Quantum measuring processes and completely positive instrument

Hiroki Watanabe

2021/2/14

量子測定とは

- 量子的な系を測定器を通じて測定する行為についての理論
- 有限自由度量子系では POVM が数学的定式化:

$$\mathrm{Ex}(A) = \mathrm{Tr}(A\rho), \quad (\rho = \sum_{i=1}^{n} \rho_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|, \ \sum_{i=1}^{n} \rho_i = 1)$$

- 無限自由度の場合にも適用できるような一般化を与えたい

作用素環について

代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ でノルム位相と作用素の共役について閉じているものを $\mathcal{H}$ 上の C^* 代数とよぶ．

$A, A_\lambda \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ $(\lambda \in \Lambda)$,

$$A_\lambda \xrightarrow{\lambda\to\infty} A \ (\sigma\text{-weakly}) \overset{\text{def}}{\iff} \sum_i \langle \eta_i, A_\lambda \xi_i \rangle \to \sum_i \langle \eta_i, A\xi_i \rangle \ (\lambda \to \infty),$$
$$\forall \{\xi_i\}, \{\eta_i\} \subset \mathcal{H} \ s.t. \sum_i \|\xi_i\|^2, \sum_i \|\eta_i\|^2 < +\infty$$

C^*代数 $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}(\mathcal{H})$ が von Neumann代数である

$$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \sigma\text{-weak 位相について閉じている}$$
$$\Longleftrightarrow \mathcal{A}'' = \mathcal{A}$$

$\mathcal{M}$:von Neumann 代数
predual of $\mathcal{M}$:

$$M_* := \{\rho \in \mathcal{M}^* : \sigma\text{-weakly conti.}\}$$

$$(\mathcal{M}_*)^* = \mathcal{M}, \langle \rho, M \rangle = \mathrm{Tr}(\rho \mathcal{M}), M \in \mathcal{M}, \rho \in \mathcal{M}_*,$$

$\mathcal{H}$: Hilbert space, $\mathcal{M}$: $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 環
$(S, \mathcal{F})$: measurable space,

定義 (測定過程)

$\mathcal{K}$:Hilbert space
σ : trace 1 state on $\mathcal{K}$ i.e. $\sigma = \sum_i a_i |\xi_i\rangle\langle\xi_i|, \ \sum_i a_i = 1, \ \{\xi_i\} : CONS$
$E : \mathcal{F} \to B(\mathcal{H})$: spectrum measure
U :unitary on $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$

$$\{\{(id \otimes \sigma)[U^*(X \otimes E(\Delta))U] \mid M \in \mathcal{M}, \Delta \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{M}$$

となるとき、$\mathbb{M} = (\mathcal{K}, \sigma, E, U)$ を $(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程とよぶ.

物理的描像
$\mathcal{H}$:量子的系
$\mathcal{K}$:測定機器
$U = \exp\{it(H_{\mathcal{H}} + H_{\mathcal{K}} + H_{int})\}$
E:メーター

$$\mathrm{Prob}(A \in d\lambda, E \in d\Delta) := \mathrm{Tr}[U(\rho \otimes \sigma)U^*(A(d\lambda) \otimes E(d\omega))]$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Ex}(A|E \in \Delta) &= \int_{\mathbb{R}} \lambda \mathrm{Prob}(A \in d\lambda | E \in \Delta) \\ &= \mathrm{Tr}[U(\rho \otimes \sigma)U^*(A \otimes E(\Delta))]/\mathrm{Tr}[\rho E(\Delta)]\end{aligned}$$

ρ^Δ : 測定値 E が $\Delta \in \mathcal{F}$ に入ったときの測定後の状態

$$\mathrm{Ex}(A|E \in \Delta) = \mathrm{Tr}[\rho^\Delta A]$$

$$\rho \to \rho^\Delta = \frac{E_{\mathcal{K}}[U(\rho \otimes \sigma)U^*(1 \otimes E(\Delta))]}{\mathrm{Tr}[U(\rho \otimes \sigma)U^*(1 \otimes E(\Delta))]}$$

- 測定過程による状態変化 $\rho \in \mathcal{M}_* \mapsto \rho^\Delta \in \mathcal{M}_*$ $(\Delta \in \mathcal{F})$ は adjoint として $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ を与える.

定義 (完全正値インストルメント,CP instrument)

$\mathcal{I} = \{\mathcal{I}(\Delta) : \mathcal{M} \to \mathcal{M}\}_{\Delta \in \mathcal{F}}$ で次を満たすものを $(\mathcal{M}, S)$ に対する完全正値インストルメントとよぶ.

(1) $\mathcal{I}(\Delta)$ は正規 (σ-weakly conti) かつ完全正値 $(\sum_{i,j=1}^n N_i^* \mathcal{I}(\Delta)(M_i^* M_j) N_j \geq 0)$

(2)$\{\Delta_j\} \subset \mathcal{F}$: disjoint,cntble, $\rho \in \mathcal{M}_*, M \in \mathcal{M}$ に対し,

$$\rho(\mathcal{I}(\cup_j \Delta_j)M) = \sum_j \rho(\mathcal{I}(\Delta_j)M).$$

(3)$\mathcal{I}(S)1 = 1$

定理 (小澤,1984)

次の間には一対一対応が存在：

(1)$(B(\mathcal{H}), S)$ に対する測定過程の統計的同値類

(2)$(B(\mathcal{H}), S)$ に対する CP instrument$\mathcal{I}$

この対応は次の等式で結ばれる．

$$\mathcal{I}(\Delta)X = (1 \otimes \sigma)[U^*(X \otimes E(\Delta))U]$$

$$\begin{aligned}\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2\text{が統計的同値} &\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2\text{が同じ CP instrument を定める} \\ &\Longleftrightarrow \mathrm{Ex}^{\mathbb{M}_1}(X|E \in \Delta) = \mathrm{Ex}^{\mathbb{M}_2}(X|E \in \Delta)\end{aligned}$$

一般の von Neumann 環への拡張

有限自由度量子系では物理量代数は $\boldsymbol{B}(\mathcal{H})$.

無限自由度ではどうか？

$$
{}^{\exists!}\Psi_{\mathcal{I}} : \mathcal{M} \otimes L^{\infty}(S, \mathcal{I}) \to \mathcal{M}
$$
$$
s.t.\ \mathcal{I}(\Delta)M = \Psi_{\mathcal{I}}(M \otimes \chi_{\Delta}), \quad M \in \mathcal{M}, \Delta \in \mathcal{F}
$$

定義

$(\mathcal{M}, S)$ に対する完全正値インストゥルメントが正規拡張性質 (NEP) をもつとは，正規な完全正値写像 $\tilde{\Psi}_{\mathcal{I}} : \mathcal{M}\bar{\otimes}L^{\infty}(S, \mathcal{I}) \to \mathcal{M}$ で $\tilde{\Psi}_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{M}\otimes L^{\infty}(S, \phi\circ\mathcal{I})} = \Psi_{\mathcal{I}}$ なるものが存在すること．

$$^{\exists!}\Psi_{\mathcal{I}} : \mathcal{M} \otimes L^{\infty}(S, \mathcal{I}) \to \mathcal{M}$$
$$s.t.\ \mathcal{I}(\Delta)M = \Psi_{\mathcal{I}}(M \otimes \chi_{\Delta}), \quad M \in \mathcal{M}, \Delta \in \mathcal{F}$$

定義

$(\mathcal{M}, S)$ に対する完全正値インストゥルメントが正規拡張性質 (NEP) をもつとは，正規な完全正値写像 $\tilde{\Psi}_{\mathcal{I}} : \mathcal{M}\bar{\otimes}L^{\infty}(S, \mathcal{I}) \to \mathcal{M}$ で $\tilde{\Psi}_{\mathcal{I}}|_{\mathcal{M}\otimes L^{\infty}(S, \phi\circ\mathcal{I})} = \Psi_{\mathcal{I}}$ なるものが存在すること．

定理 (岡村-小澤,2016)

次の間には一対一対応が存在：
(1)$(\mathcal{M}, S)$ に対する測定過程の統計的同値類
(2) 正規拡張性質 (NEP) をもつ $(\mathcal{M}, S)$ に対する CP instrument$\mathcal{I}$
この対応は次の等式で結ばれる．

$$\mathcal{I}(\Delta)X = (1 \otimes \sigma)[U^*(X \otimes E(\Delta))U]$$

最近の進展

- 量子測定の Heisenberg 描像での実現
  - $\rho \to \rho^{\Delta} = \mathcal{I}(\Delta)\rho/\mathrm{Tr}(\mathcal{I}(\Delta)\rho),\ \Delta \in \mathcal{F}$
    system of measurent correlations: $\{W_T\}_{T \in \mathscr{T}}$

- 代数的場の量子論 (AQFT) での量子測定
  - $\{\mathcal{A}(\mathcal{O})\}_{\mathcal{O} \in \mathcal{K}}$:
    $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2 \Longrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subset \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$

参考文献

- Masanao Ozawa, *Quantum measuring processes of continuous observables*, Journal of Mathematical Physics 25, 79 (1984).
- Kazuya Okamura, Masanao Ozawa Masanao, *Measurement theory in local quantum physics*, Journal of Mathematical Physics 57, 015209 (2016).
- 岡村 和弥, 量子測定理論の数理, 数理解析研究所講究録, 第 2059 巻, 103-112 (2017).