1. kolokvij iz KOMBINATORIKE (IŠRM)

20. november 2017

RЕŠITVE

Priimek in ime: ______________________________

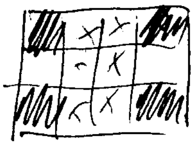
Vpisna št.: ____________ Vrsta: ____________ Kolona: ____________

1. (20 točk) Polja šahovnice velikosti 3×9 pobarvamo z belo in črno barvo. Pokažite, da potem v šahovnici lahko najdemo pravokotnik, ki ima vsa štiri vogalna polja iste barve. Ali to velja tudi, če z belo in črno barvo barvamo šahovnico velikosti 3×7?

a) vseh možnih stolpcev dolžine 3 s polji bele in črne barve je $2^3=8$

V šahovnici 3×9 je 9 stolpcev dolžine 3

$\Rightarrow$ vsaj dva stolpca sta enaka.



Ker imata vsaj dve polji iste barve,

dobimo pravokotnik z vogalnimi polji iste barve.

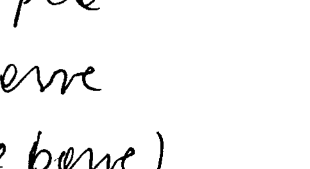
b) Če v šahovnici 3×7 najdemo dva stolpca iste barve, imamo pravokotnik z vogali iste barve po istem razmisleku kot prej.

Sicer so vsi stolpci različni. V tem primeru pa imamo vsaj en stolpec, ki ima vse polje iste barve, bšs vse polje so črna.

Od ostalih šestih sta vsaj dva stolpca takšna, da imata dve polji črne barve

(samo 4 stolpci imajo vsaj dve polji bele barve)

$\rightarrow$ lahko sestavimo ustrezen pravokotnik.



Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.

2. (15 + 15 = 30 točk) Na koliko načinov lahko črke besede *MATEMATIKA* uredimo tako, da se črka *A* nikoli ne pojavi dvakrat zaporedoma? Kaj pa, če se nobeni dve enaki črki ne pojavita zaporedoma?

a) 1. rešitev: $\underbrace{\frac{10!}{2!2!3!}}_{\text{vse}} - \underbrace{\frac{9!}{2!2!}}_{AA} + \underbrace{\frac{8!}{2!2!}}_{AAA} = \underline{\underline{70560}}$

AAA (pri AA smo AAA šteli 2x)

2. rešitev: $\frac{7!}{2!2!} \cdot \binom{8}{3} = \underline{\underline{70560}}$

↖ vse črke razen A

umes na 8 mest vrinemo 3 A-je

3×A

3. rešitev vse − natanko 2× A − natanko 3×A $= \frac{10!}{2!2!3!} - \frac{8!}{2!2!} \cdot 7 - \frac{8!}{2!2!}$

↖ 7 mest kamor vrinemo A

b) A ... besede, pri katerih se A pojavi 2x

M

T

vse besede:

$$\frac{10!}{2!2!3!} = 151200$$

$$|A| = \underbrace{\frac{9!}{2!2!}}_{AA} - \underbrace{\frac{8!}{2!2!}}_{AAA \text{ (smo šteli 2x)}} = 80640$$

$$|M| = |T| = \frac{9!}{3!2!} = 30240$$

$$|M \cap T| = \frac{8!}{3!} = 6720 \quad (\underline{MM}, \underline{TT}, E, I, K, A, A, A)$$

$$|A \cap M| = |A \cap T| = \frac{8!}{2!} - \frac{7!}{2!} = 17640$$

↖ AAA smo prej šteli 2x

$$(2.\ \text{rešitev}) = \underbrace{\frac{7!}{2!}}_{AAA,\ TT} + \underbrace{\frac{7!}{2!} \cdot 6}_{AA,\ TT,\ \text{še en A vrinemo na 6 mest}} = 17640$$

$$|A \cap M \cap T| = 7! - 6! = 4320 = \underbrace{6!}_{AAA} + \underbrace{6! \cdot 5}_{AA,\ \text{tretji A vrinemo na 5 mest}}$$

↖ AAA šteli 2x

Skupaj $151200 - 80640 - 2 \cdot 30240 + 2 \cdot 17640 + 6720 - 4320 =$

$$\underline{\underline{47760}}$$

3. (25 točk) Koliko je poti od točke $(0,0)$ do točke $(12,5)$ v ravnini iz korakov dolžine 1 desno in navzgor, če pot začnemo in končamo s korakom v desno in nikoli ne naredimo dveh zaporednih korakov navzgor?

1. rešitev

med 12 korakov desno moramo vriniti 5 korakov navzgor (na 11 mest)

$\to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to \uparrow \to$

To lahko storimo na $\binom{11}{5} = \underline{462}$ načinov

2. rešitev

med 5 korakov navzgor moramo vriniti 12 korakov v desno (na 6 mest).

$\sqcup \uparrow \sqcup \uparrow \sqcup \uparrow \sqcup \uparrow \sqcup \uparrow \sqcup$

V $\underbrace{\text{6 škatel}}_{\text{mesta}}$ (razlikujemo, neprazne) je treba dati $\underbrace{\text{12 kroglic}}_{\text{koraki v desno}}$ (ne razlikujemo)

To lahko storimo na

$$\binom{12-1}{6-1} = \binom{11}{5} = \underline{462} \text{ načinov}$$

4. Naj bo $X = \{(x_1, \dots, x_6) \in \{0,1\}^6 \mid \sum_{i=1}^{6} x_i = 2\}$ in $\mathcal{B} = \{\{x, y, z\} \mid x+y+z = (1,1,1,1,1,1)\}$. Poiščite vse bloke, v katerih nastopa element $(1,1,0,0,0,0)$. Pokažite, da je $\mathcal{B}$ načrt in določite njegove parametre. Ali je $\mathcal{B}$ tudi 2-načrt? (25 točk)

a) poiskati je treba vse y, z, da bo $(1,1,0,0,0,0)+y+z=(1,1,1,1,1,1)$

$\{(1,1,0,0,0,0), (0,0,1,1,0,0), (0,0,0,0,1,1)\}$,

$\{(1,1,0,0,0,0), (0,0,1,0,1,0), (0,0,0,1,0,1)\}$,

$\{(1,1,0,0,0,0), (0,0,0,1,1,0), (0,0,1,0,0,1)\}$

8 (takšni bloki so trije: za 2. element neničelna mesta izberemo na $\binom{4}{2}/2 = 3$ načinov)

↑ vrstni red y in z ni pomemben

b) $v = \binom{6}{2} = 15$ (izmed 6 mest na dve postavimo enici)

9 $k = 3$ (vsak blok ima 3 elemente po def.)

$\lambda = 3$ (kot zgoraj: za poljuben $x \in X$ iščemo vse možnosti za y, z, da bo $x+y+z = (1,1,1,1,1,1)$

vsak element se pojavi v enako mnogo blokih, torej v $r=3$ blokih.

x vsebuje 2 enici: $y+z$ ima enice na 4 mestih, za y izberemo enici na $\binom{4}{2}$ načinov, s tem je z določen, ker smo vsako možnost šteli $2\times$ (vlogo y in z lahko zamenjamo), imamo $\binom{4}{2}/2 = 3$ možnosti)

$\Rightarrow \mathcal{B}$ je načrt s parametri $(15, 3, 3)$

c) $\mathcal{B}$ ni 2-načrt: par $((1,1,0,0,0,0), (0,0,1,1,0,0))$ se skupaj pojavi v enem bloku,

8 med tem ko se $(1,1,0,0,0,0)$ in $(0,1,1,0,0,0)$ ne pojavita v skupnem bloku.