第三节　曲面及其方程

第四节　二次曲面

一、曲面方程的概念

二、旋转曲面

三、柱面

四、二次曲面

五、二次方程的化简

一、曲面方程的概念

引例　求到两定点A(1,2,3) 和B(2,-1,4)等距离的点的轨迹方程.

解　设轨迹上的动点为 $M(x,y,z)$,

则 $|AM|=|BM|$,　即

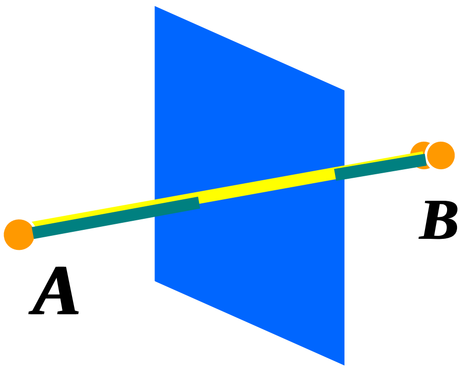
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得　$2x-6y+2z-7=0$

轨迹方程　$2x-6y+2z-7=0$

说明：动点轨迹为线段 **AB** 的垂直平分面.



显然在此平面上的点的坐标都满足此方程,

不在此平面上的点的坐标不满足此方程.

定义1.

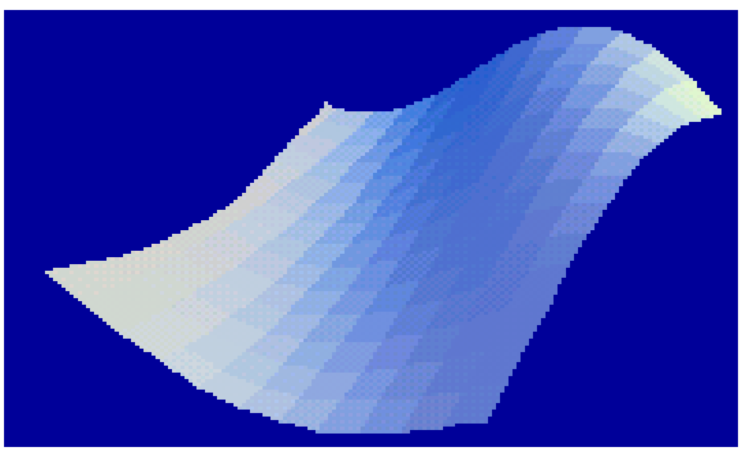
如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

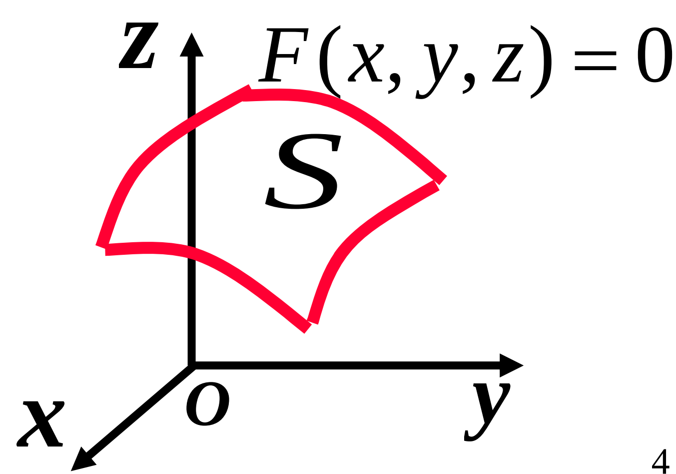
(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做曲面 S 的方程,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形.





曲面研究的两个基本问题 ：

(1) 已知一曲面作为点的几何轨迹时**,**

求曲面方程**.**

(2) 已知方程时，研究它所表示的几何形状

(必要时需作图 **).**

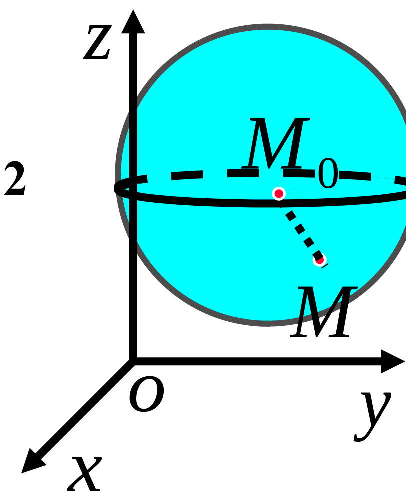
例1 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

解 设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$

故所求方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$$



特别, 当M_0在原点时, 球面方程为

$$x^2+y^2+z^2 = R^2$$

$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面 .

例2 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$

表示怎样的曲面.

解 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

此方程表示: 球心为 $M_0(1,-2,0)$,

半径为 $\sqrt{5}$ 的球面.

一般地如下形式的三元二次方程 ($A\neq 0$)

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

都可通过配方研究它的图形. 其图形可能是

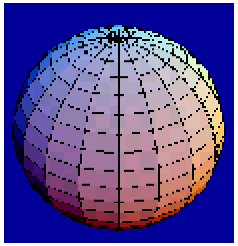
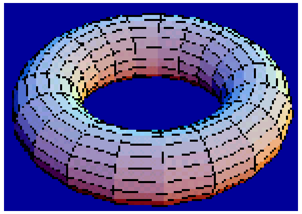
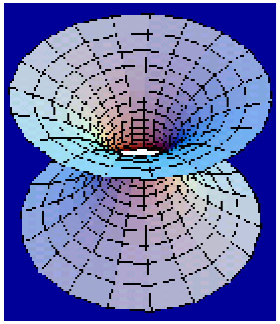
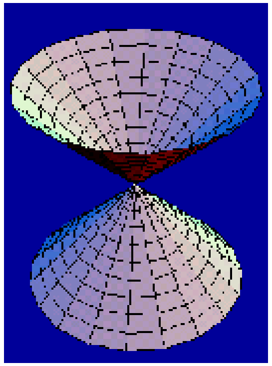
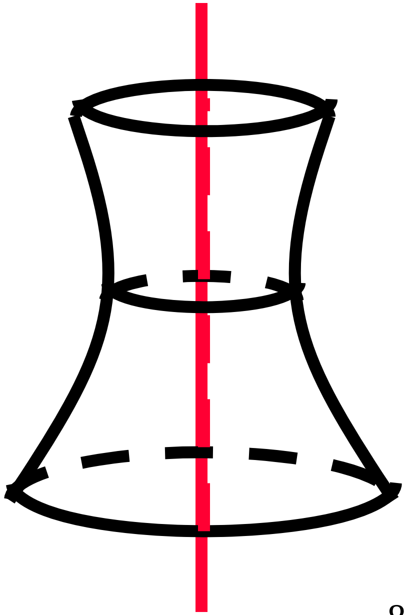
一个球面, 或点, 或虚轨迹.

二、旋转曲面

定义2 一条平面曲线 绕其平面上一条定直线旋转一周所形成的曲面叫做旋转曲面.

该定直线称为旋转轴 .

例如：

建立*yoz*面上曲线*C*绕*z*轴旋转所成曲面的方程:

给定 *yoz* 面上曲线 C: $f(y,z)=0$

在曲面上任取一点 $M(x,y,z)$,

当绕 z 轴旋转时，该点转到

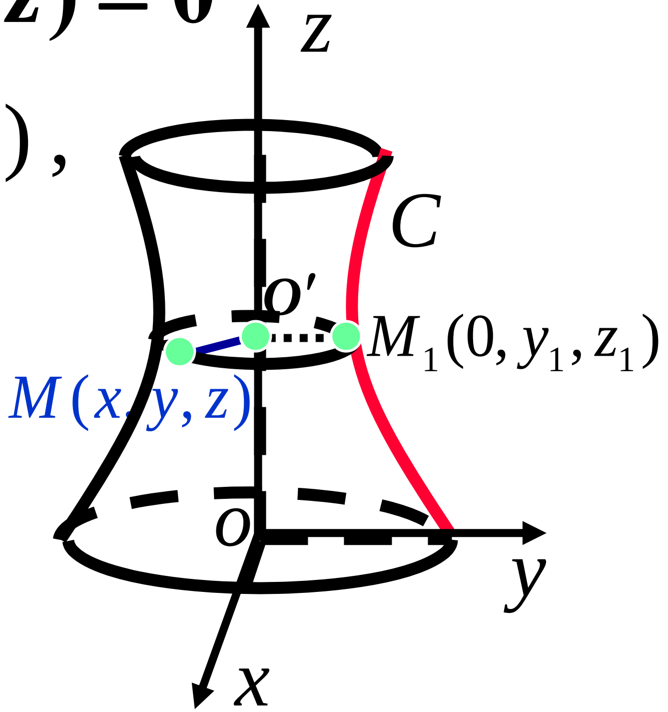
$M_1(0,y_1,z_1)\in C$,

此时有 $f(y_1,z_1)=0$

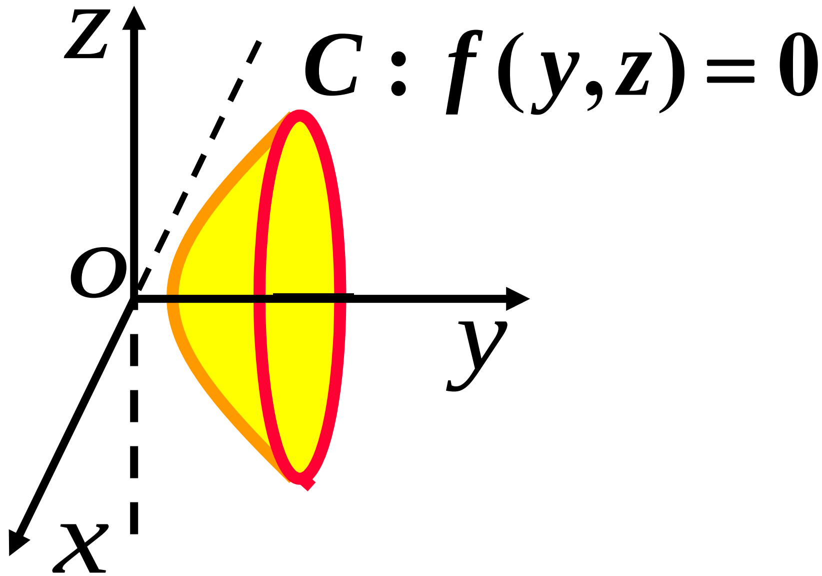
又 $\because |O'M|=|O'M_1|=|y_1|$

则有 $\sqrt{x^2+y^2}=|y_1|, z=z_1$,

故旋转曲面方程为 $f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$



思考：当曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何？



$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

例3 试建立顶点在原点, 旋转轴为z 轴, 半顶角为α 的圆锥面方程.

解 在yoz面上直线L 的方程为

$$z = y\cot\alpha$$

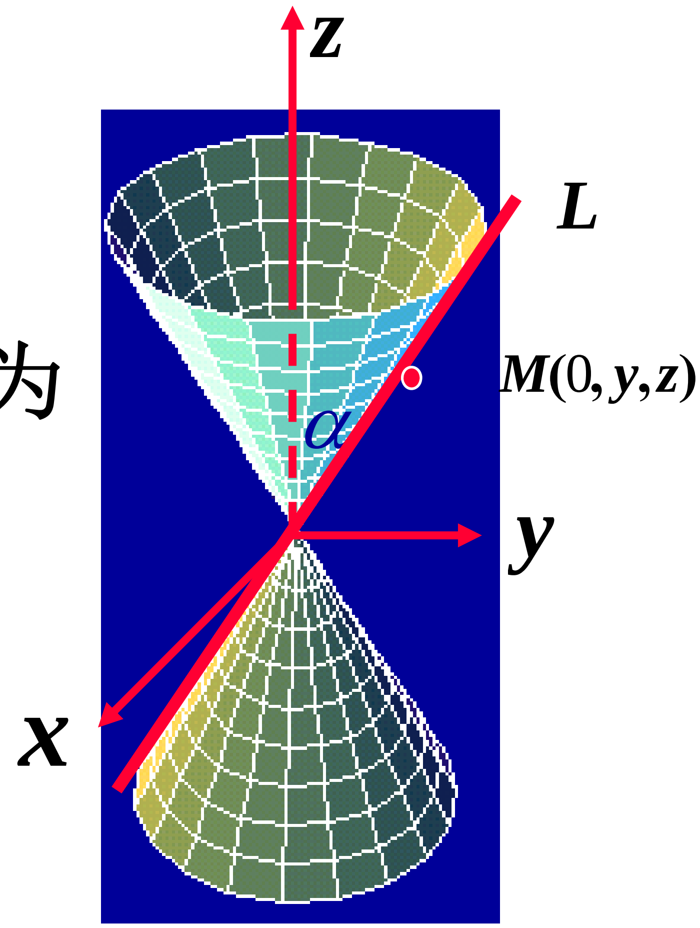
绕z 轴旋转时, 圆锥面的方程为

$$z = \pm\sqrt{x^2+y^2}\cot\alpha$$

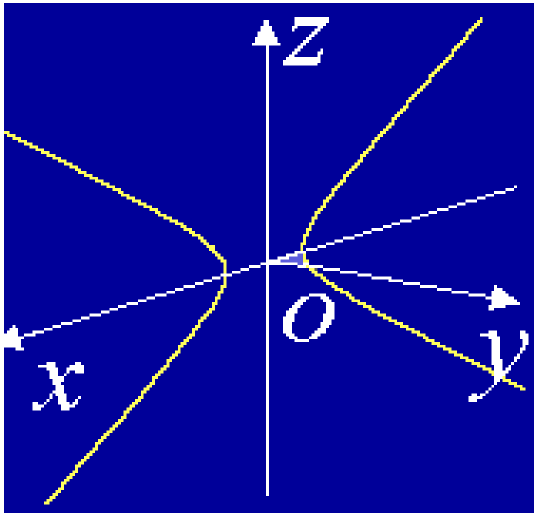
令 $a = \cot\alpha$

两边平方

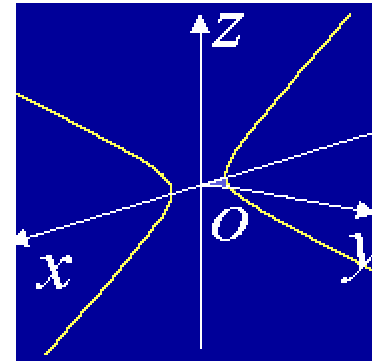
$$z^2 = a^2(x^2+y^2)$$



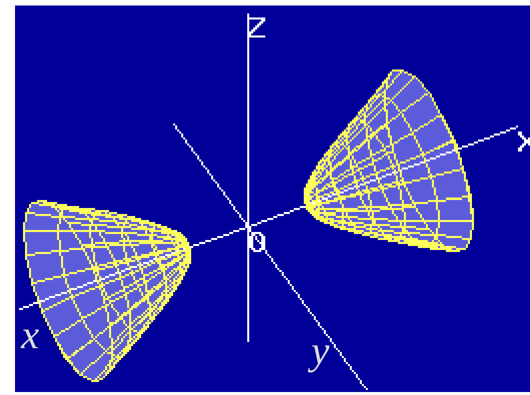
例4. 求坐标面 *xoz* 上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 *x*轴和 *z* 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.



解:绕 x 轴旋转所成曲面方程为



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$



绕 z 轴旋转所成曲面方程为

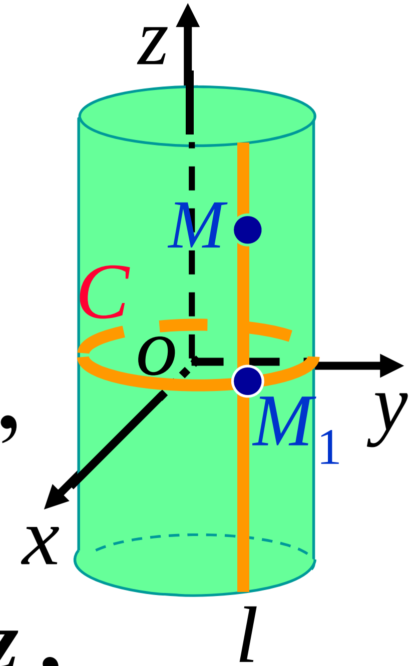
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \rightarrow \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

z

这两种曲面都叫做旋转双曲面.

三、柱面

引例. 分析方程 $x^2+y^2=R^2$ 表示怎样的曲面 .



解: 在 xoy 面上, $x^2+y^2=R^2$ 表示圆 C,

在圆 C 上任取一点 $M_1(x,y,0)$,

过此点作平行 z 轴的直线 l, 对任意 z ,

点 $M(x,y,z)$ 的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

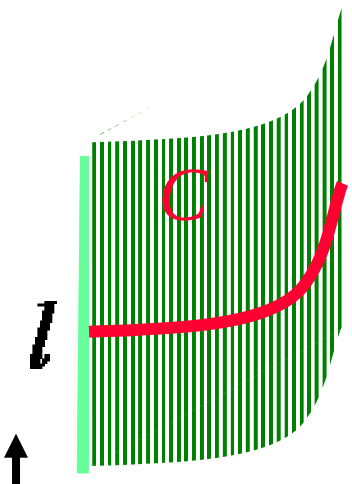
沿曲线 C 平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面

称为圆柱面. 其上所有点的坐标都满足此方程,

故在空间 $x^2+y^2=R^2$ 表示圆柱面.

定义3. 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的轨迹叫做柱面.

C 叫做准线，l 叫做母线.

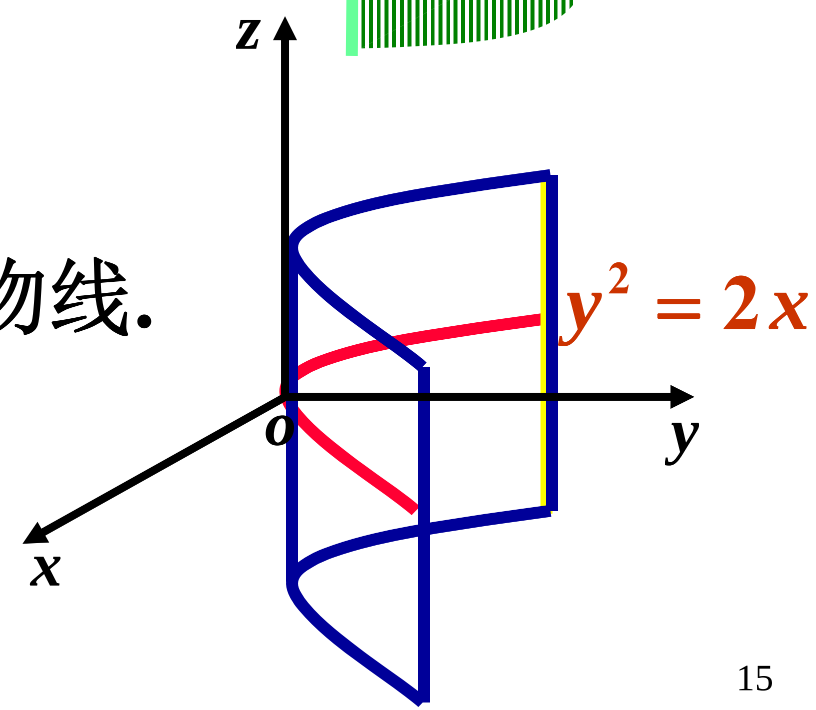


- $y^2 = 2x$

  表示抛物柱面，

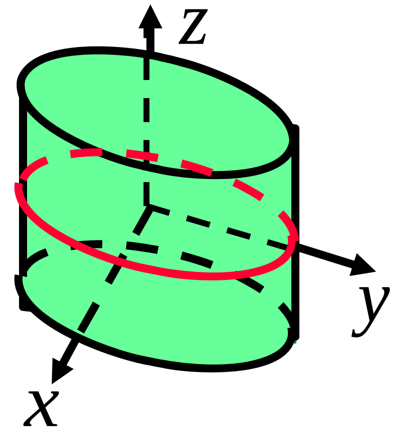
  准线l为xoy 面上的抛物线.

  母线平行于 z 轴;



- $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

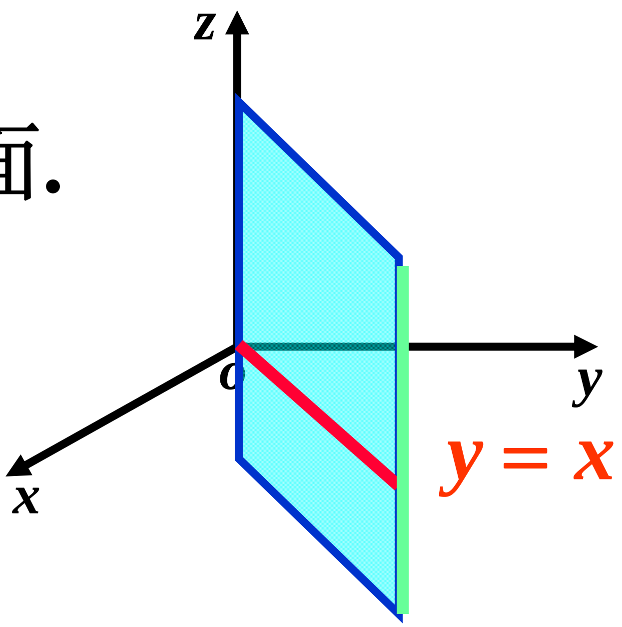
表示母线平行于z 轴的椭圆柱面.



- $$x-y=0$$

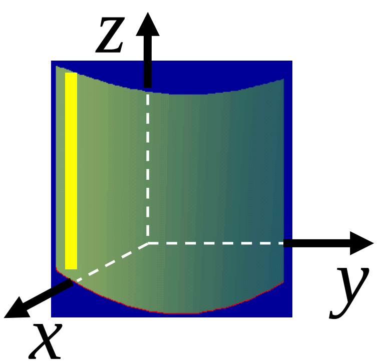
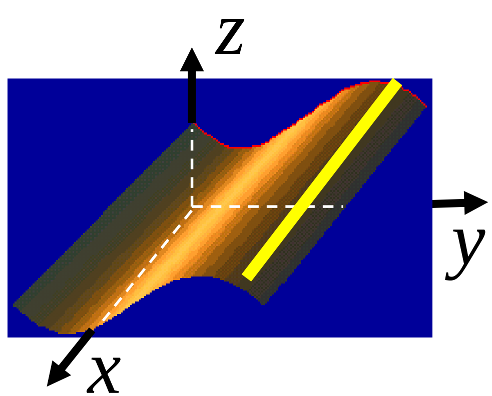
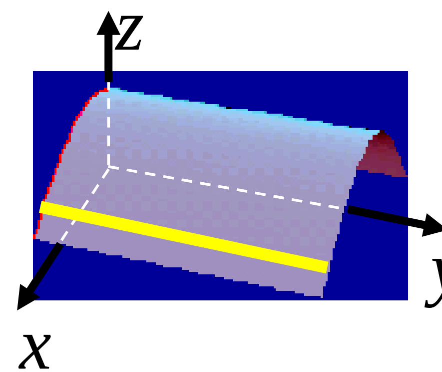
表示母线平行于z 轴的平面.

(且 z 轴在平面上)



-

一般地,在三维空间二元方程表示柱面.

方程	$F(x,y)=0$	$G(y,z)=0$	$H(z,x)=0$
母线	平行于z 轴	x 轴	y 轴
准线	在xoy 面	yoz 面	yoz 面
图形			

四、二次曲面

三元二次方程

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyx + Fzx$$
$$+Gx + Hy + Iz + J = 0$$

(二次项系数不全为 0)

的图形通常为二次曲面. 其基本类型有:

椭球面、抛物面、双曲面、锥面

适当选取直角坐标系可得它们的标准方程,

下面仅就几种常见标准型的特点进行介绍 .

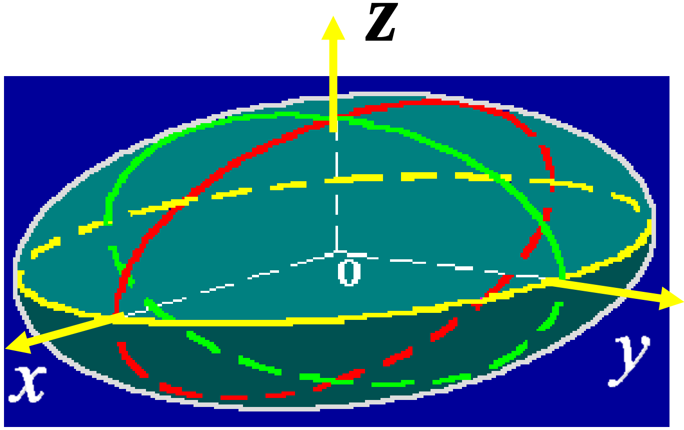
研究二次曲面特性的基本方法: 截痕法

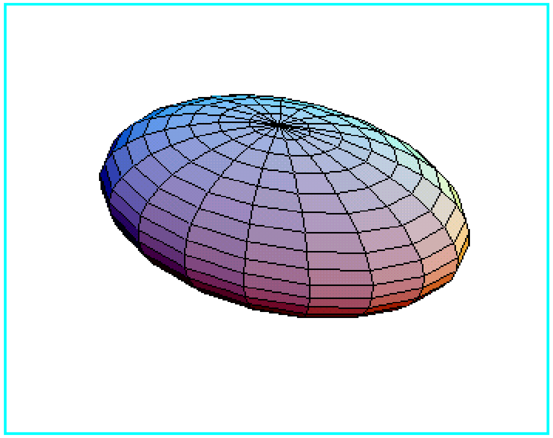
1. 椭球面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(1) 范围：

$$|x|\le a,\quad |y|\le b,\quad |z|\le c$$



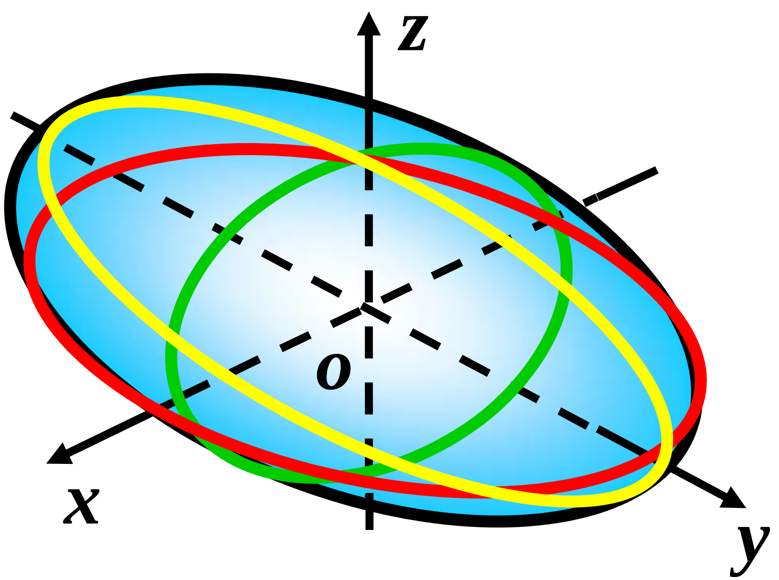


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

(2) 与坐标面的交线：椭圆

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1 \\ z=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ x=0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1 \\ y=0 \end{cases}$$



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a,b,c\text{为正数})$$

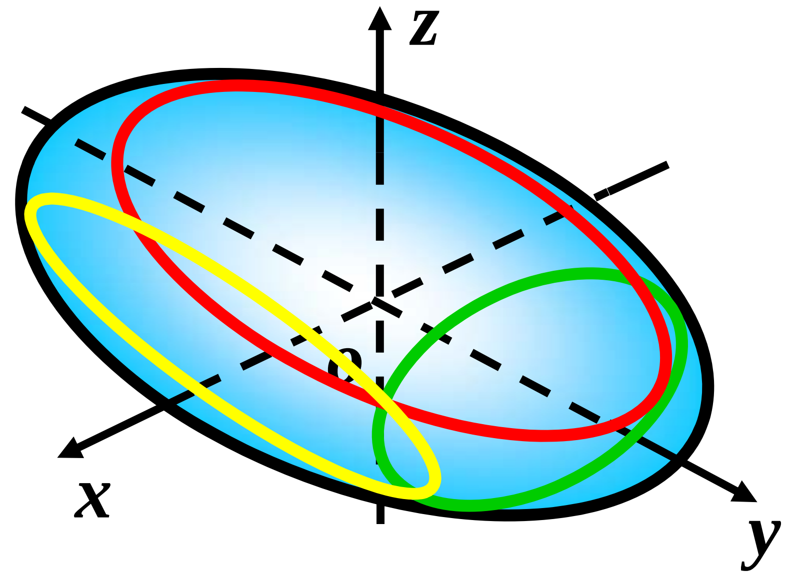
(3) 截痕：与 $z=z_1\ (|z_1|<c)$ 的交线为椭圆：

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\frac{a^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}+\dfrac{y^2}{\frac{b^2}{c^2}(c^2-z_1^2)}=1 \\ z=z_1 \end{cases}$$

同样 $y=y_1\ (|y_1|\le b)$ 及

$x=x_1\ (|x_1|\le a)$

的截痕也为椭圆.



(4) 当 $a=b$ 时为旋转椭球面;

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{或} \quad \frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

由看作椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 绕 z 轴旋转而成.

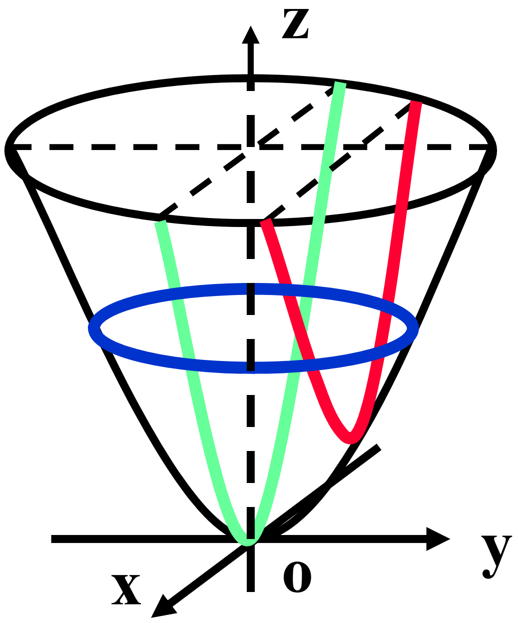
当 $a=b=c$ 时为球面:

$$x^2+y^2+z^2=a^2.$$

2. 抛物面

(1) 椭圆抛物面

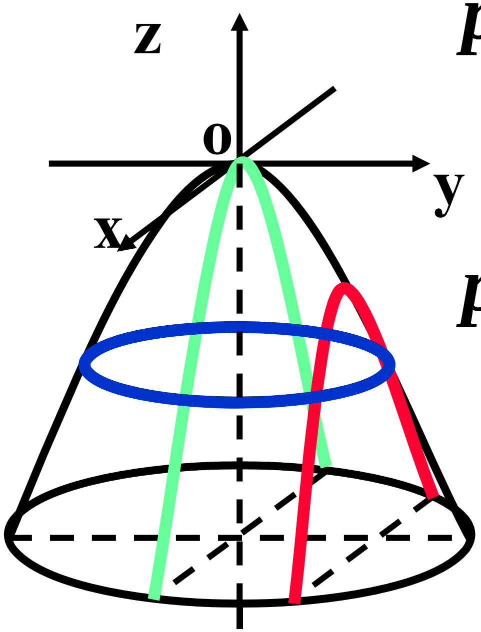
$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \qquad (p, q \text{ 同号})$$



$p>0, \quad q>0$

特别, 当 $p=q$ 时为绕 z 轴的旋转抛物面.

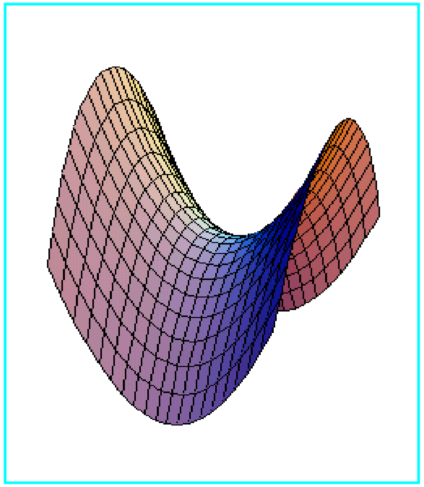
$$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2p}=z$$

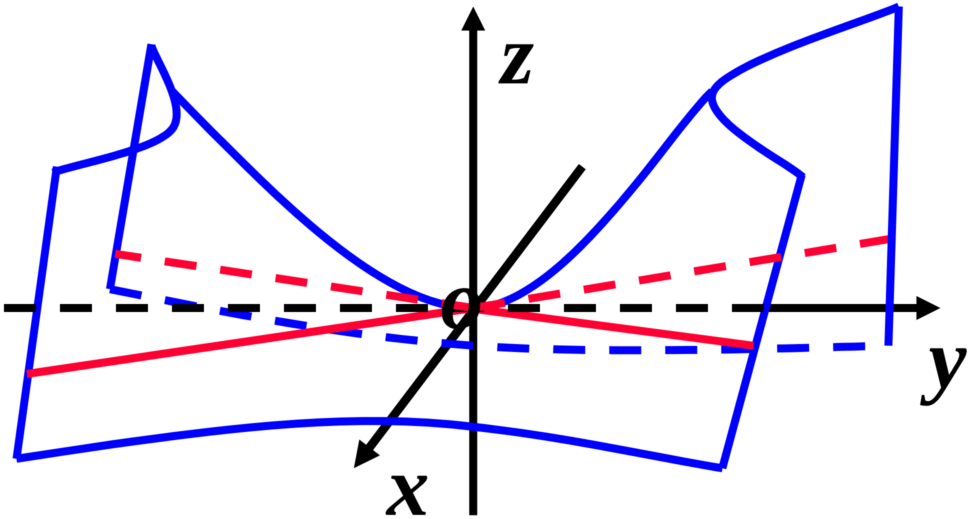


$p<0, \quad q<0$

(2) 双曲抛物面（鞍形曲面）

$$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z \quad (p\,,q\text{ 同号})$$

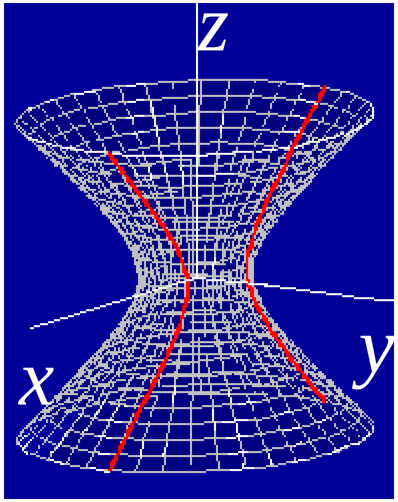


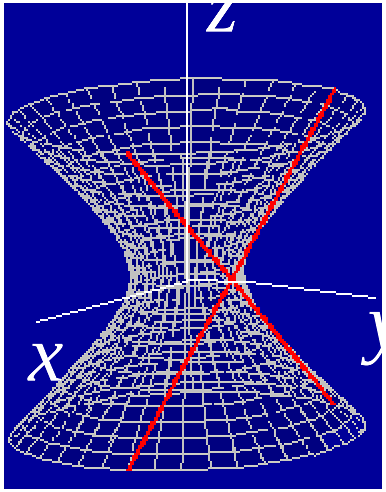


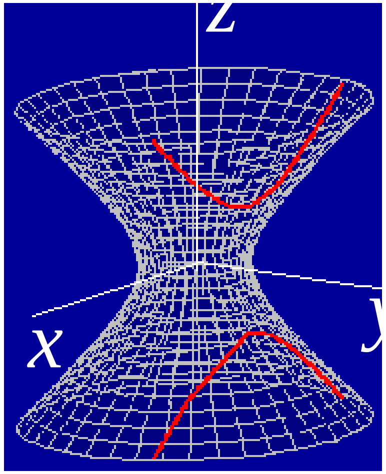
3. 双曲面

(1) 单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\ (a,b,c\text{为正数})$$

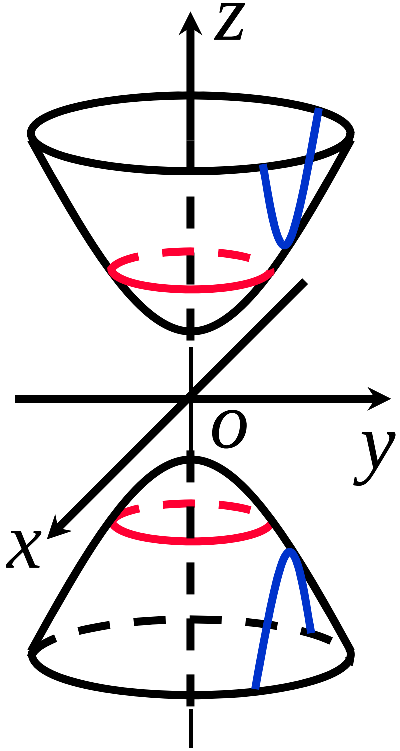






(2) 双叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \quad (a,b,c\text{ 为正数})$$



平面 $y=y_1$ 上的截痕为双曲线

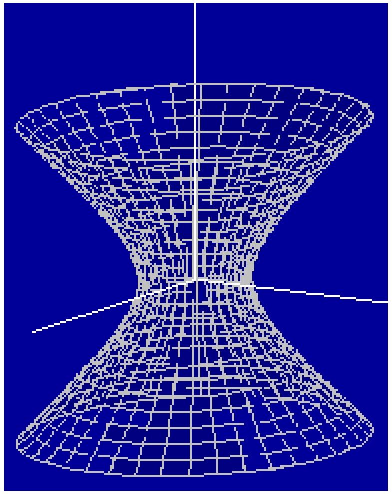
平面 $x=x_1$ 上的截痕为双曲线

平面 $z=z_1\ (|z_1|>c)$上的截痕为椭圆

注意单叶双曲面与双叶双曲面的区别:

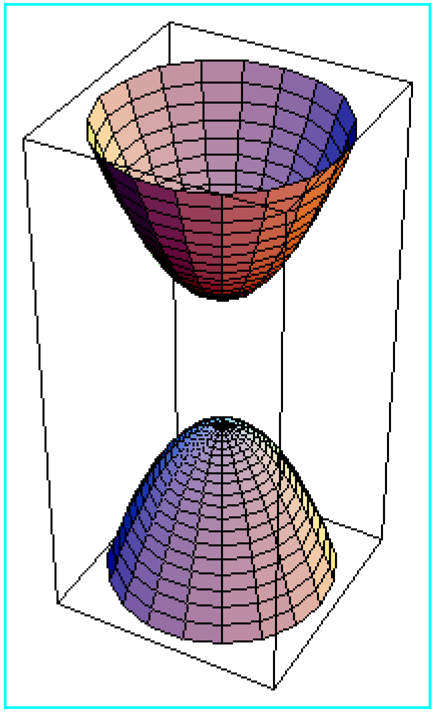
单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$



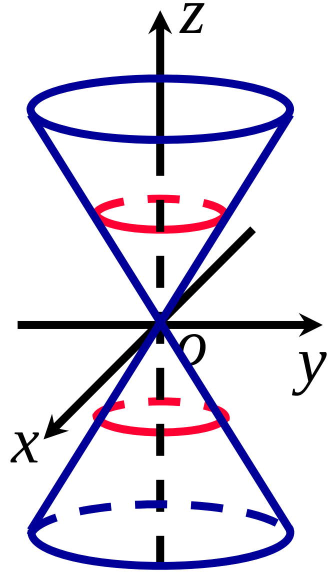
双叶双曲面

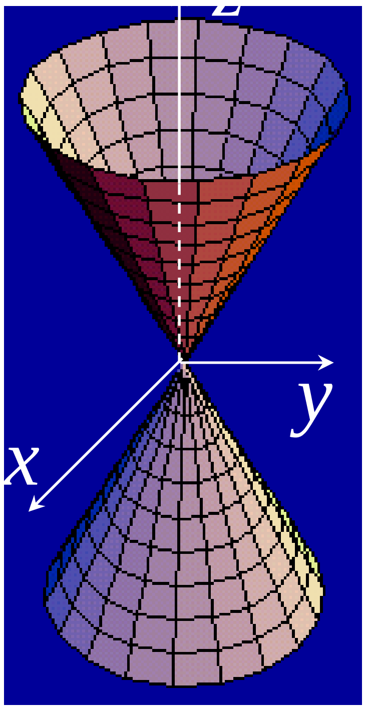
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$$



4. 椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2 \quad (a, b\text{为正数})$$





内容小结

1. 空间曲面 $\longleftrightarrow$ 三元方程 $F(x, y, z) = 0$

- 球面 $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$
- 旋转曲面

如, 曲线 $\begin{cases} f(y,z) = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ 绕 z 轴的旋转曲面:

$$f(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

- 柱面

如,曲面 $F(x, y) = 0$

表示母线平行 z 轴的柱面.

2. 二次曲面 $\longleftrightarrow$ 三元二次方程

- 椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 抛物面: 椭圆抛物面 双曲抛物面

  (p,q同号) $\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$ $-\dfrac{x^2}{2p}+\dfrac{y^2}{2q}=z$
- 双曲面: 单叶双曲面 双叶双曲面

  $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1$
- 椭圆锥面: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z^2$

思考题

1.指出下列方程的图形:

方　程	平面解析几何中	空间解析几何中
$x=5$	平行于 y 轴的直线	平行于 yoz 面的平面
$x^2+y^2=9$	圆心在(0,0)半径为 3 的圆	以 z 轴为中心轴的圆柱面
$y=x+1$	斜率为1的直线	平行于 z 轴的平面

其他补充：

1.空间曲线及其方程（自习）

空间曲线就是两个空间曲面的交线。

P155--156

2.二次曲面的化简

利用正交变换化简二次型为标准形。

设三元二次方程的一般形式为

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0$$

则可写成矩阵形式 $U^TAU+B^TU+c=0$

其中 $U=(x,y,z)^T, A=(a_{ij})_{3\times 3}, B=(b_1,b_2,b_3)^T$

由于A是实对称矩阵，故存在正交矩阵Q,使得

$Q^TAQ=diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$为$A$的特征值

作正交变换 $U=QV$,其中 $V=(x_1,y_1,z_1)$,则有

$$V^T diag(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)V+B^TQV+c=0,$$

再令 $B^TQ=(d_1,d_2,d_3)$,则有

$$\lambda_1x_1^2+\lambda_2y_1^2+\lambda_3z_1^2+d_1x_1+d_2y_1+d_3z_1+c=0$$

然后通过配方法，可以将原方程化为标准方程

例4.1 将二次曲面化为标准方程，并指出是什么曲面

$$2xy + 2xz + 2yz - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y - 1 = 0$$

解： 第一步 写出矩阵方程

令 $U = (x, y, z)^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = (-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)^T$

则原方程可写为 $U^T A U + B^T U - 1 = 0$

第二步：求矩阵A的特征值以及对应的标准正交特征向量

可以求出A的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=\lambda_3=-1$

所对应的标准正交特征向量为

$$q_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T, q_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, q_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^T$$

第三步：写出正交变换

令 $Q=(q_1,q_2,q_3)^T$，作正交变换 $U=QV$，其中 $V=(x_1,y_1,z_1)$，则有

$$V^TQ^TAQV+B^TQV-1=0,$$

即 $2x_1^2-y_1^2-z_1^2-2y_1-1=0$

然后通过配方法，可以将原方程化为标准方程

第四步：利用配方法，化为标准方程

配方可得

$$2x_1^2-(y_1+1)^2-z_1^2=0$$

作平移变换 $\begin{cases} x_2=x_1 \\ y_2=y_1+1 \\ z_2=z_1 \end{cases}$，则得到原方程的标准方程

$2x_2^2-y_2^2-z_2^2=0$，它表示一个圆锥面

本周作业

P179 习题6

21，25(1)