线性代数与解析几何

课程要求

- 成绩：平时成绩+期末考试+(期中考试)
- 期末考试：统一命题
- 平时成绩：出勤＋作业
- 上课：关闭手机，自备演算纸
- 课前预习，课后复习巩固

作业要求（大约12次作业）

1. 每次作业统一用A4纸做，并用订书机订好；
2. 在每页纸上方写上姓名、学号、班级以及座位号；
3. 按时独立完成，每周收一次作业；
4. 大家按照班级交给各自的课代表或学习委员

教学内容

- 第一章　行列式
- 第二章　矩阵
- 第三章　向量代数与几何应用
- 第四章　线性方程组
- 第五章　特征值与特征向量
- 第六章　二次型与二次曲面
- 第七章　线性空间与线性变换

第一章 行列式

- 线性代数的重要目标是解线性方程组
- 而解线性方程组经常要用到行列式的概念

一、二阶行列式的引入

用消元法解二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, & (1) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. & (2) \end{cases}$$

$$(1)\times a_{22}: \quad a_{11}a_{22}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_1a_{22},$$

$$(2)\times a_{12}: \quad a_{12}a_{21}x_1 + \boxed{a_{12}a_{22}}x_2 = b_2a_{12},$$

两式相减消去x_2，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2;$$

类似地，消去x_1，得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})\ x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时，方程组的解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \qquad (3)$$

由方程组的四个系数确定.

定义 由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \qquad (4)$$

我们把表达式 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表(4)所确定的二阶行列式

并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. 列标

行标

即 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的计算（对角线法则）

主对角线

次（副）对角线

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的值等于主对角线上的两元素之积减去次对角线上的两元素之积

如 $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 3\times 2 - (-1)\times 2 = 8$

对于二元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 = b_1, \\ \boxed{a_{21}} x_1 + \boxed{a_{22}} x_2 = b_2. \end{cases}$

若记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

系数行列式

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = \boxed{b_1}, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = \boxed{b_2}. \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

则二元一次线性方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

注意　**分母都为原方程组的系数行列式.**

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - a_{12} b_2}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}, \quad x_2 = \frac{a_{11} b_2 - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}}. \qquad (3)$$

例 求解二元线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 = 12 \\ 2x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$$

解 $D = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - (-4) = 7 \neq 0$

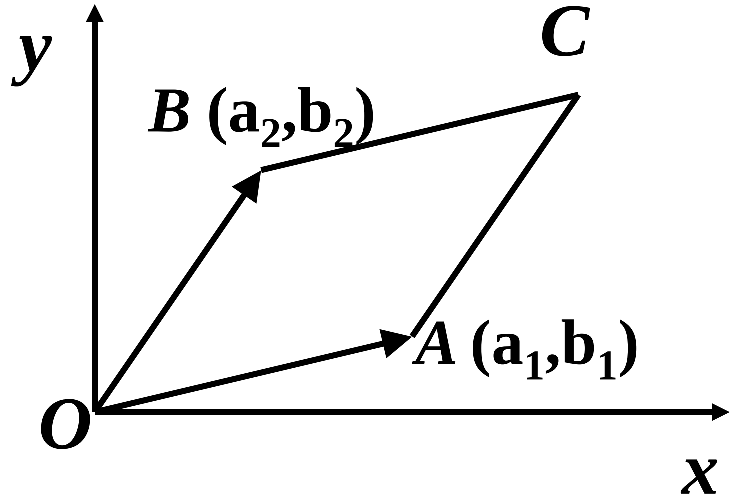
$D_1 = \begin{vmatrix} 12 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 12 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -21,$

$\therefore \quad x_1 = \dfrac{D_1}{D} = \dfrac{14}{7} = 2, \quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{-21}{7} = -3.$

二阶行列式的几何意义

例　在xOy平面上有一个平行四边形OACB，A,B两点的坐标分别为(a_1,b_1), (a_2,b_2), 求其面积.

$$S_{OACB}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$$



一般情况, 过原点的两个几何向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ ，所构成的平行四边形的面积等于A, B两点的代数向量所构成的二阶行列式的绝对值.

二、三阶行列式

定义 设有9个数排成3行3列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \qquad (5)$$

记

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \qquad (6)$$
$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

(6) 式称为数表 (5) 所确定的**三阶行列式**.

次（副）对角线

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

列标

行标

主对角线

三阶行列式的计算 （1）对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

注意　红线上三元素的乘积冠以正号，蓝线上三元素的乘积冠以负号．

说明 1 对角线法则只适用于二阶与三阶行列式．

2 三阶行列式包括3!项,每一项都是位于**不同行,不同列**的三个元素的乘积,其中三项为正,三项为负.

三阶行列式的计算

(2) 沙路法

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D=\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$D= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

例 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

解 按对角线法则，有

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 4 & -2 \end{vmatrix}=1\times2\times(-2)+2\times1\times(-3)+(-4)\times(-2)\times4$$

$$-(-3)\times2\times(-4)-1\times1\times4-2\times(-2)\times(-2)$$

$$=-4-6+32-24-4-8$$

$$=-14$$

练习 **计算行列式**

$$D=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

解 **按对角线法则，有**

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 & 4 \\ 2 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\times(-2)\times 2 + (-2)\times(-1)\times 3 + 4\times 2\times(-4)$$

$$-3\times(-2)\times 4 - (-1)\times(-1)\times(-4) - 2\times 2\times(-2)$$

$$=14$$

例 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0$ **的充分必要条件是什么？**

解： $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 1$

$a^2-1>0$ **当且仅当** $|a|>1$

利用三阶行列式求解三元线性方程组（掌握！）

如果三元线性方程组 $\begin{cases} \boxed{a_{11}} x_1 + \boxed{a_{12}} x_2 + \boxed{a_{13}} x_3 = b_1, \\ \boxed{a_{21}} x_1 + \boxed{a_{22}} x_2 + \boxed{a_{23}} x_3 = b_2, \\ \boxed{a_{31}} x_1 + \boxed{a_{32}} x_2 + \boxed{a_{33}} x_3 = b_3; \end{cases}$

的系数行列式 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}. \qquad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

则三元线性方程组的解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}, \qquad x_2=\frac{D_2}{D}, \qquad x_3=\frac{D_3}{D}.$$

例 解线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + -3x_3 = 1, \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

解 由于方程组的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)$$

$$+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1$$

$$= -5 \neq 0,$$

同理可得

$$D_1=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -3\\ 0 & 1 & -1\end{vmatrix}=-5,\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -3\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=-10,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & -2 & -2\\ 2 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-5,$$

故方程组的解为:

$$x_1=\frac{D_1}{D}=1 \qquad x_2=\frac{D_2}{D}=2 \qquad x_3=\frac{D_3}{D}=1$$

三阶行列式的几何意义

$$V = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

一般情况, 过原点的三个几何向量所张成的平行六面体的体积等于三个代数向量所构成的三阶行列式的绝对值.

三、小结

二阶和三阶行列式是由解二元和三元线性方程组引入的.它们都是代数式。

二阶与三阶行列式的计算 —— 对角线法则

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

掌握利用二阶和三阶行列式求解二元和三元线性方程组

四、 排列、逆序与对换

一、概念的引入

引例 用1、2、3三个数字，可以组成多少个没有重复数字的三位数？

共有 $3\times2\times1=6$ 种放法.

排列与逆序

定义 由自然数1，2，……，n 组成的一个有序数组称为一个n 阶**排列**.

例如：1，2，3，4，5
5，1，2，3，4 都是数1，2，3，4，5的一个排列.
5，3，2，1，4

问题：n个数的不同排列有 $n!$ 个.

定义 n阶排列1234… n称为n阶**自然排列**.

注意　n元排列中，自然排列只有一种，除此之外，任一n元排列都一定出现较大数码排在较小数码之前的情况.

排列的逆序数

定义　在一个排列$(i_1 i_2 \ldots i_t \ldots i_s \ldots i_n)$中，若数$i_t > i_s$则称这两个数组成一个**逆序**.

例　排列32514 中，

逆序

3　2　5　1　4

逆序　　逆序

定义 一个排列中所有逆序的总个数称为此排列的**逆序数**，通常记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$

例如 排列32514 中，

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & 1 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ & \downarrow & & \downarrow & \\ & 1 & & 3 & \end{array}$$

故此排列的逆序数为3+1+0+1+0=5.

计算排列的逆序数的方法：

分别算出 $1,2,\ldots,n-1,n$这n个元素的逆序数，这n个元素的逆序数的总和即为所求排列的逆序数.

例　求排列32514的逆序数.

解　在排列32514中,

3排在首位,逆序数为0;

2的前面比2大的数只有一个3,

故逆序数为1;

5的前面没有比5大的数,其逆序数为0;

1的前面比1大的数有3个,故逆序数为3;

4的前面比4大的数有1个,故逆序数为1;

$$\begin{array}{ccccc} 3 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \end{array}$$

于是排列32514的逆序数为

$$\tau(32514) = 0 + 1 + 0 + 3 + 1 = \mathbf{5}.$$

例 计算下列排列的逆序数，并讨论它们的奇偶性.

(1) 217986354

解

$$\begin{array}{ccccccccc} 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 3 & 5 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 4 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\tau(217986354) = 5+4+4+3+1+0+0+1+0$$

$$= 18$$

逆序数为偶数.

$$(2)\quad 123\cdots(n-2)(n-1)n$$

解

$$123\cdots(n-2)(n-1)n$$

$$\mathbf{0}\quad 0\quad \mathbf{0}\qquad\qquad 0\qquad\qquad 0\qquad\qquad 0$$

$$\tau(123\cdots(n-2)(n-1)n)=0$$

$$(3)\quad n(n-1)(n-2)\cdots 321$$

解

$$\boldsymbol{n(n-1)(n-2)\cdots 321}$$

$n-2$

$\mathbf{0}\quad \mathbf{1}\quad 2\quad n-3\quad n-1$

$$\tau\left(n(n-1)(n-2)\cdots 321\right)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1$$

$$=\frac{n(n-1)}{2},$$

当 $n=4k,4k+1$ 时，逆序数为偶数；

当 $n=4k+2,4k+3$ 时，逆序数为奇数.

定义 逆序数为奇数的排列**奇排列**.

逆序数为偶数的排列**偶排列**.

例如 $\tau(32514)=5$, 所以32514是**奇排列**.

$\tau(123\cdots n)=0$, 所以$123\cdots n$是**偶排列**.

$$\tau(n(n-1)\cdots 321)=\frac{n(n-1)}{2},$$

当$n=4k$或$n=4k+1$时, $n(n-1)\cdots 321$是**偶排列**.

当$n=4k+2$或$n=4k+3$时,

$n(n-1)\cdots 321$是**奇排列**.

考虑，在 1，2，3 的全排列中

有 3 个偶排列： 123，231，312

有 3 个奇排列： 132，213，321

结论：一般说来，在n个数的所有排列中，奇偶排列各占一半，即 n!/2.

对换

定义 把一个排列中的任意两个数交换位置，其余数字位置不动，叫做对该排列作一次对换，简称**对换**.

将相邻的两个数对换，称为**相邻对换**.

例如

$$a_1 \cdots a_l \; a \; b \; b_1 \cdots b_m$$
$$\downarrow$$
$$a_1 \cdots a_l \; b \; a \; b_1 \cdots b_m$$

$$a_1 \cdots a_l \, a \, b_1 \cdots b_m \, b \, c_1 \cdots c_n$$
$$\downarrow$$
$$a_1 \cdots a_l \, b \, b_1 \cdots b_m \, a \, c_1 \cdots c_n$$

定理2.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证明 设排列为

$$a_1 \cdots a_l \, a \, b \, b_1 \cdots b_m \xrightarrow{\text{对换}a\text{与}b} a_1 \cdots a_l \, b \, a \, b_1 \cdots b_m$$

除a,b 外，其它元素的逆序数不改变.

当$a < b$时，

经对换后a 的逆序数增加1， b的逆序数不变;

当$a>b$时，

经对换后 a 的逆序数不变，b的逆序数减少1.

因此对换相邻两个元素，排列改变奇偶性.

设排列为 $a_1\cdots a_l ab_1\cdots b_m bc_1\cdots c_n$

现来对换 a 与b.

$$a_1 \cdots a_l\, a\, b_1 \cdots b_m\, b\, c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\, a b\, b_1 \cdots b_m c_1 \cdots c_n$$

$$\xrightarrow{m+1\text{ 次相邻对换}} a_1 \cdots a_l\, b\, b_1 \cdots b_m\, a\, c_1 \cdots c_n$$

$$\therefore \quad a_1 \cdots a_l a b_1 \cdots b_m b c_1 \cdots c_n,$$

$$\xrightarrow{2m+1\text{次相邻对换}} a_1 \cdots a_l b b_1 \cdots b_m a c_1 \cdots c_n,$$

所以一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

定理 $n \geq 2$ 时，n个数的所有排列中，奇偶排列各占一半，各为 $n!/2$ 个.

证明 设n个数的排列中，

奇排列有 p 个，偶排列有 q 个，则 $p+q=n!$

对 p 个奇排列，施行同一对换，

则由定理2.1得到 p 个偶排列.（而且是p个不同的偶排列）

因为总共有 q 个偶排列，所以 $p \leq q$,同理 $q \leq p$

所以 $\boxed{p = q = n!/2}$

定理 任意一个n阶排列都可以经过一系列对换变成自然排列，并且所作对换的次数与该排列有相同的奇偶性.

证明 显然。

推论 任意两个n阶排列都可以经过一系列对换互变，而且若这两个排列的奇偶性相同，则所作的对换次数是偶数；若这两个排列的奇偶性相反，则所作的对换次数是奇数.

小 结

1. 排列、逆序数、奇排列、偶排列、对换的定义.

2. 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

3. 判断一个排列的奇偶性将是以后的重点，一定要掌握！

思考题：

你能看出行列式的定义与排列的关系吗？

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

正号对应偶排列，负号对应奇排列