

# 数据通信原理

## 模拟信号的数字编码

全宇晖

二零一九年秋

# 前程回顾

傅里叶变换

时域  $\longleftrightarrow$  频域

逆傅里叶变换

卷积/点乘  $\longleftrightarrow$  点乘/卷积

周期/离散  $\longleftrightarrow$  离散/周期

放缩  $\longleftrightarrow$  缩放

函数对常可对调

# 基本概念

模拟信号的数字编码：

模拟信号→二进制数字码组

三个步骤：

**[抽样]** 连续时间、连续幅值→时间离散、连续幅度

**[量化]** 时间离散、连续幅值→时间离散、幅值离散

**[编码]** 时间离散、幅值离散→特定的二进制码组

# 模拟信号的抽(采)样

连续时间  $\rightarrow$  离散时间

连续幅值 = 连续幅值

# 数学上如何表示一个理想抽样过程？

- 采集信号上 $t_0$ 时刻的点

$$f(t)\delta(t - t_0)$$

- 采集信号上 $t_0, \dots, t_N$ 时刻的点

$$\sum_{n=1}^N f(t)\delta(t - t_n) = f(t) \sum_{n=1}^N \delta(t - t_n)$$

**[理想抽样脉冲序列]**  $\sum_{n=1}^N \delta(t - t_n)$

为什么称为“理想”？

# 理想均匀抽样过程

写出下图所示理想均匀采样过程（采样间隔为 $T_s$ ）

抽样脉冲序列

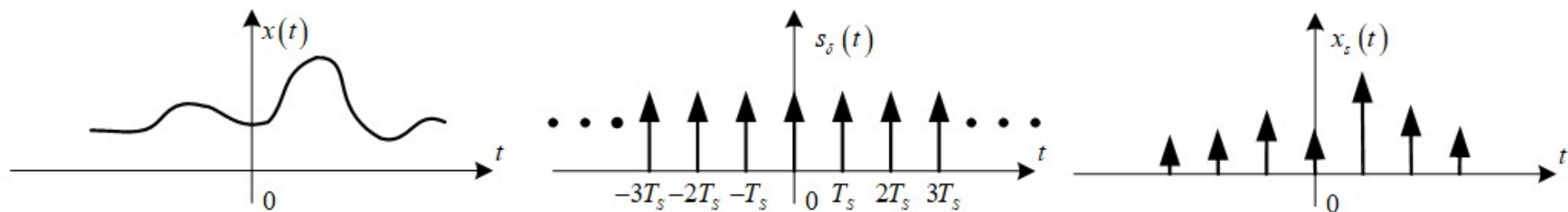
$$s_p(t) = s_\delta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$

抽样脉冲序列的傅里叶变换

$$S_\delta(\omega) = \omega_s \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$

抽样所得信号

$$x_s(t) = x(t)s_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s)$$



# 均匀抽样的核心问题

采样间隔为多少时，能从离散的抽样点还原回原来的连续信号？

不存在通用的采样方法（均匀或非均匀），能对任意信号采样后能完美重构原图像。

# 均匀抽样的核心问题

对什么样的信号，有望在抽样后还原回去？

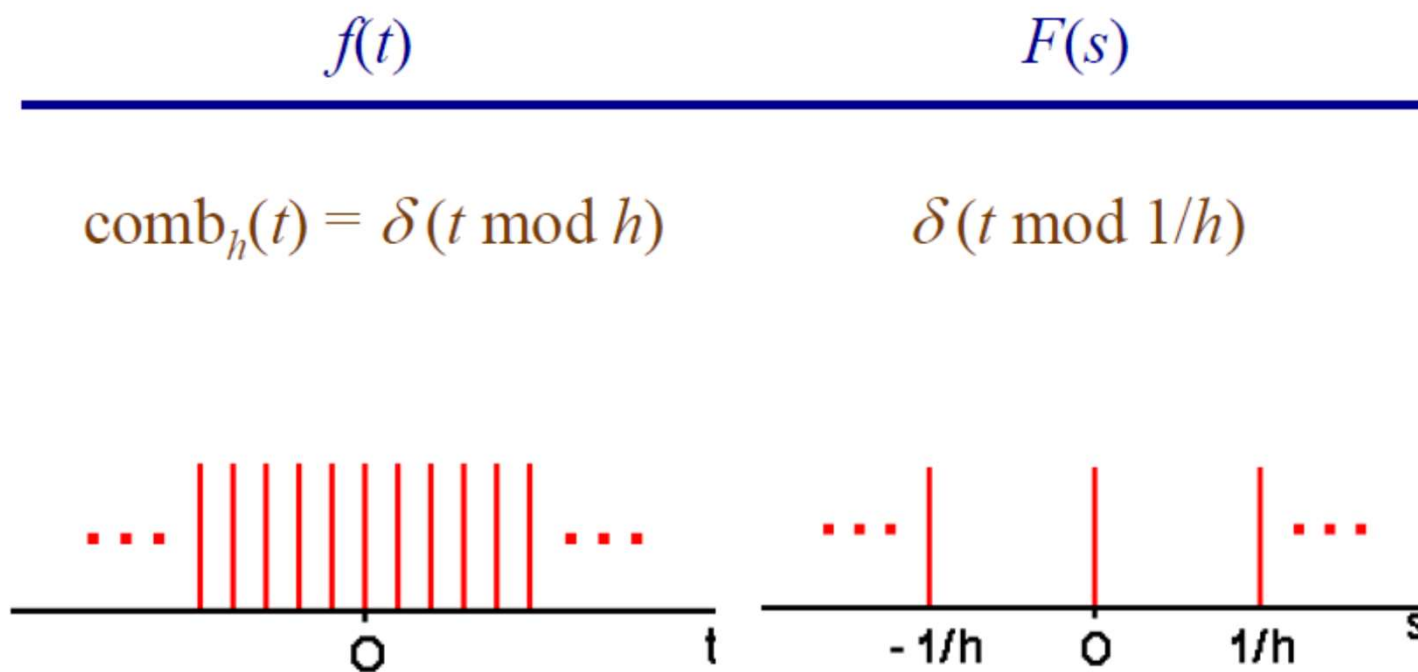
信号的实际“信息量”须与离散域的容量“一致”，比如

- 低通信号：频域表示中只有低频系数
- 带通信号：频域表示中只有某些频带有非零系数



# 前情回顾

$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nh) = \delta(t \bmod h)$  的傅里叶变换



# 低通信号的均匀抽样

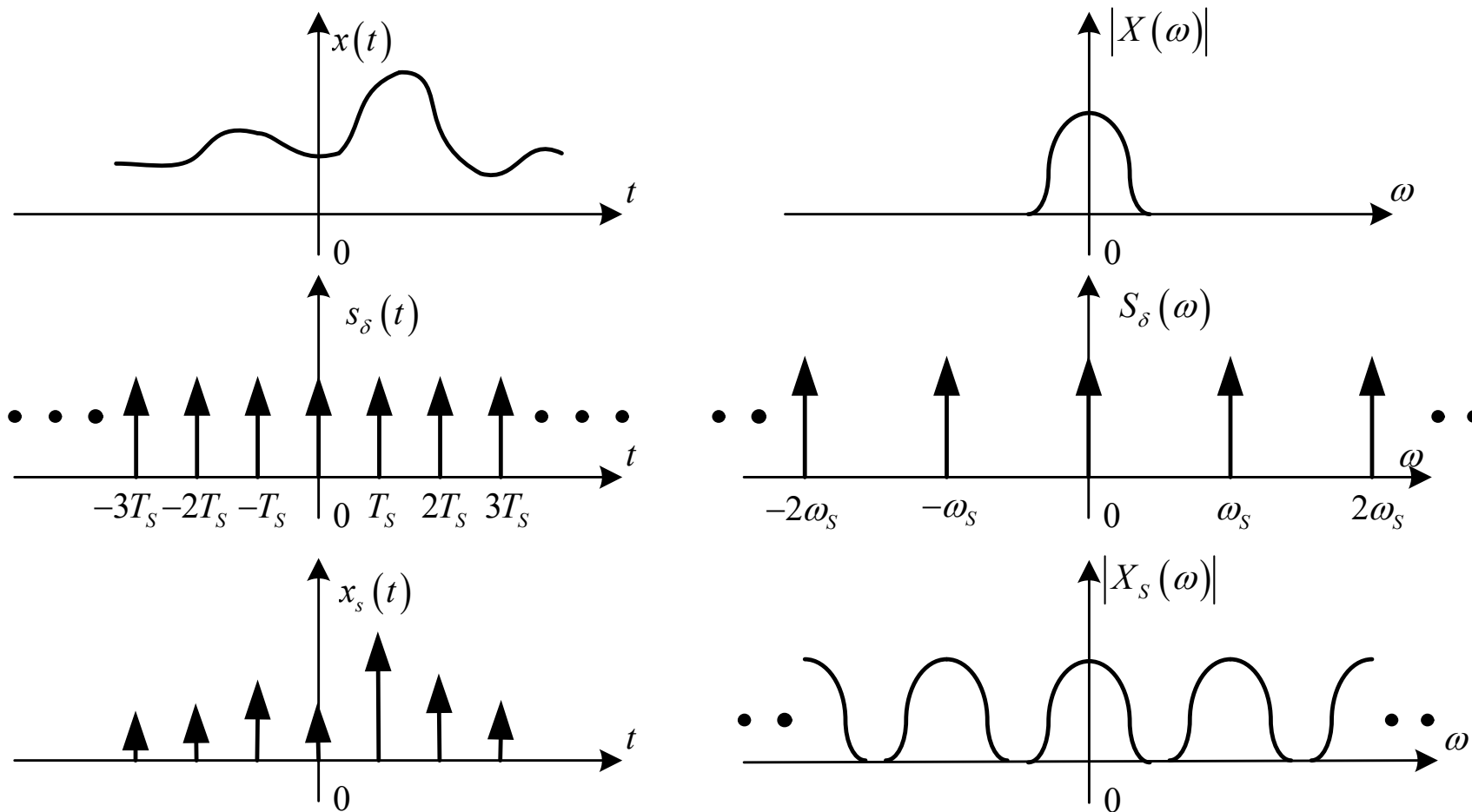
- 均匀抽样

$$x_s(t) = x(t)s_\delta(t) = x(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}x(nT_s)\delta(t-nT_s)$$

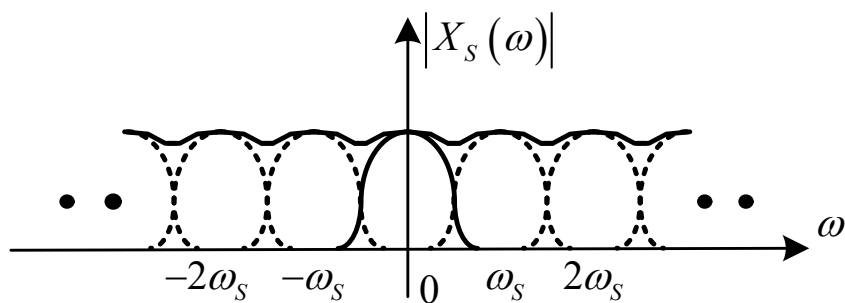
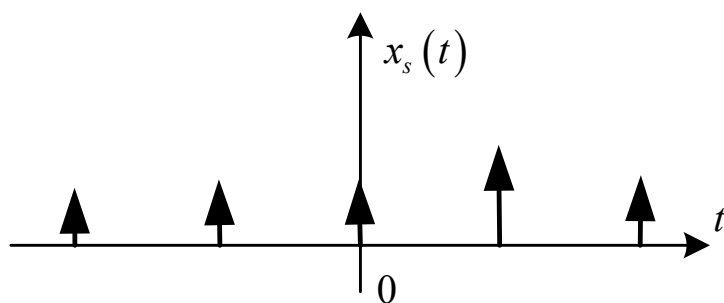
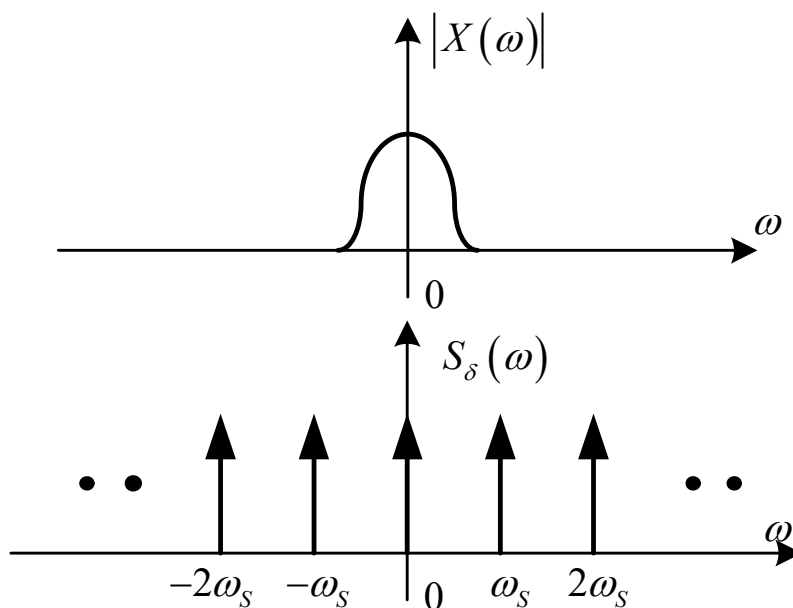
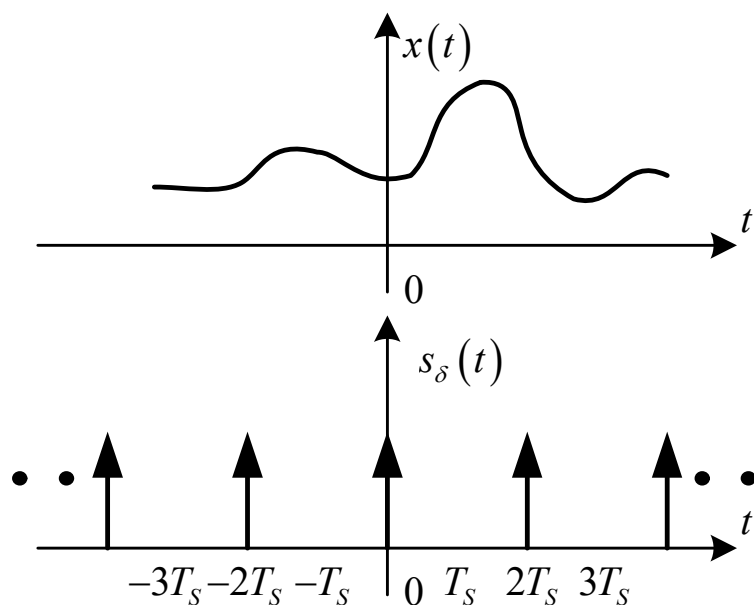
- 均匀抽样的傅里叶表示

$$\begin{aligned}X_s(\omega) &= \frac{1}{2\pi}[X(\omega)*S_\delta(\omega)] \\&= \frac{\omega_s}{2\pi}\left[X(\omega)*\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-k\omega_s)\right] = \frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(\omega-k\omega_s)\end{aligned}$$

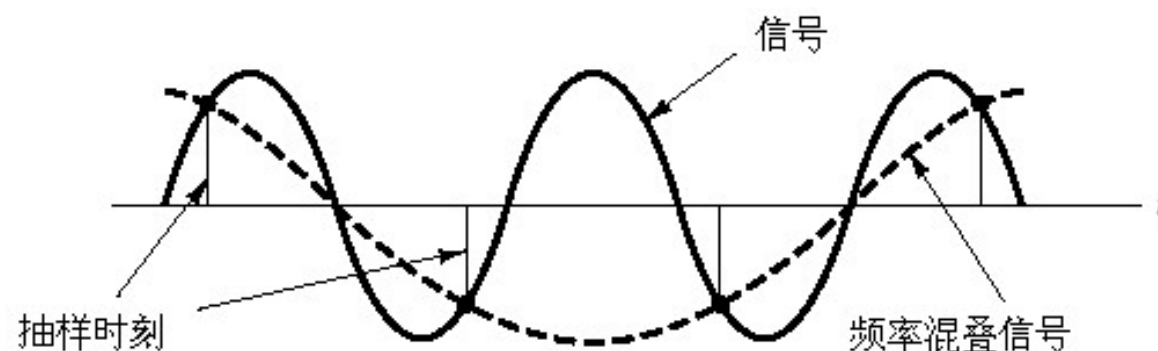
# 低通信号的均匀抽样



# 低通信号均匀抽样中的频谱混叠现象与混叠失真



# 频谱混叠现象与混叠失真后的重建

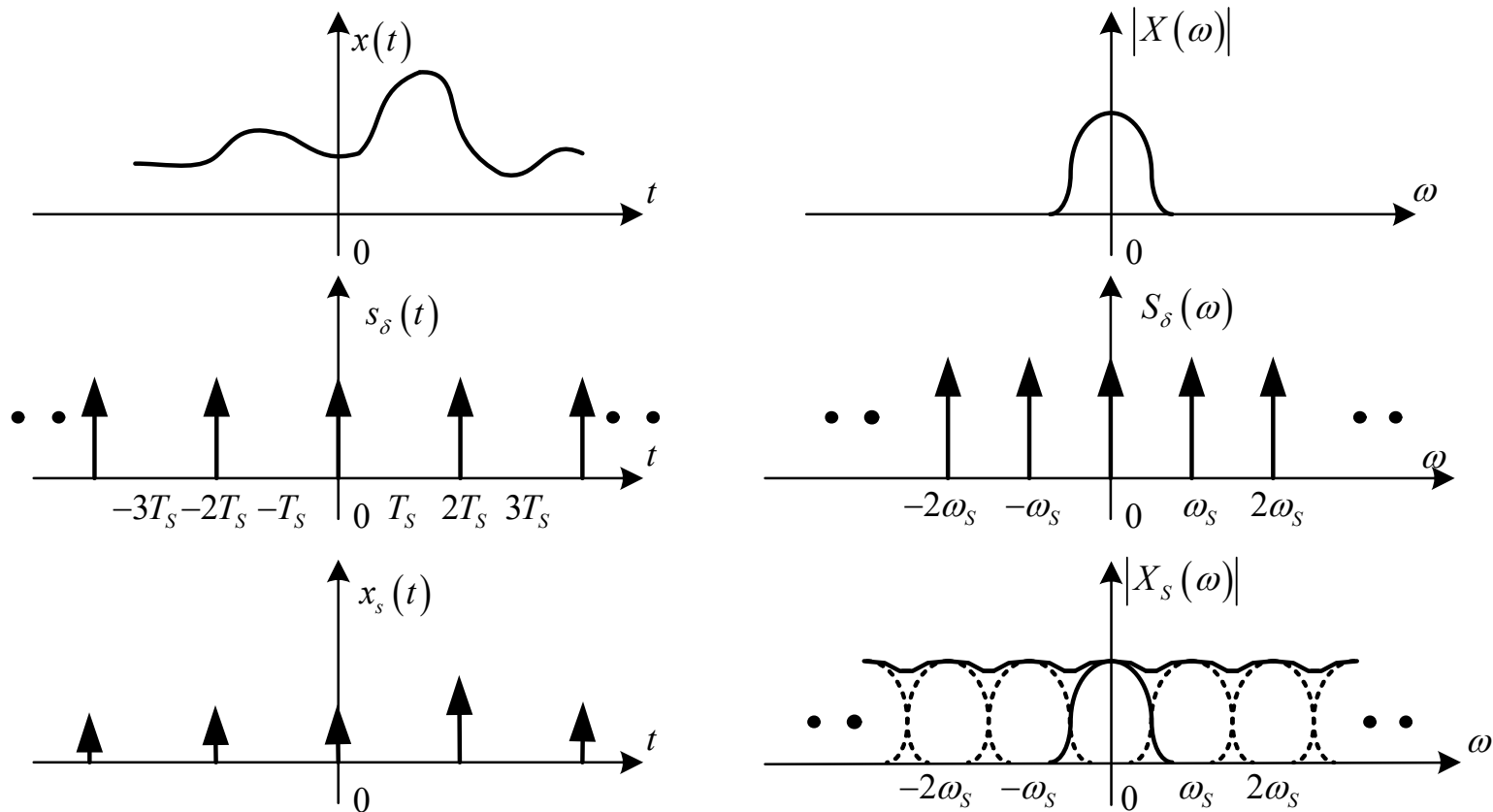


实线：原信号

虚线：发生混叠时重建的信号

# 低通信号的均匀抽样定理

如何避免频谱混叠？

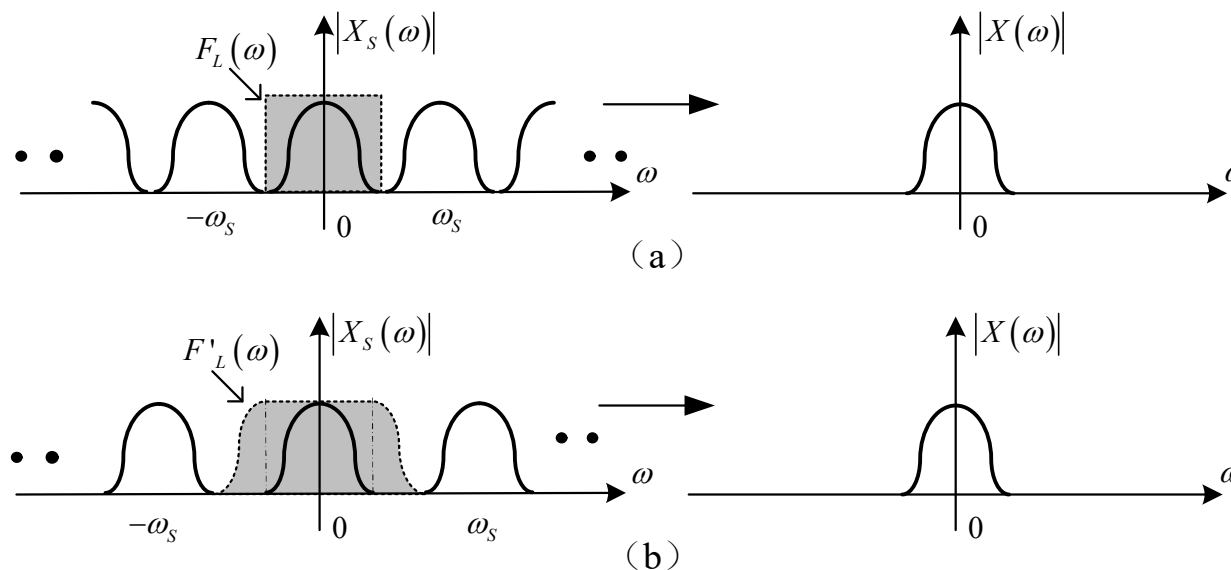


# 低通信号的均匀抽样定理

对一个频带限定在  $0 \leq \omega \leq \omega_H$  内的连续信号  $x(t)$ ，如果以频率  $\omega_S \geq 2\omega_H$  的抽样脉冲序列

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_S)$$

对  $x(t)$  进行抽样，则由所得的抽样序列  $x_s(t)$ ，可无失真地恢复原来的信号。 **信号可无失真恢复的必要条件：抽样信号无频谱混叠**

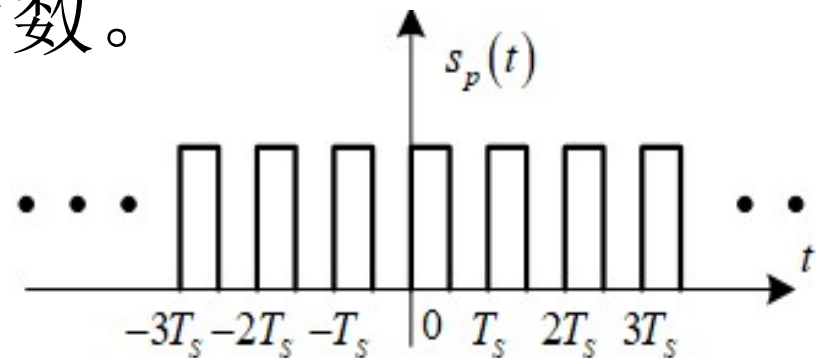


# 从理想抽样到自然抽样

- 理想抽样序列  $s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$  的完美瞬时特性在现实中难以实现。
- 实际中的“脉冲”函数是个“小窗口”，由此得出自然抽样序列

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_T(t - nT_s)$$

其中  $p_T$  是窗口中的波形函数。





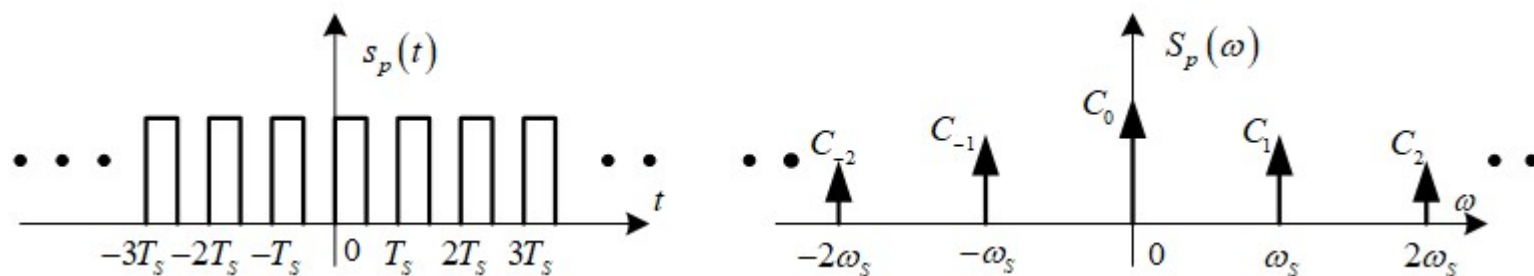
# 从理想抽样到自然抽样

## [关键问题]

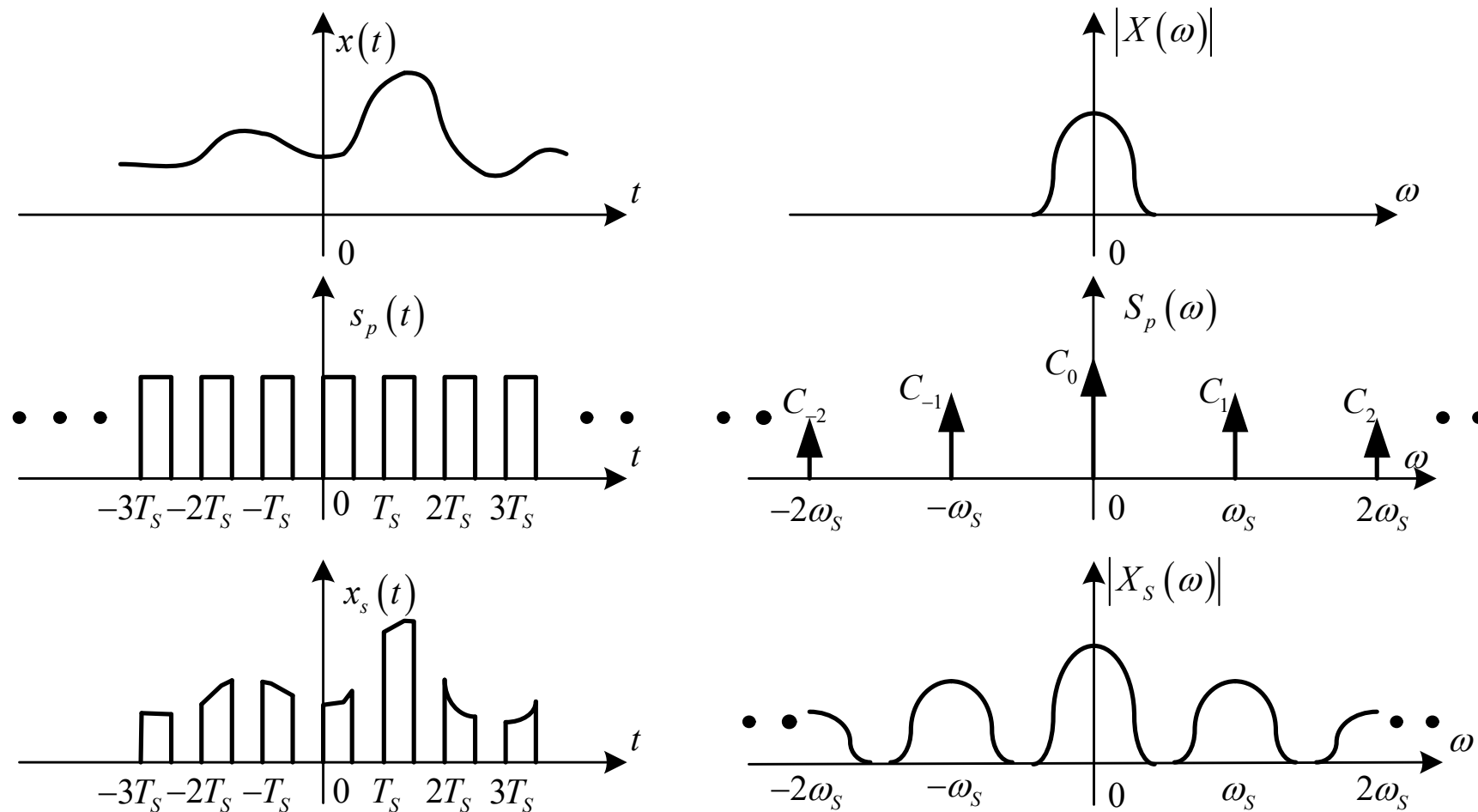
$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} p_T(t - nT_s)$  的傅里叶变换？

从 $s_p(t)$ 的周期性可知

$$s_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{jn\omega_s t} \Leftrightarrow S_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

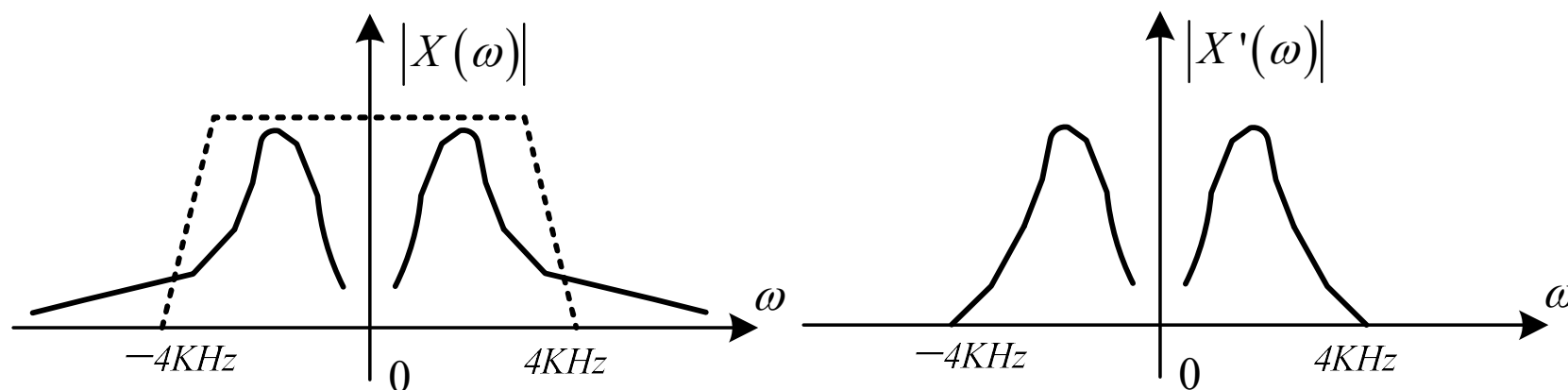


# 从理想抽样到自然抽样



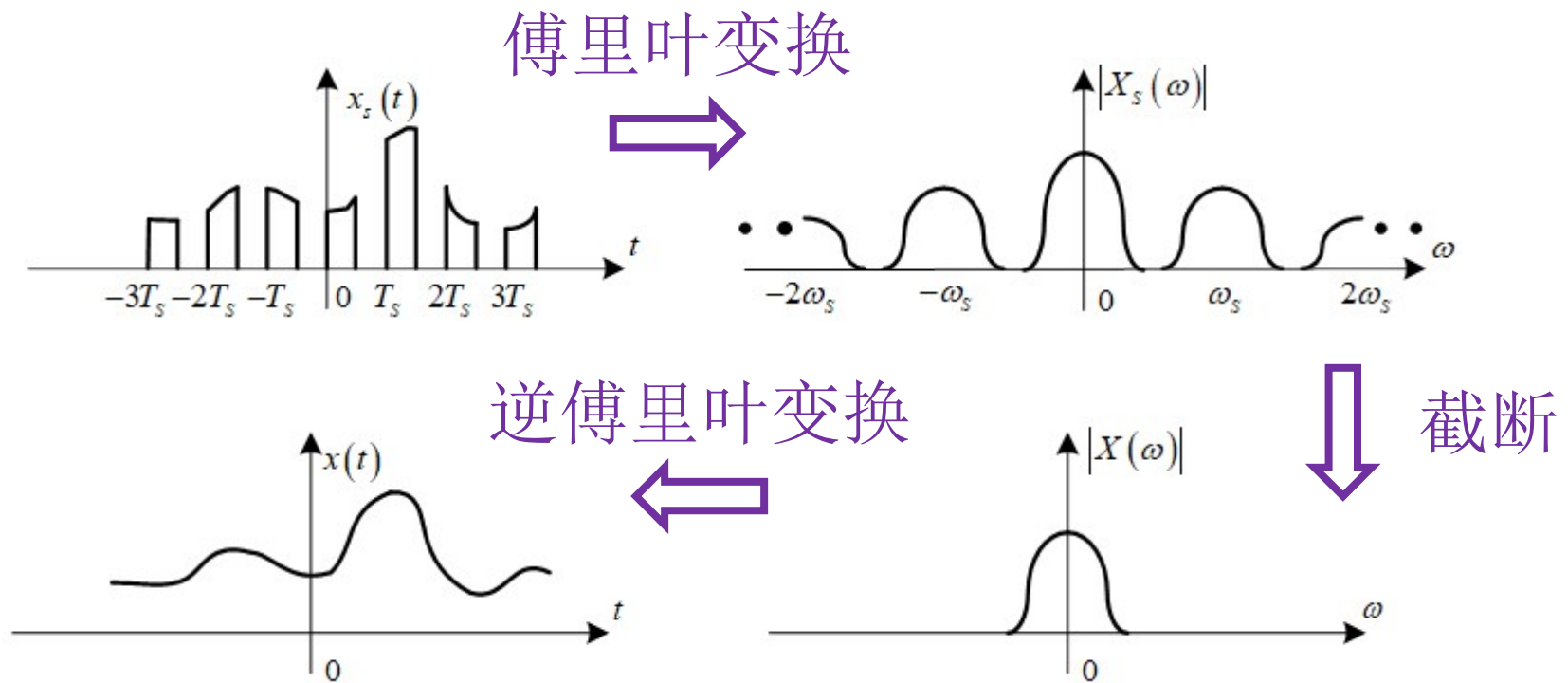
# 实际应用中如果保证信号的低通性？

滤除部份对话音的理解不重要的高频成分后再进行抽样量化



如图进行预滤波处理后，抽样频率可由40kHz（人耳可听到的最高的频率为20kHz）降低至普通电话系统中采用的8kHz。

# 低通采样后的信号如何重建？



截断即低通滤波，如何实现？

乘以一个在 $[-\omega_H, \omega_H]$ 上的盒子函数

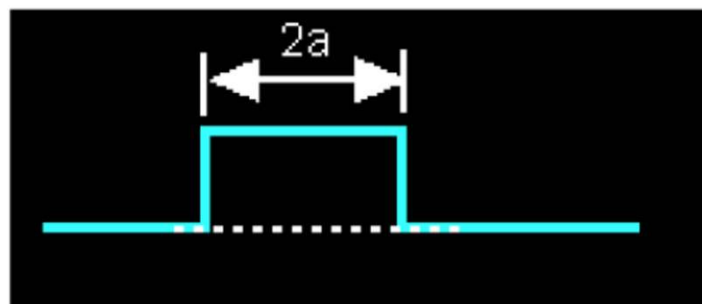
# 前情回顾

$f(t)$

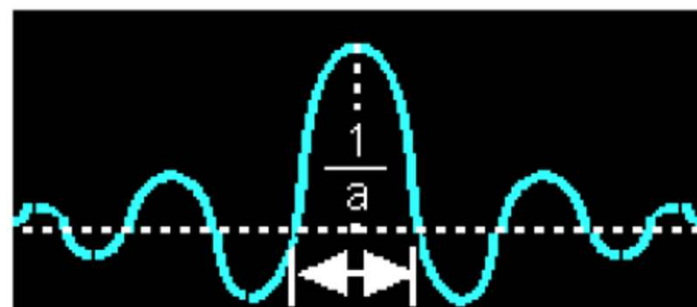
$F(s)$

$\Pi_a(t)$

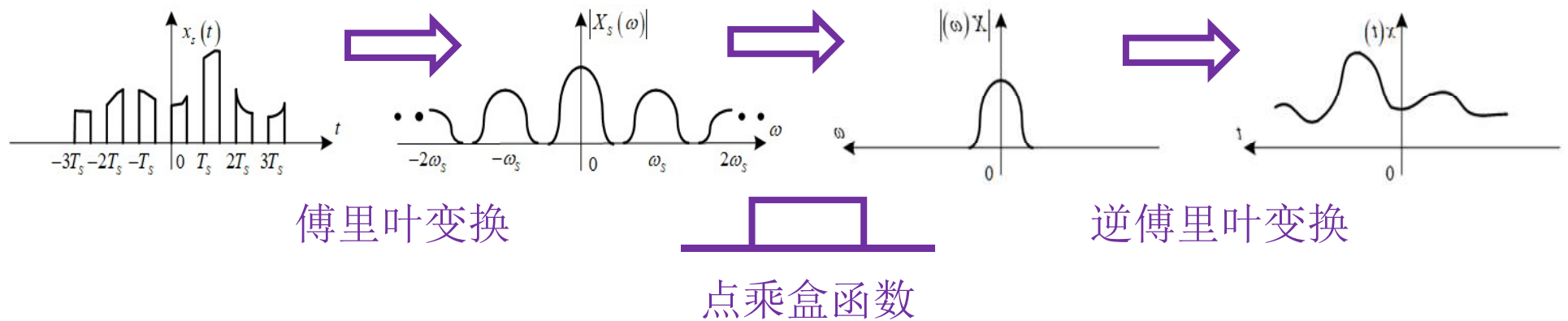
$$2a \operatorname{sinc}(2as) = \frac{\sin(2\pi as)}{\pi s}$$



$\longleftrightarrow$   
F.T.

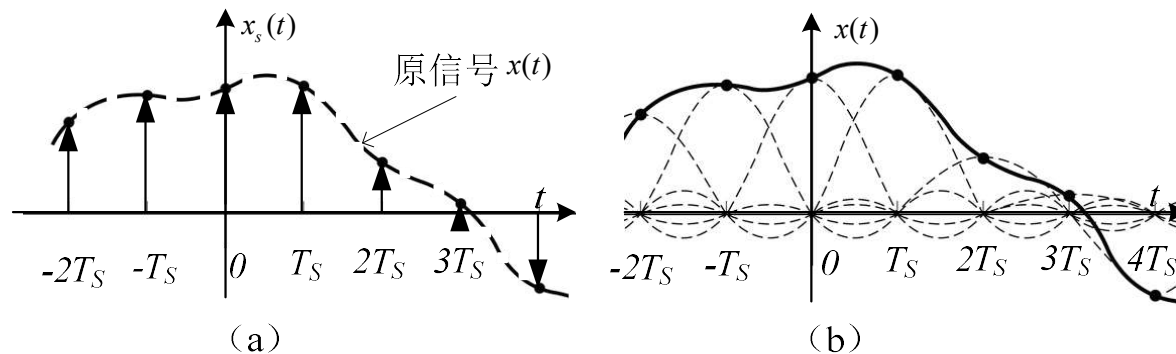


# 低通信号均匀采样后的信号重建

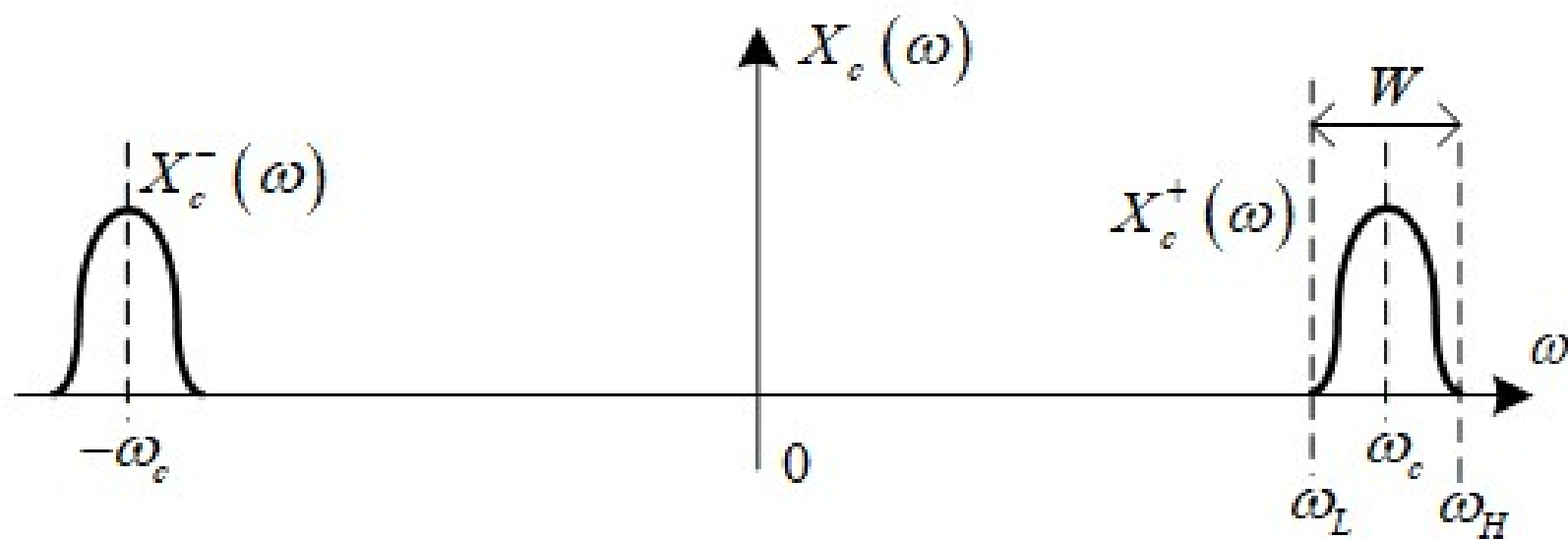


时域相当发生了什么？ 用sinc函数卷积！

$$x(t) = \frac{\omega_H}{\pi} \text{sinc}(\omega_H t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s) = \frac{\omega_H}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_s) \text{sinc}(\omega_H(t - kT_s))$$



# 帶通信号



# 带通信号的均匀抽样

对于带宽为  $W = 20MHz$  的低通信号，所需的抽样频率

$$f_s = 2f_H = 2 \times 20MHz$$

对于同样带宽的带通信号，若中心频率  $f_c = 6GHz$

若依据低通抽样定理，所需的抽样频率为

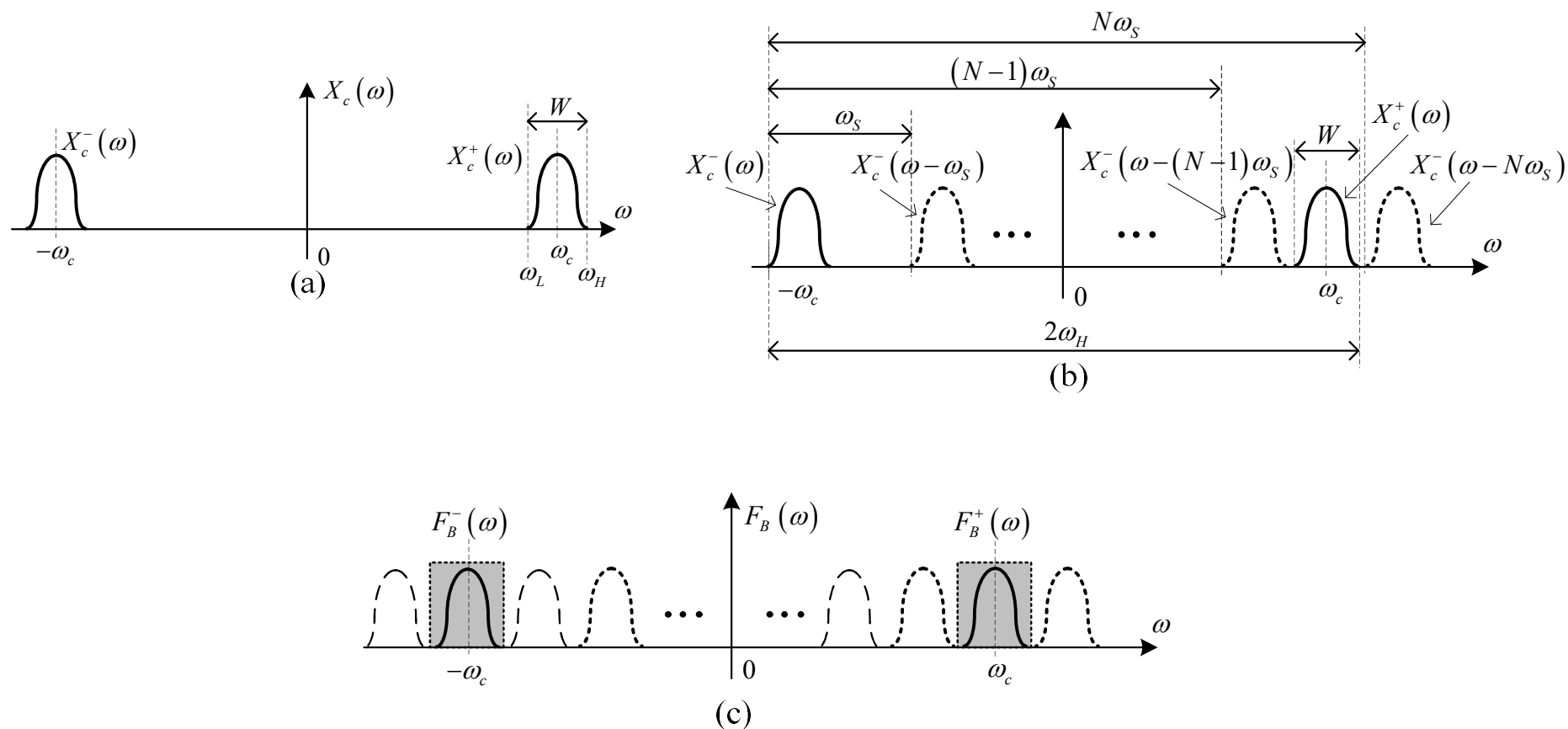
$$f_s = 2(f_c + W) = 2 \times 6.02GHz = 12.04GHz$$

- (1) 如此高抽样频率的器件价格昂贵；
- (2) 抽样所得的数据量巨大难以实时处理。

利用带通抽样定理，可大大降低对带通信号抽样所需的频率。



# 帶通信号的均匀抽样



# 带通信号的均匀抽样

对一个频带限定在 $\omega_L \leq \omega \leq \omega_H$ 内的窄带信号 $x_c(t)$ ，记 $W = \omega_H - \omega_L$ ， $N = \left\lfloor \frac{\omega_H}{W} \right\rfloor$ ， $M = \frac{\omega_H}{W} - N$ ，则如果以抽样频率

$$\omega_S = 2W \cdot \left(1 + \frac{M}{N}\right)$$

对 $x_c(t)$ 进行抽样，则由抽样所得序列 $x_{cs}(t)$ ，可无失真地恢复原来的信号 $x_c(t)$ 。

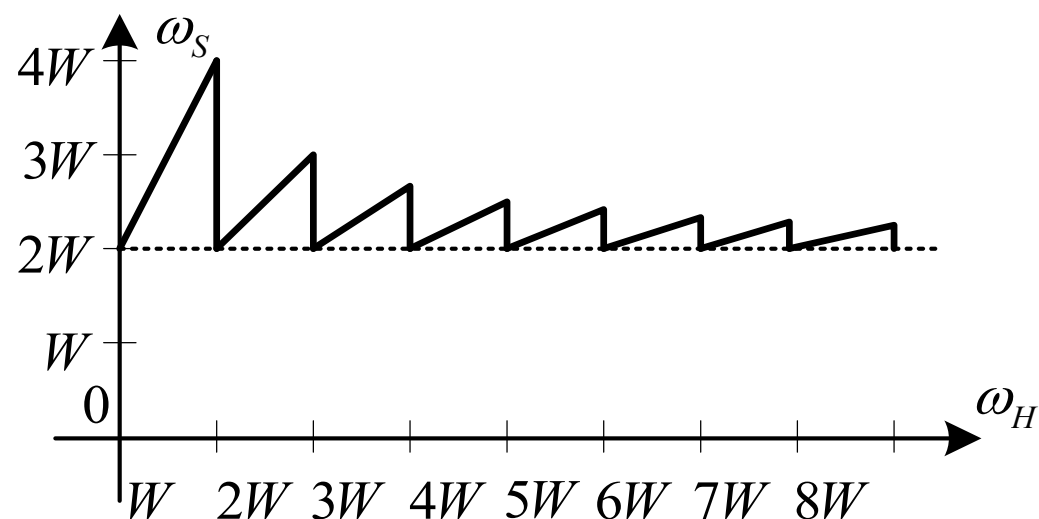
因为当抽样频率满足上式中的条件时，抽样信号不会发生混叠，因此由带通滤波器可无失真地恢复原来信号的频谱。

# 带通信号的抽样频率

$$\omega_S = 2W \cdot \left( 1 + \frac{\frac{\omega_H}{W} \left\lfloor \frac{\omega_H}{W} \right\rfloor}{\left\lfloor \frac{\omega_H}{W} \right\rfloor} \right) = 2W \cdot \left( 1 + \frac{\frac{\omega_H}{W} k}{k} \right)$$

$$k = \left\lfloor \frac{\omega_H}{W} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\omega_H}{\omega_H - \omega_L} \right\rfloor$$

$$k \rightarrow \infty, \quad \omega_S \rightarrow 2W$$



# 模拟信号的量化

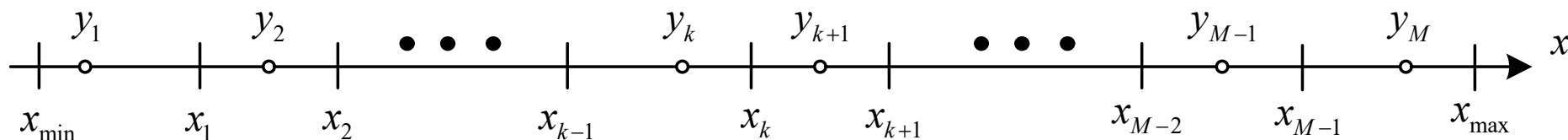
离散时间 = 离散时间

连续幅值  $\rightarrow$  离散幅值

# 三个简单问题

- 量化过程本身也是一种信号的“压缩过程”吗？
- 模拟信号的量化过程可逆吗？  
能像采样那样，从离散域完美重构回连续域吗？
- 模拟信号的量化和采样过程都是从连续域变成离散域吗？它们有区别吗？

# 标量量化



$$y_k = Q(x) \quad x_{k-1} \leq x < x_k, y_k \in [x_{k-1}, x_k), k = 1, 2, \dots, M$$

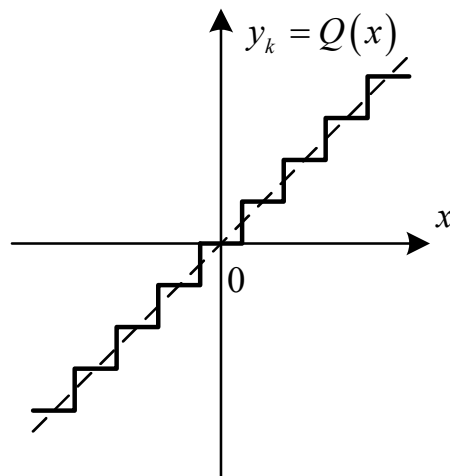
分层电平:  $x_k$ ; 量化电平:  $y_k$ ; 量化阶距:  $\Delta_k = x_k - x_{k-1}$   
量化区间:  $[x_{k-1}, x_k)$ ; 量化级数:  $M$  ( $M = 2^N$ )

均匀量化: 量化阶距为常数, 即  $\Delta_k = c$

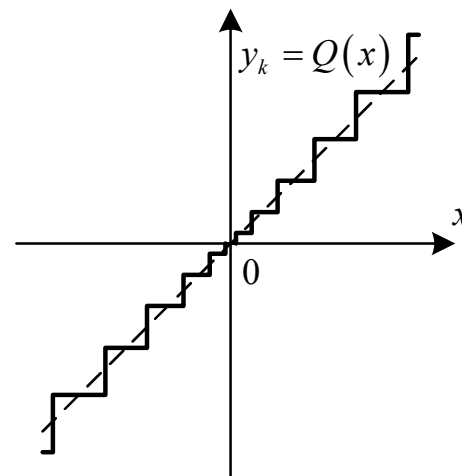
非均匀量化: 量化阶距因  $k$  而不同

# 均匀量化与非均匀量化

解释这  
两张图

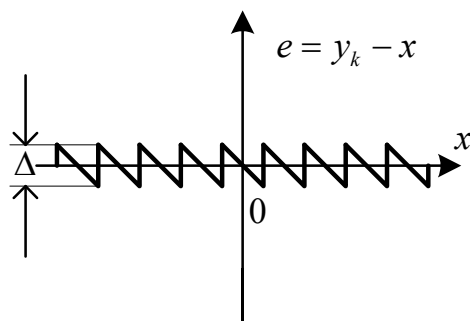


(a) 均匀量化

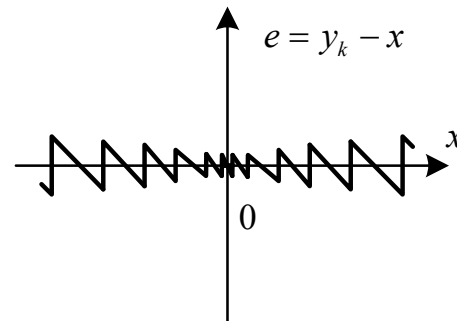


(b) 非均匀量化

画出  
 $e = y_k - x$



(c) 均匀量化的量化误差



(d) 非均匀量化的量化误差

# 量化误差与量化噪声

量化误差一般为随机变量，通常用量化噪声描述；

$$\begin{aligned}\sigma_q^2 &= E\left[(x - Q(x))^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - Q(x))^2 p_X(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p_X(x) dx\end{aligned}$$

$q$  for quantization



# 过载

设量化器的允许输入的模拟信号的动态范围为

若输入信号出现  $x(t) < x_{\min}$

或  $x(t) > x_{\max}$

则称量化器出现过载。

一般量化器规定  $Q(x) = y_1, x(t) < x_{\min}$

$Q(x) = y_M, x(t) > x_{\max}$

因此过载失真大小为  $e = x - y_1, x(t) < x_{\min}$

$e = x - y_M, x(t) > x_{\max}$

过载失真的统计平均值定义为过载量化噪声

$$\sigma_o^2 = \int_{-\infty}^{x_{\min}} (x - y_1)^2 p_X(x) dx + \int_{x_{\max}}^{+\infty} (x - y_M)^2 p_X(x) dx$$

o for overload

# 量化信噪比

量化信噪比定义为信号的平均功率与总的量化噪声的比值。

信号功率

$$S_x = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^2 p_X(x) dx$$

量化信噪比

$$SNR_q = \frac{S_x}{\sigma_Q^2} = \frac{S_x}{\sigma_q^2 + \sigma_o^2}$$

其中

$$\sigma_q^2 = \sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p_X(x) dx, \quad x \in [x_{\min}, x_{\max}]$$

$$\sigma_o^2 = \int_{-\infty}^{x_{\min}} (x - y_1)^2 p_X(x) dx + \int_{x_{\max}}^{+\infty} (x - y_M)^2 p_X(x) dx$$

# 讨论

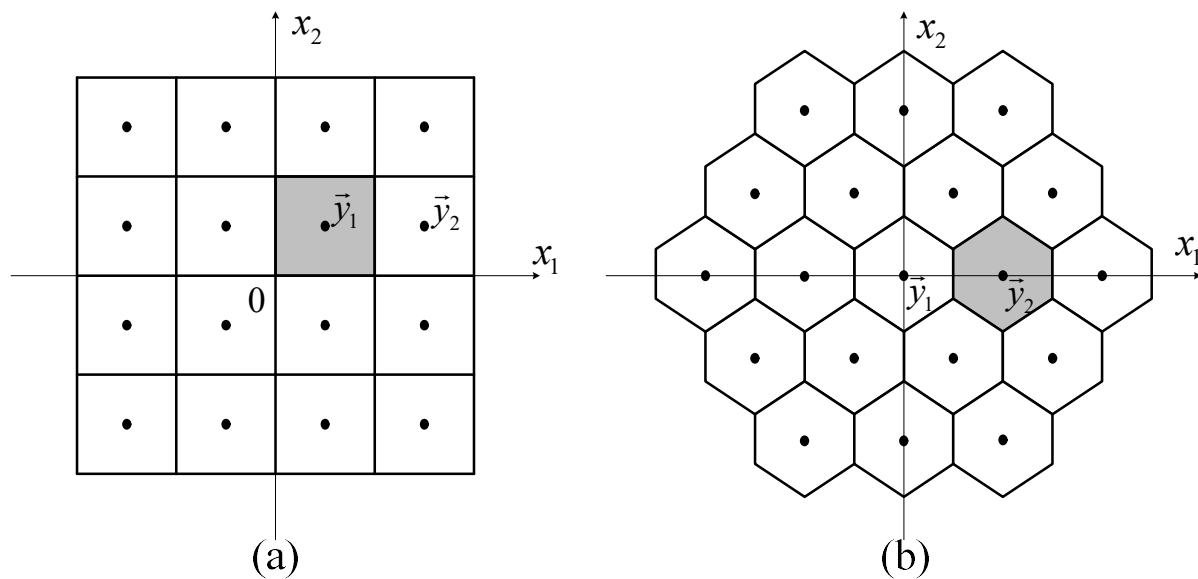
学习了标量量化的概念，你认为矢量量化应该是什么样的？

什么时候需要用到矢量量化？

# 矢量量化

将 $N$ 维空间区域分布的模拟信号矢量 $\vec{x} = (x_1 x_2 \dots x_N)$ 的抽样值映射为包含 $M$ 个元素的维 $N$ 矢量集中的某个元素的操作称之为**矢量量化**。

$$\vec{y}_k = Q(\vec{x}), \quad \vec{y}_k \in \{\vec{y}_i = (y_{i1} y_{i2} \dots y_{iN}); i = 1, 2, \dots, M\}$$



# 课后题

给出矢量量化的噪声计算公式？

# 均匀量化

$$\Delta_k = x_k - x_{k-1} = \Delta, \quad k = 1, 2, \dots, M$$

$$\sigma_q^2 = \sum_{k=1}^M \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 p_X(x) dx \approx \sum_{k=1}^M p_X(y_k) \int_{x_{k-1}}^{x_k} (x - y_k)^2 dx \approx \frac{\Delta^2}{12}$$

当量化电平数 $M$ 足够大时，可得量化噪声的大小仅与量化阶距有关。

$$SNR_{q,dB} = 10 \lg \frac{S_x}{\sigma_q^2} = 10 \lg 2^{2N} = 6.02N (dB)$$

每增加一位量化精度，量化信噪比有约 $6dB$ 的提升。

# 均匀量化

量化噪声的简化分析计算：

若近似地认为量化误差  $e$  在  $(-\Delta/2, \Delta/2)$  范围内服从均匀分布

即

$$p(e) = \begin{cases} 1/\Delta & -\Delta/2 \leq e \leq \Delta/2 \\ 0 & 0 \end{cases}$$

则量化噪声  $\sigma_q^2 = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 p(e) de = \int_{-\Delta/2}^{\Delta/2} e^2 \frac{1}{\Delta} de = \frac{\Delta^2}{12}$

均匀量化的优点：简单易于实现；

缺点：量化信噪比随信号的幅度减小而下降。

# 非均匀量化

目的：寻求获得最佳量化信噪比的方法。

主要研究如何改善对小信号量化时的信噪比。

因为在电路中实现非均匀的量化阶距较复杂，非均匀量化的一般操作方法：

(1) 首先对输入信号  $x$  作非线性变换

$$y = f(x)$$

(2) 进行易于实现的均匀量化

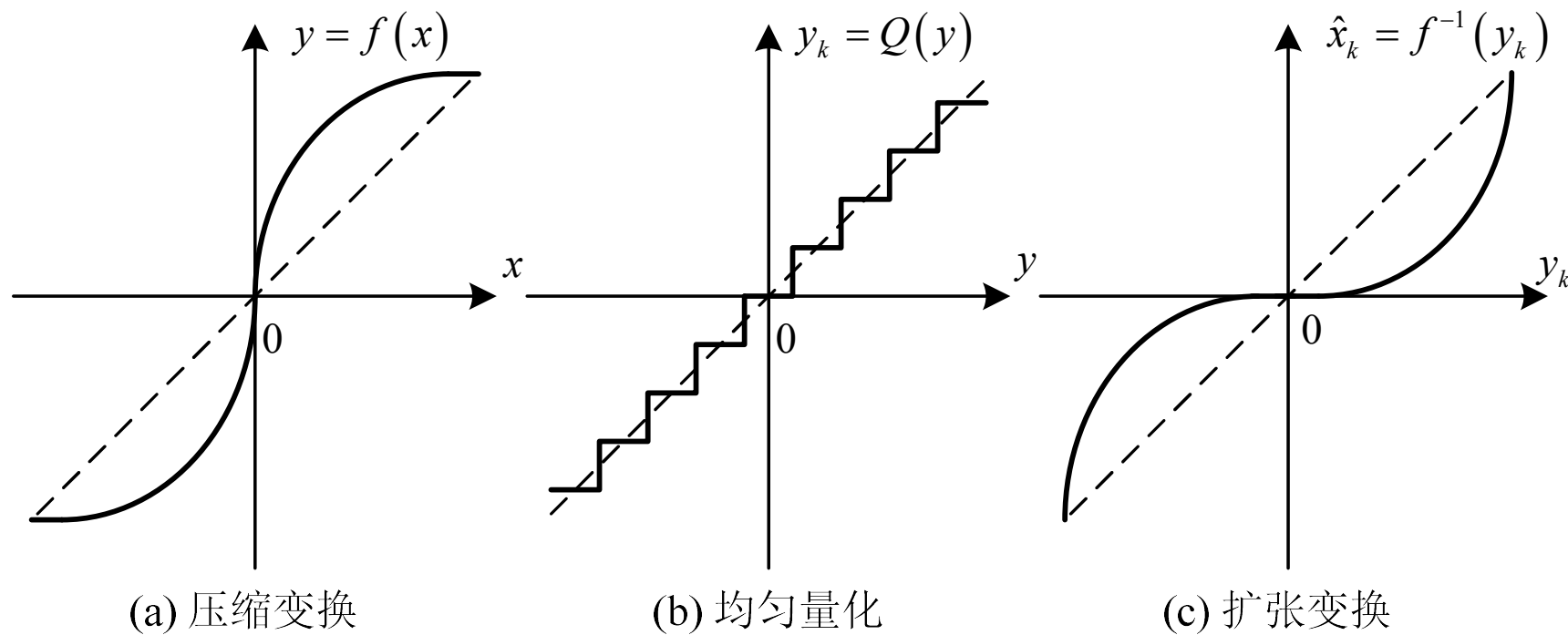
$$y_k = Q(y), \quad k = 1, 2, \dots, M$$

(3) 信号还原时，对信号进行非线性的反变换

$$\hat{x}_k = f^{-1}(y_k), \quad k = 1, 2, \dots, M$$



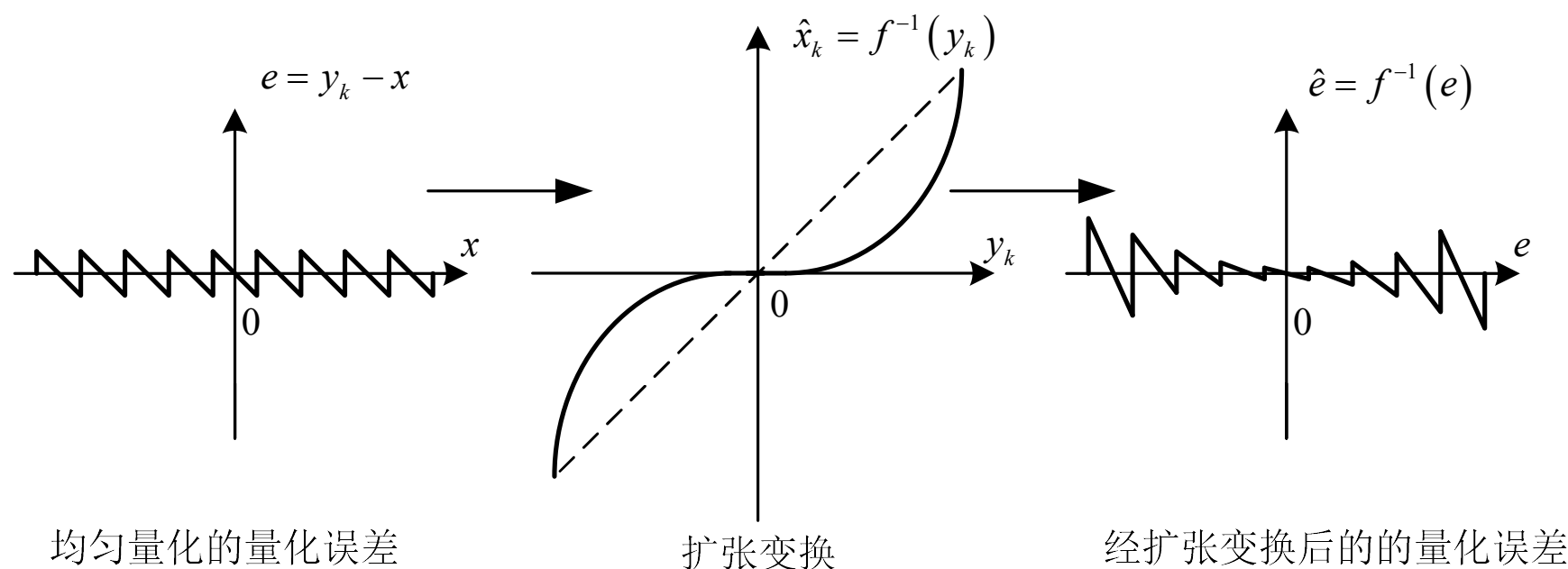
# 非均匀量化与信号的恢复过程



编码时做非线性的变换

解码时做反变换

# 非均匀量化抑制量化噪声的原理



信号经历变换与反变换，信号幅度不会受到影响。

量化噪声只经历反变换，在小信号区域的噪声受到抑制。

# 非均匀量化

- 经过函数压扩变换后的量化噪声功率

$$\sigma_q^2 = \frac{\Delta^2}{12} \int_{-V_p}^{+V_p} (f'(x))^{-2} p_X(x) dx$$

- 对应的量化信噪比

$$SNR_q = \frac{S_x}{\sigma_q^2} = \frac{\int_{-V_p}^{+V_p} x^2 p_X(x) dx}{\frac{\Delta^2}{12} \int_{-V_p}^{+V_p} (f'(x))^{-2} p_X(x) dx}$$

如何选取 $f$ ?

根据 $p_x$ ，选取 $f$ 来最大化SNR.

# 量化信号的编码

离散时间  $\rightarrow$  离散时间

离散幅值 = 二进制码

# 脉冲编码调制 (PCM)

# 常见PCM编码方式

电平序号	自然二进制码	格雷码	折叠码
	有什么优点？	有什么特点？	有什么缺点？
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 1 1
1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 1 0
2	0 0 1 0	0 0 1 1	0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0
4	0 1 0 0	0 1 1 0	0 0 1 1
5	0 1 0 1	0 1 1 1	0 0 1 0
6	0 1 1 0	0 1 0 1	0 0 0 1
7	0 1 1 1	0 1 0 0	0 0 0 0
8	1 0 0 0	1 1 0 0	1 0 0 0
9	1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 0 1
10	1 0 1 0	1 1 1 1	1 0 1 0
11	1 0 1 1	1 1 1 0	1 0 1 1
12	1 1 0 0	1 0 1 0	1 1 0 0
13	1 1 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1
14	1 1 1 0	1 0 0 1	1 1 1 0
15	1 1 1 1	1 0 0 0	1 1 1 1

# 常见PCM编码方式

电平序号	自然二进制码	格雷码	折叠码
	直观 可运算	相邻变化少 抗干扰	小的多 ‘1’ 适合小信号
0	0 0 0 0	0 0 0 0	0 1 1 1
1	0 0 0 1	0 0 0 1	0 1 1 0
2	0 0 1 0	0 0 1 1	0 1 0 1
3	0 0 1 1	0 0 1 0	0 1 0 0
4	0 1 0 0	0 1 1 0	0 0 1 1
5	0 1 0 1	0 1 1 1	0 0 1 0
6	0 1 1 0	0 1 0 1	0 0 0 1
7	0 1 1 1	0 1 0 0	0 0 0 0
8	1 0 0 0	1 1 0 0	1 0 0 0
9	1 0 0 1	1 1 0 1	1 0 0 1
10	1 0 1 0	1 1 1 1	1 0 1 0
11	1 0 1 1	1 1 1 0	1 0 1 1
12	1 1 0 0	1 0 1 0	1 1 0 0
13	1 1 0 1	1 0 1 1	1 1 0 1
14	1 1 1 0	1 0 0 1	1 1 1 0
15	1 1 1 1	1 0 0 0	1 1 1 1

# A律PCM编码

$$\begin{array}{ccc} M_1 & M_2 M_3 M_4 & M_5 M_6 M_7 M_8 \\ \text{极性码} & \text{段落码} & \text{段内码} \end{array}$$

极性码：信号电平为正，极性码取1；信号电平为负，极性码取0；

段落码：共包含8段(第1段可看作由两段组成)：000 ~ 111；

段内码：在每一段内按照4比特均匀量化：0000 ~ 1111。



# A律PCM编码

若在第1段内最小的量化阶距取为2，则各段的量化阶距、起始值和结束值分别为

	量化阶距	起始值	结束值	段落码
第1段	2	0	32	000
第1'段	2	32	64	001
第2段	4	64	128	010
第3段	8	128	256	011
第4段	16	256	512	100
第5段	32	512	1024	101
第6段	64	1024	2048	110
第7段	128	2048	4096	111

画出该表格的示意图

# A律PCM编码

编码的具体步骤:

- ① 根据信号极性确定极性码;
- ② 根据信号的取值确定信号值所对应的最小单位数;
- ③ 根据信号的取值范围确定段落码;
- ④ 根据段落起始值与信号的差值、量化阶距确定段内码。

# A律PCM编码

已知编码器的输入动态范围： $-V_p \leq x \leq V_p$ ， $V_p = 2V$

对输入信号值  $x = -0.74V$  进行编码。

解：(1) 因为输入信号值为负，所以  $M_1 = 0$ ；

(2) 因为最大输入电平对应4096个单位，由

$$y_n = \frac{|x|}{V_p} \times 4096 = \frac{|-0.74|}{2} \times 4096 = 1515.52$$

(3) 因为  $1024 \leq 1515.52 \leq 2048$ ，由表中段的起始值可知应处在第6段，因此段落码  $M_2 M_3 M_4 = 110$

# A律PCM编码

(4) 因为

$$m = \left\lfloor \frac{y_n - V_k}{\Delta_k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{y_n - V_6}{\Delta_6} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1515.52 - 1024}{64} \right\rfloor = \lfloor 7.68 \rfloor = 7$$

所以段内码

$$m = 7 \leftrightarrow M_5 M_6 M_7 M_8 = 0111$$

综上编码输出为

$$M_1 M_2 M_3 M_4 M_5 M_6 M_7 M_8 = 0 \ 110 \ 0111$$

# A律PCM译码

已知接收的码组为： $M_1M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8 = 0\ 110\ 0111$

(1) 因为  $M_1 = 0$ ，信号输出应取负值；

(2) 由  $M_2M_3M_4 = 110$ ，信号取值在第6段，起始值为1024；

(3) 由  $M_5M_6M_7M_8 = 0111$ 可知段内取值为 $m = 7$

$$\begin{aligned} (4) (5) \quad \hat{x} &= (\pm 1) \frac{1}{4096} \left( V_k + m\Delta_k + \frac{\Delta_k}{2} \right) \cdot V_p \\ &= (-1) \frac{1}{4096} \left( 1024 + 7 \times 64 + \frac{64}{2} \right) \times 2 = -0.734375 \end{aligned}$$

经编译码后的信号误差： $e = x - \hat{x} = -0.74 - (-0.734375) = -0.005625$

误差的相对值：

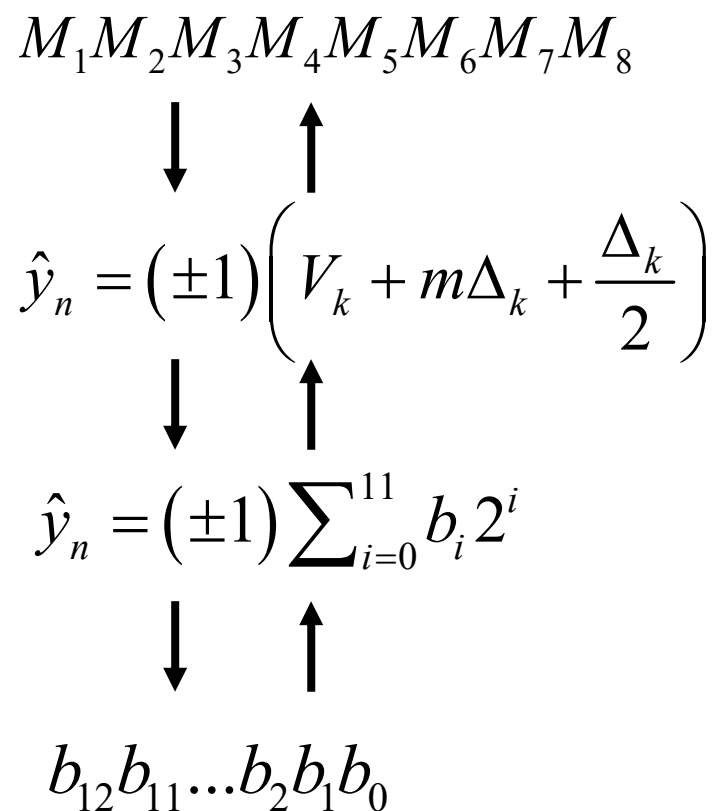
$$\left| \frac{e}{x} \right| \times 100\% = \left| \frac{-0.005625}{-0.74} \right| \approx 0.76\%$$

# $\mu$ 律PCM编码

什么是 $\mu$ 律PCM编码？

# 对数PCM与线性PCM

- 两个A律PCM编码的结果怎么运算？

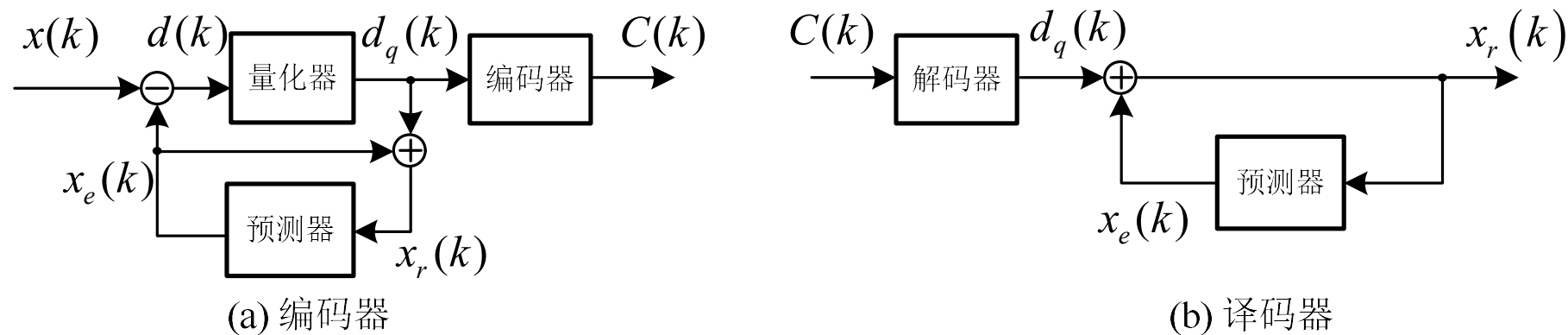


# 对数PCM与线性PCM

信号幅度部分取值范围 <sup>①</sup>	$b_{11}b_{10}b_9b_8b_7b_6b_5b_4b_3b_2b_1b_0$ <sup>②</sup>	$M_2M_3M_4M_5M_6M_7M_8$ <sup>③</sup>
$0000 \leq  x  < 0032$ <sup>④</sup>	0 0 0 0 0 0 0 W X Y Z 1 <sup>⑤</sup>	0 0 0 W X Y Z <sup>⑥</sup>
$0032 \leq  x  < 0064$ <sup>④</sup>	0 0 0 0 0 0 1 W X Y Z 1 <sup>⑤</sup>	0 0 1 W X Y Z <sup>⑥</sup>
$0064 \leq  x  < 0128$ <sup>④</sup>	0 0 0 0 0 1 W X Y Z 1 * <sup>⑤</sup>	0 1 0 W X Y Z <sup>⑥</sup>
$0128 \leq  x  < 0256$ <sup>④</sup>	0 0 0 0 1 W X Y Z 1 * * <sup>⑤</sup>	0 1 1 W X Y Z <sup>⑥</sup>
$0256 \leq  x  < 0512$ <sup>④</sup>	0 0 0 1 W X Y Z 1 * * * <sup>⑤</sup>	1 0 0 W X Y Z <sup>⑥</sup>
$0512 \leq  x  < 1024$ <sup>④</sup>	0 0 1 W X Y Z 1 * * * * <sup>⑤</sup>	1 0 1 W X Y Z <sup>⑥</sup>
$1024 \leq  x  < 2048$ <sup>④</sup>	0 1 W X Y Z 1 * * * * * <sup>⑤</sup>	1 1 0 W X Y Z <sup>⑥</sup>
$2048 \leq  x  < 4096$ <sup>④</sup>	1 W X Y Z 1 * * * * * * <sup>⑤</sup>	1 1 1 W X Y Z <sup>⑥</sup>



# 差分脉冲编码调制 (DPCM)



DPCM并不对输入信号  $x(k)$  直接进行编码，而是对输入信号与其预测值  $x_e(k)$  的差值进行编码，差值

$$d(k) = x(k) - x_e(k)$$

其中预测值为  $x_e(k) = f[x_r(k-1), x_r(k-2), \dots, x_r(k-N)]$

$x_r(l)$  称为重建值。

本质上，DPCM是一种压缩编码方法。

# 总结

模拟信号的数字编码：

模拟信号→二进制数字码组

三个步骤：

**[抽样]** 连续时间、连续幅值→时间离散、连续幅度

**[量化]** 时间离散、连续幅值→时间离散、幅值离散

**[编码]** 时间离散、幅值离散→特定的二进制码组

*End*