

# Решение задачи Market Making алгоритма

Егоров Сергей

## Условие задачи

События происходят в дискретные моменты времени  $t = 0, 1, \dots, T$ . Известен временной ряд цены актива  $P_0, P_1, \dots, P_T$  — неотрицательные, целые значения.

ММ алгоритм снимает оставшиеся неисполненные заявки с шага  $t - 1$  и ставит новое множество заявок на покупку и продажу на шаге  $t$ , каждая заявка размера 1, цены в заявках на покупку  $B_i$ , цены в заявках на продажу  $S_i$ . На шаге  $t + 1$  исполняются все заявки на покупку (продажу), для которых  $B_i \geq P_{t+1}$  ( $S_i \leq P_{t+1}$ ).

Позиция алгоритма в момент  $t$  — суммарное количество в сделках на покупку минус суммарное количество в сделках на продажу за период времени до  $t$ .

Временной ряд цен удовлетворяет свойствам:

$$K = \sum_{t=1}^T |P_t - P_{t-1}|$$
$$Z = P_T - P_0$$

для любого  $t$  и известно алгоритму в момент  $t$ , что  $|P_{t+1} - P_t| \leq D_t$ .

ММ алгоритм ставит заявки на покупку и продажу с ценами:

$$B_i = P_t - i, \quad i = 1, \dots, D_t$$
$$S_i = P_t + i, \quad i = 1, \dots, D_t$$

Вопросы:

1. Какая позиция ММ алгоритма в момент  $T$ ?
2. Какой PnL ММ алгоритма в момент  $T$  при оценке стоимости позиции по цене  $P_T$ ?

## Решение

### Позиция в момент $T$

Позиция алгоритма в момент  $T$  определяется как разница между количеством исполненных заявок на покупку и количеством исполненных заявок на продажу за весь период времени до момента  $T$ .

1. Условие  $|P_{t+1} - P_t| \leq D_t$  означает, что на каждом шаге будут выставляться все возможные заявки:

$$B_{\arg\min_i B_i} \leq P_{t+1},$$
$$S_{\arg\max_i S_i} \geq P_{t+1}$$

2. На каждом шаге  $t$  от 0 до  $T-1$  количество исполненных заявок на покупку и продажу ограничено величиной  $|P_t - P_{t+1}|$ :

$$Buy_t = \min(D_t, \max(0, P_t - P_{t+1})) = \max(0, P_t - P_{t+1})$$
$$Sell_t = \min(D_t, \max(0, P_{t+1} - P_t)) = \max(0, P_{t+1} - P_t)$$

так как  $|P_{t+1} - P_t| \leq D_t$  по условию.

3. Суммарная позиция на момент  $T$ :

$$\text{Pos}(T) = \sum_{t=0}^{T-1} (\text{Buy}_t - \text{Sell}_t)$$

$$\text{Pos}(T) = \sum_{t=0}^{T-1} (\max(0, P_t - P_{t+1}) - \max(0, P_{t+1} - P_t))$$

4. (Дополнительно) Упрощение формулы  $\text{Pos}(T)$ .

Выражение для  $\text{Pos}(T)$  можно переписать, учитывая три случая отдельно:

(a) Когда  $P_t > P_{t+1}$ :

$$\begin{aligned}\max(0, P_t - P_{t+1}) &= P_t - P_{t+1} \\ \max(0, P_{t+1} - P_t) &= 0\end{aligned}$$

(b) Когда  $P_{t+1} > P_t$ :

$$\begin{aligned}\max(0, P_t - P_{t+1}) &= 0 \\ \max(0, P_{t+1} - P_t) &= P_{t+1} - P_t\end{aligned}$$

(c) Когда  $P_{t+1} = P_t$ :

$$\begin{aligned}\max(0, P_t - P_{t+1}) &= 0 \\ \max(0, P_{t+1} - P_t) &= 0\end{aligned}$$

Поэтому выражение становится:

$$\text{Pos}(T) = \sum_{t=0}^{T-1} (P_t - P_{t+1})$$

$$\text{Pos}(T) = (P_0 - P_1) + (P_1 - P_2) + \dots + (P_{T-1} - P_T)$$

Все промежуточные члены сокращаются, оставляя:

$$\text{Pos}(T) = P_0 - P_T$$

Мы знаем, что  $Z = P_T - P_0$ . Поэтому имеем:

$$\text{Pos}(T) = -(P_T - P_0) = -Z \quad (1)$$

**Ответ.**  $\text{Pos}(T) = -Z$

**PnL в момент  $T$**

1. Введем понятия валютного баланса

$$\text{Balance}\$(T)$$

и стоимости позиции

$$\text{BalancePos}(T) = \text{Pos}(T) \cdot P_T \quad (2)$$

Тогда

$$\text{PnL}(T) = \text{Balance}\$(T) + \text{BalancePos}(T) \quad (3)$$

2. Валютный баланс можно посчитать как выручку с совершенных продаж и покупок:

$$\text{Balance}\$(T) = \sum_{t=0}^{T-1} \left( \sum_{i=1}^{D_t} I[S_i \leq P_{t+1}] \cdot S_i - \sum_{i=1}^{D_t} I[B_i \geq P_{t+1}] \cdot B_i \right),$$

где  $I$  - индикаторная функция,  $\sum_{i=1}^{D_t} I[S_i \leq P_{t+1}] \cdot S_i$  - стоимость проданных активов в момент  $t$ ,  $\sum_{i=1}^{D_t} I[B_i \geq P_{t+1}] \cdot B_i$  - стоимость купленных активов в момент  $t$ .

3.

$$\begin{aligned} \text{PnL}(T) &= \sum_{t=0}^{T-1} \left( \sum_{i=1}^{D_t} I[S_i \leq P_{t+1}] \cdot S_i - \sum_{i=1}^{D_t} I[B_i \geq P_{t+1}] \cdot B_i \right) + \\ &+ \sum_{t=0}^{T-1} (\max(0, P_t - P_{t+1}) - \max(0, P_{t+1} - P_t)) \cdot P_T \end{aligned} \quad (4)$$

4. (Дополнительно) Упрощение формулы  $\text{PnL}(T)$ .

Аналогично упрощению  $\text{Pos}(T)$ :

$$K = \sum_{t=1}^T |P_t - P_{t-1}| = |P_T - P_{T-1}| + |P_{T-1} - P_{T-2}| + \dots + |P_1 - P_0|$$

$$Z = P_T - P_0 = (P_T - P_{T-1}) + (P_{T-1} - P_{T-2}) + \dots + (P_1 - P_0)$$

Тогда в разности  $K - Z$  будут присутствовать только моменты понижения цены актива, причем в  $Z$  такие слагаемые отрицательные, то есть в разности  $K - Z$  происходит дублирование. Поэтому:

$$\frac{K - Z}{2} \quad (5)$$

- это количество единичных шагов (тиков) понижения цены актива.

Собственно, Если бы актив только рос, то  $\text{PnL}$  был бы равен сумме единичных тиков от  $i = 1$  до  $P_T - P_0 - 1 = Z - 1$ , взятой с обратным знаком (  $-1$  потому что начальная позиция  $P_0$  не учитывается). В таком случае:

$$\text{PnL}_{\text{positive}} = - \sum_{i=1}^{Z-1} i = - \frac{(Z-1) + 1}{2} \cdot (Z-1) = - \frac{Z}{2} \cdot (Z-1)$$

$\text{PnL}_{\text{negative}}$  уже вычислен и равен (5).

Таким образом,

$$\text{PnL}(T) = \text{PnL}_{\text{positive}}(T) + \text{PnL}_{\text{negative}}(T) = - \frac{Z}{2} \cdot (Z-1) + \frac{K-Z}{2}$$

**Ответ.**  $\text{PnL}(T) = - \frac{Z}{2} \cdot (Z-1) + \frac{K-Z}{2}$

5. Более формально, из (2), (3) и (4) получаем:

$$\begin{aligned}
\text{PnL}(T) &= \text{Balance}\$(T) + \text{BalancePos}(T) = \text{Balance}\$(T) + \text{Pos}(T) \cdot P_T = \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \left( \sum_{i=1}^{D_t} I[S_i \leq P_{t+1}] \cdot S_i - \sum_{i=1}^{D_t} I[B_i \geq P_{t+1}] \cdot B_i \right) - Z \cdot P_T = \\
&= \sum_{t=0}^{T-1} \left( \left[ I[P_{t+1} > P_t] \cdot \sum_{i=1}^{P_{t+1}-P_t} (P_t + i) \right] - \left[ I[P_{t+1} < P_t] \cdot \sum_{i=1}^{P_t-P_{t+1}} (P_t - i) \right] \right) - Z \cdot P_T = \quad (6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^Z (P_0 + i) + \frac{K-Z}{2} - Z \cdot P_T = \quad (7) \\
&= \left( P_0 \cdot Z + \frac{Z+1}{2} \cdot Z \right) + \frac{K-Z}{2} - Z \cdot P_T = [P_0 = P_T - Z] = \\
&= -Z^2 + \frac{Z+1}{2} \cdot Z + \frac{K-Z}{2} = -\frac{Z}{2} \cdot (Z-1) + \frac{K-Z}{2},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Переход из (6) в (7) можно расписать аккуратнее, но идея та же, что и для (5).

## Пример

- Длительность периода:  $T = 5$
- Временной ряд цен актива:  $P = [100, 102, 101, 103, 105, 104]$
- Допустимое изменение цены:  $D_t = 3$

### Шаг 0

- Цена актива  $P_0 = 100$
- Выставляем заявки:
  - Покупка:  $B_1 = 99, B_2 = 98, B_3 = 97$
  - Продажа:  $S_1 = 101, S_2 = 102, S_3 = 103$
- Переход к следующему шагу  $P_1 = 102$
- Исполненные заявки:
  - Покупка: нет (цены выше 102)
  - Продажа: 2 заявки ( $S_1 = 101$  и  $S_2 = 102$ )
- Позиция:  $\text{Pos}_0 = -2$
- Баланс:  $\text{Balance}_0 = 101 + 102 = 203$
- $\text{BalancePos}_0$ :  $\text{BalancePos}_0 = \text{Pos}_0 \cdot P_1 = -2 \cdot 102 = -204$
- PnL:  $\text{PnL}_0 = \text{Balance}_0 + \text{BalancePos}_0 = 203 - 204 = -1$

## Шаг 1

- Цена актива  $P_1 = 102$
- Выставляем заявки:
  - Покупка:  $B_1 = 101, B_2 = 100, B_3 = 99$
  - Продажа:  $S_1 = 103, S_2 = 104, S_3 = 105$
- Переход к следующему шагу  $P_2 = 101$
- Исполненные заявки:
  - Покупка: 1 заявка ( $B_1 = 101$ )
  - Продажа: нет (цены ниже 101)
- Позиция:  $\text{Pos}_1 = -1$
- Баланс:  $\text{Balance}_1 = 203 - 101 = 102$
- $\text{BalancePos}_1$ :  $\text{BalancePos}_1 = \text{Pos}_1 \cdot P_2 = -1 \cdot 101 = -101$
- $\text{PnL}$ :  $\text{PnL}_1 = \text{Balance}_1 + \text{BalancePos}_1 = 102 - 101 = 1$

## Шаг 2

- Цена актива  $P_2 = 101$
- Выставляем заявки:
  - Покупка:  $B_1 = 100, B_2 = 99, B_3 = 98$
  - Продажа:  $S_1 = 102, S_2 = 103, S_3 = 104$
- Переход к следующему шагу  $P_3 = 103$
- Исполненные заявки:
  - Покупка: нет (цены выше 103)
  - Продажа: 2 заявки ( $S_1 = 102$  и  $S_2 = 103$ )
- Позиция:  $\text{Pos}_2 = -3$
- Баланс:  $\text{Balance}_2 = 102 + 102 + 103 = 307$
- $\text{BalancePos}_2$ :  $\text{BalancePos}_2 = \text{Pos}_2 \cdot P_3 = -3 \cdot 103 = -309$
- $\text{PnL}$ :  $\text{PnL}_2 = \text{Balance}_2 + \text{BalancePos}_2 = 307 - 309 = -2$

## Шаг 3

- Цена актива  $P_3 = 103$
- Выставляем заявки:
  - Покупка:  $B_1 = 102, B_2 = 101, B_3 = 100$
  - Продажа:  $S_1 = 104, S_2 = 105, S_3 = 106$
- Переход к следующему шагу  $P_4 = 105$
- Исполненные заявки:

- Покупка: нет (цены выше 105)
- Продажа: 2 заявки ( $S_1 = 104$  и  $S_2 = 105$ )
- Позиция:  $\text{Pos}_3 = -5$
- Баланс:  $\text{Balance}_3 = 307 + 104 + 105 = 516$
- $\text{BalancePos}_3$ :  $\text{BalancePos}_3 = \text{Pos}_3 \cdot P_4 = -5 \cdot 105 = -525$
- PnL:  $\text{PnL}_3 = \text{Balance}_3 + \text{BalancePos}_3 = 516 - 525 = -9$

#### Шаг 4

- Цена актива  $P_4 = 105$
- Выставляем заявки:
  - Покупка:  $B_1 = 104, B_2 = 103, B_3 = 102$
  - Продажа:  $S_1 = 106, S_2 = 107, S_3 = 108$
- Переход к следующему шагу  $P_5 = 104$
- Исполненные заявки:
  - Покупка: 1 заявка ( $B_1 = 104$ )
  - Продажа: нет (цены ниже 104)
- Позиция:  $\text{Pos}_4 = -4$
- Баланс:  $\text{Balance}_4 = 516 - 104 = 412$
- $\text{BalancePos}_4$ :  $\text{BalancePos}_4 = \text{Pos}_4 \cdot P_5 = -4 \cdot 104 = -416$
- PnL:  $\text{PnL}_4 = \text{Balance}_4 + \text{BalancePos}_4 = 412 - 416 = -4$

t	$P_t$	$\text{Pos}_t$	$\text{Balance}_t$	$\text{BalancePos}_t$	$\text{PnL}_t$	K	Z
0	100	0	0	0	0	0	0
1	102	-2	203	-204	-1	2	2
2	101	-1	102	-101	1	3	1
3	103	-3	307	-309	-2	5	3
4	105	-5	516	-525	-9	7	5
5	104	-4	412	-416	-4	8	4

Таблица 1: Результаты расчета PnL для каждого шага