第二节　n维向量空间

第三节　向量组的线性相关性

1. n维向量空间概念

列向量　　　　　　行向量

$n\times 1$ 矩阵　　　　$1\times n$ 矩阵

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{n维向量}}$$

n维向量

n维实向量空间　　$R^n=\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\mid a_1,a_2,\cdots,a_n\text{为实数}\}$

n维复向量空间　　$C^n=\{(z_1,z_2,\cdots,z_n)\mid z_1,z_2,\cdots,z_n\text{为复数}\}$

例：平面是二维向量空间，立体空间中的向量是三维向量

向量$\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$和$\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$相等

$$\Updownarrow$$

对应分量都相等 $a_i=b_i\,(1\le i\le n)$

α,β的和 $\alpha+\beta=(a_1+b_2,a_2+b_2,\cdots,a_n+b_n)$

向量$(0,0,\cdots,0)$称为零向量

α的负向量$-\alpha=(-a_1,-a_2,\cdots,-a_n)$

向量α与数k的数乘：$k\alpha=(ka_1,\ ka_2,\cdots,\ ka_n)$

向量加法和向量与数的数乘运算规律：

(1) 加法交换律：$\alpha+\beta=\beta+\alpha;$

(2) 加法结合律：$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma);$

$(3)\ \alpha+0=\alpha;$

$(4)\ \alpha+(-\alpha)=0;$

$(5)\ 1\cdot\alpha=\alpha;$

$(6)\ k(l\alpha)=(kl)\alpha;$

$(7)\ k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

$(8)\ (k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

2. 向量的线性表示

设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta$都是$n$维向量，若存在数$k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$$

则称β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示

或称β是$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$的线性组合

其中数$k_1,k_2,\cdots,k_m$也称为组合系数。

注：β可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示不是唯一的

n维单位向量

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0), \varepsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

为n维单位向量

例如： R^n 中的任一个n维向量 $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ 都是单位向量组的一个线性组合。

$$\alpha = x_1\varepsilon_1 + x_2\varepsilon_2 + \ldots + x_n\varepsilon_n$$

例题3.1：

证明：$\alpha=$（-1,1,5）是向量$\alpha_1=$（1, 2, 3），$\alpha_2=$（0, 1, 4），$\alpha_3=$（2, 3, 6）的线性组合

证明：设$\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$，其中$k_1,k_2,k_3$为待定常数，即

$$(-1,1,5)=k_1(1,2,3)+k_2(0,1,4)+k_3(2,3,6)$$

由向量的加法以及向量相等可得方程组

$$\begin{cases} k_1+2k_3=-1 \\ 2k_1+k_2+3k_3=1 \\ 3k_1+4k_2+6k_3=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k_1=1 \\ k_2=2 \\ k_3=-1 \end{cases}$$

所以$\alpha=\alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3$

启示：线性表示的问题$\Leftrightarrow$求解线性方程组问题

定义：向量组之间的线性表示

若向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$中每个向量$\alpha_i(i=1,2,\cdots,t)$
都可经向量组$B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则称
向量组A可以经向量组B线性表出。

如果向量组A可以经向量组B线性表出，
向量组B也可以经向量组A线性表出，则称
这两个向量组等价。

易验证，向量组的等价满足：
(1)反身性 (2)对称性 (3)传递性

3. 向量的线性相关性与线性无关性

（1）. 设n维向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$

如果存在一组不全为0的数 $k_1,k_2,\cdots,k_m$，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$$

称向量组A 线性相关

(2). 若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$当且仅当

$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$时成立，则称

向量组A 线性无关。

注： 1. 给定一个向量组A :$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$，

要么它线性相关，要么线性无关。

2. 要判定一个向量组A :$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$，只要把

$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\ldots+k_m\alpha_m=0$看成以$k_1,k_2,\ldots k_m$

为未知数的齐次线性方程组，然后讨论：

（1）只有零解，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$线性无关

(2)有非零解，则$\alpha_1,\alpha_2,\ldots\alpha_m$线性相关

(3) 有非零解时，此解不止一个，

从而也有多组$k_1,k_2,\ldots k_m$。

(1). 两个非零向量α_1， α_2线性相关

$\Longleftrightarrow$ $\alpha_1 = k\alpha_2$, **(其中 $k \neq 0$)**

即 α_1, α_2对应的分量成比例

(2) 含有零向量的向量组线性相关

例：　考察 n 维向量组

$$\varepsilon_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \varepsilon_2 = (0, 1, \ldots, 0),\ \ldots,\ \varepsilon_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

的线性相关性。

解：设有一组数 $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$，使得

$$\lambda_1\varepsilon_1 + \lambda_2\varepsilon_2 + \ldots + \lambda_n\varepsilon_n = 0$$

即：$(\lambda_1, 0, \ldots, 0) + (0, \lambda_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, \lambda_n)$

$$= (\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n) = 0$$

$$\therefore\ \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$$

故　$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots,\ \varepsilon_n$ 线性无关。

例： 讨论向量组 $\alpha_1 = (1, -1, 1)$, $\alpha_2 = (2, 0, -2)$, $\alpha_3 = (2, -1, 0)$ 的线性相关性。

解：设有一组数 λ_1, λ_2, λ_3, 使 $\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \lambda_3\alpha_3 = 0$

即 $(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3, \ -\lambda_1 - \lambda_3, \ \lambda_1 - 2\lambda_2) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 \qquad\quad - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_2 \qquad\quad = 0 \end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases} \lambda_3 = -\lambda_1 \\ \lambda_2 = \dfrac{1}{2}\lambda_1 \end{cases}$$

取 $\lambda_1 = 2$, 得非零解 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$

此时，$2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0$

所以，向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关。

基本定理

定理1： *向量组线性相关* $\Leftrightarrow$

至少有一个向量可由其他向量线性表示

证明：向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关，则

存在不全为零的数$k_1,k_2,\cdots,k_m$使 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots k_m\alpha_m=0$

不妨设$k_1\neq 0$，则有 $\alpha_1=\left(-\frac{k_2}{k_1}\right)\alpha_2+\left(-\frac{k_3}{k_1}\right)\alpha_3+\cdots+\left(-\frac{k_m}{k_1}\right)\alpha_{\mathbf{m}}$

所以*向量α_1可用其他向量线性表示*

反之，若 $\alpha_1=c_2\alpha_2+\cdots+c_m\alpha_m$

$$(-1)\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots c_m\alpha_m=0$$

所以$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$*线性相关*

定理2 *存在部分向量线性相关 $\Rightarrow$ 向量组线性相关*

（逆否命题）*向量组线性无关 $\Rightarrow$ 任意部分向量线性无关*

证明：向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$中有一个部分向量

$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\ (k<m)$线性相关，则

存在不全为零的$c_1,c_2,\cdots,c_k$，使$c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k=0$

从而 $c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_k\alpha_k+0\alpha_{k+1}+\cdots+0\alpha_m=0$

$c_1,c_2,\cdots,c_k,0,\cdots,0$不全为零

于是向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

定理3 如果n维向量组线性无关，那么在每一个向量上添加一个分量得到的n+1维向量组也线性无关。

(即：加长线性无关向量组还是线性无关)

例： 已知：向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关

$$\beta_1=\alpha_1+\alpha_2,\beta_2=\alpha_2+\alpha_3,\beta_3=\alpha_3+\alpha_1$$

试证：β_1,β_2,β_3线性无关.

证明：用定义，设 $k_1\beta_1+k_2\beta_2+k_3\beta_3=0$

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+k_3(\alpha_3+\alpha_1)=0$$

$$(k_1+k_3)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_3+k_2)\alpha_3=0$$

$\because$ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关,

$$\therefore \begin{cases} k_1+k_3=0 \\ k_1+k_2=0 \\ k_2+k_3=0 \end{cases} \quad 而 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0,$$

故只有零解：$k_1=k_2=k_3=0$ 所以：β_1,β_2,β_3线性无关.

小结

复习线性相关和线性无关的概念，能够用定义来判别向量组的线性相关或线性无关。

作业：

习题四　**P122**

3

4

5

向量线性表示与线性方程组的关系

给定具有m个未知数的n个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$\Updownarrow$

向量方程形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_m\alpha_m = \beta$$

方程组有解

$\Updownarrow$

β可由$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性表示

定理：向量β可由向量$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性表示

$$\Updownarrow$$

方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=\beta$有解

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$$

向量线性表示与线性方程组的关系

定理：向量 β 可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 唯一线性表示

$\Updownarrow$

方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=\beta$ 有唯一解

$\Updownarrow$

$$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)=m$$

例：若有向量$\alpha_1=(1,3,1)^T$，$\alpha_2=(-1,1,3)^T$，

$\alpha_3=(-5,-4,3)^T$，$\beta=(2,-1,3)^T$.

问：β可否由α_1，α_2，α_3线性表示？

解：用行初等变换把$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)$化成阶梯形矩阵

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -5 & 2\\ 3 & 1 & -4 & -1\\ 1 & 3 & 3 & 3\end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -5 & 2\\ 0 & 4 & 11 & -7\\ 0 & 0 & -3 & 8\end{pmatrix}$$

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)\to\begin{pmatrix}1&-1&-5&2\\0&4&11&-7\\0&0&-3&8\end{pmatrix}$$

可知 $rank(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=rank(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\beta)=3$

所以 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性表示，且线性表示唯一

由上述初等变换知，$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\beta$

与下列方程同解

$$\begin{cases}x_1-x_2-5x_3=2\\4x_2+11x_3=-7\\-3x_3=8\end{cases},\text{即}\begin{cases}x_1=-69/12\\x_2=87/12\\x_3=-8/3\end{cases}$$

故 $\beta=-\dfrac{69}{12}\alpha_1+\dfrac{87}{12}\alpha_2-\dfrac{8}{3}\alpha_3$

向量组线性无关与方程组的关系

给定具有m个未知数的n个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}$$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = 0 \\ \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = 0 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

向量方程形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_m\alpha_m = 0$$

方程组只有零解

$\Updownarrow$

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$线性无关

向量组线性无关与齐次方程组的关系

定理：　向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

$$\Updownarrow$$

方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=\mathbf{0}$只有零解

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)=m$$

即一组线性无关的向量排列成的矩阵的秩恰好就是向量的个数

向量组线性相关与齐次方程组的关系

定理： 向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性相关

$$\Updownarrow$$

方程组$\boldsymbol{x_1}\alpha_1+\boldsymbol{x_2}\alpha_2+\cdots\boldsymbol{x_m}\alpha_m=\mathbf{0}$有非零解

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)<m$$