

1. kolokvij iz KOMBINATORIKE (IŠRM)

16. november 2023

Priimek in ime: _____

Vpisna št.: _____ Vrsta: _____ Kolona: _____

1. Dano je zaporedje naravnih števil x_1, x_2, \dots, x_n .
 - (a) Koliko strnjenih podzaporedij vsebuje to zaporedje? Koliko strnjenih podzaporedij se začne z x_1 ?
 - (b) Pokažite, da zaporedje x_1, x_2, \dots, x_n vsebuje strnjeno podzaporedje, katerega vsota je deljiva z n .
2. Permutacija $\pi \in S_n$ vsebuje transpozicijo sosednjih elementov, če obstaja $i \in [n-1]$, da velja $\pi(i) = i+1$ in $\pi(i+1) = i$. Koliko permutacij iz S_n ne vsebuje transpozicije sosednjih elementov? Koliko je to za $n = 8$?
3. Naj bo $X = \mathbb{Z}_3^2$, v množici \mathcal{B} pa naj bodo 3-elementne množice $\{x, y, z\}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}_3^2$, za katere velja $x + y + z = 0$.
 - (a) Pokažite, da je \mathcal{B} načrt in določite njegove parametre v, k, λ, b . Ali je \mathcal{B} tudi 2-načrt? Ali je tudi 3-načrt?
 - (b) Naj bo sedaj $X = \mathbb{Z}_4^2$, bloke iz \mathcal{B} pa definiramo podobno kot prej kot 3-elementne množice $\{x, y, z\}$, $x, y, z \in \mathbb{Z}_4^2$, za katere velja $x + y + z = 0$. Ali je \mathcal{B} načrt? V primeru, da je načrt, izračunajte tudi njegove parametre v, k, λ, b . Ali je \mathcal{B} tudi 2-načrt? Ali je tudi 3-načrt?
4. Za $s \geq 1$ in $n \geq k \geq 0$ definiramo pridruženo Lahovo število $L_s(n, k)$ kot število razdelitev množice $[n]$ na k linearno urejenih blokov, pri čemer vsak blok vsebuje vsaj s elementov.
 - (a) Določite $L_s(n, 1)$ za $n \geq 1$ in $L_s(n, n/s)$, če s deli n .
 - (b) Določite koeficiente $a(n, k, s)$ in $b(n, k, s)$, da bo veljala rekurzivna zveza

$$L_s(n, k) = a(n, k, s) \cdot L_s(n-s, k-1) + b(n, k, s) \cdot L_s(n-1, k)$$

za $n, k \geq 1$ in zvezo tudi utemeljite (kombinatoričen dokaz).

*Vse naloge je treba ustrezno utemeljiti, samo odgovori ne štejejo nič.
Vseeno pa ne pozabite napisati odgovorov!*