第五章　特征值与特征向量

第一节　矩阵的特征值与特征向量

特征值与特征向量的概念

设A为n阶方阵，

X为n维非零列向量

特征值

$$AX = \lambda X$$

特征向量

X称为矩阵A的属于特征值λ的特征向量

关于特征值与特征向量的说明

$$\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{\lambda X}$$

(1). 特征值是一个数;

(2). 特征向量是一个非零列向量;

(3). 方阵A的特征值λ对应的特征向量 不唯一;

特征值与特征向量的求法

若λ是n 阶矩阵A 的特征值

即$AX=\lambda X$,其中X为非零向量.

即求λ使齐次线性方程组$(A-\lambda E)X=0$有非零解

（系数矩阵为$(A-\lambda E)$，非零解为X）.

由齐次方程组的理论知，

齐次线性方程组$(A-\lambda E)X=0$有非零解

$\Leftrightarrow$ 系数矩阵（$A-\lambda E$)的秩小于n

$\Leftrightarrow$ 系数矩阵（$A-\lambda E$)行列式$\det(A-\lambda E)=0$

特征矩阵：

矩阵$A-\lambda E$，其中A为n阶方阵，λ为未知量

特征多项式：

$\det(A-\lambda E)$为λ 的一个n 次多项式，即成立

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

$$=b_n\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda^1+b_0,$$

其中$b_{n-1}=(-1)^{n-1}(a_{11}+\cdots+a_{nn})$

特征方程： $\det(\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E})=0$称为特征方程

n次方程$b_n\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda^1+b_0=0$必定有$n$个根（包括复数根，$k$重根算作$k$个）记为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，

它们正好是A的n个特征值

代数基本定理
Gauss

求特征值和特征向量方法:

(1). 通过特征多项式

$$\det(A-\lambda E)=b_n\lambda^n+b_{n-1}\lambda^{n-1}+\cdots+b_1\lambda^1+b_0=0$$

求得全部特征值λ_k, $k=1,2,\cdots n$.

(2). 把每一个λ_k分别代入$(A-\lambda_k E)X=0$,

求得该方程组的非零解(非零解可能不止一个),

例：求$A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&-2&-4\\2&-4&-2\end{pmatrix}$的特征值和特征向量.

解: 第一步：计算特征多项式

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda&2&2\\2&-2-\lambda&-4\\2&-4&-2-\lambda\end{vmatrix}=-(\lambda-2)^2(\lambda+7)$$

第二步：解特征方程,求得特征值

解$\det(A-\lambda E)=0$,即$-(\lambda-2)^2(\lambda+7)=0$, 有$\lambda_1=-7$, $\lambda_2=\lambda_3=2$,

所以A的特征值为$\lambda_1=-7$, $\lambda_2=\lambda_3=2$

第三步. 对每个特征值λ_k,解$(A-\lambda_k E)X=0$的基础解系

当$\lambda_1=-7$时, 解方程组$(A+7E)X=0$, 即

$$\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{得基础解系} X_1=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

故$k_1X_1(k_1\neq 0)$是A的属于λ_1=-7的全体特征向量

当$\lambda_2=\lambda_3=2$时，解方程组$(A-2E)X=0$，即

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{基础解系} X_2=\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, X_3=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

故$k_2X_2+k_3X_3$（常数k_2,k_3不全为0）是A的属于$\lambda_2=\lambda_3=2$的全体特征向量；

总结求特征值和特征向量的步骤

第一步：计算特征多项式$\det(A-\lambda E)$;

第二步：解特征方程$\det(A-\lambda E)=0$,

求得特征值λ_1，$\lambda_2,\cdots$，λ_n;

第三步：对每一个λ_i，求方程组

$(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系.

比如：$(A-\lambda_i E)X=0$ 的基础解系为$X_{i1},\cdots,X_{ir_i}$,

则$k_1X_{i1}+\cdots+k_{r_i}X_{ir_i}$(常数$k_1,\cdots,k_{r_i}$不全为零)

为A的属于λ_i的全部特征向量

特征值与特征向量的性质

性质 n阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 与其转置A^T有相同的特征值

性质1 设λ 为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，

$\boldsymbol{X}_1,\cdots \boldsymbol{X}_t$为属于$\lambda$的特征向量

则任意组合$\boldsymbol{X} = k_1\boldsymbol{X}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{X}_t \ (k_1,\cdots,k_t$不全为0)

也是 $\boldsymbol{A}$ 的属于λ的特征向量

性质 2 若$\boldsymbol{n}$阶方阵$\boldsymbol{A}$ 的特征值为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$

则 $(1).\det(A) = \prod_{i=1}^{n}\lambda_i \qquad (2).\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = \sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

定义: 称$\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$为A的迹, 记为$\mathrm{tr}(A)$

$$(1).\det(A-\lambda E)=(\lambda_1-\lambda)(\lambda_2-\lambda)\cdots(\lambda_n-\lambda),$$

取λ＝0即可证明$\det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$

（2）比较上式两边$(-\lambda)^{n-1}$的系数，

右边的系数为$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n$,

左边的系数来自$\det(A-\lambda E)$的对角线元的乘积项

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)\cdots(a_{nn}-\lambda),$$

此时$(-\lambda)^{n-1}$的系数$\sum_{k=1}^{n}a_{kk}$.

两边同次幂的系数应该对应相等, 则$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$

书本例题1.3 设λ是n阶矩阵A的一个特征值,α是A对应于λ的一个特征向量，证明：$A^2\alpha=\lambda^2\alpha$

证明： 由条件知$A\alpha=\lambda\alpha$，且$\alpha \neq 0$

从而$A^2\alpha=A(A\alpha)=A(\lambda\alpha)=\lambda A\alpha=\lambda^2\alpha$

性质3 若λ为A的特征值,X为相应的特征向量

设有多项式$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$

则方阵$f(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{E}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$的特征值为$f(\lambda)$,对应特征向量仍为$\boldsymbol{X}$

性质4 不同特征值所对应的特征向量线性无关

证明： 设$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$是A的m个互不相等的特征值，其相应特征向量为$\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_m$。

下面对m用数学归纳法证明$X_1,\cdots,X_m$线性无关

当$m=1$时，$\boldsymbol{X}_1\neq 0$, 结论成立,

假设$m=k$时结论成立, 即$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关

当$m=k+1$时, 证明$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$也线性无关.

（反证法）反设$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$线性相关.

已知$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关，而$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$线性相关

$\Rightarrow \alpha_{k+1}$可由$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性表示，即

$$\alpha_{k+1}=c_1\alpha_1+\cdots c_k\alpha_k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

由向量$a_{k+1}\neq 0$，知$c_1,c_2,\cdots,c_k$不全为0

两边同时左乘$\boldsymbol{A}$，得$\boldsymbol{A}\alpha_{k+1}=\boldsymbol{A}\left(c_1\alpha_1+\cdots+c_k\alpha_k\right)$

$$\Rightarrow \lambda_{k+1}\alpha_{k+1}=c_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+c_k\lambda_k\alpha_k$$

（*）式$\alpha_{k+1}=c_1\alpha_1+\cdots c_k\alpha_k$的两边乘以$\lambda_{k+1}$, 得

$$\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}=c_1\lambda_{k+1}\alpha_1+\cdots c_k\lambda_{k+1}\alpha_k$$

并与上式$\lambda_{k+1}\alpha_{k+1}=c_1\lambda_1\alpha_1+\cdots+c_k\lambda_k\alpha_k$作差

$$\Rightarrow 0=c_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1)\alpha_1+\cdots+c_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\alpha_k$$

因为$\lambda_i\neq\lambda_{k+1}(i=1,2,\cdots,k)$, 且 $c_1,\cdots,c_k$不全为0

$\Rightarrow c_1(\lambda_{k+1}-\lambda_1),\cdots,c_k(\lambda_{k+1}-\lambda_k)$不全为0

$\Rightarrow\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性相关. 这与$\alpha_1,\cdots,\alpha_k$线性无关矛盾

所以，$\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$线性无关. 归纳可知,命题成立.

性质5（性质4的推广）

设$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$是$n$ 阶矩阵$\boldsymbol{A}$的m个互异特征值，对应于λ_j的线性无关的特征向量为$\boldsymbol{X}_{j1},\boldsymbol{X}_{j2},\cdots,\boldsymbol{X}_{jr_j}$(有$r_j$个)$(j=1,2,\cdots,m)$

则这些$r_1+r_2+\cdots+r_m$个特征向量构成的向量组$\left\{\boldsymbol{X}_{jk}\,|\,1\le j\le m,1\le k\le r_j\right\}$线性无关

性质5的证明与性质4的类似！

特征值与特征向量的性质的应用

例：设A为3阶方阵，三个特征值$\lambda_1=0,\lambda_2=4,\lambda_3=3$;

$B=A^2-4A+8E$，求$\det(B)$.

分析：B的元素未知，故不好用行列式的定义计算！

想法：$\det(B)$等于B的特征值的乘积！

解：设B的3个特征值为μ_1,μ_2,μ_3，$f(x)=x^2-4x+8$

由性质3知$\mu_1=f(\lambda_1)=8$，$\mu_2=f(\lambda_2)=8$，$\mu_3=f(\lambda_3)=5$

由性质2知$\det(B)=\mu_1\mu_2\mu_3=8\times 8\times 5=320$

作业

习题**5**

1 (2)，2(2)， 3