第三章　向量代数与几何应用

一、空间直角坐标系

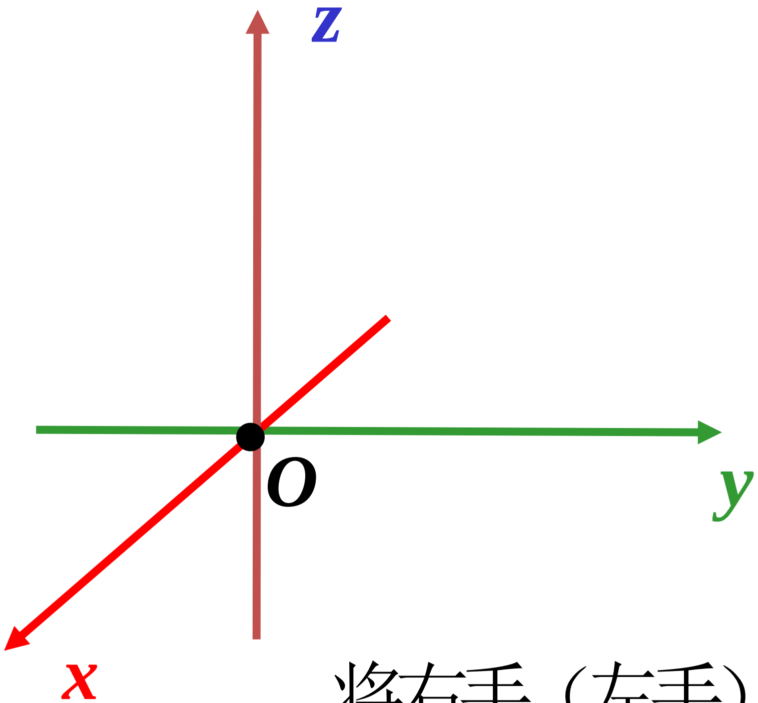
1. 空间直角坐标系

(1) 在空间中取一定点 O ;

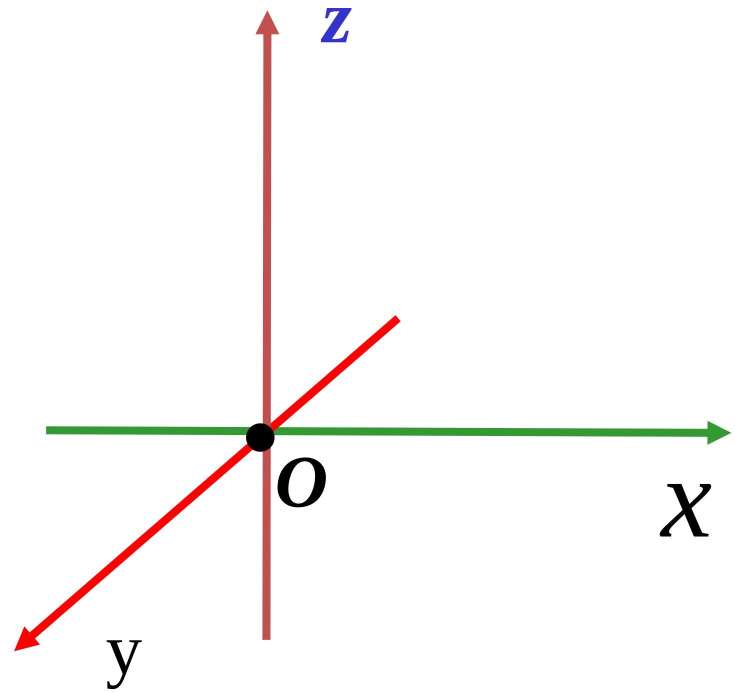
(2) 过点 O 作三条两两互 相垂直, 且成右手系的数轴:

Ox　　Oy　　Oz

右手系

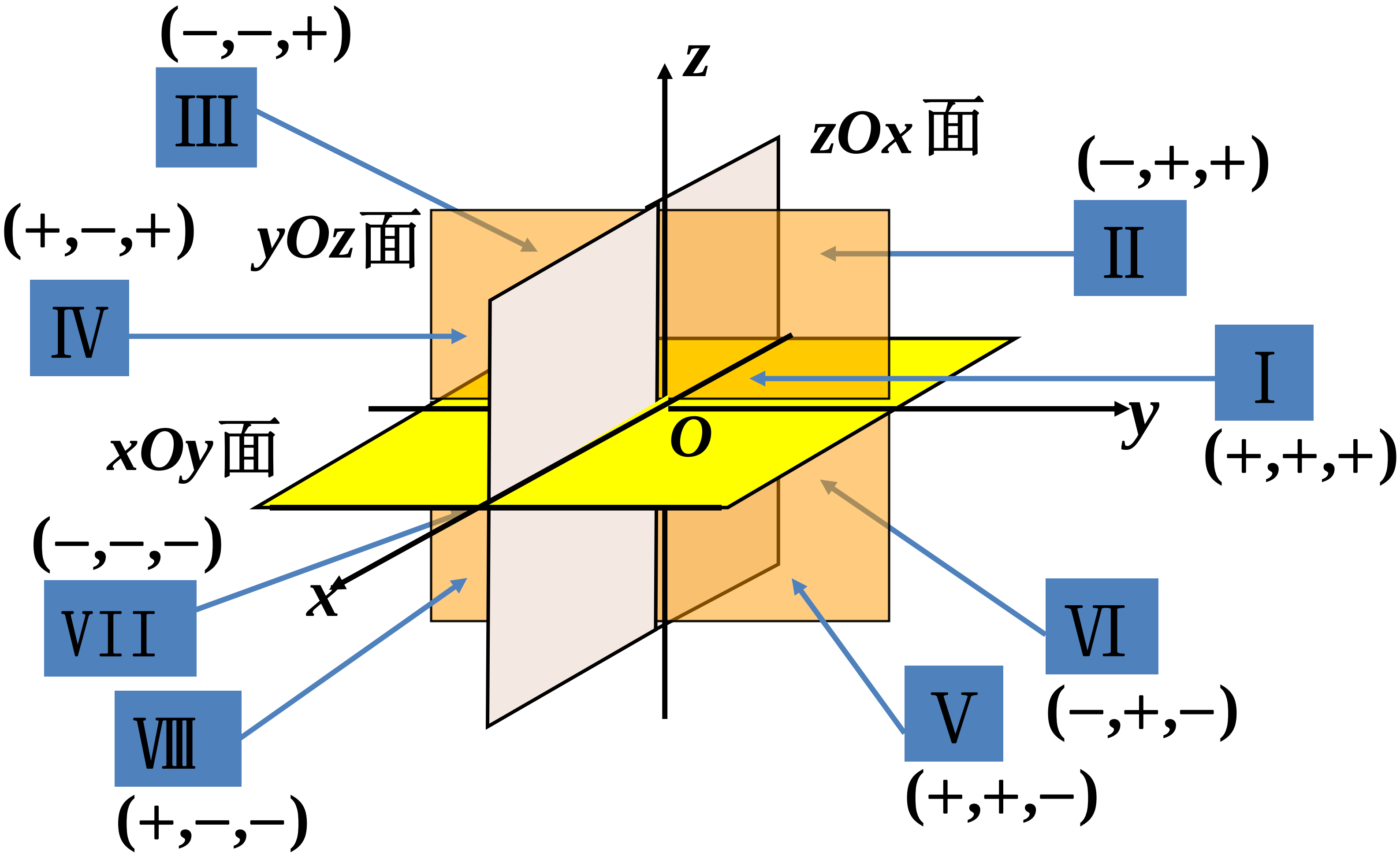


左手系



将右手（左手）四指（拇指除外）从x轴方向以小于π的角度弯向y轴，如果拇指所指方向为z轴的正向，则此坐标系为右手系（左手系）

【坐标平面】*xOy*, *yOz*, *zOx* 面



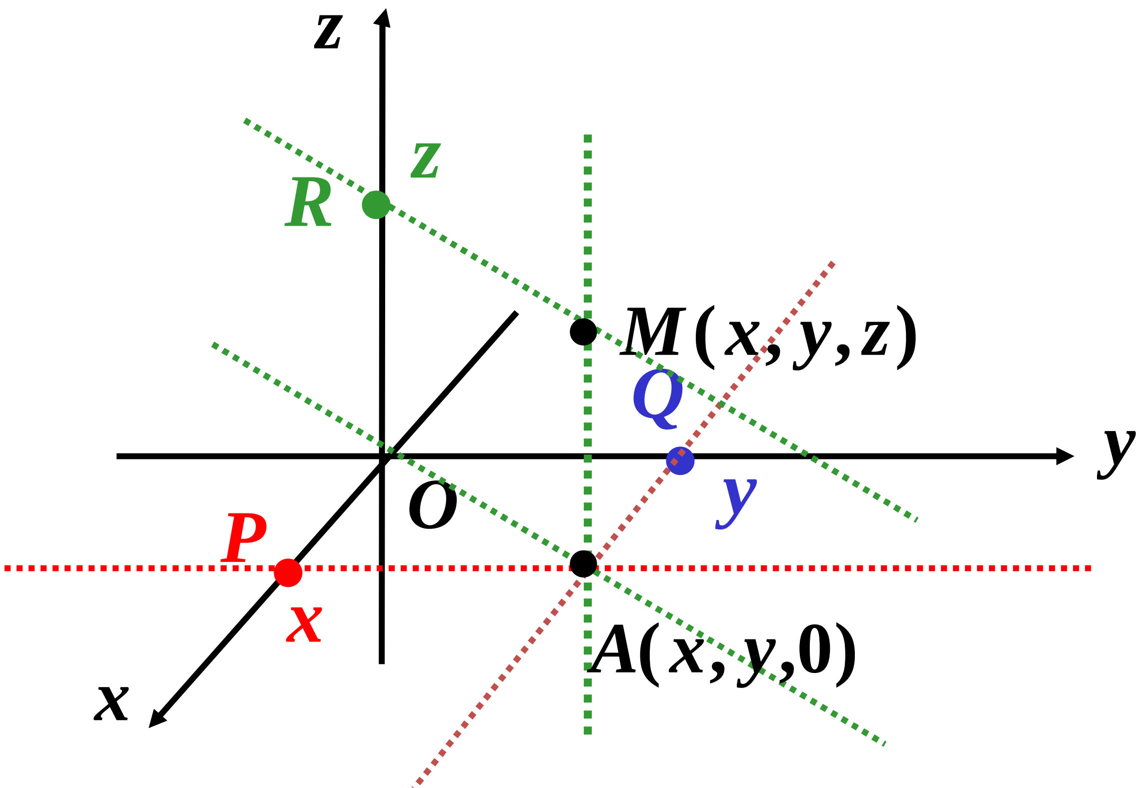
【卦限】空间直角坐标系共有八个卦限.

2. 空间点的坐标

P点的坐标为$(x, 0, 0)$； Q点的坐标为$(0, y, 0)$；

A点的坐标为$(x, y, 0)$； R点的坐标为$(0, 0, z)$；

M点的坐标为(x, y, z).



3. 空间两点间的距离

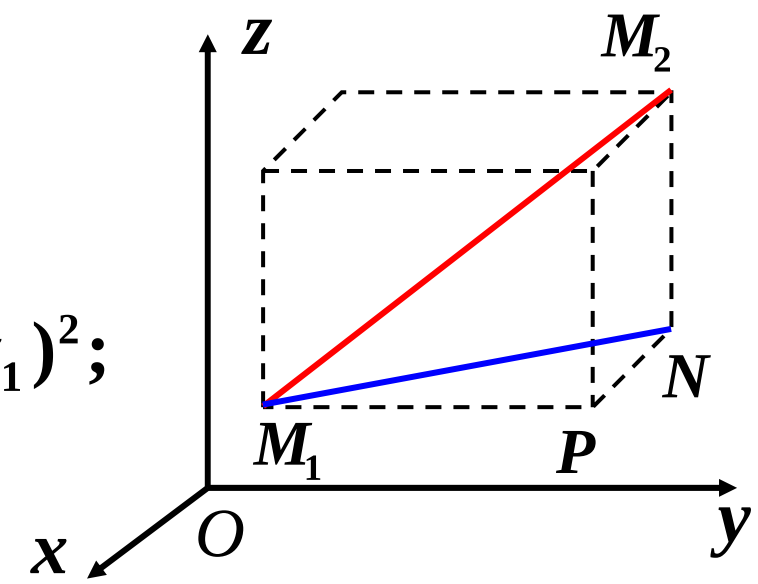
设 $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$为空间两点:

在 RtΔ M_1NM_2 和 RtΔ M_1PN 中, 有

$$|M_1M_2|^2 = |M_1N|^2 + |NM_2|^2$$

$$= (|PN|^2 + |M_1P|^2) + |NM_2|^2$$

$$= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2;$$



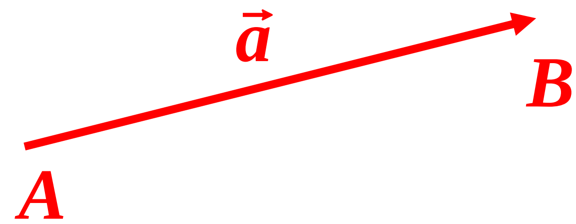
$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

二、向量的线性运算

1. 空间向量

【数学中的向量】空间中的一个箭头(有方向的线段).

【向量的表示】若向量的起点为 A,终点为 B,我们用 $\overrightarrow{AB}$ 表示此向量.
我们也用 $\vec{a},\vec{b}$ 等表示向量.



【向量的模】向量 $\overrightarrow{AB}$ 的长度称为其模,表示为 $|\overrightarrow{AB}|$.

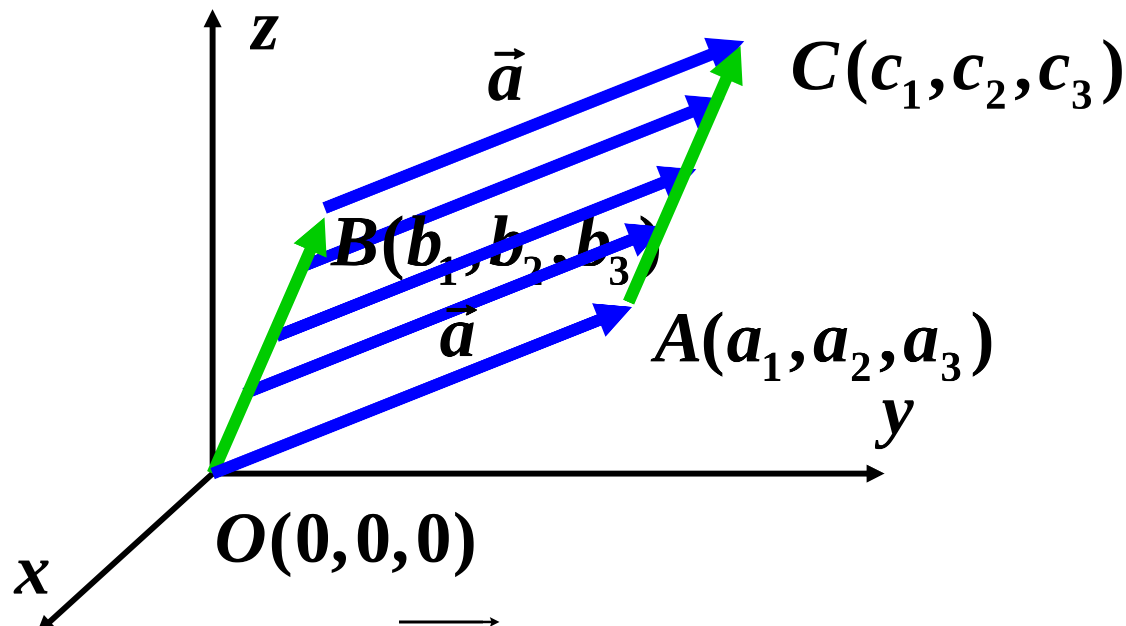
【零向量】模为 0 的向量;我们用 $\vec{0}$ 表示零向量.

约定:零向量的方向为任意.

【向量的相等】两个向量,只要方向相同,模相等,我们就规定它们是相等的,无论它们的空间位置如何.

【确定向量的方法】只要确定向量的模和方向.

2. 向量的坐标表示（向量的另一种表示方法）

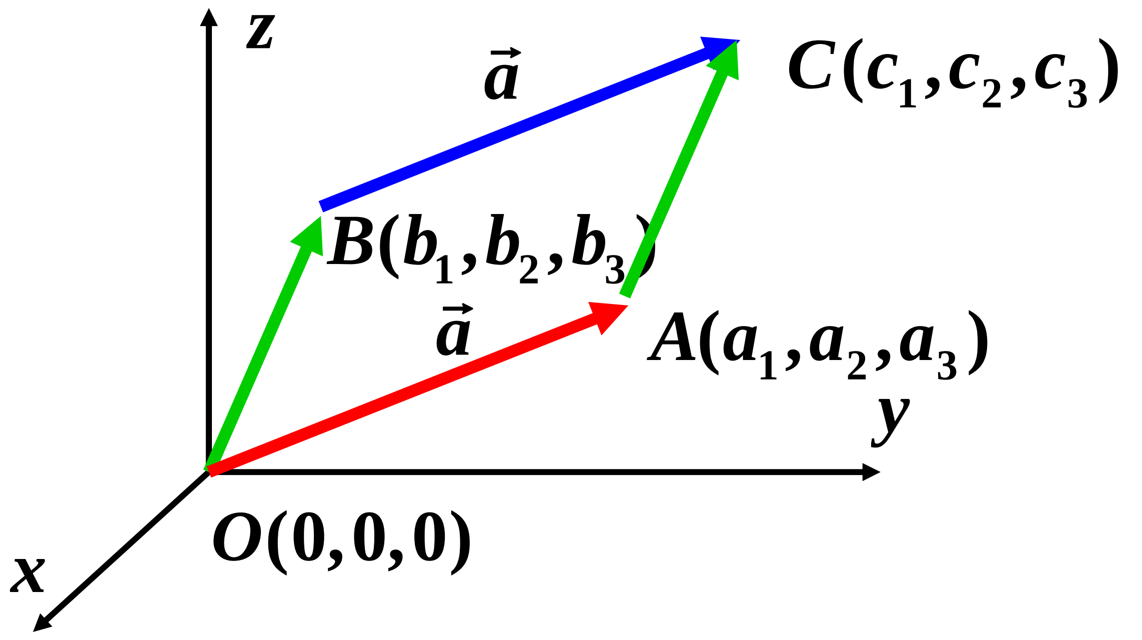


【向量的坐标表示】 设 $\vec{a}=\overrightarrow{BC}$ 为空间直角坐标系中的一个向量.将 $\vec{a}$ 自由平移使其起点与原点 O 重合，终点为 $A(a_1,a_2,a_3)$；

有序数组 a_1,a_2,a_3 称为向量 $\vec{a}$ 的坐标。

$\overrightarrow{BC}=(a_1,a_2,a_3)$ 称为向量 $\overrightarrow{BC}$ 的坐标表示或者代数表示.

结论： Oxyz坐标系中向量与有序三元数组是一一对应的

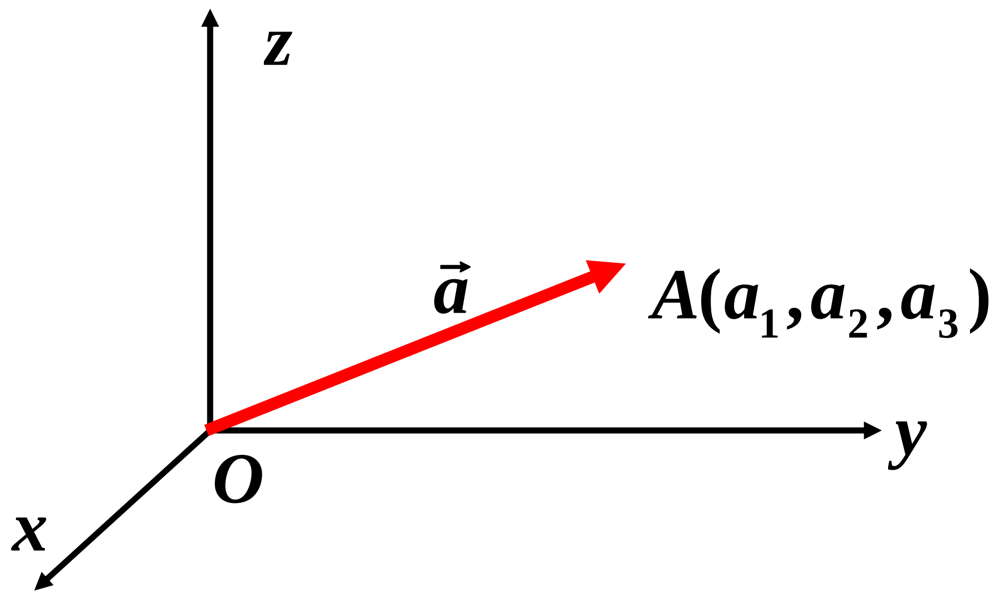


【公式1】 $\overrightarrow{BC}=(c_1-b_1,\ c_2-b_2,\ c_3-b_3).$

即空间中任一个向量的坐标等于其终点坐标与起点坐标之差

【公式 2】 若向量 $\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)$，则 $\vec{a}$ 的模

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$



【例 1】如图，用坐标表示向量 $\overrightarrow{OE}$，$\overrightarrow{GB}$，$\overrightarrow{DC}$.

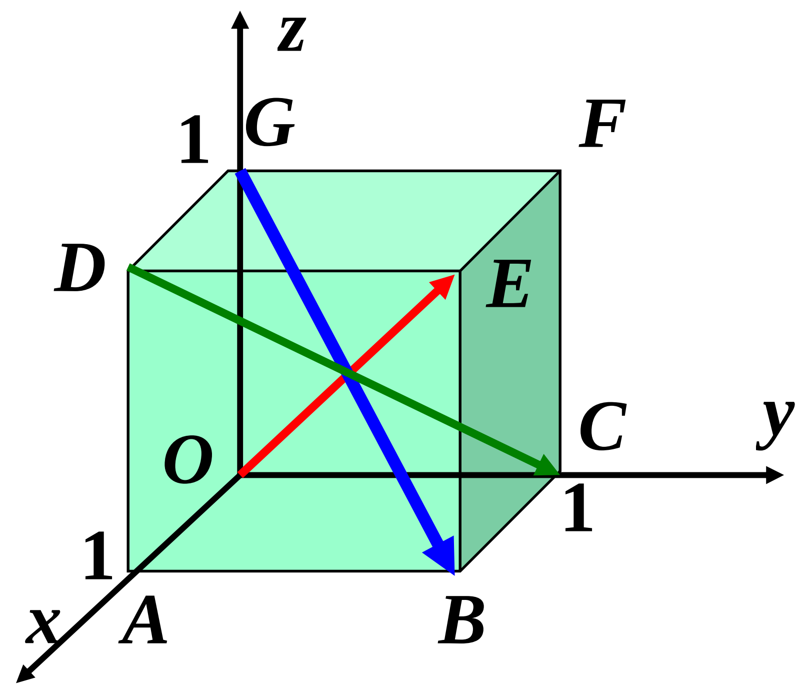
【解】 $B(1, 1, 0)$,

$C(0, 1, 0)$,

$D(1, 0, 1)$,

$E(1, 1, 1)$,

$G(0, 0, 1)$;



$$\overrightarrow{OE} = (1, 1, 1),$$

$$\overrightarrow{GB} = (1-0, 1-0, 0-1)$$

$$= (1, 1, -1),$$

$$\overrightarrow{DC} = (0-1, 1-0, 0-1)$$

$$= (-1, 1, -1).$$

3. 数乘向量(用一个数和一个向量造新的向量)

【定义】设 $\vec{a}$ 为一个向量，λ 为一个实数，则 $\lambda\vec{a}$ 按下列规定表示一个向量：

（1） 当 $\lambda > 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 同向，$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

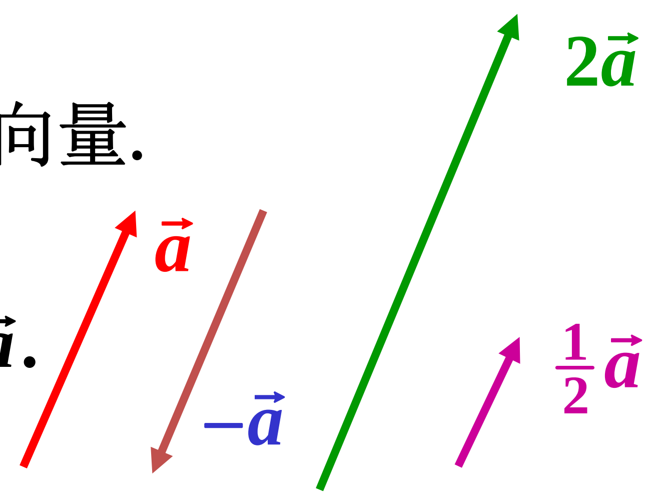
（2） 当 $\lambda < 0$ 时，$\lambda\vec{a}$ 与 $\vec{a}$ 反向，$|\lambda\vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$;

（3） 当 $\lambda = 0$ 时，$\lambda\vec{a} = \vec{0}$.

（4） $-\vec{a} = (-1)\vec{a}$;

（5） $\vec{a}^0 = \dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ 为与 $\vec{a}$ 同向的单位向量.

【例2】 参照 $\vec{a}$ 画出 $-\vec{a}$，$2\vec{a}$，$\frac{1}{2}\vec{a}$.



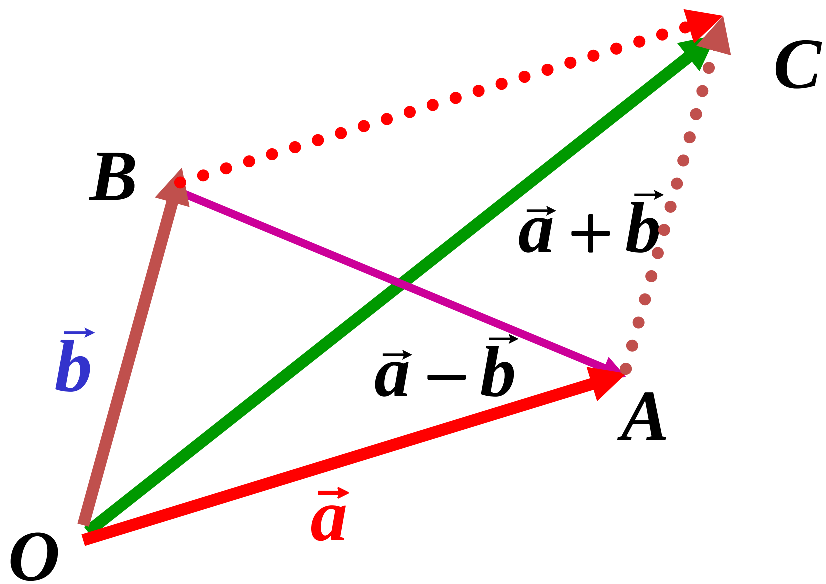
【公式3】 $\lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3)$.

4. 向量的加法和减法

【定义】 如图，设$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，四边形$OACB$为平行四边形:

定义$\vec{a}$与$\vec{b}$的和为$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OC}$;

定义$\vec{a}$与$\vec{b}$的差为$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})=\overrightarrow{BA}$.



【公式4】若向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$$\vec{a}\pm\vec{b}=(a_1\pm b_1,\ a_2\pm b_2,\ a_3\pm b_3).$$

通过向量的坐标化,很容易证明下列向量线性运算的性质.

【向量线性运算的性质】

(1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;

(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;

(3) $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;

(4) $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;

(5) $(\lambda\mu)\vec{a}=\lambda(\mu\vec{a})$.

5. 向量的标准分解

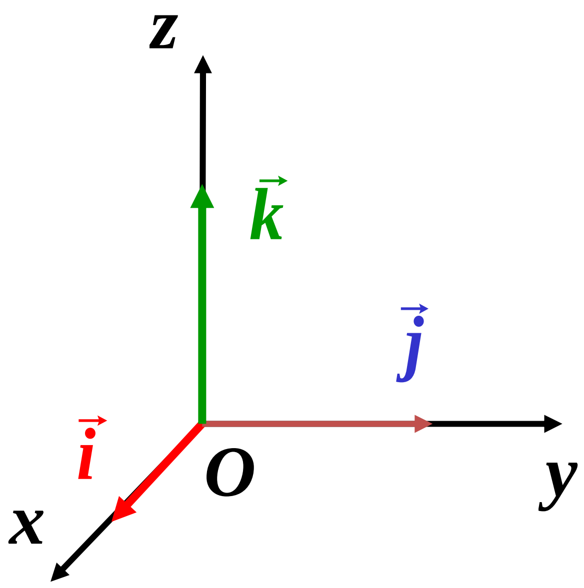
【坐标向量】 空间坐标系中，单位向量

$$\vec{i}=(1,\ 0,\ 0),\quad \vec{j}=(0,\ 1,\ 0),\quad \vec{k}=(0,\ 0,\ 1)$$

称为基本向量.

【向量的标准分解】

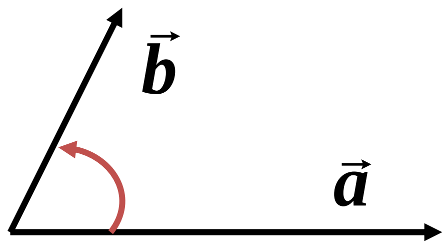
$$\begin{aligned}&(a_1, a_2, a_3)\\ &=(a_1, 0, 0)+(0, a_2, 0)+(0, 0, a_3)\\ &=a_1(1, 0, 0)+a_2(0, 1, 0)+a_3(0, 0, 1)\\ &=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}.\end{aligned}$$



$$\boxed{(a_1, a_2,\ a_3)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}}$$

6. 向量的方向角与方向余弦

【两个向量的夹角】 对于两个向量$\vec{a}$, $\vec{b}$，它们之间由 0 到π的夹角称$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，记为$\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$.



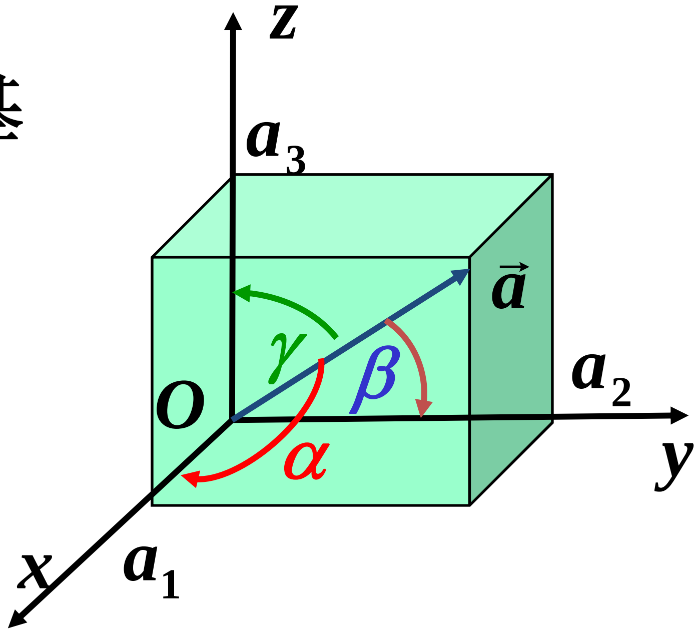
【向量的方向角】 向量$\vec{a}$与基本向量$\vec{i},\vec{j},\vec{k}$的夹角

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma$$

称为向量$\vec{a}$的方向角；称

$$\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$$

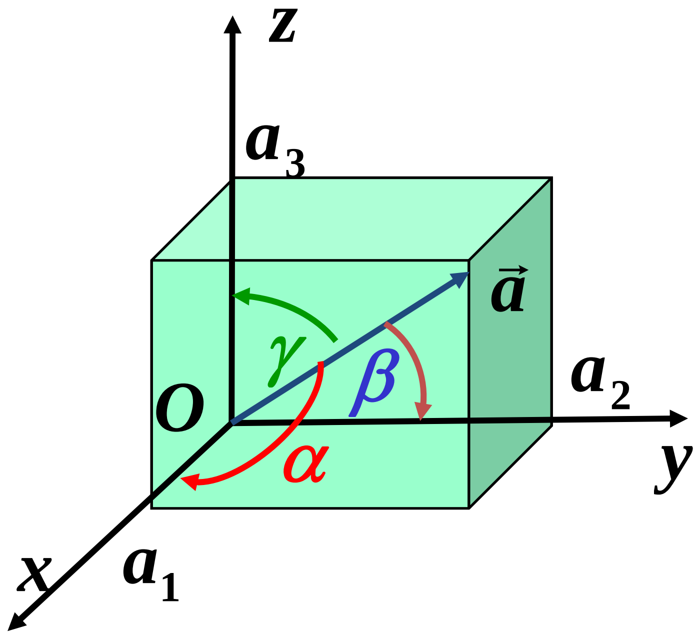
为$\vec{a}$的方向余弦.



$$\cos\alpha = \frac{a_1}{|\vec{a}|} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\vec{a}|} = \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{a_3}{|\vec{a}|} = \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}$$



$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\vec{a}^0 = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = (\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$$

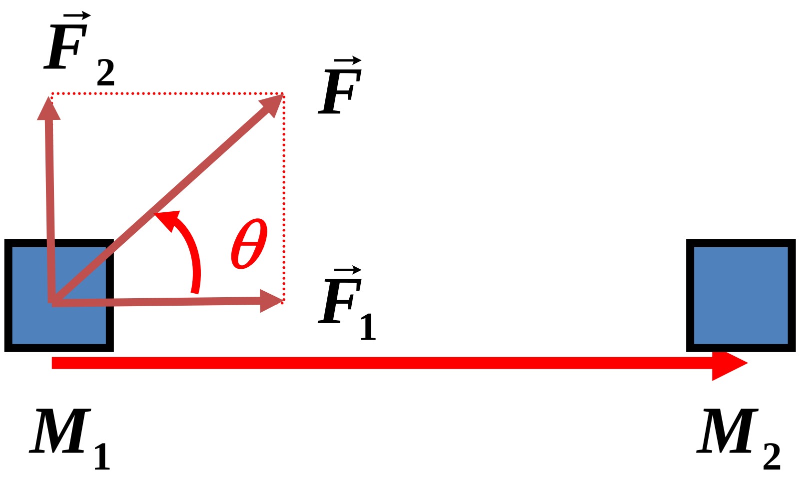
三、向量的内积、外积及混合积

1. 两个向量的内积

【常力作功】 如图，$\vec{F}$ 为一个常力(大小和方向不变的力)，一物体在$\vec{F}$的作用下沿直线由M_1移动到 M_2，则在此过程中$\vec{F}$所作的功

$$W = |\vec{F}_1| \cdot |\overrightarrow{M_1M_2}| = (|\vec{F}|\cos\theta) \cdot |\overrightarrow{M_1M_2}|$$

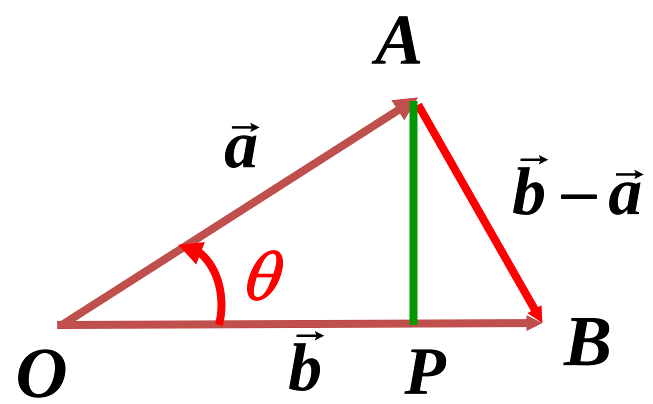
$$= |\vec{F}| \cdot |\overrightarrow{M_1M_2}| \cdot \cos\theta$$



【定义1】 设 $\vec{a}, \vec{b}$ 为两个向量，它们的夹角为 $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$，则称实数

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos\theta$$

为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**内积**.



【注】 (1) 实数

$$\Pi_{\vec{b}}\, \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{b}^{\,0} = |\vec{a}| \cos\theta$$

称向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的投影.

(2) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

(3) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$； $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

【向量内积的性质】

（1） $\vec{a} \neq 0 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{a} > 0;$

（2） $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (交换律);

（3） $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}).$

（4） $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (内积对加法的分配律);

由内积定义和上述性质可得：

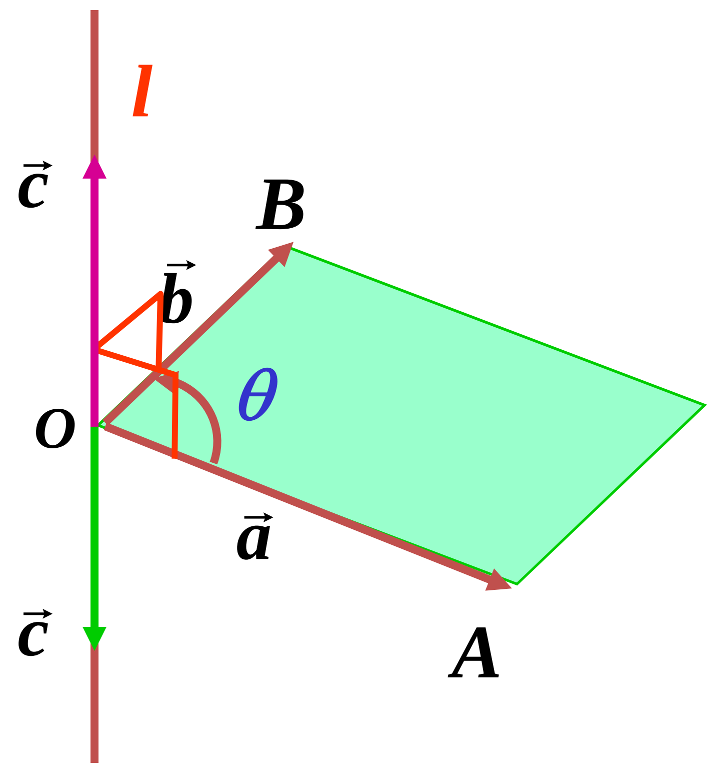
【公式】 在空间直角坐标系中，若 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$，则 $\vec{a}, \vec{b}$ 的内积

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

2. 两个向量的外积(由两个向量造一个新向量)

在许多方面，对于给定的两个不共线的非零向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$，需要找另一个同时与 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 垂直的非零向量 $\vec{c}$，并且要求 $\vec{c}$ 的模有某中特性.

如图，由直观，同时与 $\vec{a}$ $\vec{b}$ 垂直的非零向量 $\vec{c}$ 在直线 l 上，有无限多个，但方向可指向方上或下方.



【定义2】 定义 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的**外积** $\vec{a}\times\vec{b}$ 是满足下列条件的向量:

(1) $\vec{a}\times\vec{b}$ 同时垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$;

(2) 三个向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ 成右手系;

(3) $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$ (ΔOAB的面积的二倍).

【注】

(1) $\vec{a}\times\vec{a} = \vec{0}$;

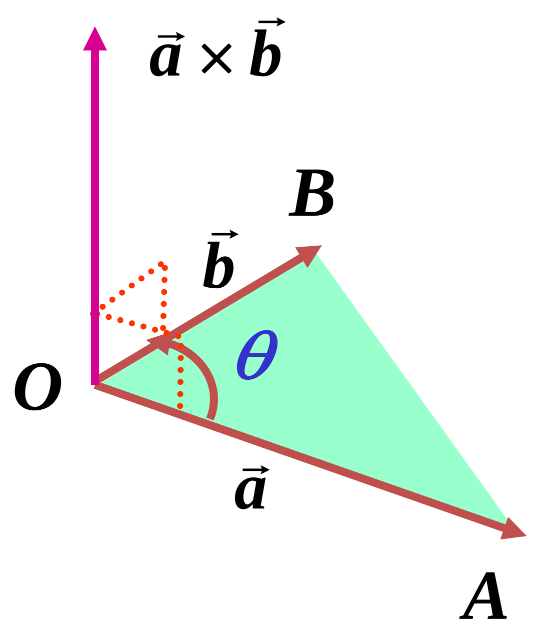
(2) $\vec{a}\times\vec{b} = -(\vec{b}\times\vec{a})$;

(3) $\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\times\vec{b} = \vec{0}$;

(4) $\vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$,

$\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$,

$\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$.



【外积的性质】

（1） $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$;

（2） $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$（反交换律);

（3） $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})$.

（4） $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$(外积对加法的分配律);

【公式】在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，若 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则 $\vec{a}, \vec{b}$ 的外积

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_2b_3-a_3b_2,\ a_3b_1-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1).$$

事实上，$\vec{a}\times\vec{b}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})$

$$=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}$$

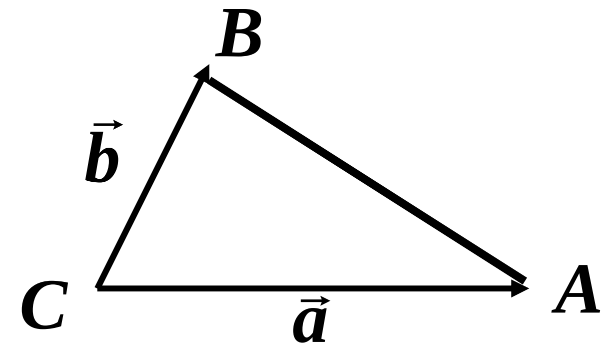
借用行列式的展开定理可以将外积写成如下形式：

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}$$

【例3】 给定三点 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$，求 ΔABC 的面积 S.

【解】 $\vec{a}=\overrightarrow{CA}=(-1,-2,-4)$,

$\vec{b}=\overrightarrow{CB}=(1,0,-2)$;



$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}-2 & -4\\ 0 & -2\end{vmatrix},\ -\begin{vmatrix}-1 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix},\ \begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}\right)$$

$$=(4,-6,2);$$

$$S=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|=\frac{1}{2}\sqrt{16+36+4}=\sqrt{14}$$

3. 三个向量的混合积

【定义】 三个向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积(记作 $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$)是一个数，规定为

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}$$

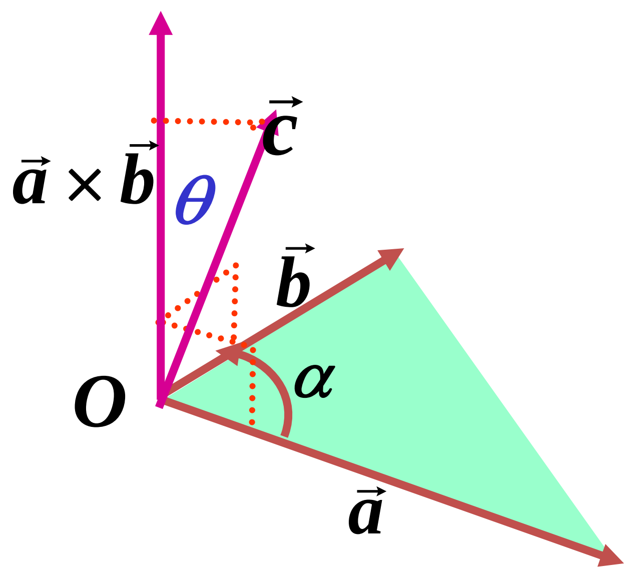
几何意义：三个向量张成的平行六面体的体积

$$V=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha\cdot|\vec{c}|\cos\theta$$

$$=|\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}||\cos\theta|$$

$$=|(\vec{a}\times\vec{b}).\vec{c}|$$

$$=|(\vec{a},\vec{b},\vec{c})|$$



【公式】在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，若$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 则 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 的混合积

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\because \vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\vec{i}+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\vec{k}$$

$$\therefore (\vec{a},\vec{b},\vec{c})=\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}c_1+\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}c_2+\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}c_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

结合几何意义可知：三个向量统一起点的前提下，这三个向量共面当且仅当它们的混合积为零

(书本**P71**例题**2.3**)

作业　P87 习题3

1

8

10

11

12

补充例题 已知空间三点 $M(1,1,1)$, $A(2,2,1)$, $B(2,1,2)$ 求$\angle AMB$.

【解】 $\vec{a} = MA = (1,1,0)$,

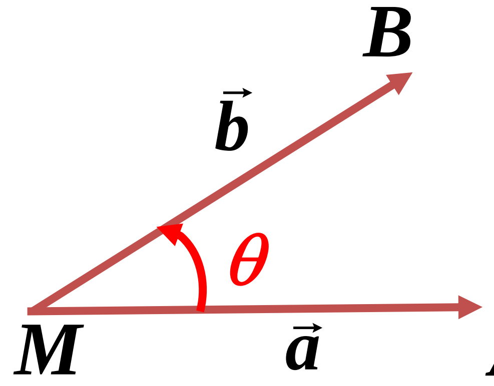
$$\vec{b} = MB = (1,0,1);$$

$$\boxed{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}}$$

$$\angle AMB = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

$$= \arccos \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

$$= \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$



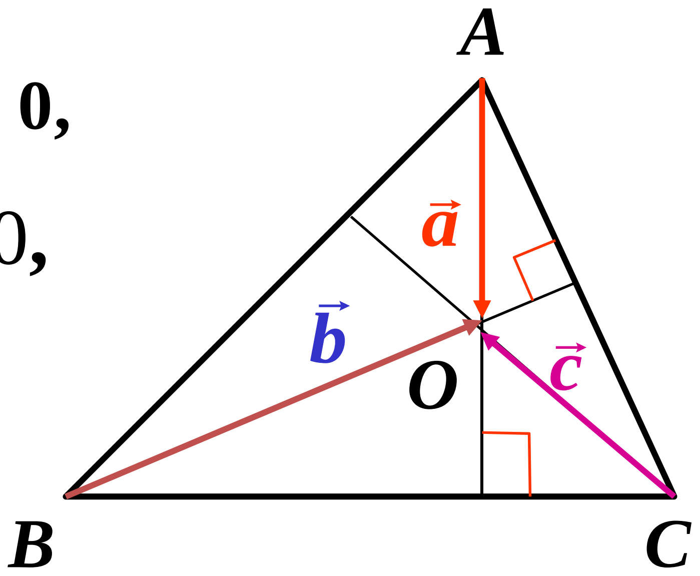
补充例题. 用数量积证明三角形的三条高交于一点.

证 如图，设 $AO \perp BC$，$BO \perp CA$，要证 $CO \perp AB$

记 $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$，$\overrightarrow{BO} = \vec{b}$，$\overrightarrow{CO} = \vec{c}$，则

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \vec{b} - \vec{c}$， $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA} = \vec{c} - \vec{a}$，

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \vec{a} - \vec{b}$；



$OC \perp AB$?

从而 $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$，$\vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$，

相加 $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) + \vec{b} \cdot (\vec{c} - \vec{a}) = 0$，

$$-\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = 0,$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0,$$

$$OC \perp AB$$