第二节　相似矩阵与矩阵可对角化条件

先看例子：已知$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$，试求$A^{100}$

尝试1：$A^2=\begin{pmatrix}-1 & 10\\ -5 & 14\end{pmatrix}$，$A^3=\begin{pmatrix}-11 & 38\\ -19 & 46\end{pmatrix}$，

$A^4=\begin{pmatrix}-49 & 130\\ -65 & 146\end{pmatrix}$，… 计算量太大

尝试2：如果可以找到一个可逆矩阵P，

使得$P^{-1}AP$为一个对角矩阵B，即$P^{-1}AP=B$

那么$A^k=(PBP^{-1})\cdots(PBP^{-1})=PB^kP^{-1}$

事实上，我们可以找到$P=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -3\end{pmatrix}$使得$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$

因此容易算出$A^{100}=P\begin{pmatrix}2^{100} & 0\\ 0 & 3^{100}\end{pmatrix}P^{-1}$

定义：设A,B为n阶方阵，若存在n阶可逆矩阵P，使$P^{-1}AP=B$，称A与B相似，记作$A \sim B$

可逆矩阵P称为将A变为B的相似变换矩阵

矩阵之间的相似是一种等价关系，即满足

(1) 反身性：$A \sim A$;

(2) 对称性：$A \sim B \Rightarrow B \sim A$;

(3) 传递性：$A \sim B, B \sim C \Rightarrow A \sim C$

讨论：两个矩阵相似与两个矩阵等价的关系。

性质1　相似矩阵有相同的秩

证明：$A \sim B \Rightarrow$ 存在P，使$P^{-1}AP = B$

$$\Rightarrow rank(B) = rank(P^{-1}AP) = rank(A)$$

性质2　相似矩阵行列式相等

证明：$A \sim B \Rightarrow$ 存在可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP = B$

$$\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P)$$

$$= \det(P^{-1})\det(P)\det(A) = \det(P^{-1}P)\det(A) = \det(A)$$

性质3 相似矩阵都可逆或都不可逆，当可逆时，逆矩阵也相似(对应的伴随矩阵也相似)

证明： $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B} \Rightarrow \det(\boldsymbol{A}) = \det(\boldsymbol{B})$ 同时等于0或不等于0

$\Rightarrow \boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$都可逆或不可逆

若$A \sim B$, 且都可逆, 则存在可逆矩阵P, 使$B = P^{-1}AP$

从而$B^{-1} = (P^{-1}AP)^{-1} = P^{-1}A^{-1}P$,即$B^{-1} \sim A^{-1}$

性质4 相似矩阵有相同的特征多项式，从而特征值也相同

证明： $\det(B-\lambda E)=\det(P^{-1}AP-\lambda E)$

$$=\det(P^{-1}AP-P^{-1}(\lambda E)P)$$

$$=\det(P^{-1}(A-\lambda E)P)=\det(A-\lambda E)$$

性质5 $A\sim B\Rightarrow A^T\sim B^T$

证明： 设 $A\sim B$，则存在可逆矩阵 P，使得 $B=P^{-1}AP$

则有 $B^T=(P^{-1}AP)^T=P^TA^T(P^{-1})^T$，从而 $A^T\sim B^T$

矩阵可对角化条件

定义： 若A与对角矩阵相似，
则称矩阵A 可对角化

问题：是不是所有矩阵都可对角化?

定理：n阶方阵A与对角矩阵$diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$相似

（即A可对角化）$\Leftrightarrow$ A有n个线性无关的特征向量

证明：（$\Rightarrow$）设$A\sim diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,

且存在可逆矩阵P使得$P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$,即

$AP=Pdiag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

设$P=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$,其中$\beta_1,\cdots,\beta_n$为$n$个列向量,则

$A(\beta_1,\cdots,\beta_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$

所以$A\beta_i=\lambda_i\beta_i$，即P的n个列向量恰好为A的对应于$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的$n$个特征向量

$(\Leftarrow)$ 设$\boldsymbol{A}$有线性无关特征向量$\beta_1,\cdots,\beta_n$,相应特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n \Rightarrow \boldsymbol{A}\beta_i = \lambda_i\beta_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$

构造$P=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$, $\beta_1,\cdots,\beta_n$线性无关, 故P可逆

$$P\cdot diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)=(\beta_1,\cdots,\beta_n)\cdot diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$$

$$=(\lambda_1\beta_1,\cdots,\lambda_n\beta_n)=(A\beta_1,\cdots,A\beta_n)=AP,$$

$$\therefore P^{-1}AP=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n).$$

推论1：如果n阶矩阵A有n个不同的特征值，则A可对角化

证明：n阶矩阵A有n个不同的特征值，
从而有n个线性无关的特征向量，故A可对角化

推论2：如果n阶复矩阵A的特征多项式无重根，则A可对角化

证明：复数范围内，每个n次多项式都有n个根，
结合无重根条件知，A有n个线性无关的特征向量，
故A可对角化

推论3 若n阶方阵A有m个互不相等的特征值，
与它们对应的线性无关的特征向量的最大个数
依次为$k_1, k_2, \cdots, k_m$且$k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$,
则A可以对角化

举例说明如何判断n阶方阵A是否可对角化?

例：$A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$是否可对角化？

若可对角化,则找出其相似变换矩阵和相似的对角矩阵.

解：(1).求出A的所有特征值

计算可得A的所有特征值为$\lambda_1 = \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -6$

(2).求出每个特征值的线性无关的特征向量

解方程组$(A-3E)X = 0$,得$\lambda_1=\lambda_2=3$的一个基础解系

$\eta_1 = \left(-2,\ 1,\ 0\right)^T, \eta_2 = \left(2,\ 0,\ 1\right)^T$;

解方程组$(A+6E)X = 0$,得$\lambda_3=-6$的一个基础解系

$\eta_3 = \left(1,\ 2,\ -2\right)^T$

(3).判别是否可对角化

由于 $\eta_1=(-2,\ 1,\ 0)^T,\eta_2=(2,\ 0,\ 1)^T,\eta_3=(1,\ 2,\ -2)^T$

是三个线性无关向量,故A可对角化.

(4).写出相似变换矩阵和对角矩阵

取 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 1 & -2\end{pmatrix}$ 为相似变换矩阵,

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -6\end{pmatrix}$ 为对角矩阵.

n阶方阵A是否可对角化步骤总结

(1).求出A的所有特征值.　设所有互异的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_s$, 相应的重数为$r_1,\cdots,r_m(r_1+\cdots+r_m=n)$;

(2).对每个特征值λ_i,解方程$(A-\lambda_i E)X=0$, 得对应特征值λ_i的线性无关的特征向量(基础解系)

$$\eta_{i1},\cdots,\eta_{im_i}(i=1,\cdots,s)$$

(3).若$m_1+\cdots+m_s=n$,则A可对角化,否则不可对角化

(4).当A可对角化时, 把n个线性无关特征向量当作相似特征变换矩阵P的列向量, 即令

$$P=(\eta_{11},\cdots,\eta_{1m_1},\cdots,\eta_{s1},\cdots,\eta_{sm_s})$$

则$P^{-1}AP = diag(\underbrace{\lambda_1,\cdots,\lambda_1}_{r_1\text{个}},\cdots,\underbrace{\lambda_s,\cdots,\lambda_s}_{r_m\text{个}})$为对角矩阵,

其对角线上的元素恰好是A所有互异的特征值,并且P的列向量顺序与对角元素对应

作业

习题5

9 (2)、 (4) ，10， 12

书本例题2.2(P138)

已知 $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$,

在复数范围内，求可逆矩阵P,

使$P^{-1}AP$为对角矩阵

解：(1).求出A的所有特征值

A的特征方程为$|A-\lambda E|=\lambda(\lambda^2+19)=0$,

可得A的所有特征值为$\lambda_1=0, \lambda_2=i\sqrt{19}, \lambda_3=-i\sqrt{19}$

(2).求出每个特征值的线性无关的特征向量

解方程组$AX=0$,得$\lambda_1=0$的一个基础解系$\eta_1=(3, -2, 4)^T$;

解方程组$(A-i\sqrt{19}E)X=0$,得$\lambda_2=i\sqrt{19}$的一个基础解系

$$\eta_2=\left(5,\ 2\sqrt{19}i+3, \sqrt{19}i-6\right)^T;$$

解方程组$(A+i\sqrt{19}E)X=0$,得λ_3=-$i\sqrt{19}$的一个基础解系

$$\eta_3=\left(5,\ -2\sqrt{19}i+3,\ -\sqrt{19}i-6\right)^T$$

(3).判别是否可对角化

由于η_1,η_2,η_3是三个不同特征值的特征向量,

所以η_1,η_2,η_3是三个线性无关向量,故A可对角化.

(4).写 出 相 似 变 换 矩 阵 和 对 角 矩 阵

取 $P=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=\begin{pmatrix} 3 & 5 & 5 \\ -2 & 2\sqrt{19}i+3 & -2\sqrt{19}i+3 \\ 4 & \sqrt{19}i-6 & -\sqrt{19}i-6 \end{pmatrix}$

为 相 似 变 换 矩 阵,

则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{19}i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{19}i \end{pmatrix}$ 为 对 角 矩 阵 .