

Решение задачи Market Making алгоритма

Егоров Сергей

Условие задачи

События происходят в дискретные моменты времени $t = 0, 1, \dots, T$. Известен временной ряд цены актива P_0, P_1, \dots, P_T — неотрицательные, целые значения.

ММ алгоритм снимает оставшиеся неисполненные заявки с шага $t - 1$ и ставит новое множество заявок на покупку и продажу на шаге t , каждая заявка размера 1, цены в заявках на покупку B_i , цены в заявках на продажу S_i . На шаге $t + 1$ исполняются все заявки на покупку (продажу), для которых $B_i \geq P_{t+1}$ ($S_i \leq P_{t+1}$).

Позиция алгоритма в момент t — суммарное количество в сделках на покупку минус суммарное количество в сделках на продажу за период времени до t .

Временной ряд цен удовлетворяет свойствам:

$$K = \sum_{t=1}^T |P_t - P_{t-1}|$$
$$Z = P_T - P_0$$

для любого t и известно алгоритму в момент t , что $|P_{t+1} - P_t| \leq D_t$.

ММ алгоритм ставит заявки на покупку и продажу с ценами:

$$B_i = P_t - i, \quad i = 1, \dots, D_t$$
$$S_i = P_t + i, \quad i = 1, \dots, D_t$$

Вопросы:

1. Какая позиция ММ алгоритма в момент T ?
2. Какой PnL ММ алгоритма в момент T при оценке стоимости позиции по цене P_T ?

Решение

Позиция в момент T

Позиция алгоритма в момент T определяется как разница между количеством исполненных заявок на покупку и количеством исполненных заявок на продажу за весь период времени до момента T .

1. Условие $|P_{t+1} - P_t| \leq D_t$ означает, что на каждом шаге будут выставлены все возможные заявки:

$$B_{\arg\min_i B_i} \leq P_{t+1},$$

$$S_{\arg\max_i S_i} \geq P_{t+1}$$

2. На каждом шаге t от 0 до $T - 1$ количество исполненных заявок на покупку и продажу ограничено величиной $|P_t - P_{t+1}|$:

$$Buy_t = \min(D_t, \max(0, P_t - P_{t+1})) = \max(0, P_t - P_{t+1})$$

$$Sell_t = \min(D_t, \max(0, P_{t+1} - P_t)) = \max(0, P_{t+1} - P_t)$$

так как $|P_{t+1} - P_t| \leq D_t$ по условию.

3. Суммарная позиция на момент T :

$$\text{Pos}(T) = \sum_{t=0}^{T-1} (Buy_t - Sell_t)$$

$$\text{Pos}(T) = \sum_{t=0}^{T-1} (\max(0, P_t - P_{t+1}) - \max(0, P_{t+1} - P_t))$$

PnL в момент T

1. Введем понятия валютного баланса

$$\text{Balance}\$(T)$$

и стоимости позиции

$$\text{BalancePos}(T) = \text{Pos}(T) \cdot P_T$$

Тогда

$$\text{PnL}(T) = \text{Balance}\$(T) + \text{BalancePos}(T)$$

2. Валютный баланс можно посчитать как выручку с совершенных продаж и покупок:

$$\text{Balance}\$(T) = \sum_{t=0}^{T-1} \left(\sum_{i=1}^{D_t} I[S_i \leq P_{t+1}] \cdot S_i - \sum_{i=1}^{D_t} I[B_i \geq P_{t+1}] \cdot B_i \right),$$

где I - индикаторная функция, $\sum_{i=1}^{D_t} I[S_i \leq P_{t+1}] \cdot S_i$ - стоимость проданных активов в момент t , $\sum_{i=1}^{D_t} I[B_i \geq P_{t+1}] \cdot B_i$ - стоимость купленных активов в момент t .

3.

$$\begin{aligned} \text{PnL}(T) = & \sum_{t=0}^{T-1} \left(\sum_{i=1}^{D_t} I[S_i \leq P_{t+1}] \cdot S_i - \sum_{i=1}^{D_t} I[B_i \geq P_{t+1}] \cdot B_i \right) + \\ & + \sum_{t=0}^{T-1} (\max(0, P_t - P_{t+1}) - \max(0, P_{t+1} - P_t)) \cdot P_T \end{aligned}$$

Пример

- Длительность периода: $T = 5$
- Временной ряд цен актива: $P = [100, 102, 101, 103, 105, 104]$
- Допустимое изменение цены: $D_t = 3$

Шаг 0

- Цена актива $P_0 = 100$
- Выставляем заявки:
 - Покупка: $B_1 = 99, B_2 = 98, B_3 = 97$
 - Продажа: $S_1 = 101, S_2 = 102, S_3 = 103$
- Переход к следующему шагу $P_1 = 102$
- Исполненные заявки:
 - Покупка: нет (цены выше 102)
 - Продажа: 2 заявки ($S_1 = 101$ и $S_2 = 102$)
- Позиция: $\text{Pos}_0 = -2$
- Баланс: $\text{Balance}_0 = 101 + 102 = 203$
- BalancePos_0 : $\text{BalancePos}_0 = \text{Pos}_0 \cdot P_1 = -2 \cdot 102 = -204$
- PnL : $\text{PnL}_0 = \text{Balance}_0 + \text{BalancePos}_0 = 203 - 204 = -1$

Шаг 1

- Цена актива $P_1 = 102$
- Выставляем заявки:
 - Покупка: $B_1 = 101, B_2 = 100, B_3 = 99$
 - Продажа: $S_1 = 103, S_2 = 104, S_3 = 105$
- Переход к следующему шагу $P_2 = 101$

- Исполненные заявки:
 - Покупка: 1 заявка ($B_1 = 101$)
 - Продажа: нет (цены ниже 101)
- Позиция: $\text{Pos}_1 = -1$
- Баланс: $\text{Balance}_1 = 203 - 101 = 102$
- BalancePos_1 : $\text{BalancePos}_1 = \text{Pos}_1 \cdot P_2 = -1 \cdot 101 = -101$
- PnL : $\text{PnL}_1 = \text{Balance}_1 + \text{BalancePos}_1 = 102 - 101 = 1$

Шаг 2

- Цена актива $P_2 = 101$
- Выставляем заявки:
 - Покупка: $B_1 = 100, B_2 = 99, B_3 = 98$
 - Продажа: $S_1 = 102, S_2 = 103, S_3 = 104$
- Переход к следующему шагу $P_3 = 103$
- Исполненные заявки:
 - Покупка: нет (цены выше 103)
 - Продажа: 2 заявки ($S_1 = 102$ и $S_2 = 103$)
- Позиция: $\text{Pos}_2 = -3$
- Баланс: $\text{Balance}_2 = 102 + 102 + 103 = 307$
- BalancePos_2 : $\text{BalancePos}_2 = \text{Pos}_2 \cdot P_3 = -3 \cdot 103 = -309$
- PnL : $\text{PnL}_2 = \text{Balance}_2 + \text{BalancePos}_2 = 307 - 309 = -2$

Шаг 3

- Цена актива $P_3 = 103$
- Выставляем заявки:
 - Покупка: $B_1 = 102, B_2 = 101, B_3 = 100$
 - Продажа: $S_1 = 104, S_2 = 105, S_3 = 106$
- Переход к следующему шагу $P_4 = 105$
- Исполненные заявки:
 - Покупка: нет (цены выше 105)

– Продажа: 2 заявки ($S_1 = 104$ и $S_2 = 105$)

- Позиция: $\text{Pos}_3 = -5$
- Баланс: $\text{Balance}_3 = 307 + 104 + 105 = 516$
- BalancePos_3 : $\text{BalancePos}_3 = \text{Pos}_3 \cdot P_4 = -5 \cdot 105 = -525$
- PnL: $\text{PnL}_3 = \text{Balance}_3 + \text{BalancePos}_3 = 516 - 525 = -9$

Шаг 4

- Цена актива $P_4 = 105$
- Выставляем заявки:
 - Покупка: $B_1 = 104, B_2 = 103, B_3 = 102$
 - Продажа: $S_1 = 106, S_2 = 107, S_3 = 108$
- Переход к следующему шагу $P_5 = 104$
- Исполненные заявки:
 - Покупка: 1 заявка ($B_1 = 104$)
 - Продажа: нет (цены ниже 104)
- Позиция: $\text{Pos}_4 = -4$
- Баланс: $\text{Balance}_4 = 516 - 104 = 412$
- BalancePos_4 : $\text{BalancePos}_4 = \text{Pos}_4 \cdot P_5 = -4 \cdot 104 = -416$
- PnL: $\text{PnL}_4 = \text{Balance}_4 + \text{BalancePos}_4 = 412 - 416 = -4$

t	P_t	Pos_t	Balance_t	BalancePos_t	PnL_t
0	100	0	0	0	0
1	102	-2	203	-204	-1
2	101	-1	102	-101	1
3	103	-3	307	-309	-2
4	105	-5	516	-525	-9
5	104	-4	412	-416	-4

Таблица 1: Результаты расчета PnL для каждого шага