

# 1. kolokvij iz KOMBINATORIKE (IŠRM)

16. november 2023

Priimek in ime: \_\_\_\_\_

Vpisna št.: \_\_\_\_\_ Vrsta: \_\_\_\_\_ Kolona: \_\_\_\_\_

1. Dano je zaporedje naravnih števil  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .
  - (a) Koliko strnjene podzaporedij vsebuje to zaporedje? Koliko strnjene podzaporedij se začne z  $x_1$ ?
  - (b) Pokažite, da zaporedje  $x_1, x_2, \dots, x_n$  vsebuje strnjeno podzaporedje, katerega vsota je deljiva z  $n$ .
2. Permutacija  $\pi \in S_n$  vsebuje transpozicijo sosednjih elementov, če obstaja  $i \in [n - 1]$ , da velja  $\pi(i) = i + 1$  in  $\pi(i + 1) = i$ . Koliko permutacij iz  $S_n$  ne vsebuje transpozicije sosednjih elementov? Koliko je to za  $n = 8$ ?
3. Naj bo  $X = \mathbb{Z}_3^2$ , v množici  $\mathcal{B}$  pa naj bodo 3-elementne množice  $\{x, y, z\}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{Z}_3^2$ , za katere velja  $x + y + z = 0$ .
  - (a) Pokažite, da je  $\mathcal{B}$  načrt in določite njegove parametre  $v, k, \lambda, b$ . Ali je  $\mathcal{B}$  tudi 2-načrt? Ali je tudi 3-načrt?
  - (b) Naj bo sedaj  $X = \mathbb{Z}_4^2$ , bloke iz  $\mathcal{B}$  pa definiramo podobno kot prej kot 3-elementne množice  $\{x, y, z\}$ ,  $x, y, z \in \mathbb{Z}_4^2$ , za katere velja  $x + y + z = 0$ . Ali je  $\mathcal{B}$  načrt? V primeru, da je načrt, izračunajte tudi njegove parametre  $v, k, \lambda, b$ . Ali je  $\mathcal{B}$  tudi 2-načrt? Ali je tudi 3-načrt?
4. Za  $s \geq 1$  in  $n \geq k \geq 0$  definiramo pridruženo Lahovo število  $L_s(n, k)$  kot število razdelitev množice  $[n]$  na  $k$  linearно urejenih blokov, pri čemer vsak blok vsebuje vsaj  $s$  elementov.
  - (a) Določite  $L_s(n, 1)$  za  $n \geq 1$  in  $L_s(n, n/s)$ , če  $s$  deli  $n$ .
  - (b) Določite koeficiente  $a(n, k, s)$  in  $b(n, k, s)$ , da bo veljala rekurzivna zveza

$$L_s(n, k) = a(n, k, s) \cdot L_s(n - s, k - 1) + b(n, k, s) \cdot L_s(n - 1, k)$$

za  $n, k \geq 1$  in zvezo tudi utemeljite (kombinatoričen dokaz).

*Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.  
Vseeno pa ne pozabite napisati odgovorov!*