五、向量组的秩

1. 极大线性无关组

2. 向量组的秩

3. 向量组的秩的研究和应用

1.极大线性无关组

定义： 设 A_1 是向量组 A 的一个部分向量组，

如果 A_1 线性无关，但将 A 中其他任一向量(若有)添加进 A_1 后所得的部分向量组线性相关，则称 A_1 是 A 的**极大线性无关组**

两个等价条件：A_1 是 A 的**极大线性无关组**

$\Longleftrightarrow$ A_1 线性无关，且 A_1 与 A等价

$\Longleftrightarrow$ A_1 线性无关，且 A中向量均可由A_1线性表示

2.向量组的秩

定义：设 A 是一个向量组，A_1 是 A 的极大线性无关组，A_1 中向量的个数称为是 **A的秩**。

问题：

1. 极大线性无关组是否唯一？

2. 该定义是否合理？

3. 若要使该定义合理，需要说明什么？

定理： 设两个向量组 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 和 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 满足：

(1) 向量组 A 可由向量组 B 线性表示

(2) $r>s$

则向量组 A 必线性相关。

(即：多由少表示，多则线性相关)

推论1： 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，则 $r\le s$.

推论2： 任意 $n+1$ 个 n 维向量一定线性相关。

一般地，向量个数超过维数时，它们一定线性相关。

推论3：一个向量组的所有极大线性无关组都含有相同个数的向量。

证明：设$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$和$\beta_1,\cdots,\beta_s$是同一个向量组的两个极小线性无关组,可见它们都与原向量组等价，从而$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$和$\beta_1,\cdots,\beta_s$

从而$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$可以由$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性表示,并且$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性无关

所以由推论知$r \le s$

同理$\beta_1,\cdots,\beta_s$可以由$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$线性表示,并且$\beta_1,\cdots,\beta_s$线性无关

所以由推论知$s \le r$, 所以$s=r$.

推论3：一个向量组的所有极大线性无关组都含有相同个数的向量。

所以，向量组的秩的定义合理

定义：设 A 是一个向量组， A_1 是 A 的极大线性无关组， A_1中向量的个数称为是**A的秩,也记为 $rank(A)$.** 特别地，只有零向量的向量组的秩定义为0

推论4：等价的向量组有相同的秩。

3.向量组的秩的研究和应用

矩阵的行秩和列秩

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A的每一行都是n维的行向量，一共有m个行向量，这m个行向量组成的向量组的秩称为矩阵A的行秩；

A的每一列都是m维的列向量，一共有n个列向量，这n个列向量组成的向量组的秩称为矩阵A的列秩；

例题： 求矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的行秩和列秩。

解：A的行向量为$\alpha_1=(1,1,3,4),\alpha_2=(0,2,-1,4),\alpha_3=(0,0,0,5),\alpha_4=(0,0,0,0)$.
下面说明$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是极大线性无关组。

事实上，若$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3=0$，即$\begin{cases} k_1=0 \\ k_1+2k_3=0 \\ k_1+4k_2+5k_3=0 \end{cases}$

从而，$k_1=k_2=k_3=0$.即 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性无关

但是α_4为零向量，将它添进去就是线性相关的，
所以$\alpha_1\alpha_2,\alpha_3$是极大线性无关组，从而A的行秩为3

对于列向量$\beta_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\beta_2=\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\beta_3=\begin{pmatrix}3\\-1\\0\\0\end{pmatrix},\beta_4=\begin{pmatrix}1\\4\\5\\0\end{pmatrix}$,

类似可以证得β_1,β_2,β_4为线性无关, 并且$\beta_3=\frac{7}{2}\beta_1-\frac{1}{2}\beta_2$,

从而β_1,β_2,β_4为列向量组的极大线性无关组,

所以列秩也为 3。

回顾矩阵的秩的定义：非零子式的最高阶数，

主要计算方法：等价阶梯矩阵的非零行数。

矩阵的三种秩：秩、行秩、列秩

定理：矩阵的行秩和列秩都等于矩阵的秩。

利用：

向量组$A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$线性无关

$$\Updownarrow$$

方程组$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=\mathbf{0}$只有零解

$$\Updownarrow$$

$$\operatorname{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=m$$

定理：矩阵的行秩和列秩都等于矩阵的秩。

推论：设向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$，

若 $\mathbf{rank}\left(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m\right)=r$，则：

A中的任意r个线性无关的向量组成的向量组都是A的极大线性无关组。

即：向量组$A:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$的部分向量组

$A_1:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r\ (r\le m)$是$A$的极大线性无关组

$\Updownarrow$

$$\mathrm{rank}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r\right)=\mathrm{rank}\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m\right)=r$$

这给出了求解向量组的秩和极大线性无关组的一个方法：

给定一个向量组***A***：$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_t$,并且$rank(A)=r$，

(1). 要求它的秩，只要求它对应的矩阵的秩，

(2). 要求它的极大线性无关组，只要找一个包含r个向量的线性无关组。

计算向量组秩和求解极大线性无关组的步骤：

1. 若为行向量组，先通过转置将它们变为列向量组；
2. 将列向量组排列成一个矩阵 $A=(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t)$;
3. 对矩阵 A 进行初等行变换，将其变为阶梯矩阵；
4. 在阶梯矩阵中的列向量组里找出极大线性无关组；
5. 在A中选取与4中相应的列组成的列向量组就是 A 的极大线性无关组，其中向量的个数就是原先向量组的秩；
6. 如果原先向量组为行向量组，再将5中求得的列向量极大线性无关组转置成行向量即可。

注：

(1). 只用初等行变换好处：可同时求出向量组和它的所有部分向量组的秩

(2).用类似思路可证明：若向量组含非零向量，则必存在极大线性无关组

例：设 $\alpha_1=(2,1,2,2,-4),\alpha_2=(1,1,-1,0,2),\alpha_3=(0,1,2,1,-1),$
$\alpha_4=(-1,-1,-1,-1,1),\alpha_5=(1,2,1,1,1).$
求秩和一个极大线性无关组。

解：转置后排列为矩阵得

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_2-2r_1]{\substack{r_5+2r_4 \\ r_4-r_3 \\ r_3-r_2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2 \leftrightarrow r_4]{r_3 \leftrightarrow r_5} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[r_4+r_1]{r_3-2r_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\frac{1}{3}r_3]{r_1-r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2+r_3]{r_1-2r_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

所以秩为3，极大线性无关组可取为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$**.(也可取为**$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$**等)**

练习：求下面向量组的一个极大无关组

$\alpha_1=(1, 0, 2, 1)$，$\alpha_2=(1, 2, 0, 1)$

$\alpha_3=(2, 1, 3, 0)$，$\alpha_4=(2, 5, -1, 4)$

$\alpha_5=(1, -1, 3, -1)$

解：先把$(\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T, \alpha_5^T)$写成矩阵形式然后只使用初等行变换化成阶梯形，则可同时求出向量组和所有部分向量组的秩

$$(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)=$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

可见$rank(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T,\alpha_4^T,\alpha_5^T)=rank(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_3^T)=3$

因此$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是向量组的一个极大线性无关组

向量组的秩的应用举例：

习题13：设 $A:\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $B:\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，则向量组 A 的秩 $\le$ 向量组 B 的秩.

定理：设 A,B 分别为 $m\times n, n\times s$ 矩阵，则

$$rank(AB)\le \min\{rank(A), rank(B)\}.$$

推论1：若 $A=A_1A_2\cdots A_t$，则

$$rank(A)\le \min\{rank(A_1), rank(A_2),\cdots, rank(A_t)\}$$

推论2：设 A 为 $m\times n$ 阶矩阵,若 P 为 m 阶可逆方阵，Q 为 n 阶可逆方阵，则 $rank(A)=rank(PA)=rank(AQ)$

作业：习题四 P123

11

12

13