数据通信原理

信号传输及处理的线性代数基础

全宇晖

二零一九年秋

线性模型（传输例子）

$$\boldsymbol{f} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_N \boldsymbol{v}_N$$

码字1　码字2　码字3

发送信号 (连续)　载波1 (连续)　载波2 (连续)　载波N (连续)

1. 假设要发送方要传输消息$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$，该模型意味着什么？ 离散码 → 连续波
2. 接收方(采集方)拿到$\boldsymbol{f}$，然后要做什么？

   连续波 → 离散码：求解出$\{\alpha_i\}_i$

线性模型（处理例子）

$$\boldsymbol{f} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_N \boldsymbol{v}_N$$

系数1 系数2 系数3

信号

变换域

通常，信号在原域难以刻画其特性，而在变换域会出现明显的统计特性，如系数$\{\alpha_i\}_i$稀疏。Then？

1. 根据输入信号求解出$\{\alpha_i\}_i$；
2. 对$\{\alpha_i\}_i$进行处理，如稀疏化；
3. 对$\{\alpha_i\}_i$进行逆变换，得到处理后的信号。

线性模型

$$\boldsymbol{f} = \alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{v}_2 + \cdots + \alpha_N \boldsymbol{v}_N$$

注意在信号传输和信号处理中模型处理对象原域和变换域的差异！

传输：处理对象是$\{\alpha_i\}$，原域由$\{\boldsymbol{v}_i\}_i$定义。

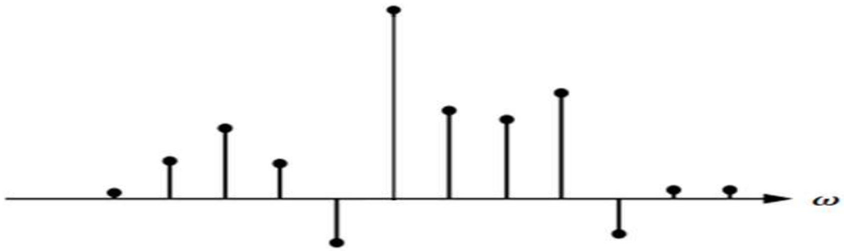
处理：处理对象是$\boldsymbol{f}$，变换域由$\{\boldsymbol{v}_i\}_i$定义。

核心和基础

- $\boldsymbol{f}$的特性（在什么空间）
- $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N\}$的定义（用什么变换）
- $\{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N\}$的求解

数字信号的线性代数基础

离散信号的向量表示



3	144	109	115	176
5	233	194	181	121
8	121	47	40	41
13	98	241	221	162
21	219	32	5	203

[1,2,3,2,-1,5,3,2,3,-1,0,0]

[3,5,8,13,21,144,233,121,98,219,...]

向量表示有什么好处？

向量空间 (Vector Space)

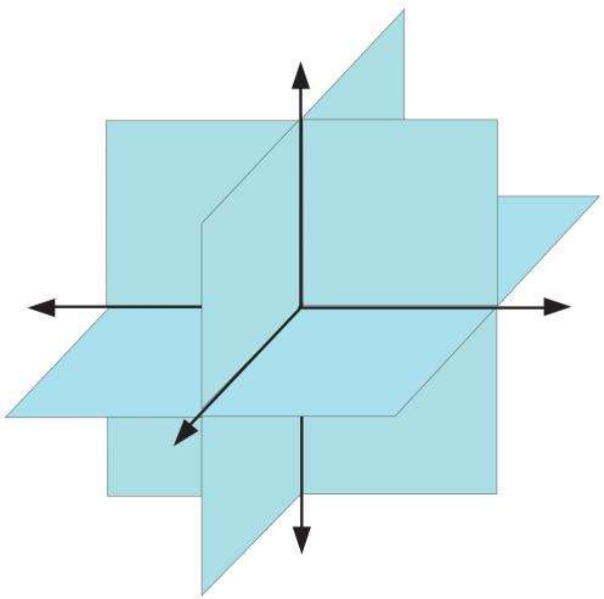
粗略说，向量空间$\mathbb{V}$是一个定义了加法和数乘的集合，满足：

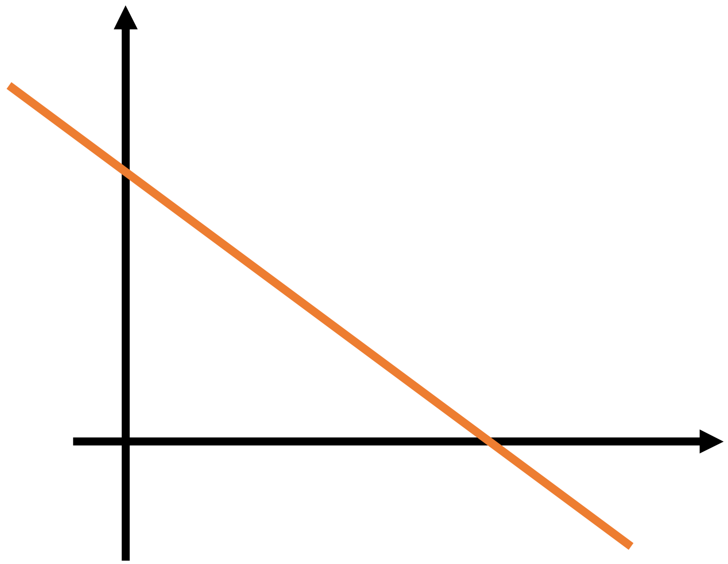
- 加法闭合：If $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, then $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$.
- 数乘闭合：If $\alpha \in \mathbb{C}$ and $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, then $\alpha\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$.
- 可交换性：If $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, then $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$.
- 可结合性：If $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{V}$, then $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$.
- 存在零元：$\exists \boldsymbol{0}, \forall \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{v}$.
- 加法可逆：If $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, then $\exists - \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}, \boldsymbol{v} + (-\mathbb{V}) = \boldsymbol{0}$.
- 数乘结合：If $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, then $\alpha(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$.
- 加法分配：If $\alpha \in \mathbb{C}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, then $\alpha(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$.
- 数乘分配：If $\alpha, \beta \in \mathbb{C}, \boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, then $(\alpha + \beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$.
- 存在幺元：If $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$, then $1\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}$.

线性子空间 (Linear Subspace)

$$\mathbb{U} \subseteq \mathbb{V}$$

$\boldsymbol{U}$：具有与$\boldsymbol{V}$相同的加法和数乘定义的向量空间





线性子空间对信号处理和分析有什么意义？

矩阵与子空间

如何理解一个矩阵$\boldsymbol{A}$？（三种理解方式）

1. 线性方程组

[消元]

2. 行/列向量的集合

$$\mathrm{span}(\boldsymbol{A}) \rightarrow \{w_1\boldsymbol{a}_1 + w_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + w_N\boldsymbol{a}_N\}$$

3. 线性变换

[像空间]和[零空间]

零空间(Null Space)和像空间(Range)

$$null(\boldsymbol{A}) = \{\boldsymbol{x}: \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$$

$$\text{range}(\boldsymbol{A}) \rightarrow \{\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}: \boldsymbol{x} \in \Re^{N}\}$$

零空间和像空间是向量空间吗？是线性子空间吗？

span($\boldsymbol{A}$)和range($\boldsymbol{A}$) 有什么联系？

向量的内积和范数

- 内积

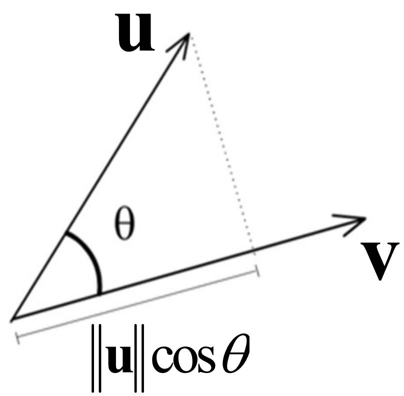
$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{u} = \sum_{n=1}^{N} u_n v_n = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos\theta$$

- l_2范数

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = \mathbf{u}^T \mathbf{u} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{u}_n^2$$

- 投影

$$\mathbf{v}_{\mathbf{u}} = \frac{\|\mathbf{u}\| \cos\theta}{\|\mathbf{v}\|} \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{u}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \mathbf{v} = \mathbf{v} \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{u}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}}$$



向量的其他范数

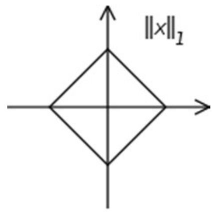
- l_0 范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_0 = \#\{j:\ \boldsymbol{x}_j \neq 0\}$$

等高线图像？

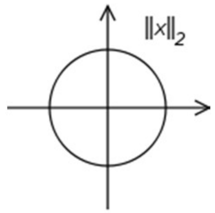
- l_1范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_1 = \sum_i |\boldsymbol{x}_i|$$



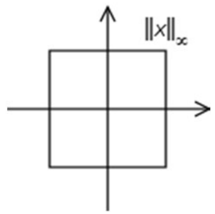
- l_2范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_2 = \sqrt[2]{\sum_i \boldsymbol{x}_i^2}$$



- l_∞范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_\infty = \max_i |\boldsymbol{x}_i|$$



- l_p范数

$$\|\boldsymbol{x}\|_p = (\sum_{i=1}^{N} |\boldsymbol{x}_i|^p)^{\frac{1}{p}}$$