

1. kolokvij iz KOMBINATORIKE (IŠRM)

29. november 2018

Priimek in ime: _____

Vpisna št.: _____ Vrsta: _____ Kolona: _____

1. (25 točk) Na voljo imamo paket običajnih igralnih kart. Vsaka karta je določena z barvo in vrednostjo. Barve so štiri: srce, karo, križ, pik. Vrednosti pa so števila od 2 do 10 in figure fant, dama, kralj, as. Vseh kart je torej 52, po 13 kart vsake barve.

Na koliko načinov lahko izberemo 8 kart tako, da vsaj ena barva ne nastopa? Nalogo rešite z uporabo načela vključitev in izključitev.

2. ($7 + 18 = 25$ točk) Naj bosta k in n naravni števili. Mesto sestavlja pravokotna mreža cest; k cest poteka v smeri sever-jug, n cest pa v smeri vzhod-zahod. Študent stanuje na skrajno jugozahodnem koncu mesta, fakulteta pa je na skrajno severovzhodnem delu mesta.
- (a) Na koliko načinov lahko študent pride od doma do fakultete po najkrajši poti (torej če vedno hodi le proti severu ali proti vzhodu)?
- (b) Kaj pa, če mora po vsaki cesti v smeri sever-jug prehoditi vsaj del poti (ceste ne sme samo prečkati)?

Vsako od nalog najprej rešite v splošnem, potem pa še izračunajte za primer $n = 10$ in $k = 7$.

3. (25 točk) Naj bodo n, i, j naravna števila. Katera od spodnjih enakosti je pravilna? Pravilno dokažite (kombinatoričen dokaz), za nepravilno po razložite, zakaj ni pravilna.

(a)
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(k, i) S(n-k, j) = S(n, i+j),$$

(b)
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(k, i) S(n-k, j) = \binom{i+j}{j} S(n, i+j).$$

4. ($5+10+10=25$ točk) *Steinerjev sistem* $S(2, 4, v)$ je 2-načrt s parametri $(v, 4, 1)$.

- (a) S parametrom v izrazite parametra b in λ_1 .
- (b) Pokažite, da Steinerjev sistem $S(2, 4, v)$ lahko obstaja le v primeru, ko je $v \equiv 1 \pmod{12}$ ali $v \equiv 4 \pmod{12}$.
- (c) Naj bo $X = \mathbb{Z}_{13}$ in $\mathcal{B} = \{\{i, i+1, i+3, i+9\} \mid i \in \mathbb{Z}_{13}\}$. Pokažite, da je \mathcal{B} Steinerjev sistem $S(2, 4, 13)$.

Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.