第四章　线性方程组

第一节 高斯消元法

解集合： *解的全体*

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{cases}
$$

解方程组： *求出解集合*

同解

两个方程组有相同解集合

相容的方程组

存在解集合的方程组

否则

不相容的方程组

$$\boldsymbol{AX = B}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

系数矩阵

未知量矩阵

常数项矩阵

方程组的增广矩阵

$$\tilde{A} = (\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B}) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

方程组 $Ax=B$ 与下面的增广矩阵存在一一对应关系：

$$\tilde{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

这是线性代数中最基本的也是最重要的一次抽象，世界上所有的方程组 与所有的矩阵（增广矩阵）之间存在一一对应的关系，从此，对方程组 的研究彻底的转化为对矩阵的研究。

定义：方程组的初等变换

（1）　互换两个方程的位置

（2）　用一个非零数乘某个方程的两边

（3）　将一个方程的两边同乘以某常数加到另一个方程

启发:

方程组实施初等变换 ⟷ 增广矩阵进行初等行变换

定理:对线性方程组施行初等变换后,新方程组与原方程组同解

高斯消元法

也称为高斯一约当消去法

例：解三元线性方程组$\begin{cases} 3x_1+13x_2-6x_3=4 \\ x_1+2x_2+4x_3=1 \\ -x_1-x_2-7x_3=0 \end{cases}$

解：写出方程组增广矩阵

$$\tilde{A}=(A\,|\,B)=\begin{pmatrix} 3 & 13 & -6 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 13 & -6 & 4 \\ -1 & -1 & -7 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1+13x_2-6x_3=4 \\ x_1+2x_2+4x_3=1 \\ -x_1-x_2-7x_3=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=1 \\ 3x_1+13x_2-6x_3=4 \\ -x_1-x_2-7x_3=0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & -18 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{18}{7} & \dfrac{1}{7} \\ 0 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\dfrac{18}{7} & \dfrac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\dfrac{3}{7} & \dfrac{6}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3+r_1]{r_2-3r_1}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=1 \\ 7x_2-18x_3=1 \\ x_2-3x_3=1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{7}r_2}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=1 \\ x_2-\dfrac{18}{7}x_3=\dfrac{1}{7} \\ x_2-3x_3=1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=1 \\ x_2-\dfrac{18}{7}x_3=\dfrac{1}{7}. \\ -\dfrac{3}{7}x_3=\dfrac{6}{7} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{18}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{7} & \frac{6}{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 - r_2} \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_2 - \frac{18}{7}x_3 = \frac{1}{7}. \\ -\frac{3}{7}x_3 = \frac{6}{7} \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 19 \\ 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

即同解方程组为

$$\begin{cases} x_1 = 19 \\ x_2 = -5 \\ x_3 = -2 \end{cases}$$

例：解线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

解： $$\tilde{A} = (A \mid B) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_1+2r_2]{r_3+r_2+r_1} \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

因此，原方程组无解.

例：解下列齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 = 0 \\ 5x_1 + 10x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

解：$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 5 & 10 & 1 & -5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

还原为同解方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \qquad - x_4 = 0 \\ \qquad\qquad x_3 \qquad = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases},$

因此，原方程组有无穷多解.

高斯消元法实质:

增广矩阵 $\xrightarrow{\text{初等行变换}}$ 阶梯型矩阵

设 $rank(A)=r$,

$$\tilde{A}=(A|B)\rightarrow \cdots\cdots \rightarrow \left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} & d_r \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right)$$

阶梯型矩阵中可能有全为零的行，对应的均为多余的方程

定理1.2

方程组有解

$$\Leftrightarrow d_{r+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow rank(\boldsymbol{A}) = rank(\tilde{\boldsymbol{A}}) = r$$

$$rank(A) = rank(\tilde{A}) = r < n$$

矩阵对应方程组

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{1n}x_n \\ x_2 = d_2 - c_{2r+1}x_{r+1} - \cdots - c_{2n}x_n \\ \quad \vdots \\ x_r = d_r - c_{rr+1}x_{r+1} - \cdots - c_{rn}x_n \end{cases}$$

其中$x_{r+1},\cdots,x_n$为自由未知量

通解为

$$\begin{cases} x_1 = d_1 - c_{1r+1}t_1 - \cdots - c_{1n}t_{n-r} \\ x_2 = d_2 - c_{2r+1}t_1 - \cdots - c_{2n}t_{n-r} \\ \vdots \\ x_r = d_r - c_{rr+1}t_1 - \cdots - c_{rn}t_{n-r} \\ x_{r+1} = t_1 \\ \vdots \\ x_n = t_{n-r} \end{cases}$$

其中$t_1,\cdots,t_{n-r}$为任意常数

r=n时，方程有唯一解

$$\begin{cases} x_1 = d_1 \\ x_2 = d_2 \\ \vdots \\ x_n = d_n \end{cases}$$

线性方程组解的情形

定理

有解

无穷多解

唯一解

$$rank(A) = rank(\tilde{A})$$

<n

=n

线性方程组解的情形

定理

无解

$$rank(A) < rank(\tilde{A})$$

即 $d_{r+1} \neq 0$

齐次线性方程组解的情形（b=0）

$$\begin{cases}(1)\ \text{齐次线性方程组只有零解} \Leftrightarrow R(A)=n; \\ (2)\ \text{齐次线性方程组有非零解} \Leftrightarrow R(A)<n.\end{cases}$$

推论1： 当A为n阶方阵时，齐次线性方程组只有零解当且仅当det(A)不为零；有非零解当且仅当det(A)等于零。

推论2： 当A的行数小于列数(即方程组中方程的个数小于未知数的个数)时，齐次线性方程组一定有非零解。

从上面介绍的消元法我们知道，消元法实质上是利用一系列方程组的初等变换将其变成同解的阶梯型方程组.

我们指出，对方程组实行初等变换相应于对其增广矩阵实行矩阵的初等行变换. 因此消元法也可看作是对其增广矩阵实行一系列初等行变换化为阶梯型矩阵的过程.

作业　　习题四 P122

1(1),

25(2)

例

$$\begin{cases}(1+\lambda)x_1+x_2+x_3=0\\ x_1+(1+\lambda)x_2+x_3=3\\ x_1+x_2+(1+\lambda)x_3=\lambda\end{cases}$$

问λ取何值时,此方程组

(1)有唯一解;

(2)无解;

(3)有无穷多解,求其通解

解法1 由本题的特点:方程组中方程的个数与未知量个数一样,可想到先求系数行列式,利用克莱姆法则

$$令D=\begin{vmatrix}1+\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=(3+\lambda)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1+\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1+\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3+\lambda)=0$$

$$\lambda=0或\lambda=-3$$

当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq -3$时, $D\neq 0$,

由克莱姆法则知有唯一解.

$$\lambda = 0,\text{方程组变为}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3\text{矛盾} \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda = -3\text{方程组变为}\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(不含参变量)解之即可.

$$\begin{cases} (1+\lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + (1+\lambda)x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 + (1+\lambda)x_3 = \lambda \end{cases}$$

问λ取何值时，此方程组 (1)有唯一解；(2)无解；(3)有无穷多解，求其通解

解法2

$$\text{增广矩阵}(A,b) = \begin{pmatrix} 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_3-(1+\lambda)r_1]{r_2-r_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & -\lambda & -\lambda(2+\lambda) & -\lambda(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3-r_2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1+\lambda & \lambda \\ 0 & \lambda & -\lambda & 3-\lambda \\ 0 & 0 & -\lambda(3+\lambda) & (1-\lambda)(3+\lambda)\end{pmatrix}$$

若$-\lambda(3+\lambda)=0$得$\lambda=0$或$\lambda=-3$

若$(1-\lambda)(3+\lambda)=0$得$\lambda=1$或$\lambda=-3$

讨论:

$(1)\lambda\neq0$且$\lambda\neq$-3时,$r(A)=r(A,b)=3$,唯一解.

$(2)\lambda=0,r(A)=1,r(A,b)=2$,无解.

$(3)\lambda=-3,r(A)=r(A,b)=2$,无穷多解.

$$(A,b)=\begin{pmatrix}1&1&-2&-3\\0&-3&3&6\\0&0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-1\\0&1&-1&-2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

最后的阶梯型矩阵对应的线性方程组为

$$\begin{cases}x_1-x_3=-1\\x_2-x_3=-2\end{cases}$$

其通解为 $\begin{cases}x_1=-1+t\\x_2=-2+t,\text{其中t为任意实数。}\\x_3=t\end{cases}$