15 / 11 / 62

Definition

- ขอบเขตบน → upper bound , ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound)
- ขอบเขตล่าง → lower bound , ขอบเขตล่าง มากสุด (great lower bound)

- ลำดับเพิ่ม ลำดับไม่ลด monotonic
- ลำดับลด ลำดับไม่เพิ่ม

Ex 4

a) 1 ,2 ,3 ...... n ...

เป็นจำนวน

- no upper bound
- ขอบเขตล่างมากสุด = 1

b) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots \frac{n}{n+1}$

- ขอบเขตล่างมากสุด $= \frac{1}{2}$

- upper bound = 1

c) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots$

- ขอบเขตบนน้อยสุด
- lower bound

Monotone Sequences (ลำดับทางเดียว)

คือ ลำดับที่พจน์ ในลำดับ มีค่า เพิ่มขึ้น หรือ ลด อย่างใดอย่างหนึ่ง เท่านั้น

1 ลำดับเพิ่ม (Increasing Sequenec) → $a_n < a_{n+1}$

$a_1 < a_2$

Ex $1, 2, 3, 4, \ldots$

2 ลำดับไม่ลด (Non - decreasing Sequenec) → $a_n \leq a_{n+1}$

Ex $1, 2, 2$

3 ลำดับลด (Decreasing Sqeme) → $a_n > a_{n+1}$

Ex $100, 99, 98$

4 ลำดับไม่เพิ่ม (Non-increasing Sequence) → $a_n \geq a_{n+1}$

Ex 100, 100, 99, 99

1, 2, 3, 3, 2, 1 → ไม่เป็นลำดับทางเดียว แต่ยังเป็นลำดับอยู่

* * สำหรับ Diff ไม่ใช่ !

วิธีทดสอบ 1) การทดสอบผลต่าง * 2) f' 3) $\frac{a_{n+1}}{a_n}$

	$a_{n+1} - a_n$	ความชัน	$\frac{a_{n+1}}{a_n}$
ลำดับเพิ่ม	> 0	> 0	> 1
ลำดับเพิ่มแบบไม่ลด	≥ 0	≥ 0	≥ 1
ลำดับเพิ่มแบบลด	< 0	< 0	< 1
ลำดับ~~เพิ่มแบบ~~ไม่เพิ่ม	≤ 0	≤ 0	≤ 1

Ex จงทดสอบว่าลำดับ $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ เป็นลำดับทางเดียวหรือไม่, และเป็นลำดับประเภทใด

วิธีทำ $a_n = \frac{n}{n+1}$ → เป็นลำดับทางเดียว

1) เลือกทดสอบ แบบ $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(n+1)-n}{(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

x	$f(x)$
1	$\frac{1}{2^2}$
2	$\frac{1}{3^2}$
3	$\frac{1}{4^2}$

> 0

$\therefore \left(\frac{n}{n+1}\right)$ เป็น ลำดับทางเดียว และเป็นลำดับเพิ่ม

ทดสอบ ลำดับ $\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับทางเดียว หรือประเภทใด

3

1.) เลือกแบบอัตราส่วน

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}/(n+1)!}{2^n/n!} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^n}$$

จัดรูป แฟกทอเรียล

$$= 2 \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{n!}(n+1)}$$

$$= \frac{2}{n+1}$$

check แบบอัตราส่วน

n	a_{n+1}/a_n
*1	$2/2$
2	$2/3$
3	$2/4$

≤ 1

$\therefore \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ ลำดับไม่เพิ่ม *

วิธี ① จะไม่เจอ เท่ากับ

2.) $\left\{ \frac{n!}{3^n} \right\}$

$$a_n = \frac{n!}{3^n}$$

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)!}{3^{n+1}}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!/3^{n+1}}{n!/3^n}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{!}}{\cancel{3^{n+1}}\,3} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{n!}}$$

$$= \frac{n+1}{3}$$

Check

n	a_{n+1}/a_n	
1	$2/3$	< 1
2	$3/3 = 1$	$= 1$
3	$4/3 = 1 \ldots$	> 1

$\therefore \left\{ \frac{n!}{3^n} \right\}$ ไม่เป็นลำดับทางเดียว #

10.2 Infinite Series.

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

* Final Exam.

Geometric Series (อนุกรมเรขาคณิต) (จะถามว่า Con/di และถ้า Con จะได้ค่าใด)

$$a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

ex.) 1.) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $r = \frac{1}{2}$, $a_1 = 1$

** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = \frac{a_1}{1-r} , \; {}^{*}|r| < 1} = \sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ (convergen)

$|r| < 1$ convergen

$|r| > 1$ divergen

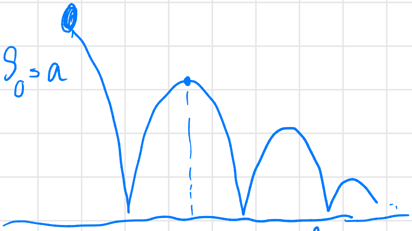
2.) $\sum_{n=0}^{\infty} 5\left(\frac{-1}{4}\right)^n$; $a_1 = 5$

$$\sum = \frac{a_1}{1-r} = \frac{5}{-1/4} = -20$$ #

3.)

$a_1 = 6$ m

$r = 2/3$



$S_1 = ar + ar$

$\uparrow \quad \downarrow$

$S = 2ar$

$2ar^2$

$$S = a + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \dots}_{\Sigma = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2ar}{1-r}} = a + \frac{2ar}{1-r}$$

$$= \frac{a(1+r)}{(1-r)}$$

4.) $5.2323\ldots$ เขียนเป็นเศษส่วน

$$= 5 + \left(\frac{23}{100^n}\right)$$

$$= 5 + \frac{23}{100}\left[1 + \frac{1}{100^1} + \dots\right]$$

$$S_n = 23\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right) = \frac{23}{100}\left(\frac{1}{99/100}\right) = \frac{23}{100}\left(\frac{100}{99}\right) = \frac{23}{99}$$

$$= 5 + \frac{23}{99} = \frac{518}{99} \text{ ✱}$$

5.) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n+1}$$

$$= \left(1 + \cancel{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots}\right) - \cancel{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots\right)}$$

$$= 1$$

✱

The n-term test for a divergent series

b.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = \dots + \frac{n+1}{n} + \dots$

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$a_n = S_n - S_{n+1} \rightarrow S - S = 0$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergent if } \lim_{n\to\infty} a_n \text{ fail to exist (หาค่าไม่ได้) or ไม่ใช่ } 0}$$

ex.) 1.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ (divergent // ไม่ใช่ 0) ※

2.) $1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}_{2 \text{ term}} + \underbrace{\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{4 \text{ term}} \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \dots$

$\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty$ หาค่าไม่ได้ (divergent) ※

3.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1} - 1}{6^{n-1}} = \sum_{n=1} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \right]$

$= \frac{1}{1-1/2} - \frac{1}{1-1/6}$; $|r| < 1$

$= 2 - \frac{6}{5}$

$= 4/5$ ※

Deleting Terms.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}, \quad \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{2^{n-5}}, \quad \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$$

10.3 The Integral Test

Check. The function must be

1.) Positive ($f(x)$)
2.) Continuous ($f(x)$)
3.) decreasing (Frist derivative Test) < 0

Ex.) 1.) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2}$ Con/di (จัดรูปไม่ได้)

Sol^n ขั้นที่ 1 $a_n > 0$ หรือไม่ และ continuous

ขั้นที่ 2 $f'(x) < 0$

$$f(x) = xe^{-x^2}$$
$$f'(x) = x(-2x)e^{-x^2} + e^{-x^2}$$
$$= -2x^2e^{-x^2} + e^{-x^2}$$
$$f'(x) = e^{-x^2}(1-2x^2) < 0 \checkmark$$

ขั้นที่ 3 หาค่า $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ เปลี่ยน $\sum_{n=1}^{\infty} \Rightarrow \int_1^{\infty}$

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^{\infty} \frac{1}{e^u}\,du$$
$$= \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-u}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{2e^b} + \frac{1}{2e}\right) = \frac{1}{2e} \text{ convergent } \divideontimes$$

take lim = 0

2.) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

$\hookrightarrow ar^n$ (≠ รูปนี้)

ข้อที่ 1 $a_n > 0$ และ Continuous ✓

ข้อที่ 2 $f'(x) < 0$

$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

$f'(x) = \frac{(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} < 0$ ✓

ข้อที่ 3 $\int_1^{\infty} \frac{x}{x^2+1} = \lim_{b \to \infty} \int_1^{b} \frac{x}{x^2+1}$ $u = x^2+1$, $\frac{du}{dx} = 2x$

$= \lim \frac{1}{2} \int \frac{1}{u}$

$= \lim \frac{1}{2} (\ln|x^2+1|) \Big|_1^b$

$= \lim_{b \to \infty} \frac{1}{2} \left[\ln|b^2+1| - \ln 2 \right] =$ Convergent ✱

3.) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

ข้อที่ 1 $a_n > 0$ และ Conti— ✓

ข้อที่ 2 $f'(x) < 0$

$f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

$f'(x) = \frac{0 - 1[\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + \ln x]}{(x \ln x)^2} < 0$ ✓

$\int_2^{\infty} \frac{1}{n \ln n} = \lim_{b \to \infty} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}$ $u = \ln x$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$= \lim \int \frac{1}{u} du$

$= \lim_{b \to \infty} \left[\ln|\ln x| \right]_2^b$

$= \lim_{b \to \infty} \left[\ln|\ln b| - \ln|\ln 2| \right]$

$= \infty$ หาค่าไม่ได้ (divergent) ✱

10.4) Comparison test

b_n คือตัวเปรียบเทียบ

อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ได้ ถ้าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ มาเปรียบเทียบ

1. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $a_k \le b_k \longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_k$ ลู่เข้า

2. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ——— ออก ถ้า $a_k \ge b_k \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ลู่ออก

$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ตัวเปรียบเทียบ

- → อนุกรมเรขา $|r|<1$ Convergent.
- → อนุกรม Harmonic $\left[\frac{1}{n}\right.$, ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม → divergent$\left.\right]$
- → อนุกรม p $\frac{1}{x^p}$, x เป็นจำนวนเต็ม $\Longrightarrow p>1$ Convergent.

Ex.) 1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^k+1}$

Sol^n

$a_k = \frac{2}{3^{k+1}}$

$b_k = \frac{2}{3^k}$ $|r|<1$ ลู่เข้า

2. เปรียบเทียบ

$$\frac{2}{3^{k+4}} \le \frac{2}{3^k}$$

$\therefore \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{k+1}}$ ลู่เข้า

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{k+5}\right\}$$

ชี้แจงนั้น

① $a_n > 0$ continuous ✓

② $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$

$f'(x) = \ominus \ldots < 0$

③ $\displaystyle \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x+5}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = \ln|x+5|\Big|_1^b = \ln|b+5| - \ln|6| = \infty$ divergent ※

Comparison test

- $\boxed{\text{Harmonic}}$ $a_k = \dfrac{1}{k+5}$, $b_k = \dfrac{1}{k}$

(divergent อย่างเดียว)

$\dfrac{1}{k+5} \leq \dfrac{1}{k}$, $a_k \geq b_k$,

check ก่อนว่า ตัวเปรียบเทียบ (b_k)
- Con.
- di

false ใช้ Harmonic ไม่ได้ !

ใช้วิธีอื่น

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{1/_{k+5}}{1/_k} = \frac{k}{k+5} = \frac{1}{1+5/_k} = 1$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k+5}$ Convergent. ※

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{2n^2+4} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{n^2+2}\right)$$

$b_k = \dfrac{1}{n^2}$; con.

$a_k = \dfrac{1}{n^2+2}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = 0 = \frac{1/_{n^2+2}}{1/_{n^2}} = \frac{n^2}{n^2+2} = \frac{1}{1+2/_{n^2}} = 1 \quad c>0$$

$\therefore \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}$ convergent.

Comparison test (choice ของการเลือก 1 ใน 3)

① $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, $c>0$; $\sum a_n, \sum b_n$ ลู่เข้าหรือลู่ออก (ต้องเหมือน)

② $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, 0 ; $\sum b_n$ convergent $\sum a_n$ convergent.

$\sum b_n$ divergent $\sum a_n$ สรุปไม่ได้

③ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$, ∞ ; $\sum b_n$ divergent $\sum a_n$ divergent

$\sum b_n$ convergent $\sum a_n$ สรุปไม่ได้

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$

(con.ver.)

$b_k = \frac{2^n}{3^n}$, $a_k = \frac{2^n}{3^n+n}$

(Lopital)

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\cancel{2^n}/3^n+n}{\cancel{2^n}/3^n} = \frac{3^n}{3^n+n} \cdot \frac{\infty}{\infty} \to \frac{3^n \ln 3}{3^n \ln 3 + 1} > 0$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+n}$ convergent.

จริงๆ ทั้งหมด $a_k \le b_k$; Convergent. *

$\frac{2^n}{3^n+n} \le \frac{2^n}{3^n}$

*

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n+2n}{(n+1)\pi^n}$

นน. มากกว่า (เลือกพจน์ที่ส่งผลมากกว่า)

นน. มากกว่า

Comparison. test

$b_k = \frac{e^k}{\pi^k}$, $a_k = \frac{e^k+2k}{(k+1)\pi^k}$

$|r|<1$; (con.)

$a_k \le b_k$ (จริง)

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n+2n}{(n+1)\pi^n}$ Convergent. *

or.

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{e^k+2k/(k+1)\pi^k}{e^k/\pi^k}$

$= \frac{e^k+2k}{(k+1)\cancel{\pi^k}} \cdot \frac{\cancel{\pi^k}}{e^k} = \frac{\infty}{\infty}$

$= \frac{e^k+2}{(k+1)e^k+e^k} = \frac{\infty}{\infty}$

$= \frac{e^k}{(k+1)e^k+e^k+e^k} = \frac{\cancel{e^k}}{\cancel{e^k}(k+1+2)} = 0$ * Convergent *

10.5 Absolute Convergent ; The Ratio and Root Tests.

Theorem 13 (P. 608) $\boxed{\text{Ratio Test}}$ *

สำหรับอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ใดๆ พิจารณาค่าของ

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$$

① ถ้า $\rho<1$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

② ถ้า $\rho>1$ " " divergent.

③ ถ้า $\rho=1$ สรุปไม่ได้

ถ้าเจอ แฟกทอเรียล → บังคับ Ratio Test.

ถ้าเจอ Root → บังคับ Root Test.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$$

① เลือกใช้ทฤษฎีบททดสอบอัตราส่วน

$$a_n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} \quad , \quad a_{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!\,(n+1)!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\cancel{(2n+2)!}}{\underbrace{\cancel{(n+1)!}\,(n+1)!}_{(n+1)^2}} \times \frac{\cancel{n!\,n!}}{\cancel{(2n)!}}$$

$$= \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$= 4 \quad ; \rho>1$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!\,n!}$ divergent

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}+5 \,/\, 3^{n+1}}{2^n+5 \,/\, 3^n} = \frac{2^{n+1}+5}{3\,\cancel{3^{n+1}}}\cdot\frac{\cancel{3^n}}{2^n+5}$$

$$= \frac{1}{3}\boxed{\left|\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5}\right|} \rightarrow \text{diff แล้ว take lim.}$$

$$= 2/3$$

Or.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n} = \sum\left(\frac{2}{3}\right)^n + \sum\frac{5}{3^n}$$

$$= \frac{1}{1-2/3} + \frac{5}{1-1/3}$$

$$= 21/2$$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$ Convergent. because $p<1$

The Root test.

Theorem 13 (P. 608)

Root test *

สำหรับอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ใดๆ พิจารณาค่าของ

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|} = P$$

① ถ้า $p<1$ อนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergent.

② ถ้า $p>1$ " " divergent.

③ ถ้า $p=1$ สรุปไม่ได้

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$$ จุดสังเกตคือ มีกำลัง n

$$\lim \sqrt[n]{|a_n|} = \left(\frac{n^2}{2^n}\right)^{1/n} = \frac{n^{2/n}}{2} = \frac{1}{2} \ast$$

$\infty^0 = 1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ $p<1$ Convergent. ⁂

ใช้ Comparison test. → * กลับไปทวน

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^{n}$$

n → Root test.

$|a_n| = \left|\frac{1}{1+n}\right| = \frac{1}{1+n}$; $n>1$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{1}{1+n}\right)^n\right]^{1/n} = 0$$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+n}\right)^n$ $p<1$ convergent ⁂

10.6 Alternating Series and Conditional Convergent.

(อนุกรมสลับ)

↳ บังคับทดสอบแค่วิธีเดียว

อนุกรมสลับ

ไม่เอามาพิจารณา

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} u_n}_{a_n} = u_1 \to -u_2 \to u_3 \to -u_4 \ldots$$

$+ \quad - \quad + \quad -$

↳ พิจารณา u_n

หรือ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n u_n}_{a_n} = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 + \ldots$$

① u_n เป็นบวกทั้งหมด

② $u_n \geq u_{n+1}$ สำหรับ $n \geq N$ (นั่นคือ $f'(x) \leq 0$)

↳ ตัวเลข

③ $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

!!

* หมายเหตุ ถ้าไม่จริง ข้อใดข้อ 1 → divergent.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+5}$$

$(-1)^n \rightarrow$ บอก Series.

$n+5 \rightarrow$ พิจารณาเทค่ $n+5$ (U_n)

$U_n = \frac{1}{n+5}$

① ✓

② $f'(x) \leq 0$ ✓

③ $\lim = 0$ ✓

∴ Convergent. ※

$$U_n = \frac{10n}{n^2+16}$$

$$f(x) = \frac{10x}{(x^2+16)} \qquad f'(x) = \frac{(x^2+16)(10) - (10x)(2x)}{(x^2+16)^2} = \frac{10(16-x^2)}{(x^2+16)^2} \leq 0 \quad \text{เมื่อ } x > 4$$

เมื่อ $U_n \geq U_{n+1}$ for $n > 4$

U_n is nonincreasing $n > 4$

10.7 Power Series

รูปแบบของอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 + \dots + C_n x^n$$

โดยที่ x เป็นค่าคงที่

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-a)^2 + \dots + C_n(x-a)^n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$n \rightarrow$ Power series

di/con. ??

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left| \frac{\cancel{x}^{n+1}}{\cancel{(n+1)!}_{\,n+1}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{x^n}} \right|$$

$$= \frac{|x|}{n+1}$$

$$= 0 \quad ; \ p < 0$$

Convergent. ※

Theorem 21

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n (x-a)^n$$ C เป็นค่าคงที่

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n C_n (x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) C_n (x-a)^{n-2}$$

Theorem 22 ($\sum$ เปลี่ยนเป็น $\int$ ได้)

$$\int f(x)\,dx \quad \sum_{n=0}^{\infty} C_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1} + C$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$$

Taylor and Meclaurin series

ใช้เพื่อประมาณค่าของ $f(x)$ ได้ → เน้นในกรณีกระจายอนุกรม (ไม่เน้น diver. / con.)

ex. $\sin 0.1^\circ$, $\cos 17^\circ$ } ประมาณค่า

*** $\boxed{\text{อนุกรม Taylor.}}$ โดย $x=a$ (จะกระจายที่ต่อ ดูที่ลำดับที่ 1)

→ เช่น $n=5$ → $k=5$ → เริ่มต้นที่ 0 → 6 พจน์

จำของ Tay. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(a) + f'(a)(x-a)$

แทนที่ a ไม่ใช่ x

$\frac{f^{(0)}(a)\cancel{(x-a)}}{\cancel{0!}}$ → $\boxed{0! \text{ มีค่าเท่ากับ } 1}$

$\boxed{\text{อนุกรม Meclaurin}}$ $x=0$ (คือ a ใน Taylor)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{k!}x^n$$

! ถ้าโจทย์ $x=0$ Taylor = Meclaurin (คำใบ้)

Ex. $f(x) = e^x$ จงหาพหุนาม Taylor. ลำดับที่ 6

$f(x)$ ที่จุด $x=1$ → * ทดแทนของ a ไม่ใช่ x *

↳ $a=1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)(x-1)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(6)}(1)(x-1)^6}{6!}$$

$\boxed{\text{เริ่มต้นที่ 0}}$

$f(x) = e^x \qquad f(x) = e^1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(x) = e^1$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$f^{(6)}(x) = e^x \qquad f^{(6)}(x) = e^1$

ทดแทนค่ากลับไปในอนุกรม

Taylor. $e + e^{(x-1)} + \frac{e(x-1)^2}{2!} + \ldots + \frac{e(x-1)^6}{6!}$

เปลี่ยนเป็น Meclurin

$(x=0 \to a=0)$

และเปลี่ยนไปถึง ∞

$$\sum_{k=0}^{\infty} = f(0) + \frac{f'(0)(x)}{1!} + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \ldots + \frac{f^{(6)}(0)(x)^6}{6!} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)(x)^n}{n!}$$

$n=6$ → (แต่มี 7 พจน์)

$f(x) = e^x \qquad f(0) = e^0 = 1$

$f'(x) = e^x \qquad f'(0) = 1$

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$f^{(6)}(x) = e^x \qquad f^{(6)}(x) = 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

$\boxed{\text{ฟอร์ม } \Sigma \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}}$

Taylor. polynomial order n at $x=0$ is

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$$

Taylor series และ Taylor polynomial ของ $f(x)=\cos x$ at $x=0$

↳ same กับ Meclurin

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x-a)^k}{k!} = f(0) + \frac{f'(0)(x)}{1!} + \frac{f''(0)(x)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(x)^n}{n!}$$

$f(x)=\cos x \qquad f(0)=1$

$f'(x)=-\sin x \qquad f'(0)=0$

$f''(x)=-\cos x \qquad f''(0)=-1$

$f'''(x)=\sin x \qquad f'''(0)=0$

$f^{(4)}(x)=\cos x$

$\vdots$

$f^{(2n)}(x)=(-1)^n\cos x$

$f^{(2n+1)}(x)=(-1)^n\sin x$

$f^{(2n)}(0)=(-1)^n$

$f^{(2n-1)}(0)=0$

Taylor series generated by $f(x)$ at 0 is

$$= 1+0\cdot x-\frac{x^2}{2!}+0\cdot x^3+\frac{x^4}{4!}+\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\therefore \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$ #

จงหา $f(x)=\sin x$ at $a=\pi/6$ โดยใช้

$f(x)=\sin x \rightarrow f(\pi/6)=\sin(\pi/6)=1/2$

$f'(x)=\cos x \qquad = \sqrt{3}/2$

$f''(x)=-\sin x \qquad = -1/2$

$f'''(x)=-\cos x \qquad = -\sqrt{3}/2$

$f^{(4)}(x)=\sin x \qquad = 1/2$

$\vdots$

$f^{(2n)}(\pi/6)=(-1)^n\cos x$

$f^{(2n+1)}(\pi/6)=(-1)^n\sin x$

$$\text{Taylor} = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)-\frac{\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!}-\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3}{3!}+\dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(x-\pi/6)^{2n}}{2n!}+\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{(x-\pi/6)^{2n+1}}{(2n+1)!}\right]$$ #

Meclurin ; $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)(x)^k}{k!} = f(a) + f'(a)(x) + \ldots$

กำหนดค่า $a = \pi/6$.

$f(x) = \sin x \qquad f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \qquad = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \qquad = 0$

$\vdots$

$$\begin{array}{ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \sum = & 0 & + 1 \cdot x & + \frac{0 \cdot x^2}{2!} & - \frac{1 \cdot x^3}{3!} \end{array}$$

$$\sum = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\sin(x) = \frac{\pi}{6} - \frac{(\pi/6)^3}{3!} + \ldots$$

$$\sin(x) \approx 0.5 \quad \#$$

ไม่รู้เรื่อง ^_^

หาค่า $\sin(x)$ $\quad a = 0.1 \quad n = 3$

$$\sin(0.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{3!} = 0.099833 \quad \#$$

$f(x) = \sin x$

$f'(x) = \cos x$

$f''(x) = -\sin x$

$f'''(x) = -\cos x$

$f^{4}(x) = \sin x$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \Rightarrow \text{มาไงไง} \ldots$$

$$\sin x \approx x - \frac{(x)^3}{3!} + \underbrace{R_3(x)}_{\text{Remainder}}$$

$\Rightarrow$ โดยที่เราจะหาตัว Remainder. (ตัวยิบย่อยๆ)

$$\boxed{R_3(x) = \frac{f^{(4)}(z)x^4}{4!}}$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R_3(0.1) = \frac{f^4(z)}{4!} x^4 = \frac{\sin(z)}{4!} (0.1)^4 \ ; \ 0 < z < 0.1$$

$0 < \sin z < 1$ (ค่าของ sin อยู่ในช่วงนี้)

$$0 < \frac{\sin(z)(0.1)^4}{4!} < \frac{(0.1)^4}{4!}$$

$$\approx 0.000004$$

$0.099883 < \sin(0.1)$

$= 0.099883 + R_3(0.1) < 0.099883 + 0.000004$

$0.099883 < \sin(0.1) < 0.099887$

10.9 Convergent of Taylor Series (P. 631)

Taylor's Formular

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

for some c between a and x