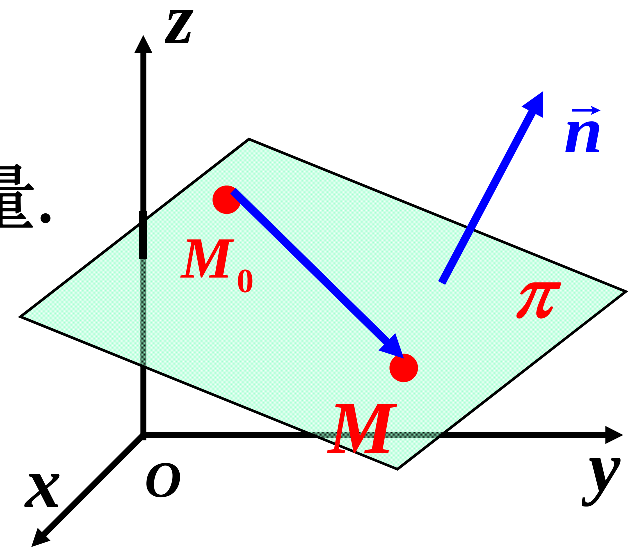
3.3 空间平面及其方程

本节主要内容:

- 平面的点法式方程
- 平面的一般式方程
- 平面的截距式方程
- 平面的三点式方程
- 两平面间的关系和平面束

1. 平面的点法式方程

【法向量】垂直于平面的非零向量.



如图, 平面 π 的法向量

$\vec{n}=(A, B, C)$,

$M_0(x_0, y_0, z_0)\in\pi$:

$$M(x,y,z)\in\pi \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\perp\vec{n} \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\cdot\vec{n}=0$$

即 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

平面的点法式方程

【求平面方程最主要的方法】(记住!):

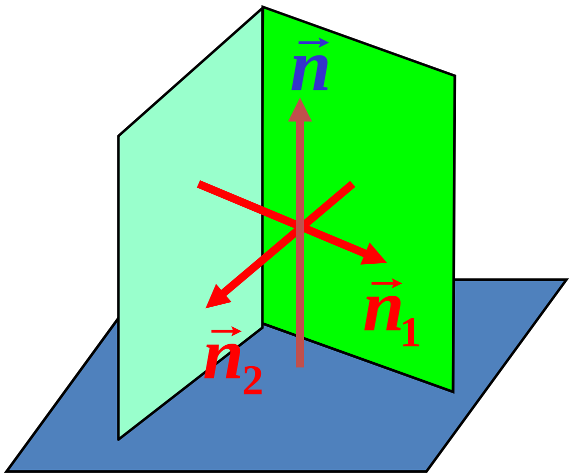
(1) 在平面上找出一个点;

(2) 找出一个与平面垂直的非零向量(法向量).

【例1】 求过点$(1,1,1)$，且垂直于平面 $x-y+z=7$ 和$3x+2y-12z+5=0$ 的平面方程.

【解】$\vec{n}_1=(1,-1,1)$，$\vec{n}_2=(3,2,-12)$;

取法向量



$$\vec{n}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2$$

$$=\left(\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 2 & -12\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & -12\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}\right)$$

$$=(10,\ 15,\ 5)=5(2,3,1);$$

平面方程为

$$2(x-1)+3(y-1)+(z-1)=0,$$

化简得

$$2x+3y+z-6=0.$$

2. 平面的一般方程

由平面的点法式方程

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow Ax+By+Cz-(Ax_0+By_0+Cz_0)=0$$

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0}$$

平面一般方程

其中法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$.

几种特殊情况(可通过法向量考虑):

(1) $D=0$: 平面过原点; $(-(Ax_0+By_0+Cz_0)=D)$

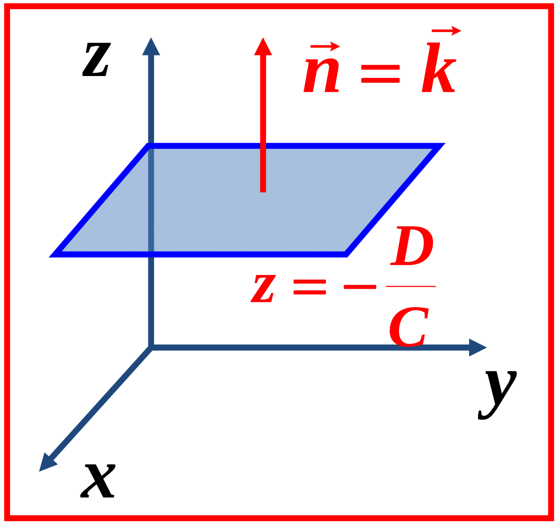
(2) $A=0$: 平面平行 x 轴;

(3) $A=0,\ D=0$: 平面通过 x 轴.

(4) $A=0,\ B=0$: 平面平行 xOy 平面.

其它情况可以类似讨论

【例2】 指出下列平面的特殊位置



(1) $2x+y+z=0$;

(2) $x+2z=0$;

(3) $3x-y=1$;

(4) $y=1$.

【解】(1) 过原点; (2) 过 y 轴;

(3) 平行 z 轴; (4) 平行 zOx 平面.

【例4】 求过 x 轴且与平面 $x-y+2z=0$ 垂直的平面.

【解】平面为 $By+Cz=0$: 平面的法向 $\vec{n}=(0,B,C)$;

由条件知 $(0,B,C)\perp(1,-1,2)$, $B=2C$, 平面方程为

$$2y+z=0.$$

3. 平面的截距式方程

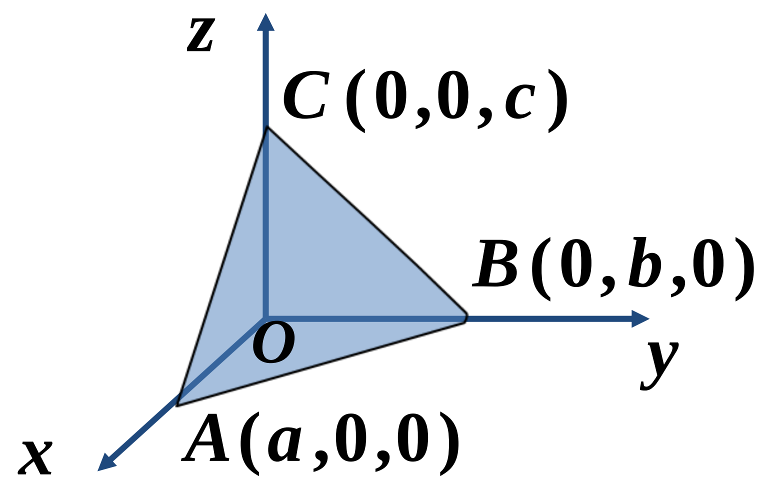
如果 $abc \neq 0$, 则平面方程 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1$ 过

$$A(a,0,0),\quad B(0,b,0),\quad C(0,0,c)$$

三点.

$$\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}+\dfrac{z}{c}=1}$$

平面截距式方程



a, b, c 分别称平面在三个坐标轴上的截距.

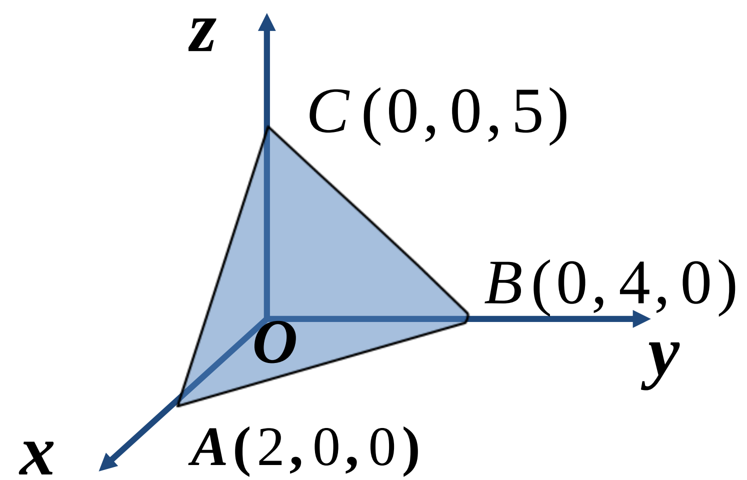
截距式方程便于画图

【例】 将平面方程$10x+5y+4z-20=0$化为截距式方程

【解】 令 **y=z=0** 得：**x=2**

令 **x=z=0** 得：**y=4**

令 **x=y=0** 得：**z=5**



截距方程为

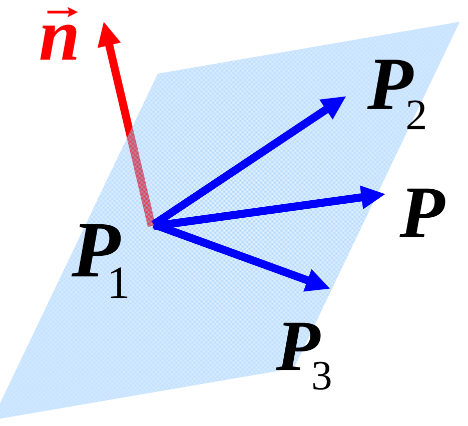
$$\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{5}=1$$

4. 平面的三点式方程

几何上，不共线的三点确定唯一的一个平面，

设有不共线的三点 $P_1(x_1,y_1,z_1), P_2(x_2,y_2,z_2), P_3(x_3,y_3,z_3)$ 它们确定了一个平面，设 $P(x,y,z)$ 为该平面上任意一点，则向量 $\overrightarrow{P_1P}, \overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}$ 共面，它们的混合积为零，所以

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$



具体求解时也可以先求出法向量，再求平面方程

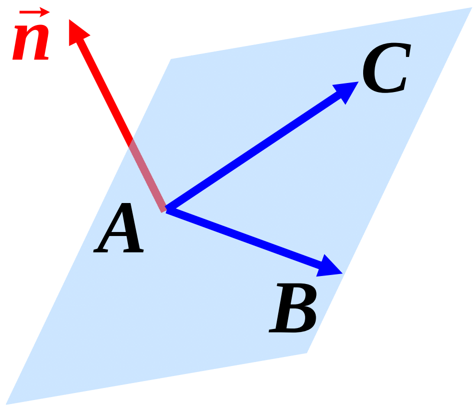
【例】 求过三点 $A(2,-1,4)$, $B(-1,3,-2)$ 和 $C(0,2,3)$ 的平面方程.

【解】 $\overrightarrow{AB}=(-3,4,-6)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,3,-1)$;

取 $\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$

$$=\left(\begin{vmatrix}4 & -6\\ 3 & -1\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}-3 & -6\\ -2 & -1\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}-3 & 4\\ -2 & 3\end{vmatrix}\right)$$

$$=(14, 9, -1);$$



平面方程为

$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0,$$

化简得

$$14x+9y-z-15=0.$$

5. 两平面间的关系（通过法向量确定）和平面束

设有两个平面 $\begin{aligned}\pi_1\colon\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2\colon\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{aligned}$，则

记$\boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2)$

若$\boldsymbol{n}_1$与$\boldsymbol{n}_2$平行，则π_1与π_2要么重合要么平行. 否则相交

(1) π_1与π_2重合 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{D_1}{D_2}$;

(2) π_1与π_2平行 $\Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}\neq\dfrac{D_1}{D_2}$;

(3) π_1与π_2相交 $\Leftrightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$;

(4) $\pi_1\perp\pi_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$;

平面束

当两个平面 $\begin{array}{l}\pi_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ \pi_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}$ 相交时，

交线l的方程由方程组 $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$ 所确定，

而π_1与π_2是过这条直线l的两个平面.

[同轴平面束]经过同一条直线的所有平面的集合.

设有两个平面 $\begin{array}{l}\pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\ \pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{array}$，且

π_1与π_2相交于直线l，则方程

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

λ_1,λ_2不全为零 (*)

（1）$\lambda_1\neq 0$，$\lambda_2=0$，(*)表示平面π_1

（2）$\lambda_1=0$，$\lambda_2\neq 0$，(*)表示平面π_2

（3）$\lambda_1\neq 0$，$\lambda_2\neq 0$，(*)表示过直线l的其它平面

直线l 上任一点都满足方程(*)，即(*)表示的平面通过直线l, 结合λ_1,λ_2的任意性可知，方程(*) 为**过直线 l 的同轴平面束。**

例题：见课本P79例题3.4

作业 P88 习题3

16, 17, 20, 22

3.4 空间直线及其方程

本节主要内容:

- 直线的点向式方程
- 直线的一般式方程
- 直线与平面间的关系
- 两直线间的关系

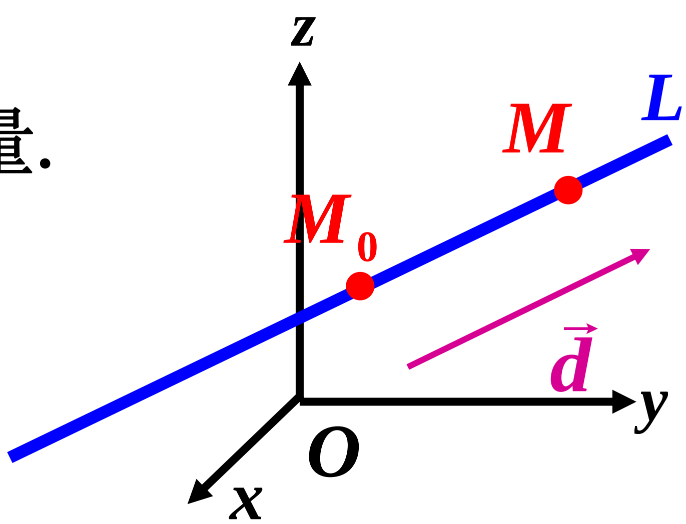
1. 直线的点向式方程

【直线的方向向量】

平行于直线的一个非零向量.

设空间直线 L 的方向向量

$$\vec{d}=(m,n,p),$$



设$M_0(x_0,y_0,z_0)\in L$:

$$M(x,y,z)\in L \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}\,//\,\vec{d}$$

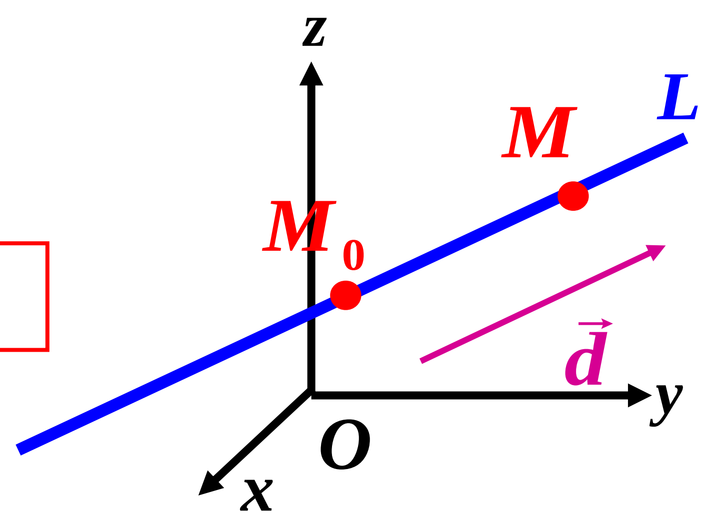
$$\boxed{\Leftrightarrow \frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

直线的点向式(对称式)方程

有时记过M_0点且方向向量为$\vec{d}$的直线记为$L(M_0,\vec{d})$

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}}$$

直线的点向式(对称式)方程



【注】 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 中 m, n, p 可以为 0;

若 $m=0$, 则 $x-x_0=0$, 将 $\dfrac{x-x_0}{m}$ 视为 $\dfrac{0}{0}$ 即可.

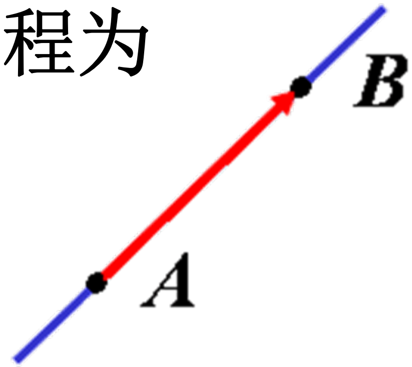
若只有一个不为零，可理解为两个特殊平面的交线,

例, $\dfrac{x-0}{0}=\dfrac{y-0}{0}=\dfrac{z-0}{1}$ 为 $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$ $(|t|<+\infty)$, 即 z 轴.

【例】 求过 $A(1, 2, 3)$, $B(3, 2, 1)$ 两点的直线方程.

【解】 取 $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = (2, 0, -2)$; 直线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{-1}$$



【例】 求过 $A(1,0,-1)$ 点且与两平面

$$\pi_1 : x + 2y - z = 0\,,\quad \pi_2 : 2x - y - z = 1$$

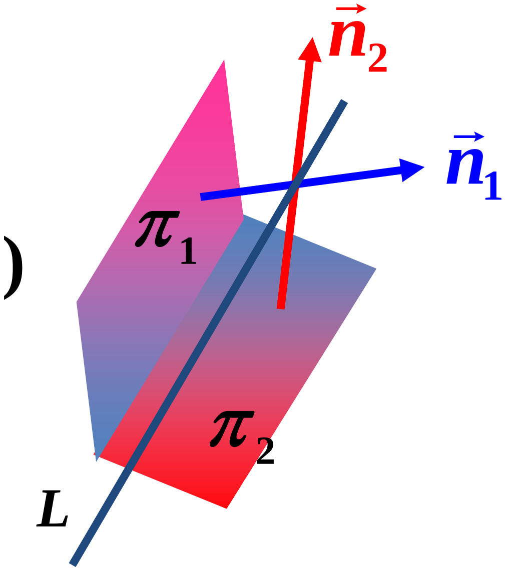
平行的直线方程.

【解】 取 L 的方向向量

$$\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= (-1, -1, -5);$$

直线 L 方程为 $\dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z+1}{5}$



直线的参数方程

在直线的点向式方程 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ 中

令比值为t,即 $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}=t$，则有

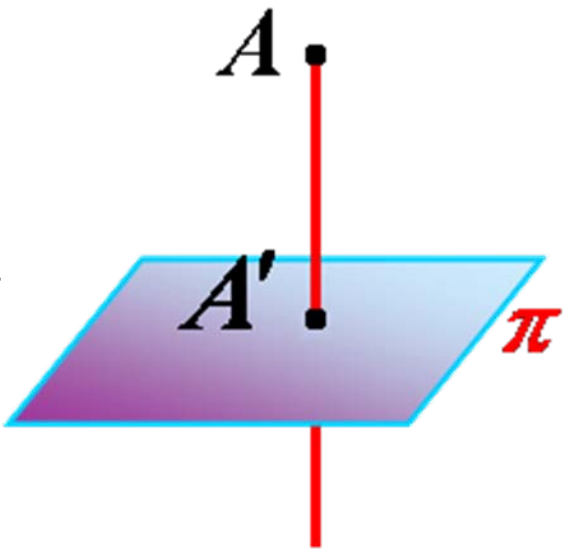
$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

直线的参数方程，其中t为参数

【例】 求 $A(1,2,3)$ 在平面 π： $x-y+2z+1=0$ 的投影点 A' 的坐标.

【解】 过点 A 且垂直 π 的直线的参数式方程为

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2-t \\ z=3+2t \end{cases};$$



代入平面 π 的方程中得

$$1+t-(2-t)+2(3+2t)+1=0,$$

$$t=-1;$$

将 $t=-1$ 代回直线的方程得到

$$x=0,\quad y=3,\quad z=1;$$

即 $A'(0,3,1)$.

直线的两点式方程

已知直线过两个相异点$P_0(x_0,y_0,z_0)$和$P_1(x_1,y_1,z_1)$，则该直线是过点P_0，并且以$\overrightarrow{P_0P_1}$为方向向量，则该直线方程为

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

直线的两点式方程

2. 直线的一般方程

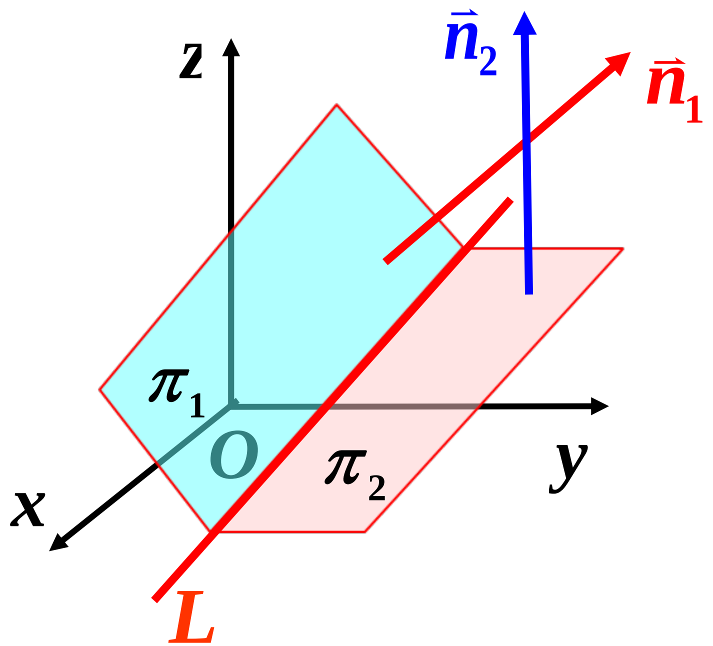
空间直线 L 可看成两平面的交线：

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1) \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2) \end{cases}$$

其中 $A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$

直线的一般方程

其中 L 的方向向量 $\vec{d} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$



【例】 将直线 L: $\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$ 化为点向式(对称式)方程.

【解】 取 $\vec{d}=(1,1,1)\times(2,-1,3)=(4,\ -1,\ -3)$;

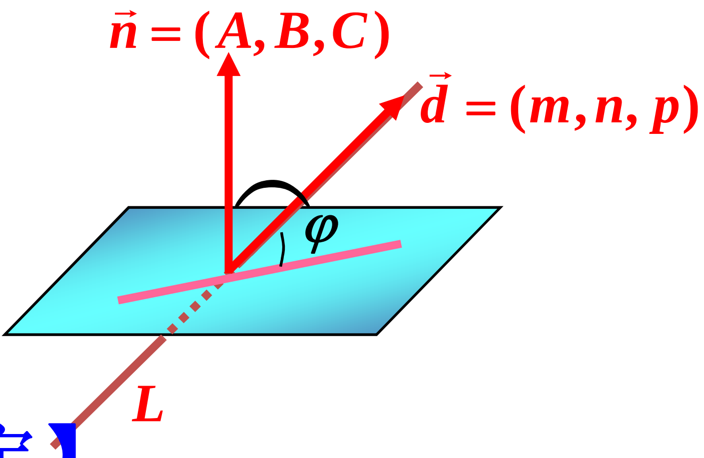
在直线上令 $z=0$, 得 $\begin{cases} x+y+1=0 \\ 2x-y+4=0 \end{cases}$,

$$x=-\frac{5}{3},\quad y=-\frac{2}{3};$$

L的方程:

$$\frac{x+\frac{5}{3}}{4}=\frac{y+\frac{2}{3}}{-1}=\frac{z}{-3}$$

3. 直线与平面间的关系



若 $L: \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$,

$\pi: \ Ax+By+Cz+D=0$,

【直线与平面的特殊位置关系判定】

(1) $L\in\pi \Leftrightarrow \vec{d}\perp\vec{n}$ 且 $(x_0,y_0,z_0)\in\pi$

$\Leftrightarrow mA+nB+pC=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

(2) $L//\pi \Leftrightarrow \vec{d}\perp\vec{n}$ 且 $(x_0,y_0,z_0)\notin\pi$

$\Leftrightarrow mA+nB+pC=0$ 且 $Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$

(3) L与π相交 $\Leftrightarrow \vec{d}$与$\vec{n}$不垂直 $\Leftrightarrow mA+nB+pC\neq 0$

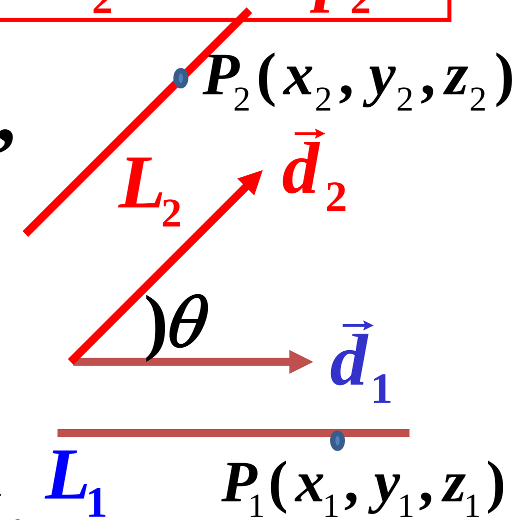
(4) $L\perp\pi \Leftrightarrow \vec{d}//\vec{n} \Leftrightarrow \dfrac{A}{m}=\dfrac{B}{n}=\dfrac{C}{p}$

4. 两直线间的关系

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}; \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}$$

其中 $\vec{d}_1=(m_1,n_1,p_1),\vec{d}_2=(m_2,n_2,p_2)$,

$P_1=(x_1,y_1,z_1),P_2=(x_2,y_2,z_2)$

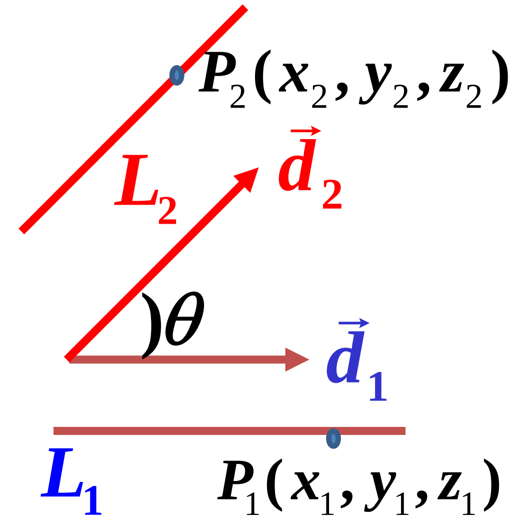


直线L_1与L_2要么共面要么异面，判别方法如下：

$$L_1\text{与}L_2\text{共面} \Leftrightarrow \vec{d}_1,\vec{d}_2,\overrightarrow{P_1P_2}\text{共面} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix}=0$$

两直线共面时，有重合、平行和相交三种情形

$$L_1: \frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1}; \quad L_2: \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}$$



$$(1)\ L_1 = L_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 // \vec{d}_2 // \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow m_1 : n_1 : p_1 = m_2 : n_2 : p_2 = (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$$

$$(2)\ L_1 // L_2 \Leftrightarrow \vec{d}_1 // \vec{d}_2 \not\parallel \overrightarrow{P_1P_2} \Leftrightarrow m_1 : n_1 : p_1 = m_2 : n_2 : p_2 \neq (x_2 - x_1) : (y_2 - y_1) : (z_2 - z_1)$$

$$(3)\ L_1\text{与}L_2\text{相交于一点} \Leftrightarrow \vec{d}_1, \vec{d}_2, \overrightarrow{P_1P_2}\text{共面且}\vec{d}_1 \not\parallel \vec{d}_2$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0\text{且}m_1 : n_1 : p_1 \neq m_2 : n_2 : p_2$$

作业 P88 习题3

25(2)(4)， 27(1)(3)， 28