

## 問

(i)

$x$  に関する  $2\pi$  周期関数  $x^2$  ( $-\pi \leq x \leq \pi$ ) をフーリエ級数展開せよ<sup>1</sup>.

(ii)

以下の値を求めよ<sup>2</sup>.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

(iii)

次の広義積分を求めよ<sup>3</sup>.

$$\int_0^{\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$$

---

<sup>1</sup>一般に, 連続的かつ区分的に滑らかな  $2\pi$ -周期関数  $f$  は

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

としたときに

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とサインとコサインの無限和で表すことができる (フーリエ級数展開)

<sup>2</sup>ヒント: Parseval の等式

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

<sup>3</sup>ヒント:  $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots$  ( $|x| < 1$ ). また, 上の結果を用いる.