DASAR-DASAR

ALJABAR LINIER

NURIL LUTVI AZIZAH, S.Si., M.Si
NOVIA ARIYANTI, S.Si., M.Pd

ISBN 978-623-6833-41-4 (PDF)
9 786236 833414

UP

BUKU AJAR
UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SIDOARJO

DASAR - DASAR ALJABAR LINIER

UMSIDA
DARI SINI PENCERAHAN BERSEMI

DASAR-DASAR

ALJABAR LINIER

UP

NURIL LUTVI AZIZAH, S.Si., M.Si
NOVIA ARIYANTI, S.Si., M.Pd

BUKU AJAR MATA KULIAH
DASAR-DASAR ALJABAR LINEAR

Oleh
Nuril Lutvi Azizah, S.Si., M.Si.
Novia Ariyanti, S.Si., M.Pd.

Diterbitkan Oleh :UMSIDA Press

UNIVERSITAS MUHAMMADIYAH SIDOARJO
2020

BUKU AJAR
DASAR-DASAR ALJABAR LINEAR

Penulis:
Nuril Lutvi Azizah S.Si., M.Si
Novia Ariyanti, S.Si., M.Pd

ISBN :
978-623-6833-41-4

Editor:
Mohammad Faizal Amir, S.Pd., M.Pd.

Design Sampul dan Tata Letak:
Mochammad Nashrulloh, S.Pd.
Amy Yoga Prajati, S.Kom.

Penerbit:
UMSIDA Press
Anggota IKAPI No. 218/Anggota Luar Biasa/JTI/2019
Anggota APPTI No. 002 018 1 09 2017

Redaksi
Universitas Muhammadiyah Sidoarjo
Jl. Mojopahit No 666B
Sidoarjo, Jawa Timur

Cetakan Pertama, September 2020

KATA PENGANTAR

Puji syukur kami panjatkan kehadirat Allah SWT, atas rahmat dan karunia-Nya Buku Dasar-Dasar Aljabar Linear dapat diselesaikan dengan baik dan tanpa halangan yang berarti. Shalawat dan salam selalu kami sampaikan kepada junjungan Nabi Muhammad SAW.

Tim penulis mengucapkan terimakasih kepada:

1. Dr. Hindarto, S.Kom.,MT., Dekan Fakultas Sains dan Teknologi yang memberikan arahan dan motivasi kepada penulis dalam menyelesaikan buku ajar ini.
2. Arif Senja Fitrani, S.T.,M.T., Kaprodi Informatika yang telah memberikan dukungan untuk menyusun buku ajar ini.
3. Rekan-rekan dosen pengampu Mata Kuliah Aljabar Linear di program studi Informatika yang telah berbagi pengalaman dalam mengampu mata kuliah tersebut.

Saran dan kritik sangat penulis harapkan untuk mewujudkan buku ajar Dasar-Dasar Aljabar Linear yang lebih baik dan tentunya sesuai dengan amanat peraturan yang berlaku. Terimakasih.

Tim Penulis

DAFTAR ISI

BATANG TUBUH DAN
SUB-CAPAIAN PEMBELAJARAN MATA KULIAH

BAB	Sub-Capaian Pembelajaran Mata Kuliah
BAB I SISTEM PERSAMAAN LINIER	1. Mahasiswa mampu mengidentifikasi suatu sistem persamaan linear 2. Mahasiswa mampu mengubah bentuk sistem persamaan linear menjadi suatu matriks 3. Mahasiswa mampu menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan operasi baris dan Eliminasi Gaussian
BAB II MATRIKS	1. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep eliminasi persamaan, matriks, operasi matriks, transpose dan invers matriks 2. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan operasi matriks, invers, dan transpose matriks
BAB III DETERMINAN	1. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep determinan dalam persoalan yang berkaitan dengan matriks 2. Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep determinan pada matriks dengan ordo n x n 3. Mahasiswa mampu menyelesaikan determinan matriks dengan menggunakan perluasan kofaktor
BAB IV VEKTOR-VEKTOR DALAM DIMENSI 2 DAN 3	1. Mahasiswa mampu mengidentifikasi sifat-sifat vektor dalam dimensi 2 dan dimensi 3 2. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan operasi vektor dimensi 2 dan dimensi 3
BAB V RUANG VEKTOR UMUM	1. Mahasiswa mampu membandingkan ruang-ruang vektor real 2. Mahasiswa mampu mengidentifikasi ruang, sub ruang, bebas linear, basis dan dimensi dalam ruang-ruang vektor umum

Bab 1

<u>Sistem Persamaan Linier</u>

Tujuan :

Tujuan Bab 1 Sistem Persamaan Linier adalah sebagai dasar materi pada mata kuliah Teknik Optimasi yang terdapat di Semester 5 Program Studi Informatika UMSIDA.

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah :

1. Mahasiswa mampu mengidentifikasi suatu sistem persamaan linear yang disajikan dalam bentuk matriks di tingkat Perguruan Tinggi khususnya pada prodi Infomartika

2. Mahasiswa mampu mengubah bentuk sistem persamaan linear menjadi suatu matriks kaitannya dengan pemograman pada prodi informatika

3. Mahasiswa mampu menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan operasi baris dan Eliminasi Gaussian sebagai perhitungan

1.1 Pengantar Sistem Persamaan Linier

Persamaan linier adalah suatu persamaan dimana variabel yang terlibat berderajat paling tinggi satu. Jika kita mempunyai beberapa persamaan linear maka sekumpulan persamaan linear itu disebut sistem persamaan linear. Suatu pasangan beberapa bilangan disebut solusi dari suatu SPL jika pasangan tersebut memenuhi kebenaran masing-masing persamaan dari SPL tersebut.

Sebagai contoh, perhatikan SPL dengan dua persamaan dan dua variable berikut

$$a_1x + a_2y = b$$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Persamaan pertama diatas disebut persamaan linier dalam peubah x dan y. Persamaan kedua merupakan persamaan linier dibentuk dalam n peubah $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Dengan $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, dan b konstata real, dan peubah-peubah dalam suatu persamaan linier kadang merupakan peubah yang tak diketahui.

Contoh 1.1.1 :

Sekarang, perhatikan SPL berikutnya

$$x_1 - 2x_2 = 3$$

$$3x_1 - 6x_2 = 9$$

Perhatikan bahwa jika kita mengalikan persamaan kedua dengan $\frac{1}{3}$ maka diperoleh persamaan pertama. Dengan kata lain, SPL ini ekuivalen dengan satu persamaan

$$x_1 - 2x_2 = 3$$

Kita mempunyai banyak pilihan dari pasangan x_1 dan x_2 yang memenuhi persamaan ini. Jika kita mengambil $t \in \boldsymbol{R}$ sebarang maka $x_1 = 3 + 2t$, $x_2 = t$ merupakan solusi persamaan ini. Dengan demikian SPL semula mempunyai solusi tak hingga banyak.

Contoh 1.1.2 :

Carilah himpunan penyelesaian dari :

$x_1 + 2x_2 \qquad = 2$

$4x_1 + 8x_2 \qquad = 6$

Jika kita mengalikan persamaan kedua dengan $\frac{1}{4}$ maka kita peroleh persamaan

$x_1 + 2x_2 = \frac{3}{2}$

Jadi SPL semula ekuivalen dengan

$x_1 + 2x_2 \qquad = 2$

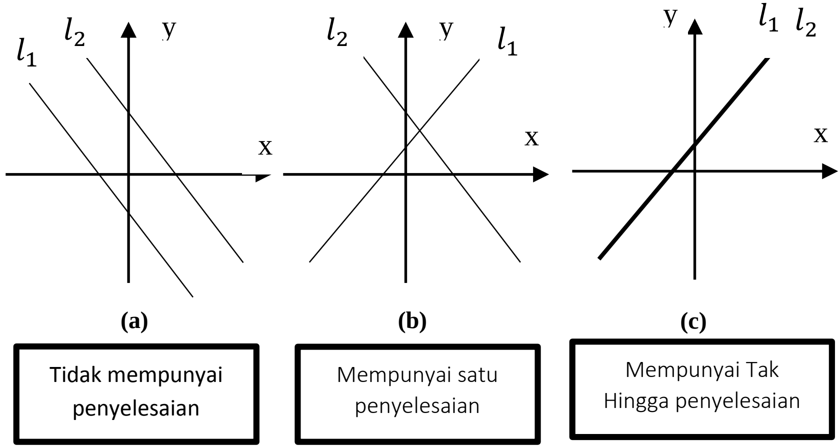
$x_1 + 2x_2 \qquad = \frac{3}{2}$

Jelas bahwa tidak ada pasangan x_1 dan x_2 yang memenuhi persamaan ini. Oleh karena itu SPL ini tidak mempunyai solusi. Sebuah sistem persamaan yang tidak mempunyai penyelesaian disebut sebagai **tak-konsisten**, jika paling tidak ada satu penyelesaian, maka sistem disebut **konsisten**. Sebagai bahan ilustriasi , beberapa kemungkinan yang terjadi dalam menyelesaikan sistem persamaan linier dalam peubah x dan y.

$$a_1x + b_1y = c_1 \quad (a_1, b_1 \text{ tidak keduanya nol})$$

$$a_2x + b_2y = c_2 \quad (a_2, b_2 \text{ tidak keduanya nol})$$

Grafik persamaan linier berbentuk garis, misalkan garis k_1 dan k_2. Ada tiga gambar dari kedua grafik yang mungkin terjadi, sebagai berikut :



Gambar 1. Garis Penyelesaian SPL

Tiga kemungkinan di atas juga berlaku pada sebarang SPL dengan m buah persamaan dan n variabel. Sifat ini kita nyatakan dalam teorema berikut.

Teorama 1.1: Jika kita mempunyai sebuah SPL maka persis ~~hanya~~ satu dari tiga kemungkinan berikut dipenuhi (Anton, 2015):

a. SPL Mempunyai solusi tunggal
b. SPL Mempunyai solusi tak hingga
c. SPL Tidak memiliki solusi

Pada tiga contoh Gambar 1 di atas kita tidak menemui kesulitan untuk menguji eksis- tensi solusi karena banyaknya persamaan dan variabel hanya dua. Jika persamaan atau variabelnya lebih banyak tentu masalahnya sedikit lebih sulit. Kita akan mempelajari metode praktis untuk menguji eksistensi solusi SPL secara umum.

Sistem persamaan linear yang terdiri dari m buah persamaan linear dengan n buah variabel $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mempunyai bentuk umum yang dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\
\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}$$

Dengan $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ adalah peubah sampai dengan n, dan a, b menyatakan koefisien dan konstanta. Misalkan terdapat suatu sistem umum tiga persamaan dengan lima peubah, dapat ditulis sebagai berikut :

$$\begin{array}{c}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_2 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_2 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = b_2 \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_2 + a_{34}x_4 + a_{35}x_5 = b_3
\end{array}$$

1.2 Sistem Persamaan Linier

Pada pengantar sistem persamaan linier, apabila terdapat sejumlah m persamaan dan n peubah maka untuk menyelesaikan sistem ini akan cukup sulit. Sebuah sistem persamaan dengan m persamaan dan n peubah dapat dituliskan kedalam susunan angka suatu matriks dalam bentuk segiempat :

$$\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{bmatrix}$$

Bentuk matriks diatas disebut **matriks yang diperbanyak.** Didalam suatu sistem persamaan, matriks yang diperbanyak dapat dituliskan untuk membantu mempermudah penyelesaian sustu sistem persamaan. Sistem ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks :

$$Ax = b$$

Dalam hal ini, A disebut matriks koefisien, x adalah matriks variabel, dan b adalah matriks konstan (konstanta).

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Yang disebut **matriks koefisien** sistem, dan untuk determinan matriks diatas adalah

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

Disebut **determinan** sistem. Sedangkan vektor-vektor x dan y, yaitu :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Berturut-turut adalah vektor yang dicari dan vektor konstan yang diberikan. Apabila unsur-unsur didalam y semuanya nol, maka sistem tersebut dikatakan **homogen**, dan apabila terdapat untuk tak nol dalam y maka dikatakan **tak-homogen**. Unsur-unsur dalam x yang memnuhi persamaan disebut **penyelesaian**. Jika persamaan homogen, maka mudah ditunjukkan bahwa nilai $x_1 = 0, x_2 =$

$0, \ldots, x_n = 0$ adalah penyelesaian. Penyelesaian ini disebut juga sebagai **penyelesaian trivial.** Selanjutnya yang akan dibahas disini adalah bagaimana mendapatkan penyelesaian yang tak trivial.

Beberapa langkah untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier adalah :

1. Metode eliminasi Gauss-Gauss Yordan
2. Operasi Baris Elementer (OBE)
3. Metode Crammer dengan menerapkan determinan matriks.

Misalnya berikut merupakan matriks yang diperbanyak untuk sistem persamaan sebagai berikut :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_2 + x_4 + 4x_5 = 10$$

$$x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 5$$

$$2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 2$$

$$3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = 0$$

$$x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 4$$

Adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 4 & 10 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \qquad y = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \\ 2 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Untuk menyelesaian soal diatas, dilakuka beberapa operasi baris dasar yang akan dibahas pada sub-bab selanjutnya. Operasi baris elementer adalah operasi yang dikenakan pada beberapa baris matriks yang meliputi langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tak nol
2. Menukar dua baris
3. Mengalikan suatu baris dengan suatu konstanta kemudian menambahkan ke baris yang lain.

1.3 Operasi-Operasi Baris Dasar

Pada sub-bab sebelumnya telah dibahas mengenai operasi baris elementer (OBE) yang meliputi pengoperasian pada baris SPL sebuah matriks.

Contoh 1.3.1 :

Pandang sistem persamaan linier berikut :

$$x + 2y = 5$$

$$2x + 5y = 12$$

Jawab :

Matriks pada persamaan pada **Contoh 1.3.1** adalah

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Kemudian lakukan OBE pada matriks A dengan perintah kurangi baris kedua dengan 2 kali baris pertama

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 12 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B2 - 2B1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Dilanjutkan dengan kurangi baris pertama dengan 2 kali baris kedua sehingga menjadi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B1 - 2B2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Kembalikan ke bentuk sistem persamaan linier, sehingga persamaan menjadi $x = 1$ dan $y = 2$.

Pada suatu matriks suatu SPL dapat dilakukan operasi-operasi antara lain :

1. Kalikan suatu baris dengan suatu konstanta tak nol
2. Pertukarkan dua baris
3. Tambahkan perkalian dari suatu baris ke baris lainnya untuk mendapatkan matriks baru.

Contoh 1.3.2 :

Diberikan SPL sebagai berikut :

$$3x + 2y + z = 1$$

$$4x + 3y + 2z = 3$$

$$5x + y + 3z = 2$$

Selesaikan SPL diatas dengan menggunakan operasi baris elementer!

Jawab :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

dengan membentuk menjadi matriks yang diperbanyak dihasilkan

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\frac{B1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Setelah baris pertama dibagi dengan 3 agar mendapatkan titik pivot (baris pertama kolom pertama) yaitu utama satu. Maka selanjutnya bisa dilakukan operasi yang bersamaan antara baris dua dan baris tiga.

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 4 & 3 & 2 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \underset{B3-5B1}{\overset{B2-4B1}{\sim}} \quad \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya bisa kembali ke baris pertama kolom kedua dioperasikan dengan baris kedua dan ketiga sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \underset{\sim}{B1-2B2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Kemudian titik pivot berganti pada baris kedua kolom kedua (trace) diagonal pada matriks. Sehingga baris kedua agar menjadi utama satu maka dikalikan dengan tiga.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{3B2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Baris ketiga dioperasikan dengan baris kedua dengan mengalikan baris kedua dengan 7/3,atau terlebih dahulu baris tiga dikalikan dengan 3 untuk mempermudah operasi hitungan, sehingga menjadi berikut :

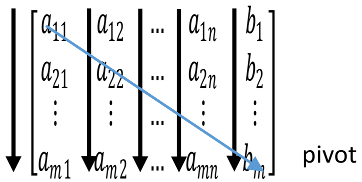
$$\begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & -\frac{7}{3} & \frac{4}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix} \underset{\sim}{3B3} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 7 & 4 & 4\end{bmatrix} \underset{\sim}{B3-7B2} \begin{bmatrix}1 & 0 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 10 & 10\end{bmatrix}$$

Dikembalikan pada persamaan semula menjadi :

$$x - z = -1$$
$$y + 2z = 2$$
$$10z = 10$$

Dikerjakan dari persamaan akhir dan dilakukan substitusi pada persamaan yang lain menjadi $z = 1, x = 0, y = 0.$ □

Langkah operasi baris elementer apabila digambarkan kedalam perhitungan matriks baris berjalan dari baris pertama kolom pertama dengan memilih titik pivot, kemudian pivot bergeser seterusnya secara diagonal, jika digambarkan sebagai berikut :



1.4 Eliminasi Gaussian

Metode Eliminasi Gauss adalah suatu metode untuk mencari himpunan penyelesaian dari sistem persamaan linier dengan menggunakan Operasi Baris Elementer (OBE), sedemikian hingga matriksnya mempunyai baris eselon. Setelah membentuk baris eselon, kembalikan matriks tersebut dalam bentuk sistem linier dan kemudian lakukan substitusi balik mulai dari bawah. Pada sub bab sebelumnya kita telah menyelesaikan sistem linier yang diberikan dengan mereduksi matriks yang diperbanyak pada Contoh 1.3.2. dimana penyelesaian tersebut terbukti. Ini merupakan contoh matriks yang berbentuk **baris-eselon tereduksi**. Untuk menjadi bentuk ini, sebuah matriks harus mempunyai sifat-sifat berikut ini :

1. Jika semua baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka angka tak nol pertama dalam baris tersebut adalah sebuah angka 1 (kita sebut utama satu atau **pivot**)
2. Jika ada sebarang baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini dikelompokkan bersama dibagian bawah matriks.
3. Jika sebarang dua baris yang berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, utama 1 dalam baris yang lebih bawah terletak disebelah kanan utama 1 dalam baris yang lebih atas.
4. Masing-masing kolom yang berisi sebuah utama 1 mempunyai nol di tempat lainnya.

Suatu matriks yang mempunyai sifat nomer 1,2, dan 3 (tidak perlu 4) disebut mempunyai **bentuk baris eselon.**

Contoh 1.4.1 :

Matriks-matriks berikut berada dalam bentuk baris eselon tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sedangkan matriks berikut ini berada dalam bentuk baris eselon tetapi bukan dalam bentuk baris eselon tereduksi :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks diatas memenuhi syarat-syarat dalam bentuk matriks baris eselon.

Contoh 1.4.2 :

Anggaplah bahwa matriks yang diperbanyak untuk suatu sistem persamaan linier telah direduksi oleh operasi barsi ,menjadi bentuk baris eselon tereduksi yang diberikan. Selesaikan sistem tersebut!

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Jawab :

a. Sistem persamaan yang berpadanan dengan :

$x_1 = 3$

$2x_2 = 4 \to\ x_2 = 2$

$x_3 = 5$

Sehingga tanpa menghitung yang berarti kita dapatkan nilai $x_1 = 3, x_2 = 2$ dan $x_3 = 5$.

b. Sistem persamaan yang berpadanan adalah

$x_1 + 3x_2 \qquad = 4$

$x_3 = 3$

$x_4 = -2$

Peubah non utama dalam hal ini adalah x_2 disebut juga sebagai **peubah bebas.** Sehingga penyelesaian untuk sistem persamaan linier ini diubah kedalah bentu peubah bebas menjadi

$$x_1 = 4 - 3x_2$$

Karena x_2 merupakan peubah bebas, sehingga dapat diberi sembarang nilai, katakanlah t, sehingga didapatkan nilai x_1. Dengan demikian terdapat hingga banyaknya penyelesaian, dan penyelesaian umumnya diberikan oleh rumus

$$x_1 = 4 - t \qquad x_2 = t$$
$$x_3 = 3 \qquad x_4 = -2$$

c. Sistem persamaan yang berpadanan adalah :

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &+ 4x_4 = 4 \\ x_2 \qquad\quad &+ 2x_4 = 6 \\ x_3 \; &+ 2x_4 = 2 \end{aligned}$$

Disini peubah utamnya adalah x_1, x_2 dan x_3 dan peubah bebasnya adalah x_4. Penyelesaian soal diatas untuk peubah utama dalam bentuk peubah bebas adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 4x_4 \\ x_2 &= 6 - 2x_4 \\ x_3 &= 2 - 2x_4 \end{aligned}$$

Karena x_4 dapat diberi sebarang bilangan misal t maka ada banyak tak hingga penyelesaian. Dan penyelesaian umum untuk nilai x_1, x_2 , x_3 dan x_4 adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 4t \\ x_2 &= 6 - 2t \\ x_3 &= 2 - 2t \\ x_4 &= t \end{aligned}$$

d. Persamaan terakhir pada sistem persamaan yang berpadanan adalah

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 = 1$$

Karena persamaan ini tidak bisa dipenuhi, maka tidak ada penyelesaian bagi sistem persamaan tersebut.

Contoh 1.4.3 :

Selesaikan sistem persamaan linier dibawah ini dengan menggunakan metode eliminasi Gauss!

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 3z &= 14 \\ x + 4y + 9z &= 36 \end{aligned}$$

Jawab :

Langkah 1 : Bentuk menjadi matriks diperbanyak

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

Langkah 2 : Pilih baris pertama kolom pertama sebagai utama satu (pivot), apabila sudah bernilai 1 lakukan operasi baris, yaitu baris kedua dikurangi baris pertama,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 9 & 36 \end{bmatrix}$$

Langkah 3 : Baris ketiga dikurangi baris pertama. Hal ini dilakukan mengingat nilai pada baris kedua dan ketiga adalah 1, sehingga langsung dikurangkan dengan baris pertama karena menghasilkan nilai nol.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{bmatrix}$$

Langkah 4 : Kembali ke atas di baris pertama kolom kedua, dengan pivot atau utama satu adalah satu di baris kedua kolom kedua. Kurangkan baris satu dengan baris kedua, sehingga nilainya nol

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 3 & 8 & 30 \end{bmatrix}$$

Langkah 5 : Operasikan baris ketiga dengan pivot pada baris kedua, dengan baris 3 dikurangkan 3 kali baris ke 2, sehingga menghasilkan nilai nol yang lain.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

Langkah 6 : Pivot berpindah secara diagonal pada baris ketiga, karena pivot dianjurkan untuk utama 1, dan nilai pada baris ketiga belum bernilai 1, maka baris-3 dapat dibagi dengan nilai 2terlebih dahulu untuk mendapatkan utama satu.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Langkah 7 : Kembalikan ke sistem linier menjadi

$$x - z = -2$$
$$y + 2z = 8$$
$$z = 3$$

Langkah 9 : Lakukan *back substitution* (substitusi mundur), yaitu

$$z = 3$$
$$y + 2(3) = 8 \rightarrow y = 8 - 6 = 2$$
$$x - (3) = -2 \rightarrow x = -2 + (3) = 1$$

Jadi himpunan penyelesaiannya adalah $x = 1, y = 2$, dan $z = 3$. □

Contoh 1.4.4 :

Diberikan matriks diperbanyak sebagai berikut. Selesaikan persamaan linier berikut kedalam bentuk matriks, dan jadikan dalam bentuk matriks baris eselon tereduksi!

$$-2x_3 + 7x_5 = 12$$
$$2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 6x_4 + 12x_5 = 28$$
$$2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 5x_5 = -1$$

Jawab :

Bentuk matriks diatas adalah :

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 1 : Tempatkan kolom paling kiri yang tidak seluruhnya teridiri dari nol.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Kolom tak nol paling kiri

Langkah 2 : Pertukarkan baris teratas dengan baris lainnya yang berisi nilai tak nol lainnya, bisa dengan baris ke-2 atau baris ke-3. Misal ditukar dengan baris ke-2.

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 3 : Jika anggota yang sekarang berada di posisi paling atas, jadikan sebagai utama satu, apabila masih belum terbentuk utama satu maka kalikan dengan konstanta tertentu misalnya $1/a$ untuk mendapatkan utama satu (pivot)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{bmatrix}$$

Langkah 4 : Tambahkan hasil kali yang sesuai dari baris atas (dibawah pivot) ke baris-baris bawahnya, sedemikian hingga semua anggota dibawah utama 1 menjadi nol. Dalam hal ini baris ke-3 dikurangi dengan 2 kali baris ke-1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Langkah 5 : Sekarang tutup baris teratas matriks tersebut dan mulai lagi dengan langkah 1 yang diterapkan pada sub matrik yang tersisa. Lanjutkan langkah ini sampai dengan semua matriks berada dalam bentuk baris eselon. Pilih titik pivot kembali, disini pindah ke diagonal baris ke-2 kolom ke-3 dikali semua baris kedua dengan$\left(-\frac{1}{2}\right)$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\dfrac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{bmatrix}$$

Langkah 6 : Kemudian baris 2 kali baris ke-3 ditambah dengan 5 kali baris ke-2. Pemilihan baris ke-3 dikarenakan baris ke-3 merupakan **kolom tak nol paling kiri dalam subs-matriks**.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Langkah 7 : Pada langkah 6, **kolom tak nol paling kiri dalam sub matriks yang baru** adalah $\left(\frac{1}{2}\right)$, sehingga baris ke-3 dikalikan dengan 2 untuk mendapatkan utama 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Keseluruhan matriks berada dalam bentuk matriks eselon.untuk menemukan bentuk **baris eselon tereduksi** diperlukan langkah tambahan sebagai berikut :

Langkah 8 : Mulai dengan baris tak nol terakhir dan kerjakan ke atas, tambahkan perkalian yang sesuai dari masing-masingbaris ke baris diatasnya untuk mendapatkan nol diatas utama 1.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B1 + 5B2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B2 + \frac{7}{2}B3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -\frac{23}{2} & -16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B1 + \frac{23}{2}B3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow baris\ eselon\ tereduksi$$

Jadi matriks terakhir adalah matriks yang berbentuk baris eselon tereduksi. Matriks bentuk baris eselon tereduksi seperti jawaban akhir diatas disebut **eliminasi Gauss-Jordan**.

Apabila contoh diatas merupakan baris eselon-tereduksi maka penyelesaian dari sistem persamaan diatas adalah

Langkah 9 : Kembalikan ke persamaan awal menjadi

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad + 3x_4 \qquad &= 7 \\ x_3 \qquad\qquad &= 1 \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan untuk peubah utama, kita peroleh

$$x_1 = 7 - 2x_2 - 3x_4$$

Jika kita memberi sebarang nilai r, s untuk peubah bebas pada persamaan diatas untuk x_2 dan x_4. Penyelesaian umumnya diberikan oleh rumus

$$\begin{aligned} x_1 &= 7 - 2r - 3s \\ x_2 &= r \\ x_3 &= 1 \\ x_4 &= s \\ x_5 &= 2 \end{aligned}$$

Jika kita hanya menggunakan langkah sampai dengan langkah ke-7, prosedur tersebut menghasilkan bentuk baris eselon dan disebut **elinimasi Gaussian**.

Contoh 1.4.5 :

Selesaikan sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan eliminasi **Gauss-Jordan** !

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \qquad + 2x_5 \qquad\qquad &= 0 \\ 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 2x_4 + 4x_5 - 3x_6 \quad &= -1 \\ 5x_3 + 10x_4 \qquad + 15x_6 \quad &= 5 \\ 2x_1 + 6x_2 \qquad\quad + 8x_4 + 4x_5 + 18x_6 \quad &= 6 \end{aligned}$$

Matriks yang diperbanyak untuk sistem tersebut adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

Jawab :

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B2 - 2B1}$$

$$\underset{\sim}{B2 - 2B1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B4 - 2B1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B4 - 2B1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B2 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} B3 - 5B2 \\ \sim \\ B4 - 4B2 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 8 & 0 & 18 & 6 \end{bmatrix}$$

$$B3 \to B4 \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Bentuk akhir diatas merupakan bentuk baris eselon yaitu eliminasi Gaussian, sedangkan untuk eliminasi Gauss-Jordan perlu dilakukan langkah lebih lanjut agar pada baris atau kolom yang terdapat utama 1 bernilai nol. Dengan demikian, matriks berikut disederhanakan lagi menjadi

$$\underset{\sim}{B2 - 3B3}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan yang berpadanan adalah

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 \quad + 4x_4 + 2x_5 \quad &= 0 \\ x_3 + 2x_4 \quad &= 0 \\ x_6 &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Dengan menyelesaikan peubah utama, kita peroleh

$$x_1 = -3x_2 - 4x_4 - 2x_5$$
$$x_3 = -2x_4$$
$$x_6 = \frac{1}{3}$$

Jika kita memberi sebarang nilai misalkan $r, s,$ dan t masing-masing kepada peubah bebas x_2, x_4 dan x_5, penyelesaian umumnya diberikan oleh rumus

$$x_1 = -3r - 4s - 2t$$
$$x_2 = r \quad x_3 = -2s$$
$$x_4 = s \quad x_5 = t \quad x_6 = \frac{1}{3}$$

Diatas merupakan penyelesaian dari **metode Gauss-Jordan**.

<u>FEEDBACK UNTUK MAHASISWA :</u>

Apa yang sebaiknya dilakukan mahasiswa?
Mahasiswa Informatika dapat mencoba menyelesaikan Sistem persamaan linier menggunakan bentuk matriks OBE dan Eliminasi Gaussian di program MATLAB sebagai latihan.

Contoh 1.4.6 :

<u>Soal Kontekstual :</u>

Rifiki membeli 3 unit komputer dan 2 unit CPU pada Toko “Abadi Komputer” dengan harga Rp 35.000.000,-. Dengan Toko yang sama yaitu Toko “Abadi Komputer”, Delon juga membeli 2 unit komputer dan 3 unit CPU dengan harga Rp 40.000.000,-. Berapa harga 1 unit komputer dan 1 unit CPU?

Penyelesaian :

Untuk menjawab permasalahan dalam kehidupan sehari-hari seperti contoh 1.4.6 diatas, ada banyak cara yang bisa Anda buat, diantaranya adalah menyusun bentuk permasalahan kedalam model matematika, yaitu dengan membuat diantaranya adalah :

1. Permisalan variabel yang tidak diketahui
   Misalkan harga 1 unit komputer adalah x rupiah, dan harga 1 unit CPU adalah y rupiah
   Komputer = x
   CPU = y
2. Bentuk kedalam Model Matematika
   $3x + 2y = 35.000.000$ (Persamaan 1)
   $2x + 3y = 40.000.000$ (Persamaan 2)
   Model diatas ini merupakan susunan persamaan linier dengan dua persamaan yaitu persamaan 1 dan persamaan 2, dan dua variabel yaitu variabel x dan variabel y.

3. Jawab persamaan linier dengan metode yang telah Anda semua ketahui sebelumnya, misalnya dibentuk menjadi suatu matriks, sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & |35 \\ 2 & 3 & |40 \end{bmatrix}$$

4. Lakukan perhitungan dengan menggunakan Operasi Baris Elementer/ Eliminasi Gauss/Gauss-Jordan :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & |35 \\ 2 & 3 & |40 \end{bmatrix} \underbrace{B2 - \frac{2}{3}}B1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & |35 \\ 0 & \frac{5}{3} & \left|\frac{50}{3}\right. \end{bmatrix} \underbrace{B2 - \frac{2}{3}}B1$$

Apabila Anda ingin menggunakan **Eliminasi Gauss**, maka langkah diatas sudah cukup, dan bisa digunakan untuk perhitungan *back substitution* atau substitusi balik sebagai berikut :

$$\frac{5}{3}y = \frac{50}{3} \rightarrow y = \frac{150}{15} = 10$$

Kemudian Anda dapat mesubtitusikan nilai y kedalam persamaan yang pertama, sehingga menghasilkan nilai :

$$3x + 2(10) = 35$$
$$3x = 15 \rightarrow x = 5$$

5. Kesimpulan, setelah Anda menghitung persamaan model matematika, tarik kesimpulan sesuai dengan permisalan di awal. Dari perhitungan nomer 4 diatas, kita tahu bahwa x adalah komputer dan y adalah CPU, maka dapat Anda simpulkan bahwa harga dari 1 unit komputer adalah Rp 5.000.000,- sedangkan harga dari 1 unit CPU adalah Rp 10.000.000,-

❖ **FEEDBACK UNTUK MAHASISWA :**

Apa yang sebaiknya dilakukan mahasiswa?

Mahasiswa Informatika dapat mencoba menyelesaikan Sistem persamaan linier pada contoh soal kontekstual diatas dengan metode Eliminasi Gauss-Jordan

----

SIMPULAN

----

1. Pada Bab 1 ini yaitu Sistem Persamaan Linier, kita mempunyai sebuah SPL maka persis hanya satu dari tiga kemungkinan berikut dipenuhi:
   a) SPL Mempunyai solusi tunggal
   b) SPL Mempunyai solusi tak hingga
   c) SPL Tidak memiliki solusi

   Sistem ini dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan matriks

   $$Ax = b$$

   Dalam hal ini, A disebut matriks koefisien, x adalah matriks variabel, dan b adalah matriks konstan (konstanta).

   $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

   Beberapa langkah untuk menyelesaikan Sistem Persamaan Linier adalah :

   (a) Metode eliminasi Gauss-Gauss Yordan
   (b) Operasi Baris Elementer (OBE)
   (c) Metode Crammer dengan menerapkan determinan matriks.
2. Operasi baris elementer adalah operasi yang dikenakan pada beberapa baris matriks yang meliputi langkah-langkah sebagai berikut :

1. Mengalikan sebuah baris dengan konstanta tak nol
2. Menukar dua baris
3. Mengalikan suatu baris dengan suatu konstanta kemudian menambahkan ke baris yang lain.

Pada suatu matriks suatu SPL dapat dilakukan operasi-operasi antara lain :

- Kalikan suatu baris dengan suatu konstanta tak nol
- Pertukarkan dua baris
- Tambahkan perkalian dari suatu baris ke baris lainnya untuk mendapatkan matriks baru.

3. Untuk menjadi bentuk **Eliminasi Gauss**, sebuah matriks harus mempunyai sifat-sifat berikut ini :
    1. Jika semua baris tidak seluruhnya terdiri dari nol, maka angka tak nol pertama dalam baris tersebut adalah sebuah angka 1 (kita sebut utama satu atau **pivot**)
    2. Jika ada sebarang baris yang seluruhnya terdiri dari nol, maka baris-baris ini dikelompokkan bersama dibagian bawah matriks. Jika sebarang dua baris yang berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol.
    3. Jika sebarang dua baris yang berurutan yang tidak seluruhnya terdiri dari nol, utama 1 dalam baris yang lebih bawah terletak disebelah kanan utama 1 dalam baris yang lebih atas.
    4. Masing-masing kolom yang berisi sebuah utama 1 mempunyai nol di tempat lainnya.

Reference :

Anton, Howard. 2000. *Elementary Linear Algebra.* Edisi 7 Jilid 1. Interaksa Publishing, Company.

Dosen-Dosen Jurusan Matematika. 1992. Matematika Dasar 1. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya : ITS Press.

Assesment Penilaian Mahasiswa

No	CPMK	BAB	Bobot	Skor				Nilai
				1	2	3	4	
1	Mahasiswa mampu mengidentifikasi suatu sistem persamaan linear yang disajikan dalam bentuk matriks	Sistem Persamaan Linier						
2	Mahasiswa mampu mengubah bentuk sistem persamaan linear menjadi suatu matriks	Sistem Persamaan Linier						
3	Mahasiswa mampu menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan operasi baris dan Eliminasi Gaussian	Sistem Persamaan Linier						

1.5 LATIHAN SOAL

1. Cari himpunan penyelesaian dari masing-masing persamaan linier berikut ini :
   a. $3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 7$
   b. $3v - 8w + 2x - y + 4z = 0$
   c. $7x - 5y = 3$
2. Carilah matriks yang diperbanyak untuk setiap sistem persamaan linier berikut :

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \quad\;\; - x_4 + x_5 &= 1 \\ 3x_2 + x_3 \quad\;\; - x_5 &= 2 \\ x_3 + 7x_4 &= 1 \end{aligned}$$

3. Selesaikan sistem persamaan linier berikut dengan menggunakan Eliminasi Gauss/ Gauss-Jordan!

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$$
$$4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 3$$
$$5x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$$

4. Cari suatu sistem persamaan yang berpadanan dengan matriks yang diperbanyak di bawah ini!

a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

b. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 & 5 \\ 7 & 1 & 4 & -3 \\ 0 & -2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

c. $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Selesaikan masing-masing sistem berikut ini dengan menggunakan eliminasi Gaussian!

a. $-2b + 3c = 1$
$3a + 6b - 3c = -2$
$6a + 6b + 3c = 5$

b. $x - y + 2z - w = -1$
$2x + y - 2z - 2w = -2$
$-x + 2y - 4z + w = 1$
$3x + \quad\quad -3w = -3$

Bab 2

<u>MATRIKS</u>

Tujuan :

Tujuan Bab 2 Matriks adalah sebagai dasar perhitungan Sistem Persamaan Linier dengan peubah banyak yang berkaitan dengan persoalan pada mata kuliah Teknik Optimasi di Semester 5 Program Studi Informatika UMSIDA.

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah :

1. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep eliminasi persamaan, matriks, operasi matriks, transpose dan invers matriks kaitannya dengan perkuliahan Aljabar Linear di Informatika

2. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan operasi matriks, invers, dan transpose matriks kaitannya dengan perbandingan hasil pada pemrograman

3. Mahasiswa mampu menyelesaikan Sistem Persamaan Linear dengan operasi baris dan Eliminasi Gaussian kaitannya dengan perbandingan hasil pada pemrograman

Untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear dapat dilakukan dengan menyederhanakan permasalahan tersebut dengan memanfaatkan konsep matriks. Apabila persamaannya cukup besar, akan lebih mudah jika menyatakan koefisien-koefisien sistem persamaan dengan indeks. Sama halnya seprti pada bab sebelumnya, dengan sistem m persamaan linier dengan n bilangan tak diketahui $x_1, x_2, \dots, x_n$ dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

Jika semua bilangan di ruas kanan nol, maka sistem persamaan tersebut dinamakan sistem **homogen**.

a. Matriks dan Operasi Matriks

Matriks merupakan suatu jajaran bilangan (angka) berbentuk segi empat yang diapit dengan tanda kurung.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks dengan m baris dan n kolom, atau matriks $m \times n$. Tiap baris dalam jajaran bilangan disebut sebagai **vektor baris**, dan tiap kolom dinamakan **vektor kolom**. Bilangan $a_{11}, a_{12}, \dots$ disebut **unsur-unsur matriks**. Sedangkan vektor-vektor x dan y, yaitu :

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad\qquad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Berturut-turut adalah vektor yang dicari dan vektor konstan yang diberikan. Apabila terdapat untuk tak nol dalam y maka dikatakan **tak-homogen**. Unsur-unsur dalam x yang memenuhi persamaan disebut **penyelesaian**. Untuk menyingkat penulisan kadang suatu matriks dengan m baris dan n kolom ditulis dengan

$$\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right) \quad i = 1,2,\dots,m \qquad j = 1,2,\dots,n$$

- **PENJUMLAHAN DAN PENGURANGAN MATRIKS**

Apabila dua buah matriks mempunyai kesamaan jumlah baris dan jumlah kolomnya (orde matriks sama). Misal dua buah matriks $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)$ dan $\boldsymbol{B} = \left(b_{ij}\right)$ dikatakan **sama** apabila **A** dan **B** Mempunyai baris dan kolom yang sama banyaknya, serta unsur-unsur yang seletak semuanya sama, yaitu

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Untuk semua i dan j yang mungkin. Dan dapat ditulis dengan $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$**.** Kesamaan matriks ini hanya didefinisikan untuk dua matriks yang berukuran sama. Selanjutnya untuk penjumlahan dan pengurangan matriks, perkalian dengan skalar, dan perkalian dua buah matriks akan dibahas dalam sub bab ini.

Jumlahan dan Pengurangan Matriks

Jumlahan dan Pengurangan dua matriks $m \times n$, yaitu $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ dan $\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{b_{ij}}\right)$, ditulis

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$$

Adalah matriks $m \times n$yang diperoleh dengan menjumlahkan atau mengurangkan unsur-unsur yang seletak dari A dan B; jadi unsur matriks $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ adalah

$$\boldsymbol{a_{ij} + b_{ij}} \begin{cases} \boldsymbol{i = 1, \dots, m} \\ \boldsymbol{j = 1, \dots, n} \end{cases}$$

Sama halnya pula dengan pengurangan, maka unsur-unsur yang seletak dari A dan B; jadi unsur matriks $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ adalah

$$\boldsymbol{a_{ij} - b_{ij}} \begin{cases} \boldsymbol{i = 1, \dots, m} \\ \boldsymbol{j = 1, \dots, n} \end{cases}$$

Matrik nol $\boldsymbol{m \times n}$ didefiniskan sebagai matriks berukuran $m \times n$ yang semua unsurnya nol, dinotasikan dengan **0**. Berdasarkan definisi ini jumlahan matriks mempunyai sifat-sifat mirip dengan jumlahan bilangan real, yaitu

(a) $\boldsymbol{A + B = B + A}$
(b) $\boldsymbol{(U + V) + W = U + (V + W)}$
(c) $\boldsymbol{A + 0 = A}$
(d) $\boldsymbol{A + (-A) = 0}$

Dalam hal ini $-\boldsymbol{A} = (-\boldsymbol{a_{ij}})$ adalah matriks $m \times n$ yang diperoleh dengan mengalikan unsur-unsur matirks $\boldsymbol{A}$ dengan (-1) dan disebut dengan **negatif** dari $\boldsymbol{A}$. Selanjutnya penulisan $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$ disingkat dengan $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ dan disebut **selisih** dari $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$. Unsur-unsur dalam $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$ diperoleh dengan mengurangkan unsur-unsur yang seletak dalam $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$**.** Berdasarkan definisi ini pengurangan matriks mempunyai sifat-sifat mirip dengan jumlahan bilangan real, yaitu

(a) $\boldsymbol{A - B \neq B - A = -B + A}$
(b) $\boldsymbol{(U - V) - W = U - (V - W)}$
(c) $\boldsymbol{A - 0 = A}$
(d) $\boldsymbol{A - (-A) = 2A}$

Perlu diperhatikan bahwa penjumlahan dan pengurangan matriks hanya dapat dilakukan apabila kedua matriks mempunyai ukuran yang sama.

Contoh 2.1.1 :

Jika diberikan

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Jika

$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$

Maka $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$ berlaku sifat komutatif pada matriks penjumlahan, sedangkan jika

$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & -4 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

Maka $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} - \boldsymbol{A}$ tidak berlaku sifat komutatif pada pengurangan. Pada sifat $\boldsymbol{A} - (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{2A}$**,** terdapat perkalian dengan skalar, pada contoh 2.1.1 kita kerjakan dengan sifat tersebut menjadi

$$\boldsymbol{A} - (-\boldsymbol{A}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \left(- \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Ekivalen dengan $\boldsymbol{2A} = \boldsymbol{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ ■

- **PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR**

Hasil kali $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ matriks $m \times n$ dengan skalar c ditulis $c\boldsymbol{A}$ atau $\boldsymbol{A}c$ merupakan matriks $m \times n$ yang diperoleh dengan mengalikan tiap unsur dalam $\boldsymbol{A}$ dengan c.

$$c\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}c = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

Dari keterangan diatas, dapat diperiksa bahwa untuk sebarang matriks $m \times n$, dengan m dan n tetap, dan sebarang bilangan, berlaku sifat-sifat berikut :

(a) $c(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = c\boldsymbol{A} + c\boldsymbol{B}$
(b) $(c + k)\boldsymbol{A} = c\boldsymbol{A} + k\boldsymbol{A}$
(c) $c(k\boldsymbol{A}) = (ck)\boldsymbol{A}$
(d) $I\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ **,** dengan I adalah matriks identitas

Contoh 2.1.2 :

Diberikan matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1.23 & 0.33 \\ 0.83 & 3.25 \end{bmatrix}$$

Maka didapat

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} = \boldsymbol{2A} = \begin{bmatrix} 2.46 & 0.66 \\ 1.66 & 6.50 \end{bmatrix}$$

$$10\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 12.3 & 3.3 \\ 8.3 & 32.5 \end{bmatrix}$$

$$I\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.23 & 0.33 \\ 0.83 & 3.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.23 & 0.33 \\ 0.83 & 3.25 \end{bmatrix}$$

Identitas matriks ukuran 2x2 adalah $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, identitas matriks ukuran 3x3 dapat ditulis dengan $I_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Identitas matriks ukuran $n \times n$ adalah $I_{n \times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Membentuk diagonal angka 1 sesuai jumlah baris dan kolom. Perlu diketahui bahwa matriks identitas hanya dimiliki matriks dengan ukuran (ordo) yang sama, dimana jumlah baris dan kolomnya sama.

- **PERKALIAN MATRIKS**

Sama halnya dengan bilangan pada sistem persamaan linier, matriks juga menerapkan definisi perkalian matriks dari matematikawan Inggris Arthur Cayley (1821-1895).

Definisi. Perkalian Matriks dengan Matriks

Misal $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ dengan $m \times n$ dan $\boldsymbol{B} = (b_{jk})$ matriks $r \times p$. Hasil kali $\boldsymbol{AB}$ didefinisikan hanya untuk $r = n$, dan $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $\boldsymbol{C} = (c_{jk})$ matriks $m \times p$ dengan unsur c_{jk} adalah (Anton, 2015)

$$c_{jk} = \sum_{m=1}^{n} a_{jm} b_{mk} = a_{j1} b_{1k} + a_{j2} b_{2k} + \cdots + a_{jn} b_{nk}$$

Perkalian matriks dapat dipandang sebagai perkalian baris-baris dengan kolom-kolom. Dengan definisi diatas dapat ditulis dalam notasi matriks sebagai berikut

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

Dengan $\boldsymbol{A}$ adalah matriks koefisien, $\boldsymbol{x}$ vektor bilangan yang tak diketahui, dan $\boldsymbol{b}$ adalh vektor konstanta, dalam hal ini

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Contoh 2.1.6 : Perkalian Matriks

Misal diberikan $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+4 \\ 9+8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 17 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow$ tidak dapat dilakukan proses perkalian karena jumlah kolom matriks pertama tidak sama dengan jumlah baris matriks kedua .

$\boldsymbol{AC} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & 1+8 \\ 9+4 & 4+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{CA} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+3 & 6+4 \\ 1+12 & 2+16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 13 & 18 \end{bmatrix}$

Perkalian matriks tidak bersifat komutatif diketahui bahwa hasil dari $\boldsymbol{AC} \neq \boldsymbol{CA}$. ■

Jika $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ tidak harus $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ atau $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ atau $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{0}$, misalkan

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Dari contoh diatas, dapat dilihat bahwa perkalian matriks mempunyai sifat yang tidak dijumpai dalam perkalian bilangan. Berikut ini merupakan rangkuman sifat-sifat matriks

Sifat-Sifat Perkalian Matriks

a. **Bersifat Asosiatif dan Distributif terhadap Jumlahan Matriks**

$(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = k(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = (\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{ABC}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$

Dengan syarat matriks $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, dan $\boldsymbol{C}$ matriks-matriks yang memenuhi syarat perkalian pada ruas kiri, serta k sebarang bilangan.

b. **Perkalian Matriks Tidak Komutatif**

Yaitu jika $\boldsymbol{A}$ dan $\boldsymbol{B}$ matriks-matriks sehingga $\boldsymbol{AB}$ dan $\boldsymbol{BA}$ terdefinisi, maka pada umumnya

$\boldsymbol{AB} \neq \boldsymbol{BA}$

c. **Hukum Korelasi Tidak Berlaku**

Yaitu $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ tidak harus berakibat $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ atau $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$

a. **Invers Matriks**

Pada bab ini akan dibahas mengenai invers suatu matriks yang berkaitan dengan matriks dapat dibalik.

Definisi. Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks bujur sangkar dan jika suatu matriks $\boldsymbol{B}$ yang berukuran sama bisa didapatkan sehingga $\boldsymbol{AB} =$

$\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I},$ maka $\boldsymbol{A}$ disebut bisa dibalik dan $\boldsymbol{B}$ disebut invers matriks $\boldsymbol{A}.$

Contoh 2.2.1 :

Diberikan dua buah matriks

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ dengan

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dan

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.2 :

Matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ → matriks ini tidak dapat dibalik.

Mengapa tidak bisa dibalik?

Anggap $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$ adalah matriks 3×3 sebarang. Kolom ketiga dari $\boldsymbol{BA}$ adalah

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jadi

$$\boldsymbol{BA} \neq \boldsymbol{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sifat-Sifat Invers

Apakah setiap matriks yang dapat dibalik mempunyai lebih dari satu invers? Jawabannya adalah setiap matriks yang dapat dibalik mempunyai tepat satu invers.

1. Jika B dan C keduanya adalah invers matriks A, maka $B = C$. Jika A bisa dibalik, maka inversnya akan dinyatakan dengan A^{-1}. Jadi

$$AA^{-1} = I \text{ dan } A^{-1}A = I$$

Bukti :

Karena B adalah invers dari A, maka $BA = I$. Mengalikan kedua ruas pada sisi kanan dengan C memberikan $(BA)C = IC = C$. Tetapi $(BA)C = BI = B$, dengan demikian $C = B$.

2. Jika A dan B adalah matriks-matriks yanga dapat dibalik dan berukuran sama, maka :
   a. AB dapat dibalik
   b. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

Bukti :

Jika kita tunjukkan bahwa $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = I$, maka kita juga dapat menunjukkan bahwa AB dapat dibalik dan bahwa $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Tetapi $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$, demikian juga menunjukkan bahwa $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$ ■

Teorema :

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.3 :

Tinjau matriks-matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

Dengan menerapkan teorema diatas, diperoleh

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \frac{1}{3 - 2}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B^{-1}} = \frac{1}{6 - 4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{AB})^{-1} = \frac{1}{56 - 54}\begin{bmatrix} 8 & -6 \\ -9 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Juga,

$$\boldsymbol{B^{-1}A^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -\frac{9}{2} & \frac{7}{2} \end{bmatrix}$$

Oleh karena $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B^{-1}A^{-1}}$ sebagaimana dijelaskan oleh teorema sebelumnya.

Untuk matriks bujur sangkar A dengan order lebih besar 2 maka invers matriks A dapat diperoleh dengan cara melakukan serangkaian OBE pada matriks A dan juga pada matriks I, sampai dengan matriks A menjadi matriks I, akibatnya matriks I akan menjadi A^{-1}. Secara singkatnya dapat dirumuskan sebagai berikut

$$(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{I}) \quad OBE \quad (\boldsymbol{I}:\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}})$$

Pada sub-bab selanjutnya akan dibahas mengenai metode mencari invers lebih lanjut selain rumus pada Torema yang telah diberikan.

Definisi : Pangkat Suatu Matriks

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka kita definisikan pangkat ulat tak-negatif dari A sebagai

$$\boldsymbol{A}^0 = I \qquad \boldsymbol{A}^{\boldsymbol{n}} = \underbrace{AAA \dots A}_{n\, faktor} \qquad (n > 0)$$

Lebih jauh lagi, jika A bisa dibalik, maka kita definiskan pangkat bulat negatif sebagai

$$\boldsymbol{A}^{-\boldsymbol{n}} = (A^{-1})^n = \underbrace{A^{-1}A^{-1} \dots A^{-1}}_{n\, faktor}$$

Definisi ini paralel dengan definisi untuk bilangan real.

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah matriks bujur sangkar, $\boldsymbol{r}$ dan $\boldsymbol{s}$ adalah bilangan bulat, maka

$$\boldsymbol{A}^r \boldsymbol{A}^s = \boldsymbol{A}^{r+s} \rightarrow (\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{r}})^s = \boldsymbol{A}^{rs}$$

Teorema.

Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka

a) $\boldsymbol{A}^{-\mathbf{1}}$ dapat dibalik dan $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1} = \boldsymbol{A}$
b) $\boldsymbol{A}''$ dapat dibalik dan $(\boldsymbol{A}'')^{-1} = (\boldsymbol{A}'')^n$ untuk $n = 1,2,3, ..$

c) Untuk sebarang skalar tak nol k, matriks kA dapat dibalik dan $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$

Contoh 2.2.4 :

Anggap A dan A^{-1} adalah seperti dalam contoh 2.2.3 yaitu

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Maka

$$A^3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 30 \\ 15 & 41 \end{bmatrix}$$

$$A^{-3} = (A^{-1})^3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 41 & -30 \\ -15 & 11 \end{bmatrix}$$

Contoh 2.2.5 : Matriks-Matriks yang Melibatkan Polinom

Diketahui bahwa $p(x) = 2x^2 - 3x + 4$ dan $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$$p(A) = 2A^2 - 3A + 4I$$

$$= 2\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 3\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -3 & 6 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 13 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

2.3. Matriks Dasar dan Metode Mencari Invers

Definisi. Suatu matriks $n \times n$ disebut **matriks dasar** jika matriks ini bisa diperoleh dari dari matriks identitas $n \times n$, I_n dengan melakukan suatu operasi baris dasar tunggal.

Berikut ini merupakan contoh-contoh matriks dasar dan operasi-operasi yang menghasilkannya

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

→ Dihasilkan dari mengalikan I_2 dengan -2

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

→ Dihasilkan dari 3 kali baris ketiga dari I_3 pada baris pertama

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

→ Dihasilkan dari kalikan baris pertama dari I_3 dengan 1.

d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

→ Dihasilkan dari pertukarkan baris kedua dan keempat dari I_4

Pada Tabel 2.3.1 Berikut ini diberikan operasi yang berpadanan untuk mencari invers matriks sebagai berikut :

Operasi Baris Pada $\boldsymbol{I}$ yang Menghasilkan Matriks Dasar $(\boldsymbol{E})$	**Operasi Baris Pada Matriks Dasar $(\boldsymbol{E})$ yang menghasilkan $\boldsymbol{I}$ lagi**
Kalikan baris i dengan $c \neq 0$	Kalikan baris i dengan $1/c$
Pertukarkan baris i dan j	Pertukarkan baris i dan j
Tambahkan c kali baris i ke baris j	Tambahkan $-c$ kali baris i ke baris j

Operasi pada ruas kanan tabel diatas disebut sebagai **operasi invers** dari operasi-operasi yang berpadanan di sebelah kiri. Konsep ini berpadanan dengan Operasi Baris Elementer yang telah kita pelajari pada bab sebelumnya.

Pada masing-masing berikut ini suatu operasi baris dasar diterapkan pada matriks identitas 2 x 2 untuk memperoleh suatu matriks dasar E, selanjutnya E dikembalikan lagi menjadi matriks dengan melakukan invers.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow}_{kalikan\ baris\ kedua\ dengan\ 7} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \rightarrow}_{kalikan\ baris\ kedua\ dengan \frac{1}{7}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow}_{\substack{Pertukarkan\ baris \\ pertama\ dan\ kedua}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow}_{\substack{Pertukarkan\ baris \\ pertama\ dan\ kedua}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow}_{\substack{Tambahkan\ 7\ kali\ baris \\ kedua \\ ke\ baris\ pertama}} \quad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow}_{\substack{Tambahkan -7\ kali\ baris\ kedua \\ ke\ baris\ pertama}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Teorema.

Setiap matriks yang dapat dibalik, dan inversnya juga merupakan suatu matriks dasar.

Jika A adalah suatu matriks $n \times n$, paka pernyataan-pernyataan berikut ini ekivalen, yaitu semua benar atau semua salah

(a) A bisa dibalik
(b) $ax = 0$ hanya mempunyai penyelesaian trivial.
(c) Bentuk baris eselon tereduksi dari A adalah I_n.
(d) A dapat dinyatakan sebagai hasil kali matriks-matriks dasar.

Sebagai rangkuman dapat dinyatakan sebagai berikut :

Selain menggunakan Definisi dalam Teorema Invers, dapat pula mencari invers dengan Opreasi Baris Elementer yang telah dibahas pada bab sebelumnya yaitu

$$(\boldsymbol{A}:\boldsymbol{I}) \quad OBE \quad (\boldsymbol{I}:\boldsymbol{A}^{-1})$$

Contoh 2.3.1 :

Carilah invers dari

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Gabungkan matriks A dengan matriks I, kemudian lakukan sesuai Teorema yang berlaku dan OBE sedemikian hingga matriks A menjadi I

$$[A \mid I]$$

dan matriks I menjadi A^{-1} .

$$[I \mid A^{-1}]$$

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B2-2B1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & : & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B3+2B2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & -5 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B3 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} B2 + 3B3 \\ \sim \\ B1 - 3B3 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & -14 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B1 - 2B2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & : & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 5 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -40 & 16 & 9 \\ 13 & -5 & -3 \\ 5 & -2 & -1 \end{bmatrix} \qquad \blacksquare$$

Contoh 2.3.2 :

Diberikan matriks sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

Dapatkan invers dari matriks A jika ada!

Jawab :

Dengan cara yang sama seperti contoh 2.3.1, Anda dapat menggunakan operasi baris, dihasilkan matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & : & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} B2 - 2B1 \\ \sim \\ B3 + B1 \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -9 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & 9 & : & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B3-B2}\begin{bmatrix}1 & 6 & 4 & : & 1 & 0 & 0\\ 0 & -8 & -9 & : & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & : & -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Karena matriks sebelah kiri pada baris yang terakhir bernilai nol (matriks nol) oleh karenanya matriks tidak dapat membentuk matriks identitas, oleh karena itu matriks tidak dapat dibalik, sehingga matriks tidak mempunyai invers ■.

Contoh 2.3.3 :

Diberikan persamaan sebagai berikut :

$$x + 2y + 3z = 0$$

$$2x + 5y + 3z = 0$$

$$x + \qquad 8z = 0$$

Tentukan penyelesaian dari matriks diatas dengan menggunakan teorema invers!

Penyelesaian :

Langkah pertama : Anda tunjukkan dulu dalam bentuk matriks, dapatkah matriks dari persamaan diatas dapat dibalik atau tidak, sebagai berikut :

Jika Persamaan dibentuk dalam matriks :

$$A = \begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 5 & 3\\ 1 & 0 & 8\end{bmatrix} \rightarrow (\boldsymbol{A}: \boldsymbol{I}) \;\; OBE \;\; (\boldsymbol{I}: \boldsymbol{A}^{-1})$$

Persamaan dibentuk kedalam bentuk matriks yang dpat dibalik dengan teorema OBE :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{B2-2B1 \\ B3-B1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & : & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B3+2B2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & : & -4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B3 \times (-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & : & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\substack{B2+3B3 \\ B1-3B3}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & : & -11 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & : & 10 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B1-2B2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & : & -31 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & : & 10 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & : & 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Diketahui bahwa matriks dapat dibalik, yaitu sisi kiri matriks membentuk matriks identitas dan sisi kanan matriks membentuk invers matriks dengan A^{-1} yang dihasilkan sebagai berikut :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -31 & 16 & 9 \\ 10 & -5 & -3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari varibel yang ditanyakan, dengan invers matriks yang telah diketahui, Anda dapat menggunakan rumus berikut :

$$x = A^{-1}b$$

Dan karena sisi kanan matriks bernilai nol, maka persamaan tersebut hanya mempunyai penyelesaian yang trivial yaitu

$$x = 0\,, y = 0,\ \text{dan } z = 0 \qquad \blacksquare$$

a. Transpose Matriks

Matriks baru yang diperoleh dari suatu matriks $\boldsymbol{A} = \left(a_{ij}\right)$ berukuran $m \times n$ dengan menukar kolom-kolom $\boldsymbol{A}$ menjadi baris-baris matriks baru atau baris-baris menjadi kolom-kolom, disebut **transpose** dari matriks $\boldsymbol{A}$ dan ditulis dengan $\boldsymbol{A}'$ atau $\boldsymbol{A^T}$**.** Dalam hal ini

Dengan matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ menjadi

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dengan $\boldsymbol{A}'$ adalah matriks berukuran $n \times m$. Dari definisi diatas dapat diperiksa bahwa

$$\boldsymbol{A}' = (\boldsymbol{A}')'$$

Dan

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$$

Sebagai latihan berikut kita ambil suatu permisalan pada contoh 2.1.3 berikut ini.

Contoh 2.4.1 :

Jika $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ maka diketahui bahwa menurut teorema $\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Untuk $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ tidak dapat dilakukan karena jumlah baris dan kolom antara matriks $\boldsymbol{A}$ dan matriks $\boldsymbol{B}$ tidak sama ordonya. Begitu pula untuk matriks $\boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$ tidak berlaku juga untuk matriks penjumlahan. Sehingga untuk $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' \neq \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$ untuk matriks dengan ordo yang berbeda. Akan tetapi untuk matriks bujur sangkar atau matriks dengan ordo sama, penjumlahan matriks masih tetap bisa dilakukan. Sebagai bahan latihan, hitunglah $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})' \neq \boldsymbol{A}' + \boldsymbol{B}'$ untuk matriks bujur sangkar.

Suatu matriks yang mempunyai n baris dan m kolomdisebut matriks bujur sangkar berorder n. Unsur-unsur $a_{11}, a_{12}, \dots\ a_{nn}$ dari matriks bujur sangkar disebut unsur-unsur diagonal utama. Matriks bujur sangkar disebut simetri apabila matriks tersebut sama dengan transposnya. Dalam hal ini, matriks $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ berorder n adalah simetri apabila $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$**,** yaitu apabila

$$a_{rs} = a_{sr} \qquad\qquad r, s = 1,2, \dots, n$$

Jika

$$a_{rs} = -a_{sr} \qquad\qquad r, s = 1,2, \dots, n$$

Yaitu jika $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}'$**,** maka matriks real bujur sangkar itu disebut simetri miring. Dengan mengambil $r = s$ diperoleh $a_{rr} = -a_{rr}$ yang mungkin jika $a_{rr} = 0$. Dengan demikian, unsur-unsur pada diagonal utama dari suatu matriks simetri miring adalah nol. Berikut ini merupakan matriks bujur sangkar lainnya.

Contoh 2.4.2 :

Matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ adalah matriks simetri berorder 3, dan matriks $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ adalah matriks simetri miring berorder 3.

Contoh 2.4.3 :

Matriks matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ dan $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$,

Anda perhatikan bahwa kedua matriks ini merupakan **matriks segitiga bawah** dan **matriks segitiga atas.** Dikatakan **matriks segitiga bawah** apabila segitiga atas bernilai nol, dan dikatakan **matriks segitiga bawah** apabila segitiga bawah bernilai nol. Matriks ini berlaku untuk matriks bujur sangkar dengan ukuran baris dan kolomnya sama.

Teorema. Jika ukuran matriks-matriks dibawah ini adalah sedemikian sehingga operasi yang dinyatakan bisa dilakukan, maka

(a) $((\boldsymbol{A})^T)^T = \boldsymbol{A}$
(b) $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{B}^T$ dan $(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B})^T = \boldsymbol{A}^T - \boldsymbol{B}^T$
(c) $(k\boldsymbol{A})^T = k\boldsymbol{A}^T$ dengan k adalah sebarang skalar

(d) $(\boldsymbol{AB})^T = \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

Jika unsur-unsur diatas dan dibawah diagonal utama semuanya nol, maka matriks ini disebut **matriks diagonal**. Sedangkan matriks diagonal dengan unsur-unsur pada diagonal utamanya semua sama dinamakan **matriks skalar**. Dan jika semua unsur pada diagonal utama suatu matriks diagonal sama dengan 1, maka matriks demikian disebut **matriks satuan,** dan biasanya dinotasikan dengan **I**. Berikut ini merupakan matriks satuan berorder 5 :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

KETERBALIKAN SUATU TRANSPOSE

Teorema berikut menetapkan hubungan antara invers suatu matriks yang dapat dibalik dan invers dari transposenya.

Teorema. Jika $\boldsymbol{A}$ adalah suatu matriks yang dapat dibalik, maka A^T juga dapat dibalik dan

$$(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T$$

Bukti. Kita dapat menunjukkan bahwa

$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^{-1})^T = (\boldsymbol{A}^{-1})^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}$$

Dengan mengetahui bahwa $\boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}$

$$\boldsymbol{A}^T(\boldsymbol{A}^{-1})^T = (\boldsymbol{A}^{-1})^T\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}$$

$$(\boldsymbol{A}^{-1})^T\boldsymbol{A}^T = (\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1})^T = \boldsymbol{I}^T = \boldsymbol{I}$$

Menunjukkan bukti diatas. ■

Contoh 2.4.4 :

Tinjau matriks-matriks

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -5 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A}^T = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Dapatkan A^{-1} dan $(A^T)^{-1}$!

Jawab :

Soal ini dapat dikerjakan dengan menggunakan rumus invers untuk matriks ordo 2x2 dihasilkan :

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{A}^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

Matriks-matriks ini memenuhi Teorema diatas bahwa

$$(\boldsymbol{A}^T)^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^T. \blacksquare$$

Sedangkan untuk mengentahui apakah matriks simetris atau tidak pada soal berikut coba tebak yang manakah diantara matriks-matriks berikut yang simetris?

(a) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$

❖ <u>**FEEDBACK UNTUK MAHASISWA :**</u>

Apa yang sebaiknya dilakukan mahasiswa?

Mahasiswa Informatika dapat mencoba menyelesaikan operasi matriks pada contoh-contoh yang telah diberikan pada pemrograman di MATLAB sebagai perbandingan hasil.

SIMPULAN

----

1. DEFINISI MATRIKS

Matriks merupakan suatu jajaran bilangan (angka) berbentuk segi empat yang diapit dengan tanda kurung.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Disebut matriks dengan m baris dan n kolom, atau matriks $m \times n$. Tiap baris dalam jajaran bilangan disebut sebagai **vektor baris**, dan tiap kolom dinamakan **vektor kolom**. Bilangan $a_{11}, a_{12}, \dots$ disebut **unsur-unsur matriks.**

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}) \quad i = 1,2, \dots, m \qquad j = 1,2, \dots, n$$

a. JUMLAHAN DAN PENGURANGAN MATRIKS

Jumlahan dan Pengurangan dua matriks $m \times n$, yaitu $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ dan $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{b_{ij}})$, ditulis

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \text{ dan } \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$$

b. PERKALIAN MATRIKS DENGAN SKALAR

Hasil kali $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a_{ij}})$ matriks $m \times n$ dengan skalar c ditulis $c\boldsymbol{A}$ atau $\boldsymbol{A}c$ merupakan matriks $m \times n$ yang diperoleh dengan mengalikan tiap unsur dalam $\boldsymbol{A}$ dengan c.

$$c\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}c = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

c. PERKALIAN MATRIKS

Misal $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ dengan $m \times n$ dan $\boldsymbol{B} = (b_{jk})$ matriks $r \times p$. Hasil kali $\boldsymbol{AB}$ didefinisikan hanya untuk $r = n$, dan $\boldsymbol{AB}$ adalah matriks $\boldsymbol{C} = (c_{jk})$ matriks $m \times p$ dengan unsur c_{jk} adalah

2. INVERS MATRIKS

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$, dimana inversnya bisa dicari dengan rumus :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d}{ad - bc} & -\frac{b}{ad - bc} \\ -\frac{c}{ad - bc} & \frac{a}{ad - bc} \end{bmatrix}$$

3. TRANSPOSE MATRIKS

Dengan matriks $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$ menjadi

$$\boldsymbol{A'} = \boldsymbol{A^T} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

References :

Anton, Howard. 2005. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi Kelima. Interaksa Publishing, Company.

Imrona, Mahmud. 2013. *Aljabar Linear Dasar*. Edisi 2. Surabaya. Penerbit : Erlangga.

Assesment Penilaian Mahasiswa

<table>
<tr><th rowspan="2">No</th><th rowspan="2">CPMK</th><th rowspan="2">BAB</th><th rowspan="2">Bobot</th><th colspan="4">Skor</th><th>Nilai</th></tr>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th></th></tr>
<tr><td>1</td><td>Mahasiswa mampu memahami konsep eliminasi persamaan,</td><td>MATRIKS</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

	matriks, operasi matriks, transpose dan invers matriks							
2	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan operasi matriks, invers, dan transpose matriks	MATRIKS						

2.5. LATIHAN SOAL

1. Diberikan matriks-matriks sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Hitunglah operasi matriks berikut ini jika mungkin!

(a) $D + E$
(b) $4E - 2D$
(c) $2A^T + C$
(d) $B^T + 5C^T$
(e) BA
(f) $(C^T B)A^T$
(g) $(2D^T - E)A$
(h) $(4B)C + 2B$
(i) $D^T E^T - (ED)^T$
(j) $(A^T + E)D$

2. Anggap A adalah matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Hitunglah :

(a) A^3
(b) A^{-3}
(c) $A^2 - 2A + I$

3. Carilah invers matriks berikut jika mempunyai invers!

(a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

(c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

4. Manakah dari yang berikut ini yang merupakan matriks-matriks dasar!

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

5. Selesaikan sistem berikut dengan membalik matriks koefisien yaiutu $x = A^{-1}b$!

(a) $x + 3y + z = 4$

$2x + 2y + z = -1$

$2x + 3y + z = 3$

Bab 3

DETERMINAN

Tujuan :

Tujuan Bab 3 Determinan adalah untuk membantu mahasiswa dalam materi perkuliahan yang penyelesaiannya menggunakan matriks diperbanyak antara lain pada mata kuliah Metode Numerik dan Teknik Optimasi.

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah :

1. Mahasiswa mampu menjelaskan konsep determinan dalam persoalan yang berkaitan dengan matriks kaitannya dengan pengerjaan dalam pemrograman

2. Mahasiswa mampu mengaplikasikan konsep determinan pada matriks dengan ordo n x n pada aplikasi pemrograman

3. Mahasiswa mampu menyelesaikan determinan matriks dengan menggunakan perluasan Kofaktor dalam perhitungan

3.1 Fungsi Determinan

Pada bagian ini kita akan menelaah mengenai **fungsi determinan.** Fungsi Determinan merupakan fungsi bernilai real dari suatu peubah matriks, yang menghubungkan suatu bilangan real $f(X)$ dengan suatu matriks X. Contohnya saja kita tahu fungsi seperti $f(x) = \sin x$ dan $f(x) = x^2$ yang menghubungkan suatu bialangan real $f(x)$ dengan suatu nilai real dari peubah x. Karena x dan $f(x)$ dianggap hanya bernilai real, fungsi-fungsi seperti itu disebut sebagai fungsi bernilai real dari suatu peubah real.

Pada Teorema sebelumnya, dijelaskan bahwa

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik jika $ad - bc \neq 0$. Ekspresi $ad - bc$ muncul begitu sering dalam matematika sehingga ekspresi ini diberi nama, yaitu *determinan* dari matriks $A, 2 \times 2$ dan dinyatakan dengan simbol det (A). Dengan notasi ini, invers dari A bisa dinyatakan sebagai

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Salah satu sasarn dalam bab ini adalah memperoleh analagi dari rumus ini untuk matriks-matrisk berorde lebih tinggi. Hal ini menuntut kita untuk memperluas pengetahuan mengenai konsep suatu determinan ke matriks-matriks berorder lebih tinggi. Untuk tujuan ini kita perlu mengenal permutasi.

PERMUTASI

Definisi. Suatu permutasi himpunan bilangan bulat $\{1,2,3, \dots, n\}$ adalah susunan bilangan-bilangan bulat ini dalam suatu urutan tanpa penghilangan atau pengulangan.

Contoh 3.1.1.

Tentukan jumlah pembalikan dalam permutasi berikut ini :

(a) $(6,1,3,4,5,2)$
(b) $(2,4,1,3)$
(c) $(1,2,3,4)$

Penyelesaian :

(a) Jumlah pembalikan adalah $5 + 0 + 1 + 1 + 1 = 8$
(b) Jumlah pembalikan adalah $1 + 2 + 0 = 3$
(c) Tidak ada pembalikan dalam permutasi ini.

Dengan suatu **hasil kali dasar** dari suatu matriks $A, n \times n$ kita akan memberikan makna pada setiap hasil kali dari n anggota dari A,

yang dua diantaranya tidak ada yang berasal dari baris atau kolom yang sama.
Sebagaimana yang ditunjukkan oleh contoh ini, suatu matriks A, $n \times n$ mempunyai $n!$ hasil kali dasar.

- **MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN PENGHILANG BARIS**

Untuk mengingatkan kembali, bahwa untuk menhitung determinan diperlukan matriks yang simetri. Sebuah Teorema dasar yang perlu diingat bahwa, Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka :

a) A mempunyai baris nol atau sebuah kolom nol
b) det(A) = det (A^T)

Teorema diatas mempermudah kita dalam menghitung determinan matriks segitiga, baik itu matriks segitiga atas maupun matriks segitiga bawah berapapun ukuran matriksnya.

Teorema :
Jika A adalah matriks segitigaberukuran $n \times n$ (segitiga atas, segitiga bawah, atau diagonal), maka det(A) adalah hasil kali anggota-anggota pada diagonal utamanya; yaitu det$(A) = a_{11}a_{22} \dots a_{nn}$.

Misalkan diberikan contoh matriks segitiga bawah berukuran 4 x 4 sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}$$

Determinan matriks segitiga bawah berukuran 4x4 diatas adalah

$$\boxed{\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}}$$

Misalkan diberikan contoh matriks segitiga atas berukuran 4 x 4 sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}$$

Determinan matriks segitiga atas berukuran 4x4 diatas adalah

$$\boxed{\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}}$$

Contoh 3.1.2.

Tentukan determinan matriks dibawah ini :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian :

Anda dapat menyelesaikan persoalan dengan matriks segitiga atas secara langsung maupun matriks segitiga bawah, sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (1)(2)(6)(7)(-3)(-1) = 252$$

Contoh 3.1.3.

Hitunglah determinan matriks-matriks berikut ini dengan cara secepat mungkin yang dapat Anda peroleh!

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$

Penyelesaian :

a) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (2)(3)(1)(5) = 30$

Barus kedua ditambahkan dengan 1/5 kali baris ke-empat

b) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(3)(1)(2) = -12$

Baris pertama dipertukarkan dengan baris ke-empat, sehingga salah satu bernilai minus

c) $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = (2)(-1)(1)(5) = -10$$

Seperti Teorema

Misalkan kita ingin mencari determinan suatu matriks A dengan cara penghilang baris, akan tetapi matriks bujur sangkar A tersebut bukan merupakan matriks segitiga atas, segitiga bawah, ataupun matriks diagonal, maka dapat dilakukan dengan cara menambahkan suatu penggandaan salah satu baris atau kolom ke baris atau kolom lainnya dengan tidak mengubah determinannya.

Teorema :

Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar dengan dua baris proporsional atau dua kolom proporsional, maka $\det(A) = 0$.

Contoh 3.1.4.

Misalkan diberikan matriks dengan ukuran 4x4, dengan bentuk matriks bukan merupakan matriks segitiga atas, segitiga bawah, ataupun matriks diagonal, sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian :

Setelah kita teliti, kita mengetahui bahwa baris kedua merupakan 2 kali baris pertama, sehingga kita bisa menghilangkan baris kedua dengan mengoperasikan penjumlahan dengan baris pertama matriks sebagai berikut :

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & 6 & -4 & 8 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} \underset{\frown}{B2+2B1} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Apabila salah satu baris atau kolom dalam suatu matriks bernilai nol, maka determinan matriks tersebut adalah nol.

Berikut ini beberapa matriks dasar yang mempunyai determinan nol, kita bsa melihat bahwa baris atau kolom merupakan penggandaan dari baris-baris lainnya.

a) $\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$

matriks ini menunjukkan bahwa kolom kedua merupakan (-4) kali kolom pertama

b) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 7 \\ -4 & 8 & 5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix}$

matriks ini terlihat bahwa kolom kedua merupakan (-2) kali kolom pertama.

c) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 & -5 \\ 6 & -2 & 5 & 2 \\ 5 & 8 & 1 & 4 \\ -9 & 3 & -12 & 15 \end{bmatrix}$

Baris ke-empat merupakan (-3) kali paris pertama, sehingga jika dioperasikan penjumlahan dengan baris pertama maka nilai dari baris ke-empat adalah nol.

- **MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN REDUKSI BARIS**

Ide dasar dari metode ini adalah mengubah bentuk matriks menjadi matriks bentuk segitiga atas, ataupun matriks segitiga bawah. Sebagai penjabaran dari pembahasan ini dapat dilihat pada Contoh 3.1.5 sebagai berikut :

Contoh 3.1.5.

Hitung determinan dari matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Kita dapat mereduksi matriks A kedalam bentuk baris eselon yaitu bnetuk matriks segitiga atas.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Pertukarkan baris pertama dengan baris kedua matriks dengan mengkalikan dengan tanda (-) sedemikian hingga menjadi :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Operasikan baris ketiga dengan baris pertama, yaitu baris ketiga ditambah dengan (-2) kali baris pertama menjadi :

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 10 & -5 \end{vmatrix}$$

Kemudian baris ketiga dioperasikan dengan baris kedua yaitu beris ketiga dikurangkan dengan (-10) baris kedua menjadi

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -55 \end{vmatrix}$$

baris ketiga kemudian dikeluarkan didepan matriks (direduksi) sehingga menjadi matriks segitiga atas

$$= -(-55)\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

dengan determinan sebagai berikut :

$$= -(-55)(1) = 55$$

Sebagai latihan pada sub-bab ini, coba hitung determinan matriks berikut, sehingga matriks dapat direduksi menjadi matriks segitiga bawah.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 6 \\ 4 & 14 & 0 & 12 \\ 0 & 12 & 6 & 0 \\ 14 & 6 & 2 & -10 \end{bmatrix}$$

Untuk mempermudah matriks A menjadi matriks segitiga bawah, operasikan baris kedua dengan baris pertama matriks yaitu baris kedua dikurangi 2 kali baris pertama, atau dengan mereduksi kolom dengan satu langkah yaitu (-3) kali kolom pertama ke kolom ke-empat untuk memperoleh matriks segitiga bawah.

3.2. Menghitung Determinan Dengan Sarrus

Hanya matriks yang berorder 2 atau matriks dengan ukuran 2 x 2, dan matriks yang berorder 3 atau matriks dengan ukuran 3 x 3 yang dapat menggunakan cara Sarrus untuk menghitung determinan matriks. Berikut merupakan matriks berorder 2 yang dihitung dengan cara Sarrus sebagai berikut :

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Dan berikut merupakan matriks berorder 3 yang dihitung dengan cara Sarrus sebagai berikut :

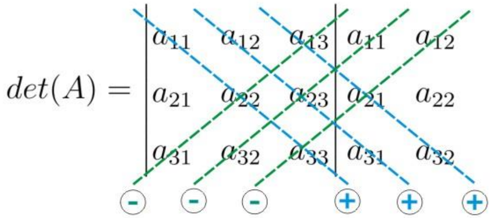
$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_3| = \left|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Bentuk Sarrus dapat digambarkan dengan mudah sebagai berikut :



Sedangkan bagaimana jika ukuran matriks lebih besar dari order 2 dan order 3, bagaimana cara menentukan perhitungan determinan menggunakan Sarrus?

Pertanyaan diatas akan muncul dibenak kita dan mahasiswa sekalian bahwa jika kita sering menemui matriks dengan order lebih besar dari 3. Untuk matriks order 4 (atau ukuran matriks 4 x 4) masih bisa digunakan cara Sarrus, akan tetapi memngikui beberapa proses yang terdiri dari 4 (empat) langkah sebagai berikut yang semuanya harus dipenuhi :

Langkah 1.

Masih dengan ciri khas Sarrus yaitu perkalian menyilang akan tetapi polanya berbeda dengan sarrus, yaitu pola pertama dimulai dengan tanda + (plus) dengan aturan 1-1-1 dan jarak a ke f sama dengan f ke k sama dengan k ke p=1, sebagai berikut :

$$A1 = \begin{array}{cccccccc} + & - & + & - & - & + & - & + \\ \end{array}$$
$$A1 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a & b & c & d & a & b & c & d \\ e & f & g & h & e & f & g & h \\ i & j & k & l & i & j & k & l \\ m & n & o & p & m & n & o & p \end{array}\right]$$

Sehingga

$$A1 = afkp - bglm + chin - dejo - ahkn + belo - cfip + dgjm$$

Pola ini hampir sama dengan sarrus matriks 3 x 3 akan tetapi tanda yang berbeda.

Langkah 2.

Pola berikutnya dimulai dengan tanda minus dengan aturan 1-2-3, sebagai berikut :

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & - & + & - & + & + & - & + & - & & \\ \end{array}$$
$$A2 = \begin{array}{cc|cccc|cccccc} c & d & a & b & c & d & a & b & c & d & a & b \\ g & h & e & f & g & h & e & f & g & h & e & f \\ k & l & i & j & k & l & i & j & k & l & i & j \\ o & p & m & n & o & p & m & n & o & p & m & n \end{array}$$

Jarak a ke f=1, jarak f ke l=2, jarak l ke o=3

Sehingga

$$A2 = -aflo + bgip - chjm + dekn + ahjo - bekp + cflm - dgin$$

Urutan elemen matriks pola kedua seperti membilang 1-2-3 sehingga mudah dihapalkan.

Langkah 3.

Pola terakhir dimulai dengan tanda plus dengan urutan 2-1-2 sebagi berikut :

$$A3 = \begin{array}{c|cccc|ccccc} & + & - & + & - & - & + & - & + & \\ d & a & b & c & d & a & b & c & d & a \\ h & e & f & g & h & e & f & g & h & e \\ l & i & j & k & l & i & j & k & l & i \\ p & m & n & o & p & m & n & o & p & m \end{array}$$

Jarak a ke g=2, jarak g ke l=1, jarak l ke n=2,

Sehingga

$$A3 = agln - bhio + cejb - dfkm - agjp + bhkm - celn + dfio$$

Sehingga Determinan matriks $A_{4\times4}$ adalah

$$\boxed{\mathbf{det}(\ \boldsymbol{A_{4\times4}}) = \boldsymbol{A1} + \boldsymbol{A2} + \boldsymbol{A3}}$$

Contoh 3.2.1 :

Dapatkan determinan matriks berikut dengan menggunakan Sarrus!

a) $A_{2\times2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

b) $A_{3\times3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

c) $A_{4\times4} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian :

a) $|A_{2\times2}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1)(4) - (2)(3) = 4 - 6 = -2$

b) $|\boldsymbol{A_{3\times3}}| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{vmatrix}$

$$= (3)(-4)(-2) + (1)(3)(5) + (0)(-2)(4) - (0)(-4)(5) - 1(-2)(-2) - (3)(3)(4)$$

$$= 24 + 15 + 0 - 0 - 4 - 36 = -1$$

c) $|A_{4\times4}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Matriks 4 x 4 diterapkan menggunakan 3 pola apabila dikerjakan menggunakan Aturan Sarrus.

Langkah/Pola 1 :

$$A1 = \left|\begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{matrix}$$

$$A1 = \big((2)(1)(-2)(-2) - 0 + (3)(1)(2)(3) - 0\big) - (2)(1)(-2)(3) + (5)(-1)(-4)(1) - (3)(1)(2)(-2) + 0$$

$$A1 = 8 + 18 + 12 + 20 + 12 = 70$$

Langkah/Pola 2 :

$$A2 =$$

$$\begin{matrix} 3 & 6 \\ 0 & 1 \\ -2 & -4 \\ 1 & -2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 2 & 5 & 3 & 6 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & 1 & 3 \end{matrix}$$

$$A2 = -(2)(1)(-4)(1) + 0 - 0 + (6)(-1)(-2)(3) + 0$$
$$- (5)(-1)(-2)(-2) + (3)(1)(-4)(1) - 0$$
$$= 8 + 36 + 20 - 12 = 52$$

Langkah/Pola 3 :

$$A3 = \begin{array}{r|rrrr|rrrrr} 6 & 2 & 5 & 3 & 6 & 2 & 5 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ -4 & 2 & 0 & -2 & -4 & 2 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 & -2 & 1 \end{array}$$

$$A3 = 0 - (5)(1)(2)(1) + 0 - (6)(1)(-2)(1) - 0$$
$$+ (5)(1)(-2)(1) - (3)(-1)(-4)(3)$$
$$+ (6)(1)(2)(1)$$

$$= -10 + 12 - 10 - 36 + 12 = -32$$

Jadi diperoleh determinan matriks adalah

$$|A_{4\times4}| = 70 + 52 + (-32) = 90 \qquad \blacksquare$$

3.3. Perluasan Kofaktor (Minor dan Kofaktor)

Pada bab sebelumnya, kita telah mempelajari determinan suatu matriks yang berorder 2, 3 dan 4 dengan manggunakan aturan/cara Sarrus. Kita tahu bahwa dengan cara Sarrus semakin banyak order suatu matriks maka perhitungan determinan dengan menggunakan Sarrus akan semakin banyak dan rumit. Oleh karena itu kita membutuhkan cara dan langkah lain untuk menghitung determinan matriks dengan order yang besar.

Pada bagian ini kita akan mempelajari mengenai determinan suatu matriks dengan order lebih besar dari 3 dengan menggunakan Perluasan Kofaktor yaitu Minor dan Kofaktor. Ingat bahwa determinan matriks hanya dapat ditentukan jika matriks merupakan matriks bujur sangkar.

Misalkan diberikan matriks dengan ukuran n x n ditulis sebagai berikut :

$$\det(\boldsymbol{A}) = |\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Disebut Minor dalam pembahasan ini merupakan suatu baris ke-r dan kolom ke-s yang dihilangkan dari suatu determinan, kemudian akan diperoleh determinan berorder $n-1$ yang dinotasikan dengan M_{rs} atau disebut dengan **Minor** dari unsur a_{rs}. **Kofaktor** dari unsu a_{rs} dinotasikan dengan K_{rs}, diperoleh dengan mengalikan minor M_{rs} dengan $(-1)^{r+s}$, yaitu

$$K_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs}$$

Misal untuk matriks dengan order 4 sebagi berikut :

$$|D_4| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Minor dari unsur a_{32} adalah determinan berorder 3. Minor dari unsur a_{32} maksudnya adalah unsur dengan baris ke-3 dan kolom ke-2. Baris ke-3 dicoret (dihilangkan) dan kolom ke-2 dicoret (dihilangkan), sehingga sisa unsur yang tidak dicoret itulah yang disebut dengan minor M_{32}.

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Sedangkan **Kofaktor** dari unsur a_{32} adalah

$$K_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = -M_{32}$$

Setiap unsur mempunyai masing-masing minor, ayo kita urutkan mulai dari a_{11} sampai dengan a_{44}.

M_{11} berarti kita hilangkan baris ke-1 dan kolom ke-1 menghasilkan minor :

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

M_{12} berarti kita hilangkan baris ke-1 dan kolom ke-2 menghasilkan minor :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

M_{13} berarti kita hilangkan baris ke-1 dan kolom ke-3 menghasilkan minor :

$$M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

M_{14} berarti kita hilangkan baris ke-1 dan kolom ke-4 menghasilkan minor :

$$M_{14} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

dan seterusnya dengan cara yang sama dihasilkan Minor lainnya.

- **NILAI DETERMINAN**

Minor dan Kofaktor tidak hanya digunakan untuk matriks yang berukuran besar, akan tetapi bisa digunakan di semua order matriks.

Misal untuk determinan matriks berorder 2, nilai determinan dihitung dengan :

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Dalam matriks ini, minor-minor a_{11}, a_{12}, a_{21} dan a_{22} berturut-turut adalah

$$M_{11} = |a_{22}|, \quad M_{12} = |a_{21}|, \quad M_{21} = |a_{12}|, \qquad M_{22} = |a_{11}|$$

Yang nilainya berturut-turut adalah $a_{22}, a_{21}, a_{12}, a_{11}$. Dengan demikian berdasarkan bentuk rumus determinan diatas dapat dinyatakan dalam suku-suku kofaktor sebagai berikut :

$$|D_2| = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12}$$

$$|D_2| = a_{11}K_{11} + a_{21}K_{21}$$

$$|D_2| = a_{21}K_{21} + a_{22}K_{22}$$

$$|D_2| = a_{12}K_{12} + a_{22}K_{22}$$

Ruas kanan dari persamaan-persamaan diatas disebut perluasan atau ekspansi determinan $|D_2|$ dalam suku-suku kofaktor berturut-turut atas baris pertama, kolom pertama, baris ke-dua, dan kolom ke-dua. Dapat diperiksa bahwa nilai-nilai tersebut semuanya sama.

Selanjutnya, misalkan diberikan matriks berorder 3.

$$|D_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Misal ekspansikan dalam suku-suku kofaktor atas sebarang baris atau kolom, misalkan baris kedua diperoleh :

$$|D_3| = a_{21}K_{21} + a_{22}K_{22} + a_{23}K_{23}$$

$$= -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$$

$$= -a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Dengan subsitusi nilai determinan order 2 diatas diperoleh

$$|D_3| = -a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{22}(a_{11}a_{33} - a_{31}a_{13}) \\ - a_{23}(a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})$$

Atau dapat disederhanakan menjadi :

$$|D_3| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} \\ - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Bentuk diatas ini merupakan bentuk sarrus yang telah kita pelajari dalam bab sebelumnya.

Dalam pengambilan suku-suku pada matriks bisa sembarang, misalkan diambil baris ke 3, sehingga determinan matriks menjadi :

$$|D_3| = a_{31}K_{31} + a_{32}K_{32} + a_{33}K_{33}$$

atau menggunakan baris ke 1, menjadi

$$|D_3| = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13}$$

atau dapat pula menggunakan unsur kolom, misalnya kolom ke-3, sehingga determinan matriks menjadi

$$|D_3| = a_{13}K_{13} + a_{23}K_{23} + a_{33}K_{33}$$

dan secara umum, untuk determinan matriks berorder n, nilainya dapat dihitung dengan rumus :

$$\boxed{|D_n| = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}K_{ij}}$$

Karena $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ berarti nilai $|D_n|$ bergantung pada n determinan berorder $n-1$; dan nilai-nilai n determinan tersebut bergantung pada $n-1$ determinan berorder $n-2$ dan seterusnya, sampai akhirnya ekspansi yang hanya melibatkan determinan berorder dua atau tiga yang nilainya telah didefinisikan sebelumnya untuk mempermudah perhitungan.

Teorema

Ekspansi determinan atas sebarang baris atau sebarang kolom dalam suku-suku kofaktor yang bersesuaian menghasilkan nilai yang sama untuk determinan tersebut.

Contoh 3.3.1.

Seperti soal pada **Contoh 3.2.1 c ,** dapatkan nilai determinan pada matriks tersebut dengan menggunakan aturan/cara Minor dan Kofaktor :

$$|A_{4\times4}| = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

Penyelesaian :

Untuk memilih unsur dalam matriks sebagai Minor, maka Anda dapat mengambil langkah yang paling mudah adalah memilih baris atau kolom dengan angka yang mudah dan yang mempunyai nilai nol, misal pada contoh matriks diatas, kita akan menggunakan baris ke-2.

Jika Timbul pertanyaan :

Apakah baris lainnya tidak boleh dipakai? Jawabannya adalah boleh, dan apakah hasilnya sama? Jawabannya jika teliti maka jawaban akan sama.

$$|A_{4\times4}| = -1K_{21} + 1K_{22} + 0 + 1K_{24}$$

$$|A_{4\times4}| = M_{21} + M_{22} + M_{24}$$

$$|A_{4\times4}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Bisa langsung dihitung menggunakan rumus untuk determinan matriks order 3, atau lebih disederdahakan sehingga menjadi matriks dengan order 2 dengan membuat lagi minor dan kofaktor pada masing-masing matriks.

$$|A_{4\times4}| = (0 + (-2)K_{22} + (-4)K_{23}) + (1K_{31} + 1K_{32} + (-2)K_{33}) + (2K_{21} + 0 + (-2)K_{23}$$

$$|A_{4\times4}| = ((-2)M_{22} + (4)M_{23}) + (K_{31} + (-1)K_{32} + (-2)K_{33}) + ((-2)K_{21} + (2)K_{23})$$

Apabila dijabarkan matriks yanga pertama yaitu $(-2)M_{22} + (4)M_{23}$ menjadi :

a) $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Ambil baris kedua sebagai unsur sehingga minor matriks menjadi :

Unsur $a_{21} \rightarrow |D_3| = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0$ tidak perlu dihitung sebenarnya, karena perkalian dengan nol pasti bernilai nol.

$a_{22} \rightarrow |D_3| = -2\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -10 - 18 = -2(-28) = 56$

$a_{23} \rightarrow \ |D_3| = -(-4)\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 9 = 4(-4) = -16$

Apabila dijabarkan matriks yanga kedua yaitu
$(K_{31} + (-1)K_{32} + (-2)K_{33})$ menjadi :

b) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

Ambil baris ketiga sebagai unsur sehingga minor matriks menjadi :

Unsur $a_{31} \rightarrow \ |D_3| = 1\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = -12 + 12 = 0$

$a_{32} \rightarrow \ |D_3| = -1\begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 12 = (-1)(-20) = 20$

$a_{33} \rightarrow \ |D_3| = -2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -4 - 6 = (-2)(-10) = 20$

Apabila dijabarkan matriks yanga ketiga yaitu
$((-2)K_{21} + (2)K_{23})$ menjadi :

c) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

Ambil baris kedua sebagai unsur sehingga minor matriks menjadi :

Unsur $a_{21} \rightarrow \ |D_3| = -2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 9 = (-2)(-4) = 8$

Unsur $a_{22} \rightarrow \ |D_3| = 0$

Unsur $a_{23} \rightarrow \ |D_3| = 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 5 = (2)(1) = 2$

Sehingga

$$|A_{4\times 4}| = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0 + 56 + (-16) + 0 + 20 + 20 + 8 + 0 + 2 = 90$$

Catatan :

Sebagai bahan latihan, coba Anda kerjakan soal ini dengan menggunakan penyerderhanaan **operasi baris elementer** kemudian apabila telah mendapatkan nilai utama 1, Anda tentukan minor dan kofaktornya, tentu hal ini lebih sederhana lagi dalam memperoleh hasil dari determinan matriks.

- **ADJOINT DAN INVERS MATRIKS**

Untuk mencari invers suatu matriks juga bisa menggunakan Kofaktor sebagaimana penjelasan yang telah dipelajari sebelumnya. Suatu matriks K mempunyai determinan Kofaktor K_{ij} sebagai berikut :

$$K = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Disebut sebagai matriks Kofaktor, sedangkan Transpose dari K adalah sebagai berikut :

$$K^T = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & \dots & K_{n1} \\ K_{12} & K_{22} & \dots & K_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ K_{1n} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

Disebut sebagai **adjoint** matriks A, ditulis dengan $adj(A)$. Adjoint matriks A adalah $adj(A) = K^T$ dengan Teorema yang ditunjukkan sebagai berikut :

Teorema

Misalkan A matriks $n \times n$, matriks $adj(A)$ memenuhi

$$adj(A).A = \det(A).I$$

Dengan I adalah matriks identitas $n \times n$.

Akibatnya jika A matriks bujur sangkar $n \times n$ dengan $\det(A) \neq 0$, maka A merupakan matriks yang bisa dibalik, dan

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}.adj(A)$$

3.4. Aturan Cramer

Sebelumnya, kalian tentu sudah mampu menyelesaikan Sistem Persamaan Linier menggunakan Metode Gauss, Gauss-Jordan, dan Operasi Baris Elementer bukan?

Pada pembahasan ini kita akan mempelajari penyelesaian Sistem Persamaan Linier dengan metode atau cara lain yang dinamakan dengan **Aturan Cramer.** Apa itu Aturan Cramer?

Aturan Cramer dikemukakan oleh Gabriel Cramer (1704-1752), seorang matematikawan Swiss. Aturan Crmaer memnuhi Teorema yang dijabarkan sebagai berikut :

Teorema

Sistem Persamaan Linier dengan n persamaan dan n peubah misalnya $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ mempunyai tepat satu penyelesaian yang diberikan oleh :

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad x_2 = \frac{|D_2|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad \dots \quad , x_n = \frac{|D_n|}{|\boldsymbol{A}|}$$

Dengan $|\boldsymbol{A}|$ adalah determinan sistem, dan $|D_k|$, $k = 1,2, \dots n$ adalah determinan yang diperoleh dari $|\boldsymbol{A}|$ dengan mengganti kolom ke-k dengan vektor **y** dengan syarat $|\boldsymbol{A}| \neq 0$. Jika $|\boldsymbol{A}| = 0$ dan sistem tersebut tidak homogen maka umumnya tidak ada penyelesaian. Jika $|\boldsymbol{A}| \neq 0$ dan sistemnya homogen maka hanya terdapat penyelesaian trivial.

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \dots, \quad x_n = 0$$

Contoh 3.4.1.

Selesaikan dengan Aturan Cramer Sistem Persamaan Linier berikut ini :

$$x_1 + x_2 + x_3 = -2$$

$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 4$$

$$4x_1 + 2x_2 + x_3 = -8$$

Penyelesaian :

Langkah 1 : Anda tentukan terlebih dahulu determinan dari matriks sistem yang telah dibentuk. Dalam persamaan diatas Anda dapat mengetahui bahwa matriks sistem sebagai berikut :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Oleh karena itu determinan matriks A dapat dicari dengan pengetahuan yang telah dimiliki, boleh manggunakan Sarrus, atau Kofaktor. Misal Anda menghitung determinan dengan penggabungan Operasi Baris Elementer (OBE) dan Kofaktor untuk mempermudah perhitungan Minor, sebagai berikut :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{B3-4B1}{\overset{B2-3B1}{\sim}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

Anda coba ambil minor pada kolom pertama matriks, yaitu

$$|A| = 1 \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 12 - 2 = 10$$

Kerana $|A| \neq 0$ maka sistem persamaan tak homogen tersebut mempunyai penyelesaian tunggal sebagai berikut :

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|}$$

Dengan langkah yang sama seperti determinan, misalkan Anda operasikan kolom pertama dan kedua terhadap kolom ketiga matriks sistem

$$|D_1| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \\ -8 & 2 & 1 \end{vmatrix} \underset{K2-K3}{\overset{K1+2K3}{\sim}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 8 & -3 & 2 \\ -6 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 8 - 18 = -10$$

Sehingga

$$x_1 = \frac{-10}{10} = -1$$

Dengan cara yang sama untuk menentukan x_2, Anda hitung

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|}$$

$$|D_2| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & -8 & 1 \end{vmatrix} \widetilde{\begin{matrix} K1 - K3 \\ K2 + 2K3 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \\ 3 & -6 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -6 - 24 = -30$$

$$x_2 = \frac{-30}{10} = -3$$

Dengan cara yang sama untuk menentukan x_3

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -8 \end{vmatrix}}{|\boldsymbol{A}|}$$

$$|D_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -8 \end{vmatrix} \widetilde{\begin{matrix} K3 + 2K1 \\ K2 - K1 \end{matrix}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 10 \\ 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \begin{vmatrix} -4 & 10 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = (0 - (-20)) = 20$$

Sehingga

$$x_3 = \frac{20}{10} = 2$$

Jadi didapatkan nilai $x_1 = -1, x_2 = -3$ dan $x_3 = 2$.

3.5 Menghitung Determinan Dengan Sarrus

Hanya matriks yang berorder 2 atau matriks dengan ukuran 2 x 2, dan matriks yang berorder 3 atau matriks dengan ukuran 3 x 3 yang dapat menggunakan cara Sarrus untuk menghitung determinan matriks. Berikut merupakan matriks berorder 2 yang dihitung dengan cara Sarrus sebagai berikut :

$$|D_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Dan berikut merupakan matriks berorder 3 yang dihitung dengan cara Sarrus sebagai berikut :

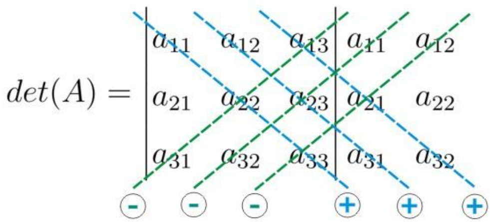
$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{12}a_{21}a_{33} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

Bentuk Sarrus dapat digambarkan dengan mudah sebagai berikut :



- **Perluasan Kofaktor (Minor dan Kofaktor)**

Disebut Minor dalam pembahasan ini merupakan suatu baris ke-r dan kolom ke-s yang dihilangkan dari suatu determinan, kemudian akan diperoleh determinanberorder $n-1$ yang dinotasikan dengan M_{rs} atau disebut dengan **Minor** dari unsur a_{rs}.

Kofaktor dari unsu a_{rs} dinotasikan dengan K_{rs}, diperoleh dengan mengalikan minor M_{rs} dengan $(-1)^{r+s}$, yaitu

$$K_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs}$$

secara umum, untuk determinan matriks berorder n, nilainya dapat dihitung dengan rumus :

$$|D_n| = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}K_{ij}$$

❖ **FEEDBACK UNTUK MAHASISWA :**

Apa yang sebaiknya dilakukan mahasiswa?

Mahasiswa Informatika dapat mencoba membuat matriks ordo n x n, misalkan dicoba terlbih dahulu matriks berukukuran 5 x 5, dan seterusnya sampai dapat membuat codingnya untuk ukuran n x n.

Soal Kontekstual :

Rifiki membeli 3 unit komputer dan 2 unit CPU pada Toko "Abadi Komputer" dengan harga Rp 35.000.000,-. Dengan Toko yang sama yaitu Toko "Abadi Komputer", Delon juga membeli 2 unit komputer dan 3 unit CPU dengan harga Rp 40.000.000,-. Berapa harga 1 unit komputer dan 1 unit CPU?

Penyelesaian :

Soal yang telah dibahas pada Bab 1, Anda bisa juga mengerjakan dengan menggunakan determinan, yaitu dengan menggunakan aturan Cramer. Cara menjawabnya sama yaitu :

1. Permisalan variabel yang tidak diketahui

Misalkan harga 1 unit komputer adalah x rupiah, dan harga 1 unit CPU adalah y rupiah

Komputer = x

CPU = y

2. Betuk kedalam model matematika

   $3x + 2y = 35.000.000$ (Persamaan 1)

   $2x + 3y = 40.000.000$ (Persamaan 2)

3. Jawab persamaan linier dengan metode yang telah Anda semua ketahui sebelumnya, misalnya dibentuk menjadi suatu matriks, sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & |35 \\ 2 & 3 & |40 \end{bmatrix}$$

4. Dengan rumus Crammer dengan penggunaan Determinan yaitu :

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad x_2 = \frac{|D_2|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad \ldots \quad , x_n = \frac{|D_n|}{|\boldsymbol{A}|}$$

terlebih dahulu kita mencari determinan matriks pada persamaan 1 dan persamaan 2.

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5$$

Kemudian, Anda bisa menghitung masing-masing determinan untuk $x1$ dan $y1$ misalnya (nama variabel bebas)

$$x1 = \begin{vmatrix} 35 & 2 \\ 40 & 3 \end{vmatrix} = 105 - 80 = 25$$

$$y1 = \begin{vmatrix} 3 & 35 \\ 2 & 40 \end{vmatrix} = 120 - 70 = 50$$

Masukkan kedalam rumus awal Aturan Cramer, menghasilkan :

$$x = \frac{x1}{A} = \frac{25}{5} = 5$$

$$y = \frac{y1}{A} = \frac{50}{5} = 10$$

5. Kesimpulan. Dapat Anda simpulkan bahwa harga dari 1 unit komputer adalah Rp 5.000.000,- sedangkan harga dari 1 unit CPU adalah Rp 10.000.000,- hasilnya sama dengan metode Gauss pada Contoh 1.4.6.

❖ **FEEDBACK UNTUK MAHASISWA :**

Apa yang sebaiknya dilakukan mahasiswa?

Anda dapat mencoba persoalan ini dalam program MATLAB sehingga menghasilkan nilai yang sama dengan metode yang Anda pahami

References :

Anton, Howard. 2005. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi Kelima. Interaksa Publishing, Company.

Purcell, J.E., Rigdon, S.E. 2000. *CALCULUS.* 8th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

SIMPULAN

---

1. MENGHITUNG DETERMINAN DENGAN PENGHILANG BARIS

Untuk mengingatkan kembali, bahwa untuk menhitung determinan diperlukan matriks yang simetri. Sebuah Teorema dasar yang perlu diingat bahwa, Jika A adalah suatu matriks bujur sangkar, maka :

a) A mempunyai baris nol atau sebuah kolom nol
b) det(A) = det (A^T)

2. MENENTUKAN DETERMINAN MATRIKS ORDO n x n

Untuk menghitung dterminan matriks dengan ordo n x n dapat digunakan reduksi baris terlebih dahulu, kemudianAnda bisa bentuk menjadi matriks segitiga atas maupun matriks segitiga bawan, kemudian dengan cara sarrus bisa dihitung determinan matriksnya dengan mengalikan nilai diagonal matriks tersebut.

3. MENGHITUNG BARIS DENGAN MINOR DAN KOFAKTOR UNTUK MATRIKS UKURAN n x n

$$K_{rs} = (-1)^{r+s} M_{rs}$$

secara umum, untuk determinan matriks berorder n, nilainya dapat dihitung dengan rumus :

$$|D_n| = a_{i1}K_{i1} + a_{i2}K_{i2} + \cdots + a_{in}K_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}K_{ij}$$

Atau Anda bisa menghitung dengan menggunakan

ATURAN CRAMER

$$x_1 = \frac{|D_1|}{|\boldsymbol{A}|}, \qquad x_2 = \frac{|D_2|}{|\boldsymbol{A}|}, \quad \ldots \quad , x_n = \frac{|D_n|}{|\boldsymbol{A}|}$$

3.6 LATIHAN SOAL

1. Dapatkan nilai-nilai determinan berikut ini :

a) $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -8 & 4 & -2 \\ 2 & 8 & -3 & 7 \\ -8 & 16 & -6 & 15 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

c) $\begin{vmatrix} 1 & a & b-c \\ 1 & b & c-a \\ 1 & c & a-b \end{vmatrix}$

2. Carilah invers matriks diatas pada nomer 1 a) dan 1.b) Apabila mempunyai invers, buktikan!

3. Carilah semua minor & Kofaktor dari matriks nomer 1.a) dan 1.b)!

4. Anggap

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 14 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Carilah:

a) M_{23} dan K_{23}, b) M_{21} dan K_{21} c) M_{42} dan K_{42}

5. Carilah adjoin pada matriks nomor 4 diatas, dan tentukan Invers matriksnya!

6. Selesaikan sistem persamaan berikut ini dengan menggunakan Eliminasi Gauss/Gauss-Jordan/Aturan Cramer!

a)
$$x - y + z = 6$$
$$2x + y - z = 0$$
$$x + 2y + z = 3$$

b)
$$3a - b + c = 4$$
$$-a + 7b - 2c = 1$$
$$2a + 6b - c = 5$$

7. Selesaikan sistem persamaan berikut ini dengan mengetahuan yang Anda miliki!

$$2a + 3b + 4c = 5$$
$$4a - 7b + 6c = 7$$
$$6a - 111b + 8c = 9$$

8. Tentukan determinan dari matriks berikut :

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

Serta tentukan nilai x yang memenuhi persamaan diatas!

9. Selesaikan dengan aturan Cramer, jika aturan tersebut bisa diterapkan!

$$-a - 4b + 2c + d = -32$$
$$2a - b + 7c + 9d = 14$$
$$-a + b + 3c + d = 11$$
$$a - 2b + c - 4d = -4$$

10. Pada nomer 9, kerjakan di program MATLAB/ program lain sehingga didapatkan hasil yang sama dengan pengerjaan manual yang telah Anda hitung sebelumnya!

Bab 4

Vektor-Vektor Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3

Tujuan :

Tujuan yang ingin dicapai pada Bab 4 Vektor-Vektor Dalam Ruang Dimensi 2 dan 3 adalah sebagai penunjang pembelajaran perograman berbasis Web dan MATLAB dalam pengaplikasiannya.

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah :

1. Mahasiswa mampu mengidentifikasi sifat-sifat vektor dalam dimensi 2 dan dimensi 3 kaitannya dengan bab vektor sebelumnya

2. Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan operasi vektor dimensi 2 dan dimensi 3 dan

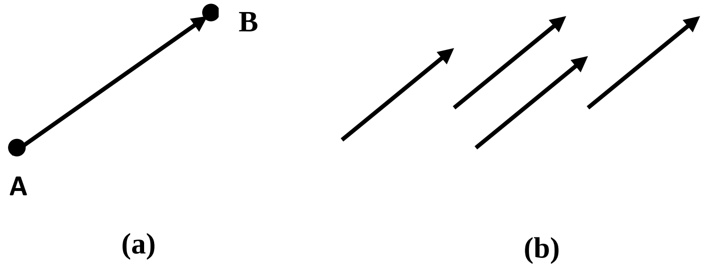
menggambar benda dalam ruang dimensi 2 maupun 3 dengan pemrograman pada prodi Informatika

4.1. Pengantar Vektor

Dalam Ilmu Fisika, kita tentu telah mendengar istilah **vektor**. Kalian masih ingat bukan, apakah **Vektor** ditinjau dari ilmu Fisika? Kalau kalian masih mengingat, ada besaran yang dinamakan **skalar** dan ada besaran yang disebut **vektor**. Di dalam ilmu Fisika, kita telah mempelajari masalah luasan, panjang, massa, suhu, dan lainnya, besara-besaran yang demikian inilah yang disebut dengan **skalar**. Sedangkan **vektor** adalah besaran skalar yang mempunyai arah, contohnya laju angin dan arah angin yang disebut sebagai kecepatan, gaya dan berat misalnya percepatan grafitas, dll.

Vertor dapat disajikan secara geometris sebagai garis berarah atau panah dalam ruang dimensi 2 dan ruang dimensi 3, dan arah panah ini menentukan arah vektor, dan panjang panah merupakan besarnya. Pangkal dari nah disebut sebagai **titik pangkal** vektor, sedangkan ujung panah disebut **titik ujung.** Vektor dapat dituliskan dengan **huruf kecil tebal**. Sedangkan besarannya kita sebut dengan **skalar**, dan biasanya skalar dituliskan dengan huruf kecil miring. Contoh vektor seperti yang telihat pada **Gambar 2** berikut ini, misalkan titik pangkal suatu vektor **v** ditulis **A** dan titik ujungnya adalah **B**, maka dapat dituliskan

$$\boldsymbol{v} = \overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$$

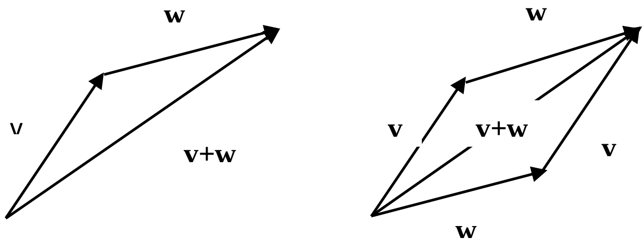


Gambar 2. (a) Vektor $\overrightarrow{AB}$ **, (b)** Vektor-vektor yang Ekivalen

Vektor yang panjang dan arahnya sama seperti Gambar 2(b) disebut sebagai **vektor ekivalen.** Jika **v** dan **w** disebut ekivalen, maka dapat dituliskan dengan

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$$

Definisi. Jika $\boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ adalah dua vektor sebarang, maka **jumlah** $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ adalah vektor $\boldsymbol{v}$ ditambah dengan vektor $\boldsymbol{w}$ yaitu dengan meletakkan ujung pangkal vektor $\boldsymbol{w}$ ke titik ujung vektor $\boldsymbol{v}$ kemudian ditarik garis dari ujung pangkal vektor $\boldsymbol{v}$ ke titik ujung vektor $\boldsymbol{w}$ yang telah dijumlahkan tadi. Definisi vektor $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ ini dapat dilihat pada Gambar 3 berikut ini :



(a) (b)

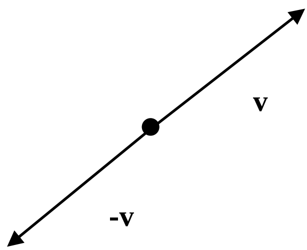
Jumlah **v+w**	**v+w = w+v**

Gambar 3

Sedangkan vektor yang panjangnya nol disebut sebagai **vektor nol** dan dinyatakan dengan **0**, seperti definisi berikut :

$$\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \mathbf{0} = \boldsymbol{v}$$

Untuk setiap vektor **v.** Dan jika **v** adalah sebarang vektor tak nol, maka **–v** (**negatif** dari **v**) didefinisikan dengan Gambar 4 sebagai berikut, yaitu dua vektor yang besarnya sama akan tetapi arahnya berlawanan/ terbalik.



Gambar 4. Negatif dari **v** mempunyai panjang yang sama dengan **v,** tetapi arahnya terbalik

Vektor ini mempunyai sifat yang menghasilkan vektor nol yaitu

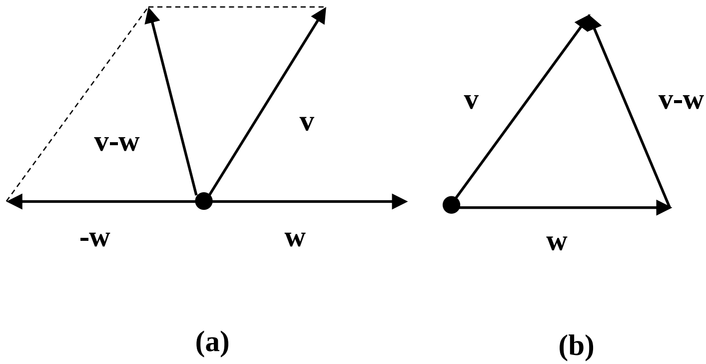
$$\boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$$

Definisi.

Jika **v** dan **w** adalah dua vektor sebarang, maka selisih **w** dari **v** didefiniskan sebagai

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (-\boldsymbol{w})$$

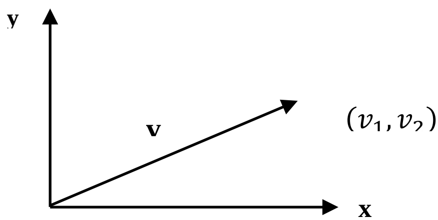
Seperti Gambar 5 berikut ini



Gambar 5. Vektor **v-w**

- **VEKTOR-VEKTOR DALAM SISTEM KOORDINAT**

Dalam pembahsan ini, kita akan membahas mengenai vektor-vektor dalam dimensi 2 (bidang). Anggap **v** adalah sebarang vektor pada bidang, dan dapat diasumsikan seperti Gambar 6 sebagai berikut

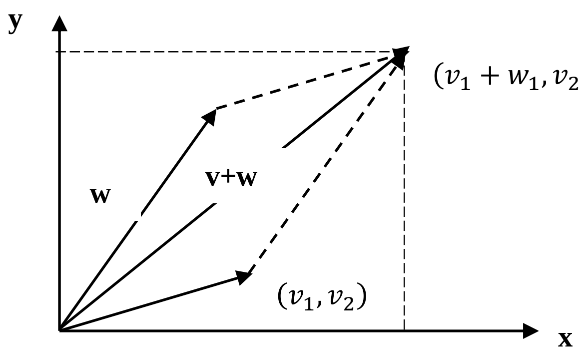


Gambar 6. v_1 dan v_2 adalah komponen-komponen dari $\boldsymbol{v}$

Jika v_1 dan v_2 adalah komponen-komponen dari $\boldsymbol{v}$**,** maka dapat dituliskan sebagai koordinat (v_1, v_2) dari titik ujung $\boldsymbol{v}$ disebut **komponen v,** dan dapat dituliskan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$. Demikian juga apabila terdapat verktor lain misalkan vektor $\boldsymbol{w}$ bisa dituliskan dengan $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2)$. Dengan demikian penjumlahan vektor $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$ dapat dituliskan sebagai berikut

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{w_2})$$

Seperti terlihat pada **Gambar 7** berikut ini



Gambar 7. $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{v_2} + \boldsymbol{w_2})$

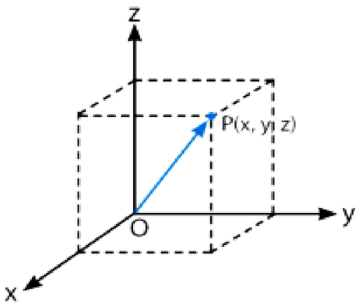
Jika $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$ dan k adalah sebarang skalar, maka perkalian dengan vektor bisa menunjukkan suatu perubahan pembesaran atau pengecilan yang ditunjukkan sebagai berikut

$$k\boldsymbol{v} = (kv_1, kv_2)$$

- **VEKTOR-VEKTOR DALAM RUANG BERDIMENSI 3**

Selain dalam dimensi dua (bidang) dalam koordinat Kartesius, suatu vektor juga dapat digambarkan dalam bentuk 3 Dimensi (Ruang). Setiap pasangan sumbu koordinat ini disebut sebagai

bidang-xy, bidang-xz, dan **bidang-yz.** Berikut dapat digambarkan dalam koordinat X-Y-Z :

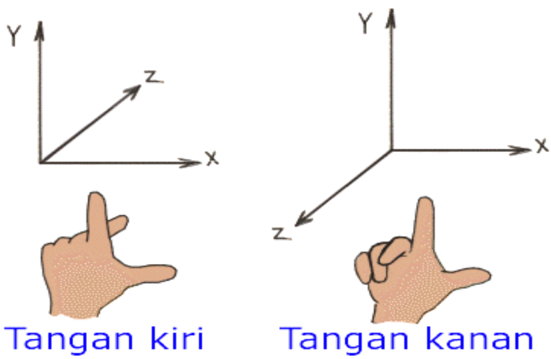


Gambar 7. Vektor dalam Ruang Dimensi 3

Koordinat P didefinisikan sebagai panjang bertanda

$$x = OX, \quad y = OY, \quad z = OZ$$

Sistem koordinat segi empat dalam ruang dimensi 3 mempunyai dua kategori, **tangan kiri**, dan **tangan kanan.** Suatu sistem tangan-kanan mempunyai sifat yang ditunjukkan oleh suatu sekrup biasa dalam arah positif pada sumbu-z jika sumbu x positif diputar 90^0 ke arah sumbu y positif. Hal ini dapat ditunjukkan dalam Gambar 8 berikut ini



Gambar 8. Sistem Koordinat menggunakan arah Tangan-Kanan dan Tangan-Kiri

Contoh 4.1.1.

Misalkan jika diberikan $\boldsymbol{v} = (1, -2)$ dan $\boldsymbol{w} = (7,6)$, maka tentukan :

a) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}$
b) $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$
c) Misalkan $k = 2$, tentukan $k(v + w)$!
d) Jika $v = (1, -3,2)$ dan $w = (4,2,1)$, tentukan $v + w$ dan $v - \boldsymbol{w}$

Penyelesaian :

a) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (1 + 7, -2 + 6) = (8,4)$
b) $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (1 - 7, -2 - 6) = (-6, -8)$
c) $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{2}(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = 2(8,4) = (16,8)$
d) $\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = (1 + 4, -3 + 2, 2 + 1) = (5, -1,3)$

$$\boldsymbol{v} - \boldsymbol{w} = (1 - 4, -3 - 2,2 - 1) = (-3, -5,1)$$

4.2. Norma Suatu Vektor

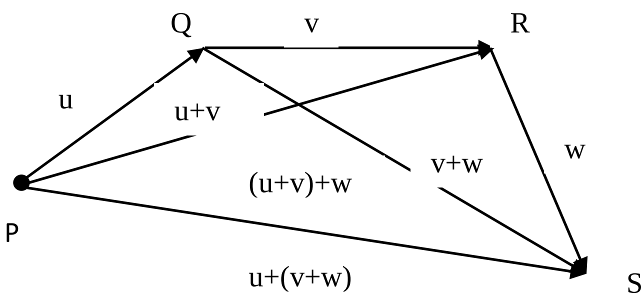
Pada bagian ini kita akan mempelajari tentang sifat-sifat vektor yang paling penting dalam ruang berdimensi-2 dan ruang berdimensi 3

Teorema

Jika $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ dan $\boldsymbol{w}$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 dan ruang berdimensi 3 dan k dan l adalah skalar, maka hubungan berikut ini berlaku :

a) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
b) $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$
c) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
d) $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$
e) $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{lu}) = (\boldsymbol{kl})\boldsymbol{u}$
f) $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{ku} + \boldsymbol{kv}$
g) $(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{l})\boldsymbol{u} = \boldsymbol{ku} + \boldsymbol{lu}$
h) $\boldsymbol{1u} = \boldsymbol{u}$

Secara geometris, kita dapat membuktikan Teorema diatas, misalkan Teoram yang akan kita buktikan adalah pada bagian b), maka dapat dibentuk gambar geometri sebagai berikut :



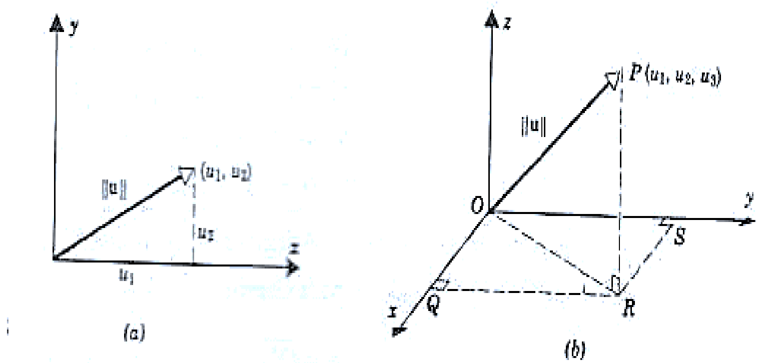
Gambar 9. Vektor **u+(v+w)** dan **(u+v)+w**

Panjang suatu vektor $\boldsymbol{u}$ disebut sebagai norma $\boldsymbol{u}$ dan dinyatakan sebagai $\|\boldsymbol{u}\|$. Dari teorema pytagoras, kita dapatkan bahwa norma suatu vektor $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ dalam ruang berdimensi 2 adalah

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Catatan : Mahasiswa dapat membuat praktik sendiri dalam membuat vektor dalam dimensi 2 dan vektor dalam dimensi 3 sesuai dengan pemahaman yang telah diperoleh pada bab ini.

Anggap $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ adalah vektor dalam ruang berdimensi 3.



Gambar 10. (a) Vektor dalam ruang berdimensi 2, dan (b) Vektor dalam ruang berdimensi 3

$$\|\boldsymbol{u}\|^2 = (OR)^2 + (RP)^2$$
$$= (OQ)^2 + (OS)^2 + (RP)^2$$
$$= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$$

Jadi

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Suatu vektor bernorma 1 disebut suatu **vektor satuan.**

4.3. Aritmatika Vektor

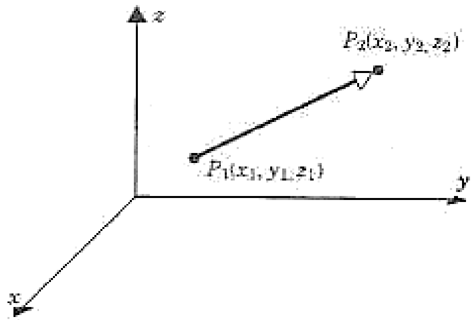
Jarak suatu vektor $\boldsymbol{d}$ didefinisakan jika diketahui dua titik misalkan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dalam ruang berdimensi 3. **Jarak $\boldsymbol{d}$** antara kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ karena

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Maka didapatkan

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Demikian jika $P_1(x_1, y_1)$ dan $P_2(x_2, y_2)$ adalah titik titik dalam ruang berdimensi-2, maka jarak antara kedua titik tersebut diberikan oleh



Gambar 11. (sumber Howard Anton Edisi 7 Jilid 1)

Sehingga jarak antara P_1 dan P_2 adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ yaitu

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

4.4. Hasil Kali Titik

Pada bagian ini, kita akan mendiskusikan masalah perkalian vektor berdimensi-2 dan vektor berdimensi-3. Misalkan $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ merupakan suatu vektor tak nol yang berada pada ruang maka dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi

Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 atay berdimensi 3, dan θ adalah sudut antara $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$, maka **hasil kali titik** atau **hasil kali dalam Euclidean** $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ didefinisikan sebagai berikut :

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\ \cos\boldsymbol{\theta}$ jika $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$

Dan

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ jika $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$

Hasil kali titik atau dikenal dengan sebutan dot product vektor merupakan hasil kali dot/titik antara vektor satu dengan vektor lainnya yang berada pada ruang dimensi dua atau ruang dimensi tiga.

Contoh 4.4.1.

1. Hitunglah sudut yang dibentuk dari vektor $\boldsymbol{u} = (\mathbf{2}, \mathbf{3})$ dan vektor $\boldsymbol{v} = (\mathbf{5}, -\mathbf{7})$!
2. Tentukan apakah vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ pada soal nomor 1 membentuk sudut lancip, tumpul, atau ortogonal?

Penyelesaian :

1. Sesuai dengan definisi Hasil Kali Titik, maka Anda dapat melakukan langkah pertama yaitu kita mencari perkalian titik dari vektor $\boldsymbol{u}$ dan vektor $\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = 2.5 + 3(-7) = -11$$

Kemudian, langkah selanjutnya yang dapat Anda lakukan adalah menghitung norma masing-masing vektor

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{5^2 + (-7)^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74}$

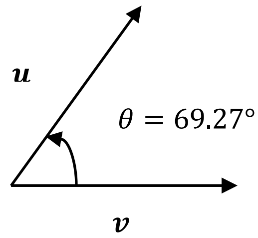
Sehingga $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\ \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$

$-11 = \sqrt{13}.\sqrt{74}\cos\theta$

$\cos\theta = -\dfrac{11}{31.01} = 0.354$

$\theta = arc\ (\cos 0.354) = 69.27°$

2. Karena nilai $\theta = 69.27$ maka vektor membentuk sudut lancip karena kurang dari 90^0.



Gambar 12

Contoh 4.4.2.

Carilah $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ serta sudut yang dibentuk oleh $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$ dengan $\boldsymbol{u} = (-2,2,3)$ dan $\boldsymbol{v} = (1,7,-4)$!

Penyelesaian :

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = (-2)1 + 2.7 + 3(-4) = -2 + 14 - 12 = 0$$

$$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 4 + 9} = \sqrt{17}$$

$$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{1^2 + 7^2 + (-4)^2} = \sqrt{1 + 49 + 16} = \sqrt{66}$$

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \sqrt{66}\ \cos\theta$$

$$\frac{0}{\sqrt{66}} = \cos\theta \rightarrow\ \theta = 90°$$

Dari contoh diatas, diketahui bahwa hasil kali titik dapat digunakan untuk memperoleh informasi mengenai sudut antara dua vektor, teorema ini menerapkan suatu hubungan penting antara norma dan hasil kali titik. Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa untuk mencari sudut antar vektor dapat dicari menggunakan rumus :

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}$$

Teorema

Anggap $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 2 atau berdimensi 3, maka

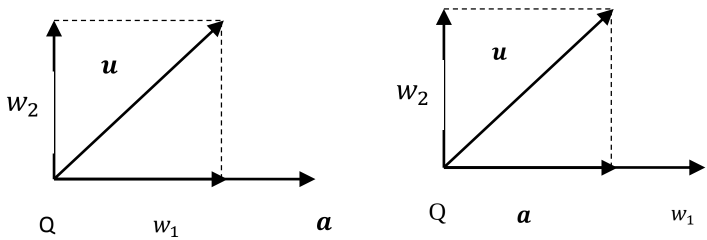
(a) $\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{v}\|^{\mathbf{2}}$, yaitu $\|\boldsymbol{v}\| = (\boldsymbol{v}.\boldsymbol{v})^{1/2}$

(b) Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor tak nol dan sudut antara kedua vektor tersebut, maka

θ lancip	jika dan hanya jika $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} > \mathbf{0}$
θ tumpul	jika dan hanya jika $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} < \mathbf{0}$
$\theta = \frac{\pi}{2}$	jika dan hanya jika $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \mathbf{0}$

- **Proyeksi Ortogonal**

  Vektor w_1 disebut **proyeksi ortogonal dari u pada a** atau disebut sebagai **komponen vektor dari u yang sejajar dengan a.**



Gambar 13. Proyeksi Ortogonal dari u pada a

$$w_2 = \boldsymbol{u} - proy_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u}$$

Komponen vektor **u** yang sejajar dengan **a** dapat dituliskan dengan rumus berikut :

$$proy_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$$

Sedangkan vektor **u** yang ortogonal terhadap **a** dituliskan dengan rumus sebagai berikut :

$$\boldsymbol{u} - proy_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a}$$

Contoh 4.4.3.

Cari proyeksi ortogonal dari **u** terhadap **a**, jika diberikan **u=**(3,1,-7), dan **a=**(1,0,5)!

Penyelesaian :

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{a} = (3.1 + 1.0 + (-7)5) = 3 - 35 = -32$

$\|\boldsymbol{a}\|^2 = 1^2 + 5^2 = 26$

$$proy_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = -\frac{32}{26}(1,0,5) = \left(-\frac{32}{26}, 0, -\frac{160}{26}\right)$$

$$= (-\frac{16}{13}, 0, -\frac{80}{13})$$

Anda dapat menghitung dengan rumus Proyeksi ortogonal dari **u** terhadap **a** adalah

$$\boldsymbol{u} - proy_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \frac{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|^2}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} - (-\frac{16}{13}, 0, -\frac{80}{13})$$

$$= (3,1,-7) - (-\frac{16}{13}, 0, -\frac{80}{13})$$

$$= (\frac{55}{13}, 1, -\frac{11}{13})$$

Proyeksi vektor ini dapat Anda dianalogikan dengan mencari suatu jarak dari titik ke suatu garis, misalkan titik $P_0(x_0, y_0)$ dan garis $ax + by + c = 0$.

Misalkan terdapat suatu titik didalam sebuah garis, misal

$$\boldsymbol{n} = (a, b)$$

maka Anda dapat menuliskan sebagai Jarak (D) , dan misalkan $\overrightarrow{QP}$ adalah jarak dari titik Q ke titik P yang merupakan suatu garis

$$D = \left\|Proy_{\boldsymbol{n}}\overrightarrow{QP}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{QP}.\boldsymbol{n}\right|}{\|\boldsymbol{n}\|}$$

Sedemikian hingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Contoh 4.4.4.

Gunakan rumus jarak untuk menghitung jarak dari titik (-3,1) ke garis $4x + 3y + 4 = 0$!

Penyelesaian :

$$D = \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$= \frac{|4.(-3) + 3.(1) + 4|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|-5|}{\sqrt{25}} = \frac{5}{5} = 1 \quad \blacksquare$$

4.5. Hasil Kali Silang

Hasil kali silang disebut juga sebagai perkalian cross product menggunakan tanda silang (X). Hasil kali silang atau cross product dikaitkan dengan perkalian silang suatu vektor baik itu di ruang dimensi 2 atau vektor pada ruang dimensi 3.

Definisi

Misalkan **u** dan **v** merupakan vektor pada ruang dimensi 3, dengan $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ dan $\boldsymbol{v} = (v_{\boldsymbol{1}}, v_2, v_3)$**,** maka hasil kali silang $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ adalah vektor yang didefinisikan sebagai

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$$

Atau dalam notasi determinan sebagai berikut

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} \boldsymbol{u_2} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{v_2} & \boldsymbol{v_3} \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_3} \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \boldsymbol{u_1} & \boldsymbol{u_2} \\ \boldsymbol{v_1} & \boldsymbol{v_2} \end{vmatrix} \right)$$

Untuk mempermudah Anda dalam mengingat, maka kalian tidak perlu menghafalkannya, melainkan dapat menuliskan kedalam format matriks dengan langkah sama seperti menghitung determinan suatu matriks sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

Bila dituliskan secara rumusan menjadi

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2v_3 - u_3v_2), -(u_1v_3 - u_3v_1), (u_1v_2 - u_2v_1)$$

Sesuai dengan definisi

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_2 v_3 - u_3 v_2), (u_3 v_1 - u_1 v_3), (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

Contoh 4.5.1.

Jika $\boldsymbol{u} = (3,2,-1)$, $\boldsymbol{v} = (0,2,-3)$, dan $\boldsymbol{w} = (2,6,7)$, maka hitunglah

(a) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$

(b) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$

Penyelesaian :

(a) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 7 \end{bmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (14 + 18), -(0 + 6), (0 - 4) = (32, -6, -4)$$

(b) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$

$$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 32 & -6 & -4 \end{bmatrix}$$
$$= \left(\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 32 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 32 & -6 \end{vmatrix} \right)$$
$$= (-8 - 6), -(-12 + 32), (-18 - 64)$$
$$= (-14, -20, -82)$$

Jika **u,v,** dan **w** adalah vektor-vektor dalam ruang berdimensi 3, maka terdapat beberapa perkalian vektor sebagai berikut :

(a) $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ $\quad$ $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ ortogonal terhadap **u**

(b) $\boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}$ $\quad$ $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ ortogonal terhadap **v**

(c) $\|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\|^2 = \|\boldsymbol{u}\|^2 \|\boldsymbol{v}\|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$

(d) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})\boldsymbol{w}$ $\quad$ Hubungan antara hasil kali silang dan hasil kali titik

(e) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w})\boldsymbol{u}$ $\quad$ Hubungan antara hasil kali silang dan hasil kali titik

HASIL KALI SKALAR GANDA TIGA

Definisi

Jika **u, v,** dan **w** adalah vektor-vektor dalam ruang dimensi 3, maka

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$$

Disebut **hasil kali skalar ganda tiga** dari **u,v,** dan **w**

Untuk perkalian hasil kali skalar ganda tiga, hasil yang diperoleh sesuai dengan namnaya, yaitu bernilai skalar (nilai/angka).

Contoh 4.5.2.

Carilah hasil kali skalar ganda tiga $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$dari vektor-vektor $\boldsymbol{u} = (-1,2,4), \boldsymbol{v} = (3,4,-2), \boldsymbol{w} = (-1,2,5)$**!**

Penyelesaian :

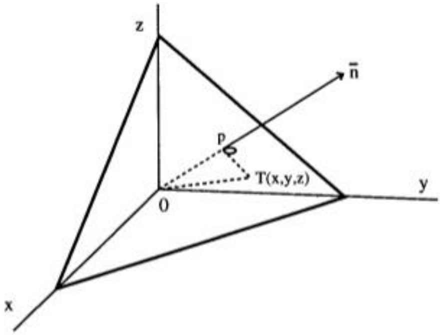
$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= (-1)\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= -24 - 26 + 40 = -10$$

4.6. Garis dan Bidang dalam Ruang Dimensi 3

Perhatikan gambar 14 berikut ini, garis dapat digunakan untuk menganalisis kemiringan suatu bidang dengan membuat sudut inklinasinya atau suatu titik pada bidang tersebut.



Gambar 14. Persamaan Normal Bidang Rata

Misal titik p pada Gambar 14 pada ruang dimensi 3 sehingga titik $P(x_0, y_0, z_0)$ mempunyai vektor tak nol $\overline{\boldsymbol{n}}$, misal vektor $\overline{\boldsymbol{n}} = (a, b, c)$ sebagai normal. Maka jarak antara vektor **P** dan vektor $T(x, y, z)$ adalah

$$\overrightarrow{PT} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

Karena vektor $\overrightarrow{PT}$ ortogonal terhadap vektor $\overline{\boldsymbol{n}}$ maka

$$\overline{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{PT} = \boldsymbol{0}$$

sehingga

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

Disebut sebagau bentuk **normal titik** dari persamaan sebuah bidang.

Contoh 4.6.1.

Carilah sebuah persamaan bidang yang melalui titik (3,-1,7) dan tegak lurus terhadap vektor **n=(4,2,-5)!**

Penyelesaian :

Bentuk normal titiknya adalah

$$4(x - 3) + 2(y + 1) - 5(z - 7) = 0$$

Dengan Anda mengalikan dan mengumpulkan suku-suku bisa ditulis ulang menjadi

$$4x + 2y - 5z + 25 = 0$$

Jarak D antara sebuah titik $P_0(x_0, y_o, z_0)$ dan bidang $ax + by + cz + d = 0$ adalah

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Contoh 4.6.1.
Carilah jarak antara titik dan bidang berikut ini :

(a) $(3,1,-2);\ x + 2y - 2z = 4$
(b) $(-1,2,1); 2x + 3y - 4z = 1$

Penyelesaian :

(a) $(3,1,-2);\ x + 2y - 2z = 4\ , a = 1, b = 2, c = -2, d = -4$

$x_0 = 3\ , y_o = 1, z_0 = -2$

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$D = \frac{|1.3 + 2.1 + (-2)(-2) - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$D = \frac{|3 + 2 + 4 - 4|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$$

(b) $(-1,2,1); 2x + 3y - 4z = 1$

$$a = 2, b = 3, c = -4, d = -1$$

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

$$D = \frac{|2.(-1) + 3.(2) + (-4)(1) - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + (-4)^2}}$$

$$D = \frac{|-2 + 6 - 4 - 1|}{\sqrt{4 + 9 + 16}} = \frac{1}{\sqrt{29}}$$

Contoh 4.6.2.

Carilah jarak antara bidang-bidang sejajar berikut ini :

(a) $3x - 4y + z = 1$ dan $6x - 8y + 2z = 3$

(b) $-4x + y - 3z = 0$ dan $8x - 2y + 6z = 0$

Penyelesaian :

(a) Untuk mencari jarak D antara kedua bidang tersebut, Anda bisa memilih sebarang titik pada salah satu bidang dan menghitung jaraknyake bidang lainnya. Dengan menetapkan $y = z = 0$ dalam persamaan $3x - 4y + z = 1$, kita dapatkan titik $P_0(\frac{1}{3}, 0, 0)$ pada bidang ini. Jarak antara P_0 dan bidang $6x - 8y + 2z = 3$ adalah

$$D = \frac{|6.(1/3) + (-4)(0) + (1)(0) - 1|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2 + (2)^2}}$$

$$= \frac{|2 - 4|}{\sqrt{36 + 64 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{104}}$$

❖ **<u>FEEDBACK UNTUK MAHASISWA :</u>**

Apa yang sebaiknya dilakukan mahasiswa?

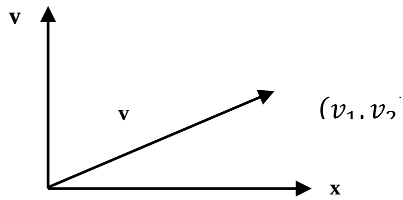
Mahasiswa Informatika dapat mencoba menggambar vektor dimensi 2 dan 3 pada contoh yang telah diberikan dengan program yang telah diketahui sebelumnya sebagai latihan

---

SIMPULAN

---

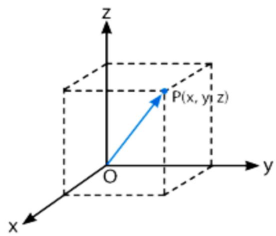
1. VEKTOR-VEKTOR DALAM SISTEM KOORDINAT



Jika v_1 dan v_2 adalah komponen-komponen dari $\boldsymbol{v}$**,** maka dapat dituliskan sebagai koordinat (v_1, v_2) dari titik ujung $\boldsymbol{v}$ disebut **komponen v,** dan dapat dituliskan $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2)$.

- **VEKTOR-VEKTOR DALAM RUANG BERDIMENSI 3**

Setiap pasangan sumbu koordinat ini disebut sebagai **bidang-xy, bidang-xz,** dan **bidang-yz.** Berikut dapat digambarkan dalam koordinat X-Y-Z :



2. Aritmatika Vektor

Jarak suatu vektor $\boldsymbol{d}$ didefinisakan jika diketahui dua titik misalkan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ dan $P_2(x_2, y_2, z_2)$ dalam ruang berdimensi 3. **Jarak $\boldsymbol{d}$** antara kedua titik tersebut adalah norma vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$ karena

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Maka didapatkan

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

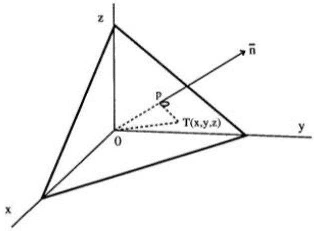
- **Hasil Kali Titik**

$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|\ \cos\boldsymbol{\theta}$ jika $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}$ dan $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}$

Dan

$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \text{ jika } \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \text{ dan } \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$$

- **Garis dan Bidang Dalam Ruang Dimensi 3**



jarak antara vektor **P** dan vektor $T(x, y, z)$ adalah

$$\overrightarrow{PT} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

Karena vektor $\overrightarrow{PT}$ ortogonal terhadap vektor $\overline{\boldsymbol{n}}$ maka

$$\overline{\boldsymbol{n}} \cdot \overrightarrow{PT} = \boldsymbol{0}$$

References :

Anton, Howard. 2005. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi Kelima. Interaksa Publishing, Company.

Purcell, J.E., Rigdon, S.E. 2000. *CALCULUS.* 8th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

Purnama, Dian. 1979. *Aljabar Linier dan Kalkulus Vektor*. Bab : Sistem Persamaan Linier dapat diunduh di website

Assesment Penilaian Mahasiswa

No	CPMK	BAB	Bobot	Skor				Nilai
				1	2	3	4	
1	Mahasiswa mampu mengidentifikasi sifat-sifat vektor	Vektor-Vektor dalam						

	dalam dimensi 2 dan dimensi 3	dimensi 2 dan 3						
2	Mahasiswa mampu menyelesaikan persoalan yang berkaitan dengan operasi vektor dimensi 2 dan dimensi 3	Vektor-Vektor dalam dimensi 2 dan 3						

4.7. LATIHAN SOAL

1. Sketsakan vektor-vektor berikut ini dengan titik pangkal diletakkan pada titik asal!

   (a) $v_1 = (0, -7)$
   (b) $v_8 = (3,3,0)$
   (c) $v_9 = (0,0,-3)$
   (d) $v_{10} = (3,4,5)$

2. Carilah suatu vektor tak-nol $\boldsymbol{u}$ dengan titik pangkal $P(-1,3,5)$ sedemikian sehingga

   (a) $\boldsymbol{u}$ mempunyai arah yang sama dengan $\boldsymbol{v} = (6,7,-3)$
   (b) $\boldsymbol{u}$ berlawanan arah dengan $\boldsymbol{v} = (6,7,-3)$

3. Carilah norma vektor $\boldsymbol{v}$

   (a) $\boldsymbol{v} = (4,-3)$
   (b) $\boldsymbol{v} = (2,2,2)$
   (c) $\boldsymbol{v} = (-7,2-1)$
   (e) $\boldsymbol{v} = (-5,0)$
   (f) $\boldsymbol{v} = (0,6,0)$
   (g) $\boldsymbol{v} = (3,2,1)$

4. Anggap $\boldsymbol{u} = (2,-2,3)$, $\boldsymbol{v} = (1,3,4)$, $\boldsymbol{w} = (3,6,-4)$. Pada masing-masing bagian hitunglak ekspresi yang ditunjukkan :

   (a) $||\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}||$
   (b) $||\boldsymbol{u}|| + ||\boldsymbol{v}||$

5. Carilah $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}$

(a) $\boldsymbol{u} = (-6,-2), \boldsymbol{v} = (4,0)$
(b) $\boldsymbol{u} = (1,-5,4), \boldsymbol{v} = (3,3,3)$
(c) $\boldsymbol{u} = (-2,2,3), \boldsymbol{v} = (1,7,-4)$

6. Carilah proyeksi ortogonal pada persoalan yang diberikan berikut :

(a) $\boldsymbol{u} = (-1,-2)$, $\boldsymbol{a} = (-2,3)$
(b) $\boldsymbol{u} = (1,0,0), \boldsymbol{a} = (4,3,8)$
(c) $\boldsymbol{u} = (3,1,-7), \boldsymbol{a} = (1,0,5)$

7. Pada soal nomor 6, carilah komponen vektor dari $\boldsymbol{u}$ yang ortogonal terhadap $\boldsymbol{a}$

8. Anggap $\boldsymbol{u} = (-1,2,4),$ $\boldsymbol{v} = (3,4,-2), \boldsymbol{w} = (-1,2,5),$ hitunglah

(a) $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$
(b) $\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$
(c) $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}) \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$

9. Carilah luas jajar genjang yang dibentuk oleh vektor vektor $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$!

(a) $\boldsymbol{u} = (1,-1,2), \boldsymbol{a} = (0,3,1)$
(b) $\boldsymbol{u} = (3,-1,4), \boldsymbol{a} = (6,-2,8)$
(c) $\boldsymbol{u} = (2,3,0), \boldsymbol{a} = (-1,2,-2)$

10. Tentukan apakah garis-garis berikut tegak lurus

(a) $3x - y + z - 4 = 0, x + 2z = -1$
(b) $x - 2y + 3z = 4, -2x + 5y + 4z = -1$

11. Carilah jarak antara titik dan bidang berikut ini :

(a) $(-1,2,1); 2x + 3y - 4z = 1$
(b) $(0,3,-2); x - y - z = 3$

12. Carilah jarak antara bidang-bidang sejajar berikut ini :

(a) $-4x + y - 3z = 0$ dan $8x - 2y + 6z = 0$

(b) $2x - y + z = 1$ dan $2x - y + z = -1$

(c) $x + 2y - 2z = 3$ dan $2x + 4y - 4z = 7$

13. Cari sebuah persamaan untuk bidang yang melalui (-2,1,5) yang tegak lurus dengan bidang $4x - 2y + 2z = -1$ dan $3x + 3y - 6z = 5$!

14. Carilah jarak antara titik dan bidang berikut ini (soal 11) dan gambarlah titik yang dimaksud :

a) $(-1,2,1); 2x + 3y - 4z = 1$

b) $(0,3,-2); x - y - z = 3$

15. Carilah jarak antara bidang-bidang sejajar berikut ini pada nomer 12 dengan menggunakan program yang Anda ketahui dan Gambarlah bidang yang dimaksud:

a) $-4x + y - 3z = 0$ dan $8x - 2y + 6z = 0$

b) $2x - y + z = 1$ dan $2x - y + z = -1$

Bab 5

Ruang Vektor Umum

Tujuan :

Tujuan yang ingin dicapai pada Bab 5 Ruang Vektor Umum adalah sebagai penunjang materi bab Vektor sebelumnya dalam menambah wawasan mengenai ruang vektor umum yang lain.

Capaian Pembelajaran Mata Kuliah :

1. Mahasiswa mampu membandingkan ruang-ruang vektor real selain vektor-vektor yang telah diketahui sebelumnya dalam perkuliahan Aljabar Linear

2. Mahasiswa mampu mengidentifikasi ruang, sub ruang, bebas linear, basis dan dimensi dalam ruang-ruang vektor umum dalam hal keterkaitan dengan Vektor pada mata kuliah Aljabar

5.1. Ruang-Ruang Vektor Real

Ruang-ruang vektor dimana skalar yang terdapat dalam himpunan merupak bilangan-bilangan kompleks disebut **ruang vektor kompleks,** dan ruang-ruang vektor dimana skalar tersebut haruslah bilangan real disebut **ruang vektor real.** Pada bab ini, kita akan mendiskusikan ruang-ruang vektor kompleks, dan semua skalar yang ada di bab ini merupakan **bilangan real.**

FIELD

Diketahui K himpunan sembarang yang tidak kosong $(K \neq \emptyset)$ pada K didefinisikan dua operasi yaitu operasi penjumlahan $(\oplus)$ dan perkalian $(\otimes)$. Unsur K disebut Field jika untuk setiap $a, b, c \in K$, berlaku sifat berikut.

1. Tertutup
2. Mempunyai unsur kesatuan

3. Assosiatif
4. Distributif
5. Invers
6. Komutatif

Sifat-sifat Field diatas akan dijelaskan satu per satu agar mahasiswa memahami lebih baik lagi, sebagai berikut :

1. **Tertutup**

   Tertutup maksudnya adalah tertutup pada operasi penjumlahan $a \oplus b \in K$ dan operasi perkalian $a \oplus b \in K$
2. **Mempunya Unsur Kesatuan**
   a. Pada operasi penjumlahan, terdapat $\exists\, 0 \in K$ sehingga $a \oplus 0 = 0 \oplus a = a$
   b. Pada operasi perkalian, terdapat $\exists\, 1 \in K$ sehingga $a \otimes 1 = 1 \otimes a = a$

3. **Assosiatif**
   a. Assosiatif pada operasi penjumlahan $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
   b. Assosiatif pada operasi perkalian $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$
4. **Distributif**
   a. Distributif perkalian pada penjumlahan $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$
   b. Distributif penjumlahan pada perkalian $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$
5. **Invers**
   a. Invers pada operasi penjumlahan $\exists\, (-a) \in K$ sehingga $a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0$
   b. Invers pada operasi perkalian $\exists\, a^{-1} \in K$ sehingga $a \otimes a^{-1} = a^{-1} \otimes a = 1$
6. **Komutatif**
   a. $a \oplus b = b \oplus a$
   b. $a \otimes b = b \otimes a$

Field K dengan operasi penjumlahan ($\oplus$) dan perkalian ($\otimes$) dinotasikan dengan $\{K, \oplus, \otimes\}$.

Contoh 5.1.1.

a. Diberikan himpunan bilangan bulat sebagai berikut $B = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2\ \ldots\}$. Tentukan apakah $\{B, +, \times\}$ termasuk Field?
b. Diberikan Q adalah himpunan bilangan Rasional
   Tentukan apakah $\{Q, +, \times\}$ merupakan suatu Field?

Penyelesaian :

a. Untuk menunjukkan bahwa himpunan bilangan bulat dengan operasi penjumlahan dan operasi perkalian termasuk Field atau bukan, maka Anda harus mencoba sifat-sifat Field.
   - Misalnya Anda ambil beberapa bilangan bulat -1, 0, dan 1, Kita ujiakan sifat 1 yaitu tertutup, sifat ini memenuhi himpunan bilangan bulat.
   - Pengujian sifat kedua yaitu mempunyai unsur kesatuan, sifat ini juga memenuhi
   - Pengujian sifat ketiga yaitu assosiatif, apabila kita mencoba a=-1, b=1, dan c=0, maka memenuhi sifat
   - Pengujian sifat ke-empat yaitu distributif, dengan pengambilan sample a=-1, b=1, dan c=0, maka **tidak memenuhi** (silahkan di cek sebagai latihan)

   Dengan demikian, Anda dapat menyimpulkan bahwa $\{B, +, \times\}$ bukan suatu Field

b. Himpunan bilangan bulan (Q) dengan operasi penjumlahan dan pengurangan $\{Q, +, \times\}$ merupakan Field. (bukti bisa Anda kerjakan sebagai latihan).

RUANG VEKTOR

Pandang suatu Field K dan V himpunan sembarang yang tidak kosong ($V \neq \emptyset$). Pada V didefinisikan operasi penjumlahan ($+$) pada elemen V dan operasi perkalian skalar ($\cdot$) elemen K terhadap elemen V.

V disebut ruang vektor atas Field K, jika untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ dan setiap $a, b \in K$**,** berlaku sifat yang sama seperti pada sifat Field yaitu :

1. Tertutup
2. Komutatif
3. Assosiatif
4. Mempunyai unsur kesatuan
5. Mempunyai unsur invers
6. Distributif

Sifat diatas, akan dijelaskan dan dijabarkan satu-persatu yaitu

1. **Tertutup**
   Tertutup pada operasi penjumlahan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$
2. **Komutatif**
   Komutatif juga pada operasi penjumlahan $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$
3. **Assosoatif**
   Assosiatif pada operasi penjumlahan $\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$
4. **Mempunyai unsur kesatuan**
   Mempunyai unsur kesatuan pada operasi penjumlahan $\exists\ 0 \in V$ sehingga $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$
5. **Mempunyai unsur invers**
   Invers pada operasi penjumlahan $\exists\ (-\boldsymbol{u}) \in V$ sehingga $\boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = (-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$
6. **Distributif**
   a. Distributif perkalian skalar pada penjumlahan vektor $a(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = a\boldsymbol{u} + a\boldsymbol{v}$

b. Distributif perkalian vektor terhadap penjumlahan skalar
$(a+b)\boldsymbol{u} = a\boldsymbol{u} + b\boldsymbol{u}$

7. Assosiatif perkalian skalar pada vektor
$(ab)\boldsymbol{u} = a(b\boldsymbol{u})$

Contoh 5.1.2.

a. Ruang vektor dimensi 1 (R^2), ruang vektor dimensi 2 (R^2), ruang vektor dimensi 3 (R^3),..., ruang vektor dimensi n (R^n)
b. Himpunan polinomial, misalnya $P_n = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots + a_n t^n$

5.2. Sub Ruang

Definisi :

Suatu himpunan bagian W dari suatu ruang vektor V disebut suatu **sub-ruang** dari V jika W sendiri adalah suatu ruang vektor dibawah penjumlahan dan perkalian skalar yang didefinisikan pada V.

Teorema

Jika W adalah suatu himpunan satu atau lebih vektor dari suatu ruang vektor V, maka W adalah suatu sub-ruang dari V jika dan hanya jika syarat-syarat berikut ini terpenuhi.

a. Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor dalam $\boldsymbol{W}$**,** maka $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ ada dalam $\boldsymbol{W}$
b. Jika k adalah sebarang skalar dan $\boldsymbol{u}$ adalah sebarang vektor dalam $\boldsymbol{W}$ maka $k\boldsymbol{u}$ ada dalam $\boldsymbol{W}$**.**

Contoh 5.2.1.

Misalkan V adalah ruang vektor dimensi tiga (R^3) dan $W = \{(a,b,c)|a,b,c$ adalah bilangan nyata$\}$. Selidiki himpunan berikut apakah subspace dari R^3.

a. $W = \{(a,b,c)|a = 2b\}$

b. $W = \{(a, b, c)|a = b + c\}$
c. $\{(a, b, c)|a, b, c$ bilangan bulat$\}$
d. $W = \{(a, b, c)|a = c^2\}$

Penyelesaian :

a. $W = \{(a, b, c)|a = 2b\}$
   - $W \neq \emptyset$, dengan mengambil $a = b = c = 0$ berlaku $0 = 2.0$, maka $(0,0,0) \in W$
   - Ambil $\boldsymbol{u} = (a_1, b_1, c_1)$ dan $\boldsymbol{v} = (a_2, b_{\boldsymbol{2},} c_{\boldsymbol{2}}) \in \boldsymbol{W}$ maka $a_1 = 2b_1$ dan $a_2 = 2b_2$
     $a_1 + a_2 = 2b_1 + 2b_2 = 2(b_1 + b_2)$, maka $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{V}\ \forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$
   - Untuk $\boldsymbol{u} = (a, b, c) \in \boldsymbol{W}$ berlaku $a = 2b$, maka $k\boldsymbol{u} = k(a, b, c) = (ka, kb, kc)$
     $ka = k(2b) = 2kb$, maka $k\boldsymbol{u}\ \in \boldsymbol{V}, \forall\ \boldsymbol{u}, k, \in K, \forall\ \boldsymbol{u}\ \in \boldsymbol{V}$

b. $W = \{(a, b, c)|a = b + c\}$
   - $W \neq \emptyset$, dengan mengambil $a = b = c = 0$ berlaku $0 = 0 + 0$, maka $(0,0,0) \in W$
   - Ambil $\boldsymbol{u} = (a_1, b_1, c_1)$ dan $\boldsymbol{v} = (a_2, b_{\boldsymbol{2},} c_{\boldsymbol{2}}) \in \boldsymbol{W}$ maka $a_1 = b_1 + c_1$ dan $a_2 = b_2 + c_2$
     $a_1 + a_2 = (b_1 + c_1) + (b_2 + c_2) = (b_1 + b_2) + (c_1 + c_2)$, maka $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{V}\ \forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$
   - Untuk $\boldsymbol{u} = (a, b, c) \in \boldsymbol{W}$ berlaku $a = b + c$, maka $k\boldsymbol{u} = k(a, b, c) = (ka, kb, kc)$
     $ka = k(b + c) = kb + kc$, maka $k\boldsymbol{u}\ \in \boldsymbol{V}, \forall\ \boldsymbol{u}, k, \in K, \forall\ \boldsymbol{u}\ \in \boldsymbol{V}$
     Maka $W = \{(a, b, c)|a = 2b\}$ adalah ruang vektor bagian dari R^3.

c. $(a, b, c)|a, b, c$ bilangan bulat$\}$
   - $W \neq \emptyset$, dengan mengambil $a = b = c = 0$ berlaku $0 = 0 + 0$, maka $(0,0,0) \in W$
   - Ambil $\boldsymbol{u} = (a_1, b_1, c_1)$ dan $\boldsymbol{v} = (a_2, b_{\boldsymbol{2},} c_{\boldsymbol{2}}) \in \boldsymbol{W}$ maka

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=(a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2)$maka $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{V}\ \forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{W}$
$a_1+a_2=(b_1+c_1)+(b_2+c_2)=(b_1+b_2)+(c_1+c_2)$ maka $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) \in \boldsymbol{V}, \forall\ \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \in \boldsymbol{W}$

- Untuk $\boldsymbol{u}=(a,b,c) \in \boldsymbol{W}$ berlaku $a=b+c$, maka $k\boldsymbol{u}=k(a,b,c)=(ka,kb,kc)$

d. $W=\{(a,b,c)|a=c^2\}$

- $W \neq \emptyset$, dengan mengambil $a=c=0$ berlaku $0=0^2$, maka $(0,0,0) \in W$
- Ambil $\boldsymbol{u}=(a_1,b_1,c_1)$ dan $\boldsymbol{v}=(a_2,b_{\boldsymbol{2},}c_{\boldsymbol{2}}) \in \boldsymbol{W}$ maka
$a_1={c_1}^2$ dan $a_2={c_2}^2$
$a_1+a_2={c_1}^2+{c_2}^2 \neq (c_1+c_2)^2$
- Dengan demikian $W=\{(a,b,c)|a=c^2\}$ bukan ruang vektor bagian dari R^3.

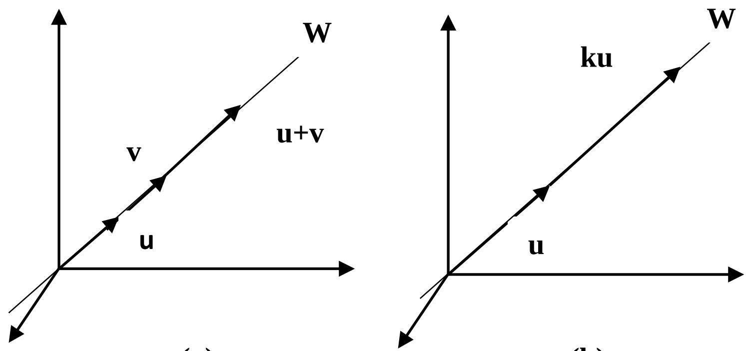
Contoh 5.2.1.

Tunjukkan bahwa garis yang melalui titik asal R^3 merupakan suatu sub-ruang dari R^3

Penyelesaian :

Untuk menyelesaikan soal diatas, Anda dapat menggunakan asumsi dalam bentuk gambar Geometri, yang ditunjukkan dalam Gambar 15 sebagai bentuk sifat tertutup.

Anggap W merupakan garis yang melalui titik asal R^3. Akan ditunjukkan pada gambar berikut bahwa jumlah dua vektor pada garis ini juga terletak pada garis tersebut dan bahwa perkalin skalar dari suatu vektor pada garis ini juga terletak pada garis tersebut. Dengan demikian, W tertutup terhadap penjumlahan dan perkalian skalar, sehingga W adalah sub-ruang dari R^3.



(a) Tertutup terhadap penjumlahan

(b) Tertutup terhadap perkalian skalar

Gambar 15

KOMBINASI LINIER

Definisi

Suatu vektor $\boldsymbol{w}$ disebut suatu **kombinasi linier** dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_r}$ jika dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{v_r}$$

Dengan $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r$ adalah skalar.

Teorema

Jika kumpulan vektor-vektor $\{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \boldsymbol{u}_3, \dots, \boldsymbol{u_n}\}$ adalah kumpulan vektor-vektor yang bergantungan linier, maka paling sedikit satu vektor dari kumpulan vektor tersebut dapat ditulis sebagai kombinasi linier dari yang lainnya.

Misalkan, untuk setiap vektor $\boldsymbol{v} = (a, b, c)$ dalam R^3 bisa dinyatakan sebagai suatu kombinasi linier dari vektor-vektor basis standart, dengan

$$\boldsymbol{i} = (1,0,0) \qquad \boldsymbol{j} = (0,1,0) \quad \boldsymbol{k} = (0,0,1)$$

Karena

$$\boldsymbol{v} = (a, b, c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

Contoh 5.2.2.

Tinjau vektor $\boldsymbol{u} = (1,2,-1)$ **dan** $\boldsymbol{v} = (6,4,2)$ dalam R^3. Tunjukkan bahwa $\boldsymbol{w} = (9,2,7)$ adalah kombinasi linier dari **u** dan **v** dan bahawa $\boldsymbol{w}' = (4,-1,8)$ bukanlah kombinasi linier dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$.

Penyelesaian :

Agar $\boldsymbol{w}$ menjadi suatu kombinasi linear dari $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$**,** haruslah ada skalar k_1 dan k_2 sedemikian sehingga $\boldsymbol{w} = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$**;** yaitu

$$(9,2,7) = k_1(1,2,-1) + k_2(6,4,2)$$

Atau

$$(9,2,7) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang berpadanan kita akan mendapatkan

$$k_1 + 6k_2 = 9$$

$$2k_1 + 4k_2 = 2$$

$$k_1 + 2k_2 = 7$$

Menyelesaiakan sistem ini akan menghasilkan $k_1 = -3, k_2 = 2$ sehingga

$$\boldsymbol{w} = -3\boldsymbol{u} + 2\boldsymbol{v}$$

Sama halnya juga dengan $\boldsymbol{w}'$ menjadi suatu kombinasi linier dengan penambahan skalar k_1 dan k_2 sedemikian sehingga $\boldsymbol{w}' = k_1\boldsymbol{u} + k_2\boldsymbol{v}$**;** yaitu

$$(4, -1,8) = k_1(1,2, -1) + k_2(6,4,2)$$

Atau

$$(4, -1,8) = (k_1 + 6k_2, 2k_1 + 4k_2, -k_1 + 2k_2)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang berpadanan, kita akan mendapatkan

$$k_1 + 6k_2 = 4$$

$$2k_1 + 4k_2 = -1$$

$$-k_1 + 2k_2 = 8$$

Sistem persamaan ini tidak konsisten (coba dibuktikan sebagai latihan), sehingga tidak ada skalar k_1 dan k_2 yang memenuhinya. Akibatnya $\boldsymbol{w}'$ bukanlah suatu kombinasi linier dari **u** dan **v.**

RENTANG

Teorema

Jika $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ adalah vektor-vektor dalam suatu ruang vektor V, maka

a. Himpunan W semua kombinasi linier dari $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ merupakan suatu sub ruang dari V
b. W adalah sub-ruang terkecil dari V yang berisi $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ yang artinya bahwa setiap sub-ruang lain dari V yang berisi $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_r}$ pasti mengandung W.

Contoh 5.2.3.

Tentukan apakah $v_1 = (1,1,2), v_2 = (1,0,1)$, dan $v_3 = (2,1,3)$ merentangkan ruang vektor R^3.

Penyelesaian :

Langkah pertama, Anda harus membentuk suatu fungsi sebagai suatu kombinasi linier, yaitu kita tentuka suatu vektor sembarang $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dalam R^3 bisa dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear

$$\boldsymbol{b} = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v}_3$$

Dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2},$ dan $\boldsymbol{v}_3$. Dengan menyatakan persamaan ini dalam bentuk komponen-komponen akan didapatkan

$$(b_1, b_2, b_3) = k_1(1,1,2) + k_2(1,0,1) + k_3(2,1,3)$$

Atau

$$(b_1, b_2, b_3) = (k_1 + k_2 + 2k_3, k_1 + k_3, 2k_1 + k_2 + 3k_3)$$

Atau

$$k_1 + k_2 + 2k_3 = b_1$$

$$k_1 \qquad + k_3 = b_2$$

$$2k_1 + k_2 + 3k_3 = b_3$$

Kemudian, ditentukan apakah sistem konsisten untuk semua nilai b_1, b_2, dan b_3, jika dan hanya jika matriks koefisien

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Dapat dibalik. Tetapi $\det(A) = 0$, sehingga A tidak bisa dibalik, akibatnya $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}$, dan $\boldsymbol{v_3}$ **tidak merentangkan** di R^3.

Teorema

Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}\}$ dan $S' = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w}_k\}$ adalah dua himpunan vektor dalam suatu ruang vektor V, maka

$$rent\{\boldsymbol{v}_1, v_2, \dots, v_2\} = rent\ \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w}_2, \dots, \boldsymbol{w}_k\}$$

Jika dan hanya jika setiap vektor dalam S adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor dalam S', dan sebaliknya setiap vektor dalam S' adalah suatu kombinasi linear dari vektor-vektor dalam S.

5.3. Kebebasan Linier

Definisi Kebebasan linier. Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, maka persamaan vektor

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{v_r}$$

Mempunyai paling tidak satu penyelesaian, yaitu

$$k_1 = 0,\ \ k_2 = 0, \dots, k_r = 0$$

Jika ini adalah satu-satunya penyelesaian, maka S disebut suatu himpunan yang **bebas secara liniar.** Jika ada penyelesaian-penyelesaian lain, maka S disebut himpunan yang **tak bebas secara linear.**

Contoh 5.3.1.

Jika $\boldsymbol{v_1} = (2,-1,0,3), \boldsymbol{v_2} = (1,2,5,-1)$ dan $v_3 = (7,-1,5,8)$, maka himpunan vektor-vektor $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ tak bebas secara linier, karena $3\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v_2} - \boldsymbol{v_3} = 0$

Contoh 5.3.2.

Tentukan apakah vektor-vektor

$$\boldsymbol{v_1} = (1,-2,3), \qquad \boldsymbol{v_2} = (5,6,-1), \quad \boldsymbol{v_3} = (3,2,1)$$

Membentuk suatu himpunan yang tak bebas secara linear atau himpunan yang bebas secara linear.

Penyelesaian :

Anda dapat membentuk menjadi suatu kombinasi linear suatu persamaan vektor yaitu

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + k_3\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{0}$$

Menjadi

$$k_1(1,-2,3) + k_2(5,6,-1) + k_3(3,2,1) = (0,0,0)$$

Atau ekuivalen dengan

$$(k_1 + 5k_2 + 3k_3, -2k_1 + 6k_2 + 2k_3, 3k_1 - k_2 + k_3) = (0,0,0)$$

Dengan menyamakan komponen-komponen yang berpadanan kita akan mendapatkan

$$k_1 + 5k_2 + 3k_3 = 0$$

$$2k_1 + 6k_2 + 2k_3 = 0$$

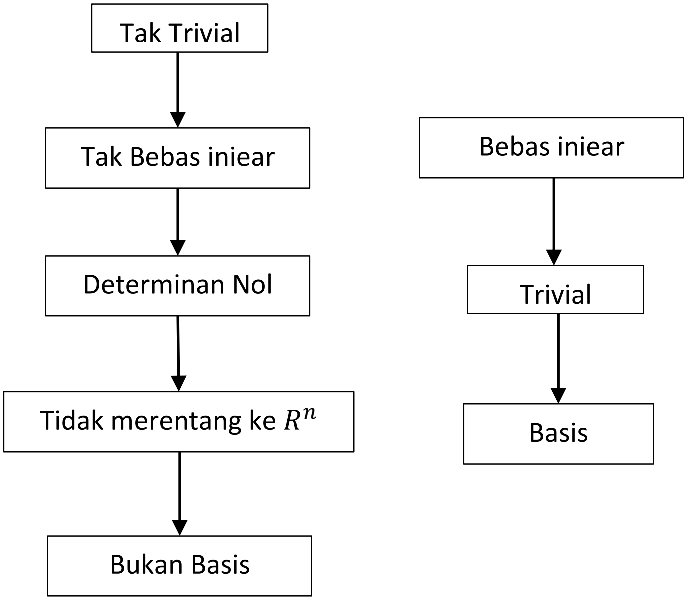
$$3k_1 - k_2 + k_3 = 0$$

Jadi $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,$ dan $\boldsymbol{v}_3$ membentuk suatu himpunan yang tak bebas secara linear jika sistem ini mempunyai persamaan yang tak trivial, atau suatu himpunan yang bebas secara linear jika sistem mempunyai penyelesaian trivial. Dengan menyelesaikan persamaan ini dengan menggunakan Operasi Baris Elementer, didapatkan

$$k_1 = -\frac{1}{2}t, \qquad k_2 = -\frac{1}{2}t, \qquad k_3 = t$$

Sehingga mempunyai penyelesaian **tak-trivial** dan $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2,$ dan $\boldsymbol{v}_3$ membentuk suatu himpunan yang tak-bebas secara linear. Atau kalian dapat menunjukkan keberadaan penyelesaian tak-trivial tanpa menyelesaikan sistemnya dengan menunjukkan bahwa matriks koefisiennya mempunyai determinan nol dan akibatnya tidak dapat dibalik (dapat dikerjakan sebagai latihan).

Untuk mempermudah Anda dalam mengingat, maka perhatikan bagan berikut :



Gambar 16. Bagan Alur komponen persamaan vektor dan matriks koefisien

Suatu himpunan S dengan dua atau lebih vektor disebut :

a. Tak bebas secara linear jika dan hanya jika paling tidak salah satu vektor dalam S dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lainnya dalam S
b. Bebas secara linear jika dan hanya jika tidak ada vektor dalam S yang dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor lain dalam S.

Contoh 5.3.3.

Pada **Contoh 5.3.1.** yaitu vektor-vektor $\boldsymbol{v}_1 = (2, -1, 0, 3)$, $\boldsymbol{v_2} = (1, 2, 5, -1)$ dan $\boldsymbol{v}_3 = (7, -1, 5, 8)$ membentuk suatu himpunan yang tak bebas secara linear. Karena merupakan himpunan yang tak bebas secara linear maka dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear dua vektor lainnya. Anggap bahwa

$$\boldsymbol{v}_1 = c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3$$

Sehingga

$$\boldsymbol{v}_1 - c_2\boldsymbol{v}_2 + c_3\boldsymbol{v}_3 = 0$$

Dalam contoh ini, setiap vektor dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear dari dua vektor lainnya karena dari persamaan $\boldsymbol{3v_1 + v_2 - v_3 = 0}$ didapatkan

$$\boldsymbol{v}_1 = -\frac{1}{3}\boldsymbol{v}_2 + \frac{1}{3}\boldsymbol{v}_3$$

$$\boldsymbol{v}_2 = -3\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_3}$$

$$\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{3v_1} + \boldsymbol{v_2}$$

❖ **<u>FEEDBACK UNTUK MAHASISWA :</u>**

Apa yang sebaiknya dilakukan mahasiswa?

Mahasiswa dapat mencoba membuktikan persoalan pembuktian yang telah digunakan sebagai latihan pada contoh-contoh yang diberikan

5.4. Basis

Definisi Basis untuk sebuah ruang vektor yaitu Jika $\boldsymbol{V}$ adalah sebarang ruang vektor $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah merupakan himpunan vektor-vektor dalam $\boldsymbol{V}$, maka S disebut sebagai **basis** untuk $\boldsymbol{V}$ jika dua syarat berikut ini terpenuhi, diantaranya adalah :

1. S bebas secara linier (dibuktikan)
2. S merentangkan V

Dengan kata lain, suatu basis merupakan bagian dari suatu ruang vektor dalam suatu sistem koordinat dalam ruang dimensi 2 dan ruang dimensi 3.

Teorema

Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ adalah suatu basis untuk suatu ruang vektor $\boldsymbol{V}$**,** maka setiap vektor $\boldsymbol{v}$ dalam $\boldsymbol{V}$ bisa dinyatakan dalam bentuk $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$ dalam tepat satu cara.

Pada **Teorema** diatas, untuk membuktikan bahwa S merupakan suatu basis, maka S harus bebas secara linier, yang artinya adalah S dibuktikan dengan kombinasi linier, dan S merentangkan di $\boldsymbol{V}$**.**

Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ suatu basis untuk suatu ruang vektor $\boldsymbol{V}$**,** dan $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$ adalah ekspresi untuk suatu vektor $\boldsymbol{v}$ dalam bentuk basis S, maka skalar $c_1, c_2, \dots, c_n$ disebut **koordniat $\boldsymbol{v}$** relatof terhadap basis S. Sedangkan vektor dengan skalar $c_1, c_2, \dots, c_n$ dalam R^n yang tersusun dari koordinat-koordinat disebut **koordinat vektor $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap $\boldsymbol{S}$,** dan dinyatakan dengan

$$(\boldsymbol{v})_s = (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

Sebagai contoh sederhana yang mudah diingat, kita akan menunjukkan bahwa vektor $\boldsymbol{i} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{j} = (0,1,0)$, $\boldsymbol{k} = (0,0,1)$

dengan $S = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ adalah suatu himpunan yang bebas secara linier dalam R^3. Kita dapat membuat vektor dalam ruang dimensi 3, yaitu kita bentuk terlbih dahulu kombinasi liearnya :

$$\boldsymbol{v} = (a, b, c)$$

$$(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{s}} = (a, b, c)$$

Dengan $(a, b, c) = (\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$**,** maka

$$\boldsymbol{v} = (a, b, c) = a(1,0,0) + b(0,1,0) + c(0,0,1) = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$$

Jadi diketahui bahwa S adalah suatu basis untuk R^3, tentu saja tetap dengan memperhatikan koefisien $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ sebagai suatu vektor.

BASIS STANDAR UNTUK $\boldsymbol{R^n}$

Pada penjelasan sebelumnya, kalian semua telah mempelajari basis pada ruang dimensi dua R^2 dan ruang dimensi 3 R^3. Selanjutnya kalian akan diberikan penjelasan lebih dalam mengenai basis standart pada ruang dimensi n. **Basis Satndart** merupakan basis yang kita dapatkan dengan cara membentuk koordinat vektor $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap S.

Sebagai gambaran, diberikan contoh bahwa $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)$, $\boldsymbol{e_2} = (0,1,0,\ldots,0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0,0,0,\ldots,1)$ merupakan suatu **basis standart untuk $\boldsymbol{R^n}$.** Dari sini, kita deskripsikan bahwa

$$S = \{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e_n}\}$$

Yang merupakan himpunan yang bebas secara linier dalam R^n. Dibuktikan pula bahawa himpunan ini juga merentangkan R^n karena sebarang vektor $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ dalam $\boldsymbol{R^n}$ bisa dituliskan sebagai berikut :

$$\boldsymbol{v} = v_1\boldsymbol{e_1} + v_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + v_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{e_n}$$

Jadi S adalah basis untuk R^n, yang bisa juga disebut dengan **basis standart untuk $\boldsymbol{R^n}$**. Kita dapatkan bahwa $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ relatif terhadap basis standart adalah $v_1, v_2, \dots, v_n$, sehingga dapat ditulis

$$(\boldsymbol{v})_S = (v_1, v_2, \dots, v_n)$$

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{S}}$$

Dengan demikian, kita mengetahui bahwa suatu vektor $\boldsymbol{v}$ dan vektor koordinatnya relatif terhadap basis standart untuk R^n adalah sama.

Contoh 5.4.1.

Tunjukkan bahwa himpunan $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3\}$ merupakan basis untuk R^3, jika diketahui $\boldsymbol{v}_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (2,9,0)$, $v_3 = (3,3,4)$.

Penyelesaian :

1. Langkah pertama adalah menunjukkan bahwa vektor merupakan suatu kombinasi linier, yaitu
   Anggap sebarang vektor $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ dapat dinyatakan sebagai suatu kombinasi linear sebagai berikut :
   $$\boldsymbol{b} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + c_3\boldsymbol{v_3}$$
   dari vektor-vektor yang berada di dalm vektor S
2. Ubah persamaan kedalam komponen-komponen vektor $\boldsymbol{b}$ kedalam vektor S, sebagai berikut :
   $$(b_1, b_2, b_3) = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + c_3\boldsymbol{v_3}$$
   menjadi
   $$(b_1, b_2, b_3) = c_1(1,2,1) + c_2(2,9,0) + c_3(3,3,4)$$
   Atau dapat dijabarkan lagi dengan mengalikan dengan koefisien
   $$(b_1, b_2, b_3) = (c_1 + 2c_2 + 3c_3, 2c_1 + 9c_2 + 3c_3, c_1 + 4c_3)$$

Sehingga dapat dibentuk komponen-komponen yang berpadanan, yaitu

$$\begin{aligned} b_1 &= c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ b_2 &= 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 \\ b_3 &= c_1 + 4c_3 \end{aligned}$$

3. Untuk menunjukkan bahwa S merentang ke R^3, tunjukkan bahwa persamaan nomer 2 mempunyai penyelesaian untuk semua pilihan $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$.
4. Sebelum membuktikan bahwa S Merentang, maka harus ditunjukkan terlebih dahulu bahwa S bebas secara linear, sehingga harus ditunjukkan bahwa

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + c_3\boldsymbol{v_3} = \boldsymbol{0}$$

Dengan demikian sistem pada persamaan nomer 2 menjadi

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 + 3c_3 &= 0 \\ 2c_1 + 9c_2 + 3c_3 &= 0 \\ c_1 + 4c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Hanya mempunyai penyelesaian trivial. (buktikan dengan perhitungan matriks OBE untuk penyelesaiannya)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Cek determinan matriks pada persamaan nomer 4 (Hitunglah!)

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -1$$

Diketahui bahwa determinan matriks tidak bernilai nol, sehingga S merupakan suatu basis untuk R^3. ■

5.5. Dimensi

Secara umum, dimensi merupakan suatu ukuran baik itu berupa panjang, lebar, tinggi, kemiringan, dan sebagainya yang bisa ditujukan dalam garis, benda ruang, maupun benda di alam. Definisi dalam Aljabar Linear yaitu merupakan suatu ruang vektor tak nol V

disebut **berdimensi terhingga** jika V berisi suatu himpunan vektro terhingga $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ yang membentuk suatu basis. Jika tidak ada himpunan yang seperti itu, maka V disebut **berdimensi tak-hingga.**

Teorema

Jika V adalah suatu ruang vektor berdimensi terhingga dan $\{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ adalah sebarang basis, maka

1. Setiap himpunan dengan lebih dari n vektor adalah tak bebas secara linear
2. Tidak ada himpunan dengan vektor yang kurang dari n yang merentangkan V

Contoh 5.5.1.

Tentukan suatu basis dan dimensi pada persamaan pada sistem homogen berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Penyelesaian sitem diatas dengan menggunakan operasi baris elementer , atau terlebih dahulu sistem dibentuk menjadi persamaan linear sebagai berikut :

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$$

$$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$$

$$x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

Dengan OBE sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B3+B2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{2B2+B1} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\sim}{3B4-B2} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 \end{bmatrix} \underset{\sim}{B4-3B3}$$

$$\underset{\sim}{B4-3B3} \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari sistem diatas didapat bahwa

$$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_5 = 0$$

$$3x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0$$

$$3x_4 = 0$$

Diketahui bahwa

$$x_4 = 0, \qquad x_5 = t, \qquad x_3 = -t, \qquad x_2 = s, \qquad x_1 = -s - t$$

Oleh karenanya, vektor-vektor diatas dapat ditulis

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s-t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Yang menunjukkan bahwa vektor-vektor

$$\boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Merentangkan ruang penyelesaian. Karena vektor-vektor ini juga bebas secara linear (tunjukkan dan buktikan), maka $\{v_1, v_2\}$ adalah suatu basis, dan ruang penyelesaian bahwa vektor berdimensi dua R^2.

Teorema

Jika $\boldsymbol{V}$ adalah suatu ruang vektor berdimansi n, dan jika S adalah suatu himpunan dalam V dengan tepat n vektor, maka S adalah suatu basis untuk V jika S merentang V atau S bebas secara linear.

5.6. Ruang Baris, Ruang Kolom, dan Ruang Kosong

Pada bagian ini, kita akan mempelajari mengenai ruang, antara lain ruang baris, ruang kolom, dan ruang kosong. Terlebih dahulu perhatikan matriks berikut ini :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vektor-vektor dalam matriks diatas adalah

$$
\begin{gathered}
r_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}] \\
r_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}] \\
\vdots \\
r_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}]
\end{gathered}
$$

Dalam R^n yang dibentuk dari baris-baris A disebut **vektor-vektor baris dari A** dan vektor-vektor

$$
c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \dots \quad , c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}
$$

Dalam R^n yang dibentuk dari kolom-kolom A disebut **vektor-vektor kolom dari A** dan vektor-vektor.

Definisi.

Jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka sub ruang dari R^n yang terentang oleh vektor-vektor baris dari A disebut **ruang baris** dari A, dan sub-ruang dari R^n yang terentang oleh vektor-vektor kolom disebut **ruang kolom** dari A. Ruang penyelesaian dari sistem persamaan homogen $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, yang merupakan suatu sub-ruang dari R^n, disebut **ruang kosong** dari A.

Suatu persamaan linear $A\boldsymbol{x} = b$ mempunyai hubungan dengan ruang baris, ruang kolom, dan ruang kosong. Perhatikan contoh berikut :

$$
\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}
$$

Dengan menyelesaikan persamaan menjadi penyelesaian Gauss/jordan, menghasilkan

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$

Kita dapatkan bahwa

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix} \blacksquare$$

Pada contoh 5.5.1 diketahui bahawa sistem persamaan

$2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0$

$-x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 0$

$x_1 + x_2 - 2x_3 - x_5 = 0$

$x_3 + x_4 + x_5 = 0$

Menghasilkan nilai

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s - t \\ s \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t \\ 0 \\ t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Merupakan penyelesaian umum dari sistem persamaan homogen.

5.7. Peringkat (RANK)

Pada bab sebelumnya, kita telah mempelajari tentang dimensi yaitu masalah ruang, antara lain ruang baris, ruang kolom, dan ruang kosong.

Teorema

Jika A adalah sebarang matriks, maka ruang baris dan ruang kolom dari A mempunyai dimensi yang sama.

Sedangkan dimensi bersama dari ruang baris dan ruang kolom dari suatu matriks A disebut **peringkat** atau **rank** dari A dan dinyatakan dengan rank (A).

Contoh 5.7.1.

Tentukan rank dari matriks berikut :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Anda dapat menyelesaian dengan menggunakan baris eselon tereduksi (OBE) dari matriks A, menghasilkan :

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{matrix} \frac{1}{3}B2 + B1 \\ \frac{1}{2}B3 + B1 \\ \frac{1}{4}B4 + B1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 4 & \frac{16}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 6 & 8 & -\frac{5}{2} \\ 0 & \frac{-2}{4} & \frac{2}{4} & 3 & 4 & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} \begin{matrix} B2 \times 3 \\ B3 \times 2 \\ B4 \times 4 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 12 & 16 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} B4 - B3 \\ B3 - B2 \end{matrix}$$

Hasil akhir, baris eselon tereduksi

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B1 - 2B2$$

(**note :** perhitungan OBE silahkan Anda lanjutkan sebagai latihan)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan melanjutkan operasi hitung OBE, didapatkan bentuk baris eselon tereduksi dari matriks A sebagai berikut :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari bentuk baris eselon tereduksi diatas, terdapat dua baris yang bernilai tak nol atau disebut juga sebagai dua utama satu, hal ini dikarenakan angka awal dari persamaan bernilai 1, maka ruang abris dan ruang kolom keduanya berdimensi dua, dengan demikian menurut teirema menyatakan bahwa $rank(A) = 2$.

5.8. Kekosongan (NULLITAS)

Kekosongan atau Nullitas berkaitan erat dengan rank, hal ini dikarenakan dimensi dari ruang kosong dari A disebut **kekosongan** daari A dan dinyatakan dengan $kekosongan(A)$ atau $null(A)$.

Contoh 5.8.1.

Berdasarkan persoalan pada contoh 5.7.1, dengan matriks yang sama yaitu

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Dapatkan tingkat kekosongan (nullitas) dari matriks diatas!

Penyelesaian :

Diketahui bahwa penyelesaian bentuk baris eselon tereduksi dari matriks A sebagaimana telah dijabarkan pada contoh 5.7.1. adalah

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & -28 & -37 & 13 \\ 0 & 1 & -2 & -12 & -16 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Untuk mencari kekosongan dari A, Anda harus mencari dimensi ruang penyelesaian dari sistem linear $A\boldsymbol{x} = 0$. Sistem ini bisa diselesaikan dengan mereduksi matriks yang diperbanyak menjadi bentuk baris-eselon tereduksi. Matriks yang dihasilkan akan identik dengan hasil baris eselon tereduksi, kecuali dengan tambahan kolong nol terakhir. Sistem persamaan yang berpadanaan akan menjadi sebagai berikut :

$$x_1 - 4x_3 - 28x_4 - 37x_5 + 13x_6 = 0$$

$$x_2 - 2x_3 - 12x_4 - 16x_5 + 5x_6 = 0$$

Dengan menyelesaikan peubah-peubah utama, akan menjadi

$$x_1 = 4x_3 + 28x_4 + 37x_5 - 13x_6$$

$$x_2 = 2x_3 + 12x_4 + 16x_5 - 5x_6$$

Sehingga, kita dapat menyelesaikan bentuk umum dari persamaan diatas sebagai berikut :

$$x_1 = 4r + 28s + 37t - 13u$$

$$x_2 = 2r + 12s + 16t - 5u$$

$$x_3 = r$$

$$x_4 = s$$

$$x_5 = t$$

$$x_6 = u$$

Atau vektor menjadi

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 28 \\ 12 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 37 \\ 16 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u\begin{bmatrix} -13 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Empat vektor pada ruang kanan membentuk suatu bais untuk ruang penyelesaian, sehingga kekosongan$(A) = 4$. Berikut ini teorema yang sesuai dengan matriks dan transposenya.

Teorema

Jika A adalah suatu matriks dengan n kolom, maka

$$rank(A) + kekosongan(A) = n$$

Contoh 5.8.2.

Matriks

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 4 & 5 & -3 \\ 3 & -7 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & -5 & 2 & 4 & 6 & 1 \\ 4 & -9 & 2 & -4 & -4 & 7 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

Pada matriks A diatas matriks mempunyai 6 kolom, sehingga

$$rank(A) + kekosongan(A) = 6$$

Setelah melakukan baris eselon tereduksi, kita tau bahwa $rank(A) = 2$, sehingga $kekosongan(A) = 4$ ■.

Contoh 5.8.2.

Carilah kekosongan dalam himpunan penyelesaiak dari $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ jika A adalah suatu matriks 5×7 berperingkat 3.

Penyelesaian :

$$kekosongan(A) = n - rank(A) = 7 - 3 = 4$$

Sehingga kekosongannya ada 4.

Nilai maksimum untuk peringkat, jika A adalah suatu matriks $m \times n$, maka vektor-vektor baris terletak pada R^n dan vektor-vektor kolom terletak pada R^m. Hal ini megimplikasikan bahwa ruang baris dari A paling tinggi berdimensi n dan bahwa ruang kolom paling tinggi berdimensi m. Sehingga bisa dituliskan dengan

$$rank(A) \leq \min(m, n)$$

❖ **FEEDBACK UNTUK MAHASISWA :**

Apa yang sebaiknya dilakukan mahasiswa?

Mahasiswa Informatika dapat meneruskan perhitungan OBE pada contoh soal-contoh soal yang hanya dilampirkan hasil akhirnya tanpa cara, sehingga mahasiswa dapat menentukan dimensi, rank, nullitas seuai dengan pemahaman pengerjaan soal yang telah dikerjakan sebagai latihan.

References :

Anton, Howard. 2005. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi Kelima. Interaksa Publishing, Company.

Purcell, J.E., Rigdon, S.E. 2000. *CALCULUS.* 8th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

Dosen-Dosen Jurusan Matematika. 1992. Matematika Dasar 1. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya : ITS Press.

Sibarani, Maslen. 2014. Aljabar Linier. Penerbit RajaGrafindo Persada, Jakarta.

SIMPULAN

---

1. RUANG-RUANG VEKTOR REAL

FIELD

Diketahui K himpunan sembarang yang tidak kosong $(K \neq \emptyset)$ pada K didefinisikan dua operasi yaitu operasi penjumlahan $(\oplus)$ dan perkalian $(\otimes)$. Unsur K disebut Field jika untuk setiap $a, b, c \in K$, berlaku sifat berikut.

1) Tertutup
2) Mempunyai unsur kesatuan
3) Assosiatif
4) Distributif
5) Invers
6) Komutatif

RUANG VEKTOR

V disebut ruang vektor atas Field K, jika untuk setiap $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ dan setiap $a, b \in K$**,** berlaku sifat yang sama seperti pada sifat Field.

2. SUB RUANG

a. Jika $\boldsymbol{u}$ dan $\boldsymbol{v}$ adalah vektor-vektor dalam $\boldsymbol{W}$**,** maka $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ ada dalam $\boldsymbol{W}$

b. Jika k adalah sebarang skalar dan $\boldsymbol{u}$ adalah sebarang vektor dalam $\boldsymbol{W}$ maka $k\boldsymbol{u}$ ada dalam $\boldsymbol{W}$**.**

- **KOMBINASI LINIER**

Definisi

Suatu vektor $\boldsymbol{w}$ disebut suatu **kombinasi linier** dari vektor-vektor $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_r}$ jika dinyatakan dalam bentuk

$$w = k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{v_r}$$

Dengan $k_1, k_2, k_3, \dots, k_r$ adalah skalar.

- **KEBEBASAN LINIER**

Definisi Kebebasan linier. Jika $S = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_r}\}$ adalah suatu himpunan vektor-vektor tak kosong, maka persamaan vektor

$$k_1\boldsymbol{v_1} + k_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + k_r\boldsymbol{v_r}$$

yang **tak bebas secara linear.**

$$r_1 = [a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}]$$

$$r_2 = [a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n}]$$

$$\vdots$$

$$r_m = [a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn}]$$

Dalam R^n yang dibentuk dari baris-baris A disebut **vektor-vektor baris dari $\boldsymbol{A}$** dan vektor-vektor

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \qquad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \qquad \dots \qquad , c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dalam R^n yang dibentuk dari kolom-kolom A disebut **vektor-vektor kolom dari A** dan vektor-v.

Assesment Penilaian Mahasiswa

No	CPMK	BAB	Bobot	Skor				Nilai
				1	2	3	4	
1	Mahasiswa mampu membandingkan ruang-ruang vektor real	Ruang Vektor Umum						
2	Mahasiswa mampu mengidentifikasi ruang, sub ruang, bebas linear, basis dan dimensi dalam ruang-ruang vektor umum	Ruang Vektor Umum						

5.9. LATIHAN SOAL

1. Nyatakan soal berikut ini sebagai suatu kombinasi linear dari $\boldsymbol{u} = (2,1,4)$, $\boldsymbol{v} = (1,-1,3)$, dan $\boldsymbol{w} = (3,2,5)$
   (a) $(-9,-7,-15)$ (b) $(6,11,6)$ (c) $(0,0,0)$

2. Carilah suatu persamaan untuk bidang yang terentang oleh vektor $\boldsymbol{u} = (-1,1,1)$ dan $\boldsymbol{v} = (3,4,4)$!

3. Manakah dari himpunan vektor-vektor dalam R^3 yang tak bebas secara linear?
   (a) $(4,-1,2), (-4,10,2)$
   (b) $(8,-1,3), (4,0,1)$
   (c) $(-3,0,4), (5,-1,2), (1,1,3)$

4. Manakah dari himpunan vektor berikut ini yang merupakan basis untuk R^2?
   (a) $(4,1),\ \ (-7,-8)$
   (b) $(0,0),\ \ (1,3)$
   (c) $(3,9),\ \ (-4,-12)$

5. Carilah koordinat vektor $\boldsymbol{v}$ relatif terhadap basis $S = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v_3}\}$!
   (a) $\boldsymbol{v} = (2,-1,3),\ \boldsymbol{v}_1 = (1,0,0),\ \ \boldsymbol{v}_2 = (2,2,0),\ \ \boldsymbol{v}_3 = (3,3,3)$
   (b) $\boldsymbol{v} = (5,12,3),\ \ \boldsymbol{v_1} = (1,2,3),\ \ \boldsymbol{v_2} = (-4,5,6),\ \boldsymbol{v_3} = (7,-8,9)$

6. Tentukan dimensi dan suatu basis untuk ruang penyelesaian sistem yang diberikan :
   (a) $3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$
   $5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0$
   (b) $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$
   $x_1 + 5x_3 = 0$
   $x_2 + x_3 = 0$

7. Nyatakan hasil kali $A\boldsymbol{x}$ sebagai suatu kombinasi linear dari vektor-vektor kolom dari A

(a) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -3 & 6 & 2 \\ 5 & -4 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$

8. Carilah bentuk dari penyelesaian umum dari sistem linear $A\boldsymbol{x} = b$ yang diberikan, selanjutnya gunakan hasilnya untuk mencari bentuk vektor dari penyelesaian umum dari $A\boldsymbol{x} = 0$!

(a) $x_1 - 3x_2 = 1$
$2x_1 - 6x_2 = 2$

(b) $x_1 + x_2 + 2x_3 = 5$
$x_1 + x_3 = -2$
$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3$

9. Carilah suatu basis untuk ruang kosong dari A!

(a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

(b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

10. Carilah suatu dimensi dan rank untuk ruang kosong dari A!

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. 2005. *Aljabar Linear Elementer.* Edisi Kelima. Interaksa Publishing, Company.

Anton, Howard. 2000. *Elementary Linear Algebra.* Edisi 7 Jilid 1. Interaksa Publishing, Company.

Anton, Howard. 1999. *CALCULUS, A New Horizon*. 6th edition. John Wiley & Sons, Inc. New York.

Anton, Rorres. 2000. *Aljabar Linear Elementer Versi Aplikasi*. Edisi Kedelapan Jilid 1. Interaksa Publishing, Company.

Dosen-Dosen Jurusan Matematika. 1992. Matematika Dasar 1. Jurusan Matematika FMIPA ITS. Surabaya : ITS Press.

Emilia, Sri Wahyuni dan Yenni Susanti. 2015. *Dasar-Dasar Aljabar Linear dan Penggunaannya dalam Berbagai Bidang*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press .

Epperson, James F. 2013. An Introduction to Numerical Methods and Analysis Secon Edition. John Wilety & Sons, Inc. Canada

Hasanah, Istnaini. 2013. *Jurnal Perkuliahan Aljabar Linier Elementer*. Semarang : Universitas Negeri Semarang. https://www.academia.edu/9762760/JURNAL_PERKULIAHAN_ALJABAR_LINEAR_ELEMENTER

Imrona, Mahmud. 2013. *Aljabar Linear Dasar*. Edisi 2. Surabaya. Penerbit : Erlangga.

Irwan, Muh. 2017. *Pengantar MATLAB Untuk Sistem Persamaan Linear*. Jurnal MSA Vol. 5 No. 2 Ed. Juli-Desember 2017.

http://journal.uin-alauddin.ac.id/index.php/msa/article/download/4509/4120.

Leon, Steven J. 2001. *Aljabar Linear dan Aplikasinya.Edisi 5*. Penerbit : Erlangga

Purnama, Dian. 1979. *Aljabar Linier dan Kalkulus Vektor*. Bab : Sistem Persamaan Linier dapat diunduh di website https://www.academia.edu/11669872/aljabar_linier_dan_kalkulus_vektor?auto=download.

Purnomo, Sidiq. 2002. *Buku Ajar Aljabar Linear. Sekolah Tinggi Teknologi Telkom, Bandung.* http://sidiq.mercubuana-yogya.ac.id/ebook-aljabar-linear/# . diakses tanggal 18 Januari 2020.

Purcell, J.E., Rigdon, S.E. 2000. *CALCULUS.* 8th edition, Prentice-Hall, New Jersey.

Sianipar, S.H. 2007. *MATLAB Untuk Aljabar Linier dan Matriks*. Penerbit: Andi.

Sibarani, Maslen. 2014. Aljabar Linier. Penerbit RajaGrafindo Persada, Jakarta.

Sutojo, dan Bowo. 2010. *Teori Dan Aplikasi Aljabar Linier Dan Matriks*. Penerbit : Andi Publisher

BIODATA PENULIS

Nuril Lutvi Azizah, S.Si., M.Si. dilahirkan di Lumajang, 29 April 1989. Pada tahun 2011, penulis mendapatkan gelar Sarjana Sains Matematika dari Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya dengan predikat *cumlaude*. Penulis melanjutkan studi S2 pada tahun yang sama yaitu tahun 2011 di Program Pascasarjana Matematika melalui beasiswa *Freshgraduate* dari Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Tahun 2013, penulis secara resmi mendapatkan gelar M.Si. Penulis mengawali karirnya sebagai Dosen tetap pada tahun 2015 di fakultas Teknik prodi Informatika Universitas Muhammadiyah Sidoarjo. Selain pendidikan dan pengajaran, penulis juga terlibat dalam penelitian dan pengabdian kepada masyarakat.

Novia Ariyanti, S.Si., M.Pd. lahir di Surabaya, 10 Nopember 1983. Lulus Sarjana Matematika Universitas Negeri Surabaya tahun 2007 dengan gelar S.Si. Penulis melanjutkan studi S2 di Prodi Pendidikan Matematika Program Pascasarjana Universitas Negeri Surabaya lulus dengan gelar M.Pd. Karir pendidikan dan pengajaran dimulai tahun 2015 di fakultas Teknik Prodi Informatika Universitas Muhammadiyah Sidoarjo. Selain pengajaran, penulis juga ikut berperan serta dalam kegiatan penelitian dan pengabdian. Penulis juga aktif dalam mengikuti kegiatan-kegiatan penunjang akademik seperti pelatihan dan pengabdian, dan kegiatan akademik lainnya.