



ĆWICZENIE 36

BADANIE DRGAŃ TŁUMIONYCH WAHADŁA FIZYCZNEGO

Cel ćwiczenia: Wyznaczenie podstawowych parametrów drgań tłumionych: okresu (T), częstotliwości (f), częstotliwości kołowej (ω), współczynnika tłumienia (β), logarytmicznego dekrementu tłumienia (Λ).

Zagadnienia: Drgania, drgania harmoniczne, wahadło fizyczne, drgania swobodne, drgania tłumione, drgania anharmoniczne.

1 Wprowadzenie

Wahadłem fizycznym nazywamy bryłę sztywną wykonującą wahania/drgania względem poziomej osi obrotu, jak na rys.1, na skutek działania momentu siły ciężkości względem punktu zawieszenia. Na wychylone o kąt α wahadło, działa moment siły ciężkości \mathbf{P} względem osi obrotu „O” o wartości $M = -mgdsin\alpha$, przy czym m jest masą wahadła, g -przyspieszenie ziemskie, zaś d -odległość środka masy wahadła od osi obrotu.

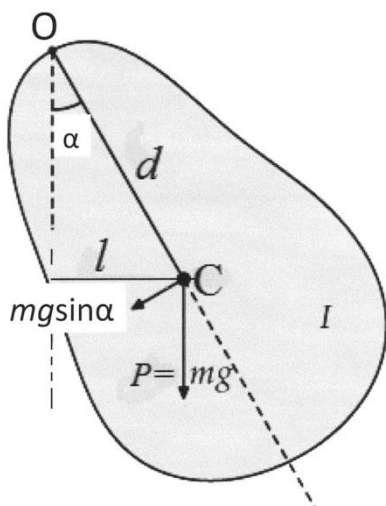
Dla wahadła fizycznego, o momencie bezwładności I , wykonującego drgania swobodne w polu grawitacyjnym wokół osi obrotu, druga zasada dynamiki dla ruchu obrotowego przyjmuje postać:

$$I \cdot \frac{d^2}{dt^2} \alpha = -m \cdot g \cdot d \cdot \sin\alpha \quad (1)$$

Wprowadzając oznaczenie: $\omega_0^2 = \frac{m \cdot g \cdot d}{I}$ (2)

równanie to zapisać można następująco:

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha + \omega_0^2 \sin\alpha = 0 \quad (3a)$$



Rys.1

Wahadło fizyczne o środku masy C zawieszone w punkcie O. Kąt α oznacza wychylenie wahadła z punktu równowagi, zaś P jest ciężarem wahadła ($P=mg$).

Dla małych wychyleń można założyć: $\sin\alpha \approx \alpha$ (α wyrażone jest w mierze łukowej), i równanie powyższe sprowadza się do równania ruchu oscylatora harmonicznego:

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha + \omega_0^2 \alpha = 0 \quad (3b)$$

Jego rozwiązaniem jest funkcja opisująca zależność wychylenia wahadła od czasu:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0), \quad (4)$$

przy czym α_0 jest amplitudą drgań swobodnych, zaś φ_0 jest fazą początkową drgań. Częstotliwość kołowa drgań swobodnych (ω_0), ich okres (T_0) i częstotliwość (f_0) są powiązane następująco:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (5)$$

Jeśli amplituda drgań wahadła nie jest mała (np. $\alpha_0 > 20^\circ$, czyli $\alpha_0 > 0,36$ rad, patrz tabela I), wówczas rozwiązanie równania (3a) jest bardziej złożone, a drgania są drganiami anharmonicznymi. Opisać je można wówczas wyrażeniem:

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + c_1 \alpha_0 \cos(3\omega t + \varphi_0), \quad (6)$$

w którym drugi człon reprezentuje trzecią harmoniczną. Amplituda tej harmonicznnej jest jednak niewielka w porównaniu z amplitudą α_0 , pierwszej harmonicznnej, i wynosi $c_1 \alpha_0$ ($c_1 \ll 1$). Wyższe harmoniczne (tzn. 5-tą, 7-mą... pełnego rozwiązania równania ruchu: $\alpha(t) = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0) + c_1 \alpha_0 \cos(3\omega t + \varphi_0) + c_5 \alpha_0 \cos(5\omega t + \varphi_0) + c_7 \alpha_0 \cos(7\omega t + \varphi_0) + \dots$, pominięto ze względu na ich znikomy wkład, tj. jeszcze mniejszy niż 3-ciej harmonicznnej.

Równanie (6) stanowi rozwiązanie dynamicznego równania ruchu anharmonicznego, równ.(3a), ($\frac{d^2}{dt^2} \alpha + \omega_0^2 \alpha - \frac{1}{6} \omega_0^2 \cdot \alpha^3 = 0$), w którym zastosowano przybliżenie: $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3$.

Przybliżenie to aproksymuje funkcję sinus w zakresie od zera do 60° z dokładnością poniżej 1,2% (patrz tabela I). Wahadło takie wykonuje drgania z częstotliwością kołową ω zależną od amplitudy drgań α_0 , określoną przybliżoną relacją:

$$\omega = \omega_0 (1 - c_2 \cdot \alpha_0^2), \quad \text{gdzie } c_2 = \frac{1}{16} \quad (7)$$

Jak widać zwiększenie amplitudy drgań powoduje zmniejszenie ω częstotliwości kołowej drgań w odniesieniu do drgań harmonicznnych ω_0 (tzn. o małej amplitudzie drgań). Względna zmiana częstotliwości drgań określona na podstawie tego równania ($\frac{\omega - \omega_0}{\omega_0} = -\frac{1}{16} \cdot \alpha_0^2$) wynosi dla $\alpha_0 = 20^\circ$ jedynie 0,8%, osiągając przy 40° 3%, zaś przy 70° już 9,3%. Różnice te łatwo zauważyć eksperymentalnie mierząc okres drgań wahadła dla różnych α_0 .

Rozważmy teraz wpływ tłumienia ośrodka na przebieg drgań wahadła. Jeśli założymy, że tłumienie ośrodka jest określone przez współczynnik β , wówczas równanie dynamiczne ruchu (3a) uwzględniające dodatkowy wpływ oporu ośrodka (np. powietrza) przedstawić można w postaci:

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha + 2\beta \frac{d}{dt} \alpha + \omega^2 \sin \alpha = 0 \quad (8a)$$

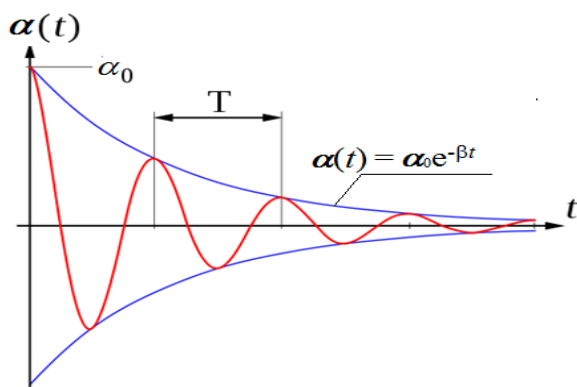
Jeśli wychylenia wahadła nie są zbyt duże ($\sin \alpha \approx \alpha$, patrz tabela I i komentarz w rozdz. 5), wówczas równanie to upraszcza się do postaci (8b). W przeciwnym przypadku należałoby rozwiązać ogólniejsze równanie zakładając np. $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6} \alpha^3$.

$$\frac{d^2}{dt^2} \alpha + 2\beta \frac{d}{dt} \alpha + \omega^2 \alpha = 0 \quad (8b)$$

Dla niezbyt dużych tłumień ośrodka (tzn. gdy $\beta < \omega$) oraz pomijając człon anharmoniczny (patrz równ.(4) i (6)) rozwiązaniem dynamicznego równania ruchu określającą zależność wychylenia od czasu $\alpha(t)$, określa równanie (zwane kinematycznym równaniem ruchu drgającego tłumionego):

$$\alpha(t) = \alpha_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0) \quad (9)$$

Przebieg ten zilustrowano na rys.2.



Rys.2
Zależność wychylenia α od czasu t dla drgań tłumionych o okresie drgań T i współczynniku tłumienia β .

W równaniu (9) ω jest częstotliwością kołową drgań tłumionych zdefiniowaną następująco:

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}, \quad (10)$$

przy czym f oznacza częstotliwość drgań tłumionych, zaś T jest ich okresem. Okazuje się, że częstotliwość kołowa drgań tłumionych ω różni się od częstotliwości kołowej ω_0 dla drgań swobodnych:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \quad (11)$$

Jednak dla małych wartości współczynników tłumienia różnice między ω i ω_0 mogą być niezauważalne eksperymentalnie, gdy $\beta = 0$, $\omega = \omega_0$.

Amplituda drgań tłumionych zmienia się wykładniczo (w tym przypadku, mówimy często eksponencjalnie) z czasem:

$$A(t) = \alpha_0 e^{-\beta t} \quad (12)$$

Logarytmując obustronnie powyższe wyrażenie otrzymujemy:

$$\ln A(t) = \alpha_0 - \beta t \quad (13)$$

Równanie to przedstawia prostą o współczynniku nachylenia $-\beta$. Wobec tego mając z pomiarów wykres zależności $\ln [A(t)] = F(t)$ można łatwo określić wartość współczynnika tłumienia ośrodka β .

W przypadku drgań tłumionych wprowadza się pojęcie logarytmicznego dekrementu tłumienia:

$$\Lambda = \ln \frac{A_n}{A_{n+1}} \quad (14a)$$

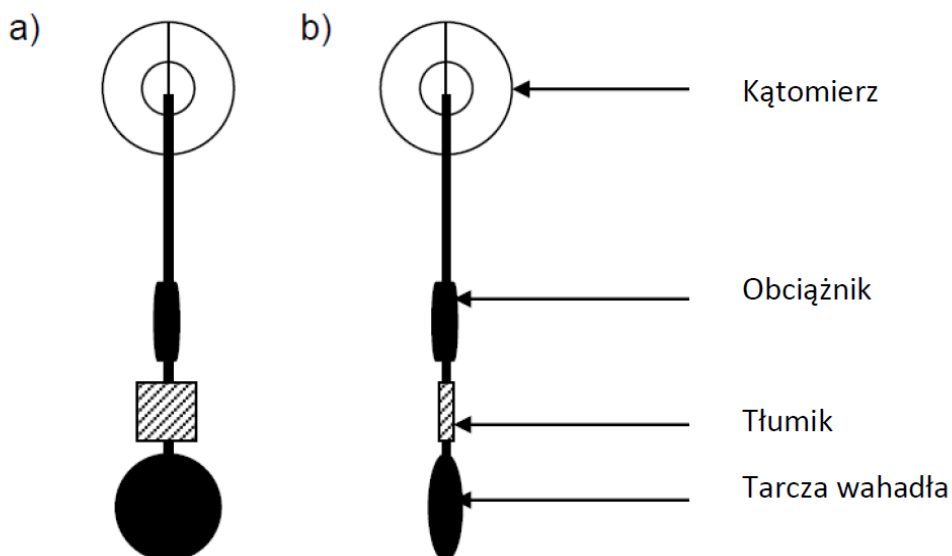
zdefiniowanego jako logarytm naturalny ilorazu dwóch kolejnych amplitud drgań. Ponieważ dla niedużych tłumień ośrodka różnice między amplitudami kolejnych drgań są nieznaczne korzystanie z powyższej formuły jest obciążone znacznym błędem. Można pokazać, że relację tą można przekształcić do postaci:

$$\Lambda = \frac{1}{N} \ln \frac{A_0}{A_N} = \beta T, \quad (14b)$$

przy czym A_N jest dowolną wybraną amplitudą drgań, zaś N oznacza ilość drgań odpowiadającą przejściu od A_0 do A_N .

2. Zasada pomiaru i układ pomiarowy

Na rys.3 zilustrowano schematycznie układ pomiarowy składający się z wahadła fizycznego, z regulowanymi elementami (obciążnik oraz tarcza wahadła). Układ ten należy skonfigurować na podstawie sugestii prowadzącego zajęcia. W pierwszej części ćwiczenia należy wyznaczyć okres drgań wahadła dla różnych wartości amplitudy wychylenia (α_0). W tym eksperymencie należy zastosować minimalne, możliwe do osiągnięcia, tłumienie układu (drgania swobodne lub quasi-swobodne). Tarcza wahadła powinna być ustawiona w płaszczyźnie drgań, jak na rys.3a. W drugiej części ćwiczenia należy zbadać wpływ tłumienia ośrodka na drgania wahadła. Tłumienie można „regulować” poprzez zmianę ustawienie tarczy wahadła oraz tłumika (lub tłumików), co przedstawiono na rys.3 (a) i (b).



Rys.3
Układ pomiarowy
stosowany
w ćwiczeniu.

3. Zadania do wykonania

A) Pomiary:

- A1 Dla minimalnego tłumienia ośrodka (tarcza wahadła i tłumik ustawione w płaszczyźnie ruchu wahadła, rys.3a), należy wyznaczyć okres drgań wahadła. W tym celu mierzymy czas trwania np. $N=100(50)$ drgań wahadła. Pomiary należy wykonać dla różnych amplitud wychylenia w zakresie od $5^\circ(10^\circ)$ do 50° (co 5° lub 10°).
- A2 Zbadać wpływ tłumienia ośrodka na przebieg drgań wahadła fizycznego. aaaaaa
Aby przeprowadzić to doświadczenie należy odpowiednio ustawić (wg. wskazówek prowadzącego) tłumik i tarczę wahadła (patrz rys.3). Następnie wyprowadzić wahadło z położenia równowagi o kąt α_0 , dla którego amplituda wychylenia wynosi A_0 . Wartość α_0 przyjąć na podstawie sugestii prowadzącego (można założyć $\alpha_0 = 30^\circ \div 35^\circ$). Wprawiając w ruch wahadło, należy zmierzyć i zanotować czas, po którym wahadło zmniejszy amplitudę drgań z 35° do 25° , do 15° i do 5° . (lub też z 30° , do 25° , do 20° do 15° i do 10°). Pomiary w tym punkcie należy powtórzyć trzykrotnie i przeprowadzić dla dwóch różnych tłumień.
- A3 Zmierzyć okres drgań tłumionych wahadła, dla ustawień oraz tłumień wahadła takich samych jak w punkcie A2. W tym celu zmierzyć czas trwania np. $N=100$ (50) drgań wahadła.

B) Opracowanie wyników:

- B1 Na podstawie pomiarów w punkcie A1, wyznaczyć dla różnych amplitud drgań α_0 : okres drgań wahadła (T), jego częstotliwości drgań (f) oraz częstotliwość kołową (ω). Określić niepewności wszystkich wyznaczonych w tym punkcie wielkości.
- B1.1 Na podstawie wyników w punkcie B1 oraz równania (7), stosując metodę regresji liniowej, wyznaczyć częstotliwość kołową ω_0 drgań swobodnych oraz współczynnik c_2 w tym równaniu. W tym celu wykonać wykres zależności $\omega = \omega_0 - c_2 \cdot \omega_0 \cdot \alpha_0^2$. Jest to równanie prostej typu $y = ax + b$, gdzie $a = -c_2 \cdot \omega_0$ oraz $b = \omega_0$. Sprawdź, czy c_2 jest bliskie wartości c_2 w równ. (7)?

- B2 Na podstawie pomiarów w punkcie A3 wyznaczyć okres drgań tłumionych, częstotliwość drgań tłumionych oraz częstotliwość kołową.
- B3 Dla określonego stałego tłumienia układu uśrednić wyniki uzyskane w punkcie A2 z wielokrotnych pomiarów. Uwaga: wartości $A(t)$ należy podać w radianach.
- B3.1 Wyznaczyć współczynnik tłumienia ośrodka β , bazując na wynikach w punkcie B3. W tym celu można skorzystać z równania (13): $\ln A(t) = \alpha_0 - \beta \cdot t$. Należy więc wykonać wykres zależności $y = ax + b$, przy czym $y = \ln A(t)$, zaś $x = t$. Wyniki pomiarów aproksymować linią prostą, za pomocą metody regresji liniowej. Łatwo zauważyć, że wartość liczbową współczynnika kierunkowego prostej jest równa wartości liczbowej współczynnika tłumienia ośrodka: $\beta = -a$.
- B3.2 Opracowanie w punkcie (B3.1) powtórzyć dla innego tłumienia (tłumień) ośrodka.
- B3.3 Określić niepewność współczynnika tłumienia ośrodka.
- B3.4 Wyznaczyć logarytmiczny dekrement tłumienia drgań tłumionych ($\Delta = \beta T$) oraz jego niepewność. Za okres drgań przyjąć T wyznaczone w punkcie B2.

4. Pytania:

- (1) Przedstaw równanie ruchu drgań harmonicznym wahadła fizycznego i wyjaśnij sens fizyczny użytych wielkości fizycznych i zastosowanych symboli matematycznych.
- (2) Napisz równanie ruchu drgań harmonicznym tłumionych i wyjaśnij sens fizyczny użytych wielkości fizycznych i zastosowanych symboli matematycznych.
- (3) Podaj zależność wychylenia od czasu dla drgań swobodnych oraz dla drgań tłumionych i wyjaśnij sens fizyczny użytych wielkości fizycznych i zastosowanych symboli matematycznych.
- (4) Dla drgań swobodnych zdefiniuj i wyjaśnij pojęcia: okres drgań, częstotliwość, częstotliwość kołowa.
- (5) Dla drgań tłumionych zdefiniuj pojęcia: częstotliwość kołowa drgań, współczynnik tłumienia oraz logarytmiczny dekrement tłumienia.
- (6) Przedstaw metody szacowania niepewności pomiarowych wyznaczonych doświadczalnie wartości wielkości fizycznych.

5. Uzupełnienie

Aby ilościowo określić sens użytych wcześniej przybliżeń stosowanych przy rozwiązywaniu równań ruchu drgającego, w tabeli I podano wartości $\sin \alpha$ i α (w radianach), a także wartości błędu przybliżenia, tj. błędu względnego Δ_1 jaki popełniamy zastępując $\sin \alpha$ przez α . Jak widać błąd tego przybliżenia wynosi dla $\alpha_0 = 10^\circ$, $\Delta_1 = 0,51\%$, dla $\alpha_0 = 20^\circ$, $\Delta_1 = 2,1\%$, zaś przy $\alpha_0 = 30^\circ$, $\Delta_1 < 5\%$. Z przedstawionych danych wynika, że wprowadzone pojęcie „małe wychylenie” zależy od przyjętej dokładności przybliżenia $\sin \alpha$ przez α .

Zobaczmy teraz jak wygląda przybliżenie $\sin \alpha$ za pomocą rozwinięcia w szereg Taylora wokół $\alpha_0 = 0$, czyli $\sin \alpha \approx \alpha - \frac{1}{6}\alpha^3$, a także ile wynosi wartości błędu względnego Δ_2 , jaki popełniamy stosując to przybliżenie (patrz tabela I). Widać, że dla kątów aż do $\alpha_0 = 55^\circ$, uzyskuje się dość dobre przybliżenie $\sin \alpha$, gdyż $\Delta_2 < 1\%$.

Skomentowaniu wymaga również udział drgań anharmonicznym wahadła. Jeśli weźmiemy pod uwagę wyższe harmoniczne drgań (3-cią, 5-tą,...), ich udział nie jest wielki. Spróbujmy oszacować ilościowo wkład „największej” z nich, czyli 3-ciej harmonicznej. Z rozwiązania anharmonicznego równania ruchu metodami przybliżonymi otrzymuje się: $c_1 = \frac{1}{192} \cdot \alpha_0^2$. Amplituda tej harmonicznej ($c_1 \alpha_0 \cos(3\omega t + \varphi_0)$) np. dla $\alpha_0 = 35^\circ$, wynosi: $c_1 \alpha_0 \approx 0.002 \alpha_0$, co stanowi zaledwie 0.2% amplitudy drgania podstawowego ($\alpha_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$) i jest poza możliwością rejestracji w zastosowanych zestawach pomiarowych. Widać więc, że wprowadzenie drgań anharmonicznym powoduje (i) zauważalne zmiany częstotliwości drgań, jednak (ii) występujące wyższe harmoniczne mają jedynie aspekt teoretyczny, ze względu na bardzo małe wartości ich amplitud.

Tabela I

Tabela wartości $\sin\alpha$, α (wyrażonego w radianach) oraz przybliżenia $\alpha - \frac{\alpha^3}{6}$ dla różnych kątów α mierzonych w stopniach. Wielkości Δ_1 i Δ_2 przedstawiają odpowiednio względne dokładności przybliżeń $\sin\alpha$ za pomocą α oraz $\alpha - \frac{\alpha^3}{6}$: $\Delta_1 = \left| \frac{\sin\alpha - \alpha}{\alpha} \right| \cdot 100\%$, $\Delta_2 = \left| \frac{\sin\alpha - (\alpha - \frac{\alpha^3}{6})}{(\alpha - \frac{\alpha^3}{6})} \right| \cdot 100\%$

α [°]	$\sin\alpha$	α [rad]	$\alpha - \frac{\alpha^3}{6}$	Δ_1 [%]	Δ_2 [%]
5	0,08716	0,08727	0,08716	0,13	0,0009
10	0,17366	0,17454	0,17365	0,51	0,0036
15	0,25883	0,26181	0,25882	1,2	0,0043
20	0,34203	0,34908	0,34199	2,1	0,012
25	0,42263	0,43635	0,4225	3,2	0,030
30	0,50002	0,52362	0,49969	4,6	0,066
35	0,57359	0,61088	0,57289	6,1	0,13
40	0,6428	0,69815	0,64144	8	0,22
45	0,70712	0,78542	0,70467	10	0,35
50	0,76606	0,87269	0,76192	13	0,55
55	0,81917	0,95996	0,81252	15	0,82
60	0,86604	1,04723	0,85582	18	1,2
65	0,90632	1,1345	0,89113	21	1,8
70	0,93971	1,22177	0,91781	24	2,4

Opracował: Tadeusz Wiktorczyk

1.02.2015