論文の内容の要旨

修士論文題目
量子測定理論の数学的基礎

氏名 渡辺　博樹

本修士論文では量子測定理論の数学的定式化について考察する．量子測定理論は J. von Neumann [8] によって反復可能性仮説 (repeatability hypothesis) に基づいて創設された．その後，E.B.Davies と J.T. Lewis [7] がインストゥルメント (instrument) の概念を導入し，反復可能性仮説を前提としない測定の抽象的取り扱いを可能にした．小澤 [1] によって完全正値インストゥルメント (CP instrument) が導入され，量子測定の数学的特徴づけがなされた．

$\mathcal{M}$ を Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数とし，$(S, \mathcal{F})$ を可測空間とする．

定義 1. 測定過程 $\mathbb{M} = (\mathscr{K}, \sigma, \tilde{X}, U)$ とは,

1. Hilbert 空間 $\mathcal{K}$
2. $\boldsymbol{B}(\mathcal{K})$ 上の正規状態 σ
3. スペクトル速度 $\tilde{X} : \mathcal{F} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{K})$
4. $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリー作用素 U

からなる 4 つ組 $\mathbb{M} = (\mathscr{K}, \sigma, \tilde{X}, U)$ のことを言う．

$\mathcal{M}$ 上の正規な完全正値線型写像の族 $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}(\Delta)\}_{\Delta \in \mathcal{F}}$ は次の 2 条件を満たす時 $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument と呼ばれる：

(1) 互いに素な列 $\{\Delta_j\} \in \mathcal{F}, \rho \in \mathcal{M}_*$ と $M \in \mathcal{M}$ に対し，

$$\langle \rho, \sum_i \mathcal{I}(\Delta_i M) \rangle = \sum_i \langle \rho, \mathcal{I}(\Delta_i M) \rangle,$$

(2)$\mathcal{I}(S)1 = 1$.

この測定過程は von Neumann モデルの一般化として定義されたものである．物理学的には，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が測定の対象となる量子系，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$ が測定装置に対応する Hilbert 空間，$\tilde{X}$ が測定装置のメーターといったものに対応している．本修士論文では測定過程と完全正値インストゥルメントが数学的に等価であることを見た．

定理 2. 次の一対一対応が存在する：

$(i)\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathscr{K}, \sigma, \tilde{X}, U)$ (の統計的同値類),

$(ii)\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対する CP instrument $\mathcal{I}$.

この対応は次式で与えられる．

$$\mathcal{I}(\Delta)X = (1 \otimes \sigma)[U^*(M \otimes \tilde{X}(\Delta))U], \quad \Delta \in \mathcal{F}, M \in \boldsymbol{B}(\mathcal{H})$$

system of measurement correlation $\{W_T : \mathscr{M}^{|T|} \to \mathscr{M}\}_{T \in \mathscr{T}}$ とは $\mathcal{M}$ のテンソル積から $\mathcal{M}$ への線形写像で物理的要請から来るいくつかの適切な公理を満たすものをいう．これは Hesenberg 描像における CP instrument の対応物として定式化されたものである．本論文では物理量代数 $\mathcal{M}$ が $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ の場合にこの定式化が測定過程と数学的に等価であることを見た．

定理 3. 次の一対一対応が存在する：
$(i)\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対する測定過程 $\mathbb{M} = (\mathscr{K}, \sigma, \tilde{X}, U)$ (の統計的同値類),
$(ii)\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$ に対する measurement correlations $\{W_T : \mathscr{M}^{|T|}\}_{T \in \mathscr{T}}$.

また本論文の 3 章では，測定過程及び CP instrument 測定の反復可能性の数学的定義および議論を行った．

定義 4. $\mathcal{H}$ に対する CP instrument が弱反復可能 (weakly repeatable) であるとは，任意の $\Delta_1, \Delta_2 \in \mathcal{F}$ に対し，

$$\mathcal{I}(\Delta_1)X(\Delta_2) = X(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

を満たすことを言う．

定理 5. Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ は可分であるとする．CP instrument $\mathcal{I}$ が弱反復可能であるとき，$\mathcal{I}$ は離散的である．

参考文献

[1] Masanao Ozawa, *Quantum measuring processes of continuous observables*, Journal of Mathematical Physics 25, 79 (1984).
[2] Kazuya Okamura, Masanao Ozawa Masanao, *Measurement theory in local quantum physics*, Journal of Mathematical Physics 57, 015209 (2016).
[3] Kazuya Okamura, *Measuring Processes and the Heisenberg Picture*, Springer, Reality and Measurement in Algebraic Quantum Theory, 361-396 (2018).
[4] 岡村 和弥, 完全正値インストゥルメントとコホモロジー論, 数理解析研究所講究録, 第 1953 巻, 4-45 (2015).
[5] 岡村 和弥, 量子測定理論の数理, 数理解析研究所講究録, 第 2059 巻, 103-112 (2017).
[6] E.B. Davies, *Quantum Theory of Open Systems*, Academic, London (1976).
[7] E.B. Davies and J.T Lewis, *An operational approach to quantum probability* Comm. Math. Phys. 17, 239-260 (1970)
[8] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*, Princeton University Press, NJ (1955)
[9] W. Arverson, *Subalgebras of C^*-algebras*, Acta Math. 123, 141-224 (1969).
[10] J. Dixmier, *Von Neumann Algebras*, North-Holland (1981).
[11] M. Takesaki, Theory of Operator Algebras I, Springer (1979).