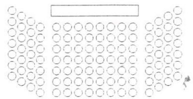
Kombinatorika (IŠRM): 1. kolokvij

28. november 2022

Čas pisanja je 100 minut. Možno je doseči 100 točk. Veliko uspeha!
Vse odgovore je potrebno natančno utemeljiti.



Sedež (2.05)

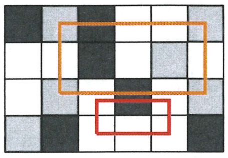
1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek ________________________

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

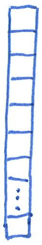
Kvadrate na kvadratni mreži barvamo s tremi barvami. Pravokotniku, ki ima stranice vzporedne mreži in oglišča v paroma različnih kvadratih, ki so vsi iste barve, rečemo *čudovit pravokotnik*. Primer dveh čudovitih pravokotnikov:



6 **a)** Opazujte del mreže dimenzij $1 \times n$. Za katere vrednosti $n \geq 1$ velja, da se pri poljubnem barvanju kvadratov tega stolpca neka barva pojavi vsaj dvakrat?

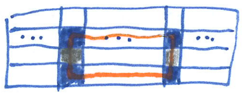
19 **b)** Dokažite, da pri poljubnem barvanju neskončne kvadratne mreže s tremi barvami obstaja čudovit pravokotnik.

a)



Predmeti: kvadrati v stolpcu (jih je n)
Škatle: barve (so 3)
Če je $n \geq 4$, po Dirichletovem principu sledi, da sta vsaj dva kvadrata v stolpcu $1 \times n$ iste barve.
Za $n \in \{1,2,3\}$ pa to ne velja nujno, kot kažejo primeri:

b) Opazimo, da če v delu mreže $m \times 4$ obstajata dva stolpca (1×4), ki sta enako pobarvana, gotovo dobimo čudovit pravokotnik (po a) se v teh dveh stolpcih neka barva pojavi vsaj dvakrat, ker sta enako pobarvana, ti štirje kvadrati tvorijo pravokotnik).



Predmeti: pobarvani stolpci v izbranem pasu mreže $m \times 4$ (jih je m, ker je mreža neskončna, lahko izberemo m poljubno velik)
Škatle: možna barvanja 1×4 stolpcev (jih je $3^4 = 81$, ker imamo 3 barve)
Ker lahko vzamemo m tak, da $m \geq 82$, po Dirichletovem principu sledi, da v pasu $m \times 4$ obstajata dva 1×4 stolpca, ki sta enako pobarvana.
Po zgornji opazki torej imamo čudovit pravokotnik.

2. naloga (25 točk)

Babica je spekla 14 (enakih) rogljičkov. Na koliko načinov jih lahko razdeli med svojih pet vnukov (Anja, Barbara, Cene, Dan in Erik), če

3 **a)** ni nobenih posebnih omejitev?

3 **b)** mora vsak vnuk dobiti vsaj en rogljiček?

19 **c)** če dekleti ne smeta dobiti več kot pet rogljičkov, fantje pa ne več kot štiri (lahko pa kdo izmed njih ne dobi nobenega)?

a) $\{\text{rogljički}\} \to \{\text{vnuki}\}$, vse funkcije
14 ne ločimo; 5 ločimo

$\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{14+5-1}{5-1} = \binom{14+4}{4} = \binom{18}{4} = 3060$ 3

b) kot a), le da iščemo le surjektivne funkcije

$\binom{n-1}{k-1} = \binom{14-1}{5-1} = \binom{13}{4} = 715$ 3

c) Uporabimo NVI. 2

A_i ... dekle i dobi ≥ 6 rogljičkov, $i = 1, 2$ 1.5

B_i ... fant i dobi ≥ 5 rogljičkov, $i = 3, 4, 5$. 1.5

Iščemo "vse - slabe" = "a)" $- |A_1 \cup A_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_5|$.

$|A_i| = \binom{8+5-1}{5-1} = \binom{12}{4} = 495$ 1 (preostalih $14-6=8$ rogljičkov polj. med 5 vnukov)

$|B_i| = \binom{9+5-1}{5-1} = \binom{13}{4} = 715$ 1 (ostane $14-5=9$ rogljičkov)

$|A_1 \cap A_2| = \binom{2+5-1}{5-1} = \binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$ 1 (ostane $14-6-6=2$ rogljička)

$i \neq j$: $|B_i \cap B_j| = \binom{4+5-1}{5-1} = \binom{8}{4} = 70$ 1 (ostane $14-5-5=4$ rogljičkov)

$|A_i \cap B_j| = \binom{3+5-1}{5-1} = \binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35$ 1 (ostane $14-6-5=3$ rogljički)

Pri poljubnem trojnem preseku ostane $\leq 14-5-5-5 = -1$ rogljičkov, torej so vsi trojni preseki prazni. Podobno za preseke 4 ali 5 množic. 2

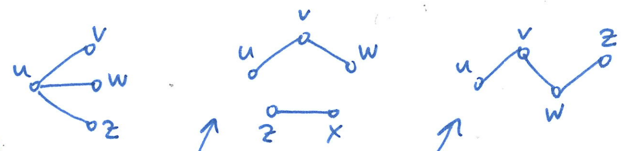
Iskano število je:

"a)" $- 2\cdot|A_1| - 3\cdot|B_3| + |A_1 \cap A_2| + 2\cdot 3\cdot|A_1 \cap B_3| + \binom{3}{2}\cdot|B_3 \cap B_4| - 0 =$ 5

$= 3060 - 2\cdot 495 - 3\cdot 715 + 15 + 6\cdot 35 + 3\cdot 70 =$

$= 3060 - 990 - 2145 + 15 + 210 + 210 =$

$= \underline{\underline{360}}$ 2



3. naloga (25 točk)

Naj bo $X = E(K_6)$ množica povezav polnega grafa na šest vozliščih, v množici blokov $\mathcal{B}$ pa naj bodo vse množice povezav naslednjih tipov $A : \{uv, uw, uz\}$, $B : \{uv, vw, zx\}$ in $C : \{uv, vw, wz\}$, kjer so u, v, w, z in x vsakič paroma različna vozlišča grafa K_6.

13 **a)** Dokažite, da je $\mathcal{B}$ načrt in določite njegove parametre.

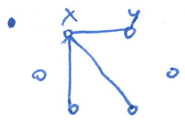
8 **b)** Ali je $\mathcal{B}$ tudi 2-načrt? Če je, določite njegove parametre.

4 **c)** Ali je $\mathcal{B}$ tudi 3-načrt? Če je, določite njegove parametre.

a) $v = |X| = \binom{6}{2} = 15$ 1

$k = 3$, ker vsi bloki vsebujejo 3 povezave. 1

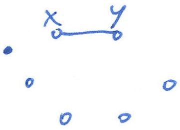
Naj bo $e = xy \in X$ poljubna.] 2



• V koliko blokih tipa A je e?

$\binom{4}{2} \cdot 2 = \frac{4 \cdot 3}{2} \cdot 2 = 12$ 2

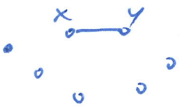
izberemo preostali 2 vozl. — lahko sta povezani z x ali y



• V koliko blokih tipa B je e?

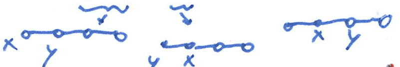
$4 \cdot \binom{3}{2} \cdot 2 + \binom{4}{3} \cdot 3 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 12 \cdot 3 = 36$ 3

vozl., ki bo sosednje x — preostala povezava — lahko bi zamenjali vlogo x in y — izbira pov. v Δ, ki manjka e je preostala pov., izberem vozl. za



• V koliko blokih tipa C je e?

$4 \cdot 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 36$ 3

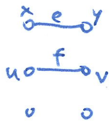


Ker je polj. $e \in X$ v $12 + 36 + 36 = 84$ 1 blokih, je $\mathcal{B}$ načrt s par. $(15, 3, 84)$.

b) Je 2-načrt: (Lahko bi najprej rešili b) in bi a) sledil.) 1

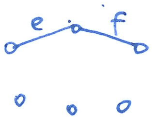
Naj bosta $e = xy$, $f = uv \in X$ poljubni.

1. možnost:



e, f sta v 0 blokih tipa A, 1
v $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ blokih tipa B, 1
v 4 blokih tipa C. 1
} v 12 blokih

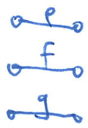
2. možnost:



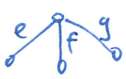
e, f sta v 3 blokih tipa A, 1
v 3 blokih tipa B, 1
v $3 \cdot 2 = 6$ blokih tipa C. 1
} v 12 blokih

$\Rightarrow \mathcal{B}$ je 2-načrt s par. $(15, 3, 12)$. 1

c) Ni 3-načrt: 1



} takšne 3 povezave niso v nobenem bloku 1.5



} takšne 3 pov. so v 1 bloku 1.5

4. naloga (25 točk)

Naj bo $f(n,k)$ število razdelitev $[n]$ na k blokov, pri čemer noben blok ne vsebuje dveh zaporednih števil. Naj bo $n \geq 1$.

5 **a)** Določite $f(n,1)$, $f(n,2)$ in $f(n,n)$. Za katere k je $f(n,k) = 0$?

6 **b)** Določite $f(n,n-1)$.

14 **c)** Poiščite rekurzivno zvezo, ki ji zadoščajo števila $f(n,k)$, in jo dokažite na kombinatoričen način.

a) $f(n,1) = \begin{cases} 1 \;;\; n=1 & 0.5 \\ 0 \;;\; n\geq 2 & 1 \end{cases}$ Če $n=1$, je $\{1\}$ iskani blok. Če $n \geq 2$, bi morali biti števili 1 in 2 v istem bloku, to pa ni mogoče.

$f(n,2) = \begin{cases} 0 \;;\; n=1 & 0.5 \\ 1 \;;\; n\geq 2 & 1 \end{cases}$ Ker zaporedna števila niso skupaj v bloku, je razdelitev enolično določena (soda št. v enem bloku, liha v drugem).

$f(n,n) = 1$ 1 Vsako število je samo v bloku, to je dovoljeno.

$f(n,k)=0$ za $n<k$ ali $k \leq 0$ ali $(k=1 \wedge n \geq 2)$ 1

b) $f(n,n-1) = ?$

Ker je $n-1$ blokov, bodo vsi razen enega velikosti 1, en blok pa bo velikosti 2. 2 Torej moramo le izbrati elementa, ki bosta v bloku velikosti 2. Ker ne smeta biti zaporedna: $\underset{\text{vse izbire}}{\binom{n}{2}} - \underset{\text{izbrali smo zaporedna elementa}}{(n-1)} = \binom{n-1}{2}$ 4

$\Rightarrow f(n,n-1) = \binom{n-1}{2}$

c)

$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + (k-1)\cdot f(n-1,k)$$

3 3

$f(n,k)$: št. razdelitev $[n]$ na k blokov, zap. št. niso v istem bloku 4

$f(n-1,k-1)$: n je sam v bloku, preostalih $n-1$ el. je v $k-1$ blokih 4

$(k-1)\cdot f(n-1,k)$: n ni sam v bloku, preostalih $n-1$ el. razdelimo v k blokov; n lahko pridružimo kateremukoli od teh k blokov, razen tistemu, ki vsebuje $n-1$ (torej $(k-1)$ možnosti)