

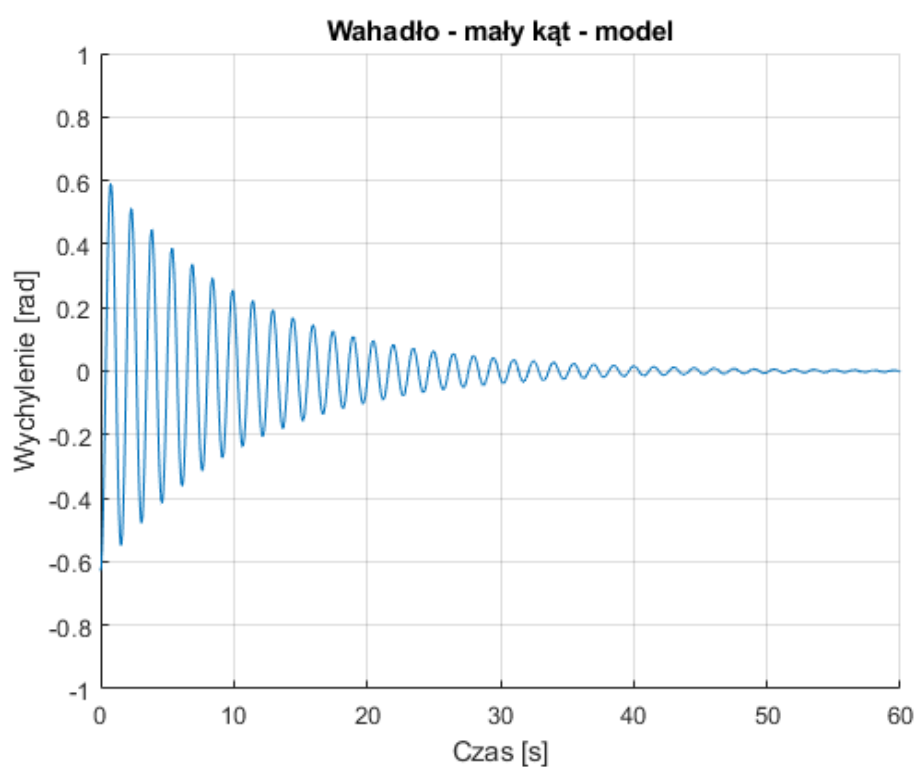
Laboratorium Problemowe - odwrócone wahadło

Raport 5.

Jakub Poręba, Tomasz Molęda

1. Weryfikacja poprawności modelu symulacyjnego

1.1 Okres wahadła oraz czas tłumienia dla małego kąta

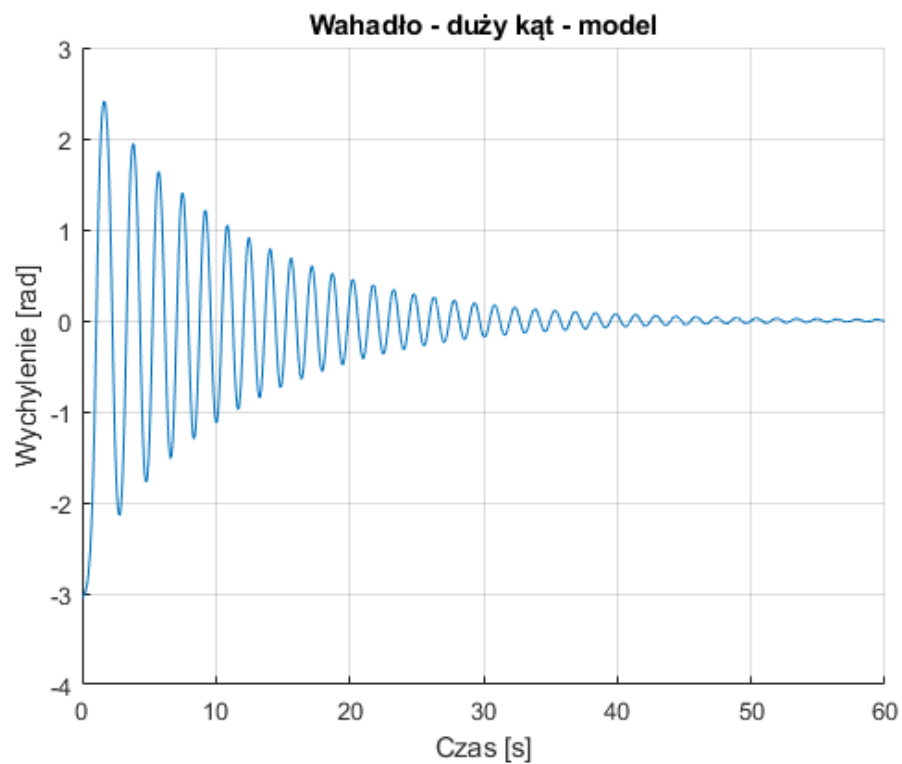


Z symulacji wyznaczono średni okres dla pierwszych 12 oraz 30 wahań dla kąta początkowego $\alpha = \pi/5$ rad od położenie równowagi.

- 12 wahań - $T_{12} = 1.5075$ s
- 30 wahań - $T_{30} = 1.5053$ s

Czas tłumienia wyniósł 51.22 s. Czas potrzebny, aby amplituda wahadła spadła poniżej 0.005 rad.

1.2 Okres wahadła oraz czas tłumienia dla dużego kąta



Z symulacji wyznaczono średni okres dla pierwszych 12 oraz 30 wahań dla kąta początkowego $\alpha = (\pi - 0.1)$ rad od położenie równowagi.

- 12 wahań - $T_{12} = 1.7433$ s
- 30 wahań - $T_{30} = 1.5987$ s

Czas tłumienia wyniósł 67.69 s. Czas potrzebny, aby amplituda wahadła spadła poniżej 0.005 rad.

2. Problem stabilizacji - regulator PID

PID to jeden z najczęściej stosowanych regulatorów, który jest wykorzystywany zarówno przez amatorów jak i profesjonalistów. Charakteryzuje się prostotą i uniwersalnością. Składa się z trzech członów:

- proporcjonalny P, reagujący na obecną wartość uchybu regulacji, czyli różnicy między wartością zadaną a aktualną wielkością sterowanej,
- całkujący I, przechowujący informacje o przeszłych wartościach uchybu,
- różniczkujący D, reagujący na przyszłe wartości uchybu.

Równanie szeregowie idealnego regulatora PID wygląda następująco:

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_d \frac{de(t)}{dt} \right),$$

gdzie:

$u(t)$ - sygnał sterujący (wyjście z regulatora)

$e(t)$ - uchyb regulacji

K_p, T_i, T_d - parametry poszczególnych członów i nastawy regulatora (odpowiednio dla członu proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego)

Jako że na potrzeby projektu wykorzystywane jest środowisko programistyczne pakietu MATLAB, warto przedstawić wzór zastosowany wewnątrz bločku PID w programie Simulink, będący zapisem tego samego równania w dziedzinie operatorowej:

$$P + I \frac{1}{s} + D \frac{N}{1 + N \frac{1}{s}}$$

gdzie:

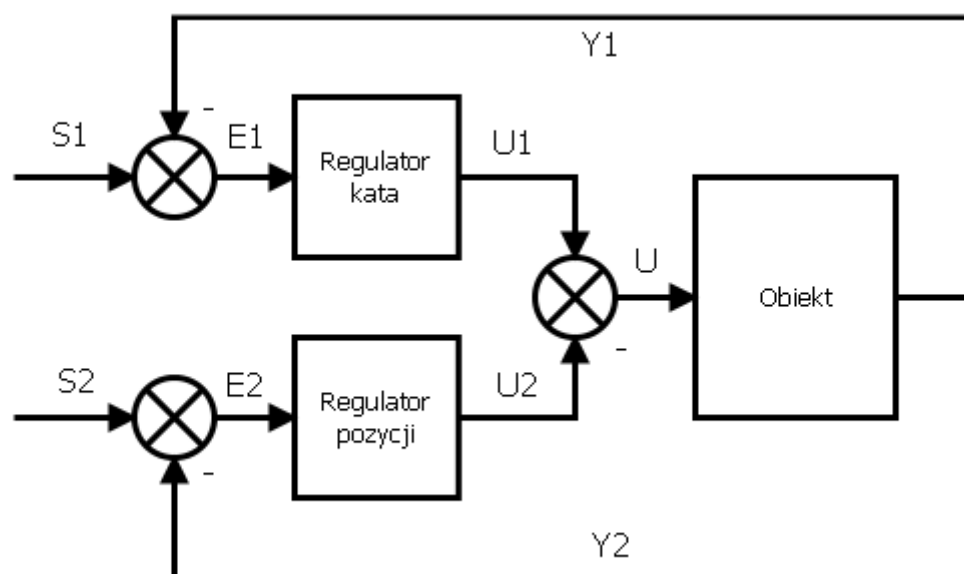
P, I, D - odpowiedniki parametrów K_p, T_i, T_d

N - współczynnik filtracji, dodatkowa zmienna charakteryzująca człon różniczkujący

Standardowo regulator PID jest stosowany wówczas, gdy jednym sygnałem sterującym chcemy regulować jeden sygnał wyjściowy modelu. W przypadku wahadła na wózku celem jest jednak regulacja zarówno kąta wychylenia wahadła jak i położenia wózka. Wciąż jednak posiadamy tylko jedną wielkość sterującą, tj. siłę, którą działamy na wózek, a dokładniej wartość wypełnienia sygnału PWM doprowadzonego do silnika poruszającego wózek.

W literaturze natrafiono na dwa podejścia: układ regulacji kaskadowej oraz układ regulacji dwóch równoległych regulatorów. Zdecydowano się na podejście drugie.

Układ taki można schematycznie przedstawić następująco:



Wyjaśnienie oznaczeń:

S_i - wartości zadane

E_i - uchyby regulacji

U_i - sterowanie, wyjście z regulatorów

Y_i - wyjścia obiektu (kąt wychyleńia, położenie wózka)

Na obiekt podawana jest różnica dwóch sterowań. Aby taki układ mógł działać poprawnie należy zapewnić, aby regulator kąta był dużo szybszy od regulatora położenia. Wówczas regulator kąta będzie traktował dodatkowe sterowanie jako zakłócenie wejścia układu. W przypadku agresywnych i bardzo dynamicznych nastaw obu regulatorów, będą one się nawzajem zakłócać zaburzając lub uniemożliwiając poprawną pracę całego układu.

Typowe podejście określa współczynniki poszczególnych członów jako dodatnie. Należy jednak pamiętać, że w przypadku sterowania kątem wychyleńia wymagane jest dodatnie, a nie ujemne sprzężenie zwrotne, co związane jest z tym, że dodatnia wartość sterowania przyczynia się do zmniejszenia wartości kąta wychyleńia wahadła w pozycji górnej. Aby nie zaciemniać obrazu i móc wciąż posługiwać się schematem powyżej, przyjęto, że współczynnik P dla członu proporcjonalnego sterowania wychyleńiem wahadła będzie przyjmował wartości ujemne.

Warto wspomnieć również, że aby móc w pełni usunąć uchyb ustalony kąt wychyleńia wahadła konieczne będzie zastosowanie członu całkującego. Inaczej niż w przypadku zerowania uchybu pozycji wózka. Jeżeli potraktujemy problem jako układ poruszającego się ciała o masie $M^* = M + m$, gdzie ruch wahadła stanowi jedynie

zakłócenie ruchu wózka, a sam wózek będzie stawiał pewien opór dynamiczny, możemy sformułować następujące równanie:

$$M^* \ddot{x} = F - b\dot{x}.$$

Dokonując obustronnej transformaty Laplace'a i wyznaczając transmitancję otrzymujemy:

$$K(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M^* s^2 + bs}$$

Człon $\frac{1}{s}$, czyli człon całkujący, można wyciągnąć przed całość. Świadczy to o tym, że mamy do czynienia z układem astatycznym pierwszego rzędu, a co za tym idzie do regulacji wystarczy teoretycznie sam regulator PD.

W procesie doboru nastaw wykorzystano wbudowane w pakiet MATLAB Control Design narzędzie automatycznego dostrajania regulatorów PID. Pozwolił on na bardzo łatwe otrzymanie nastaw dla regulatora pozycji wózka, natomiast w przypadku regulacji kąta wychylenia podawał wartości bardzo duże bądź bardzo małe, co być może w przypadku samej symulacji przyniosłoby dobre efekty, lecz w układzie rzeczywistym byłoby niemożliwe do implementacji. Nastawy dobierano więc metodą prób i błędów, symulując kolejne odpowiedzi i przebiegi regulowanych wartości. W rezultacie, mając na uwadze właściwości dynamiczne układu oraz istniejące ograniczenia, dobrano następujące wartości parametrów:

Dla regulacji kąta wychylenia wahadła:

$$P = -50, I = 9, D = 1.5$$

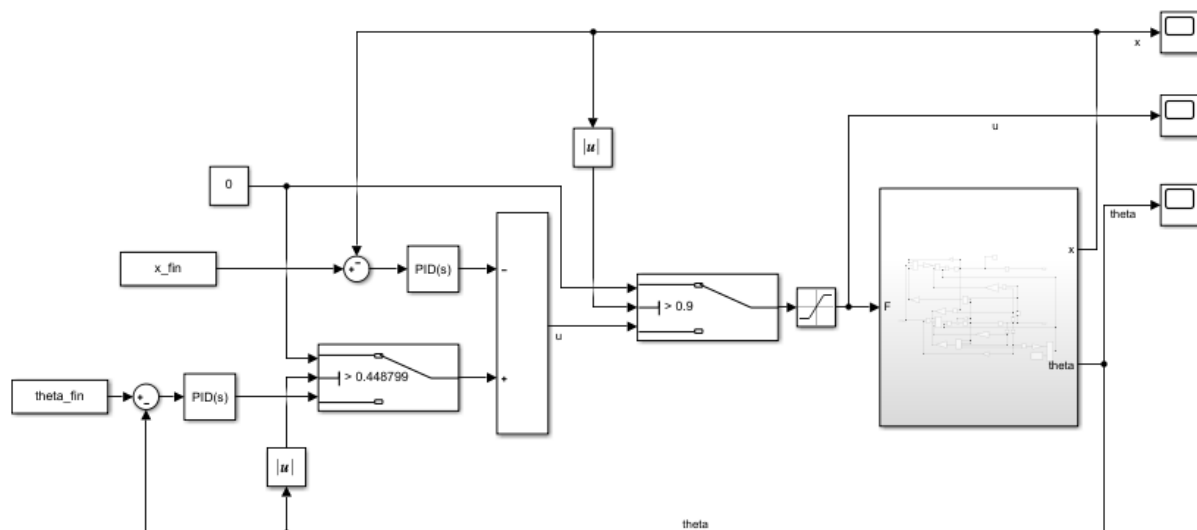
Dla regulacji pozycji wózka:

$$P = 0.9314, I = 0.0238, D = 3.29$$

Jak widać, narzędzie do automatycznego dostrajania nie wyzerowało zupełnie członu całkującego dla przypadku sterowania pozycją wózka.

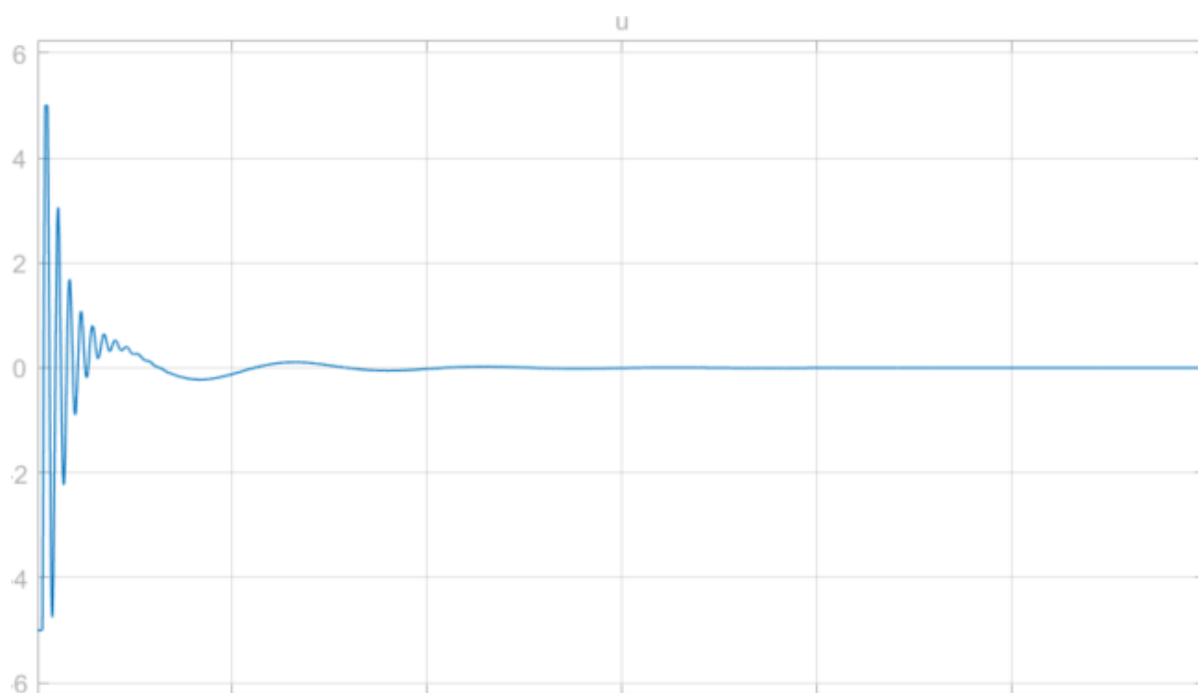
Zadbano również o to, by regulacja odbywała się jedynie w zakresie linearyzacji punktu pracy, a zatem dla niewielkich kątów wychyleń. W celu uniknięcia niepożądanego zachowania układu ustalono próg kąta o wartości $\pm \frac{\pi}{7}$, po przekroczeniu którego regulator kąta wychylenia przestaje działać. Pozwala to również ograniczyć zakres zmian położenia wózka. Podobnie w przypadku przekroczenia dozwolonego położenia wózka - wówczas sterowanie na ten moment jest odłączane całkowicie. Ostateczny sygnał sterowania ograniczono również do przedziału $<-5; 5> \text{ N}$, co można łatwo przeskalować dla modelu rzeczywistego.

Ostateczny schemat prezentuje się następująco:

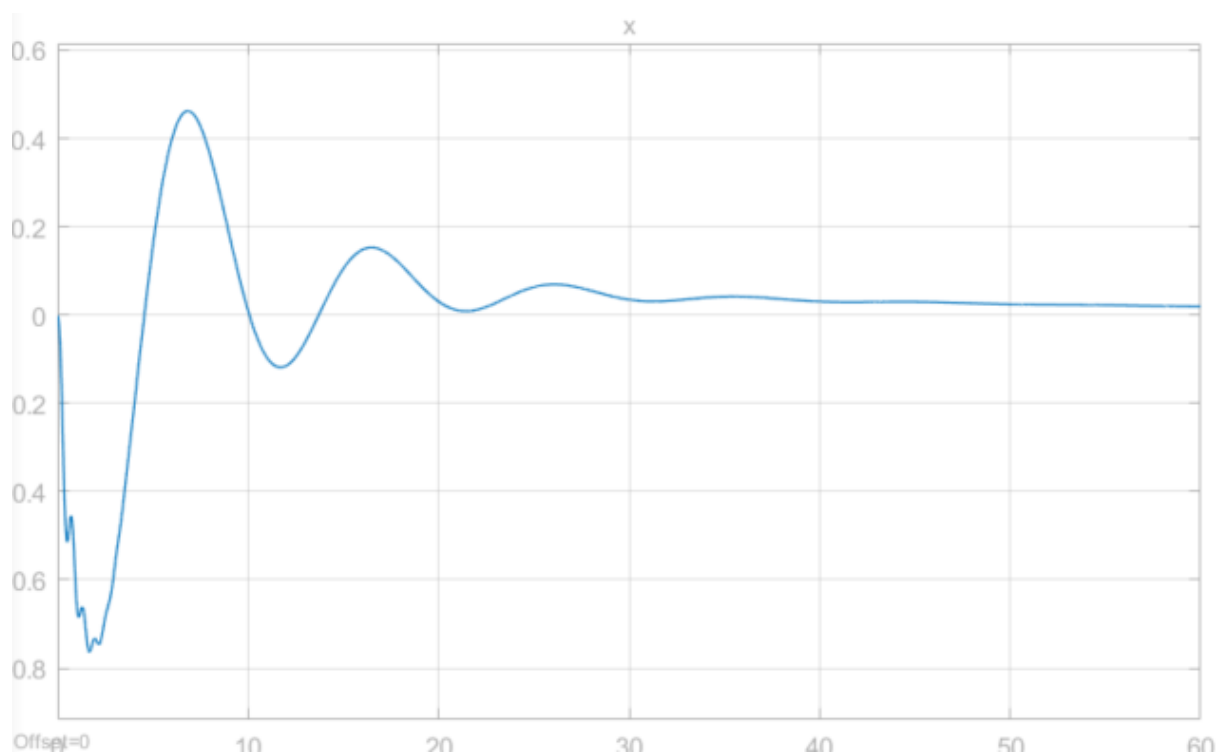


Przykładowy przebieg sterowania i wyjść dla wychylenia początkowego $\frac{\pi}{10}$:

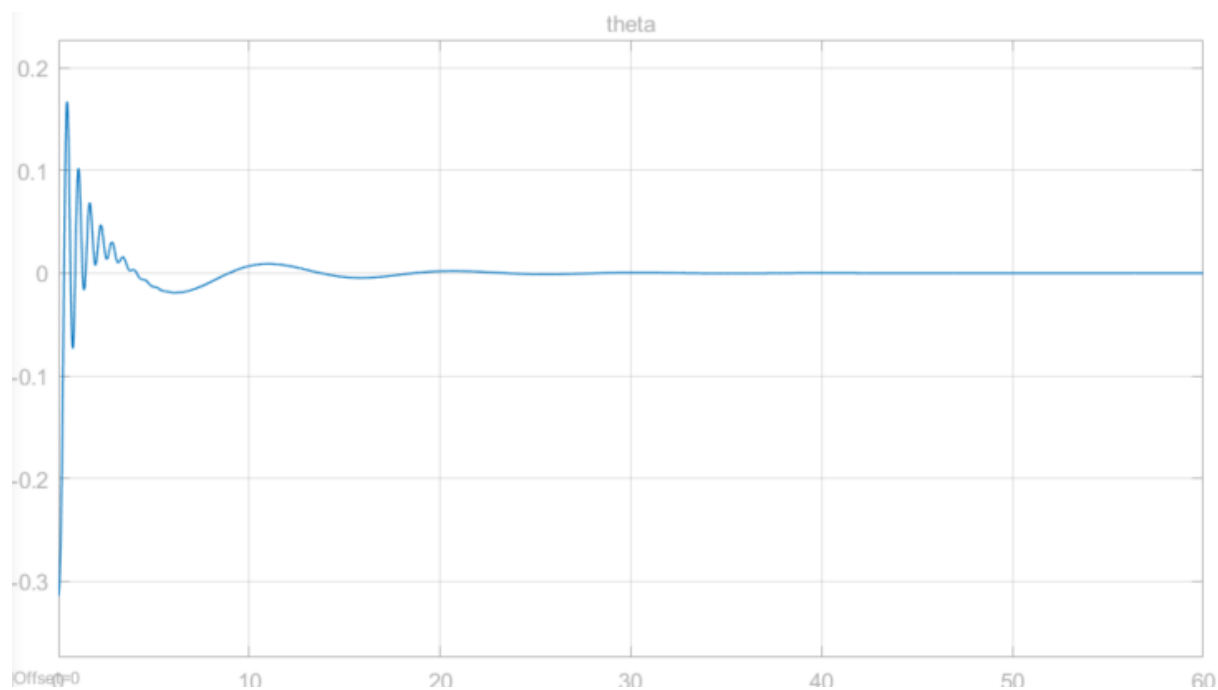
- Wartość siły sterującej wózkiem:



- Położenie wózka w czasie:



- Wychylenie wahadła w czasie:



Pokazano długi horyzont czasowy, aby utwierdzić się w przekonaniu, że układ pozostaje w zadanej pozycji.