

### Analiza 3 (IŠRM): 1. kolokvij

21. 11. 2022 18<sup>00</sup> – 20<sup>00</sup>

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!

#### 1. naloga (25 točk)

Dan je integral s parametrom

$$F(a) = \int_0^1 \frac{dx}{a + x^2}, \quad a > 0.$$

- a) (5) Preveri, da velja  $F(a) = \frac{1}{\sqrt{a}} \arctan \frac{1}{\sqrt{a}}$ .
- b) (20) Določi  $F'(a)$  in od tod izračunaj  $\int_0^1 \frac{dx}{(1 + x^2)^2}$ .

#### 2. naloga (25 točk)

Dan je integral s parametrom

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1 + \sqrt{x^a}}}.$$

- a) (15) Za katere  $a \in \mathbb{R}$  integral konvergira oz. divergira? Odgovor utemelji.
- b) (10) V primeru, ko integral konvergira, ga izračunaj.

#### 3. naloga (25 točk)

Naj bo  $D \subseteq \mathbb{R}^2$  območje, omejeno s krivuljama  $x = y^2$  in  $x = 1$ .

- a) (15) Skiciraj območje  $D$  in nato na **oba** možna načina prevedi dvojni integral

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy$$

na dvakratni integral.

- b) (10) Dvojni integral izračunaj v primeru, ko je  $f(x, y) = |y|e^{-x^2}$ . Rezultat poenostavi.

#### 4. naloga (25 točk)

Naj bo  $D$  štiristrana piramida v  $\mathbb{R}^3$  z oglišči  $(-1, -1, 0)$ ,  $(1, -1, 0)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(-1, 1, 0)$  in  $(0, 0, 1)$ . Izračunaj integral

$$\iiint_D \frac{x^2 + y^2}{1 + z^2} \, dx \, dy \, dz.$$

**Nasvet.** Računanje si lahko nekoliko poenostaviš z upoštevanjem simetrije ter s primerno izbiro vrstnega reda integracije.