Integriranje funkcij več spremenljivk

Dvojni integral

Naj bo funkcija

$$f:[a,b]\times[c,d]\longrightarrow \mathbb{R}$$

podana na nekem pravokotniku v $\mathbb{R}^2$. Naj bo D območje v tem pravokotniku. Radi bi definirali integral

$$\int_D f(x,y)$$

funkcije $f(x,y)$ po območju D. To pomeni, da bi radi "sešteli" vse vrednosti $f(x,y)$ za $(x,y)\in D$.

Postopamo podobno, kot pri integralu funkcije ene spremenljivke.

Najprej tvorimo integralske vsote. Razrežemo pravokotnik $[a,b]\times[c,d]$ na manjše pravokotnike s pomočjo mreže točk, položene na $[a,b]\times[c,d]$

Delitvi:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$$

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_m = d$$

pripadajoča delitev

$$\Delta = \{D_1, D_2, \dots, D_{m(\Delta)}\}$$

$m(\Delta)$ = število pravokotnikov v delitvi Δ.

Naj bo

$$\operatorname{diam} \Delta = \max_{k=1,\dots,m(\Delta)} \{ d(D_k) \}$$

in $d(D_k)$ dolžina diagonale D_k.

Definirajmo integralsko vsoto

$$I_\Delta(f) = \sum_{D_k \cap D \neq \emptyset} f(x_k, y_k)\, A(D_k).$$

Pri tem je $A(D_k)$ ploščina D_k in

$$(x_k, y_k) \in D_k$$

neka točka v D_k (poljubna).

<u>Definicija</u>: Število $I(f;D)$ je (dvojni) integral funkcije f po domeni D, če za $\forall \varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, tako da velja

$$\dim(\Delta) < \delta \Rightarrow |I(f;D) - I_\Delta(f)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Natančneje: za vsako delitev Δ, za katero velja $\dim(\Delta) < \delta$ in za vsako izbiro točk $(x_k, y_k) \in D_k$ velja (1).

Zapišemo lahko:

$$I(f;D) = \lim_{\dim(\Delta) \to 0} I_\Delta(f).$$

Običajne oznake:

$$\iint_D f(x,y)\, dD \quad \text{ali}$$

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{ali}$$

$$\iint_D f(x,y)\, dA \quad \text{ali}$$

$$\int_D f(x,y)\, dx\, dy \quad \text{ali}$$

$$\int_D f(x,y)\, dA$$

Definicija: Funkcija $f: D \to \mathbb{R}$ je integrabilna na D, če

$$\iint_D f(x,y)\, dA$$

obstaja.

Geometrijska interpretacija integrala

Volumen telesa ; Dvodimenzionalna masa

Izrek: Naj bo $D \subset \mathbb{R}^2$ omejeno območje in

$$f: D \longrightarrow \mathbb{R}$$

zvezna funkcija. Potem je na D integrabilna. Integral

$$\int_D f(x,y)\,dx\,dy$$

obstaja.

Za dokaz izreka je najbolje nekoliko natančneje "razdelati" definicijo integrala.

Definicija: Naj bo zaprt $D \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ in

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

funkcija. Naj bo $\{D_k\}$ delitev D in

$$M_k = \max_{x \in D_k} \{f(x)\}$$

$$m_k = \min_{x \in D_k} \{f(x)\}.$$

Spodnja vsota $s(f,\Delta)$ je podana s predpisom

$$s(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{N_k} m_k A(D_k)$$

in zgornja vsota je

$$S(f,\Delta) = \sum_{k=1}^{N_k} M_k A(D_k)$$

Naj bo $\{\Delta_n\}$ zaporedje delitev D, dobljenih z "razdeljevanjem". Potem avtomatično velja

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam}(\Delta_n) = 0.$$

Očitno velja:

$$s(f;\Delta_{n+1}) \geq s(f;\Delta_n), \quad n\in\mathbb{N}$$

in

$$S(f;\Delta_{n+1}) \leq S(f;\Delta_n), \quad n\in\mathbb{N}$$

Prav tako velja

$$s(f;\Delta_n) \leq S(f,\Delta_n) \quad n\in\mathbb{N}.$$

Zaporedje $\{s(f;\Delta_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ je naraščajoče in navzgor omejeno – limita $\lim s(f,\Delta_n)$ torej obstaja; enako za $\lim S(f,\Delta_n) =$

Če je $f(x)$ integrabilna na D velja tudi

$$\lim_{n\to\infty} s(f;\Delta_n) \le I \le \lim_{n\to\infty} S(f;\Delta_n)$$

Izrek: Če integral obstaja, velja:

$$\lim_{n\to\infty} s(f;\Delta_n) = \lim_{n\to\infty} S(f,\Delta_n) = I$$

Dokaz: Vaja:

Izrek lahko formuliramo tudi splošneje. (lahko opustimo predpostavko o "nadaljevanju" delitev.)

Torej:

Izrek: Naj bo f na D integrabilna. Potem velja:

$$\lim_{\operatorname{diam}(\Delta)\to 0} s(f,\Delta) = \lim_{\operatorname{diam}(\Delta)\to 0} S(f,\Delta) = I$$

velja tudi obratno.

Dokaz: Za vsako zaporedje Δ_n velja: zaporedji $s(f, \Delta_n)$ in $S(f, \Delta_n)$ sta konvergentni.

Če sta limiti enaki, potem je ta limita integral, torej integral obstaja.

Če integral obstaja, potem po def. integrala za $\forall$ ε obstaja δ, tako da je

Sklepanje: Za I velja isto kot za $S = \lim_{n\to\infty} S(f, \Delta_n)$

$$\operatorname{diam} \Delta < \delta \Rightarrow |s(f,\Delta) - I| < \varepsilon$$
$$|S(f,\Delta) - I| < \varepsilon$$

Torej limiti $\lim_{\operatorname{diam}\Delta \to 0} s(f,\Delta)$ in $\lim_{\operatorname{diam}\Delta \to 0} S(f,\Delta)$ obstajata in sta enaki.

Po trikotniški neenakosti

$$|S - s| \leq |\underbrace{S - I}_{<\varepsilon}| + |\underbrace{s - I}_{<\varepsilon}| < 2\varepsilon \quad \blacksquare$$

Izrek: Naj bo funkcija

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

zvezna in $D \subset \Omega$. Potem integral

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy$$

obstaja.

<u>Dokaz:</u> Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je f zvezna, je na kompaktnem D enakomerno zvezna. Torej obstaja $\delta > 0$, tako da velja

$$|(x_1,y_1)-(x_2,y_2)| < \delta \Rightarrow |f(x_1,y_1)-f(x_2,y_2)| < \varepsilon$$

Naj bo Δ delitev, za katero velja

$$\operatorname{diam}(\Delta) < \delta$$

Potem za $s(f,\Delta)$ in $S(f,\Delta)$ velja:

$$|S(f,\Delta)-s(f,\Delta)| = \left|\sum_{k=1}^{N_k} f(\vec{x}_k^{max})A(D_k) - \sum_{k=1}^{N_k} f(\vec{x}_k^{min})A(D_k)\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{N_k} \left|f(\vec{x}_k^{max}) - f(\vec{x}_k^{min})\right| A(D_k) < \varepsilon \sum_{k=1}^{N_k} A(D_k) <$$

$< \varepsilon \cdot A(\square_D)$.

Pri tem je $\square_D$ tisti pravokotnik, ki ima med vsemi, ki vsebujejo D, najmanjšo ploščino.

To pa pomeni:

$$\lim_{\operatorname{diam}\Delta\to 0} s(f,\Delta) = \lim_{\operatorname{diam}\Delta\to 0} S(f,\Delta),$$

torej integral obstaja.

Osnovne lastnosti dvojnega integrala

1) Linearnost:

Za vsak par int. funkcij

$$f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

in vsak par konstant $a, b \in \mathbb{R}$ velja

$$\iint_D \big(a f(x,y) + b g(x,y)\big)\,dx\,dy = a \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + b \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

2 Aditivnost:

Naj velja

$$D_1 \cap D_2 = \begin{cases} \emptyset & \text{ali} \\ \text{vsebovan v skupnem robu} \\ \partial D_1 \cap \partial D_2 \end{cases}$$

Potem velja:

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Splošneje: (Brez predpostavke o preseku z mero 0)

$$\iint_{D_1 \cup D_2} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy - \iint_{D_1 \cap D_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

3 Pozitivnost

$$f(x,y) \geq 0 \text{ na } D \Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy \geq 0$$

Od tod:

Ker je $g-f \geq 0$

$f(x,y) \leq g(x,y)$ na D, potem in po linearnosti

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_D g(x,y)\,dx\,dy$$

Izrek o povprečni vrednosti:

Naj bosta funkciji

$$f, g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

integrabilni na $D \subset \Omega$. Naj bo f "stalnega znaka",

$$f(x,y) \geq 0 \quad \text{za vsak } (x,y) \in D$$

in naj bo $g(x,y)$ na D omejena. Tedaj

$$m \leq g(x,y) \leq M \qquad \text{za vsak } (x,y) \in D \; (*)$$

za neki števili m, M.

Potem obstaja število $K \in [m, M]$, tako da velja

$$\iint_D g(x,y) f(x,y)\, dx\,dy = K \iint_D f(x,y)\, dx\,dy$$

<u>Dokaz:</u>

Iz $(*)$ in iz pozitivnosti integrala sledi

$$m \iint_D f(x,y)\, dx\,dy \leq \iint_D g(x,y) f(x,y)\, dx\,dy \leq M \iint_D f(x,y)\, dx\,dy$$

Označimo $\quad I = \iint_D f(x,y)\, dx\,dy$

Torej:

$$m \leq \underbrace{\frac{1}{I} \iint_D g(x,y) f(x,y)\, dx\,dy}_{K} \leq M$$

Jasno: $\frac{1}{I}\iint_D g f = K \Rightarrow \iint_D g f = K I = K \iint_D f$

Izrek:

Naj bo

$$g(x,y) : D \longrightarrow \mathbb{R}$$

~~zvezna~~ funkcija. Potem na D obstajajo točka (x_p, y_p), za katero velja,

$$g(x_p, y_p) = K.$$

Dokaz: Če je D kompaktno območje, in je g na D zvezna funkcija, potem obstajata (x_1, y_1) in (x_2, y_2), ki ležita v D in zanju velja

$$g(x_1, y_1) = m = \min_{(x,y)\in D} \{ g(x,y) \}$$

$$g(x_2, y_2) = M = \max_{(x,y)\in D} \{ g(x,y) \}$$

Naj bo območje D povezano (s potmi) in naj bo

$$\gamma(t) = (\xi(t), \zeta(t)) : [\alpha, \beta] \longrightarrow D$$

pot v D, za katero velja:

$$\gamma(\alpha) = m, \quad \gamma(\beta) = M.$$

Naj bo $\gamma(t)$ zvezna funkcija. Potem je
zvezna pot.

funkcija

$$g(\gamma(t)) = g(x(t), y(t)) : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$$

~~zvezna~~ funkcija ene spremenljivke. Seveda velja

$$\max_{t \in [\alpha,\beta]} g(\gamma(t)) = M = g(\gamma(\beta)) = \tilde{g}(\beta) \quad (*)$$

$$\min_{t \in [\alpha,\beta]} g(\gamma(t)) = m = g(\gamma(\alpha)) = \tilde{g}(\alpha)$$

Vemo pa, da zvezna funkcija na intervalu $[\alpha, \beta]$ zavzame vse vrednosti med svojima ekstremoma.

Torej obstaja $t_k \in [\alpha, \beta]$, za katero velja:

$g(x(t_k), y(t_k)) = K$.

(*) Obstaja $t_k \in [\alpha, \beta]$ za katerega velja $\tilde{g}(t_k) = K$ $\square$

<u>Opomba</u>: V splošnem g zavzame vrednost K v več točkah.

Poseben primer:

Naj bo $f(x,y) \equiv 1$. Potem izrek pravi:

Na $\mathcal{D}$ obstajajo točke, za katere velja:

$$\iint_{\mathcal{D}} g(x,y)\, dx\, dy = g(x_p, y_p) \cdot A(\mathcal{D})$$

Upoštevali smo:

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{D}} 1 \cdot dx\, dy = A(\mathcal{D}) \quad (*)$$

$A(\mathcal{D})$ = ploščina $\mathcal{D}$.

Formulo (*) lahko vzamemo za definicijo ploščine krivočrtnega lika. V nadaljevanju bomo videli, da se ta definicija ujema z že znano iz I. letnika.