第一章　行列式

21　证明：设 $f(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_{n-2}x^{n-2}+c_{n-1}x^{n-1}$

$$\because f(a_i)=b_i(1\le i\le n)$$

$$\therefore \begin{cases} c_0+c_1a_1+\cdots+c_{n-2}a_1^{\ n-2}+c_{n-1}a_1^{\ n-1}=b_1 \\ c_0+c_1a_2+\cdots+c_{n-2}a_2^{\ n-2}+c_{n-1}a_2^{\ n-1}=b_2 \\ \vdots \\ c_0+c_1a_n+\cdots+c_{n-2}a_n^{\ n-2}+c_{n-1}a_n^{\ n-1}=b_n \end{cases} \qquad (1)$$

（1）式是一个关于 $c_0,c_1,\cdots c_{n-2},c_{n-1}$ 的线性方程组，系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\le j<i\le n}(a_i-a_j)$$

因为 $a_1,a_2,\cdots a_{n-2},a_{n-1}$ 是互不相同的实数，所以 $D\neq 0$，根据克拉默法则知（1）式有唯一解，即存在唯一的满足题意的多项式.

第二章　矩阵

6　证明：令 E_{ij} 是只有第 i 行第 j 列元素为 1，其他全为 0 的 n 阶方阵，

则 $AE_{ij}=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ 0 & \cdots & a_{ii} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，只有第 j 列元素分别为 $a_{1i},a_{2i},\cdots,a_{ni}$，其它元素全为 0；

而 $E_{ij}A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$，只有第 i 行元素分别为 $a_{j1},a_{j2},\cdots,a_{jn}$，

其它元素全为 0；

$$\because AE_{ij}=E_{ij}A$$

$$\therefore a_{1i}=\cdots=a_{i-1,i}=a_{i+1,i}=\cdots=a_{ni}=a_{j1}=\cdots=a_{j,j-1}=a_{j,j+1}=\cdots=a_{jn}=0$$

且 $a_{ii}=a_{jj}$；

取 $i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,n$，则可知：$\begin{cases} a_{ii}=a_{jj}(i=1,\cdots,n; j=1,\cdots,n) \\ a_{ij}=0(i\neq j) \end{cases}$

即 A 为数量阵；

若 A 为数量阵，则 $A=kE$，任给一 n 阶方阵 B，则有：

$AB=kEB=kB=BkE=BA$

即 A 与任一 n 阶方阵 B 可交换，

综上所述,与任一 n 阶方阵 B 可交换的矩阵为数量阵。

9 证明：设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，令 $B=(b_{ij})_{n\times n}=A^2$,又因为 A 是实对称矩阵，所以 $A=A^T$，

则 $B=A^2=AA^T$，所以 $b_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2$；

又因为 $B=A^2=0$，所以 $b_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2=0(i=1,\cdots,n)$，

而 A 是实对称矩阵，所以 $a_{ij}=0(i=1,\cdots,n, j=1,\cdots,n)$，即 $A=0$.

12 证明：因为 A,B 为对称矩阵，

所以，$(AB)^T=B^TA^T=BA$;则 AB 为对称矩阵的充要条件是 $AB=(AB)^T=BA$，

即 AB 是可交换的.

13 证明：取 $e_i=(0,\cdots 1,\cdots 0)^T$,即 e_i 是一个只有第 i 个元素为 1 其余元素全为 0 的 n 维单位列向量,由 $Ae_i=0$ 可得 $a_{ki}=0(k=1,\cdots,n)$，令 $i=1,\cdots,n$，则可得 $a_{ij}=0$，即 $A=0$；

而且当 $A=0$ 时，对于任意的 n 维列向量 X 都有 $AX=0$，所以 $A=0$.

21 解：令 $C=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$，由 $AC=E$ 可得：

$$\begin{pmatrix} I_k & B \\ O & I_l \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1+BC_3 & C_2+BC_4 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_k & O \\ O & I_l \end{pmatrix}$$

由矩阵相等可得 $\begin{cases} C_1=I_k \\ C_2=-B \\ C_3=O \\ C_4=I_l \end{cases}$，即 $A^{-1}=\begin{pmatrix} I_k & -B \\ O & I_l \end{pmatrix}$.

22 解：令 $F=\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}$，由 $DF=E$ 可得：

$$\begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_1 & F_2 \\ F_3 & F_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} AF_3 & AF_4 \\ BF_1+CF_3 & BF_2+CF_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E & O \\ O & E \end{pmatrix}$$

由矩阵相等可得$\begin{cases} F_1 = -B^{-1}CA^{-1} \\ F_2 = B^{-1} \\ F_3 = A^{-1} \\ F_4 = O \end{cases}$，即 $D^{-1} = \begin{pmatrix} -B^{-1}CA^{-1} & B^{-1} \\ A^{-1} & O \end{pmatrix}$.

23 证明：$(E-A)(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})$

$$= E\cdot E + E\cdot A + E\cdot A^2 + \cdots + E\cdot A^{k-1} - A\cdot E - A\cdot A - A\cdot A^2 - \cdots - A\cdot A^{k-1}$$
$$= E - A^k = E,$$

同理可证 $(E+A+A^2+\cdots+A^{k-1})(E-A) = E$，

因此，$(E-A)^{-1} = E + A + A^2 + \cdots + A^{k-1}$.

第三章 向量代数与几何应用

28 证明：直线 l_1 的方向向量为 $s_1 = (3,2,-2)$，直线 l_2 的方向向量为 $s_2 = (2,-3,4)$，

l_1 上取一点 $P_1(7,2,1)$，l_2 上取一点 $P_2(1,-2,5)$，则 $\overrightarrow{P_1P_2} = (-6,-4,4)$，

$$(s_1, s_2, \overrightarrow{P_1P_2}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 2 & -3 & -4 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} \overset{r_2+r_3}{=} \begin{vmatrix} 3 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

所以 l_1 和 l_2 共面；

$$s_1 \times s_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & -2 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 2i - 16j - 13k,$$

则 l_1 和 l_2 所在平面方程为：$2(x-7) - 16(y-2) - 13(z-1) = 0$

即 $2x - 16y - 13z + 31 = 0$.

第四章 线性方程组

3 证明：（1）$k_1\alpha_1^T + k_2\alpha_2^T + k_3\alpha_3^T + k_4\alpha_4^T = 0$ 的系数矩阵为：

$$A = (\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T, \alpha_4^T) = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 4 & -8 & 4\\ 0 & 3 & -6 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{pmatrix},$$

而 $r(A)=3$，方程组有非零解，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性相关；

（2） $k_1\alpha_1^T+k_2\alpha_2^T+k_4\alpha_4^T=0$ 的系数矩阵为：

$$B=(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\alpha_4^T)=\begin{pmatrix}3 & 1 & 4\\ -1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

而 $r(B)=3$，方程组只有零解，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$ 线性无关.

4 证明：因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，

所以， $k_1\alpha_1+k_2(\alpha_1+\alpha_2)+k_3(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)$

$=(k_1+k_2+k_3)\alpha_1+(k_2+k_3)\alpha_2+k_3\alpha_3=0$ 成立当且仅当

$$\begin{cases}k_1+k_2+k_3=0\\ \quad k_2+k_3=0\\ \qquad k_3=0\end{cases}，即 k_1=k_2=k_3=0$$

因此， $\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ 也线性无关.

5 证明：显然 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 都可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表示；

而 $\alpha_i=\dfrac{1}{n-1}(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_s)-\beta_i$，

即 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 也可以由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，

因此， $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 等价.

8 证明：设向量组(I)的极大线性无关组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$，则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 与向量组(I)等价；

向量组(II)的极大线性无关组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$，则 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 与向量组(II)等价；

又因为向量组(I)可由向量组(II)线性表示，所以 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 可由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性表示，

而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关，所以 $r\le s$，

因此，向量组(I)的秩不超过向量组(II)的秩.

9　证明：设 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，$B$ 的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，

则 $A+B$ 的列向量组为 $\alpha_1+\beta_1,\alpha_2+\beta_2,\cdots,\alpha_n+\beta_n$ 可以由矩阵 $(A|B)$ 的列向量组线性表示，而 $r(A|B)\le r(A)+r(B)$，所以由第 8 题知 $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

10　证明：设 A 的列向量组为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，则 A^T 的行向量组为 $\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_n^T$，

所以 A 的列向量组与 A^T 的行向量组等价，则：

$$r(A)=r(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=r(\alpha_1^T,\alpha_2^T,\cdots,\alpha_n^T)=r(A^T).$$

11　证明：设 B 的列向量组为 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$，由 $AB=0$ 知：

$$A\beta_1=A\beta_2=\cdots=A\beta_n=0,$$

即 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 都是线性方程组 $AX=0$ 的解，则 $r(B)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n)\le n-r(A)$，

所以，$r(A)+r(B)\le n.$

12　证明：$\because A^2=A,$

$$\therefore A(A-E)=0,$$

因为当 A 和 B 都为 n 阶方阵时，若 $AB=0$，则 $r(A)+r(B)\le n$

所以，$r(A)+r(A-E)\le n.$

13　证明：由 $(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A$ 知：

$$r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)\le r(A);$$

又因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间的一组基，

令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，则 $r(P)=n$，即 P 为可逆矩阵，

所以 $A=P^{-1}(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，

$\therefore r(A)\le r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$；

综上所述，$r(A)=r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$，即矩阵 A 的秩等于向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 的秩.

18　解：　由题意知：

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)P,$$

其中 $P=\begin{pmatrix} t_1 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{pmatrix}$，记 $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ 为 s 维列向量，PX 为 s 维列向量，

显然 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 都是 $AX=0$ 的解；

$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)X=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)PX$，

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，所以 $r(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=s$ 的充要条件是:

$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 线性无关

$\Leftrightarrow (\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)X=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)PX=0$ 只有零解

$\Leftrightarrow PX=0$ 只有零解 $\Leftrightarrow |P|\neq 0$；

而 $|P|=\begin{vmatrix} t_1 & 0 & \cdots & t_2 \\ t_2 & t_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_1 \end{vmatrix}=t_1^{\ s}+(-1)^{s+1}t_2^{\ s}$，

所以，$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 为基础解系的充要条件是:

当 s 为偶数时，$t_1\neq\pm t_2$；当 s 为奇数时，$t_1\neq -t_2$.

23　证明:　$\because \eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是非齐次线性方程组 $AX=b$ 的解，

$\therefore A(k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t)$

$=k_1A\eta_1+k_2A\eta_2+\cdots+k_tA\eta_t$

$=k_1b+k_2b+\cdots+k_tb=(k_1+k_2+\cdots+k_t)b$，

所以，$k_1\eta_1+k_2\eta_2+\cdots+k_t\eta_t$ 也是 $AX=b$ 的一个解得充要条件是:

$(k_1+k_2+\cdots+k_t)b=b$，即 $k_1+k_2+\cdots+k_t=1$.

第五章　特征值与特征向量

3　证明:　因为 A 可逆，而 $|A|$ 等于 A 的 n 个特征值的乘积，所以任一特征值 $\lambda\neq 0$,

由题意知 $A\alpha=\lambda\alpha$, 且 $A^*A\alpha=|A|E\alpha=|A|\alpha$,

所以，$A^*(\lambda\alpha)=\lambda A^*\alpha=|A|\alpha,$ 即 $A^*\alpha=\dfrac{|A|}{\lambda}\alpha,$

即 α 是 A^* 对应于特征值 $\dfrac{|A|}{\lambda}$ 的一个特征向量.

15　证明：　设 λ 是 A 的特征值，因为 $A^2=A$，即 $A(A-E)=0$，而零矩阵的特征值为 0，

所以 $\lambda(\lambda-1)=0$，即 $\lambda=0$ 或 1；

由于 A 为 n 阶实对称矩阵，所以存在正交矩阵 T，使得

$T^{-1}AT=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=diag(E_k,0),$ 其中 k 为特征值 $\lambda=1$ 的重数，

又因为相似矩阵具有相同的秩，所以 $k=r(A),$ 即

$$T^{-1}AT=diag(E_r,0).$$

第六章　二次型与二次曲面

10　证明：　因为实二次型 $f=X^TAX$ 正定，所以 A 为正定矩阵，

则 A 的 n 个特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 都大于零，A 必可逆；

由于若 λ 为 A 的特征值，则 $\dfrac{1}{\lambda}$ 为 A^{-1} 的特征值，

所以 A^{-1} 的特征值 n 个特征值 $\dfrac{1}{\lambda_1},\dfrac{1}{\lambda_2},\cdots,\dfrac{1}{\lambda_n}$ 都大于零，

则 A^{-1} 为正定矩阵，所以 $g=X^TA^{-1}X$ 正定.

11　证明：

法一：若 A,B 为 n 阶正定矩阵，则 A,B 为对称矩阵且可逆，

$\because AB=BA$，$\therefore (AB)^T=B^TA^T=BA=AB$，

即 AB 为 n 阶实对称矩阵；
设 α 为 AB 对应于特征值 λ 的特征向量，则：

$$\alpha^TB^TAB\alpha=\alpha^TB^T(\lambda\alpha)=\lambda\alpha^TB^T\alpha=\lambda\alpha^TB\alpha$$

而 B 为正定矩阵，所以 $\alpha^TB\alpha>0$　　　　（1）

又 $\because \alpha^TB^TAB\alpha=(B\alpha)^TA(B\alpha)$，

由 A 为正定矩阵， B 为可逆矩阵知： $\alpha^T B^T AB\alpha > 0$ （2）

(1)和(2)联立可得 $\lambda > 0$，即 AB 的特征值都大于零，
即 AB 为正定矩阵。

法二：若 A,B 为 n 阶正定矩阵，则 A,B 为对称矩阵，

$\because AB = BA$，$\therefore (AB)^T = B^T A^T = BA = AB$，

即 AB 为 n 阶实对称矩阵；

A,B 为 n 阶正定矩阵，则存在可逆矩阵 P,Q 使得

$$A = PP^T, B = QQ^T,$$

$$P^{-1}ABP = P^{-1}PP^T QQ^T P = P^T QQ^T P$$

而 $P^T QQ^T P = (P^T Q)(P^T Q)^T$，所以 $P^T QQ^T P$ 为正定矩阵，

即 AB 相似于一个正定矩阵，相似矩阵有相同的特征值，
所以 AB 正定.

12 证明：

(1) 可用第 10 题的方法证明，或者：

A 为 n 阶正定矩阵，所以存在可逆矩阵 Q，使得

$$A = Q^T Q,$$

$\therefore A^{-1} = (Q^T Q)^{-1} = Q^{-1}(Q^T)^{-1} = Q^{-1}(Q^{-1})^T$，

令 $P = (Q^{-1})^T$， P 为实可逆矩阵，

$A^{-1} = P^T P$，所以 A^{-1} 正定.

(2) 若 A 为正定矩阵，则 $A^* = |A|A^{-1}$，且 $|A| > 0$，

令 P 意义同上，即 $A^{-1} = P^T P$，

则 $A^* = |A|A^{-1} = |A|P^T P = (\sqrt{|A|}P)^T(\sqrt{|A|}P)$,

令 $R = \sqrt{|A|}P$，则 R 可逆，且 $A^* = R^T R$，即 A^* 是正定矩阵.