补充：逆矩阵的应用

一、解线性方程组

对于n元线性方程组

$$AX = B$$

若 $|A| \neq 0$，即A^{-1}存在

则 $X = A^{-1}B$

(I). 解方程组

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 3 \end{cases}$$

解：方程组简记为 $AX = B$

其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$

由于 $|A| = 2 \neq 0$, A可逆，故

$$X = A^{-1}B$$

而A的逆矩阵 $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$,

$$\therefore X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3/2 & -3 & 5/2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -8 \\ 9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

即 $\boldsymbol{x_1=-8,\ \ x_2=9,\ \ x_3=-3.}$

(II). 解矩阵方程

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

解：矩阵方程简记为 $AX = B$

$$\because \quad |A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 17 \neq 0 \qquad \therefore A^{-1}\text{存在}$$

$$\therefore \quad X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

A^{-1}

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} -5 & 4 & 2 \\ -11 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 15 & -6 \\ 16 & -37 \\ -6 & -35 \end{bmatrix}$$

(III). 解矩阵方程 $AX + E = A^2 + X$

其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, E 为三阶单位矩阵.

解：由 $AX + E = A^2 + X$,

得 $AX - X = A^2 - E$,

即 $(A-E)X = (A-E)(A+E)$.

而 $A - E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 所以 $A-E$ 可逆.

$$(A-E)X=(A-E)(A+E)$$

所以 $(A-E)^{-1}(A-E)X=(A-E)^{-1}(A-E)(A+E).$

$$\text{故 } X=A+E=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2&0&1\\0&3&0\\-1&0&2\end{bmatrix}$$

(IV). 证明　设A是可逆阵，试证明：

(1)　若 $AX = AY \Rightarrow X = Y$

(2)　若 $AB = O \Rightarrow B = O$

证：(1)　由　$AX = AY$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(AY)$$

$$(A^{-1}A)X = (A^{-1}A)Y$$

$EX = EY$　所以　$X = Y$

(2)　由 $AB = O$，有$A^{-1}(AB) = A^{-1}O$

$(A^{-1}A)B = O$　所以 $B = O$