量子測定理論の数学的基礎

渡辺 博樹

2023/1/30

参考文献

- Masanao Ozawa, *Quantum measuring processes of continuous observables*, Journal of Mathematical Physics 25, 79 (1984).
- Kazuya Okamura, *Measuring Processes and the Heisenberg Picture*, Springer, Reality and Measurement in Algebraic Quantum Theory, 361-396 (2018).

量子測定とは

- 有限自由度ではPOVM(positive operator valued measure) 測定が数学的定式化
  $A \in M_n(\mathbb{C})$: 物理量,
  $\rho \in M_n(\mathbb{C})$: 量子状態 ($\rho = \sum_{i=1}^n \rho_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|,\ \sum_{i=1}^n \rho_i = 1$)

$$\mathrm{Ex}(A) = \mathrm{Tr}(A\rho)$$

- 無限自由度の場合にも適用できるような一般化を与えたい

$\mathcal{M}$: Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環,
$(S, \mathcal{F})$: 可測空間,

定義 (測定過程)

$\mathcal{K}$:Hilbert 空間
σ : trace 1 operator on $\mathcal{K}$ i.e. $\sigma = \sum_i a_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|, \ \sum_i a_i = 1, \ \{\xi_i\} : CONS$
$E : \mathcal{F} \to B(\mathcal{K})$: スペクトル測度
U :unitary on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$

$$\{\{(id \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U] \mid M \in \mathcal{M}, \Delta \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{M}$$

となるとき、$\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ を $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程とよぶ.

$\mathcal{M}$: Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環,
$(S, \mathcal{F})$: 可測空間,

定義 (測定過程)

$\mathcal{K}$:Hilbert 空間
σ : trace 1 operator on $\mathcal{K}$ i.e. $\sigma = \sum_i a_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|, \ \sum_i a_i = 1, \ \{\xi_i\} : CONS$
$E : \mathcal{F} \to B(\mathcal{K})$: スペクトル測度
U :unitary on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$

$$\{\{(id \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U] \mid M \in \mathcal{M}, \Delta \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{M}$$

となるとき、$\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ を $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程とよぶ.

物理的描像
$\mathcal{H}$: 量子系
$\mathcal{K}$: 測定機器
$U = \exp\{it(H_{\mathcal{H}} + H_{\mathcal{K}} + H_{int})\}$
E: メーター

ρ: trace 1 state on $\mathcal{H}$, 測定前の量子状態.

$$\mathrm{Prob}(M \in d\lambda, E \in d\Delta) := \mathrm{Tr}[U(\rho \otimes \sigma)U^*(M(d\lambda) \otimes E(d\Delta))]$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Ex}(M|E \in \Delta) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{Prob}(M \in d\lambda | E \in \Delta) \\ &= \mathrm{Tr}[U(\rho \otimes \sigma)U^*(M \otimes E(\Delta))]/\mathrm{Tr}[\rho E(\Delta)] \end{aligned}$$

ρ^{Δ} : 測定値 E が $\Delta \in \mathcal{F}$ に入ったときの測定後の状態

$$\mathrm{Ex}(M|E \in \Delta) = \mathrm{Tr}[\rho^{\Delta} M]$$

$$\rho \to \rho^{\Delta} = \frac{E_{\mathcal{K}}[U(\rho \otimes \sigma)U^*(1 \otimes E(\Delta))]}{\mathrm{Tr}[U(\rho \otimes \sigma)U^*(1 \otimes E(\Delta))]}$$

- 測定過程による状態変化 $\rho \in \mathcal{M}_* \mapsto \rho^\Delta \in \mathcal{M}_*$ $(\Delta \in \mathcal{F})$ は adjoint として $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を与える.

定義 (完全正値インストルメント, CP instrument)

$\mathcal{I} = \{\mathcal{I}(\Delta) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\}_{\Delta \in \mathcal{F}}$ で次を満たすものを $(\mathcal{M}, S)$ に対する完全正値インストルメント (CP instrument) とよぶ.
(1) $\mathcal{I}(\Delta)$ は正規 (σ-weakly conti) かつ完全正値 ($\sum_{i,j=1}^n N_i^* \mathcal{I}(\Delta)(M_i^* M_j) N_j \geq 0$)
(2)$\{\Delta_j\} \subset \mathcal{F}$: disjoint,cntble, $\rho \in \mathcal{M}_*, M \in \mathcal{M}$ に対し,

$$\rho(\mathcal{I}(\cup_j \Delta_j)M) = \sum_j \rho(\mathcal{I}(\Delta_j)M).$$

(3)$\mathcal{I}(S)1 = 1$

主定理 (小澤, 1984)

次の (1)(2) に一対一対応が存在：
(1)$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する測定過程の統計的同値類
(2)$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する CP instrument
この対応は次の等式で結ばれる．

$$\mathcal{I}(\Delta)M = (1 \otimes \sigma)[U^*(M \otimes E(\Delta))U], \quad M \in \mathcal{M} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2 \text{が統計的同値} &\overset{\text{def}}{\iff} \mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2 \text{が同じ CP instrument を定める．} \\ &\iff \mathrm{Ex}^{\mathbb{M}_1}(M|E \in \Delta) = \mathrm{Ex}^{\mathbb{M}_2}(M|E \in \Delta). \end{aligned}$$

命題

任意の $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument に対し，
$\mathcal{H}_0$: Hilbert 空間
$V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_0$: isometry
$E : S \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_0)$: スペクトル測度
$\pi : \mathcal{M} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_0)$: 非退化，正規表現
が存在して，

$$\mathcal{I}(\Delta, M) = V^* E(\Delta)\pi(M)V, \quad E(\Delta)\pi(a) = \pi(a)E(\Delta).$$

証明の概略:
測定過程から CP instrument の構成は容易.
$\mathcal{I}(\Delta, M) = V^* E_0(\Delta)\pi(M)V, \quad V : \mathcal{H} \to \mathcal{H}_1$ を考える.
$\pi : \mathcal{M} \to \boldsymbol{B}(\mathcal{H}_0)$ に対して Hilbert 空間 $\mathcal{H}_1$ が存在して，

$$\mathcal{H}_0 = \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_1, \quad \pi(M) = M \otimes 1.$$

$$E_0 = 1 \otimes^{\exists} E_1, \quad \mathcal{I}(\Delta, M) = V^*(M \otimes E_1(\Delta))V.$$

$\mathcal{K} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_0$,
$\sigma = |\eta_1 \otimes \eta_0\rangle\langle\eta_0 \otimes \eta_1|$,
$E = E_1 \otimes 1$,
U : V を使って構成.

測定過程 $\mathcal{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ はもとの CP instrument $\mathcal{I}$ を実現.

定義 (measurement correlation)

$\{W_T : \mathscr{M}^{|T|} \to \mathscr{M}\}_{T \in \mathscr{T}}$ で適当な公理 (多重線形性, 連続性等) を満たすものを $(\mathcal{M}, S)$ に対する measurement correlation とよぶ.

$(S, \mathcal{F})$:可測空間,

$$\mathscr{T} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathscr{T}_S^{(1)})^j, \quad \mathscr{T}^{(1)} = \{\mathrm{in}\} \cup \mathscr{F}$$

- CP instrument の Heisenberg 描像における対応物

定義 (measurement correlation)

$\{W_T : \mathscr{M}^{|T|} \to \mathscr{M}\}_{T\in\mathscr{T}}$ で適当な公理 (多重線形性, 連続性等) を満たすものを $(\mathcal{M}, S)$ に対する measurement correlation とよぶ.

$(S, \mathcal{F})$:可測空間,

$$\mathscr{T} = \bigcup_{j=1}^{\infty} (\mathscr{T}_S^{(1)})^j, \quad \mathscr{T}^{(1)} = \{\mathrm{in}\} \cup \mathscr{F}$$

- CP instrument の Heisenberg 描像における対応物

主定理 2(岡村, 2018)

次の (1)(2) に一対一対応が存在：
(1)$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する測定過程の統計的同値類,
(2)$(\boldsymbol{B}(\mathcal{H}), S)$ に対する measurement correlations $\{W_T\}_{T\in\mathscr{T}}$
.