§4.6 线性方程组解的结构

回顾：线性方程组解的判定

1. 包含 n 个未知数的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 有**非零解**的充分必要条件是系数矩阵的秩 $R(A) < n$.

2. 包含 n 个未知数的非齐次线性方程组 $Ax = b$ 有解的充分必要条件是 $R(A) = R(A, b)$，其中(A, b)为增广矩阵, 并且

(1). 当$R(A) = R(A, b) = n$时，方程组有**唯一解**；

(2). 当$R(A) = R(A, b) < n$时，方程组有**无限多个解** .

向量线性表示与线性方程组的关系

给定具有m个未知数的n个线性方程组成的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \cdots, \alpha_m = \begin{pmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

$\Updownarrow$

向量方程形式

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots x_m\alpha_m = \beta$$

方程组有解

$\Updownarrow$

β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$ 线性表示

定理： 向量 β 可由向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示

$$\Updownarrow$$

方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+\cdots x_m\alpha_m=\beta$ 有解

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m)=\mathrm{rank}(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m,\beta)$$

引言

定义：线性方程组的解的结构，就是指当线性方程组有无限多个解时，解与解之间的相互关系．

备注：

- **当方程组无解或者存在唯一解时，无须讨论解的结构．**
- **下面的讨论都是假设线性方程组有解．**

解向量的定义

定义：设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ ，如果

$$x_1 = \xi_{11}，\ x_2 = \xi_{21}，\cdots，\ x_n = \xi_{n1}$$

为该方程组的解，则

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_{11} \\ \xi_{21} \\ \vdots \\ \xi_{n1} \end{pmatrix}$$

称为方程组的解向量．

齐次线性方程组解的性质

性质1：若 $x = \xi_1$，$x = \xi_2$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，

则 $x = \xi_1 + \xi_2$ 还是 $Ax = 0$ 的解．

证明：$A(\xi_1 + \xi_2) = A\xi_1 + A\xi_2 = 0 + 0 = 0$ ．

性质2：若 $x = \xi$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，k 为实数，

则 $x = k\xi$ 还是 $Ax = 0$ 的解．

证明：$A(k\xi) = k(A\xi) = k\,0 = 0$ ．

结论：若 $x = \xi_1,\ x = \xi_2, \ldots,\ x = \xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$

的解，则 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots + k_t\xi_t$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

结论：若 $x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_t$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解，则 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots + k_t\xi_t$ 还是 $Ax = 0$ 的解.

- 已知齐次方程组 $Ax = 0$ 的几个解向量，可以通过这些解向量的线性组合给出更多的解．
- 能否通过有限个解向量的线性组合把 $Ax = 0$ 的解全部表示出来？
- 把 $Ax = 0$ 的全体解组成的集合记作 S，若求得 S 的一个极大线性无关组S_0：$x = \xi_1, x = \xi_2, \ldots, x = \xi_t$，那么$Ax = 0$ 的通解可表示为 $x = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \ldots + k_t\xi_t$．
- 齐次线性方程组的解集的极大线性无关组称为该齐次线性方程组的**基础解系**（不唯一）．

基础解系的概念

定义：齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一组解向量：$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$

如果满足

① ξ_1，ξ_2，…，ξ_t 线性无关；

②方程组中任意一个解都可以表示成 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ 的线性组合，

那么称这组解是齐次线性方程组的一个**基础解系**．

定理：设 $m \times n$ 矩阵的秩 $R(A) = r$，则 n 元齐次线性方程组

$Ax = 0$ 的解集 S 存在一个基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$．

注记：S 的基础解系所含个数等于 $n - R(A)$ ，把基础解系所含解的个数称为解集的秩，记作 R_S ，即 $R_S = n - R(A)$。

设 $R(A)=r$，为叙述方便，

不妨设 A **经过初等行变换得到的最简形矩阵**为

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1,n-r} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_{21} & \cdots & b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_{r,1} & \cdots & b_{r,n-r} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{m\times n}$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{前 } r \text{ 列}}$ $\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{后 } n-r \text{ 列}}$

对应的齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + b_{11}x_{r+1} + \cdots + b_{1,n-r}x_n = 0, \\ x_2 + b_{21}x_{r+1} + \cdots + b_{2,n-r}x_n = 0, \\ \cdots\cdots \\ x_r + b_{r1}x_{r+1} + \cdots + b_{r,n-r}x_n = 0. \end{cases}$$

令 $x_{r+1}, \dots, x_n$ 作自由变量，则

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -b_{11}x_{r+1} - b_{12}x_{r+2} - \cdots - b_{1,n-r}x_n, \\ x_2 = -b_{21}x_{r+1} - b_{22}x_{r+2} - \cdots - b_{2,n-r}x_n, \\ \qquad \cdots\cdots \\ x_r = -b_{r1}x_{r+1} - b_{r2}x_{r+2} - \cdots - b_{r,n-r}x_n. \end{cases}$$

齐次线性方程组的通解

令 $x_{r+1} = c_1,\ x_{r+2} = c_2, \ldots, x_n = c_{n-r}$ ，则

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11}c_1 - \cdots - b_{1,n-r}c_{n-r} \\ \vdots \\ -b_{r1}c_1 - \cdots - b_{r,n-r}c_{n-r} \\ c_1 \\ \ddots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + c_{n-r} \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

记作 $x = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$ ．（满足基础解系②）

$$(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n-r}) = \underbrace{\begin{pmatrix} -b_{11} & -b_{12} & \cdots & -b_{1,n-r} \\ -b_{21} & -b_{22} & \cdots & -b_{2,n-r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -b_{r,1} & -b_{r,2} & \cdots & -b_{r,n-r} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}}_{n-r\text{ 列}} \begin{array}{l} \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}\text{前 } r \text{ 行} \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}a\\a\\a\\a\end{matrix}}\right\}\text{后 } n-r \text{ 行} \end{array}$$

故 $R(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}) = n - r$ ，

即 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 线性无关．（满足基础解系①）

于是 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-r}$ 就是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系．

课本的证法：
$$\begin{cases} x_1 = \boxed{-b_{11}} x_{r+1} \boxed{-b_{12}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{1,n-r}} x_n, \\ x_2 = \boxed{-b_{21}} x_{r+1} \boxed{-b_{22}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{2,n-r}} x_n, \\ \cdots\cdots \\ x_r = \boxed{-b_{r1}} x_{r+1} \boxed{-b_{r2}} x_{r+2} - \cdots \boxed{-b_{r,n-r}} x_n. \end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix} x_{r+1} \\ x_{r+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$，则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2, \\ \vdots \\ x_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ -b_{21} \\ \vdots \\ -b_{r1} \end{pmatrix}$

$$\xi_1 = \begin{pmatrix} -b_{11} \\ \vdots \\ -b_{r1} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \xi_2 = \begin{pmatrix} -b_{12} \\ \vdots \\ -b_{r2} \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \xi_{n-r} = \begin{pmatrix} -b_{1,n-r} \\ \vdots \\ -b_{r,n-r} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

此即为 $Ax = 0$ 的基础解系．

所以通解为

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$$

基础解系的求法

例：求齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ **的基础解系．**

方法1：先求出通解，再从通解求得基础解系．

(1). 系数矩阵化成阶梯型矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -5 & 7 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2) 写出同解方程组以及一般解

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 = 3x_3 - 4x_4 \\ x_2 = -2x_3 + 3x_4 \end{cases}$$

（3）用 向 量 形 式 写 出 一 般 解 为

令$x_3 = c_1$，$x_4 = c_2$，**得通解表达式**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3c_1 - 4c_2 \\ -2c_1 + 3c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1\xi_1 + c_2\xi_2$$

（4）确 定 一 个 基 础 解 系

因为

✓ **方程组的任意一个解都可以表示为**ξ_1, ξ_2**的线性组合．**

✓ ξ_1, ξ_2**的四个分量不成比例，所以** ξ_1, ξ_2 **线性无关．**

所以ξ_1, ξ_2**是原方程组的基础解系．**

方法2：先求出基础解系，再写出通解．

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-2\\2&3&0&-1\\1&-1&-5&7\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&-3&4\\0&1&2&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x_1 \quad -3x_3+4x_4=0\\ \quad x_2+2x_3-3x_4=0\end{cases}\quad \text{即}\quad \begin{cases}x_1=\ \ 3x_3-4x_4\\ x_2=-2x_3+3x_4\end{cases}$$

令 $\begin{pmatrix}x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ ，得 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

合起来便得到基础解系 $\xi_1=\begin{pmatrix}3\\-2\\1\\0\end{pmatrix},\ \xi_2=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\\1\end{pmatrix}$ 通解为$x=c_1\xi_1+c_2\xi_2$

非齐次线性方程组的解的性质

性质3：若 $x=\eta_1$，$x=\eta_2$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解，则 $x=\eta_1-\eta_2$ 是对应的齐次线性方程组 $Ax=0$（导出组）解．

证明： $A(\eta_1-\eta_2)=A\eta_1-A\eta_2=b-b=0$ ．

性质4：若 $x=\eta$ 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的解， $x=\xi$ 是导出组 $Ax=0$ 的解，则 $x=\xi+\eta$ 还是 $Ax=b$ 的解．

证明： $A(\xi+\eta)=A\xi+A\eta=0+b=b$ ．

根据性质3 和性质4 可知

(1). 若 $x = \eta^*$ 是 $Ax = b$ 的解， $x = \xi_1$ 是 $Ax = 0$ 的解，那么$x = \xi_1 + \eta^*$ 也是 $Ax = b$ 的解．

(2).若 $x = \eta^*$ 是 $Ax = b$ 的解, $Ax = 0$ 的通解为

$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r}$ ．于是 $Ax = b$ 的通解为

$$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \ldots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$$

求非齐次线性方程组的通解的方法:

1.找出一个特解η^*;

2.求出对应的齐次方程组的基础解系$\xi_1, \cdots,\ \xi_{n-r}$

3.写出原来方程的通解$\eta = c_1\xi_1 + \cdots + c_{n-r}\xi_{n-r} + \eta^*$

例： 求下列方程组的一个通解：

$$\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+2x_4-x_5=-4, \\ -3x_1+x_2+2x_3-5x_4-4x_5=-1, \\ 2x_1-3x_2-x_3-x_4+x_5=4, \\ -4x_1+16x_2+x_3+3x_4-9x_5=-21. \end{cases}$$

解：(1)把增广矩阵化成阶梯型矩阵

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ -3 & 1 & 2 & -5 & -4 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -1 & 1 & 4 \\ -4 & 16 & 1 & 3 & -9 & -21 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 41 & 33 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{A} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 41 & 33 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -27 & -22 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -41 & -33 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（2）写出同解方程组以及一般解

$$\begin{cases} x_1 - 27x_4 - 22x_5 = 2 \\ x_2 + -4x_4 - 4x_5 = -1 \\ x_3 - 41x_4 - 33x_5 = 3 \end{cases}$$

设 c_1, c_2 为任意常数，则一般解为

$$\begin{cases} x_1 = 27c_1 + 22c_2 + 2 \\ x_2 = 4c_1 + 4c_2 + 1 \\ x_3 = 41c_1 + 33c_2 + 3 \\ x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \end{cases}$$

（3）用向量形式写出一般解为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 27 \\ 4 \\ 41 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 22 \\ 4 \\ 33 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4)确定一个特解及对应齐次方程组一个基础解系

$$取\ \eta_1=\begin{pmatrix}27\\4\\41\\1\\0\end{pmatrix},\eta_2=\begin{pmatrix}22\\4\\33\\0\\1\end{pmatrix},\mathrm{X}^*=\begin{pmatrix}2\\-1\\3\\0\\0\end{pmatrix}$$

则X^*是原方程的一个特解,η_1,η_2是对应齐次方程的一个基础解系

(4)写出原方程的通解

原方程的通解为 $\mathrm{X}=\eta+X^*$,

其中 $\eta=c_1\eta_1+c_2\eta_2$是对应齐次方程的通解

练习：求线性方程组 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \end{cases}$ **的通解．**

提示：原方程组的通解为

$$\eta = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \eta^* = c_1\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

作业：习题四 P111

11，

14(1)，

16(2)，

23