problème} \begin{cases} \rho^f \partial_t u - \text{div} \sigma(u, p) = 0 & \text{dans } \Omega^f \times (0, T) \\ \text{div } u = 0 & \text{dans } \Omega^f \times (0, T) \\ u \cdot n = 0, \quad \sigma(u, p)n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \sigma(u, p)n = -P \cdot n & \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \\ \sigma(u, p)n = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \times (0, T) \\ u \cdot n = \dot{\eta}, \quad u \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Sigma \times (0, T) \\ \rho^s \varepsilon \partial_t \dot{\eta} - C_1 \partial_x^2 \eta + C_0 \eta = -\sigma(u, p)n \cdot n & \text{sur } \Sigma \times (0, T) \\ \dot{\eta} = \partial_t \eta & \text{sur } \Sigma \times (0, T) \\ \eta = 0 & \text{sur } \partial \Sigma \times (0, T) \end{cases}$$

En semi discrétisant, nous obtenons les formulations suivantes :

$$\text{Implicite} \begin{cases} \rho \frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - \text{div } \sigma(u^n, p^n) = 0 & \text{sur } \Omega^f \\ \text{div } u^n = 0 & \text{sur } \Omega^f \\ u^n \cdot n = 0, \quad \sigma(u^n, p^n)n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u^n, p^n)n = -p_n & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(u^n, p^n)n = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \\ u^n \cdot n = \dot{\eta}^n, \quad u^n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \rho \cdot \varepsilon \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{dt} - C_1 \partial_x^2 \eta^n + C_0 \eta^n = -\sigma(u^n, p^n)n \cdot n & \text{sur } \Sigma \\ \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{dt} = \dot{\eta}^n & \text{sur } \Sigma \\ \eta^n = 0 & \text{sur } \partial \Sigma \end{cases}$$

Ce schéma est bel et bien implicite, comme l'indique la condition $u^n \cdot n = \dot{\eta}^n$ sur Σ .

$$\text{Explicite Dirichlet} \left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - \operatorname{div} \sigma(u^n, p^n) = 0 & \text{sur } \Omega^f \\ \operatorname{div} u^n = 0 & \text{sur } \Omega^f \\ u^n \cdot n = 0, \quad \sigma(u^n, p^n)n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u^n, p^n)n = -p_n & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(u^n, p^n)n = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \\ u^n \cdot n = \dot{\eta}^{n-1}, \quad u^n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \rho \cdot \varepsilon \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{dt} - C_1 \partial_x^2 \eta^n + C_0 \eta^n = -\sigma(u^n, p^n)n \cdot n & \text{sur } \Sigma \\ \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{dt} = \dot{\eta}^n & \text{sur } \Sigma \\ \eta^n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{array} \right.$$

Dans ce cas, nous avons bien un schéma explicite Dirichlet étant donné que : $u^n \cdot n = \dot{\eta}^{n-1}$ sur Σ .

$$\text{Explicite Robin} \left\{ \begin{array}{ll} \rho \frac{u^{n+1} - u^n}{dt} - \operatorname{div} \sigma(u^n, p^n) = 0 & \text{sur } \Omega^f \\ \operatorname{div} u^n = 0 & \text{sur } \Omega^f \\ u^n \cdot n = 0, \quad \sigma(u^n, p^n)n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ \sigma(u^n, p^n)n = -p_n & \text{sur } \Gamma_2 \\ \sigma(u^n, p^n)n = 0 & \text{sur } \Gamma_4 \\ u^n \cdot n = \dot{\eta}^n, \quad u^n \cdot \tau = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \rho^s \cdot \varepsilon \frac{u^n \cdot n}{dt} + \sigma(u^n, p^n)n \cdot n = \rho^s \cdot \varepsilon \frac{\eta^{n-1}}{dt} + C_1 \partial_x^2 \eta^{n-1} - C_0 \eta^n & \text{sur } \Sigma \\ \frac{\eta^n - \eta^{n-1}}{dt} = \dot{\eta}^n & \text{sur } \Sigma \\ \eta^n = 0 & \text{sur } \partial\Sigma \end{array} \right.$$

Pour finir, concernant le schéma explicite Robin, nous avons bien $\rho^s \cdot \varepsilon \frac{u^n \cdot n}{dt} + \sigma(u^n, p^n)n \cdot n = \rho^s \cdot \varepsilon \frac{\eta^{n-1}}{dt} + C_1 \partial_x^2 \eta^{n-1} - C_0 \eta^n$ sur Σ .

8 Implémentation et résultat du schéma explicite Dirichlet

time = 0.0005

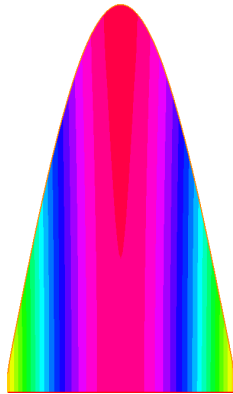


FIGURE 15 – Schéma semi-discreté explicite Dirichlet

n = 8, time = 0.015



FIGURE 16 – Schéma Implicite

Le schéma semi-discret implicite fonctionne correctement. Cependant, ceci est au prix d'un grand nombre de calcul. En effet, nous devons résoudre plusieurs fois le problème fluide et le problème solide. Par ailleurs, le schéma semi-implicite avec condition de Dirichlet explicite s'arrête complètement lorsque $T = 5 \times 10^{-4}$. Ceci indique bien que le schéma n'est pas stable.

Pas de temps :

time = 0.00015

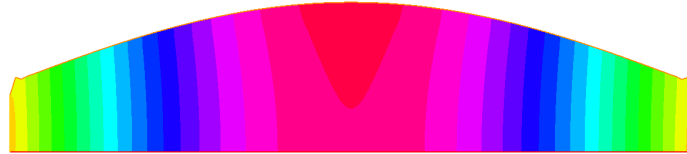


FIGURE 17 – Schéma semi-discret explicite Dirichlet $\tau = 1 \times 10^{-5}$

En réduisant drastiquement le pas de temps τ , nous observons que le problème reste bloqué et que la quantité de calcul augmente significativement.

Modification de ρ^s et ρ^f :

time = 0.0015



FIGURE 18 – Schéma semi-discret explicite Dirichlet $\rho^s = 10$

time = 0.015



FIGURE 19 – Schéma semi-discret explicite Dirichlet $\rho^s = 100$

Nous remarquons qu'une augmentation de ρ^s permet à la structure de se stabiliser.

time = 0.0007



FIGURE 20 – Schéma semi-discret explicite Dirichlet $\rho^f = 0.1$

time = 0.015



FIGURE 21 – Schéma semi-discret explicite Dirichlet $\rho^f = 0.01$

Concernant ρ^f , tout comme ρ^s , une diminution drastique permet de stabiliser la structure et de réduire la déformation.

time = 0.015

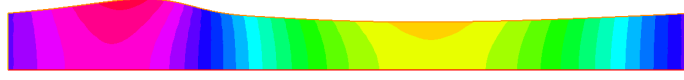


FIGURE 22 – Schéma semi-discrète explicite Dirichlet $\rho^f = 0.1$, $\rho^s = 10$

En manipulant simultanément les deux variables, nous obtenons un résultat similaire. Ceci s'explique par le fait qu'en modifiant les variables, ceci ne réalise plus la condition d'instabilité :

$$\frac{\rho^f \alpha_{\max}}{\rho^s \varepsilon} > 1, \quad \alpha_{\max} \approx \frac{L^2}{\pi^2 R}.$$

9 Implémentation et résultat du schéma explicite Robin

r = 1, time = 0.015

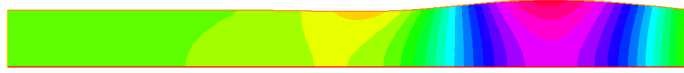


FIGURE 23 – Schéma semi-discrète explicite Robin

Dans le cas de la semi-discrétisation en temps explicite Robin, la structure ne se bloque pas et résiste à la déformation. Essayons de modifier les paramètres et étudions leur impact.

r = 1, time = 0.015



FIGURE 24 – Schéma semi-discrète explicite Robin $\rho^f = 0.5$

r = 1, time = 0.015

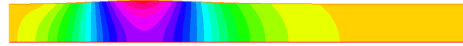


FIGURE 25 – Schéma semi-discrète explicite Robin $\rho^f = 10$

Lorsque $\rho^f = 0.5$, le phénomène se produit de manière beaucoup plus rapide et intense. En revanche, pour $\rho^f = 10$, il devient nettement plus lent et atténué par rapport au cas précédent.

$r = 1, \text{time} = 0.015$



FIGURE 26 – Schéma semi-discrète explicite Robin $\rho^s = 0.1$

$r = 1, \text{time} = 0.015$



FIGURE 27 – Schéma semi-discrète explicite Robin $\rho^s = 10$

Lorsque $\rho^s = 0.1$, la structure semble être similaire au cas classique ; il y a juste un trou un peu plus gros à la moitié du tuyau. Cependant, quand $\rho^s = 10$, le trou est bien plus prononcé, la propagation de la vague est plus lente et moins prononcée.

$r = 1, \text{time} = 0.015$

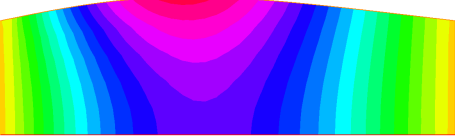


FIGURE 28 – Schéma semi-discrète explicite Robin $L = 2$

$r = 1, \text{time} = 0.015$



FIGURE 29 – Schéma semi-discrète explicite Robin $L = 10$

Nous observons que, dans le cas où $L = 10$, la structure n'est pas impactée par la variation de la longueur. Néanmoins, dans le cas où $L = 2$, la structure est complètement chamboulée. Pour conclure, bien que ce schéma soit explicite, il reste stable. Une modification des paramètres entraîne simplement une déformation différente.

10 Précision des schémas

Pour conclure, nous allons comparer la précision du schéma explicite Robin et schéma implicite concernant l'approximation du déplacement solide au temps final en modifiant le pas de temps :

$$\tau = \frac{2 \times 10^{-4}}{2^i}, \quad i = 0, 1, 2, 3,$$

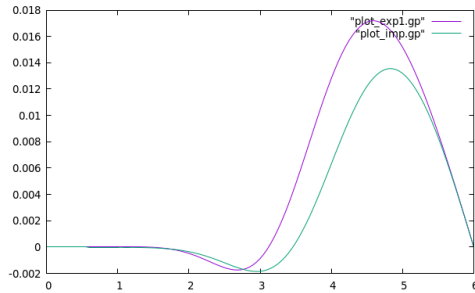


FIGURE 30 – $i = 0$

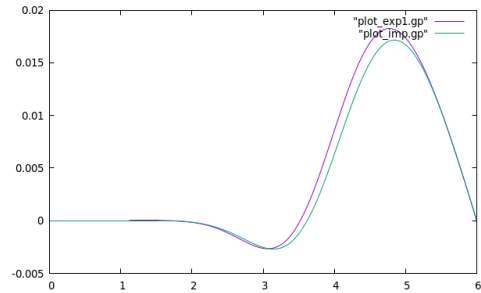


FIGURE 31 – $i = 1$

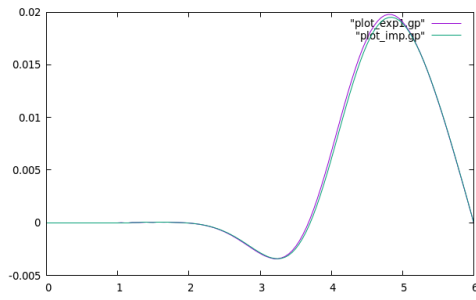


FIGURE 32 – $i = 2$

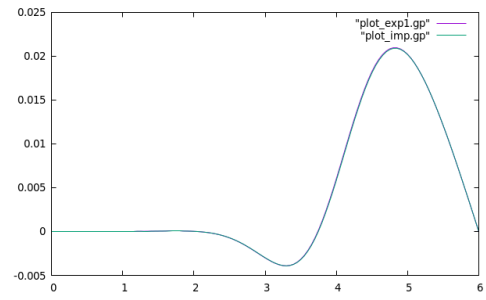


FIGURE 33 – $i = 3$

Nous observons que plus i augmente, plus la précision du schéma s'améliore. En effet, nous constatons que, lorsque i croît, le graphique du schéma explicite de Robin se superpose de plus en plus avec celui du schéma implicite, traduisant ainsi leur convergence. Ce qui nous permet d'obtenir une solution numérique plus fidèle à la solution exacte.