Asistentka: Arjana Žitnik

OSNOVNI PROBLEMI KOMBINATORIKE

1. Funkcije in štetje

$f: A \to B$; A: domena, B: kodomena

(1) $\{1,2,3\} \to \{a,b,c,d\}$; $f(1)=a$, $f(2)=a$, $f(3)=b$

(2) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = 2n$

(3) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$f(n) = f(n-1) + f(n-2)$

Injektivnost:

$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

Surjektivnost:

Slika funkcije je enaka B

Bijektivna:

oboje hkrati

- interpretacija s kroglicami v škatle
  - ↪ inj.: kr. v eno škatlo ; sur.: vsaj ena kr. v vsaki škatli
- interpretacija z barvami in objekti

- $[n] = \{1,\dots,n\}$; $|[n]| = n$, $n=0 \Rightarrow \emptyset$; $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$
- 2^A : Potenčna množica $\{X ; X \subseteq A\}$
- $\binom{A}{k} = \{B \in 2^A ; |B| = k\}$
- B^A := množica vseh preslikav iz A v B
- $(f \circ g)(x) = f(g(x))$; $f: B \to C$, $g: A \to B$ $\Rightarrow f \circ g : A \to C$

Dirichletovo načelo

$f: A \to B$ je inj. $\Rightarrow |A| \leq |B|$ $\Leftrightarrow$ $|A| > |B| \Rightarrow \nexists$ inj. $f: A \to B$

Primer

(1) 13 ljudi : potem imata 2 rojstni dan v istem mesecu

kroglice: ljudje preslikava: mesec rojstva

škatle: meseci

(2) $n+1$ števil. Med njimi sta 2 ki sta deljivi z n.

kroglice: izbrana števila

škatle: ostanki pri deljenju z n $\{0,\dots,n-1\}$

preslikava: je ostanek pri deljenju z n

(3) n ljudi, vsaka 2 se lahko poznata ali ne.

obstajata 2 ki poznata enako število ljudi.

kroglice: ljudje

škatle: $\{0,\dots,n-1\}$

škatli 0 in $n-1$ ne morata biti prazni hkrati $\to$ IMAMO $n-1$ ŠKATEL

(4) $X \subseteq [100]$, $|X| = 10$

Dve disjunktni podmnožici X morata imeti isto vsoto.

Kroglice: podmnožice X ; $2^{10} = 1024$

Škatle: $[955]$

Preslikava: vsota

$955 < 1024$: torej imamo dve podmnožici z isto vsoto

$A \setminus B$ in $B \setminus A$ sta disj. in imata isto vsoto.

(5) $X \subseteq [2n]$, $|X| = n+1$

$\exists\, x, x' \in X, x \neq x' : x \mid x'$

$x = 2^a \cdot l$; l: liho št.

Kroglice: $x \in X$

škatle: liha števila $[2n]$ (teh je n)

$x \mapsto l$

$\exists\, x, x', x < x' : \begin{array}{l} x = 2^a \cdot l \\ x' = 2^{a'} \cdot l \end{array} \Rightarrow x \mid x'$

Načeli vsote in produkta

$|A \cup B| = |A| + |B|$; A in B sta disj.

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$|A \times B| = |A| \cdot |B|$

→ načelo vsote uporabljamo ko neko mn. razbijemo na disjunktne podmn.

načelo produkta uporabljamo ko je vsaka izbira neodvisna od druge

3 majice 3 srajce $(3+3) \cdot (4+4) = 48$
4 hlače 4 trenirke

$|2^{[n]}| = |2^n|$

Iščemo bijekcijo iz $2^{[n]}$ v $\{0,1\}^n = \{(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n); \varepsilon_i = \{0,1\}\}$

$\Phi(A) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$\varepsilon_i = \begin{cases} 1; & i \in A \\ 0; & i \notin A \end{cases}$

Konstruiramo inverz

$\Psi(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \{i \in [n]; \varepsilon_i = 1\}$

$\Psi \circ \Phi(A) = A$

Preslikava: $f: A \to B$ je relacija
$f \subseteq A \times B$
$\forall a\ \exists!\, b : (a,b) \in f$

Koliko je preslikav K^N, $|N| = n$, $|K| = k$

: za vsak element n imamo k izbir

torej je $\underbrace{k \cdot k \cdot \dots \cdot k}_{n} = k^n$ Kako bi to strožje dokazali

Če imamo N^N potem velja ; N je končna

$f: N \to N$ je inj. $\Rightarrow$ f je surjektivna

$\Rightarrow |N^N| = n! = n(n-1) \cdots 2 \cdot 1$

Koliko je injektivnih preslikav $N \to K$

$\dfrac{k!}{(k-n)!}$; $n > k$

$k(k-1) \cdots (k-n+1) = k^{\underline{n}}$

$k(k+1) \cdots (k+n-1) = k^{\overline{n}}$

Bijekcija $A \to A$ je permutacija A. $=: S_A$, $|S_A| = |A|!$

$S_{[n]} =: S_n$ $(1\ 2\ \dots\ n)$; $1 \to 2 \cdots n-1 \to n, n \to 1$; ciklična notacija

$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n \end{pmatrix}$

$\pi = \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n$
→ enovrstična notacija

če gledamo preslikave iz $\emptyset \to \emptyset$ potem je

$0! = 1$ vse bij. f iz $\emptyset \to \emptyset$

$0^0 = 1$ vse f iz $\emptyset \to \emptyset$

0! 1! 2! 3! 4! 5! 6! 7! 8!
1, 1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040, 40320

$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$; $a_n \sim b_n$
→ asimptotsko enaki $\lim \frac{a_n}{b_n} = 1$

Na S_A imamo kompozitum $(S_A, \circ)$: grupa

množenje je z desne $\pi \cdot \pi_1$ (kot pri preslikavah)

Ciklična notacija

$1, \pi(1), \pi^2(1), \dots$

$\pi^i(k) = \pi^j(k) \Rightarrow \pi^n(i) = i$; $n = i-j$

$(i, \pi(i), \dots, \pi^{n-1}(i))$

Vsako permutacijo lahko zapišemo kot produkt disj. ciklov.

Cikle dolžine ena imenujemo negibne točke.

Disjunktni cikli komutirajo.

Recimo da imamo nek A in B in imamo
$S \subseteq A \times B$

	b_1	b_2	b_3	$\cdots$
a_1	x	x	x	
a_2	x	✓	✓	
a_3	✓	x	x	
$\vdots$				

$v_x(S)$: št. ✓ v vrsticah

$s_y(S)$: št. ✓ v stolpcih

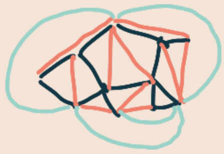
$\sum_{x\in A} v_x(S) = \sum_{y\in B} s_y(S) = |S|$

Primeri:

(1) 32 deklet, vsaka dekle pozna 4 fante, vsak fant pozna 8 deklet. Koliko je fantov.

$32 \cdot 4 = x \cdot 8 \Rightarrow x = 16$

(2) Triangulacija grafa (dodajamo povezave dokler niso vsa lica trikotniki)



povezava med št. povezav in št. lic

	$E \backslash F$	F_i
$2 \cdot ✓$ —	e_j	✓
		$3 \cdot ✓$

e_j je element lica F_i

$2 \cdot |E| = 3 \cdot |F|$

(3) Koliko deliteljev imajo naravna št. "v povprečju"

pogledamo $[n]$ in vzamemo $n \to \infty$

$d \backslash n$	1	2	3	$\cdots$	n
1	✓	✓			
2		✓		✓	✓
$\vdots$			✓		✓
n					

$v_d : \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$ število števil ki jih deli d

s_i : število deliteljev št. i

$$\sum_{i=1}^{n} s_i = \sum_{d=1}^{n} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor$$

$$\frac{1}{n} \sum_{1}^{n} s_i \sim \sum_{1}^{n} \frac{1}{d} = H_n \sim \log n$$