矩阵的逆

1、逆矩阵的概念

当$a \neq 0$时，有 $aa^{-1} = a^{-1}a = 1$,

其中$a^{-1} = \dfrac{1}{a}$为a的倒数(或称为a的逆).

$ax = b$，当$a \neq 0$时，其解为 $x = a^{-1}b$,

问题： 对于矩阵A，是否也存在着A的逆A^{-1} 使得

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E,$$

在解矩阵方程 $AX = b$时，

$$\Longrightarrow \quad X = A^{-1}b.$$

1、逆矩阵的概念

定义 对于n阶矩阵A,如果存在一个n阶矩阵B,使

$$AB = BA = E,$$

称矩阵A是**可逆的**,而矩阵B称为A的**逆矩阵**.

否则，称矩阵A是不可逆矩阵。

注: (1) 若A是可逆矩阵，则B也是可逆矩阵，且B的逆矩阵是A。

(2) 若矩阵A是可逆的,则A的逆矩阵是唯一的.

若设 B 和 C 是A 的逆矩阵， 则有

$$AB = BA = E, \quad AC = CA = E,$$

可得 $B = EB = (CA)B = C(AB) = CE = C.$

所以A 的逆矩阵是唯一的. A的逆矩阵记为A^{-1}.

例 设 $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2\end{pmatrix}$,

$\because AB=BA=E$, $\therefore B$是A的逆矩阵.

(3)若矩阵A=(a)且 $a\neq 0$**,则** $A^{-1}=\left(\dfrac{1}{a}\right)$

例 如果 $A=\begin{pmatrix}a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_n\end{pmatrix}$, 其中 $a_i\neq 0(i=1,2,\ldots,n)$,

试验证 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/a_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n\end{pmatrix}$.

证 $\because \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} 1/a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/a_n \end{pmatrix}.$$

3、可逆矩阵的性质（运算规律）

① 若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

$$(\because A^{-1}A=E)$$

② 若 A 可逆，数 $\lambda\neq 0$，则 λA 可逆，且

$$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}. \qquad \left(\because (\lambda A)\frac{1}{\lambda}A^{-1}=E\right)$$

③ 若A,B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

证明 $(AB)\left(B^{-1}A^{-1}\right)=A\left(BB^{-1}\right)A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E,$

$$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

推广 $(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}.$

④ 若A可逆,则A^T亦可逆,且$\left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T$.

证明 $\because\ A^T\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^{-1}A\right)^T=E^T=E,$

$\therefore\ \left(A^T\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^T.$

⑤ 若A可逆，则 $|A|\neq 0,$ 且 $\left|A^{-1}\right|=|A|^{-1}.$

⑥ 若A可逆，且AB=AC, 则B=C.

⑦ 若A可逆，且AB=O, 则B=O, 其中O为零矩阵.

2、矩阵可逆的条件

定义 行列式 $|A|$ 的各个元素的代数余子式 A_{ij} 所构成的方阵

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

称为方阵 A 的**伴随矩阵**.

课堂练习

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$，求矩阵$A$的伴随矩阵 A^*.

课堂练习

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -5 \end{pmatrix}$，求矩阵$A$的伴随矩阵 A^*.

解 按定义，因为

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=-5,\quad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}=10,\quad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=2,\quad A_{22}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}=-2,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=2,\quad A_{33}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

$$\therefore \quad A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 10 & -2 & 2 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

定理 设n阶方阵 A 的伴随矩阵为A^*, 则

$$AA^* = A^*A = |A|E .$$

证明 设 $A = (a_{ij})$,

$$AA^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix},$$

即 $$AA^* = |A|E,$$

同理可得, $$A^*A = |A|E$$

$$\Longrightarrow AA^* = A^*A = |A|E.$$

定理 n 阶矩阵 A 可逆的充要条件是A的行列式 $|A| \neq 0$. 如果 A 可逆，则

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*},}$$

满秩

其中 A^* 为矩阵 A 的伴随矩阵.

证明 必要性。若 A 可逆，则 $AA^{-1}=E$,

两边取行列式，得 $|A||A^{-1}|=1$, 因而 $|A|\neq 0$.

充分性, 由 $|A|\neq 0$,

$$AA^{*}=A^{*}A=|A|E.$$

$$\Rightarrow \quad A\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)=\left(\frac{1}{|A|}A^{*}\right)A=E,$$

由逆矩阵的定义可知, A 可逆, 且有 $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}A^{*}$.

例 已知 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc\neq 0$, 试用伴随矩阵法求 A^{-1}.

解 因 $|A|=ad-bc\neq 0$, 故 A^{-1}存在.

$A_{11}=d,\quad A_{21}=-b,\quad A_{12}=-c,\quad A_{22}=a,$

$$A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

例 求 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$的逆矩阵.

解 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0.$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{vmatrix}=5,\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1,\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}=-1,\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}=2,$$

$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=1$.于是$A$的伴随矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{*}=\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix},\quad A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}5 & -2 & -1\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

推论 若n阶矩阵A、B满足 $AB = E$（或 $BA = E$ ），则A可逆，且 $A^{-1} = B.$

证 由 $AB = E \Rightarrow |A||B| = 1 \Rightarrow |A| \neq 0$

$\Rightarrow A^{-1}$ 存在,

$$\therefore B = EB = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB)$$

$$= A^{-1}E = A^{-1}.$$

例 设A,B为n阶方阵, 满足A+B=AB, 证明A-E为可逆矩阵，并求其逆矩阵。

证 由 $A + B = AB,$

得 $(A-E)(B-E) = E,$

根据推论，知A-E为可逆矩阵，

且 $(A-E)^{-1} = B - E.$

例 设$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&1\\5&3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}$,求矩阵$X$使满足$AXB=C$.

解 $\because\quad |A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{vmatrix}=2\neq 0,\quad |B|=\begin{vmatrix}2&1\\5&3\end{vmatrix}=1\neq 0,$

$\therefore\quad A^{-1},B^{-1}$都存在.

且 $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix},\quad B^{-1}=\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix},$

由 $AXB=C \Rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$

$$=\begin{pmatrix}1&3&-2\\-3/2&-3&5/2\\1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&0\\3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-1\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&1\\10&-4\\-10&4\end{pmatrix}.$$

例　设A是n阶可逆矩阵，B是n×m矩阵，则矩阵方程 $AX = B$有惟一解。

解：由于A可逆，A^{-1}存在，　可令矩阵 $X_0 = A^{-1}B$

则 $AX_0 = A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = EB = B$

所以 $\boldsymbol{X_0}$ 是矩阵方程 $\boldsymbol{AX = B}$ 的一个解.

设 X_1 也是方程的解，则 有 $AX_1 = B$

$$X_1 = EX_1 = (A^{-1}A)X_1 = A^{-1}(AX_1)$$
$$= A^{-1}B = X_0$$

可见，方程的解 $X_0 = A^{-1}B$ 是惟一的解。

上述例子的特殊情形：书本第54页，例题4.4

n个未知量$x_1, x_2, \cdots x_n$的线性方程组：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{cases}$$

可写成矩阵方程 ：

$$Ax = b$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{n\times 1}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}_{n\times 1}$$

分块矩阵求逆矩阵

例：　设有n阶矩阵$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$,其中

$A_{ii}(i=1,2)$是n_i阶可逆矩阵$(n=n_1+n_2)$.

证明:A是可逆矩阵.

证明: 设法求一个矩阵 $X=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}$,

使$AX=XA=E_n$. 于是由

$$AX=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} E_{n_1} & 0 \\ 0 & E_{n_2} \end{pmatrix}$$

得 $$A_{11}X_{11}+A_{12}X_{21}=E_{n_1} \qquad (1)$$
$$A_{11}X_{12}+A_{12}X_{22}=0 \qquad (2)$$
$$A_{22}X_{21}=0 \qquad (3)$$
$$A_{22}X_{22}=E_{n_2} \qquad (4)$$

由(4)式得：$\boldsymbol{X}_{22}=\boldsymbol{A}_{22}^{-1}$,

由(3)式得 $\boldsymbol{X}_{21}=(\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{22})\boldsymbol{X}_{21}=\boldsymbol{A}_{22}^{-1}(\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{X}_{21})=0$

代入(1)、(2)式得

$\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{A}_{11}^{-1}$,

$$X_{12}=-A_{11}^{-1}A_{11}X_{22}=-A_{11}^{-1}A_{12}A_{22}^{-1}.$$

$$\text{所以} X = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

同理可验证 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{E}_n$ 也成立.

所以$\boldsymbol{n}$阶矩阵$\boldsymbol{A}$可逆,且

$$A^{-1} = X = \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & A_{22}^{-1} \end{pmatrix}.$$

作业：P63，习题2

15(4)(5) （提示：用伴随矩阵的方法，参见课本定义4.2， 定理4.1，例题4.3）

22 （提示:参考例题4.5）

23 （提示:利用逆矩阵的定义证明）

24 提示:利用n阶方阵A满足

$AA^*=|A|E$,知道$|A||A^*|=|A|^n$

分别讨论$|A|=0$以及$|A|\neq 0$