《数字通信原理》作业讲解与分析(1)

第一章

1.5 已知二进制信号在 3min 内共传送了 72000 个码元，（1）问其码元速率和信息速率分别是多少？（2）如果码元脉冲宽度保持不变，但改为八进制数字信号，则其码元速率和信息速率又为多少？

解：

（1）二进制系统的码元速率为 $R_{B2}=\dfrac{72000}{3\times60}=400$ 波特

信息速率为 $R_{b2}=R_{B2}=400\ \text{bit/s}$

（2）若改为八进制，由于码元脉冲宽度没有变化，故

码元速率为 $R_{B8}=R_{B2}=400$ 波特

信息速率为 $R_{b8}=R_{B8}\cdot\log_2 N=400\cdot\log_2 8=$ 1200 bit/s

1.6 已知某八进制数字传输系统的信息速率为 3600 bit/s,接收端在 1h 内共收到 216 个错误码元，求系统的误码率。

解：先把信息速率转为码元速率，再由误码率定义求出误码率

$$R_B=3600\times\frac{1}{\log_2 8}=1200\text{波特}$$

$$P_e=\frac{\text{错误码元数}}{R_B\cdot T}=\frac{216}{1200\times60\times60}=5\times10^{-5}$$

有人是 216/72000，有人 216/1200，有人出现计算错误

2) $R_{s8} = R_{s2} = 400$ Baud.

$R_{b8} = R_{s8} \log_2 8 = 3600$ bps.

码元宽度不变 ∴ 码元速率仍为 400 Bd

信息速率 $R_b = R_B \log_2 N = 400 \log_2 8$

$= 1200$ bit/s

第二章

2.1 若确知信号为 $f(t)=e^{-at}u(t)$，试求其能量谱密度、能量和自相关函数。

解：信号的傅氏变换为

$$\Im[f(t)]=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$=\int_{0}^{\infty}e^{-at}e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a+j\omega}$$

其能量谱密度为

$$E(\omega)=|F(\omega)|^2=\frac{1}{a^2+\omega^2}$$

其能量为

$$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}E(\omega)d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+\omega^2}d\omega$$
$$=\frac{1}{a\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{\omega^2}{a^2}}d\left(\frac{\omega}{a}\right)=\frac{1}{a\pi}\arctan\frac{\omega}{a}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{2a}$$

信号的能量也可用下面的方法求解

$$E=\int_{-\infty}^{\infty}f^2(t)dt=\int_0^{\infty}\left(e^{-at}\right)^2dt$$
$$=\int_0^{\infty}e^{-2at}dt=-\frac{1}{2a}e^{-2at}\bigg|_0^{\infty}=\frac{1}{2a}$$

自相关函数 $R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(t+\tau)dt$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-at}u(t)\cdot e^{-a(t+\tau)}u(t+\tau)dt$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2at-a\tau}dt$$

当 $\tau>0$，$R(\tau)=-\frac{1}{2a}e^{-2at-a\tau}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{2a}e^{-a\tau}$

当 $\tau<0$，$R(\tau)=-\frac{1}{2a}e^{-2at-a\tau}\Big|_{-\tau}^{\infty}=\frac{1}{2a}e^{a\tau}$

所以，$R(\tau)=\frac{1}{2a}e^{-a|\tau|}$

双边指数 $e^{-a\|t\|}, a > 0$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$

错误情况分析：有人结论正确但没有过程，有人多了一个 u(t)

$$R(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{j\omega\tau}}{a^2+\omega^2} d\omega$$
$$= \frac{1}{2a} \cdot e^{-a|t+\tau|}$$

积分域没有考虑 τ 的取值

$$(e^{-a\cdot}) dt = \frac{\cdot}{2a}$$
$$R(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f(t+\tau) dt = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-a(t+\tau)} dt = \frac{e^{-a\tau}}{2a}$$

自相关函数. $R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\cdot f(t+\tau)\,dt.$

~~若 R(τ) 与 E(ω) 为一个傅里叶变换对,~~

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}\cdot u(t)\cdot e^{-a(t+\tau)}\cdot u(t+\tau)\,dt.$$

当 $\tau<0$ 时, 原式 $=\int_{\tau}^{+\infty} e^{-2at-a\tau}\,dt = e^{-a\tau}\cdot\frac{+1}{-2a}\cdot e^{-2at}\Big|_{-\tau}^{+\infty}$

$$=-\frac{1}{2a}e^{-a\tau}\cdot\left(0-e^{-2a\tau}\right)=\frac{e^{-3a\tau}}{2a}$$

当 $\tau\geqslant 0$ 时, 原式 $=\int_{0}^{+\infty} e^{-2at-a\tau}\,dt=-\frac{e^{-a\tau}}{2a}\cdot e^{-2at}\Big|_{0}^{+\infty}.$

$$=-\frac{1}{2a}e^{-a\tau}\cdot(0-1)=\frac{e^{-a\tau}}{2a}$$

$$\therefore R(\tau)=\begin{cases}\dfrac{e^{-3a\tau}}{2a}, & \tau<0.\\ \dfrac{e^{-a\tau}}{2a}, & \tau\geqslant 0.\end{cases}$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(t+\tau)dt=\frac{1}{2a}\left(e^{3a\tau}-e^{a\tau}\right)$$

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,f(t-\tau)\,dt.$$

$$=\int_{0}^{+\infty}\left(e^{-at}\right)^{2}\cdot e^{-a\tau}\,dt.$$

$$=\frac{1}{2a}e^{-a\tau}$$

2.4 证明实平稳随机过程 $X(t)$ 的自协方差函数满足如下的关系：

（1） $\Gamma_X(\tau)=\Gamma_X(-\tau)$； （2） $\Gamma_X(\tau)=R_X(\tau)-m_X^2$； （3） $\Gamma_X(\tau)\le\Gamma_X(0)$。

证明：

（1）按照定义

$$\begin{aligned}\Gamma_X(\tau)&=E\{[X(t+\tau)-m_X][X(t)-m_X]\}\\&=E\{[X(t)-m_X][X(t+\tau)-m_X]\}=\Gamma_X(-\tau)\end{aligned}$$

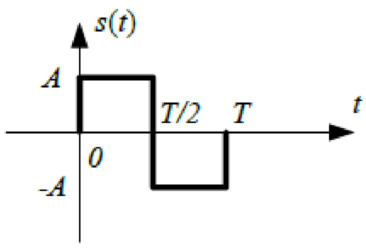
（2）利用随机过程平稳的特性，可得

$$\begin{aligned}\Gamma_X(\tau)&=E\{[X(t+\tau)-m_X][X(t)-m_X]\}\\&=E\left[X(t+\tau)X(t)-X(t+\tau)m_X-X(t)m_X+m_X^2\right]\\&=E[X(t+\tau)X(t)]-E[X(t+\tau)]m_X-E[X(t)]m_X+m_X^2\\&=R_X(\tau)-m_X^2\end{aligned}$$

（3）利用小题（2）的结果和自相关函数 $R_X(\tau)\le R_X(0)$ 的性质，立刻有

$$\Gamma_X(\tau)\le\Gamma_X(0)$$

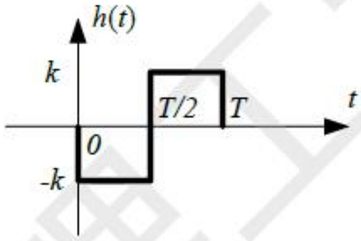
2.12 设信道加性高斯白噪声的功率密度谱为 $N_0/2$，设计一个题图 2.12 所示的信号 $s(t)$ 的匹配滤波器。（1）求匹配滤波器冲激响应的波形图；（2）确定匹配滤波器的最大信号输出幅度；（3）求匹配滤波器最大输出信噪比；（4）画出信号 $s(t)$ 输入匹配滤波器时输出信号 $s_o(t)$ 的波形图。



题图 2.12

解：

（1）通过对信号 $s(t)$ 关于纵轴折叠反转和平移等操作，容易得匹配滤波器的冲激响应 $h(t)=k's(T-t)$ 的波形图为



（2）匹配滤波器对信号 $s(t)$ 响应的最大输出幅度为

$$s_o(T)=\int_0^T s(\tau)h(t-\tau)d\tau=kA\int_0^T d\tau=kAT$$

（3）噪声的平均功率为

$$N=\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2\frac{N_0}{2}df=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}|H(f)|^2 df$$
$$=\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty}h^2(t)dt=\frac{N_0}{2}\int_0^T k^2 dt=\frac{N_0}{2}k^2T$$

最大的输出信噪比

$$SNR_{\max}=\frac{s_o^2(T)}{N}=\frac{k^2A^2T^2}{N_0k^2T/2}=\frac{2A^2T}{N_0}$$

（4）严格求匹配滤波器时输出信号 $s_o(t)$ 的波形图是一种较为复杂的卷积计算过程。但对于本题的规则特殊情况：$s(t)$ 和 $h(t)$ 均是分段的常数，$s_o(t)$ 波形将由若干直线组成，只要计算出在 $s(t)$ 和 $h(t)$ 分段位置 $t=0,T/2,T,3T/2,2T$ 时刻的 $s_o(t)$ 取值，即可获得 $s_o(t)$ 波形曲线。

$$s_o(0)=0$$

$$s_o(T/2)=\int_0^{T/2} s(\tau)h(T/2-\tau)d\tau=\int_0^{T/2} A\cdot(-k)d\tau=-\frac{kAT}{2}$$

$$s_o(T)=\int_0^{T} s(\tau)h(T-\tau)d\tau=\int_0^{T/2} A\cdot kd\tau+\int_{T/2}^{T}(-A)\cdot(-k)d\tau$$

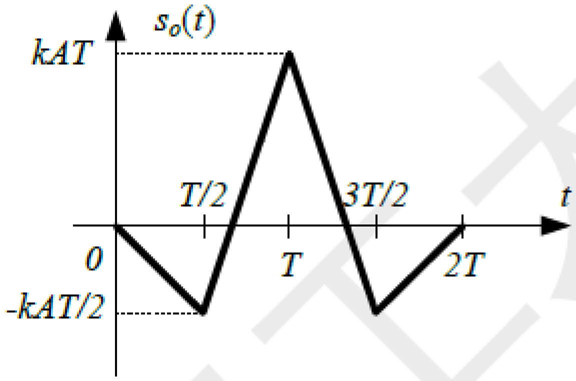
$$=\frac{kAT}{2}+\frac{kAT}{2}=kAT$$

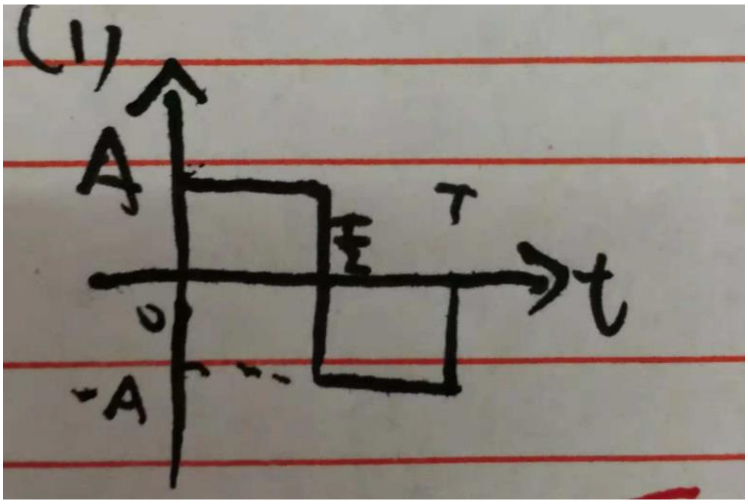
$$s_o(3T/2)=\int_0^{3T/2} s(\tau)h(T-\tau)d\tau$$

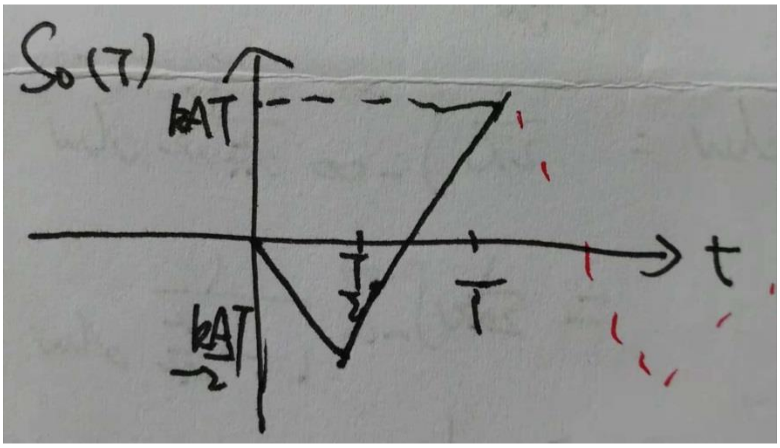
$$=\int_0^{T/2} 0\cdot 0d\tau+\int_{T/2}^{T}(-A)\cdot kd\tau+\int_{T}^{3T/2} 0\cdot 0d\tau=-\frac{kAT}{2}$$

$$s_o(2T)=0$$

将上述的点用直线连接，即可获得如下 $s_o(t)$ 的波形







第四问有人没做，画图没有坐标刻度，或者只画了一半

补充题：

答：列举不清，大约就是手机、电话等通信手段传递消息一类。
或是科幻片中更高一级的通信手段。
（看电影不记片名，也列举不出了。）

3补：电影《无双》，卧底警察与嫌犯交易时身上携带了跟踪器，通过跟踪器发电波给定位仪器，可以定位具体的位置。

《星际穿越》结局中，库珀在超立方体中向女儿传递的摩斯密码。首先是通过书架上的书向过去的自己发送"STAY"的信号，希望过去的自己不要抛下孩子前往外太空寻找新的居住地，女儿墨菲成功获取此信息但是依然阻止父亲的离开；其次是通过手表给成年后的女儿传送关于黑洞奇点的摩斯码，墨菲接收到该摩斯码后推翻了之前的传统想法，有了后续的土星空间站等等。

该片段中通过摩斯密码实现了跨越时空的交流。影片中的其他片段，如受曼恩博士的欺骗，在原本不适合生存的星球上即将向布兰德发出求救信号。信息的交流与传递在航天甚至是外天空探索过程中极其重要，任何一个环节出现差错都可能酿成大错。

电影：《星际穿越》男主最后在高维度空间里通过摩斯电码传递出黑洞里面奇点的数值。

1. 黑客(1995)：主角达德，成年之后，用一台电脑就黑进了电视台的节目时间安排表，而他使用的方法是——打电话给一个保安，让他说出调制解调器的号码。

2. 无间道1：交易开始时曾志伟从刘德华处得到了警方对讲机的通话信道，本以为这样一来就可以随时监听警方动向，可哪知没多久就被梁朝伟发现并用摩尔斯密码通知黄秋生更换信道。

3. 风声：李冰冰饰演的情报员靠着缝在衣服上的摩斯密码。

4. 战争游戏(1983)：主角大卫只用了一台计算机和调制解调器就成功入侵了"全球热核战争模拟系统"。

https://movie.douban.com/subject/1297647/ 黑客（1995）

2、 电影《无间道》中警方卧底陈永仁和上司黄志诚用手指敲击发出摩斯电码传递消息。。

电影《独立日》中外星人准备侵略地球时，就是用飞船发出无线电信号干扰地球的通信卫星信号，而主角打败外星人也是利用无线电信号向外星人的飞船发送电脑病毒。在信息大量传送的今天，无线电起着极大的作用。

《异形》中~~[illegible]~~"诺史莫"飞船返航地球时，接收到的信号与之后普利的破译。

电影《达芬奇密码》中有一个镜头男女主被法国警察追捕，他们躲到一辆货车中，警方往车厢中贴定位及窃听装置，相关人员在厕所隔间中用~~接收~~"电脑监控他们，其中GPS定位和传输位置信息及语音信息是~~[illegible]~~将信息编码后以电磁波传输的，是一个数字通信系统。

电影场景：

①.《永不消逝的电波》中，日本人在上海引进无线电定位车，查获电台。李侠拿到电台并给延安传递了需要上海联络站联系方式的情报。

②.《拦截密码战》中，汤姆·杰里科在布兰切利公园密码破译中心工作，帮助盟军破解代号为"谜"的密码.

https://movie.douban.com/subject/1303850/ 拦截密码战

解：《我不是特种兵—利刃出鞘》中，劫匪为获取科学机密，在天堂岛安装炸弹，劫持了人质，并且对科学家进行刑讯逼供，获得了技术信息，而特警专家分析则其会用短波无线传输，在劫匪传输信息时，通过短波频道进行劫获，阻拦了劫匪的反动计划.

https://movie.douban.com/subject/7065177/ 我是特种兵

https://movie.douban.com/subject/26979088/ 利刃出鞘