Rešitve kolokvija (praktični del)

Pri vsaki podnalogi imamo več možnih rešitev. Navajamo eno od njih. Ne trdimo, da je najkrajša, najelegantnejša ali v kakršnemkoli drugačnem smislu najboljša.

(a) (5 točk) $(dl + ldl)^*(dd + ldd)$.

(b) (8 točk) Sledi primer jezika $M \subseteq L$, ki je kontekstno neodvisen, ni pa regularen:

$$M = \{(dl)^n l (dl)^n dd \ \mid n \geqslant 0\}.$$

Dokaz kontekstne neodvisnosti je naslednja gramatika:

$$S \to Tdd$$
$$T \to dlTdl \mid l$$

Trditev, da jezik M ni regularen, lahko dokažemo s pomočjo leme o napihovanju. Za podani $n \in \mathbb{N}$ vzamemo besedo $z = (dl)^n l (dl)^n dd$. Vemo, da se lahko podniz v (pri delitvi $z = uvw$) nahaja le znotraj prve polovice prvega podniza $(dl)^n$, seveda pa moramo upoštevati vse možnosti:

- $v = (dl)^p$ za nek $1 \leqslant p \leqslant n \,/\, 2$;
- $v = (dl)^p d$ za nek $0 \leqslant p \leqslant (n-1) \,/\, 2$;
- $v = (ld)^p$ za nek $1 \leqslant p \leqslant n \,/\, 2$;
- $v = (ld)^p l$ za nek $0 \leqslant p \leqslant (n-1) \,/\, 2$.

V vseh primerih lahko besedo z »napihnemo« z eksponentom $i = 0$ in dobimo besedo $z'(0)$, ki ne pripada jeziku M. V prvem in tretjem primeru dobimo $z'(0) = (dl)^{n-p} l (dl)^n dd$. V drugem primeru dobimo $z'(0) = (dl)^a l (dl)^b l (dl)^n dd$ za nek par (a, b) z lastnostjo $a + b = n - p$. V četrtem primeru dobimo $z'(0) = (dl)^a d (dl)^b l (dl)^n dd$ za nek par (a, b) z lastnostjo $a + b = n - p$. Zlahka ugotovimo, da nobena od nastalih »napihnjenih« besed ne pripada jeziku M.

Obstaja tudi elegantnejša pot. Definirajmo homomorfizem (preslikavo, ki vsakemu posameznemu simbolu priredi nek niz) $h\colon \{a, b, c\} \to \{d, l\}^*$ s predpisi $h(a) = dl$, $h(b) = l$ in $h(c) = d$. Definirajmo jezik $N = h^{-1}(M) \cap a^*ba^*cc = \{a^n ba^n cc \mid n \geqslant 0\}$. (Jezik $h^{-1}(M)$ je bolj zapleten, saj velja $h^{-1}(dl) = \{a, cb\}$.) Ker tako inverzni homomorfizem kot presek z regularnim jezikom ohranjata regularnost, lahko sklepamo takole: če je jezik M regularen, je tak tudi jezik N. Ker pa jezik N ni regularen (lema o napihovanju: $z = a^n ba^n cc$, $v = a^p$ za nek $1 \leqslant p \leqslant n$), jezik M prav tako ni regularen.

(c) (7 točk)