

Analiza 3 (IŠRM): 1. kolokvij

21. 11. 2022 18⁰⁰ – 20⁰⁰

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Dan je integral s parametrom

$$F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{a+x^2}, \quad a > 0.$$

a) (5) Preveri, da velja $F(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a}}$.

b) (20) Določi $F'(a)$ in od tod izračunaj $\int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$.

2. naloga (25 točk)

Dan je integral s parametrom

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x^a}}}.$$

a) (15) Za katere $a \in \mathbb{R}$ integral konvergira oz. divergira? Odgovor utemelji.

b) (10) V primeru, ko integral konvergira, ga izračunaj.

3. naloga (25 točk)

Naj bo $D \subseteq \mathbb{R}^2$ območje, omejeno s krivuljama $x = y^2$ in $x = 1$.

a) (15) Skiciraj območje D in nato na **oba** možna načina prevedi dvojni integral

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

na dvakratni integral.

b) (10) Dvojni integral izračunaj v primeru, ko je $f(x, y) = |y|e^{-x^2}$. Rezultat poenostavi.

4. naloga (25 točk)

Naj bo D štiristrana piramida v \mathbb{R}^3 z oglišči $(-1, -1, 0), (1, -1, 0), (1, 1, 0), (-1, 1, 0)$ in $(0, 0, 1)$. Izračunaj integral

$$\iiint_D \frac{x^2 + y^2}{1+z^2} dx dy dz.$$

Nasvet. Računanje si lahko nekoliko poenostaviš z upoštevanjem simetrije ter s primerno izbiro vrstnega reda integracije.