

Izbori, binomski izrek

1. Na koncertu bo nastopilo $n \geq 2$, pevcev in m pevk, vsak bo odpel po eno točko sporeda. Na koliko načinov lahko sestavimo spored, če mora koncert začeti in končati pevec?
2. Na konferenci predava n govornikov. Na koliko načinov se lahko zvrstijo za govorniškim odrom, če govornik A ne sme biti na vrsti pred govornikom B ?
3. Na polici je 9 različnih knjig: 4 črne in 5 rdečih. Na koliko različnih načinov jih lahko uredimo, če
 - (a) ni nobenih dodatnih omejitev;
 - (b) rdeče knjige morajo biti skupaj;
 - (c) rdeče knjige morajo biti skupaj in črne knjige morajo biti skupaj;
 - (d) barve se izmenjujejo?
4. V podjetju z 11 zaposlenimi (7 žensk in 4 moški) morajo sestaviti skupino predstavnikov za sindikat. Na koliko načinov lahko to storijo, če
 - (a) je v skupini 5 članov, od tega 3 ženske in 2 moška?
 - (b) so v skupini 4 člani, od tega vsaj 2 ženski?
 - (c) so v skupini 4 člani, eden mora biti gospod Novak?
 - (d) so v skupini 4 člani, od tega 2 ženski in 2 moška, vendar gospod Novak in gospa Novak ne smeta biti hkrati v skupini?
5. V naslednjih nalogah bomo predpostavili, da imamo paket običajnih igralnih kart. Vsaka karta je določena z barvo in vrednostjo. Barve so štiri: srce, kara, križ, pik. Vrednosti pa so števila od 2 do 10 in figure fant, dama, kralj, as. Vseh kart je torej 52, po 13 kart vsake barve.
Na koliko načinov lahko izberemo 5 kart, da bodo imele
 - (a) 4 karte isto vrednost (poker)?
 - (b) 3 karte isto vrednost, preostali 2 karti pa tudi isto vrednost (fullhouse)?
 - (c) 3 karte isto vrednost, drugi 2 pa različni vrednosti (tris)?
 - (d) 5 zaporednih kart iste barve (barvna lestvica)?
 - (e) 5 kart iste barve, ki niso zaporedne (barva)?
 - (f) 5 zaporednih kart, ki niso iste barve (lestvica)?
 - (g) po dve karti z isto vrednostjo, preostala karta pa ima drugo vrednost (dva para)?
 - (h) točno dve karti z isto vrednostjo (par)?
6. Na koliko načinov lahko v vrsto postavimo 5 rdečih kroglic in 7 modrih kroglic?
7. Koliko je cikličnih permutacij množice $\{1, 2, \dots, n\}$?
8. Koliko je permutacij reda 10 nad množico z 12 elementi?
9. Domina je sestavljena iz dveh delov, na vsakem delu je lahko nekaj pik (od 1 do n), ali pa je prazen. V kompletu domin so vse možne različne domine.
 - (a) Koliko domin je v kompletu domin?
 - (b) Na koliko načinov lahko iz kompleta domin izberemo dve domini, da se bosta na enem delu ujemali?

Na obe vprašanji najprej odgovorite za splošen n in nato še izračunajte za $n = 6$.

10. Sladoledar ima na voljo 8 različnih okusov sladoleda. Na koliko različnih načinov lahko sestavi sladoledno kupo iz 6 kepic?
11. Koliko je petmestnih števil, pri katerih so števke urejene nepadajoče? To pomeni, da štejemo števila n oblike
$$n = 10^4 \cdot a_4 + 10^3 \cdot a_3 + 10^2 \cdot a_2 + 10 \cdot a_1 + a_0,$$
kjer je $1 \leq a_4 \leq a_3 \leq a_2 \leq a_1 \leq a_0$.
12. Poiščite koeficient pri x^{10} v razvoju binoma $(x^2 + 4)^8$.
13. Poiščite koeficiente pri x in x^2 v razvoju polinoma $(1 - 4x)^6(1 + 3x)^8$. Nasvet: po binomskem izreku vsakega posebej razvijte polinoma $(1 - 4x)^6$ in $(1 + 3x)^8$, nato pa premislite, kako dobiti samo koeficiente pri x in x^2 v produktu teh dveh polinomov.
14. Z uporabo binomskega izreka seštejte vrsti

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k \quad \text{in} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}.$$

15. Koliko podmnožic sede moči ima množica z n elementi? **Domača naloga.** Poiščite bijekcijo med množico vseh podmnožic množice $[n]$ sede moči in množico vseh podmnožic množice $[n]$ lihe moči.

Domača naloga

1. Pajek ima za vsako od svojih osmih nog svojo nogavico in čevelj (vsaka nogavica in vsak čevelj paše na točno eno nogo). Koliko je različnih vrstnih redov, na katere se pajek lahko obuje, če mora na vsako nogo najprej obuti nogavico in potem čevelj?
2. Dane so množice točk

$$A_1 = \{(i, 0); 1 \leq i \leq 10, i \in \mathbb{Z}\}, \quad A_2 = \{(0, j); 1 \leq j \leq 5, j \in \mathbb{Z}\} \quad \text{in} \quad A = A_1 \cup A_2.$$

Koliko različnih trikotnikov z oglišči iz množice A lahko sestavimo?

3. Profesor je predaval n let. Vsako leto je povedal na predavanjih k anekdot. Vsaj koliko anekdot je moral poznati, če v dveh različnih letih ni povedal istih k anekdot? Rešite nalogu še za primer $n = 10$ in $k = 4$.
4. Deset turistov in deset turistk si želi ogledati Blejski otok. Na koliko načinov si ga lahko ogledajo s 5 enakimi čolni, če morata v vsakem čolnu sedeti po dva moška in po dve ženski?
5. Na koliko načinov lahko postavimo k trdnjav na šahovnico dimenzije $m \times n$ tako, da se paroma ne napadajo?
6. K brivcu vkoraka nogometno moštvo (11 mož), v čakalnici pa je ravno 11 stolov. Na koliko načinov se lahko posedejo, če
 - (a) Andrej, Bojan in Cene ne želijo sedeti skupaj?
 - (b) Želi Bojan sedeti med Andrejem in Cenotom (ne sedijo nujno skupaj)?
7. Funkcija f je *idempotentna*, če velja $f \circ f = f$. Koliko je idempotentnih funkcij $f : [n] \rightarrow [n]$? Nasvet. Pokažite, da je $f : A \rightarrow A$ idempotentna natanko tedaj, ko za vsak $y \in f(A)$ velja $f(y) = y$.
8. Na koliko načinov lahko postavimo k trdnjav na šahovnico dimenzije $m \times n$ tako, da se paroma ne napadajo?