Načrti

1. Za katere od spodnjih parametrov obstaja načrt s takšnimi parametri? Utemeljite, zakaj ne obstaja oziroma ga konstruirajte.
   (a) $(6, 3, 1)$
   (b) $(5, 2, 1)$
   (c) $(8, 6, 3)$

2. Naj bo $\mathcal{B}$ načrt s parametri (v, k, λ) nad množico X in $\mathcal{B}' = \{X \backslash B;\ B \in \mathcal{B}\}$ komplementi množic iz $\mathcal{B}$. Pokažite, da je tudi $\mathcal{B}'$ načrt in poiščite njegove parametre.

3. Naj bo $X = E(K_5)$, v množici blokov $\mathcal{B}$ pa naj bodo vse množice povezav moči štiri naslednjih tipov $A : \{uv, uw, uz, ux\}$, $B : \{uv, vw, uw, zx\}$ in $C : \{uv, vw, wz, uz\}$. Pokažite, da je $\mathcal{B}$ načrt s parametri $(10, 4, 12)$. Pokažite, da je $\mathcal{B}$ tudi 2-načrt s parametri $(10, 4, 4)$ in 3-načrt s parametri $(10, 4, 1)$.

4. Naj bo $X = \{0, 1\}^n \backslash \{0\}^n$ množica vseh 0/1 zaporedij dolžine n brez zaporedja iz samih ničel. Za $u, v \in X$ definiramo $u + v \in \{0, 1\}^n$ takole:
   $$(u + v)_i = u_i + v_i \pmod 2.$$
   Pokažite, da je $\mathcal{B} = \{\{u, v, u + v\};\ u, v \in X, u \neq v\}$ potem 2-načrt s parametri $(2^n - 1, 3, 1)$. Koliko blokov ima tak načrt za $n = 3, 4$? Zapišite množico blokov za $n = 3$.

5. Naj bo $\mathcal{B}$ 2-načrt s parametri (v, k, λ_2). Pokažite, da potem $k(k - 1)$ deli $\lambda_2 v(v - 1)$.

6. *Steinerjev trojček* je 2-načrt s parametri $(v, 3, 1)$. Pokažite, da Steinerjev trojček lahko obstaja le v primeru, ko je $v \equiv 1 \pmod 6$ ali $v \equiv 3 \pmod 6$.

7. Naj bo n naravno število in $S \subseteq \mathbb{Z}_n$. Naj velja še, da so množice $S + i$, $i \in \mathbb{Z}_n$, med seboj vse različne. Pokažite, da je potem $\{S + i | \, i \in \mathbb{Z}_n\}$ načrt s parametri $(n, |S|, |S|)$.

8. (Presek, letnik 28 (2000/2001), številka 5, strani 264-268) Na predsedniških volitvah v Sloveniji leta 1997 je bilo 8 kandidatov. TV se je odločila, da v osmih oddajah predstavi 8 kandidatov tako, da v vsaki oddaji nastopijo po trije kandidati in vsak kandidat pride trikrat na vrsto. Pripravili so razpored, pri katerem sta se dva kandidata srečala po dvakrat.
   (a) Ali se da sestaviti razpored, pri katerem se vsak par kandidatov sreča največ enkrat? Če se to da, ga sestavite.
   (b) Ali se da sestaviti razpored, pri katerem se vsak par kandidatov sreča natanko enkrat?

Domača naloga

1. Naj bo $X = E(K_6)$, v množici blokov $\mathcal{B}$ pa naj bodo vse množice povezav moči tri, ki sestavljajo bodisi popolno prirejanje (torej tri povezave, ki nimajo skupnih krajišč) bodisi cikel dolžine tri. Pokažite, da je $\mathcal{B}$ načrt in določite njegove parametre. Ali je $\mathcal{B}$ tudi 2-načrt?

2. Elemente množice $X = \{0, 1, 2, \ldots, 15\}$ zložimo v kvadratno matriko

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 \end{bmatrix}.$$

Za vsak x, $0 \leq x \leq 15$, definiramo blok B_x, ki vsebuje vse elemente, ki so v isti vrstici ali istem stolpcu matrike A kot x, razen x. Naj bo $\mathcal{B} = \{B_x; 0 \leq x \leq 15\}$. Pokažite, da je $\mathcal{B}$ načrt in poiščite njegove parametre. Ali je $\mathcal{B}$ 2-načrt? Ali je $\mathcal{B}$ 3-načrt? V primeru pozitivnega odgovora tudi poiščite ustrezne parametre.

3. Prodekan za študijske zadeve bi rad dosegel, da bi vsak študent IŠRM izbral točno 4 izmed 7 matematičnih izbirnih predmetov. Poleg tega želi, da vsak predmet izbere enako število študentov.

   (a) Označimo z v število študentov in s k število študentov pri vsakem predmetu. Kakšna je zveza med v in k?

   (b) Zapišite problem, kako sestaviti ustrezen razpored, v jeziku načrtov. Sestavite razpored za $v = 7$ in $k = 4$.

4. Naj bo $\mathcal{B}$ množica blokov t-načrta nad množico X s parametri (v, k, λ_t). Izberimo $x \in X$ in naj bo $\mathcal{B}'$ množica blokov, ki jo dobimo iz $\mathcal{B}$ tako, da najprej odstranimo vse bloke, ki ne vsebujejo x, nato pa še iz preostalih blokov odstranimo x. Pokažite, da je $\mathcal{B}'$ $(t-1)$-načrt nad množico $X - x$ in poiščite njegove parametre.

5. *Hadamardova matrika* reda n je matrika H dimenzije $n \times n$, pri kateri so vsi elementi enaki 1 ali -1 in velja $HH^T = nI$.

   Dve Hadamardovi matriki sta *ekvivalentni*, če lahko eno dobimo iz druge s permutacijo vrstic/stolpcev oziroma nekatere vrstice/stolpce pomnožimo z -1. Vsaka Hadamardova matrika je ekvivalentna Hadamardovi matriki, pri kateri so v prvi vrstici in prvem stolpcu same enke. Takšna matrika je v *normalizirani obliki*.

   Naj bo H Hadamardova matrika reda $4n$ v normalizirani obliki.

   (a) Matriki H odstanimo prvo vrstico in prvi stolpec. Dobljeno matriko označimo s H'. Množico X naj sestavljajo vrstice matrike H', bloki $\mathcal{B}$ pa naj ustrezajo stolpcem matrike H': vrstica i je v bloku j, če je $h_{ij} = 1$. Pokažite, da je $\mathcal{B}$ načrt s parametri $(4n - 1, 2n - 1, 2n - 1)$. Pokažite, da je tudi 2-načrt s parametri $(4n - 1, 2n - 1, n - 1)$.

   (b) Matriki H odstanimo prvo vrstico. Dobljeno matriko označimo s H''. Množico X naj sestavljajo stolpci matrike H'', vsaka vrstica i matrike H'' pa ustreza dvema blokoma $\mathcal{B}$: v enem so stolpci, ki imajo na mestu i vrednost 1, v drugem pa tisti, ki imajo na mestu i vrednost -1. Pokažite, da je $\mathcal{B}$ 3-načrt s parametri $(4n, 2n, n - 1)$.

6. Kirkmanov problem šolark (1850). Petnajst šolark se sprehaja vsak dan v tednu v petih vrstah, po tri v vrsti. Njihove sprehode je treba organizirati tako, da nobeni dve ne bosta hodili v isti vrsti več kot enkrat. Predstavite problem v jeziku t-načrtov. Sestavite tudi ustrezno razporeditev.