

Multinomski koeficienti, kompozicije, načelo vključitev in izključitev

1. Koliko različnih besed lahko sestavimo iz črk besede *ABRAKADABRA*?
2. Koliko je različnih poti od točke $(2, 1)$ do točke $(7, 4)$,
 - (a) če je pot sestavljena iz odsekov dolžine 1, ki gredo lahko od začetne točke le v desno ali navzgor?
 - (b) Koliko takšni poti gre skozi točko $(4, 3)$?
 - (c) Dovolimo še diagonalne korake desno navzgor dolžine $\sqrt{2}$?
3. Kupci pred blagajno. Pred blagajno se je zbralo $m + n$ ljudi, ki želijo kupiti vstopnice po 5 EUR. Od tega ima m ljudi bankovec za 5 EUR, n ljudi pa ima bankovec za 10 EUR.
 - (a) Koliko je različnih razporeditev ljudi v vrsto? Ljudi, ki imajo enak bankovec med seboj ne razlikujemo.
 - (b) Predpostavimo, da je na začetku blagajna prazna. Koliko je različnih razporeditev ljudi v vrsto, pri katerih bo blagajničarka lahko vsakemu takoj vrnila denar?
 - (c) (Domača naloga) Nalogo rešite še za primer, ko je v blagajni na začetku a bankovcev po 5 EUR.
4. Koliko števil med 1 in 1000 je deljivih vsaj z enim od števil 6, 7 ali 10?
5. Koliko je permutacij množice $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ki imajo vsaj eno liho fiksno točko? Koliko jih ima natanko eno liho fiksno točko?
6. Koliko je petmestnih števil, pri katerih je
 - (a) vsaj ena števka enaka 9?
 - (b) vsaj ena števka enaka 9 ali 8?
 - (c) vsaj ena števka enaka 9 in vsaj ena števka enaka 8?
7. Koliko je števil med 1 in 10^9 , katerih desetiški zapis vsebuje niz 123?
8. Na koliko načinov lahko posedemo 3 (poročene) pare okoli okrogle mize? Kaj pa, če mož in žena nikoli ne sedita skupaj?

Pripomba: pri nalogah z okroglo mizo je pomemben le relativen položaj ljudi (koga ima vsak na levi in na desni), ne pa, na katerem sedežu sedi.
9. Koliko je celoštevilskih rešitev enačbe $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 18$, če za $1 \leq i \leq 4$ velja
 - (a) $x_i \geq 0$?
 - (b) $x_i \geq 1$?
 - (c) $0 \leq x_i \leq 7$?
 - (d) $2 \leq x_1 \leq 6, -2 \leq x_2 \leq 1, 0 \leq x_3 \leq 6$ in $3 \leq x_4 \leq 8$?
10. (Rešili na vajah 4) Na koliko načinov lahko uredimo števila 1,2,3,4,5 tako, da nobena tri zaporedna števila niso urejena po velikosti (naraščajoče ali padajoče)?

Domača naloga

1. V razvoju multinoma $(4x_1 - 3x_2 - 2x_3)^{13}$ poiščite koeficient pred členom $x_1^3 x_2 x_3^9$.
2. Na koliko načinov lahko razdelimo 14 različnih kroglic v enake škatle tako, da je v dveh škatlah po ena kroglica, v treh škatlah po dve kroglice in v dveh škatlah po tri kroglice?
3. Na koliko načinov lahko razdelimo n različnih kroglic v enake škatle tako, da je v k_i škatlah natanko i kroglic za $i = 1, 2, \dots, n$? Pri tem je $\sum_{i=1}^n i \cdot k_i = n$.
4. Koliko je permutacij nad množico z n elementi, ki imajo k_i disjunktnih ciklov dolžine i za $i = 1, 2, \dots, n$? Pri tem je $\sum_{i=1}^n i \cdot k_i = n$.
5. V anketi je sodelovalo 100 dijakov. Iz njihovih odgovorov izvemo, da jih

- 32 zanima matematika,
- 20 zanima fizika,
- 45 zanima biologija,
- 15 zanima matematika in biologija,
- 7 zanima matematika in fizika,
- 10 zanima fizika in biologija,
- 30 ne zanima nobeden od teh predmetov.

Določite število dijakov, ki jih zanima natanko eden od teh treh predmetov.

6. Koliko je števil med 1 in 1000, ki so
 - (a) deljiva s 6 in niso deljiva z 10?
 - (b) deljiva z 8 in niso deljiva z 10?
 - (c) deljiva s 6 ali 8, a niso deljiva z 10?
7. Na koliko načinov lahko razporedimo črke J, A, Z, T, I in M v zaporedje, ki ne vsebuje niti podzaporedja JAZ niti podzaporedja TI ?
8. Koliko besed lahko sestavimo iz črk A,A,B,B,C,C tako, da v nobeni besedi črka A ni hkrati na 1. in 2. mestu, B ni na 3. mestu in C ni hkrati na 4. in 5. mestu.
9. Na vrtiljaku s šestimi različnimi sedeži, ki gledajo proti sredini, sedi šest otrok. Na koliko načinov se lahko presedejo tako, da nobeden od otrok ne sedi nasproti istega otroka kot prej? Pripomba: ker so sedeži na vrtiljaku vsi različni, je pomembno, na katerem sedežu sedi posamezen otrok, ne samo relativen položaj otrok.
10. Koliko je permutacij množice $\{1, \dots, 7\}$, ki imajo vsaj eno liho fiksno točko? Koliko jih ima vsaj eno liho in vsaj eno sodo fiksno točko?
11. Poslovodja trgovskega centra v turističnem kraju je opazil, da je med kupci veliko tujcev. Sklenil je poslati vseh 20 prodajalcev na tečaje tujih jezikov. Vsak prodajalec se mora naučiti enega jezika izmed 9 izbranih, vsakega od teh 9 jezikov se mora naučiti vsaj po en prodajalec. Na koliko načinov se lahko prodajalce pošlje na tečaje tujih jezikov?
12. Skozi puščavo potuje karavana devetih kamel. Na koliko načinov se lahko po počitku v oazi razmestijo tako, da nobena kamela ne hodi tik za kamelo, za katero je hodila pred
13. Na koliko načinov lahko n različnih predmetov razporedimo v 5 različnih škatel, tako da je vsaj ena škatla prazna?