§ 2.2 矩阵的分块

1、分块矩阵的定义

定义 将矩阵 A 用若干条纵线和横线分成若干个小矩阵，每一个小矩阵称为 A 的**子块**， 以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**.

例如，

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix},$$

$$B_1=(a,1,0,0)$$

$$B_2=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3=(0,1,1,b)$$

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc} a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & b & 1 \\ 0 & 1 & 1 & b \end{array}\right)=\begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix},$$

$$C_1=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \quad C_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C_4=\begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}$$

分块矩阵很多时候可以简化矩阵的运算，同时有着重要的理论意义。

（1） 分块矩阵的加法

设矩阵 A 与 B均为m × n矩阵, 采用相同的分块法, 有

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & \cdots & B_{st} \end{pmatrix},$$

其中 A_{ij} 与 B_{ij} 的行数相同、列数相同, 那么

$$A+B=\begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & \cdots & A_{1t}+B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1}+B_{s1} & \cdots & A_{st}+B_{st} \end{pmatrix}.$$

注解：

1. 先把A,B均看做s×t的分块后的矩阵进行矩阵加法，将对应位置的“元素”相加。
2. 此时的“元素”实际上是小块的矩阵，由于分法相同，可以做加法，再进行通常的矩阵加法。

不难看出，直接进行两个矩阵的加法和先分块后相加得到的矩阵是相同的

（2）分块矩阵的数乘运算

设 $A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}$， λ 为常数,那么

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \cdots & \lambda A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda A_{s1} & \cdots & \lambda A_{st} \end{pmatrix}.$$

(3) 分块矩阵的乘法运算 （重点）

设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{B}$为 $n\times p$ 矩阵, 分块成

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{st} \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tl} \end{pmatrix},$$

其中$\boldsymbol{A}$的列的分法和$\boldsymbol{B}$的行的分法相同，即$\boldsymbol{A}_{i1}$, $\boldsymbol{A}_{i2}$, $\cdots$, $\boldsymbol{A}_{it}$ 的列数分别等于 $\boldsymbol{B}_{1j}$, $\boldsymbol{B}_{2j}$, … ,$\boldsymbol{B}_{tj}$ 的行数,

那么 $$AB=\begin{pmatrix} C_{11} & \cdots & C_{1l} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{s1} & \cdots & C_{sl} \end{pmatrix},$$

其中$C_{ij}=\sum_{k=1}^{t} A_{ik}B_{kj} \quad (i=1,\cdots,s;\ j=1,\cdots,l)$.

注解：

1. 先把A,B均看做s×t和t×l的分块后的矩阵进行矩阵乘法，将对应位置的“元素”相乘。
2. 此时的“元素”实际上是小块的矩阵，由于列分法与行分法相同，可以做乘法，再进行通常的矩阵加法。

也可以验证，直接进行两个矩阵的乘法和先分块后相乘得到的矩阵是相同的

例 设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0&1&3\\0&1&2&4\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&0&0\\2&0&0&0\\6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{pmatrix},$$

用分块矩阵计算 kA, $A+B$.

解 将矩阵 A,B 分块如下:

$$A=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&1&3\\0&1&2&4\\\hdashline 0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}E&C\\O&-E\end{pmatrix},\quad B=\left(\begin{array}{cc:cc}1&2&0&0\\2&0&0&0\\\hdashline 6&3&1&0\\0&-2&0&1\end{array}\right)=\begin{pmatrix}D&O\\F&E\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}1&3\\2&4\end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix}1&2\\2&0\end{pmatrix},F=\begin{pmatrix}6&3\\0&-2\end{pmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} E & C \\ O & -E \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} D & O \\ F & E \end{pmatrix},$$

则 $kA=k\begin{pmatrix} E & C \\ O & -E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} kE & kC \\ O & -kE \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} k & 0 & k & 3k \\ 0 & k & 2k & 4k \\ 0 & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} E & C \\ O & -E \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} D & O \\ F & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E+D & C \\ F & O \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, F=\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

适当的分块可以化简矩阵的运算，特别是对乘法的而言

例 设 $A=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\hline -1&2&1&0\\1&1&0&1\end{array}\right)$, $B=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&1&0\\-1&2&0&1\\\hline 1&0&4&1\\-1&-1&2&0\end{array}\right)$,

用分块矩阵计算 AB.

解 按图示方式，把 A,B 分块成

$$A=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix},$$

其中 $E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$, $A_1=\begin{pmatrix}-1&2\\1&1\end{pmatrix}$, $B_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&2\end{pmatrix}$,

$B_{21}=\begin{pmatrix}1&0\\-1&-1\end{pmatrix}$, $B_{22}=\begin{pmatrix}4&1\\2&0\end{pmatrix}$. 则

$$AB=\begin{pmatrix}E&O\\A_1&E\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}B_{11}&E\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}B_{11}&E\\A_1B_{11}+B_{21}&A_1+B_{22}\end{pmatrix}.$$

$$\text{又}\ A_1B_{11}+B_{21}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-3 & 4\\ 0 & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$A_1+B_{22}=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 3 & 1\end{pmatrix},$$

$$AB=\begin{pmatrix}B_{11} & E\\ A_1B_{11}+B_{21} & A_1+B_{22}\end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad O=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix},$$

$$B_{21}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & -1\end{pmatrix},\quad B_{22}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 0 & 1\\ -2 & 4 & 3 & 3\\ -1 & 1 & 3 & 1\end{pmatrix}.$$

(4) 分块矩阵的转置

设
$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & \cdots & A_{sr} \end{pmatrix},$$

则
$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} A_{11}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{s1}^{\mathrm{T}} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{1r}^{\mathrm{T}} & \cdots & A_{sr}^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}.$$

即先转置分块矩阵，再转置每一个小分块。

（5）准对角矩阵

设 A 为 n 阶方阵, 若 A 的分块矩阵只有在主对角线上有非零子块, 其余子块都为零矩阵, 且非零子块都是方阵, 即

$$A=\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_s \end{pmatrix},$$

其中 $A_i\ (i=1,2,\cdots,s)$ 都是方阵, 那么称 A 为准对角矩阵.

结论：根据拉普拉斯展开定理的特殊情形，准对角矩阵的行列式有：

$$|A|=|A_1|\ |A_2|\cdots|A_s|$$

在介绍矩阵分块这部分知识时，我们重点讲了如何“分”现有的矩阵

但分块理论完全可以逆过来使用，即把已有的矩阵“合”成新的矩阵

二、方阵乘积定理:

定理（记住结论）：方阵乘积的行列式等于方阵行列式的乘积，即如果A, B是两个同阶的方阵，那么

$$|AB| = |A||B|.$$

证明（了解即可）：设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

令

$$C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

其中$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \ (\, i = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, n\,)$

即要证明： $|\boldsymbol{C}| = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}|.$

大家回忆一下，哪个地方曾经出现过行列式的乘积？

关键一步

构造分块矩阵 $D = \begin{pmatrix} A & O \\ -E & B \end{pmatrix}$

由拉普拉斯展开定理：　$|\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$.

最终有　$D' = \begin{pmatrix} A & C \\ -E & O \end{pmatrix}$

首先，由行列式性质：$|\boldsymbol{D}| = |\boldsymbol{D}'|$

其次，再由拉普拉斯展开定理：

$$|D'| = \begin{vmatrix} A & C \\ -E & O \end{vmatrix} = |C|(-1)^{\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} n+i} |-E| = (-1)^{n^2+n} |C|$$

定理得证

思考题： $|A+B| = |A|+|B|$是否成立？

三、两种常用的分块法

1. 按行分块

对于 $m \times n$ 矩阵 A 可以进行如下分块：

$$A=\left(\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \hdashline \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hdashline a_{m1} & a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}.$$

2. 按列分块

对于 $m \times n$ 矩阵 A 可以进行如下分块：

$$A = \left(\begin{array}{c:c:c:c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}\right)$$

$$= (a_1, a_2, \cdots, a_n).$$

对于矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$ 与矩阵 $B=(b_{ij})_{s\times n}$ 的乘积矩阵 $AB=C=(c_{ij})_{m\times n}$，若把 A 按行分成 m 块，把 B 按列分成 n 块，便有

$$AB=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_m\end{pmatrix}(b_1,b_2,\cdots,b_n)=\begin{pmatrix}\alpha_1 b_1 & \alpha_1 b_2 & \cdots & \alpha_1 b_n\\ \alpha_2 b_1 & \alpha_2 b_2 & \cdots & \alpha_2 b_n\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_m b_1 & \alpha_m b_2 & \cdots & \alpha_m b_n\end{pmatrix}$$

$$=(c_{ij})_{m\times n},\qquad c_{ij}=\alpha_i b_j=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}.$$

恰好是矩阵乘法的定义式

作业：P62，习题2

9

11

12

13

20