第三节　实对称矩阵的对角化

定义1: $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$为$R^n$中任两行向量

$$(\alpha,\beta)=\alpha\beta^T=(a_1,a_2,\cdots,a_n)(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

称为 α 与 β 的内积

定义2: $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$为$R^n$中任两个列向量

$$(\alpha,\beta)=\alpha^T\beta=(a_1,a_2,\cdots,a_n)(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T=\sum_{i=1}^{n}a_ib_i$$

称为 α 与 β 的内积

内积空间：定义了内积的向量空间

如: R^n与$W=\{X\mid AX=0, X\in R^n\}$都是内积空间

内积运算性质

$$(1)(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha);$$

$$(2)(\lambda\alpha,\beta)=(\alpha,\lambda\beta)=\lambda(\alpha,\beta),\forall\lambda\in R$$

$$(3)(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma);$$

(4) $(\alpha,\alpha)\geq 0$, 当且仅当 $\alpha=0$ 时, $(\alpha,\alpha)=0$.

定义：设 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in R^n$,

定义 α 的长度为 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$，记为 $|\alpha|$, 即

$$|\alpha|=\sqrt{(\alpha,\alpha)}=\sqrt{\alpha\alpha^T}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_m^2}$$

α 的长度也称为 α 的模或范数，

长度为 1 的向量称为单位向量.

若 $\alpha\in R^n$，$\alpha\neq 0$, 易验证 $\dfrac{\alpha}{|\alpha|}$ 为单位向量，

称其为 α 的单位化向量（或规范化向量）

例: R^3中向量$\alpha=(-3,1,2),\beta=(4,3,-1)$,则

$$(\alpha,\beta)=(-3)\times 4+1\times 3+2\times(-1)=-11,$$

$$|\alpha|=\sqrt{(-3)^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$$

向量长度的性质

(1). $|\alpha| \geq 0$, $|\alpha| = 0$当且仅当$\alpha = 0$

(2). $|k\alpha| = |k||\alpha|, \forall k \in R;$

(3)柯西(Cauchy)不等式: $|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|;$

(4)三角不等式: $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$

证明: 只证(3).不妨设$\beta \neq 0$, 设t为实数

则$(\alpha + t\beta, \alpha + t\beta) = (\alpha, \alpha) + 2t(\alpha, \beta) + t^2(\beta, \beta)$,

为关于t的二次多项式, 由长度的非负性知,

判别式小于等于0, 即$4(\alpha, \beta)^2 - 4(\alpha, \alpha)(\beta, \beta) \leq 0$

所以$|(\alpha, \beta)| \leq |\alpha||\beta|$

定义：设$\alpha, \beta \in R^n$为非零向量，规定它们的夹角为

$$\varphi = \arccos\frac{(\alpha, \beta)}{|\alpha||\beta|} \qquad (0 \le \varphi \le \pi),\text{记为} < \alpha, \beta >$$

定义：若$(\alpha, \beta)=0$（即$\langle\alpha, \beta\rangle=\frac{\pi}{2}$），则称$\alpha$与$\beta$垂直或正交

例：零向量向任意向量正交，

R^2中向量$\alpha = (1,1)$与$\beta = (1,-1)$正交.

二、正交向量组

定义: R^n中一组非零向量, 若它们两两正交, 则称其为R^n的一组*正交向量组*.

例: $\varepsilon_1=(1,0,\cdots,0),\varepsilon_2=(0,1,\cdots,0),\cdots,\varepsilon_n=(0,0,\cdots,1)$

是R^n中的一组正交向量组

定理：正交向量组线性无关

证：设$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$为正交向量组且$k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m=0$,

上式两边与α_i作内积：

$$\left(\alpha_i,k_1\alpha_1+\cdots+k_m\alpha_m\right)=\left(\alpha_i,0\right),\quad \left(i=1,2,\cdots,m\right)$$

$$k_1\left(\alpha_i,\alpha_1\right)+\cdots+k_i\left(\alpha_i,\alpha_i\right)+\cdots+k_m\left(\alpha_i,\alpha_m\right)=0.$$

$\because \left(\alpha_i,\alpha_j\right)=0$ 若 $i\neq j$ $\therefore$ $k_i\left(\alpha_i,\alpha_j\right)=0$ 若 $i\neq j$

又$\because \alpha_i\neq 0$,从而$\left(\alpha_i,\alpha_i\right)>0$，于是

$k_i=0\quad\left(i=1,2,\cdots,m\right)$ $\therefore \alpha_1,\cdots,\alpha_m$，线性无关.

注：由上述定理可知:n维内积空间中,

正交向量组所含向量个数不能超过n个.

定义:(1).n维空间中, 任意含有n个向量的正交向量组

都可以作为该空间的一组基，称为*正交基*.

(2). 若正交基中每个向量都是单位向量时,

称这组基为标准正交基(或规范正交基、*单位正交基*).

注：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$为$R^n$的标准正交基

$$\Leftrightarrow (\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$成立,

施密特正交法

定理: 设$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$是内积空间V的一组基，令

$$\beta_1 = \alpha_1,$$

$$\beta_2 = \alpha_2 - \frac{(\alpha_2, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1$$

$$\beta_3 = \alpha_3 - \frac{(\alpha_3, \beta_1)}{(\beta_1, \beta_1)}\beta_1 - \frac{(\alpha_3, \beta_2)}{(\beta_2, \beta_2)}\beta_2, \cdots$$

$$\vdots$$

$$\beta_r = \alpha_r - \sum_{k=1}^{r-1} \frac{(\alpha_r, \beta_k)}{(\beta_k, \beta_k)}\beta_k,$$

则 $\beta_1, \cdots, \beta_r$是V的一组正交基，

且与$\alpha_1, \cdots,\ \alpha_r$等价.

证: 由β_i的表达式知，β_i是$\alpha_1,\cdots,\alpha_i$的线性组合，所以，

$\beta_i \in V$且$\beta_i \neq 0\left(i=1,2,\cdots,r\right)$.

事实上，若$\beta_i=0$, 则由$\alpha_i-\dfrac{(\beta_1,\alpha_i)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\ldots-\dfrac{(\beta_{i-1},\alpha_i)}{(\beta_{i-1},\beta_{i-1})}\beta_{i-1}=0$可知

$\alpha_1,\cdots,\alpha_i$线性相关，与$\alpha_1,\cdots$，α_r线性无关相矛盾. 所以$\beta_i=0$

下面用数学归纳法证$\beta_1,\cdots$，β_r两两正交.

当$r=2$时, $\left(\beta_1,\beta_2\right)=0$, 结论显然成立;

设$r=m$时，结论成立, 即$\beta_1,\cdots$，β_m两两正交

当$r=m+1$时, 根据题设有$\beta_{m+1}=\alpha_{m+1}-\sum\limits_{k=1}^{m}\dfrac{\left(\alpha_{m+1},\beta_k\right)}{\left(\beta_k,\beta_k\right)}\beta_k$

由归纳假设，$\beta_1,\cdots,\ \beta_m$两两正交，因此对$i=1,2,\cdots,m$有

$$(\beta_{m+1},\beta_i)=(\alpha_{m+1},\beta_i)-\sum_{k=1}^{m}\frac{(\beta_k,\alpha_{m+1})}{(\beta_k,\beta_k)}(\beta_k,\beta_i)$$

$$=(\alpha_{m+1},\beta_i)-(\beta_i,\alpha_{m+1})=0.$$ (求和式中$k=i$时才非零)

即β_{m+1}与$\beta_1,\cdots,\ \beta_m$都正交, 从而$\beta_1,\ \beta_2,\cdots,\ \beta_{m+1}$两两正交,

即$r=m+1$时，结论成立.

由归纳法原理知，对任意正整数$r,\beta_1,\cdots,\ \beta_r$两两正交.

综上所述，$\beta_1,\cdots,\ \beta_r$是r维内积空间V的一组正交基. 由上面的表达式易见，$\alpha_1,\cdots,\alpha_r$与$\beta_1,\cdots,\ \beta_r$可相互线性表示

例3.2(P130)：给出R^4中的四个向量

α_1=（1, 1, 1, 1），α_2=（3, 3, 1, 1），

α_3=（1, 9, 1, 9），α_4=（4, 0, 0, 0），

把它们标准正交化

解：(1) 正交化

取$\beta_1=\alpha_1$=（1, 1, 1, 1），

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\beta_1=\alpha_2-\frac{8}{4}\beta_1=(1,1,-1,-1),$$

解：(1) 正交化

取$\beta_1=\alpha_1=$（1, 1, 1, 1），

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\alpha_2,\alpha_2)}\beta_1=\alpha_2-\frac{8}{4}\beta_1=（1, 1, -1, -1），$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\alpha_3,\alpha_3)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\alpha_3,\alpha_3)}\beta_2=\alpha_3-\frac{20}{4}\beta_1-\frac{0}{4}\beta_1=（-4, 4, -4, 4）$$

$$\beta_4=\alpha_4-\frac{(\alpha_4,\beta_1)}{(\alpha_4,\alpha_4)}\beta_1-\frac{(\alpha_4,\beta_2)}{(\alpha_4,\alpha_4)}\beta_2-\frac{(\alpha_4,\beta_3)}{(\alpha_4,\alpha_4)}\beta_3=（1, -1, 1, -1）$$

(2) 单位化

取$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}=\dfrac{1}{2}$（1, 1, 1, 1），$\eta_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}=\dfrac{1}{2}$（1, 1,-1,-1），

$\eta_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}=\dfrac{1}{2}$(-1, 1,-1, 1），$\eta_4=\dfrac{\beta_4}{|\beta_4|}=\dfrac{1}{2}$（1,-1, 1,-1），

三、**正交矩阵**

定义：若n阶实矩阵A满足$A^T A = E$，则称A为正交矩阵.

由定义易知，A为正交矩阵的充要条件为$A^{-1} = A^T$.

正交矩阵性质：

（1）若A为正交矩阵，由A^{-1}也为正交矩阵；

（2）若A, B为同阶正交矩阵，由AB也为正交矩阵；

（3）若A为正交矩阵, 则$\det A = \pm 1$.

定理:(正交矩阵的构造)n阶实矩阵A为正交矩阵$\Leftrightarrow$其列（行）向量组是R^n的单位正交基.

证:（以列向量为例证明）

设$A=(\alpha_1,\alpha_2\cdots,\alpha_n)$，其中$\alpha_i$为$A$的第$i$个列向量$(i=1,2,\cdots,n)$,

则有

$$A^T A = \begin{pmatrix} \alpha_1{}^T \\ \alpha_2{}^T \\ \vdots \\ \alpha_n{}^T \end{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n)$$

$$= \begin{pmatrix} (\alpha_1, \alpha_1) & (\alpha_1, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_1, \alpha_n) \\ (\alpha_2, \alpha_1) & (\alpha_2, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_2, \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\alpha_n, \alpha_1) & (\alpha_n, \alpha_2) & \cdots & (\alpha_n, \alpha_n) \end{pmatrix}.$$

$$\therefore \quad A^T A = E \Leftrightarrow (\alpha_i, \alpha_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases},$$

即A为正交矩阵$\Leftrightarrow \alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n$为$R^n$中的单位正交基.

四、实对称矩阵的对角化

定理: 实对称矩阵的特征值都是实数.

证: 设$AX=\lambda X$，A为实对称矩阵. 令$X=\left(x_1,x_2,\ldots,x_n\right)^T$,

记$\overline{X}=\left(\overline{x_1},\overline{x_2},\ldots,\overline{x_n}\right)^T$,其中$\overline{x_i}$表示$x_i$的共轭复数. 由$A$实

对称,所以$\overline{A}=A$,只需证$\overline{\lambda}=\lambda$即可. 考察等式

$$\overline{X}^T(AX)=\overline{X}^T A^T X=\left(A\overline{X}\right)^T X=\left(\overline{AX}\right)^T X,$$

等式左边为$\lambda\overline{X}^T X$, 右边为$\overline{\lambda}\overline{X}^T X$,

所以,$\lambda\overline{X}^T X=\overline{\lambda}\overline{X}^T X$. 又$\because X\neq 0$,由$\overline{X}^T X=\overline{x_1}x_1+\ldots+\overline{x_n}x_n\neq 0$

$\therefore\ \overline{\lambda}=\lambda$,即$\lambda$为一个实数.

定理：

实对称矩阵不同特征值所对应的特征向量必正交.

证：设A为实对称矩阵，$AX_1=\lambda_1 X_1, AX_2=\lambda_2 X_2, \lambda_1\neq\lambda_2$

则$\lambda_2(X_1,X_2)=\lambda_2 X_1^T X_2=X_1^T\lambda_2 X_2=X_1^T AX_2$

$$=X_1^T A^T X_2=(AX_1)^T X_2=\lambda_1 X_1^T X_2=\lambda_1(X_1,X_2).$$

由$\lambda_1\neq\lambda_2$, 所以必有$(X_1,X_2)=0.$

定理

设A为 n阶实对称矩阵,则存在正交矩阵Q,使得$Q^{-1}AQ$为对角矩阵,即

$$Q^{-1}AQ = Q^{T}AQ = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$A$的全部特征值（允许有重根）.

证明略。

例： 设A = $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

求正交矩阵T, 使得$T^{-1}AT$为对角矩阵，并写出相应的对角矩阵

解： 1. 求A的全部特征值

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}-\lambda & 1 & 1 & -1\\ 1 & -\lambda & -1 & 1\\ 1 & -1 & -\lambda & 1\\ -1 & 1 & 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(\lambda+3)(\lambda-1)^3$$

故A的特征值为$\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1,\lambda_4=-3$

2. 求特征值对应的线性无关特征向量（基础解系）

对于$\lambda=1$，由$(A-E)X=0$，得

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

解得$(A-E)X=0$的基础解系为

$\alpha_1=(1,1,0,0)^T,\alpha_2=(1,0,1,0)^T,\alpha_3=(1,0,0,1)^T$

对于 $\lambda=-3$，由 $(A+3E)X=0$，得

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得 $(A+3E)X=0$ 的基础解系为

$\alpha_4=(1,-1,-1,1)^T$

3. 用施密特正交法再单位化，得单位正交向量组

(1).首先将重根对应的线性无关向量正交化

取 $\beta_1=\alpha_1=(1,1,0,0)^T$,

$$\beta_2=\alpha_2-\frac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1,0)^T,$$

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-1)^T$$

3. 用施密特正交法再单位化，得单位正交向量组

(2).将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \alpha_4$ 单位化

取 $\eta_1 = \dfrac{\beta_1}{|\beta_1|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0, 0)^T$,

$$\eta_2 = \frac{\beta_2}{|\beta_2|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2, 0)^T,$$

$$\eta_3 = \frac{\beta_3}{|\beta_3|} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(1, -1, -1, -3)^T,$$

$$\eta_4 = \frac{\alpha_4}{|\alpha_4|} = \frac{1}{2}(1, -1, -1, 1)^T,$$

4． 取 正 交 矩 阵

取 正 交 矩 阵

$$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

则 有 $T^TAT=T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -3 \end{pmatrix}$

给定实对称矩阵A,求正交矩阵T,使$T^{-1}AT$为对角矩阵的步骤总结:

第一步:求特征多项式$\det(A-\lambda E)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda_i-\lambda)^{r_i}$,其中$\sum_{i=1}^{m} r_i=n$,

得到全部互异特征值$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$.

第二步:由于A可对角化,由前面定理,设r_i重特征值λ_i

对应r_i个线性无关的特征向量为$X_{i1},X_{i2},\cdots,X_{ir_i}$,

它们可以通过求解$(A-\lambda_i E)X=0$的基础解系获得

第三步：用施密特正交化法，再单位化，将$X_{i1},\cdots,X_{ir_i}$化为r_i个两两正交的单位向量$Y_{i1},\cdots,Y_{ir_i}$.因不同特征值对应特征向量已正交，这样得到的n个两两正交的单位特征向量$Y_{11},\cdots,Y_{1r_1};\ Y_{21},\cdots,Y_{2r_2};\cdots;\ Y_{m1},\cdots,Y_{mr_m}$

第四步：取$T=(Y_{11},\cdots,Y_{1r_1};\cdots;\ Y_{m1},\cdots,Y_{mr_m})$，$T$为所求的正交矩阵，并且有$T^{-1}AT=diag\left(\lambda_1,...,\lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_2,...,\lambda_m,...,\lambda_m\right)$

作业　习题**5 P150**

11、14(3) 、15、17、19、21、23

课堂练习：设$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & -2 & -4\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$.

求正交矩阵T, 使得$T^{-1}AT$为对角矩阵

提示: A的特征值$\lambda_1=-7, \lambda_2=\lambda_3=2$

$\lambda_1=-7$时,$(A+7E)X=0$的一个基础解系为

$\alpha_1=(-1,2,2)^T$;

$\lambda_2=\lambda_3=2$时,$(A-2E)X=0$的一个基础解系为

$\alpha_2=(2,1,0)^T, \alpha_3=(2,0,1)^T$

正交化:取$\beta_1=\alpha_1=(-1,2,2)^T$;

$\beta_2=\alpha_2=(2,1,0)^T$,

$$\beta_3=\alpha_3-\frac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2=\frac{1}{5}(2,-4,5)^T$$

单位化:取$\eta_1=\dfrac{\beta_1}{\|\beta_1\|}=(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3})^T$;

$$\eta_2=\frac{\beta_2}{\|\beta_2\|}=(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}},0)^T,$$

$$\eta_3=\frac{\beta_3}{\|\beta_3\|}=(\frac{2}{3\sqrt{5}},\frac{-4}{3\sqrt{5}},\frac{5}{3\sqrt{5}})^T,$$

取正交矩阵$T=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)$

例：已知三阶实对称矩阵A的三个特征值为$\lambda_1=\lambda_2=1,\lambda_3=2$，且属于$\lambda=1$的特征向量为$\alpha_1=(1,1,-1)^T,\alpha_2=(2,3,-3)^T$，求

(1).A的属于$\lambda=2$的特征向量；

(2).求矩阵A

分析：由于实对称矩阵的属于不同特征值的特征向量必然正交. 现已知A的属于λ=1的两个线性无关的特征向量α_1,α_2，那么A的属于$\lambda=2$的特征向量α_3可由$(\alpha_3,\alpha_1)=0$和$(\alpha_3,\alpha_2)=0$确定

解：(1). 设矩阵A的属于$\lambda=2$的特征向量

$\alpha_3=(x_1,x_2,x_3)^T$,则由α_3与α_1，α_3都正交可得方程组

$$\begin{cases}(\alpha_3,\alpha_1)=x_1+x_2-x_3=0\\(\alpha_3,\alpha_2)=2x_1+3x_2-3x_3=0\end{cases}$$

取α_3为上述齐次方程组的任意一个非零解则为$\lambda=2$的一个特征向量. 比如取$\alpha_3=(0,1,1)^T$

(2).令 $P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

则有 $P^{-1}AP=diag(1,1,2)$,

所以 $A=P\,diag(1,1,2)P^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

例：设A,B都是n阶实对称矩阵，

证明：存在正交矩阵P，使得

$P^{-1}AP=B \Leftrightarrow A$与$B$有相同的特征值

证：（必要性）. 显然。因为由条件可知

A与B相似，所以A与B有相同的特征值

（充分性）. 设A与B有相同的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$

由于A,B皆为实对称矩阵，故存在正交矩阵P_1,P_2

是使得$P_1^{-1}AP_1=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，

$P_2^{-1}BP_2=diag(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$，所以$P_1^{-1}AP_1=P_2^{-1}BP_2$

则有$B=P_2P_1^{-1}AP_1P_2^{-1}=(P_1P_2^{-1})^{-1}A(P_1P_2^{-1})$，

令$P=P_1P_2^{-1}$为正交矩阵，使得$B=P^{-1}AP$