Kombinatorični dokazi, Stirlingova števila 2. vrste, Bellova in Lahova števila

1. Pokažite spodnji enakosti s pomočjo kombinatoričnih dokazov.

   (a) $\binom{2n}{2} = 2\binom{n}{2} + n^2$, (b) $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

2. V kompletu imamo 6 barvic: modro, rumeno, rdečo, zeleno, rjavo, oranžno, vijolično. Na koliko načinov lahko s temi barvicami pobarvamo ploskve igralne kocke, če uporabimo natanko 3 barve? Opomba: pri igralni kocki ploskve ločimo med sabo - označene so s številkami od 1 do 6.

3. Pokažite naslednjo enakost za Stirlingovimi števili 2. vrste (dokaz z indukcijo):
$$x^n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)x^{\underline{k}} \quad \text{za } n \geq 0.$$

4. Pokažite (kombinatoričen dokaz), da za $n \geq m$ velja
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(k,m) = S(n+1, m+1).$$

5. Na koliko načinov lahko pobarvamo zastavo, ki ima m navpičnih pasov z n različnimi barvami, če

   (a) vsako barvo uporabimo vsaj enkrat?

   (b) dva zaporadna pasova nimata iste barve?

   (c) vsako barvo uporabimo vsaj enkrat in dva zaporedna pasova nimata iste barve?

6. Število $f(n,k)$ je enako številu permutacij iz S_n, ki imajo natanko k negibnih točk. Privzamemo, da velja $f(0,0) = 1$ in $f(n,k) = 0$ za $k < 0$.

   (a) Določite $f(n,n)$, $f(n,n-1)$ in $f(n,n-2)$.

   (b) Pokažite, da za števila $f(n,k)$ velja spodnja rekurzivna zveza (kombinatoričen dokaz):
$$f(n,k) = f(n-1,k-1) + f(n-1,k)\cdot(n-1-k) + f(n-1,k+1)\cdot(k+1) \quad n \geq 1 \text{ in } k \geq 0.$$

   (c) S pomočjo rekurzivne zveze izračunajte $f(5,1)$. Nasvet: število permutacij iz S_n brez negibnih točk, torej $f(n,0)$, lahko izračunamo tako, da od števila vseh permutacij odštejemo število tistih z $1, 2, \ldots, n-1$ negibnimi točkami.

7. Na šahovnico trikotne oblike s stranico n želimo postaviti poljubno število trdnjav, ki se med seboj ne napadajo. Na koliko načinov lahko to storimo? Rezultat izrazite s pomočjo Bellovih števil.

   Navodilo: postavitve razdelite glede na to, koliko trdnjav je na diagonali. Nato pokažite, da za število postavitev trdnjav na trikotno šahovnico s stranico n velja podobna rakurzivna zveza kot za Bellova števila.

8. (Domača naloga) Na koliko načinov si lahko nataknemo šest prstanov na tri prste leve roke (ne na palec)?

9. Na koliko načinov lahko na 4 police zložimo 24 različnih knjig, če nobena polica ne sme biti prazna? Kaj pa, če so lahko police tudi prazne? Knjige na vsaki polici zlagamo od levega proti desnemu robu.

10. (Domača naloga)

   (a) Na koliko načinov lahko razporedimo n vojakov in poveljnika vojske v m nepraznih čet (vrstni red čet ni pomemben, vrstni red v četi pa je) tako, da bo v četi, v kateri bo poveljnik vojske, poleg njega še k vojakov?

   (b) Naj bosta m in n naravni števili in $m \leq n$. Izračunajte vsoto

$$\sum_{k=0}^{n-m} \binom{n}{k} L(n-k, m) \cdot (k+1)!.$$

Domača naloga

1. Pokažite spodnji enakosti s pomočjo kombinatoričnih dokazov.

   (a) $\displaystyle\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}.$ (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$

2. Pokažite, da velja (dokaz z indukcijo in kombinatoričen dokaz)

   (a) $S(n, 2) = 2^{n-1} - 1 \quad$ za $\quad n \geq 1$.

   (b) $S(n, n-1) = \binom{n}{2} \quad$ za $\quad n \geq 1$.

3. *Pridruženo Stirlingovo število reda* r, $S_r(n, k)$, je število razdelitev $[n]$ na k blokov, pri čemer vsak blok vsebuje vsaj r elementov. Privzamemo, da velja $n, k, r \geq 1$.

   (a) Določite $S_r(n, 1)$ za $n \geq 1$. Za katere k je $S_r(n, k) = 0$ (v odvisnosti od r, n)?

   (b) Poiščite rekurzivno zvezo, ki ji zadoščajo števila $S_r(n, k)$ za $n, k \geq 2$ (kombinatoričen dokaz).

   (c) S pomočjo rekurzivne zveze izračunajte $S_3(10, 3)$.

4. Študenti 2. letnika imajo v predmetniku 8 predmetov, vse ure posameznega predmeta se izvajajo na isti dan (v blokih). Na koliko načinov lahko sestavljalec urnika razdeli predmete po dnevih (ponedeljek, torek, sreda, četrek, petek) tako,

   (a) da bodo študenti vsak dan imeli vsaj en predmet?

   (b) da bodo imeli pouk vsaj štiri dni v tednu?

   (c) da bodo v petek imeli na urniku manj predmetov kot v torek? Nasvet: koliko pa je razdelitev, pri katerih je na urniku v torek manj predmetov kot v petek?

   Opomba: sestavljalec urnika za vsak dan določi vrstni red predmetov (ne pa tudi točnih ur).

5. Pokažite *Lahovo identiteto*

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} L(n, k)\, x^{\underline{k}}$$

   s kombinatoričnim dokazom. Nasvet: na dva načina preštejte, na koliko načinov lahko sestavimo x urejenih podmnožic (nekatere so lahko tudi prazne!) iz n elementov.

6. Pokažite Lahovo identiteto še z indukcijo (uporabite rekurzivno zvezo).