第9章 不相交集

郑新、徐鹏飞、李健
北京师范大学人工智能学院
2025-2026学年 第一学期

考核要点

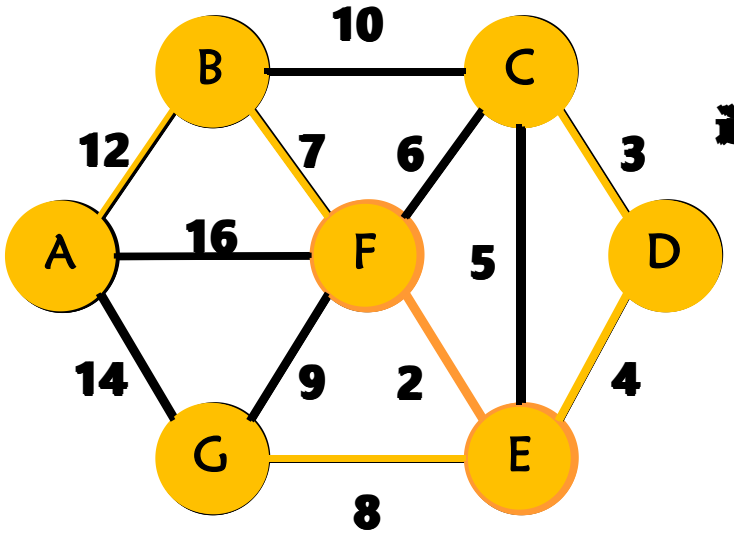
- **考核大纲**
  - 等价关系与等价类，不相交集；
  - 不相交集实现（存储实现，运算实现）；
  - 并查集与路径压缩最短路径问题；
  - 生成迷宫，最近的共同祖先问题
- **复习要点**
  - 理解等价关系与等价类（B）；
  - 掌握不相交集及其实现（B）；
  - 运用不相交集的并查操作求解经典问题（B）；

提纲

- 9.1 问题引入
- 9.2 等价关系、等价类和不相交集
- 9.3 不相交集的存储实现
- 9.4 不相交集的基本运算实现
- 9.5 不相交集的应用
- 9.6 拓展延伸
- 9.7 应用场景

9.1 问题引入：Kruskal算法的高效实现

- 求最小生成树的Kruskal算法：
  - ✓ 按权重递增顺序考虑每条边
  - ✓ 并把连接不同连通分量的边$e = (u, v)$加入生成树。
- 这需要动态地维护图的连通性
- 需要支持下列三种操作：
  - ✓ （初始化）初始化一个无向图$G = (V, E)$，其中$E = \emptyset$（空集），即每个顶点分属于不同的连通分量。
  - ✓ （加边）在图中加入一条边(u, v)：$E \leftarrow E \cup \{(u, v)\}$。
  - ✓ （连通性查询）查询顶点u和顶点v是否属于同一连通分量，即查询两顶点之间是否有路径相连。



第4步：

- 直接做法：利用无向图实现
  - ✓加边操作只需$O(1)$时间；
  - ✓连通性查询可以通过图的遍历实现，在$n = |V|$个顶点的图中，每次查询最坏需要$O(n)$。

- 在Kruskal算法中，对每条边均需要进行一次连通性查询，因此m=|E|次查询的总时间复杂度为$O(nm)$。

- **注意**：
  - ✓ 只需要查询顶点之间**是否连通**，不关心它们具体**通过哪条路径连通**；
  - ✓ 只需要支持**加边操作**，而不需要支持**删边操作**。
- 这种情况下，与其完整地维护无向图的结构，不如直接维护连通分量构成的**集合**
- 每个连通分量用其中顶点的集合表示。

1. **初始**时，每个顶点都是独立的连通分量，此时有n个仅包含单一顶点的集合：$\{v_1\},\{v_2\}\cdots\{v_n\}$
2. 每加入一条边(u ,v)，就将u所属的集合和v所属的**集合合并**
3. 对于连通性查询(u,v)，只需**查询**u和v是否在同一集合中

连通性查询问题变成了**维护**若干**不相交的集合**，并动态地**合并**、**查找**的问题。

- 利用不相交集的数据结构，这些集合操作仅需每操作$O(\alpha(n))$的时间复杂度，其中$\alpha(\cdot)$是一个增长极其缓慢的函数，一般可以认为$\alpha(n) \leq 4$。该时间复杂度仅略高于$O(1)$，而大大低于图的遍历所需的$O(n)$。

提纲

- 9.1　问题引入
- 9.2　等价关系、等价类和不相交集
- 9.3　不相交集的存储实现
- 9.4　不相交集的基本运算实现
- 9.5　不相交集的应用
- 9.6　拓展延伸
- 9.7　应用场景

9.2 等价关系、等价类和不相交集

- 不相交集与数学中等价关系、等价类的概念密切相关
- 元素之间的等价关系自然地定义了若干不相交集的集合
- 因此，不相交集常常用于处理等价性查询的问题
  - ✓例如，两个顶点在同一连通分量中就可以看做一种等价性

等价性查询的一般定义

- 定义9-1.（等价关系）称在集合X上的二元关系~为一个等价关系，若其满足：
  - ✓（自反性）$\forall a \in X$，有$a \sim a$；
  - ✓（对称性）$\forall a, b \in X$，若$a \sim b$，则$b \sim a$；
  - ✓（传递性）$\forall a, b, c \in X$，若$a \sim b$，$b \sim c$，则$a \sim c$。

- 一个最常见的等价关系是定义在整数集$\mathbb{Z}$上的相等关系$=$。不难验证，该关系满足定义9-1中的三条性质。
- 等价关系将“相等”的概念推广到了一般的集合。

例 9.1. 不同问题中的等价关系：

1 对于平面上全部三角形构成的集合R，三角形之间的全等关系$\cong$及相似关系$\backsim$均为等价关系。

2 对于无向图G=(V,E)中顶点构成的集合V,定义~代表顶点间的连通性，而$\forall u, v \in V$,u~v当且仅当u、v连通，则顶点间的连通性是一个等价关系

3 对于所有生物构成的集合，两种生物是否属于同一科构成一个等价关系

对集合中的任意元素，称所有与其等价的元素为一个等价类：

- 定义 9-2. （等价类）给定集合X和等价关系~，定义某一元素$a \in X$的等价类为$\{x \in X, x \sim a\}$。

等价关系把集合划分成若干个不相交的等价类，每个等价类中的元素互相等价。

称所有等价类构成的集合为一个商集。

- 定义 9-3. （商集）集合X关于等价关系~的商集记作X/~，定义为：

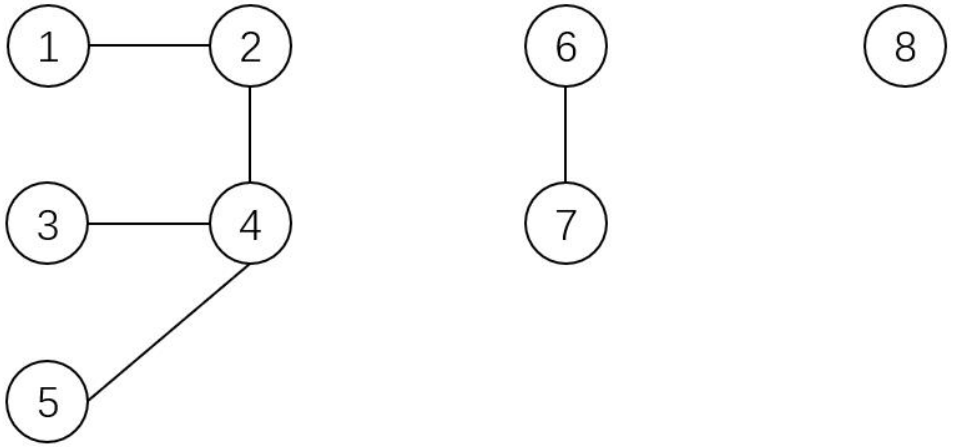
$$X/\sim \ := \{\{x \in X, x \sim a\}, a \in X\}.$$

商集是一系列集合，这些集合彼此不相交，并且其并集是全集X。这与不相交集的概念恰好对应。

实例

例 9.2. 在下图所示的无向图$\mathbf{G}=(\mathbf{V},\mathbf{E})$中，考虑顶点间的连通关系~（见例9.1）。

- 该连通关系将点集$\mathbf{V}$划分为了三个等价类，分别为$\{1,2,3,4,5\}$、$\{6,7\}$和$\{8\}$。这些等价类彼此不相交，且它们的并集为全集$\mathbf{V}$。本例中，每个等价类是一个无向图中的连通分量。



无向图$G=(V,E)$中连通性等价关系定义的等价类

- 不相交集可以用于等价性的动态查询。
- 等价性的查询在计算机科学中有广泛应用。例如，在编译器的设计中，用于判断符号地址的等价性。

不相交集维护某集合X关于等价关系~的商集$X/\sim$

等价关系的增加对应Union操作，即将两个等价类合并

等价性的查询对应Find操作。若要查询两元素x、y的等价性，需判断是否有$\text{Find}(x) = \text{Find}(y)$

提纲

- 9.1　问题引入
- 9.2　等价关系、等价类和不相交集
- 9.3　不相交集的存储实现
- 9.4　不相交集的基本运算实现
- 9.5　不相交集的应用
- 9.6　拓展延伸
- 9.7　应用场景

不相交集数据结构定义

给定n个元素组成的集合X。不失一般性，令$X = \{1, 2, ..., n\}$。

不相交集的数据结构动态维护了集合X的一组划分，即若干个不相交的集合$X_1, ..., X_m$，满足:

- $\forall i \neq j, X_i \cap X_j = \emptyset$;
- $\cup_{i=1}^{m} X_i = X$。

- 例：考虑集合X={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}。

合法的划分： {{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7}, {8}}或{{1} {2}, {3}, {4}, {5}, {6}, {7}, {8}};

以下不是集合X的划分: {{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7}}和{{1, 2, 3}, {3, 4, 5}, {5, 6, 7, 8}} 。

抽象数据类型

- 不相交集的数据结构需要动态处理集合的合并和查询操作，其ADT定义如下：

代码 9-1 不相交集的抽象数据类型定义

```
ADT DisjointSet {
数据对象:
        n个元素构成的全集X。
数据关系:
        {< i,j > |i,j ∈ X}表示i、j属于同一个集合。
基本操作:
    InitSet(set, n):
        建立n个不相交的集合X_1, ..., X_n，其中每个集合初始只有一个元素：X_i = {i}, ∀i = 1, ..., n。
    DestorySet(set):
        释放不相交集set所占用的所有空间。
    Find(set, x)：查询元素x所在的集合。
    Union(set, x, y)：合并元素x和元素y所在的集合。
}
```

➢ 思考：Find操作查询元素所在的集合，输入是一个元素，输出是一个集合……

如何表示一个集合?

✓ 由于集合是动态变化的，难以实时给集合从1开始按顺序编号

✓ 技巧：规定每个集合中X需要有一个“代表”元素$a \in X$，该元素的编号即为集合编号，即

$$Find(x) = a, \forall x \in X$$

例：对于划分{{1, 2, 3, 4, 5}, {6, 7}, {8}}，可规定集合{1, 2, 3, 4, 5}代表元素为1，则Find(2)=Find(3)=Find(4)=Find(5)=1。

提纲

- 9.1　问题引入
- 9.2　等价关系、等价类和不相交集
- 9.3　不相交集的存储实现
- 9.4　不相交集的基本运算实现
- 9.5　不相交集的应用
- 9.6　拓展延伸
- 9.7　应用场景

不相交集的数据结构实现

- 不相交集可利用森林的数据结构实现：
  - ✓ 每个元素*x*只需维护其父亲结点*x.parent*。
  - ✓ 特别地，规定根结点的父亲结点是其本身，即*x.parent*=*x*。
  - ✓ 规定森林中的每棵树代表一个不相交集的集合，且其“代表”元素是其根结点。
  - ✓ InitSet操作只需定义*n*棵仅含根结点的树，Find操作只需找到要查询的元素*x*对应的根结点。而Union操作只需将*x*和*y*元素各自对应的根结点合并。

基本运算实现

算法9-1： 初始化不相交集InitSet(*set*, n)

输入： 元素的数量n，不相交集set={1, 2, ..., n}。
输出： 初始化后的集合set。

```
1. for 每个元素 x∈ set do
2.     | x.parent ← x
3. end
```

算法9-2： 查找元素所在的集合Find(*set*, *x*)

输入： 不相交集set中待查找的元素x。
输出： 元素x所在树的根顶点。

```
1. while x ≠ x.parent do
2.     | x ← x.parent
3. end
4. return x
```

算法9-3： 合并两个元素所在的集合Union(*set*, x, *y*)

输入： 不相交集set中的两个元素x和y。
输出： 合并x和y各自所在集合后的不相交集set。

1. $i \leftarrow \mathrm{Find}(set, x)$
2. $j \leftarrow \mathrm{Find}(set, y)$
3. $i.parent \leftarrow j$

- **问题**：在上述实现中，InitSet、Find、Union的操作时间复杂度均可达$O(n)$
- 考虑森林退化成一条链的情况：$i.parent = i-1, \forall i = 2,3,\cdots,n$。
- 这种情况下，每次Find(set, n)均需要$O(n)$的时间复杂度，而每次Union(set, $n-1$, n)也需要$O(n)$的时间复杂度。

朴素的不相交集实现的最坏情况

9.4.1按秩合并

- 按秩合并策略为每个根结点x引入一个秩x.rank，并在合并时总是把秩小的树根合并到秩大的树根。
- 根结点的秩反映了以该结点为根的子树“大小”，考虑利用树的高度作为树的秩：
  - ✓对每个根节点x，定义其秩$x.rank$为*以x为根的树的高度减一*。
  - ✓特别地，仅由单个结点构成的树的根结点秩为0。
- 在这种情况下，可保证树的“平衡性”：

$$深度为l的子树至少有2^l-1个结点。$$

按秩合并

- 采取按秩合并策略后，InitSet和Union操作的实现调整为算法9-4、算法9-5：

算法9-4： 初始化采用按秩合并策略的不相交集InitSet(*set*, *n*)

输入： **元素的数量***n*，不相交集*set*={1, 2, ..., *n*}。

输出： 初始化后的集合*set*。

```
1. for 每个元素 x∈ set do
2.     | x.parent ← x
3.     | x.rank ← 0
4. End
```

算法9-5： 利用按秩合并策略合并两个元素所在的集合Union(*set*, x, *y*)

输入： 不相交集*set*中的两个元素*x*和*y*。

输出： 合并*x*和*y*各自所在集合后的不相交集*set*。

```
1.  i ← Find(set, x)
2.  j ← Find(set, y)
3.  if i.rank > j.rank then
4.      | j.parent ← i
5.  else if i.rank < j.rank then
6.      | i.parent ← j
7.  else   //i.rank = j.rank
8.      | i.parent ← j
9.      | j.rank ← j.rank + 1
10. end
```

按秩合并

- 引理 9-1. 在采用按秩合并策略的不相交集算法运行过程中，对于任意子树，若其根结点秩为r，则该子树中至少有2^r个结点。

证明.

利用归纳法，对子树根结点的秩r进行归纳:

1. $r = 0$时子树中仅含一个结点，命题成立。

2. 假设命题对所有不超过$r-1$的秩成立。考虑根结点root的秩为$r > 0$的子树:

由于$r = root.rank > 0$，根结点root的秩必然是与另一棵根为root'的树进行Union操作时设置而来。

不失一般性，设该次Union前有:

root.$rank = root'.rank = r - 1$

否则该次Union前一定存在某次Union(root, root''), 且

root.$rank = root''.rank = r - 1$;

而Union操作不会令树中的结点数目减少。

3. 由归纳假设，可知此时以root和root' 为根的子树中都各有至少2^{r-1}个结点，故合并后的子树中至少有2^r个结点。

4. 由归纳法，命题对所有$r \in \mathbb{N}$成立

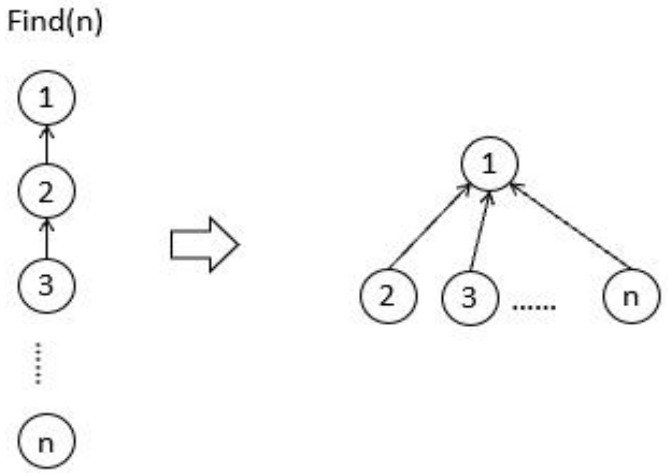
按秩合并

引理9-1. 在采用按秩合并策略的不相交集算法运行过程中，对于任意子树，若其根结点秩为r，则该子树中至少有2^r个结点。

- 每次Find、Union操作的时间复杂度取决于查找链的长度，即Find操作找到的根结点的秩加一。
- 最坏情况下，全部的n个结点构成一棵树。根据引理9-1，该树根的秩不超过$\log n$。因此，不相交集每次Find、Union操作的时间复杂度为$O(\log n)$。

9.4.2 路径压缩

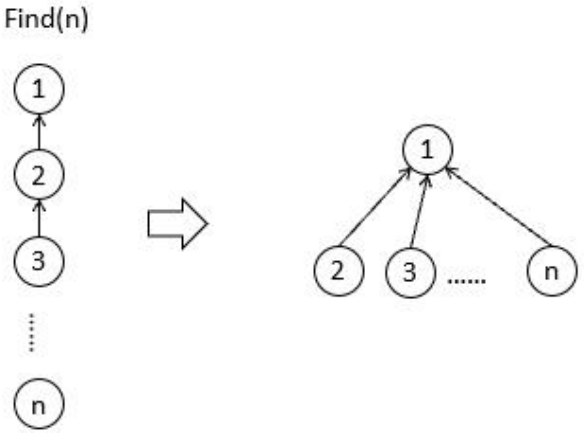
- 假设某次查找时，路径深度过大，导致该次查找的时间成本很高。我们只需调整森林的结构，将查找路径上的所有结点直接连接至根。
- 这样，下次查找这条路径上的结点时只需$O(1)$时间即可完成。这个技巧称为路径压缩（Path Compression）。



路径压缩

路径压缩

- 利用路径压缩技巧，不相交集的查找可以重写成为算法9-6。该算法首先递归地查找到根r，之后逐层返回，并将路径上所有结点的父结点均设为r。



路径压缩

算法9-6： 以路径压缩策略查找元素所在的集合
Find(*set*, *x*)

输入： 不相交集*set*中待查找的元素*x*。
输出： 元素*x*所在树的根结点。

```
1. if x ≠ x.parent then
2.     | x.parent ← Find(set, x.parent)
3. end
4. return x.parent
```

- 下图演示了同时采用按秩合并和路径压缩策略时，8个元素构成的不相交集的合并过程。

初始时，所有结点均不相连，结点的秩均为0

Union(5, 1)时，两结点具有相同的秩，此时将5合并到1，并将结点的秩置为1

Union(6, 5)时，两棵秩为1的树合并成为一棵秩为2的树

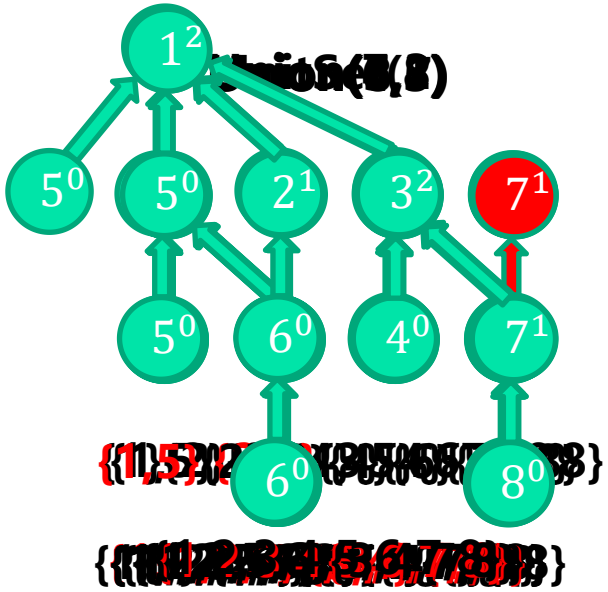
Union(3, 6)时，首先执行的Find(6)进行了路径压缩，将6直接连接至1

*此时2成为叶子结点，但其秩未发生改变。结点1的秩也仍是2

合并操作将两棵秩为2的树合并成一棵秩为3的树

树有2^3=8个结点，在可能出现的秩为3的树中是结点数目最少的

Union(3,6)



采用了按秩合并和路径压缩的不相交集运行示例

(*图中i^r表示编号为i，秩为r的顶点)

路径压缩

- 实现不相交集非常简单，但分析其时间复杂度却非常困难。虽然单个操作的时间复杂度较高，最坏可达$O(\log n)$。然而，由于路径压缩策略的存在，每次访问完一条路径后，下次访问该路径上结点的时间复杂度就会降低，因此算法整体的时间复杂度仍然较低。

性能分析

- 使用均摊分析技巧，考虑连续的m个操作的总时间复杂度。
- 可证明,同时使用按秩合并和路径压缩后，n个元素组成的不相交集上进行m次Find/Union操作的时间复杂度为$O(m\alpha(n))$，即每次操作的均摊时间复杂度为$O(\alpha(n))$。其中：
  - ✓ $\alpha(n)$是增长非常缓慢的函数，对$n < 10^{80}$均有$\alpha(n) \leq 4$。
  - ✓ 10^{80}与可观测的宇宙中原子的数目具有相当的数量级。
- 因此，Find/Union操作几乎具有常数时间复杂度。
- 尽管如此，不能称Find/Union具有$O(1)$的时间复杂度，因为

  $n \to \infty$时，仍有$\alpha(n) \to \infty$
- 可证明$O(\alpha(n))$时间复杂度上界是紧的，即不相交集不存在$O(1)$时间复杂度的算法。

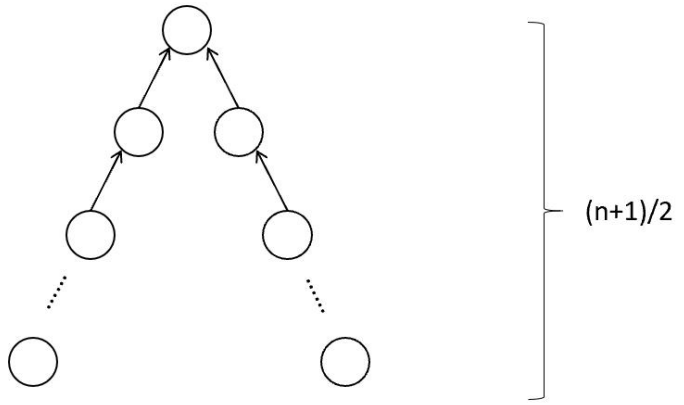
提纲

- 9.1　问题引入
- 9.2　等价关系、等价类和不相交集
- 9.3　不相交集的存储实现
- 9.4　不相交集的基本运算实现
- 9.5　不相交集的应用
- 9.6　拓展延伸
- 9.7　应用场景

最近公共祖先问题

- 在一棵树中，结点u与结点v的公共祖先是所有同时是u和v祖先的结点，而其中深度最大（即离根最远）的结点称为**最近公共祖先**。
- 给定任意两个结点u和v，公共祖先构成一条以根结点为起点的链，而其中最近公共祖先是**唯一**的。
- **最近公共祖先LCA（Lowest Common Ancestor）问题**

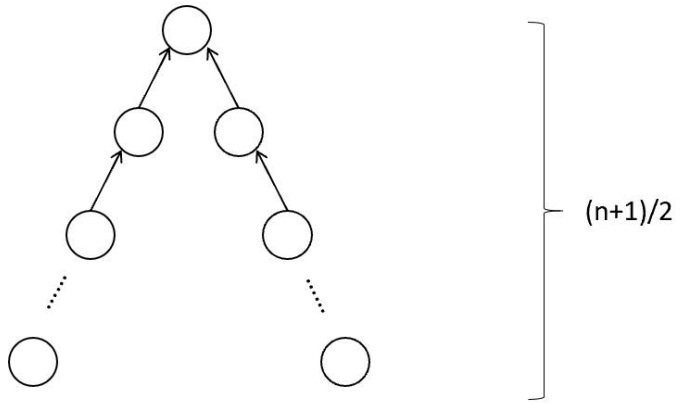
  考虑m个形如(u,v)的查询，每次需要查询树T中结点u和v的最近公共祖先。



最近公共祖先问题蛮力算法的坏情况

蛮力算法求解

1. 首先，从结点u回溯至根，将路径上每个结点均做标记；
2. 然后，从结点v回溯至根，路径上遇到的第一个有标记的结点即为结点u、v的最近公共祖先。



最近公共祖先问题蛮力算法的坏情况

- 然而，该蛮力算法的时间复杂度较高。
- 如图，若树T中有n个结点，则蛮力算法在最坏情况下每次查询的时间复杂度可达$O(n)$。

离线算法（Tarjan算法）

- 一次性返回所有m个查询的结果，总时间复杂度仅为$O(m\alpha(n)+n)$。
- Tarjan算法对树进行深度优先遍历，并按遍历的顺序处理询问。
  - ✓若在遍历某结点v时，关于该结点的询问(u,v)的另一端点u已被访问过（“闭询问”），则Tarjan算法立即处理该询问
  - ✓否则，若u尚未被访问（“开询问”），则将此询问留待访问u时完成。

- 设算法已经访问完了根为r的子树$T_1 \in T$，并且处理完毕了所有关于T_1闭询问。
- 需要保留哪些信息以在未来处理T_1的开询问呢?
- 不失一般性，考虑开询问(u, v)，其中$u \in T_1$已经被访问，而v尚未被访问。
- 因为v不是子树T_1中的结点（否则(u, v)应该是闭询问），所以(u, v)的LCA必然不会是子树T_1中的结点，最多只能是子树根r的父亲r.parent。
- 因此，对于后续所有关于T_1的开询问，保留子树的结构已无意义，我们可以将子树中的所有结点合并到结点r.parent上。
- 在后续遍历中，r.parent代表子树T_1中的所有结点，无需再考虑子树T_1的具体结构。 该合并操作可以用不相交集实现，如算法9-7。

Tarjan算法

算法9-7： Tarjan算法求解最近公共祖先 LCA(*P, u, set, ancestor, visited*)

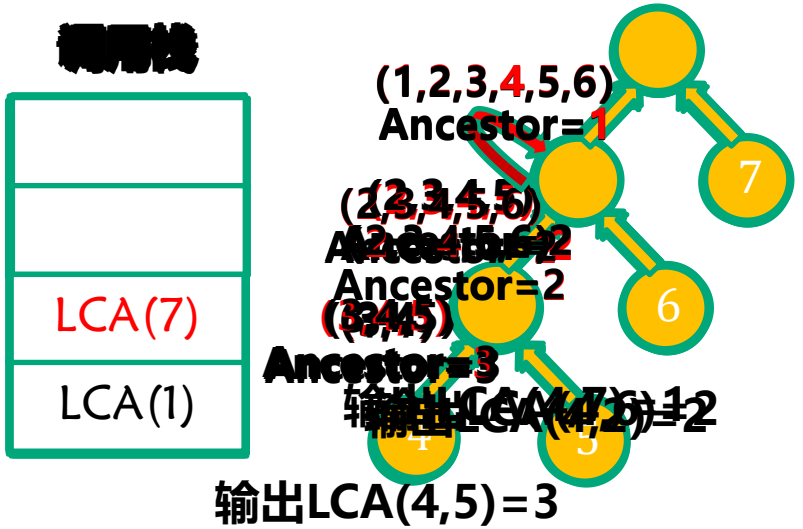
输入： 查询集$P=\{(u,v)\}$，以root为根的树中某个结点u，辅助集合set
输出： 查询结果LCA。
初始调用： LCA(*P, root, set, ancestor, visited*)

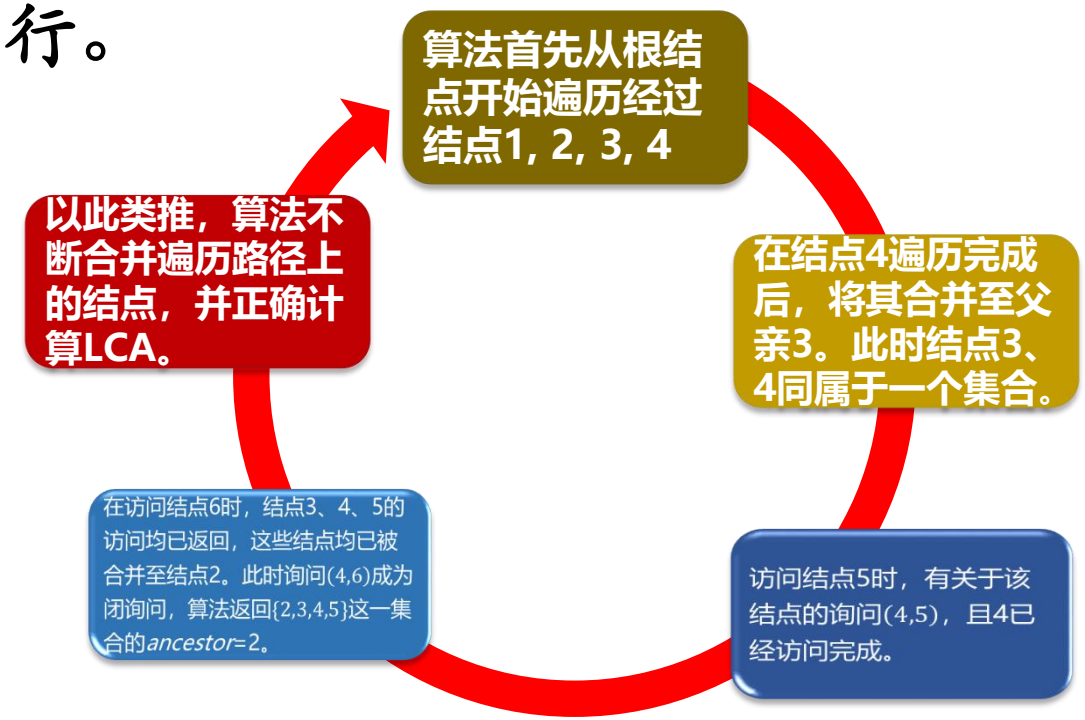
```
1.  if u= NIL then return end
2.  ancestor[Find(set, u)]← u //初始化
3.  for u的每个孩子v do
4.      | LCA(P, v, set, ancestor, visited) //深度优先遍历u的所有子树
5.      | Union(set, u, v) //将子树并到根结点u
6.      | ancestor[Find(set, u)]← u //记录这棵树的根是u
7.  end
8.  visited[u]←true
9.  for (u, v) ∈ P的每个结点v do
10.     | if visited[v] then
11.     | | print ancestor[Find(set, v)] //输出u和v的LCA
12.     | end
13.End
```

- 在算法的执行过程中，我们维护了两个数组visited和ancestor。
- 其中visited表示结点是否访问完成，用以判断询问是否可完成。
- ancestor表示结点集合（子树）的根。这是因为在采用了按秩合并策略后，Find找到的“根”并不一定是子树实际的根，因此需要额外记录实际的根。

算法运行过程

- 本例中有4个询问：分别为LCA(4,5)、LCA(4,6)、LCA(4,2)和LCA(4,7)。
- 右图中依次展示了结点4, 5, 3, 6, 2, 7的孩子访问完成，即将输出LCA时刻的场景，对应算法9-7第5行。





*取决于不相交集的实现，3、4均可能是该集合的代表元素。不失一般性设Find(3)=Find(4)=3，则此时ancestor[3]=3。

*算法输出(4, 5)的LCA为ancestor[Find(4)]=ancestor[3]=3

提纲

- 9.1　问题引入
- 9.2　等价关系、等价类和不相交集
- 9.3　不相交集的存储实现
- 9.4　不相交集的基本运算实现
- 9.5　不相交集的应用
- 9.6　拓展延伸
- 9.7　应用场景

9.6 拓展延伸：扩展不相交集☆

- 在解决实际问题时，有时除了处理集合的合并和查找，还希望对不相交集进行扩展，为集合中的元素维护一些额外的属性。
- 例：假设有n个未知量$x_1, \ldots, x_n$（例如n个不同位置的电势），希望知道其相对大小关系。假设无法直接测量某未知量的值，但可以测量其中任两个的相对大小关系（例如利用电压表测量两点间的电势差）。
- 那么，如给定一系列未知量间大小关系的观测结果，应如何根据这些观测结果来确定其他未知量的大小关系？
- 这可以抽象成一个数据结构，支持如下两种操作：

1. Measure(a_i, b_i, c_i)：测量得到$x_{a_i} = x_{b_i} + c_i$。
2. Query(a_i, b_i)：询问$x_{a_i} - x_{b_i}$。

扩展不相交集☆

这个问题可以通过不相交集来解决，思路如下：

1. Measure(a_i, b_i, c_i)：测量得到$x_{a_i} = x_{b_i} + c_i$。
2. Query(a_i, b_i)：询问$x_{a_i} - x_{b_i}$。

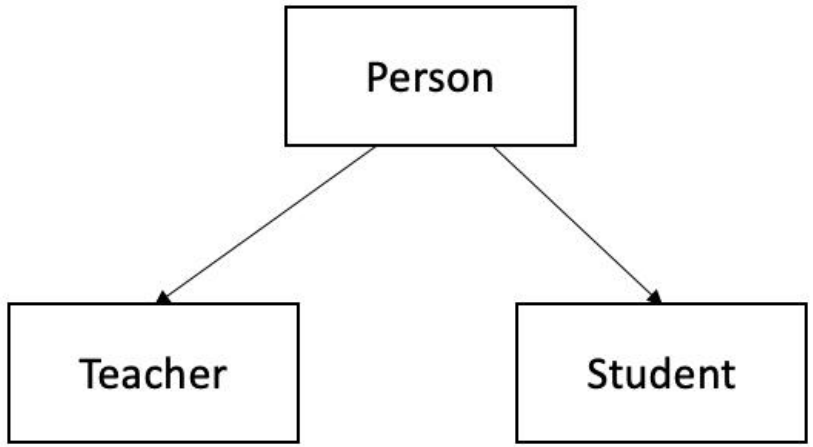
1. 一开始，所有n个元素都自成集合，它们彼此间均无法比较大小
2. 每得到一个测量结果(a_i,b_i,c_i)，就将x_{ai}和x_{bi},所在集合合并，同一个集合中的元素可以互相比较大小
3. 为每个元素x_i维护 diff[i]，表示森林中x_i比其父亲x_{ip}大的数量，即diff[i]=x_i-x_{ip}。
4. 在处理Measure(a_i,b_i,c_i)时，可以设置 diff[Find(a_i)]←c_i。
5. 在路径压缩时，由于结点父亲有所变化，需要动态维护diff。
6. 执行Find(a_i)和Find(b_i),将x_{ai}和x_{bi}连接至集合的根x_r，有diff[a_i]=x_{ai}-x_r,diff[b_i]=x_{bi}-x_r。
7. 处理Query(a_i,b_i)，有x_{ai}-x_{bi}=diff[a_i]-diff[b_i]

*通过本例，可以了解如何在不相交集的森林上维护一些额外的信息，来处理集合元素之间的数量关系。

提纲

- 9.1　问题引入
- 9.2　等价关系、等价类和不相交集
- 9.3　不相交集的存储实现
- 9.4　不相交集的基本运算实现
- 9.5　不相交集的应用
- 9.6　拓展延伸
- 9.7　应用场景

9.7 应用场景

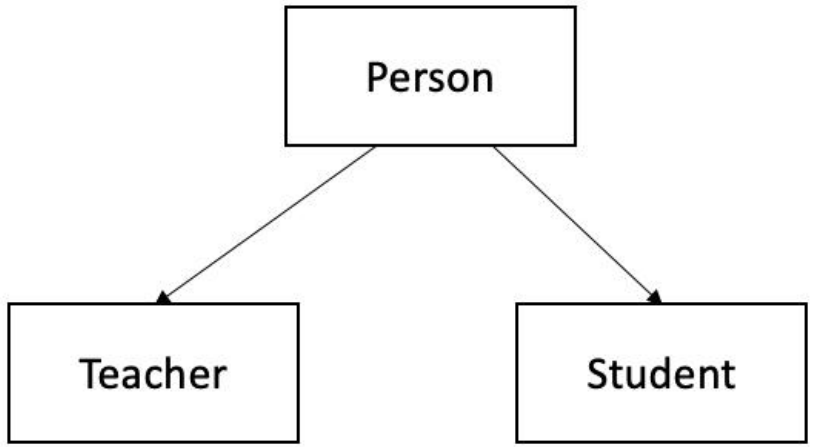


三个类间的继承关系

不相交集在许多计算机科学的真实问题上有应用。如离线最小值查询，求控制流图的支配树，类型推断，实现属性文法（Property Grammar）等。近年来，该数据结构在图像处理，数据库和量子计算等领域也有应用。

这里介绍不相交集在面向对象的编程语言中的应用。

应用场景:面向对象的编程语言



三个类间的继承关系

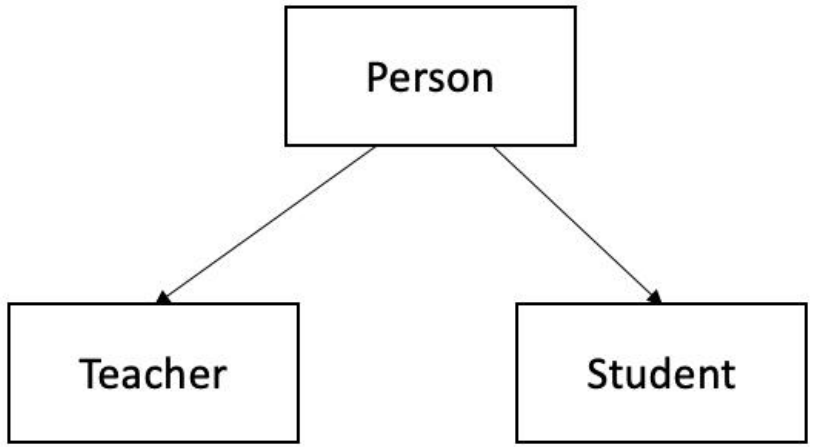
面向对象的编程语言中，变量的类型可以是用户定义的类（class），类之间可以有继承关系。例如说，下列C++代码定义了Person、Teacher、Student三个类，其继承关系如图。

```
class Person { ... };

class Teacher : public Person { ... };

class Student : public Person { ... };
```

应用场景:面向对象的编程语言



三个类间的继承关系

假如我们定义了如下二元运算Talk:

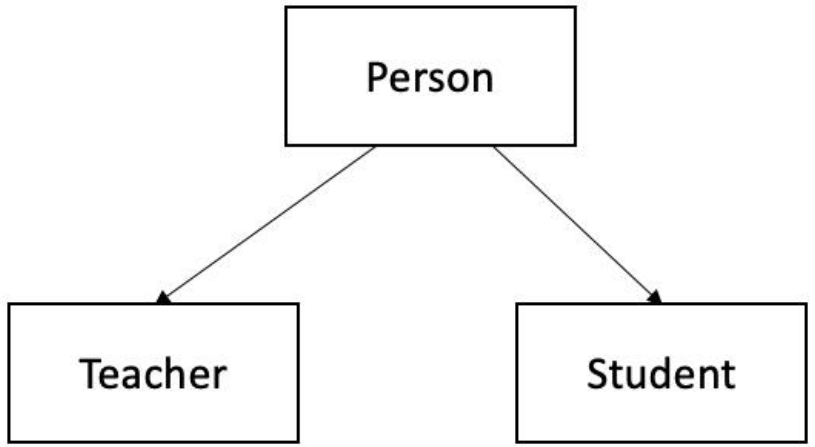
string talk(Person a, Person b);

string talk(Teacher a, Teacher b);

string talk(Student a, Student b);

不同类别之间的Talk函数可以有不同行为(重载)。例如，任意两个Person都可以谈论天气，而只有两个Student才会讨论功课。

应用场景:面向对象的编程语言



三个类间的继承关系

- 注意：这里我们没有定义两个参数分别是Teacher和Student的Talk函数。
- 假如有一个Teacher类型的变量alice和一个Student类型的变量bob，此时若调用talk(alice, bob)会发生什么呢?
- 实际上，编译器会寻找两个类的最近公共祖先，来调用两个Person之间的Talk函数。而最近公共祖先问题又可以用不相交集来解决。

小结

- 本章介绍了等价关系与等价类、商集、不相交集的定义。
- 介绍了不相交集基于森林的存储方法。
- 给出了基于森林的存储表示方式下的不想交集的基本操作实现：Find和Union。
- 本章介绍了两种优化合并方法：按秩合并和路径压缩。
- 介绍了不想交集的应用——最近公共祖先问题。
- 介绍了不想交集的拓展——扩展不相交集。

图高频必刷题(LeetCode)

分类	题号	题目	考察点（高频原因）	难度
等价关系	1971	Find whether there is a path in the graph	并查集的连通性查询	Easy
基础运算	1319	The number of operations for connected networks	并查集统计连通分量、路径压缩＋按秩合并基础应用	Medium
	684	Redundant Connection	并查集环检测（Kruskal 算法避环核心逻辑）	Medium
	547	Number of Provinces	等价类计数（省份＝连通分量）、并查集统计根节点数量	Medium
	128	Longest contiguous sequence	并查集维护连续数值的连通性、哈希表映射数值与索引	Medium
最小生成树(并查集)	1489	Find the critical edges and pseudo-critical edges in the minimum spanning tree	基于 Kruskal 算法验证边的必要性（关键边）与可选性（伪关键边）、并查集多次调用	Hard
	1584	Minimum cost to connect all points	Kruskal 算法（曼哈顿距离为边权）、并查集优化连通性判断	Medium
	1135	Connect all cities with the lowest cost	Kruskal 算法（边排序＋并查集避环）、最小生成树总权重计算	Medium
最近公共祖先(LCA)	1644	The closest common ancestor of a binary tree II	不相交集离线处理 LCA（后序遍历＋合并节点）、节点存在性判断	Medium
	1998	Operations on Trees	动态不相交集维护树的连通性（cut/connect 操作）、LCA 思想扩展	Hard
等价关系建模	947	Remove the maximum number of stones in the same row or column	等价关系建模（同行/同列＝连通）、并查集统计集合数	Medium
等价关系	1971	Find whether there is a path in the graph	并查集的连通性查询	Easy