

## Pravilo vsote in produkta, Dirichletovo načelo

1. Koliko je različnih nizov dolžine 3, ki jih sestavljamo iz znakov A, B, C, D, E in F, če
  - (a) ponavljanje ni dovoljeno?
  - (b) ponavljanje je dovoljeno?
  - (c) ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo črko A?
  - (d) ponavljanje je dovoljeno in besede vsebujejo črko A?
2.
  - (a) Koliko štirimestnih števil ima same različne številke?
  - (b) Koliko števil med 1 in 10000 ima same različne številke?
  - (c) Koliko je lihih štirimestnih števil s samimi različnimi števkami?
  - (d) Koliko je sodih štirimestnih števil s samimi različnimi števkami?
3. Koliko deliteljev ima število 360?
4. Koliko je različnih  $0/1$  matrik z  $m$  vrsticami in  $n$  stolpci? Kaj pa, če so vse vrstice različne?
5. Na koliko načinov lahko izplačamo  $m$  EUR z bankovci za 5, 10, 20 EUR?
6. V kvadratu s stranico 2 izberemo 5 točk. Pokažite, da sta vsaj dve med njimi oddaljeni med seboj za največ  $\sqrt{2}$ !
7. V tabelo velikosti  $5 \times 5$  vstavljamo številke  $-1$ ,  $0$  in  $1$ . Pokažite, da sta vsaj dve izmed vsot po vrsticah, stolpcih in obeh glavnih diagonalah enaki, ne glede na to, kako napolnimo tabelo.
8. Naj bo  $n$  naravno število in  $A \subseteq \mathbb{Z}$  moči  $n + 1$ . Pokažite, da  $A$  vsebuje par števil, katerih razlika je deljiva z  $n$ .
9. Naj bo  $n$  liho naravno število in  $A \subseteq \mathbb{Z}$  moči  $\frac{n+3}{2}$ . Pokažite, da  $A$  vsebuje tak par števil, da je ali njuna vsota ali njuna razlika deljiva z  $n$ .
10. V sobi pravokotne oblike dolžine  $3m$ , širine  $4m$  in višine  $3m$  leta 110 muh. Pokažite, da v vsakem trenutku obstajajo 4 muhe, ki se nahajajo znotraj krogle s polmerom  $90\text{ cm}$ .
11. Na šahovnico velikosti  $8 \times 8$  postavimo 17 trdnjav.
  - (a) Pokažite, da so vsaj v eni vrstici vsaj tri trdnjave.
  - (b) Pokažite, da obstajajo vsaj tri trdnjave, ki se med seboj paroma ne napadajo.
12. V paketu običajnih igralnih kart je 52 kart. Vsaka karta je določena z barvo in vrednostjo. Barve so štiri: srce, kara, križ, pik. Vrednosti pa so števila od 2 do 10 in figure fant, dama, kralj, as; vsaka barva ima torej 13 vrednosti.

Imamo paket običajnih kart. Koliko najmanj kart moramo izvleči, da zagotovo dobimo

  - (a) vsaj tri karte iste barve?
  - (b) vsaj tri križe?
  - (c) vsaj tri križe in tri srca?
  - (d) vsaj po dve karti vsake barve?

## Domača naloga

1. Andrej in Bojan imata 6 bankovcev po 50 EUR in 4 bankovce po 100 EUR. Na koliko načinov si jih lahko razdelita tako, da
  - (a) vsak dobi enako število bankovcev?
  - (b) vsak dobi enak znesek?
  - (a) vsak dobi vsaj en bankovec?

2. Koliko je štirimestnih števil, pri katerih je vsota števk sodo število?

3. Naj bo

$$A = \{(i, j); i, j \in \mathbb{N}, 20 \leq i, j \leq 40\} \quad \text{in} \quad B = \{(i, j) \in A; i + j \text{ je sodo število}\}.$$

Koliko elementov ima množica  $B$ ?

4. Koliko je različnih besed dolžine 3, sestavljenih iz črk  $A, B, C, D, E$  in  $F$ , če
  - (a) ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo vsaj eno od črk  $E$  in  $F$ ?
  - (b) ponavljanje je dovoljeno in besede vsebujejo vsaj eno od črk  $E$  in  $F$ ?
  - (c) ponavljanje ni dovoljeno in besede vsebujejo črko  $E$  in črko  $F$ ?
  - (d) ponavljanje je dovoljeno in besede vsebujejo črko  $E$  in črko  $F$ ?

5. Naj bo  $A$  množica z  $n$  elementi.

- (a) Koliko je vseh binarnih relacij na množici  $A$ ?
- (b) Koliko je vseh refleksivnih relacij na množici  $A$ ?
- (c) Koliko je vseh simetričnih relacij na množici  $A$ ?
- (d) Koliko je vseh refleksivnih in hkrati simetričnih relacij na množici  $A$ ?

Nasvet: relacijo na množici  $A$  lahko predstavimo z 0/1 matriko dimenzije  $n \times n$ .

6. Ob železniški progi je  $k$  postaj. Koliko različnih vozovnic je treba pripraviti, da jih bodo imeli na razpolago za vse relacije (v obe smeri)? Kaj pa, če se mora vsak potnik peljati vsaj dve postaji?
7. Naj bo  $n \geq 3$ . Koliko ciklov dolžine  $2n$  vsebuje graf  $K_{n,n}$ ?
8. Koliko je permutacij števk  $0, 1, \dots, 9$ , pri katerih
  - (a) je na prvem mestu sodo števka, na zadnjem mestu pa ena od  $1, 2, 3, 4, 5$ ?
  - (b)  $0$  ni na prvem mestu in  $9$  ni na zadnjem mestu?
9. V ravnini imamo 5 točk s celoštevilskimi koordinatami. Pokažite, da ima vsaj eno razpolovišče daljice, ki ima krajišči v tej množici, celoštevilske koordinate.