第二章　矩阵

2.1 矩阵的定义及其运算

1、矩阵的定义

定义 由 $m \times n$ 个数 a_{ij} $(i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n)$ 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为m行n列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，记作

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

注：（1）这 $m\times n$ 个数叫做矩阵的元素，a_{ij} 位于矩阵 A 的第 i 行第 j 列，称为**矩阵A的(i,j)元素.**

（2）元素都是实数的矩阵称为**实矩阵**，元素有复数的矩阵称为**复矩阵**.

（3）常用大写黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵.

一个 $m\times n$ 矩阵,可简记为 $A = A_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n}$ 或 (a_{ij}).

(4) 矩阵和行列式

矩阵是个表格，而行列式是运算关系得到的数，

例如
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 & 3 \\ -9 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -9 & 8 \\ 5 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

３×４矩阵

5×2矩阵

矩阵在数学科学，自然科学，工程技术和生产实践中都有很重要的作用.

但是现在我们把他们共同的性质提炼出来，纯粹作为抽象的数学概念来研究

矩阵自始至终的贯穿于线性代数这门课程中，联系着行列式, 线性方程组, 二次型, 向量空间和线性变换等.

2、几种常用的特殊矩阵

(1) 行矩阵和列矩阵

只有一行的矩阵 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为**行矩阵**或**行向量**.

只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ 称为**列矩阵**或**列向量**.

(2) 同型矩阵

如果两个矩阵的行数相同与列数相同，则称它们是**同型矩阵**.

(3) 两个相等矩阵

如果 $A=(a_{ij})_{m\times n}$ 与 $B=(b_{ij})_{m\times n}$ 是同型矩阵，并且对应元素相等, 即

$$a_{ij}=b_{ij}, \quad i=1,2,\cdots,m, \quad j=1,2,\cdots,n,$$

则称**矩阵 A 和矩阵 B 相等, 记为 $A=B$.**

例如 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$.

当 $a=3, b=-1, c=4, d=2, e=-5, f=6$ 时, 它们相等.

(4) 零矩阵

元素都是零的矩阵称为**零矩阵**。

$m\times n$ 零矩阵记为 $O_{m\times n}$

(5) n阶方阵

行数和列数都等于n的矩阵称为n阶矩阵或n阶方阵.

规定1阶方阵（a）=a.

方阵的迹

$$\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

(6) 对角矩阵

主对角线之外的元素全为零 的方阵称为**对角矩阵**。

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}$$

对角矩阵常记为

$$A=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn}).$$

(7) 单位矩阵

主对角线上的元素全为 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**,

简记为 E_n，即

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_n.$$

(8) 数量矩阵

主对角线上的元素全相等的对角矩阵称为**数量矩阵**, 即

$$\begin{pmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & \ddots & \\ & & & c \end{pmatrix}_n \quad （c \text{ 为常数}）.$$

(9) 三角形矩阵

主对角线下 (上) 方的元素全为零的方阵称为**上（下）三角形矩阵.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

注意： 类型5, 6, 7, 8, 9仅仅是针对方阵的

3、矩阵的运算

（1）矩阵的加法

定义 设有两个$m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$和$B=(b_{ij})$，那么矩阵 A 与矩阵B 的加法记作$A+B$，规定为

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

注：只有当两个矩阵是同型矩阵时，才能进行加法运算.

运算规律（设 A, B, C, O 都是 $m\times n$ 矩阵）

① $A+B=B+A.$ 交换律

② $(A+B)+C=A+(B+C).$ 结合律

③ $A+O=A.$

④ $A+(-A)=0.$

其中 $-A=\left(-a_{ij}\right)$，$-A$ 称为矩阵 A 的负矩阵.

规定矩阵的减法为 $A-B=A+\left(-B\right).$

（2）矩阵的数乘

定义 以数λ乘以矩阵$A=(a_{ij})$，记作λA，规定为

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$$

注意和行列式线性的区别

运算规律（设 A,B 都是 $m\times n$ 矩阵，λ,μ 是数）

① $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$

② $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A.$

分配律

③ $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A).$

结合律

④ $1A=A.$

⑤ $\lambda A=0\Leftrightarrow\lambda=0$ 或者 $A=0.$

注：矩阵的加法运算与数乘运算统称为矩阵的线性运算。

（3）矩阵的乘法 这次课最核心的内容，略有难度

定义 设 $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times s}$, $B=\left(b_{ij}\right)_{s\times n}$

规定:矩阵A与矩阵B的乘积是一个$m\times n$矩阵

$$C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$$

其中
$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}$$
$$=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$$

并记作 $C=AB$.

矩阵C的第i行第j列的元素c_{ij}就是矩阵A的第i行与矩阵B的第j列对应元素乘积之和。

注意：两个矩阵可以乘在一起的前提条件是前一个矩阵的列数要等于后一个矩阵的行数

前一个矩阵的行数和后一个矩阵的列数可以是任意的，他们决定了乘积矩阵的行数和列数

例 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

故

$$C = AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 & 6 & 7 \\ 10 & 2 & -6 \\ -2 & 17 & 10 \end{pmatrix}_{3\times 3}.$$

矩阵的乘法和通常的数量的乘法有着显著的不同，具体来看

例 设 $A=(1,0,4),\ B=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}.$

$$AB=(1,0,4)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=1\times1+0\times1+4\times0=1,$$

$$BA=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}(1,0,4)=\begin{pmatrix}1\times1&1\times0&1\times4\\1\times1&1\times0&1\times4\\0\times1&0\times0&0\times4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&4\\1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

$$AB\neq BA.$$

例： $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 求**AB**和**BA**

解：

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$BA=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

注1： 矩阵的乘法不满足交换律。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

求 AB，并问 BA 是否有意义？

解 $AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}5 & 8 & 9\\ 11 & 2 & 5\end{pmatrix}$ 显然 BA 无意义

注2： AB有意义，未必BA有意义。

注3：并非所有的矩阵的乘法都不能交换.

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix},$$ 则

$$AB=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\0&1\end{pmatrix}.$$

一般地，如果矩阵A与B的乘积与次序无关，即AB=BA,则我们称矩阵A,B可交换。

A与B可交换有何必要条件？

1. 若A为**m×n**矩阵，要使左右相乘有意义，B须为**n×m**矩阵
2. $\mathbf{A}_{m\times n}\mathbf{B}_{n\times m}=\mathbf{C}_{m\times m}$, $\mathbf{B}_{n\times m}\mathbf{A}_{m\times n}=\mathbf{C'}_{n\times n}$
3. $\mathbf{C}_{m\times m}=\mathbf{C'}_{n\times n}$ 可知m=n,即A,B为同阶方阵

注4： 两个非零矩阵相乘,可能是零矩阵.

故不能从 $AB=O$ 必然推出 $A=O$ 或 $B=O$.

有没有例子？

注5： 矩阵乘法一般也不满足消去律.

即不能从 $AC=BC(C\neq O)$ 必然推出 $A=B$.

例 $A=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$,

则 $$AC=\begin{pmatrix}1&2\\0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},$$

$$BC=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}.$$

矩阵的乘法的运算规律

结合律和分配律：

① $A(BC)=(AB)C.$ 结合律

② $\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$ (λ为数).

③ $A(B+C)=AB+AC,$

$(B+C)A=BA+CA.$ 分配律

④ $OA=O;\quad AO=O;$

$E_m A_{m\times n}=A_{m\times n},\quad A_{m\times n}E_n=A_{m\times n}.$

(4) 方阵的幂

定义 设 A 是 n 阶方阵，定义方阵的幂为

$$A^1 = A,\ A^2 = A^1A^1,\ \cdots,\ A^{k+1} = A^kA^1$$

其中 k 为正整数, $A^0 = E$ 。

显然, A^k 就是 k 个 A 连乘.

只有 A 是方阵时，它的幂才有意义.

方阵的幂满足：

① $A^kA^l = A^{k+l}$,

② $(A^k)^l = A^{kl}$ (k,l 为正整数)

例 $A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$， **求$A^4$.**

解 $A^2=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}4&0&0&0\\0&4&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&4\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

$$A^2=4E,\ A^4=A^2A^2=16E.$$

如果 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$为对角矩阵,

则， $\Lambda^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \cdots, \lambda_n^k)$.

方阵多项式

设 $\varphi(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ 为 x 的 m 次多项式, A 为 n 阶方阵，记

$$\varphi(A) = a_0 E + a_1 A + \cdots + a_m A^m,$$

$\varphi(A)$ 称为**矩阵 A 的 m 次多项式.** 其值仍然是n阶方阵

对于多项式 $f(\mathbf{x}), g(\mathbf{x})$，有

$$f(A)g(A) = g(A)f(A)$$

（5）矩阵的转置

定义 把矩阵 A 的行换成同序数的列得到一个新矩阵，叫做 A 的**转置矩阵**，记作 A^{T} 或 A' .

例如矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & 8\\ 5 & 2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1 & 5\\ -3 & 2\\ 2 & -1\\ 8 & 0\end{pmatrix}$.

转置矩阵的运算规律：

① $(A^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}=A$;

② $(B+C)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}+C^{\mathrm{T}}$;

③ $(kA)^{\mathrm{T}}=kA^{\mathrm{T}}$;

④ $(AB)^{\mathrm{T}}=B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$;

推论： $(A_1A_2\cdots A_k)^{\mathrm{T}} = A_k^{\mathrm{T}}\cdots A_2^{\mathrm{T}}A_1^{\mathrm{T}}$；

特别的，若 A 为 n 阶方阵，则 $(A^m)^{\mathrm{T}} = (A^{\mathrm{T}})^m$，$m$ 为正整数。

例 已知

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix},$$

求 $(AB)^{\mathrm{T}}$， $B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$

解 $$AB=\begin{pmatrix}2&0&-1\\1&3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&7&-1\\4&2&3\\2&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&14&-3\\17&13&10\end{pmatrix},$$

所以 $$(AB)^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

$$B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&4&2\\7&2&0\\-1&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1\\0&3\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&17\\14&13\\-3&10\end{pmatrix}.$$

对称矩阵与反对称矩阵　在方阵 $A=(a_{ij})_n$ 中, 如果 $a_{ij}=a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$,则称 A 为**对称矩阵.**

如果 $a_{ij}=-a_{ji}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$, 则称 A 为**反对称矩阵.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

注：　A 为对称矩阵的充要条件是 $A^{\mathrm{T}}=A$;

A 为反对称矩阵的充要条件是 $A^{\mathrm{T}}=-A$.

单位矩阵、对角矩阵等 均为对称矩阵.

(6) 方阵的行列式

定义 由 n 阶方阵 A 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变), 叫做**方阵 A 的行列式**, 记作 $|A|$ 或 $\det A$.

设 A, B 为 n 阶方阵, λ 为数, 则有

① $|A^{\mathrm{T}}| = |A|$;

② $|\lambda A| = \lambda^n |A|$;

注意比较方阵及其行列式两者概念的不同

（7）矩阵的共轭

定义 $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})_{mn}$ 为矩阵 A 的**共轭矩阵**，其中 $\overline{a}_{ij}$ 表示 a_{ij} 的共轭复数.

共轭矩阵的性质：

① $(\overline{A})^T = \overline{A^T}$

② $\overline{A+B} = \overline{A} + \overline{B}$

③ $\overline{kA} = k\overline{A}$

④ $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$

⑤ $\left|\overline{A}\right| = \overline{\left|A\right|}$

作业：P62，习题2

1(3) (5)，其中(5)用归纳法以及三角函数公式

3(1)

4

6

8

第6题提示：

(1)先考虑 A 与 $diag(1,2,3,\dots,n)$ 交换，可得 A 必为对角矩阵

(2)再考虑 A 与 $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ 交换，可得 A 的对角元素相同