1.5行列式按一行展开及克拉默法则

一般说来，低阶行列式的计算比高阶行列式的计算要简便，于是，我们自然地考虑把高阶行列式表示成低阶行列式的问题．下面介绍行列式的另一重要性质，即行列式按行(列)展开的法则就解决了这一问题．为此，先引入余子式和代数余子式的概念．

一、余子式与代数余子式

例如

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_{11} & a_{12} & a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

记：

$$M_{11}=\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为元素a_{11}的余子式，为三阶行列式划去第一行第一列元素后剩下的二阶行列式。

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为元素a_{12}的余子式，为三阶行列式划去第一行第二列元素后剩下的二阶行列式。

$$M_{13}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

称为元素的a_{13}的余子式，为三阶行列式划去第一行第三列元素后剩下的二阶行列式。

因此

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$$

记：

$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$ 称为元素a_{11}的代数余子式。

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$ 称为元素a_{12}的代数余子式。

$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = M_{13}$ 称为元素的a_{13}的代数余子式。

因此，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j}$$

从上式可以看出，三阶行列式等于第一行的所有元素分别乘上它们相应的代数余子式的和。

问题：除了第一行元素外，其它行的元素有无余子式的和代数余子式呢？

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{21}\left(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}\right) + a_{22}\left(a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}\right) + a_{23}\left(a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}\right)$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

记：

$$M_{21}=\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为元素a_{21}的余子式，为三阶行列式划去第二行第一列元素后剩下的二阶行列式。

$$M_{22}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

称为元素a_{22}的余子式，为三阶行列式划去第二行第二列元素后剩下的二阶行列式。

$$M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

称为元素的a_{23}的余子式，为三阶行列式划去第二行第三列元素后剩下的二阶行列式。

因此，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$$

记：

$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -M_{21}$ 称为元素a_{21}的代数余子式。

$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = M_{22}$ 称为元素a_{22}的代数余子式。

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$ 称为元素的a_{23}的代数余子式。

因此，$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$

$$= a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}A_{2j}$$

从上式可以看出，三阶行列式等于第二行的所有元素分别乘上它们相应的代数余子式的和。

同理，可以看出第三行的元素也存在余子式和代数余子式，即三阶行列式的所有元素均存在余子式和代数余子式。三阶行列式中去掉第 i 行第 j 列剩下元素按原来次序组成的2阶行列式记为 M_{ij} 称为元素 a_{ij} 的余子式.

而 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为 a_{ij} 的代数余子式。

同时，我们得到

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13} = \sum_{j=1}^{3} a_{1j}A_{1j} \quad \text{按第一行展开}$$

$$= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23} = \sum_{j=1}^{3} a_{2j}A_{2j} \quad \text{按第二行展开}$$

$$= a_{31}M_{31} - a_{32}M_{23} + a_{33}M_{33} = \sum_{j=1}^{3} a_{3j}A_{3j} \quad \text{按第三行展开}$$

问题：从上面的讨论可知，三阶行列式可以从某一行展开。那么，它可不可以从某一列展开呢？

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

$$= a_{11}\left(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}\right) + a_{21}\left(a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}\right) + a_{31}\left(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}\right)$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

因此 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$= a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + a_{31}M_{31}$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = \sum_{i=1}^{3} a_{i1}A_{i1}$$ 按第一列展开

$$= -a_{12}M_{12} + a_{22}M_{22} - a_{32}M_{32}$$

$$= a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = \sum_{i=1}^{3} a_{i2}A_{i2}$$ 按第二列展开

$$= a_{13}M_{13} - a_{23}M_{23} + a_{33}M_{33}$$

$$= a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = \sum_{i=1}^{3} a_{i3}A_{i3}$$ 按第三列展开

因此，三阶行列式不仅各元素均存在余子式和代数余子式，而且它均等于某行或某列的所有元素乘上其对应的代数余子式的和：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{3} a_{ij} A_{ij}$$ 按第i行展开(i=1,2,3)

$$= \sum_{i=1}^{3} a_{ij} A_{ij}$$ 按第j列展开(j=1,2,3)

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 7 & 7 & 2 \end{vmatrix}$

解 按第二行展开，得

$$D=0\times(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+(-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}+0\times(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)\times(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 7 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=\mathbf{27}.$$

问题：对任意n阶行列式是否存在相应的概念呢？

在n阶行列式中，把元素a_{ij}所在的第i行和第j列划去后，留下来的$n-1$阶行列式叫做元素a_{ij}的余子式，记作M_{ij}

记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ 称为a_{ij}的代数余子式。

例如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad M_{23}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}.$$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}, \qquad M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}.$$

$$M_{44}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{44}=(-1)^{4+4}M_{44}=M_{44}.$$

注意： (1) 行列式的每个元素分别对应着一个余子式和一个代数余子式.

(2) 行列式D的元素a_{ij}的余子式M_{ij}或代数余子式A_{ij}与D的第i行元素和第j列元素没有关系，特别与元素 a_{ij} 本身亦无关.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

定理1.2.1(展开定理) 行列式D等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

按照第i行展开：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

按照第j列展开：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n);$$

例. 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}.$

综合运用行列式的性质和展开定理可以简化计算和书写。首先用行列式的性质把某行或某列化为只含一个非0元素后再用展开式定理，我们处理第三行得：

解：

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix} \overset{c_1-2c_3}{\underset{c_4+c_3}{=}} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

该行为零元素最多的行

$$=1\times(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ \boxed{-5 \quad -5 \quad 0} \end{vmatrix}$$

注：可以再次运用展开式以达到降阶的目的。

$$\overset{c_1-c_2}{=}\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -12 & 1 & -1 \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-5)\times(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -12 & -1 \end{vmatrix}=5\times 8 \ \mathbf{=40.}$$

例：课本例题**5.2.** 范德蒙德行列式

展开定理： 行列式D等于它的任意一行（列）的各元素与其对应的代数余子式的乘积之和.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

按照第i行展开：

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \qquad (i = 1, 2, \cdots, n);$$

按照第j列展开：

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \qquad (j = 1, 2, \cdots, n);$$

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad i\neq j.$$

证 把行列式$D=|a_{ij}|$按第j行展开，有

$$a_{j1}A_{j1}+\cdots+a_{jn}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

把a_{jk}换成a_{ik} $(k=1,\ldots,n)$，即第 j 行换成第 i 行，可得

$$a_{i1}A_{j1}+\cdots+a_{in}A_{jn}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

第 i 行

第 j 行

相同

当$i\neq j$时，

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0,\quad (i\neq j).$$

同理 $$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0,\quad (i\neq j).$$

关于代数余子式的重要性质

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$ 按照行展开

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = D\delta_{ij} = \begin{cases} D, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j; \end{cases}$$ 按照列展开

其中 $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, 当\ i = j, \\ 0, 当\ i \neq j. \end{cases}$

克拉默法则的引入

对于二元线性方程组 $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$

它的解可以用行列式表示为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意　分母都为原方程组的系数行列式.

利用三阶行列式求解三元线性方程组

如果三元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}}x_1+\boxed{a_{12}}x_2+\boxed{a_{13}}x_3=\boxed{b_1}, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3; \end{cases}$

的系数行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

则三元线性方程组的解为：

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D}, \qquad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

三、克拉默(Cramer)法则

设含有n个未知量n个方程的线性方程组一般形式为:

方程数等于
未知数个数

$$
\begin{cases}
\cdots x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
\cdots x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n
\end{cases}
\qquad (\mathrm{I})
$$

其中 a_{ij} $(i,j=1,2,\ldots,n)$ 称为方程组的系数;

b_j $(j=1,2,\ldots,n)$ 称为常数项.

特别地， $b_j=0(j=1,2,\ldots,n)$ 称为**n元齐次线性方程组**．如 (II) 所示。

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \qquad \text{(II)}$$

由系数$a_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$构成的行列式：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

叫做方程组的**系数行列式**．

第j列

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} \cdots a_{1\,j-1} & b_1 & a_{1\,j+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2\,j-1} & b_2 & a_{2\,j+1} \cdots a_{2n} \\ \vdots \ \ddots \ \vdots & \vdots & \vdots \ \ddots \ \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} \cdots a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (j=1,2,\ldots,n)$$

克莱姆（Cramer）法则

要先判数系数行列式是否不为0!

定理5.3 如果线性方程组(I)式的系数行列式$D\neq 0$，那么它**有唯一解**,其解为:

主要在于解行列式

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D}.$$

引理 若齐次线性方程组(II)的系数行列式$D\neq 0$则它**只有唯一零解**. 或者等价的说,

若齐次线性方程组(II)**有非零解**，则它的系数行列式$D=0$.

（参见课本习题20）

例 用克拉默法则解方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9, \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0. \end{cases}$$

解

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - r_2]{r_1 - 2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 27,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81, \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27, \qquad D_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27,$$

$$\therefore x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{81}{27} = 3, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{-108}{27} = -4,$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{-27}{27} = -1, \qquad x_4 = \frac{D_4}{D} = \frac{27}{27} = 1.$$

例 如果齐次线性方程组有非零解，k应取何值？

$$\begin{cases} kx_1 \qquad\qquad\qquad + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 \qquad\quad - x_4 = 0 \\ (k+2)x_1 - x_2 + 4x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + kx_4 = 0 \end{cases}$$

解: 如果齐次线性方程组(Ⅱ)有非零解，则它的系数行列式等于零。

$$D = \begin{vmatrix} k & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ k+2 & -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & k \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ k+2 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$D=-3\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ k+2 & -1 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_3-r_1}{=} -3\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2+2r_3}{=} -3\begin{vmatrix} k & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} k & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -3\times 5\times\begin{vmatrix} k & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -15(k-1)$$

如果方程组有非零解，则$D=0$，即$k=1$.

三、小结

1. 用克拉默法则解方程组的两个条件

(1)方程个数等于未知量个数;

(2)系数行列式不等于零.

2. 克拉默法则建立了线性方程组的解和已知的系数与常数项之间的关系.它主要适用于理论推导.

思考题

当线性方程组的系数行列式为零时,能否用克拉默法则解方程组?为什么?此时方程组的解为何?

解答

不能,此时方程组的解为无解或有无穷多解.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

作业：P28

15

18(2)

21(提示：利用范德蒙德行列式，并参看例题5.3

并设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-1}x^{n-1}$ **)**

另外，请记住19题的结论。