1.2　n阶行列式的性质

当$n \geq 4$时，用定义计算n阶行列式将是十分复杂甚至是不可能的．下面将讨论行列式的性质，并用这些性质来简化行列式的计算．

(以下性质的证明只需理解即可，但必须记住这些性质，并能灵活运用它们来计算行列式)

一、行列式的性质

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad D^T=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式D^{T}称为行列式D的转置行列式.

即把行列式D中的行与列按原顺序互换(第1行换成第1列,第2行换成第2列,……，以此类推，直到最后一行）以后得到的行列式，称为D的转置行列式，也可记为 D'

如 $D=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{vmatrix}$ 则 $D^T=\begin{vmatrix}1&4&7\\2&5&8\\3&6&9\end{vmatrix}$

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

如

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&a_{31}&a_{41}\\a_{12}&a_{22}&a_{32}&a_{42}\\a_{13}&a_{23}&a_{33}&a_{43}\\a_{14}&a_{24}&a_{34}&a_{44}\end{vmatrix}$$

说明 行列式中行与列具有同等的地位,因此行列式的性质凡是对行成立的, 对列也同样成立.

性质2 **互换**行列式的两行（列）,行列式**变号**.

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -2 \qquad \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

又如

$$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 3 & 5 & 8 \\ 6 & 6 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 3 & 5 & 8 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=} - \begin{vmatrix} 7 & 1 & 5 \\ 6 & 6 & 2 \\ 5 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

注：1.以后用记号$r_i \leftrightarrow r_j$表示第i行和第j行对换；

而用记号$c_i \leftrightarrow c_j$表示第i列和第j列对换。

这里r是英文row(行）的第一个字母；

而c是英文column(列）的第一个字母。

2.以后遇到**互换两行或两列**要记得**行列式变号**

例：求行列式 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ 的值。

解：
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} \overset{r_4 \leftrightarrow r_3}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5! = -120$$

此为对角形行列式。
对角形行列式的值等于主对角线上元素的乘积

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证明 互换相同的两行，有 $D = -D$，

$\therefore \quad D = 0.$

所谓两行(或列)相同指的是两行(或列)元素对应都相等

如 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

注：以后用$k \times r_i$表示k乘第i行；

而用$k \times c_i$表示k乘第i列。

推论1 行列式的**某一行**（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

第 i 行（或列）提出公因子 k，记作 $r_i \div k$（$c_i \div k$）。

例如

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div 2} 2\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_1 \div 2} 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

推论2 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零．

证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & ka_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & ka_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & ka_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ la_{21} & la_{22} & la_{23} & la_{24} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0$$

又如

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 5 \\ 23 & 35 & 66 & 37 \\ 3 & 6 & 12 & 15 \\ 49 & 34 & 35 & 35 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 33 & 1 & 4 & 5 & 78 \\ 31 & 3 & 1 & 15 & 5 \\ 84 & 7 & 5 & 35 & 0 \\ 14 & 1 & 2 & 5 & 4 \\ 1 & 6 & 8 & 30 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

性质4 若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和.

例如
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则D等于下列两个行列式之和：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a'_{1i} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a'_{2i} & \cdots a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a'_{ni} & \cdots a_{nn} \end{vmatrix}$$

注： 由行列式定义，性质4显然成立.此性质说明行列式中某一行(列)的元素均是两数之和时，该行列式就可按此行(列)拆成两个行列式之和.

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$= ad - bc + xd - cy$$

又如

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b+y \\ c & d+w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b+y \\ z & d+w \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}.$$

例 如果三阶行列式$D_3=|a_{ij}|=m$，求行列式D的值：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11}-a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21}-a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31}-a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

解：

性质4

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & -a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

第一行和第二行相同，据性质2推论，此行列式为0

第二列存在公因子(-1)，据性质3推论2，可以把(-1)提出来

$$=0-\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-m$$

注： 此例说明在计算行列式时，性质的运用不是孤立的。

推论 如果将行列式某一行(列)的每个元素都写成m个数(m为大于2的整数)的和，则此行列式可以写成m个行列式的和.

例

$$\begin{vmatrix} a+x+v & b+y+u \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} v & u \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$=ad-bc+xd-cy+vd-cu$$

性质5 把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式值不变.

例如

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

$k\times$

$$\underline{\underline{c_i + kc_j}} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2j} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nj} \end{vmatrix}$$

注：以后用$r_j+k\times r_i$表示用比例k乘第i行的各个元素并加到第j行的相应元素上(特别地，当k=-1时表示

r_j-r_i，而k=+1时表示r_j+r_i)；

而用$c_j+k\times c_i$比例k乘第i列的各个元素并加到第j列的相应元素上。(特别地，当k=-1时表示c_j-c_i，而k=+1时表示c_j+c_i)

例如 $\begin{vmatrix} a+b & c+d \\ b & d \end{vmatrix} \overset{r_1-r_2}{=\!=} \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

又如 $\begin{vmatrix} 4588920 & 4688920 \\ 19 & 100019 \end{vmatrix}$

从此例说明运用行列式的性质可以简化行列式的计算

$\overset{c_2-c_1}{=\!=} \begin{vmatrix} 4588920 & 100000 \\ 19 & 100000 \end{vmatrix} = 458890100000$

问题1： 将n阶行列式的最后一行轮换到第一行，这两个行列式的值有什么关系？

互换行列式的两行（列），行列式变号.

答案：

设n阶行列式D_n，若运用行列式性质2将它的最后一行轮换到第一行，得另一个n阶行列式D，那么这两个行列式的值的关系为：

$$D=(-1)^{n-1}D_n$$

例：

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \iddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 1997 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1998 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{1999-1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1996 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1997 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1998 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=1\times1\times2\times3\times\cdots\times1998\times(-1)^{\frac{1999(1999-1)}{2}} = -1998!$$

问题2：如果行列式有两行或两行以上的行都有公因子，那么按性质3推论1应如何取？

答案：按顺序将公因子提出，如

行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面．

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ \lambda a_2 & \lambda b_2 & \lambda c_2 & \lambda d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ ka_4 & kb_4 & kc_4 & kd_4 \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ ka_4 & kb_4 & kc_4 & kd_4 \end{vmatrix} = \lambda k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

例　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}$

解:

因为第一列与第二列对应元素成比例,根据性质3的推论2

得

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ -5 & 10 & 4 \end{vmatrix}=0$$

行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

例 若四阶行列式$D_4=|a_{ij}|=m$,则$D=|3a_{ij}|=?$

分析：

$$D_4=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \qquad D=|3a_{ij}|=\begin{vmatrix} 3a_{11} & 3a_{12} & 3a_{13} & 3a_{14} \\ 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} & 3a_{24} \\ 3a_{31} & 3a_{32} & 3a_{33} & 3a_{34} \\ 3a_{41} & 3a_{42} & 3a_{43} & 3a_{44} \end{vmatrix}$$

从行(或列)看，每行(或每列)都存在公因子3，因此可以分别提出来，共有4个因子3。

解： 根据性质3的推论1

行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

得

$$D=|3a_{ij}|=3^4\,|a_{ij}| \quad =81m$$

例 若n阶行列式$D_n=|a_{ij}|=a$,则$D=|-a_{ij}|=?$

分析：

$$D_n=|a_{ij}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad D=|-a_{ij}|=\begin{vmatrix} \boxed{-a_{11} \quad -a_{12} \quad \cdots \quad -a_{1n}} \\ \boxed{-a_{21} \quad -a_{22} \quad \cdots \quad -a_{2n}} \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \boxed{-a_{n1} \quad -a_{n2} \quad \cdots \quad -a_{nn}} \end{vmatrix}$$

从行(或列)看，每行(或每列)都存在公因子(-1)，因此可以分别提出来，共有n个因子(-1)。

解： 根据性质3的推论1

行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

得

$$D=|-a_{ij}|=(-1)^n|a_{ij}|=(-1)^n a$$

例 证明奇数阶反对称行列式的值为零.

反对称行列式为下列形式的行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

其特点是元素$a_{ij}=-a_{ji}$($i\neq j$时)

$a_{ii}=0$ ($i=j$时)

证: 利用行列式性质1及性质3推论1, 有

$$D=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{性质1}}{=}\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

行列式与它的转置行列式相等.

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & \cdots & -a_{2n} \\ a_{13} & a_{23} & 0 & \cdots & -a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

注：从第1行到第n行（或从第1列到第n列），运用性质3推论1分别提取公因子-1。

行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

性质3推论1

$$=(-1)^n\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix}=(-1)^n D$$

$D=(-1)^n D$.当n为奇数时有$D=-D$, 即$D=0$.

例 用行列式的性质证

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和,则D等于下列两个行列式之和

证明：

性质4

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & \boxed{b_1+c_1} & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & c_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质5 c_1-$k\times c_2$

性质2推论

$$= \begin{vmatrix} a_1+kb_1-kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2-kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3-kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0$$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式值不变

如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

或

把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式值不变

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1+c_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2+c_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3+c_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{c_2-c_3}{=} \begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \overset{c_1-k\times c_2}{=} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

性质5

说明：在计算或证明行列式的时候要灵活地运用行列式的性质。

小结

性质1 行列式与它的转置行列式相等.

性质2 互换行列式的两行（列）,行列式变号.

推论 如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

性质3 行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数k，等于用数k乘此行列式.

推论1 行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号的外面.

推论2 行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式为零.

小 结

性质4　若行列式的某一列（行）的元素都是两数之和,则D等于下列两个行列式之和.

推论 如果将行列式某一行(列)的每个元素都写成m个数(m为大于2的整数)的和, 则此行列式可以写成m个行列式的和.

性质5　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式值不变.

（请大家理解并熟记这些性质，这样我们才能用这些性质来计算行列式）

基本结论： 三角形行列式的值就等于主对角线上的各元素乘积。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

因此， 计算一般的行列式时，常多次运用行列式的性质，把它化为三角形行列式来计算.

例 计算行列式

注意第一行第一列元素为0

$$D=\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解:

$$D=\begin{vmatrix}0&-1&-1&2\\1&-1&0&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}\overset{r_1\leftrightarrow r_2}{=}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\-1&2&-1&0\\2&1&1&0\end{vmatrix}$$

$$\overset{\substack{r_3+r_1\\r_4-2r_1}}{=}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&1&-1&2\\0&3&1&-4\end{vmatrix}\overset{\substack{r_3+r_2\\r_4+3r_2}}{=}-\begin{vmatrix}1&-1&0&2\\0&-1&-1&2\\0&0&-2&4\\0&0&-2&2\end{vmatrix}$$

$$D=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=}-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=4$$

例 计算行列式：$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

分析： 虽然第一行第一列元素不为0，
但第一列元素的数值相对比较大，
为了方便计算我们可以进行换列(或行)。
分析各行和各列的特点，发现第二列的
数值的绝对值相对小。因此用第二列与
第一列进行互换后再进行下一步计算。

解：
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix} \overset{c_1 \leftrightarrow c_2}{=} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{r_3-2r_1}{\overset{r_2+r_1}{=}} - \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

注意到第二行和第四行相同知该行列式值为0

说明：计算行列式的时候，变换的方法不是唯一的。不管用什么方法来求解都要注意各种方法的灵活运用。

前面化为上三角行列式或下三角行列式只用到了性质2和性质5。

互换行列式的两（列）行列式变号.

把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列(行)对应的元素上去，行列式值不变.

事实上，对于比较复杂的行列式仅用这两种方法是不够的，需要结合利用行列式的其他性质。有些行列式的计算还需要结合利用一些技巧。下面，我们将简单地介绍这些技巧。

例：$D=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

分析:各行的元素之和为定数

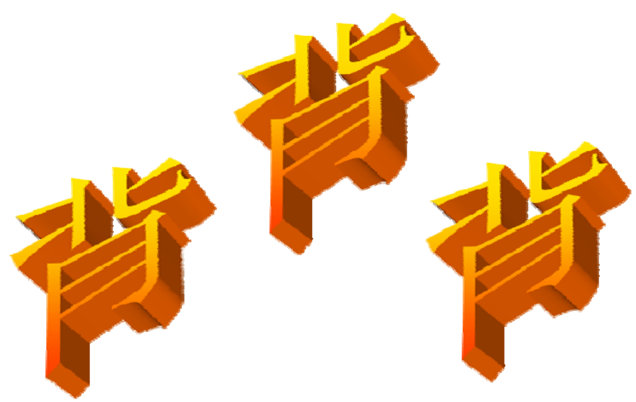
将2,3,4列的元素全加到第一列对应位置的元素上，得

$$D=\begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 \\ 9 & 3 & 2 & 2 \\ 9 & 2 & 3 & 2 \\ 9 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} \overset{r_2-r_1}{\underset{\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}}{=}} \begin{vmatrix} 9 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 9$$

一般地，可以计算下面的n阶行列式

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

请牢记这种方法，这类题就这种做法。



课本例题4.3是上述行列式的特殊情形。

解：把第2,3,…,n列各元素分别加到第1列对应位置的元素上去，得

$$\begin{vmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ a+(n-1)b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a+(n-1)b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_2-r_1, r_3-r_1, \ldots r_n-r_1}{=} \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$$

$$= [a+(n-1)b](a-b)^{n-1}$$

例 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$.

解 从第 4 行开始，后行减前行：

$$D \overset{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2 \\ r_2-r_1}}{=\!=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix} \overset{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\overset{r_4-r_3}{=} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

注意处理的顺序

小结

行列式的6个性质(行列式中行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立).

计算行列式常用方法：(1)利用定义;(2)利用性质把行列式化为上三角形行列式，从而算得行列式的值.

计算行列式的方法比较灵活，同一行列式可以有多种计算方法；有的行列式计算需要几种方法综合应用．在计算时，首先要仔细考察行列式在构造上的特点，利用行列式的性质对它进行变换后，再考察它是否能用常用的几种方法.

作业：P26

11(2),(5),(6)

12(2),(3)

14(3)