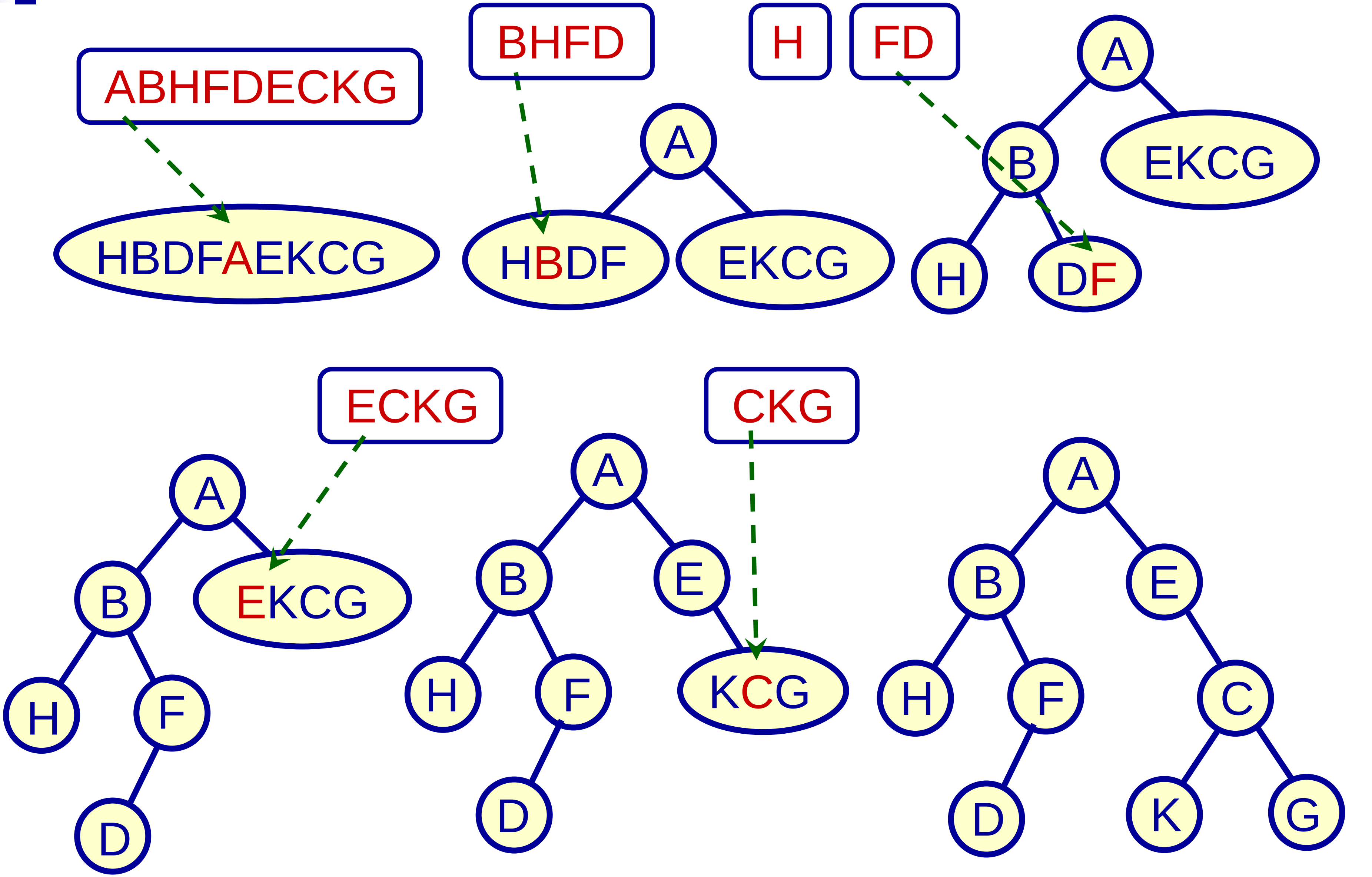
第6章 树与二叉树

- 树的定义与基本概念
- 二叉树
- 二叉树遍历
- 二叉树的计数
- 线索二叉树
- 树与森林

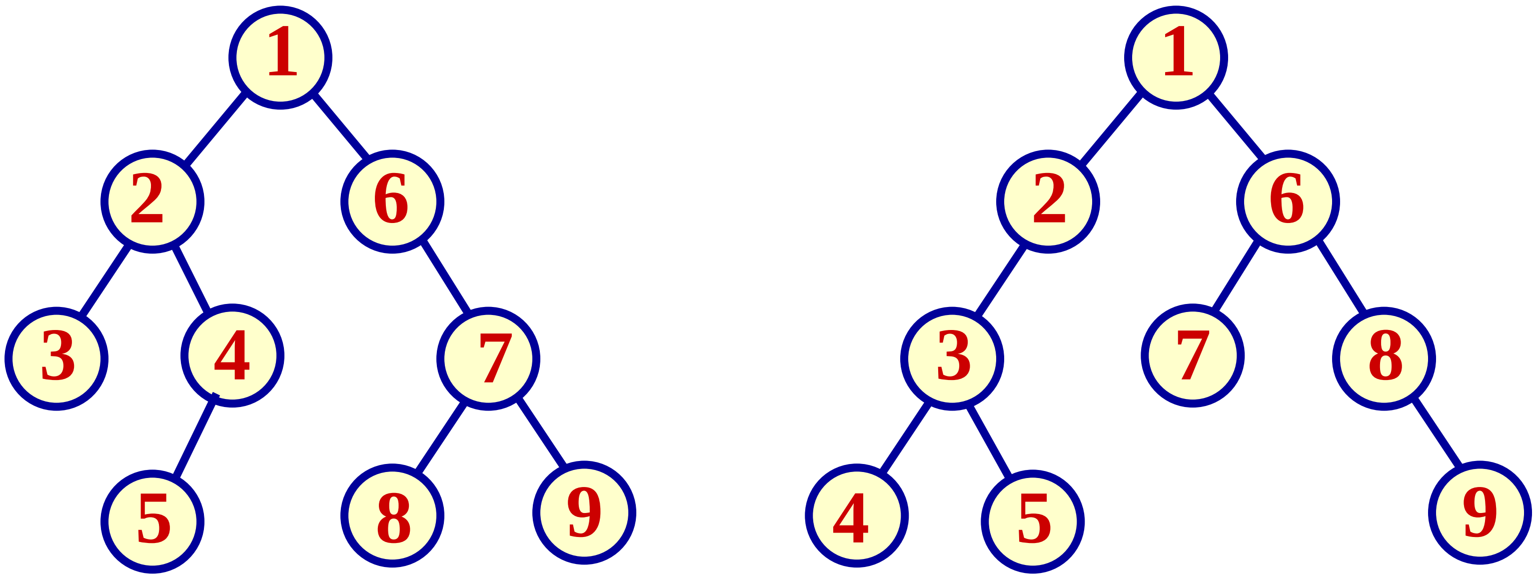
二叉树的计数

- 由二叉树的先序序列和中序序列可唯一地确定一棵二叉树。
- 复习二叉树先序序列隐含的性质：先序序列第一个元素一定是二叉树的根。其后紧跟的是根的左子女（若根的左子树非空），或者是根的右子女（若根的左子树为空）。
- 复习二叉树中序序列隐含的性质：二叉树的根可把其中序序列分为两个子序列，左子序列是根的左子树的中序序列，右子序列是根的右子树的中序序列。

- 顺便说明二叉树后序序列隐含的性质：与先序序列正好相反，后序序列最后一个元素一定是二叉树的根，其紧前一个元素是根的右子女（若根的右子树非空），或者是根的左子女（若 的右子树为空）。子树则类推。
- 二叉树的中序序列与先序序列搭配起来，就可以恢复该二叉树。例如，一棵二叉树的先序序列为ABHFDECKG，中序序列为HBDFAEKCG。
- 先序序列第一个‘A’一定是根，它把中序序列一分为二：“HBDF”和“EKCG”，这就得到二叉树的左子树和右子树的中序序列，再看先序序列，…

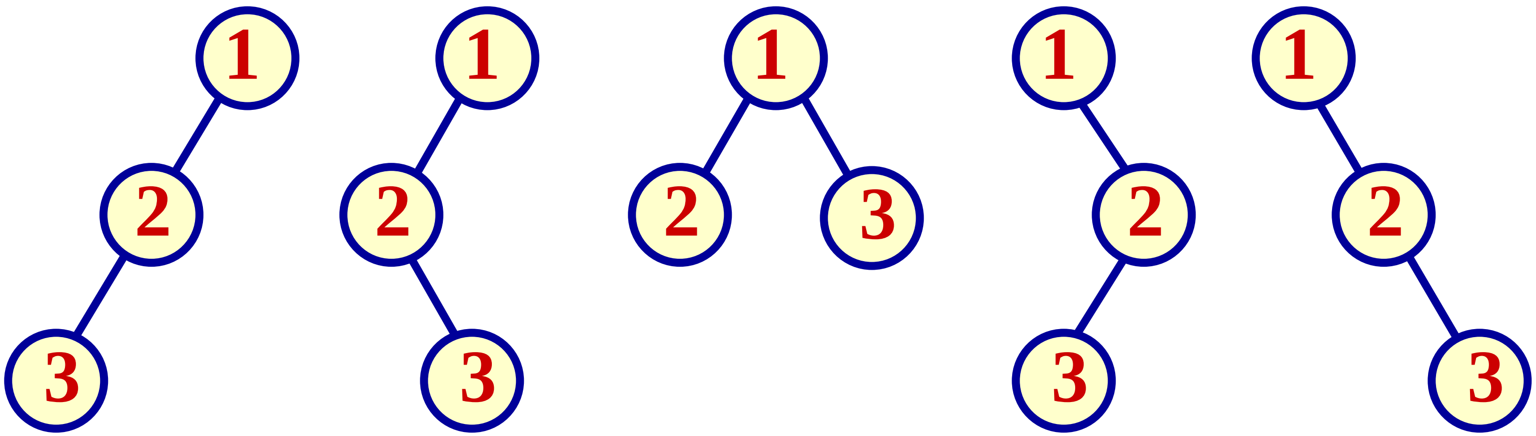

ABHFDECKG
HBDFAEKCG
BHFD
A
HBDF
EKCG
H
FD
A
B
EKCG
H
DF
ECKG
A
B
EKCG
H
F
D
CKG
A
B
E
H
F
KCG
D
A
B
E
H
F
C
D
K
G

- 如果先序序列固定不变，给出不同的中序序列，可得到不同的二叉树。



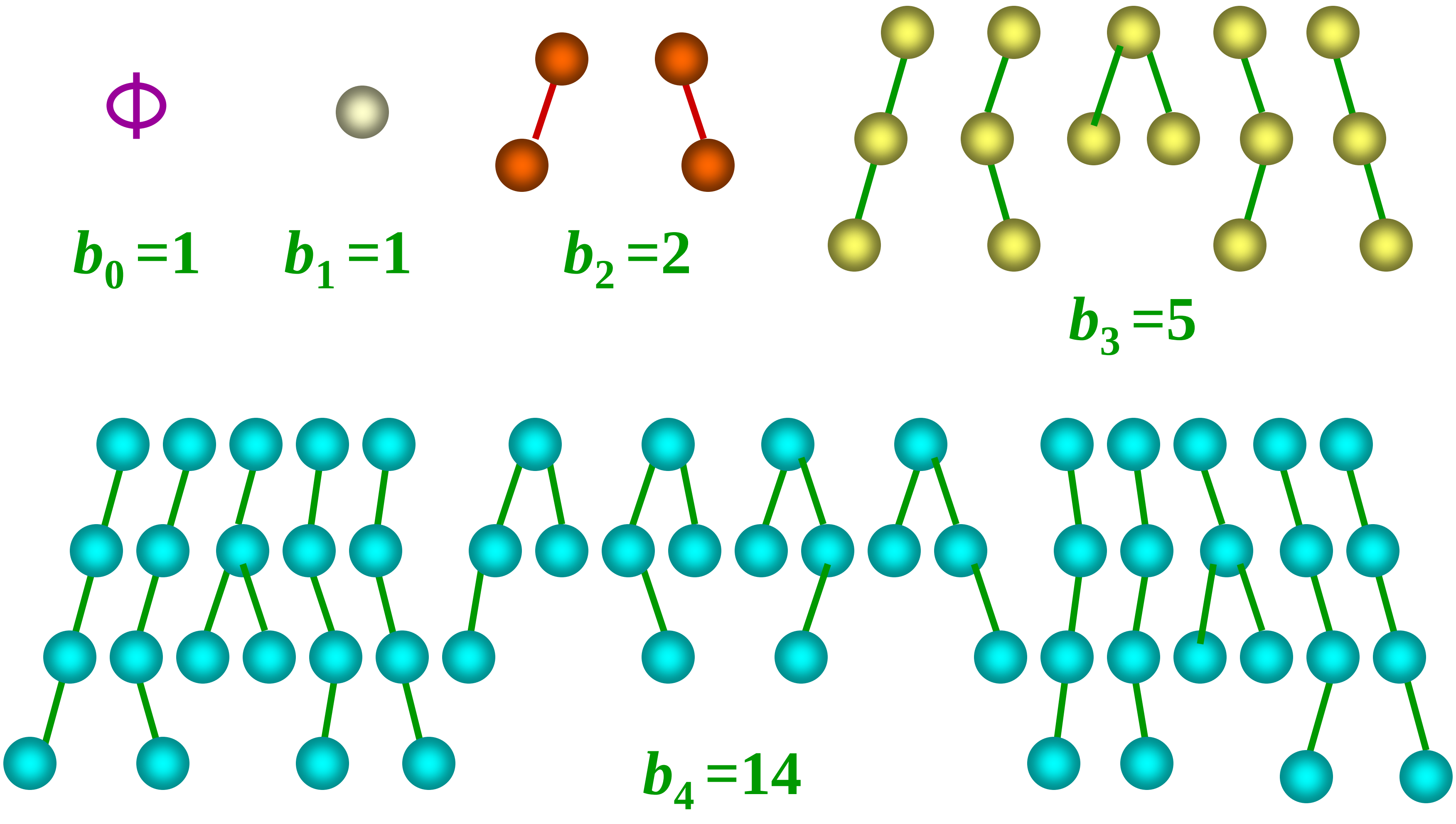
- 问题是：固定先序排列，选择所有可能的中序排列，可以构造出多少种不同的二叉树？

- 例如，有 3 个数据 { 1, 2, 3 }，可得 5 种不同的二叉树。它们的先序排列均为 123，中序序列可能是 123，132，213，231，321。



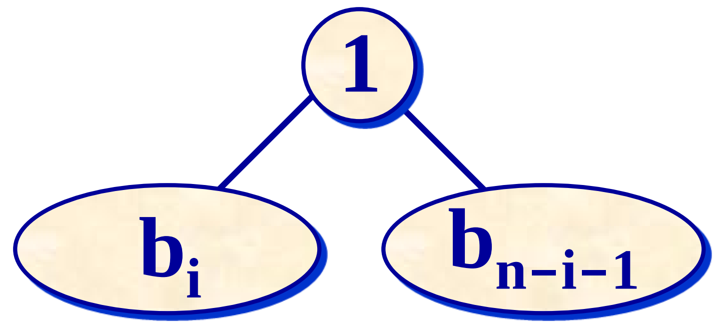
- 那么，如何推广到一般情形呢？首先，只有一个结点的不同二叉树只有一个；有 2 个结点的不同二叉树只有 2 种，其他情况呢？

有0个, 1个, 2个, 3个结点的不同二叉树如下



计算具有 n 个结点的不同二叉树的棵数

$$b_n = \sum_{i=0}^{n-1} b_i \cdot b_{n-i-1}$$



- *Catalan*函数

$$b_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^{n} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n! \cdot n!}$$

- 例

$$b_3 = \frac{1}{3+1} C_6^3 = \frac{1}{4} \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$$

$$b_4 = \frac{1}{4+1} C_8^4 = \frac{1}{5} \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14$$