

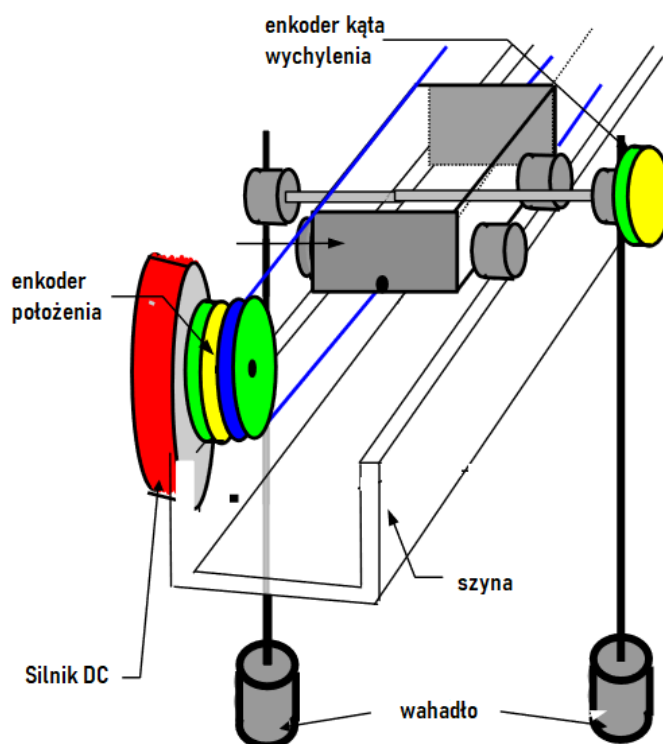
Laboratorium Problemowe - odwrócone wahadło

Raport 4.

Jakub Poręba, Tomasz Molęda

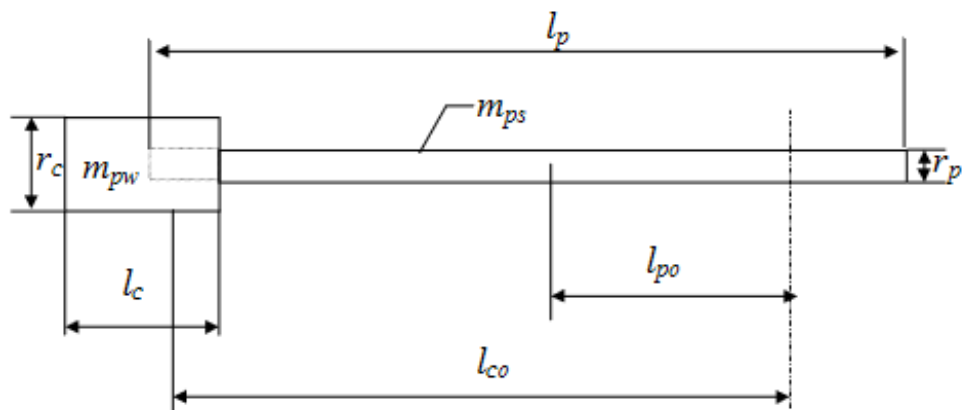
1. Dane fizyczne wahadła.

Pojedyncze wahadło zbudowane jest z aluminiowego pręta, na końcu którego umieszczony jest mosiężny walec. Taka konfiguracja występuje w identycznej formie podwójnie – po obu stronach względem wózka. Ogólny schemat przedstawia rysunek 1.



Rysunek 1. Schemat układu wahadła.

Podstawowe dane fizyczne uzyskano poprzez bezpośrednie pomiary. Zebrane informacje wraz z dodatkowo obliczonymi zestawiono w tabeli 1., a interpretację oznaczeń na rysunku poniżej.



Rysunek 2. Schemat pojedynczego wahadła.

Tabela 1. Zmierzone i obliczone wielkości fizyczne

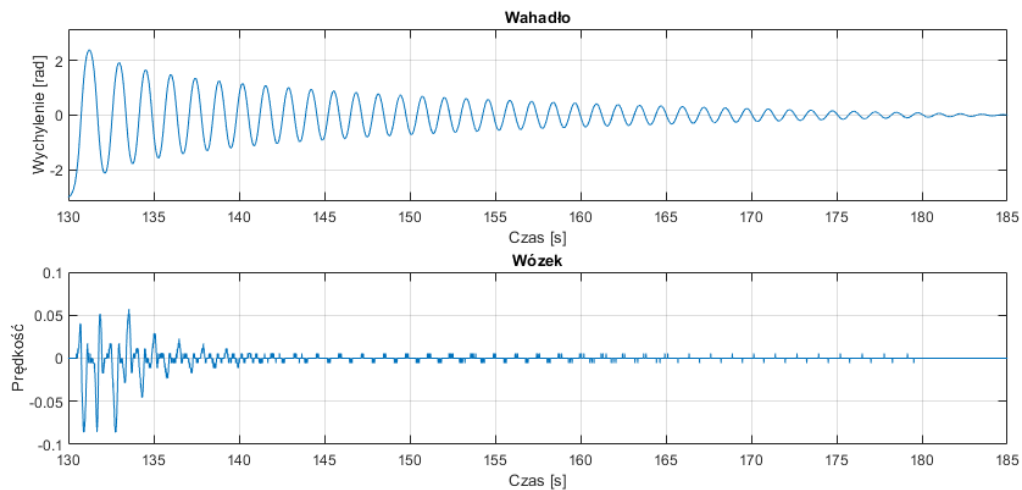
Wielkość fizyczna	Oznaczenie	Wartość
Długość pręta	l_p [m]	0,43
Długość odważnika	l_c [m]	0,019
Średnica pręta	r_p [m]	0,0047
Średnica odważnika	r_c [m]	0,0083
Odległość środka masy pręta od osi obrotu	l_{po} [m]	0,181
Odległość środka masy odważnika od osi obrotu	l_{co} [m]	0,396
Masa pręta	m_{ps} [kg]	0,0205
Masa odważnika	m_{pw} [kg]	0,011
Masa sumaryczna (2-krotność)	m [kg]	0,0630
Masa wózka	M [kg]	0,548
Gęstość aluminium	ρ_{Al} $\frac{kg}{m^3}$	2700
Gęstość mosiądzu	ρ_m $\frac{kg}{m^3}$	8600
Moment bezwładności pręta	I_p [kg * m ²]	0.001975
Moment bezwładności odważnika	I_c [kg * m ²]	0.003451
Całkowity moment bezwładności	I [kg * m ²]	0.005426
Odległość środka masy wahadła od osi obrotu	L [m]	0,256

2. Analiza przeprowadzonych eksperymentów.

2.1. Okres wahadła obliczony teoretycznie

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} = 1,64[s]$$

2.2. Bujanie wahadłem z pozycji niskiej przy ruchu swobodnym wózka.



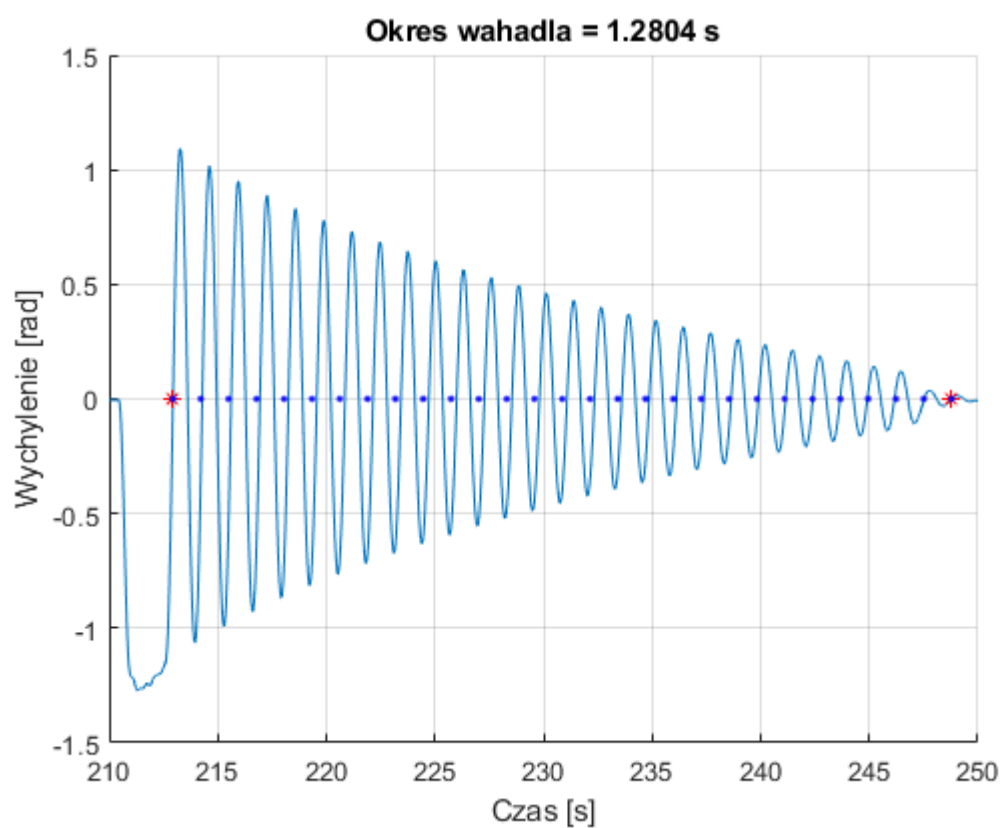
Rys. 2.1. Wpływ wahadła na ruch wózka.

Czas wytlumienia – około 45[s]

Okres – 1,29[s] na początku ruchu, 1,25[s] na końcu

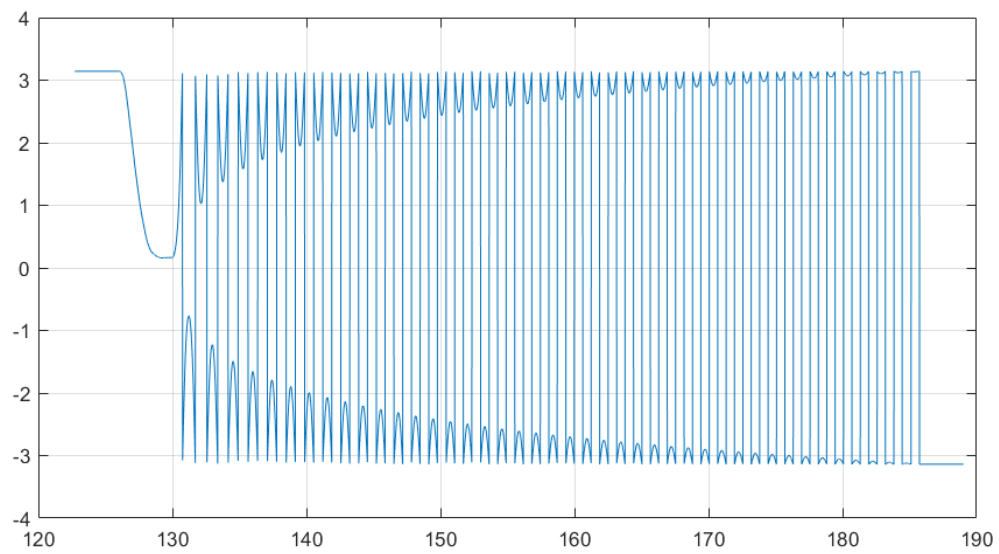
Na powyższym wykresie wyraźnie widać, że samo bujanie się wahadła nawet w niewielkim zakresie powoduje ruch wózka.

2.3. Bujanie wahadłem z pozycji niskiej przy zablokowanym ruchu wózka.



Uśredniona wartość 28 pełnych okresów wahadła wynosi 1.2804 sekundy. Zablokowanie ruchu wózka powoduje więc niewielkie wydłużenie okresu drgań wahadła.

2.4. Bujanie wahadłem – wysoka pozycja początkowa – wpływ na ruch wózka.



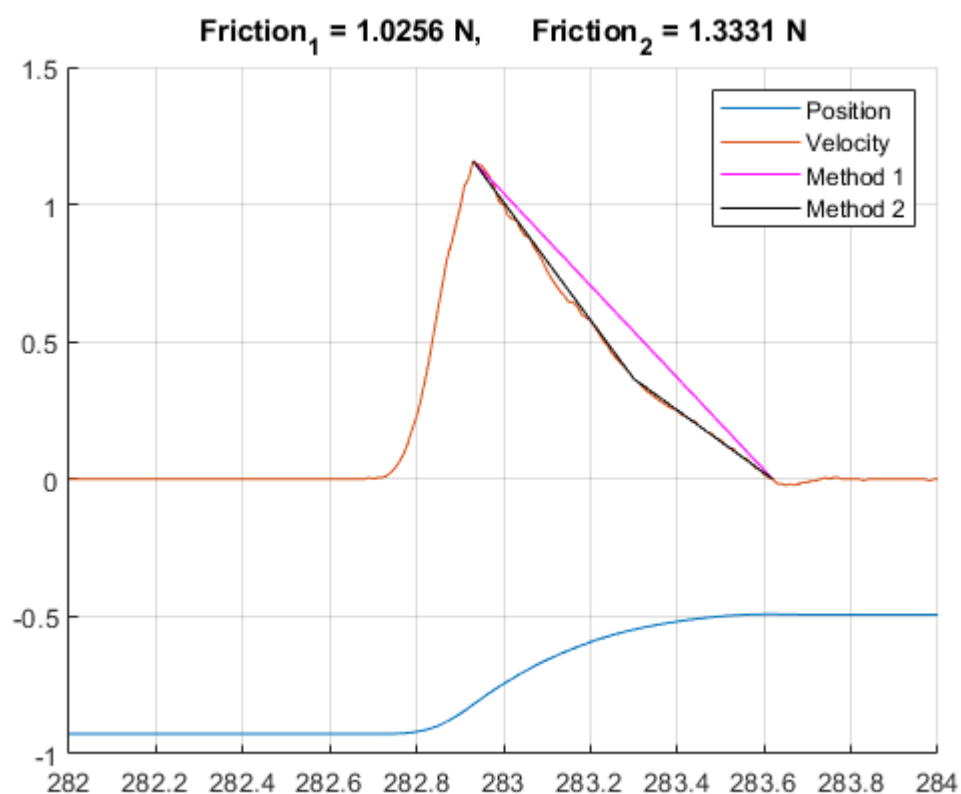
Czas wytlumienia – 55,58[s]

Okres – 1,67[s] na początku ruchu, 1,26[s] na końcu

Duże różnice w okresie drgań wynikają ze znacznego ruchu wózka wywołanego ilością zgromadzonej w wahadle energii potencjalnej uwolnionej w trakcie ruchu swobodnego.

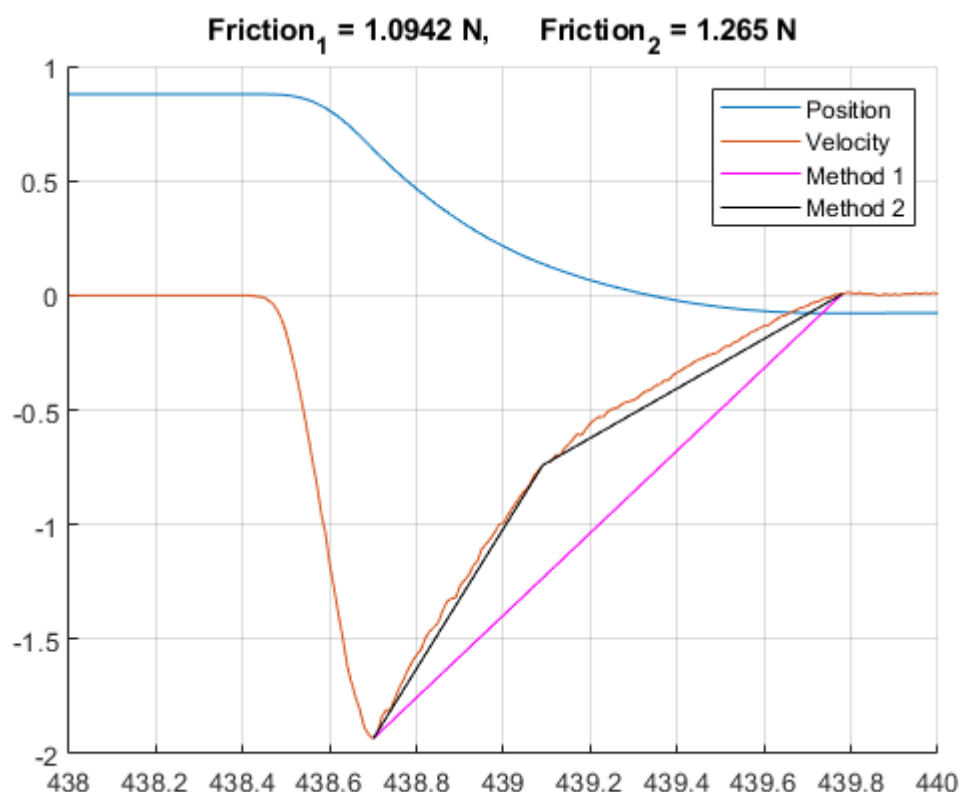
2.6. Pchnięcie wózka i swobodne wyhamowanie

2.6.1. W prawo



Tarcie wyznaczono poprzez liniowe przybliżenie prędkości wózka. Prędkość przybliżono jedną oraz dwoma prostymi w zależności od metody. Z przybliżenia wyliczono przyspieszenie. Przy użyciu II zasady Newtona wyznaczono siłę tarcia.

2.6.2. W lewo.



Tarcie wyznaczono w ten sam sposób co dla ruchu w prawo.

Nie bardzo jest wiadomym z czego wynika zmiana siły hamującej wózek w połowie ruchu. Dla obu metod wyznaczania tarcia widoczna jest jednak różnica między ruchem wóзка w prawo i w lewo. Jest ona jednak na tyle niewielka, że można ją pominąć.

3. Model matematyczny.

Układ wahadła i wóзка można przedstawić za pomocą dwóch równań drugiego rzędu:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{q} (FmL \cos \theta - b m L \dot{x} \cos \theta - (M + m)mLg \sin \theta + m^2 L^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta)$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{q} [(I + mL^2)(-F + b\dot{x} - mL\dot{\theta}^2 \sin \theta) + m^2 L^2 g \sin \theta \cos \theta]$$

gdzie:

$$q = m^2 L^2 \cos^2 \theta - (M + m)(I + mL^2)$$

x - położenie wóзка

θ - kąt wychylenia wahadła

F - siła przyłożona do wahadła, pochodząca od silnika

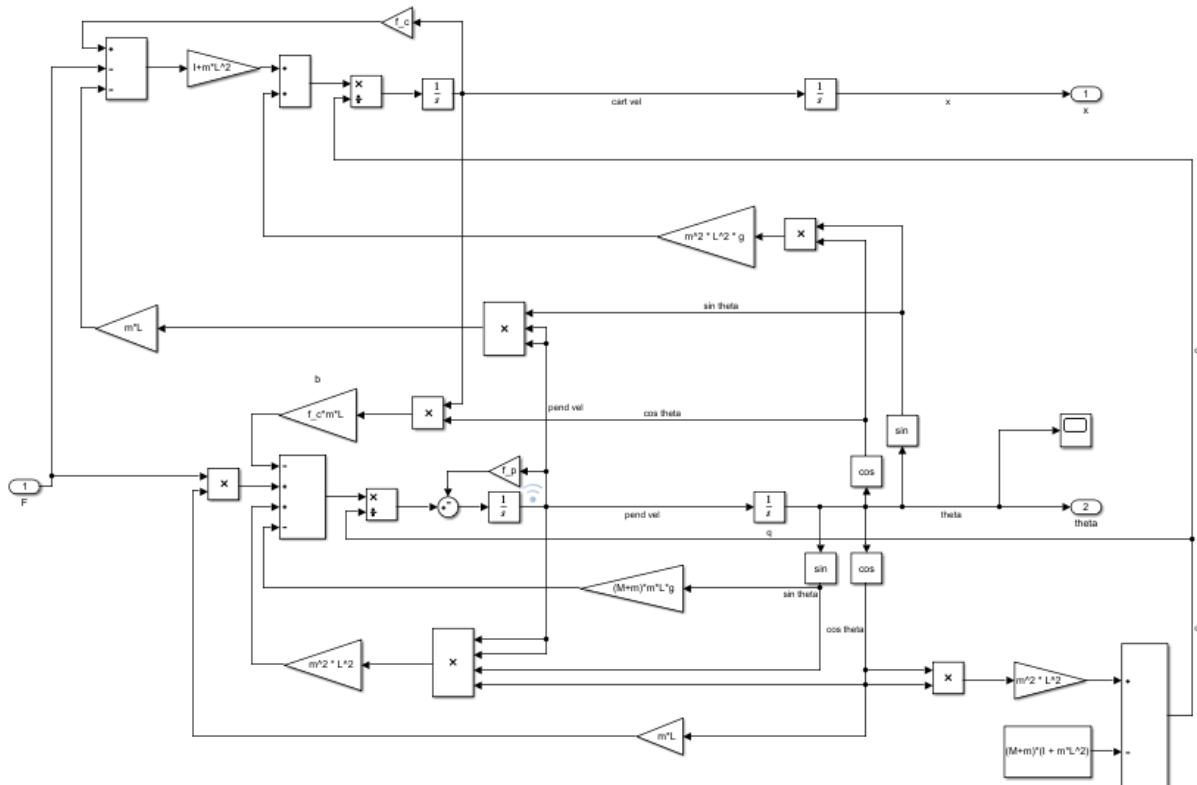
b - współczynnik tarcia kinetycznego wóзка

Pozostałe oznaczenia występują w tabeli 1. *zmierzone i obliczone wielkości fizyczne.*

W ramach układu można byłoby również uwzględnić dodatkowe czynniki, takie jak sprężystość linki, za pomocą której przekazywana jest siła pchająca wózek, lecz dla uproszczenia obliczeń zostały one pominięte.

4. Model symulacyjny układu i dostrajanie współczynników.

Na podstawie modelu matematycznego stworzono model symulacyjny w programie MATLAB Simulink. Zdecydowano się odwzorować model sprzed linearyzacji, by jak najwierniej przedstawić układ rzeczywisty, bez dodawania kolejnych uproszczeń.



Kolejne uruchomienia pozwoliły powtórzyć symulacje eksperymentów przeprowadzonych na modelu rzeczywistym. Dzięki temu porównano zebrane parametry z symulowanymi, co pozwoliło na dostrojenie współczynników takich jak tarcie kinetyczne wózka czy tarcie rotacyjne wahadła. Samo zestawienie wyników i porównanie z rzeczywistymi będzie bliżej omówione w kolejnym raporcie.

5. Linearyzacja modelu.

Na potrzeby implementacji sterowania warto zastosować liniowe przybliżenie modelu w punkcie pracy, tj. w pobliżu pionowego położenia wahadła w górę, dla którego $\theta_0 = 0$.

Dla tak zadanego kąta i jego bliskiego otoczenia można założyć następujące przybliżenia:

$$\sin \theta \approx \theta, \quad \cos \theta \approx 1, \quad \dot{\theta}^2 \approx 0, \quad I = 0$$

Wówczas równania z punktu 3. przyjmują następującą postać:

$$\ddot{\theta} = \frac{1}{ML} [(M + m)g\theta + b\dot{x} - F]$$

$$\ddot{x} = \frac{1}{M} (-mg\theta - b\dot{x} + F)$$

Wprowadźmy następujący wektor stanu:

$$\mathbf{x} = [\dot{\theta} \quad \theta \quad \dot{x} \quad x]^T$$

Wówczas można zapisać następujący model zlinearyzowany systemu, sprowadzony do postaci równań stanu:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u$$

gdzie:

$u = F$ - siła przyłożona do wózka

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{(M + m)g}{ML} & \frac{b}{ML} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{mg}{M} & -\frac{b}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{ML} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \end{bmatrix}$$