三、n阶行列式的定义

首先，观察二阶行列式和三阶行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$= (-1)^{\tau(12)} a_{11}a_{22} + (-1)^{\tau(21)} a_{12}a_{21}$$

二阶行列式表示所有不同的行不同的列的两个元素乘积的代数和.

两个元素的乘积可以表示为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}$$

j_1j_2为二阶排列, 当j_1j_2取遍了二阶排列(12, 21)时, 即得到二阶行列式的所有项(不包含符号), 共为2!=2项.

当$\tau(j_1j_2)$为偶数时取正号, 为奇数时取负号.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

说明

(1) 三阶行列式共有6项，即3!项.

(2) 每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积.

(3) 每项的正负号都取决于位于不同行不同列的三个元素的下标排列.

例如 $a_{13}a_{21}a_{32}$

$\tau(312)=1+1=2,$ 偶排列

$a_{11}a_{23}a_{32}$ 列标排列的逆序数为

$\tau(132)=1+0=1,$ 奇排列 $-$负号,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{\tau(123)} a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{\tau(231)} a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{\tau(312)} a_{13}a_{21}a_{32}$$

$$+ (-1)^{\tau(321)} a_{13}a_{22}a_{31} + (-1)^{\tau(132)} a_{11}a_{23}a_{32} + (-1)^{\tau(213)} a_{12}a_{21}a_{33}$$

$$= \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

每一项的符号是，当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的列标构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号.

如在上述二阶行列式中，当$\tau(j_1j_2)$为偶数时取正号，为奇数时取负号；

在上述三阶行列式中，当$\tau(j_1j_2j_3)$为偶数时取正号，为奇数时取负号.

表1-1

排列	逆序	逆序数	奇偶性
1 2	无	0	偶排列
2 1	21	1	奇排列

排列	逆序	逆序数	奇偶性
1 2 3	无	0	偶排列
1 3 2	32	1	奇排列
2 1 3	21	1	奇排列
2 3 1	21, 31	2	偶排列
3 1 2	31, 32	2	偶排列
3 2 1	21,31,32	3	奇排列

返回

根据二阶、三阶行列式的规律，可给出四阶行列式的定义：

(1) 四阶行列式共有24项，即4!项．

(2) 每项都是位于不同行不同列的四个元素的乘积．

(3) 每项的正负号都取决于位于不同行不同列的四个元素的下标排列(见表)．

排列	逆序	逆序数	奇偶性
1 2 3 4	无	0	偶排列
1 2 4 3	43	1	奇排列
1 3 2 4	32	1	奇排列
1 3 4 2	32,42	2	偶排列
1 4 2 3	42,43	2	偶排列
1 4 3 2	43,42,32	3	奇排列
2 1 3 4	21	1	奇排列
2 1 4 3	21,43	2	偶排列
2 3 1 4	21,31	2	偶排列
2 3 4 1	21.31,41	3	奇排列
2 4 1 3	21,41,43	3	奇排列
2 4 3 1	21,43,41,31	4	偶排列

返回

排列	逆序	逆序数	奇偶性
3 1 2 4	31,32	2	偶排列
3 1 4 2	31,32,42	3	奇排列
3 2 1 4	32,31,21	3	奇排列
3 2 4 1	32,31,21,41	3	偶排列
3 4 1 2	31,32,41,42	4	偶排列
3 4 2 1	32,31,42,41,21	5	奇排列
4 1 2 3	41,42,43	3	奇排列
4 1 3 2	41,43,42,32	4	偶排列
4 2 1 3	42,41,43,21	4	偶排列
4 2 3 1	42,43,41,21,31	5	奇排列
4 3 1 2	43,41,42,31,32	5	奇排列
4 3 2 1	43,42,41,32,31,21	6	偶

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

$$=\sum(-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

n阶行列式

定义　用n^2个元素$a_{ij}(i,j=1,2,\ldots,n)$组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为n阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列．它表示所有可能取自不同的行不同的列的n个元素乘积的代数和，各项符号是：（接后）

当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后，如果对应的**列标**构成的排列是偶排列则取正号，是奇排列则取负号。因此，n阶行列式所表示的代数和中的一般项可以写为：

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \quad \textbf{(1.3)}$$

其中$j_1 j_2 \ldots j_n$构成一个n阶排列，当取遍所有n阶排列时，则得到n阶行列式表示的代数和中所有的项。

$$\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n \text{为n阶排列}} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

说　明

1、行列式是一种特定的算式，它是根据求解方程个数和未知量个数相同的一次方程组的需要而定义的，要注意它的行数等于列数；

2、n阶行列式是$n!$项的代数和，冠以正号的项和冠以负号的项(不算元素本身所带的负号)各占一半;

说 明

3、n阶行列式的每项都是位于不同行、不同列的n个元素的乘积;

4、一阶行列式$|a|=a$不要与绝对值记号相混淆;

行列式有时简记为$|a_{ij}|$或$\det(a_{ij})$. **(determinant)**

5、$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$的符号为$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)}$.

例如，四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

所表示的代数和中有$4!=24$项.

$a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$项取正号，

$a_{14}a_{23}a_{31}a_{42}$项取负号，

而$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}$不是D的一项.

一般来讲，根据定义来计算行列式计算量很大，但是对于一些特殊的行列式，我们有一些基本的结论。下面我们来看几个利用定义也能够迅速算出行列式的例子。要求大家非常熟悉这些例子。

例　计算次对角行列式 $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

分析：

展开式中项的一般形式是 $a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}$

若 $j_1 \neq 4 \Rightarrow a_{1j_1}=0$，所以 j_1 只能等于4，

同理可得 $j_2 = 3, j_3 = 2, j_4 = 1$

即行列式中不为零的项为 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24.$$

例　计算　上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

分析： 展开式中项的一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$j_n=n,\quad j_{n-1}=n-1,\quad j_{n-3}=n-3,\cdots,j_2=2,j_1=1,$$

所以不为零的项只有 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$

$$\therefore \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(123\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 计算 $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} = 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160.$$

同理可得下三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

例　证明对角行列式和次对角行列式有下面结论

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n ;$$

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n .$$

证明　第一式是显然的,下面证第二式.

若记 $\lambda_i = a_{i,n-i+1}$，则依行列式定义

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n .$$

结论：上(下)三角形行列式及对角形行列式的值，均等于主对角线上元素的乘积.

注：可在以后行列式计算中直接应用该结论

由行列式的定义不难得出：一个行列式若有一行(或一列)中的元素皆为零，则此行列式必为零.

例　用行列式定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解: 第3行只能取第2列, 第1行就只能取第4列, 第4行只能取第3列, 第2行只能取第1列， 所以, $\tau(4123)=3$, 因此行列式取值-1.

四、小结

1. 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

2. 行列式的两种表示方法

$$D=\sum_{j_1j_2\cdots j_n\text{为n阶排列}}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n\text{为n阶排列}}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$$

作业：**P25-26**

7

8

10(1) (3) (5)

思考题

已知
$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

求x^3的系数.

解　含x^3的项有两项,即

$$f(x)=\begin{vmatrix} x & 1 & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 2x & 1 \end{vmatrix}$$

对应于

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}$$

$$(-1)^{\tau(1234)}a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}=x^3,$$

$$(-1)^{\tau(1243)}a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=-2x^3$$ **故x^3的系数为-1.**