2.3 矩阵的秩

矩阵的初等变换

定义 下面三种变换称为矩阵的**初等行变换**:

(i) 对调两行(对调 i, j 两行, 记作 $r_i \leftrightarrow r_j$);

(ii) 以数 $k \neq 0$ 乘以某一行中的所有元素

(第 i 行乘以 k , 记作 $r_i \times k$);

(iii) 把某一行所有元素的 k 倍加到另一行对应的元素上去

(第 j 行的 k 倍加到第 i 行上,记作 $r_i + kr_j$).

把定义中的“行”换成“列”,即得矩阵的**初等列变换**的定义. 矩阵的初等行变换与初等列变换, 统称**初等变换.**

若$m \times n$矩阵A经一次初等变换变成B，则B也是$m \times n$矩阵，并且B也可以经一次初等变换变成A.

两个矩阵的等价关系

定义 如果矩阵 A 经有限次初等变换变成矩阵 B，就称**矩阵 A 等价于 B.**

矩阵等价关系的性质

(i) 反身性　A 等价于 A;

(ii) 对称性　若 A 等价于 B, 则 B 等价于 A;

(iii) 传递性　若 A 等价于 B, B 等价于 C, 则 A 等价于 C.

阶梯形矩阵

1. 定义 满足下面两个条件的矩阵称为

阶梯形矩阵:

(i) 若某行中每个元素都为0,那么位于该行下面各行元素也全为0

(ii) 设矩阵有 r 个非零行,第 i 个非零行的第一个非零元素所在的列号为 $t_i\ (i = 1, 2, \cdots, r)$, 则

$$t_1 < t_2 < \cdots < t_r .$$

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

阶梯形矩阵的特点:

(1).阶梯线下方的元素全为零;

(2).每个台阶只有一行, 台阶数即是非零行的行数,;

(3).阶梯线的竖线(每段竖线的长度为一行)后面的第一个元素为非零元,也就是非零行的第一个非零元.

定理 每一个矩阵都可以经过一系列的初等**行变换**化为阶梯形矩阵.

注：结果不唯一

以后用$A \longrightarrow B$, 表示矩阵A经过一次（或几次）初等变换化为矩阵B

定义　如果一个矩阵的左上角为单位矩阵,其他位置的元素都为零,则称这个矩阵为**标准形矩阵**.

定理　任何矩阵 A 都可经过**初等变换**化为标准形矩阵，后者称为 A 的等价标准型。

任何矩阵经初等行变换必能化为阶梯形矩阵，但不一定能化成标准形矩阵，如果再使用初等列变换, 则一定能化成标准形矩阵.

将矩阵化为行阶梯形矩阵的方法不是唯一的, 所得结果也不唯一.

但一个矩阵的标准形是唯一的，这反映了矩阵的另一个属性, 即矩阵的秩的概念.

定义 在 $m\times n$ 矩阵 A 中任取 k 行 k 列 $(k\le m, k\le n)$，位于这些行列交叉处的 k^2 个元素，不改变它们在 A 中所处的位置次序而得的 k 阶行列式，称为矩阵 A 的 k **阶子式**.

注： $m\times n$ 矩阵 A 的 k 阶子式共有 $C_m^k\cdot C_n^k$ 个.

例如，
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 5 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},\quad \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

注：

(1)：A 的每个元素 都是 A 的一个一阶子式

(2)：当 A 为 n 阶方阵时，n 阶子式即为 $|A|$

矩阵的秩定义

定义 若在$m \times n$矩阵 A 中,至少有一个r 阶子式不为零,而所有的 $r+1$ 阶子式（若存在的话）都为零,则称r 为矩阵A的**秩**，记作 $r(A)$. **规定零矩阵的秩等于零.**

矩阵秩的一些性质:

(1) 若A为$m \times n$ 矩阵，则 $0 \leq r(A) \leq \min\{m, n\}$;

(2) 若矩阵A中有某个s阶子式不为0，则 $r(A) \geq s$;

(3) 若 A 中所有 t 阶子式全为0，则 $r(A) < t$;

注 （1）若n阶方阵的秩等于其阶数，称A为满秩

（或非奇异的，非退化的）；

此时方阵的行列式不等于0

（2）若$r(A)<n$,则称为降秩（或奇异的，退化的）

此时方阵的行列式等于0

例 求矩阵的秩 $A=\begin{pmatrix}1&2&3&-1\\2&4&6&-2\\3&0&2&1\end{pmatrix}$

解 A中的二阶子式 $\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=-6\neq 0$

A的子式的最高阶数是3

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&0&2\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&3&-1\\2&6&-2\\3&2&1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}1&2&-1\\2&4&-2\\3&0&1\end{vmatrix},\quad \begin{vmatrix}2&3&-1\\4&6&-2\\0&2&1\end{vmatrix}$$

它们的值都为零 故 $r(A)=2.$

例 求矩阵 $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的秩.

解 $\because$ B 是一个阶梯形矩阵， 其非零行只有3行,

$\therefore$ B 的所有四阶子式全为零.

而 $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \neq 0,$

阶梯形矩阵B的非零行数？

$\therefore \quad r(B) = 3.$

定理　初等变换不改变矩阵的秩.

性质　两个$m \times n$矩阵A, B等价的条件是当且仅当它们有相同的秩.

性质　阶梯形矩阵的秩等于它非零行的数目.

利用初等变换求矩阵的秩（要掌握）

例 设

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

求矩阵 A 的秩.

解

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \\ 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{r_3 - 2r_1 \\ r_4 - 3r_1}]{r_2 - r_4} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-3r_1]{\substack{r_2-r_4\\ r_3-2r_1}} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_4-4r_2]{r_3-3r_2} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_4-r_3} \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

由阶梯形矩阵有三个非零行可知 $r(A) = 3.$

例 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & a & -1 \\ 5 & 6 & 3 & b \end{pmatrix},$$

已知 $r(A)=2$，求 a 与 b 的值.

解
$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & a+3 & -4 \\ 0 & -4 & 8 & b-5 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & a+3 & -4 \\ 0 & 0 & 5-a & b-1 \end{pmatrix}$$

因 $r(A)=2$，故 $a=5$， $b=1$.

小　结

本节重点掌握矩阵的秩的定义和性质以及求矩阵的秩(法1：定义；法2：初等行变换)。

作业　P63

14(1)(2)　　并计算该两个矩阵的秩