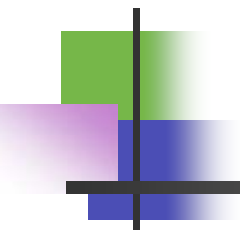


§4.6 线性方程组解的结构



回顾：线性方程组解的判定

1. 包含 n 个未知数的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有非零解的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$.
2. 包含 n 个未知数的非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b)$, 其中 (A, b) 为增广矩阵, 并且
 - (1). 当 $R(A) = R(A, b) = n$ 时 , 方程组有唯一解 ;
 - (2). 当 $R(A) = R(A, b) < n$ 时 , 方程组有无限多个解 .

向量线性表示与线性方程组的关系

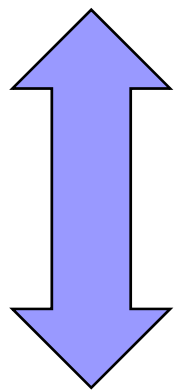
给定具有 m 个未知数的 n 个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

线性方程组

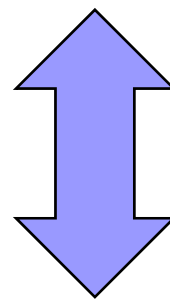
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$



向量方程形式

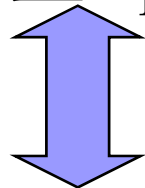
$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_m\alpha_m = \beta$$

方程组有解

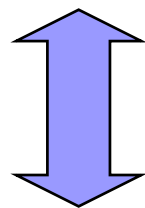


β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示

定理： 向量 β 可由向量 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示



方程组 $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \dots + x_m\alpha_m = \beta$ 有解



$$\text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = \text{rank}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta)$$

引言

定义： **线性方程组的解的结构**，就是指当线性方程组有无限多个解时，解与解之间的相互关系。

备注：

- 当方程组无解或者存在唯一解时，无须讨论解的结构。
- 下面的讨论都是假设线性方程组有解。

解向量的定义

定义：设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ ，如果

$$x_1 = \xi_{11} , x_2 = \xi_{21} , \dots , x_n = \xi_{n1}$$

为该方程组的解，则

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组的**解向量**。

齐次线性方程组解的性质

性质1：若 $x = \xi_1$, $x = \xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解 ,
则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 还是 $Ax = 0$ 的解 .

证明： $A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0 + 0 = 0$.

性质2：若 $x = \xi$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解 , k 为实数 ,
则 $x = k\xi$ 还是 $Ax = 0$ 的解 .

证明： $A(k\xi) = k(A\xi) = k \cdot 0 = 0$.

结论：若 $x = \xi_1, x = \xi_2, \dots, x = \xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$
的解 , 则 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_t\xi_t$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

结论：若 $x = \xi_1, x = \xi_2, \dots, x = \xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，则 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_t\xi_t$ 还是 $Ax = 0$ 的解。

- 已知齐次方程组 $Ax = 0$ 的几个解向量，可以通过这些解向量的线性组合给出更多的解。
- 能否通过有限个解向量的线性组合把 $Ax = 0$ 的解全部表示出来？
- 把 $Ax = 0$ 的全体解组成的集合记作 S ，若求得 S 的一个极大线性无关组 $S_0 : x = \xi_1, x = \xi_2, \dots, x = \xi_t$ ，那么 $Ax = 0$ 的通解可表示为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_t\xi_t$ 。
- 齐次线性方程组的解集的极大线性无关组称为该齐次线性方程组的基础解系（不唯一）。

基础解系的概念

定义：齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组解向量： $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$

如果满足

① $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 线性无关；

② 方程组中任意一个解都可以表示成 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 的线性组合，
那么称这组解是齐次线性方程组的一个**基础解系**。

定理：设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A) = r$ ，则 n 元齐次线性方程组

$Ax = 0$ 的解集 S 存在一个基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 。

注记： S 的基础解系所含**个数等于** $n - R(A)$ ，把基础解系所含解的个数称为解集的秩，记作 R_S ，即 $R_S = n - R(A)$ 。

设 $R(A) = r$, 为叙述方便 ,
不妨设 A 经过初等行变换得
到的最简形矩阵为

$$B = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right)_{m \times n}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$ 前 r 列
 $\underbrace{\hspace{10em}}$ 后 $n - r$ 列

对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ x_2 + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \cdots \cdots \\ x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

令 x_{r+1}, \dots, x_n 作自由变量 , 则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \cdots \cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \quad \dots\dots\dots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

齐次线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1, x_{r+2} = c_2, \dots, x_n = c_{n-r}$, 则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 & & \\ & \ddots & \\ & & c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r}$. (满足基础解系②)

$$(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}) = \left(\begin{array}{cccc} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1,n-r} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{r,1} & -b_{r,2} & \cdots & -b_{r,n-r} \\ \hline 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array} \right) \left\{ \begin{array}{l} \text{前 } r \text{ 行} \\ \text{后 } n-r \text{ 行} \end{array} \right.$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{n-r \text{ 列}}$

故 $R(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}) = n - r$,

即 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 线性无关 . (满足基础解系①)

于是 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 就是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系 .

课本的证法：

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{则 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}$$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

此即为 $Ax = 0$ 的基础解系。
所以通解为

$$\xi = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \cdots + c_{n-r} \xi_{n-r}$$

基础解系的求法

例：求齐次线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$
 的基础解系 .

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系 .

(1). 系数矩阵化成阶梯型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 写出同解方程组以及一般解

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

(3) 用向量形式写出一般解为

令 $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, 得通解表达式

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 - 4c_2 \\ -2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

(4) 确定一个基础解系

因为

✓ 方程组的任意一个解都可以表示为 ξ_1, ξ_2 的线性组合 .

✓ ξ_1, ξ_2 的四个分量不成比例 , 所以 ξ_1, ξ_2 线性无关 .

所以 ξ_1, ξ_2 是原方程组的基础解系 .

方法2：先求出基础解系，再写出通解。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \cdots \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

$$\text{令 } \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ 得 } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{合起来便得到基础解系 } \xi_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{通解为 } x = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2$$

非齐次线性方程组的解的性质

性质3：若 $x = \eta_1$, $x = \eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解 , 则 $x = \eta_1 - \eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ (导出组) 解 .

证明： $A(\eta_1 - \eta_2) = A\eta_1 - A\eta_2 = b - b = 0$.

性质4：若 $x = \eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的解 , $x = \xi$ 是导出组 $Ax = 0$ 的解 , 则 $x = \xi + \eta$ 还是 $Ax = b$ 的解 .

证明： $A(\xi + \eta) = A\xi + A\eta = 0 + b = b$.

根据性质3 和性质4 可知

(1). 若 $x = \eta^*$ 是 $Ax = b$ 的解, $x = \xi_1$ 是 $Ax = 0$ 的解, 那么 $x = \xi_1 + \eta^*$ 也是 $Ax = b$ 的解.

(2). 若 $x = \eta^*$ 是 $Ax = b$ 的解, $Ax = 0$ 的通解为 $\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_{n-r}\xi_{n-r}$. 于是 $Ax = b$ 的通解为

$$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \dots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

求非齐次线性方程组的通解的方法:

1. 找出一个特解 η^* ;
2. 求出对应的齐次方程组的基础解系 ξ_1, \dots, ξ_{n-r}
3. 写出原来方程的通解 $\eta = c_1\xi_1 + \dots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$

例：求下列方程组的一个通解：

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 - x_5 = -4, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 - 4x_5 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 + x_5 = 4, \\ -4x_1 + 16x_2 + x_3 + 3x_4 - 9x_5 = -21. \end{cases}$$

解：(1)把增广矩阵化成阶梯型矩阵

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & -5 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ -4 & 16 & 1 & 3 & -9 & -21 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 41 & 33 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 41 & 33 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -27 & -22 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -41 & -33 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 写出同解方程组以及一般解

$$\begin{cases} x_1 - 27x_4 - 22x_5 = 2 \\ x_2 - 4x_4 - 4x_5 = -1 \\ x_3 - 41x_4 - 33x_5 = 3 \end{cases}$$

设 c_1, c_2 为任意常数, 则一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 27c_1 + 22c_2 + 2 \\ x_2 = 4c_1 + 4c_2 + 1 \\ x_3 = 41c_1 + 33c_2 + 3 \\ x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \end{cases}$$

(3) 用向量形式写出一一般解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ 41 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 22 \\ 4 \\ 33 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) 确定一个特解及对应齐次方程组一个基础解系

$$\text{取 } \eta_1 = \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ 41 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \eta_2 = \begin{pmatrix} 22 \\ 4 \\ 33 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, X^* = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

则 X^* 是原方程的一个特解, η_1, η_2 是对应齐次方程的一个基础解系

(4) 写出原方程的通解

原方程的通解为 $X = \eta + X^*$,

其中 $\eta = c_1\eta_1 + c_2\eta_2$ 是对应齐次方程的通解

练习：求线性方程组
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$$
 的通解 .

提示：原方程组的通解为

$$\eta = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + \eta^* = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

作业：习题四 P111

11 ,

14(1) ,

16(2) ,

23