2.4、初等矩阵

定义 由单位矩阵 E 经过一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**. 三种初等变换对应着三种初等矩阵.

(1) 对调两行或对调两列

把单位矩阵中第 i,j 两行（列）对调得到的等矩阵, 记为 $P(i,j)$.

$$P(i,j)=\begin{array}{c}
\left(\begin{array}{cccccccc}
1 & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & \\
 & & 0 & \cdots & \cdots & 1 & & \\
 & & & 1 & & & & \\
 & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \\
 & & & & 1 & & & \\
 & & 1 & \cdots & \cdots & 0 & & \\
 & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & 1
\end{array}\right)
\begin{array}{l}
\\ \\ i\text{行} \\ \\ \\ \\ j\text{行} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{cc} i\text{列} \qquad\qquad & j\text{列} \end{array}
\end{array};$$

(2) 以数 $k\neq 0$ 乘某行或某列

以数 $k\neq 0$ 乘单位矩阵 E 的第 i 行（列）得初等矩阵, 记为 $P(\,i(k)\,)$.

$$
P(i(k)) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & k & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ i\text{ 行}; \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \quad & \quad & i\text{ 列} & \quad & \quad \end{array} & \end{array}
$$

(3) 以数 k 乘某行(列)加到另一行(列)上

以 k 乘 E 的第 j 行加到第 i 行上 $(\,r_i + kr_j\,)$

[或以 k 乘 E 的第 i 列加到第 j 列上 $(\,c_j + kc_i\,)$], 得初等矩阵, 记为 $P(\,i, j(k)\,)$.

$$P(i,j(k))=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}1&&&&&&&\\&\ddots&&&&&&\\&&1&\cdots&\cdots&k&&\\&&&\ddots&&\vdots&&\\&&&&\ddots&&&\\&&&&&1&&\\&&&&&&\ddots&\\&&&&&&&1\end{pmatrix}&\begin{array}{l}\\ \\ i\text{行}\\ \\ \\ j\text{行}\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccc}\qquad & i\text{列} & \qquad\qquad & j\text{列} & \qquad\end{array} & \end{array}$$

初等矩阵性质

初等矩阵都是可逆矩阵，且

(1) $P(i,j)^{-1}=P(i,j)$; $\quad P(i(k))^{-1}=P(i(k^{-1}))$;

$P(i,j(k))^{-1}=P(i,j(-k))$.

(2) $|P(i,j)|=-1$; $\quad |P(i(k))|=k$;

$|P(i,j(k))|=1$.

初等变换和初等矩阵的关系

定理 设 A 是一个 $m\times n$ 矩阵, 对 A 施行一次初等**行变换**, 相当于在 A 的**左乘**相应的 m 阶初等矩阵；

对 A 施行一次初等**列变换**, 相当于在A的**右乘**相应的 n 阶初等矩阵.

例 设有矩阵 $A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$, 而

$$P(1,2)=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad P(3,1(2))=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix},$$

$$P(1,2)A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

$$AP(3,1(2))=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

例如，$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} + ka_{21} & a_{42} + ka_{22} & a_{43} + ka_{23} & a_{44} + ka_{24} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + ka_{14} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} + ka_{24} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} + ka_{34} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} + ka_{44} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

定理 设A为m×n矩阵，若r(A)=r，则存在m阶初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_s$和n阶初等矩阵$Q_1,Q_2,\ldots,Q_t$，使得

$$P_s\ldots P_2P_1AQ_1Q_2\ldots Q_t=\begin{pmatrix}E_r & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

推论 若A为n阶可逆矩阵，则存在n阶初等矩阵$P_1,P_2,\ldots,P_m$，使得

$$P_m\ldots P_2P_1A=E,$$

从而有$A^{-1}=P_m\ldots P_2P_1$.

推论 若A为n阶可逆矩阵，则存在n阶初等矩阵$Q_1,Q_2,\ldots,Q_m$，使得 $AQ_1Q_2\ldots Q_m=E$,

从而有$A^{-1}=Q_1Q_2\ldots Q_m$.

用初等变换方法求逆矩阵（重点掌握）

(1). 构造分块矩阵，做初等行变换：

$$\begin{pmatrix} A, E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} E, A^{-1} \end{pmatrix}$$

(2). 构造分块矩阵，做初等列变换：

$$\begin{pmatrix} A \\ E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{初等列变换}} \begin{pmatrix} E \\ A^{-1} \end{pmatrix}$$

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&2&1\\3&4&3\end{pmatrix}$,求 A^{-1}.

解 $$(A \mid E)=\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\2&2&1&0&1&0\\3&4&3&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-3r_1]{r_2-2r_1}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&2&3&1&0&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&-2&-6&-3&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3-r_2]{r_1+r_2}\left(\begin{array}{ccc:ccc}1&0&-2&-1&1&0\\0&-2&-5&-2&1&0\\0&0&-1&-1&-1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 - r_2]{r_1 + r_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_2 - 5r_3]{r_1 - 2r_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[r_3 \div (-1)]{r_2 \div (-2)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\therefore A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -\frac{3}{2} & -3 & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

作业：P64，习题2

16 （提示：用初等行变换方法）

18(1)

19(1)