4.4 R^n 的基、向量在基下的坐标

一、基与坐标

定义4.1

设R^n为向量空间，若存在$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R^n$ 且满足：

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关；

(2) R^n 中任一向量都可以由$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性表示；

则称$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 为R^n的一组**基底**，简称**基**，

n 为R^n的**维数**，并称 R^n 为 **n 维向量空间**。

例：对于R^n

(1) **基本单位向量组**

$\varepsilon_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$

是一组基，称为标准基。

(2) $\alpha_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0), \alpha_2 = (1, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \alpha_n = (1, 1, \ldots, 1)$ **也是基。**

定义： 如果在 R^n 中取定一个基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$，那么 R^n 中任意一个向量可**唯一**表示为

$$x = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$$

数组 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 称为向量 x 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的**坐标**．

记为 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

例： R^3 的一个基 $\varepsilon_1=(1,0,0),\ \varepsilon_2=(0,1,0),\ \varepsilon_3=(0,0,1)$

那么 $x=(2,3,7)=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+7\varepsilon_3$

x 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标

对于R^3 的另一个基：

$$\alpha_1=(1,0,0),\alpha_2=(1,1,0),\alpha_3=(1,1,1)$$

有 $(2,5,7)=(-3)(1,0,0)+(-2)(1,1,0)+7(1,1,1)$

$=-3\alpha_1-2\alpha_2+7\alpha_3$

结论：同一个向量在不同基中的坐标是不同的，选择一个好的基可以大大降低计算量！

二、基变换与坐标变换

1. 设n维向量空间 R^n 有两组不同的基，分别为：

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n;\qquad \beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,$$

则
$$\begin{cases} \beta_1 = a_{11}\alpha_1 + a_{21}\alpha_2 + \ldots + a_{n1}\alpha_n \\ \beta_2 = a_{12}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \ldots + a_{n2}\alpha_n \\ \ldots\quad \ldots\ldots\quad \ldots\ldots\ldots\quad \ldots\ldots\quad \ldots \\ \beta_n = a_{1n}\alpha_1 + a_{2n}\alpha_2 + \ldots + a_{nn}\alpha_n \end{cases} \qquad (4.1)$$

利用矩阵形式可表为：

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (4.2)$$

记

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

称为由基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$到基$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$的过渡矩阵，称(4.1)式或(4.2)式为基变换公式。

注：过渡矩阵A的第i列为基向量β_i在基$\alpha_1,\cdots,\ \alpha_n$下的坐标

2. 设$\alpha \in V$，在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标为$(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

在基$\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$下的坐标为$(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$$\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \ldots + x_n\alpha_n$$

$$= (\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \cdots, \quad \alpha_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad (4.3)$$

$$
\begin{aligned}
\alpha &= y_1\beta_1 + y_2\beta_2 + \dots + y_n\beta_n \\
&= (\beta_1, \quad \beta_2, \quad \cdots, \quad \beta_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\
&= (\alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \cdots, \quad \alpha_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \qquad (4.4)
\end{aligned}
$$

由于α在基$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$下的坐标唯一：

所以 $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

或 $$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

公式(4.5)或(4.6)称为**坐标变换公式**

例 求R^n中向量$\alpha = (x_1, x_2, \dots, x_n)$在基

$\alpha_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$, $\alpha_2 = (1, 1, 0, \dots, 0)$, … ，$\alpha_n = (1, 1, 1, \dots, 1)$下的坐标。

解： **设 α 在 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 下的坐标为 $y_1, y_2, \ldots, y_n$**

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$= (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1,\alpha_1,\cdots,\alpha_n)=(\varepsilon_1,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

过渡矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & \Huge 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

过渡矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & 1 & \cdots & 1 \\ & & \ddots & \vdots \\ & 0 & & 1 \end{pmatrix}$

有 $$A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix}$$

而 $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \mathbf{0} \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & -1 \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{pmatrix}$

则α在基$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$下的坐标为

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} - x_n \\ x_n \end{pmatrix}$$

（重点掌握）例：

在$\boldsymbol{R}^3$中，求由基$\alpha_1=(-3,1,-2),\alpha_2=(1,-1,1),\alpha_3=(2,3,-1)$

到基$\beta_1=(1,1,1),\beta_2=(1,2,3),\beta_3=(2,0,1)$的过渡矩阵

分析：在$\boldsymbol{R}^3$中，求基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵，需要把$\beta_i$表示为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$的线性组合，这样比较麻烦！

可以考虑借助标准基$\varepsilon_1=(1,0,0),\varepsilon_2=(0,1,0),\varepsilon_3=(0,0,1)$到这两组基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$和$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵。

解:

$$\text{由于}\begin{cases}\alpha_1 = -3\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 \\ \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \\ \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3\end{cases}$$

所以$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)A$, 其中过渡矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

类似可得$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B$，其中过渡矩阵为

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 0\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}$$

由于过渡矩阵可逆，所以

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)B=((\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)A^{-1})B$$

即

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(A^{-1}B)$$

即

$$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)(A^{-1}B)$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$到$\beta_1,\beta_2,\beta_3$的过渡矩阵为

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -6 & -19 & -1 \\ -13 & -42 & -1 \\ -2 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

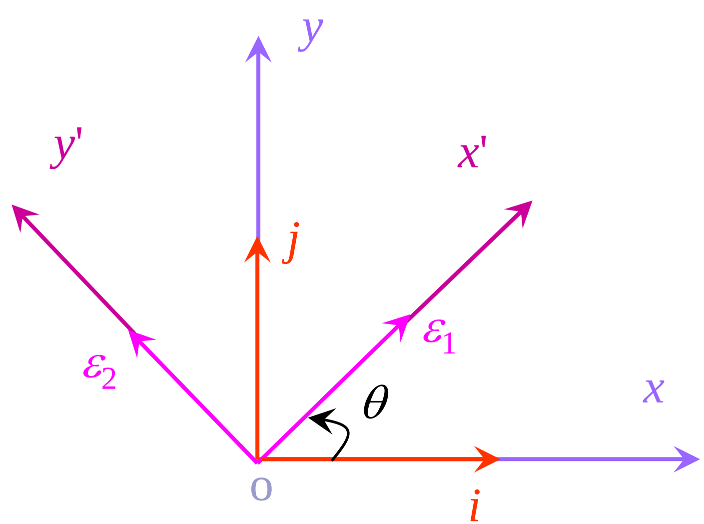
作业：习题四 P123

7

8

10

例 在平面直角坐标系xoy里，i和j为互相垂直的单位向量，它们构成R^2的一个基；现将x轴和y轴绕原点 O 逆时针旋转角θ，令相应的单位向量为ε_1、ε_2，则ε_1、ε_2也是R^2的一组基，换基公式：



$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j} \\ \varepsilon_2 = -\sin\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\, \boldsymbol{j} \end{cases}$$

$\forall \alpha \in R^2$，若α在基 i, j 下的坐标为（x，y），求α 在基 ε_1、ε_2下的坐标(x'，y')

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \cos\theta\, \boldsymbol{i} + \sin\theta\, \boldsymbol{j} \\ \varepsilon_2 = -\sin\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\, \boldsymbol{j} \end{cases}$$

解： $$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = (i, j)\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

过渡矩阵 $$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

求出 $$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

即

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta + y\sin\theta \\ y' = -x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

旋转坐标轴的坐标变换公式