第六章 二次型与二次曲面

定义 n元二次型指

含n个变量$x_1, x_2, \cdots, x_n$的二次齐次多项式

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \cdots + 2a_{1n}x_1x_n$$
$$+ a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \cdots + 2a_{2n}x_2x_n$$
$$+ \cdots + a_{nn}x_n^2$$

实二次型：系数a_{ij}为实数的二次型，简称二次型

例：$f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

$$g(x_1, \cdots, x_n) = x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n$$

令$a_{ij}=a_{ji}\quad(i<j)$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=a_{11}x_1^2+a_{12}x_1x_2+\cdots+a_{1n}x_1x_n$$

$$+a_{21}x_2x_1+a_{22}x_2^2+\cdots+a_{2n}x_2x_n+$$

$$\cdots+a_{n1}x_nx_1+a_{n2}x_nx_2+\cdots+a_{nn}x_n^2$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1(a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n)$$

$$+x_2(a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n)+$$

$$\cdots+x_n(a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n)$$

$$=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = (x_1,x_2,\cdots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= X^T A X$$

二次型的矩阵表达式: $f(x_1,x_2,\cdots,x_n) = X^T A X$

实对称矩阵A: 二次型 f 的矩阵

二次型 f: 实对称矩阵 A 的二次型

例 设二次型 $f=x_1^2-x_2^2-2x_1x_2+x_1x_3+4x_2x_3$ 试写出二次型 f 的矩阵.（ f 为三元二次型）

解：观察后直接写出

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & \frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

例　将二次型 $f = x_1x_2 + x_3x_4$ 写成矩阵形式.

解: f 是一个四元二次型，先写出二次型的矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \quad f = X^T A X = (x_1, x_2, x_3, x_4) \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

例 设 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$，试写出以 $\boldsymbol{A}$ 为矩阵的二次型.

解： 设 $\boldsymbol{X}=(x_1,x_2,x_3)^{\mathrm{T}}$

$$f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}=x_1^2-x_3^2-2x_1x_2+2x_2x_3$$

矩阵合同的概念

1．定义（合同）

二个n阶方阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$，若存在可逆矩阵$\boldsymbol{C}$，使得

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{B}$$

则称$\boldsymbol{A}$与$\boldsymbol{B}$合同（Congruent）．

矩阵合同的定义与矩阵相似的定义很相似，也是方阵之间的一种等价关系.即

2．合同关系具有以下性质：

（1）自反性：$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{A}$

（2）对称性：$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$ 则$\boldsymbol{B}$合同于$\boldsymbol{A}$ ．

（3）传递性：$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B}$合同于$\boldsymbol{C}$，则$\boldsymbol{A}$合同于$\boldsymbol{C}$

3．可逆线性替换(非退化线性替换)

定义：数域F上由变量$x_1,\cdots,x_n$到变量$y_1,\cdots,y_n$的线性替换指如

$$\begin{cases} x_1 = c_{11}y_1 + c_{12}y_2 + \cdots + c_{1n}y_n, \\ x_2 = c_{21}y_1 + c_{22}y_2 + \cdots + c_{2n}y_n, \\ \vdots \\ x_n = c_{n1}y_1 + c_{n2}y_2 + \cdots + c_{nn}y_n, \end{cases}$$

的一组表达式， 其中$c_{ij} \in F$,

即 $X = CY$，其中

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

定义：如果系数矩阵C可逆，则称上述替换为非退化线性替换或者可逆的线性替换

4．（二次型的变换）合同二次型

设 $f = X^{\mathrm{T}} A X$，经可逆线性替换 $X = CY$，C 为可逆矩阵

$$f = (CY)^{\mathrm{T}} ACY = Y^{\mathrm{T}} C^{\mathrm{T}} ACY = Y^{\mathrm{T}} BY$$

其中 $B = C^{\mathrm{T}} AC$，即 A 与 B 合同

所以经可逆线性替换后，二次型的对应矩阵是合同的，这个变换我们也称作合同替换.

5．实对称矩阵（不但和对角矩阵相似，也与对角矩阵合同）．由于实对称矩阵可正交相似对角化．所以存在正交矩阵P，使$P^{-1}AP = P^{\mathrm{T}}AP = \Lambda$，所以实对称矩阵$A$都与对角矩阵合同.

化实二次型为标准形(化平方和问题)

1．标准二次形：只含有平方项的二次型

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

称为 n 元二次型的一个标准形.

注记：任何一个二次型都可以经过合同变换转化为标准形。

实二次型有两种方法化标准形.

1 用正交变换化实二次型为标准形

对于实二次型，最实用的方法是正交变换法，即所作的可逆线性变换中可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 不只是可逆，还是正交矩阵. 这个正交矩阵的存在是由实对称矩阵的性质决定的，值得注意的是这种方法仅限于实二次型.

定理1.2 对任意 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ ，存在正交线性变换：$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{Y}$，其中$P$为正交矩阵，使二次型 f 化为标准形 $f=\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2+\cdots+\lambda_n y_n^2$，其中$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是 $\boldsymbol{A}$ 的 n个特征值.

例 用正交线性变换化实二次型为标准形.

$$f=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3$$

解:

（1）二次型 f 的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2 & 2 & -2\\ 2 & 5 & -4\\ -2 & -4 & 5\end{pmatrix}$

（2）由 $|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -2 & 2\\ -2 & \lambda-5 & 4\\ 2 & 4 & \lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-10)=0$,

得 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\ \lambda_2=1,\ \lambda_3=10.$

（3）对 $\lambda_1=\lambda_2=1$ 时，解 $(1\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$

即

$$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -4 & 4\\ 2 & 4 & -4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

所以得同解方程组为 $\begin{cases} x_1 = -2x_2 + 2x_3 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$

得基础解系为 $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

正交化：

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\xi}_2 - \frac{(\boldsymbol{\xi}_2, \boldsymbol{\beta}_1)}{(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1)}\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{-4}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} \\ \frac{4}{5} \\ 1 \end{pmatrix} // \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

单位化：

$$\boldsymbol{\eta}_1=\frac{\boldsymbol{\beta}_1}{|\boldsymbol{\beta}_1|}=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\eta}_2=\frac{\boldsymbol{\beta}_2}{|\boldsymbol{\beta}_2|}=\frac{1}{\sqrt{45}}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{\sqrt{45}}\\ \frac{4}{\sqrt{45}}\\ \frac{5}{\sqrt{45}}\end{pmatrix}$$

当$\lambda_3=10$ 时，由方程组 $(10\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$

即 $$\begin{pmatrix} 8 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 18 & 18 \\ 0 & 9 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -\frac{5}{2} & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2} x_3 \\ x_2 = -x_3 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

得基础解系为 $\xi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$，单位化为

$$\eta_3 = \frac{\xi_3}{|\xi_3|} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

得正交阵 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{45}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{\sqrt{45}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{\sqrt{45}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$，$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 10 \end{pmatrix}$

令 $X=PY$ 得 f 的标准形：

$$f(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+10y_3^2$$

注：正交变换不惟一，但正交替换得到的标准形是惟一的.（不考虑对角元的次序时）

2 用配方法化二次型为标准形

如果不考虑正交变换，可以用可逆线性变换把二次型f化为标准形，得到标准形不是惟一的.

例 用配方法将二次型化为标准形

$$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1x_2+3x_2x_3+4x_1x_3$$

分析： 这是只有交叉项没有平方项的二次型，先对x_1,x_2用平方差公式.

解： 令 $\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{C}_1=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ （1）

则 $f=2y_1^2-2y_2^2+3y_1y_3-3y_2y_3+4y_1y_3+4y_2y_3$

$$=2y_1^2-2y_2^2+7y_1y_3+y_2y_3$$

$$=2(y_1^2+\frac{7}{2}y_1y_3+(\frac{7}{4}y_3)^2)-2(y_2^2-\frac{1}{2}y_2y_3+(\frac{1}{4}y_3)^2)-2\cdot\frac{49}{16}y_3^2+2\cdot\frac{1}{16}y_3^2$$

$$=2(y_1+\frac{7}{4}y_3)^2-2(y_2-\frac{1}{4}y_3)^2-6y_3^2$$

再令 $\begin{cases} z_1=y_1+\frac{7}{4}y_3 \\ z_2=y_2-\frac{1}{4}y_3 \\ z_3=y_3 \end{cases}$ （2）

则 $f=2z_1^2-2z_2^2-6z_3^2$

所作可逆线性替换为 $\begin{cases} y_1=z_1-\frac{7}{4}z_3 \\ y_2=z_2+\frac{1}{4}z_3 \\ y_3=z_3 \end{cases}$ $\quad \boldsymbol{C}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{4} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

（2）代入（1）得

$$\begin{cases} x_1 = z_1 + z_2 - \dfrac{3}{2} z_3 \\ x_2 = z_1 - z_2 - 2 z_3 \\ x_3 = z_3 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{C}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\dfrac{3}{2} \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad |\boldsymbol{C}| \neq 0, \quad \boldsymbol{C}\text{ 可逆.}$$

$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{C}_1 (\boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{Z}) = \boldsymbol{C}_1 \boldsymbol{C}_2 \boldsymbol{Z}$ 为可逆线性替换.

惯性定理，规范形

定理　设n元实二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 经实可逆线性变换 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{C}_1\boldsymbol{Y}$，$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{C}_2\boldsymbol{Z}$ 分别化成标准形

及

$$f=k_1y_1^2+k_2y_2^2+\cdots+k_ny_n^2$$

$$f=l_1z_1^2+l_2z_2^2+\cdots+l_nz_n^2$$

则$k_1,k_2,\cdots,k_n$中正数的个数，负数的个数及0的个数分别与$l_1,l_2,\cdots,l_n$ 中正数的个数，负数的个数及0的个数相同，

正数的个数称为 f 的正惯性指数，记为p；

负数的个数称为f 的负惯性指数，记为 $r-p$，$r=rank(\boldsymbol{A})$

f具有唯一规范形：$f=z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$.

6.2 正定实二次型

正定二次型的定义

对于实二次型有一个特别重要的性质——正定性.

定义 设有 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，如果对 $\forall \boldsymbol{X}\neq \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{X}\in R^n$，都有 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}>0(\geq 0)$，则称 f 为正定（半正定）二次型. f 的矩阵称为正定（半正定）矩阵.

类似可定义负定二次型：

定义 设有 n 元实二次型 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$，如果对 $\forall \boldsymbol{X}\neq \mathbf{0}$ 且 $\boldsymbol{X}\in R^n$，都有 $f=\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}<0(\leq 0)$，则称 f 为负定（半负定）二次型. f 的矩阵称为负定（半负定）矩阵.

例：$f_1(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_n^2$，正定

$f_2(x_1,\cdots,x_n)=x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2$，半正定，（可取$(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)=(0,\cdots,0,1)$）

性质2.1 设A和B合同，则A正定当且仅当B正定

即合同的矩阵具有相同的正定性。

即非退化线性替换将正定实二次型变为正定实二次型

定理2.2 设有n元实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X^{\mathrm{T}}AX$

则下列命题等价：

1. $f(x_1,x_2,\ldots x_n)$为正定二次型；
2. A的秩和正惯性指数都是n；
3. A的所有特征值都是正值；
4. A与单位矩阵E合同；
5. 存在可逆矩阵P，使得$A=P^TP$

定理

n元实二次型 $f = X^T AX$ 为正定 $\Leftrightarrow$ 其正惯性指数 $p = n$

证：(充分性)

$\because$ 存在 非退化变换 $X = QY$ 化二次型

为 规范形 $f = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$

$\therefore\ \forall X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T \neq 0$，有 $Y = Q^{-1} X \neq 0$

且有 $f = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 > 0$ $\therefore\ f$ 为正定的。

必要性：(反证法证)

假设 $p<n$. f 经非退化变换 $X=QY$ 化为规范形

$$f=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_{p+e}^2$$

取向量 $Y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$

$$=(0,\cdots,0,\ 1,\ 0,\cdots,0)^T\neq 0$$

第p+1项

$\Rightarrow Y\neq 0$

$\Rightarrow X=QY\neq 0$

$\Rightarrow\quad f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=-1<0$

与 f 的正定性矛盾。证毕

由上述定理，容易证明：

推论 1 A为正定矩阵$\Leftrightarrow A$的n个特征值全为正数

推论 2 A为正定矩阵$\Leftrightarrow$ 存在可逆矩阵P，使得$A=P^TP$

推论 3 A正定 $\Rightarrow \det(A)>0$

证：因为A正定，所以存在可逆矩阵P，

使得$A=P^TP$,所以$|A|=|P^TP|=|P|^2>0$

判定二次型正定的其他方法

定义　方阵A的 k 阶顺序主子式P_k

$$P_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \quad (1 \le k \le n)$$

定理2.2 实对称阵 $\boldsymbol{A}$ 为正定的 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$的各阶顺序主子式都大于零.

即

$$a_{11} > 0,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}| > 0$$

根据性质2.1，定理2.1和定理2.2 有

注：当 $\boldsymbol{A}$ 正定时，可证 $k\boldsymbol{A}\,(k>0)$, $\boldsymbol{A}^{-1}, \boldsymbol{A}^{*}, \boldsymbol{A}^{2}$, $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}, \cdots$, 正定.

f 负定 $\Leftrightarrow -f$ 正定.

$\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{A}$ 的奇数阶主子式 <0，偶数阶主子式 >0.

例题：判别下列实二次型是正定还是负定.

（1）$f(x_1,x_2,x_3)=6x_1^2+5x_2^2+7x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3$

（2）$g(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

解：（1）(法一：顺序主子式法)

f的矩阵是$A=\begin{pmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{pmatrix}$，由于$P_1=|6|=6>0$,

$P_2=\begin{vmatrix}6&-2\\-2&5\end{vmatrix}=26>0$，$P_3=\begin{vmatrix}6&-2&2\\-2&5&0\\2&0&7\end{vmatrix}=162>0$

所以f是正定的

法二：特征值法

$$f\text{的矩阵是}A=\begin{pmatrix}6 & -2 & 2\\ -2 & 5 & 0\\ 2 & 0 & 7\end{pmatrix},$$

$$\text{而}\left|A-\lambda E\right|=\begin{vmatrix}6-\lambda & -2 & 2\\ -2 & 5-\lambda & 0\\ 2 & 0 & 7-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-3)(\lambda-4)(\lambda-9)$$

故A的特征值$\lambda_1=3$, $\lambda_2=6$, $\lambda_3=9$均为正数, 所以f是正定的

（2） $g(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2-6x_2^2-4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3$

解：（2）(法一：顺序主子式法)

f的矩阵是$A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$，由于$\Delta_1=|-2|=-2<0$,

$\Delta_2=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -6\end{vmatrix}=11<0$，$\Delta_3=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -6 & 0\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=-38<0$

所以g是负定的

法二：（特征值法)自解

例 判别二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2+\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$ 的正定性.

解 二次型的对应矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix},\ 2A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

A 和 $2A$ 具有相同的正定性，故判定 $2A$ 的正定性即可（将分数运算化成整数运算）

$$|2\boldsymbol{A}_k| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{k\times k} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & & & & \\ 0 & \frac{3}{2} & 1 & & & \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{k}{k-1} & 1 \\ & & & & & \frac{k+1}{k} \end{vmatrix}$$

$$= k+1 > 0,\ \ k = 1, 2, \cdots, n$$

$$\boldsymbol{P}_1 = 2 > 0, \qquad \boldsymbol{P}_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0$$

$2\boldsymbol{A}$ 的全部顺序主子式都大于0. $\boldsymbol{A}$ 正定，f 正定.

本周作业：　习题6 P178

2（1），3（1），4(3)，

6（4），9,

12，16（有难度），

17