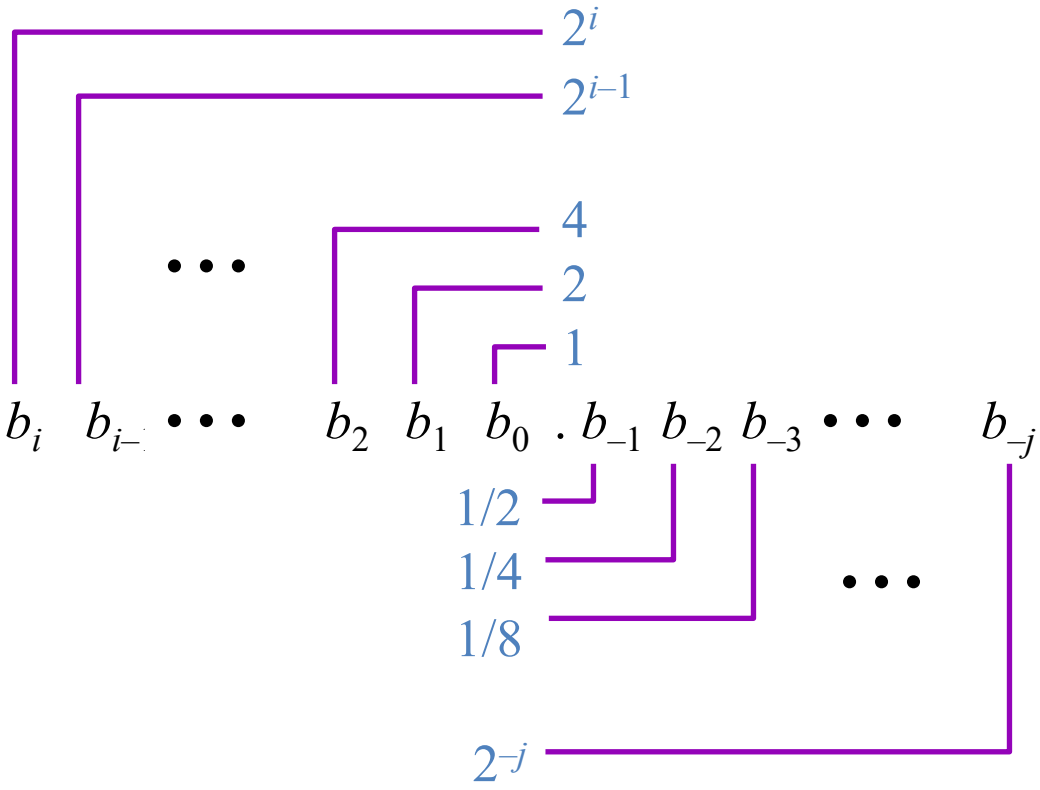
01076114
องค์ประกอบและสถาปัตยกรรมคอมพิวเตอร์
Computer Organization and Architecture

Floating Point

Floating Point

- นอกจากการประมวลผลเลขจำนวนเต็มแล้ว การประมวลผลเลขทศนิยมหรือจำนวนจริงก็มีความจำเป็นอย่างมาก ทุกภาษาก็มีการกำหนดตัวแปรเป็น float
- บิตด้านขวามีค่าเป็นกำลังสองของบิตด้านซ้ายเสมอ



Floating Point

$1/2 = 2^{-1} = 0.5$	$1/512 = 2^{-9} = 0.001953125$
$1/4 = 2^{-2} = 0.25$	$1/1024 = 2^{-10} = 0.0009765625$
$1/8 = 2^{-3} = 0.125$	$1/2048 = 2^{-11} = 0.00048828125$
$1/16 = 2^{-4} = 0.0625$	$1/4096 = 2^{-12} = 0.000244140625$
$1/32 = 2^{-5} = 0.03125$	$1/8192 = 2^{-13} = 0.0001220703125$
$1/64 = 2^{-6} = 0.015625$	$1/16384 = 2^{-14} = 0.00006103515625$
$1/128 = 2^{-7} = 0.0078125$	$1/32768 = 2^{-15} = 0.000030517578125$
$1/256 = 2^{-8} = 0.00390625$	$1/65536 = 2\text{-}16 = 0.000015258789625$

Floating Point Example

- Value Representation

5-3/4	101.11_2
2-7/8	10.111_2
63/64	0.111111_2

- ข้อสังเกตุ
  - เมื่อ shifting right จะเท่ากับการหารด้วย 2
  - เมื่อ shifting left จะเท่ากับการคูณด้วย 2
  - ตัวเลขที่อยู่ในรูป $0.111111..._2$ เมื่อเพิ่มจำนวนบิตไปเรื่อยๆ จะมีค่าเข้าใกล้ 1.0
    - $1/2 + 1/4 + 1/8 + ... + 1/2^i + ... \longrightarrow 1.0$

Exercise

- จงแปลง 1.0001_2 ให้เป็นเลขฐาน 10

  = 1, .001 = 1x2-3 = .125

  = 1.125

- จงแปลง 3.90625 ให้เป็นเลขฐาน 2

  = 11, .90625 = 0.5+0.25+0.125+0.03125 = 0.11101

  = 11.11101

- จงแปลง 1.11111_2 ให้เป็นเลขฐาน 10

  = 1, .11111=0.5+0.25+0.125+0.0625+0.03125

  = 1.96875

Floating Point

- ข้อจำกัด
  - สามารถแทนค่าตัวเลขได้เฉพาะที่เขียนในรูป $x/2^k$ ได้เท่านั้น
  - ตัวเลขบางค่าที่เป็นทศนิยมไม่รู้จบ ไม่สามารถแทนได้

Value	Representation
1/3	$0.0101010101[01]..._2$
1/5	$0.001100110011[0011]..._2$
1/10	$0.0001100110011[0011]..._2$

Floating Point

- การแทนทศนิยมมีหลากหลายแบบ แต่เพื่อให้เป็นแบบเดียวกัน คอมพิวเตอร์จะใช้การแทนที่เรียกว่า Normalized scientific notation ประกอบด้วย ตัวเลข 1 หลักหน้าจุด ที่เหลืออยู่หลังจุด และตามด้วยเลขยกกำลัง เช่น 3.5×10^{9}

$$1.010001 \times 2^{5}_{\text{two}} = (1 + 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + \ldots + 1 \times 2^{-6}) \times 2^{5}_{\text{ten}}$$

- การกำหนดรูปแบบที่เป็นมาตรฐาน จะทำให้การแลกเปลี่ยนข้อมูลระหว่างเครื่องทำได้ง่าย เครื่องคอมพิวเตอร์จึงมักใช้มาตรฐาน IEEE 754 ในการกำหนดว่าจะเก็บเลขทศนิยมอย่างไร

IEEE 754

- ค่าที่เก็บ = $(-1)^S \times F \times 2^E$
- หากเพิ่มจำนวนบิตใน Exponent จะทำให้ขนาดของข้อมูลที่เก็บได้เพิ่มขึ้น (กรณี 8 บิต จะได้ 2^{-127} - 2^{128} (ประมาณ 10^{-38} – 10^{38})
- หากเพิ่มจำนวนบิตใน Fraction จะทำให้สามารถเก็บค่าได้ละเอียดมากขึ้น
- เนื่องจากเป็น Normalize Number ดังนั้นตัวเลขจะอยู่ในรูปแบบ 1.xxxx (ฐาน 2) อย่างแน่นอน ดังนั้นใน IEEE 754 จึงละเลข 1 ออก ดังนั้นค่าที่เก็บจะได้จาก $(-1)^S \times (1+F) \times 2^E$

IEEE 754

- ค่าที่มากที่สุดที่สามารถแทนได้ คือ 2.0×2^{128}
- ค่าที่น้อยที่สุดที่สามารถแทนได้ คือ 1.0×2^{-127}
- Overflow คือ ตัวเลขที่มากกว่าค่ามากที่สุดที่เก็บได้
- Underflow คือ ตัวเลขที่น้อยกว่าค่าน้อยที่สุดที่เก็บได้
- มากกว่าและน้อยกว่า จะวัดจาก Exponent อย่างเดียว
- แต่จำนวนทศนิยมที่เก็บได้ จะวัดจาก Fraction

IEEE 754

- Double Precision คือ การเก็บเลขทศนิยมโดยใช้พื้นที่ขนาด 64 บิต หรือ รีจิสเตอร์ 2 ตัว
- ขอบเขตขนาดของข้อมูล คือ 1.0×2^{-308} ถึง 2.0×2^{308}
- และเนื่องจากขนาดของ Exponent มีค่าเพิ่มขึ้น จึงเก็บเลขทศนิยมได้เพิ่มขึ้นไปด้วย

Exponent Representation

- บิตแรก จะเป็นบิตเครื่องหมาย
- แต่ในส่วนของ exponent เนื่องจากต้องเก็บทั้งจำนวนบวกและจำนวนลบ แต่จะใช้ 2's Complement ไม่ได้ เนื่องจากไม่สามารถเปรียบเทียบมากกว่า/น้อยกว่าดังนั้นจึงใช้วิธี bias notation เพื่อให้ค่าที่น้อยที่สุดมีค่าเป็น 00...0 และค่าที่มากที่สุดเป็น 11...1
- Bias notation คือ การนำค่าที่เรียกว่า bias ไปลบออกจากค่าใน exponent เพื่อให้ได้ค่า exponent ที่แท้จริง (ช่วงข้อมูลจะเปลี่ยนเป็น $2.0 \times 2^{127} - 1.0 \times 2^{-126}$)
- IEEE 754 single-precision จะใช้ 127 เป็นค่า bias สำหรับ double precision จะใช้ค่า bias เป็น 1023

Final representation: $(-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$

Example

Final representation: $(-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$

- ให้แทน -0.75 ในรูปแบบ in single precision
  - Single (1 + 8 + 23)
  - Double (1+ 11 + 52)
- เปลี่ยน 0.75 เป็นฐาน 2 = $2^{-1}+2^{-2} = 0.11_2$
- Normalize = 1.1×2^{-1} ดังนั้นส่วน fraction = 1000...000 และส่วน exponent = -1+127 = 126 = 0111 1110
- ดังนั้นจะได้ Single Precision ดังนี้ 1 0111 1110 1000...000

Example

Final representation: $(-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$

- ให้แทน 32 ในรูปแบบ in single precision
- เปลี่ยน 32 ให้เป็นฐาน 2 = 100000_2
- เขียนในรูปแบบ Normalize = 1×2^5
- ดังนั้นส่วน Fraction จะเป็น 0000...000
- ส่วน Exponent = 5+127 = 132 = 10000100
- ดังนั้นจะได้ Single Precision ดังนี้ 0 1000 0100 0000...000

Exercise

Final representation: $(-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$

- ให้แทน 0.0625_{10} ในรูปแบบ in single precision
  - $2^{-4} = 0.0001 = 1.0 \times 2^{-4}$ ดังนั้นส่วน Fraction = 0 ส่วน Exponent = -4+127
    = 0 01111011 0000…000
- ให้แทน -26.625_{10} ในรูปแบบ in single precision
  - 26 = 11010, 0.625 = 0.5+0.125 = 0.101 = 11010.101
  - 1.1010101×2^4 ส่วน Fraction = 1010101 ส่วน Exponent = 4+127 = 131
  - **1 10000011 1010101…000**

Example

Final representation: $(-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$

- ให้หาว่าเลขฐาน 2 ในแบบ Single Precision แทนค่าเลขใด

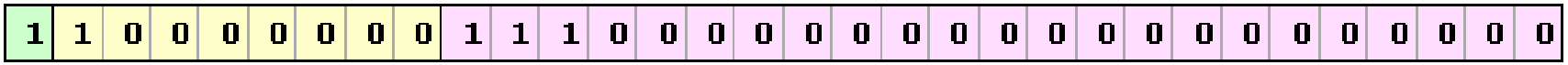
  1 1000 0001 01000...0000

- Singed Bit เป็นลบ
- ส่วนของ Fraction คือ 1.01
- ส่วนของ Exponent = 129-127 = 2
- รวมกัน = $-1.01_2 \times 2^2 = -101_2 = -5$

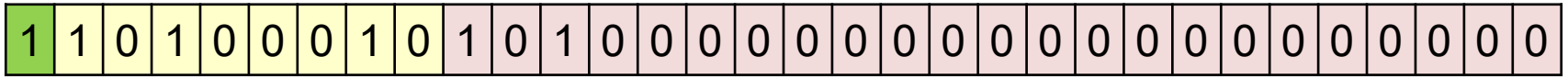
Exercise

Final representation: $(-1)^S \times (1 + \text{Fraction}) \times 2^{(\text{Exponent} - \text{Bias})}$

- จงแปลง IEEE 754 ต่อไปนี้ ให้เป็นเลขฐาน 10



-3.75

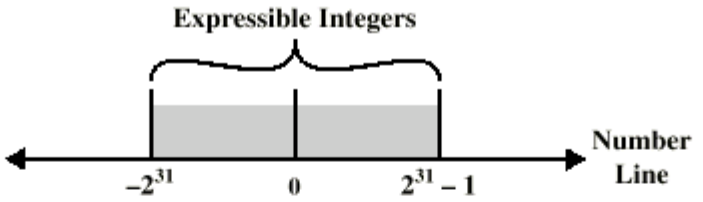


Exponent = 162 – 127 = 35

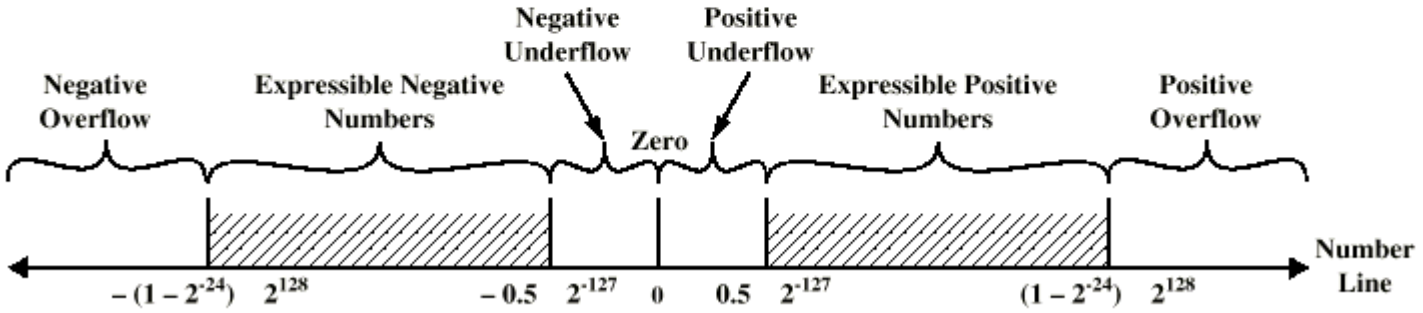
Fraction = 1.625

=55834574848

Expressible Numbers



(a) Twos Complement Integers



(b) Floating-Point Numbers

FP Addition

- ลองพิจารณาการบวกเลขฐาน 10 ในแบบ Normalize (กำหนดให้เก็บทศนิยมเพียง 4 ตำแหน่ง เพื่อให้ง่าย)
  - $9.999 \times 10^{1} + 1.610 \times 10^{-1}$
  - เริ่มต้นต้องปรับส่วนของเลขยกกำลัง (Exponent) ให้มี magnitude เดียวกัน โดยยึดค่าของเลขยกกำลังที่มากกว่า
  - $9.999 \times 10^{1} + 0.016 \times 10^{1}$
  - จากนั้นก็บวกเลข 2 จำนวนเข้าด้วยกัน = 10.015×10^{1}
  - และ Normalize = 1.0015×10^{2}
  - เนื่องจากกำหนดให้มีทศนิยมเพียง 4 ตำแหน่ง จึงปัดเศษ = 1.002×10^{2}

FP Addition

- กลับมาพิจารณาการบวกเลข FP ที่เป็นฐาน 2 วิธีการก็จะคล้ายกับฐาน 10
  - $1.010 \times 2^{1} + 1.100 \times 2^{3}$
  - ปรับส่วนของเลขยกกำลังให้มี magnitude เดียวกัน
  - $0.0101 \times 2^{3} + 1.1000 \times 2^{3}$
  - ทำการบวก ได้ 1.1101×2^{3}
  - เนื่องจากอยู่ในรูปของ Normalize Form แล้ว จึงไม่ต้อง Normalize อีก
  - ตรวจสอบ Overflow / Underflow ซึ่งกรณีนี้ไม่เกิด
  - ทำการปัดเศษ (Round) ซึ่งกรณีนี้ไม่ต้องทำ
  - จากนั้นแปลงเป็น IEEE 754

    0 10000010 11010000000000000000000

FP Addition

- สรุปขั้นตอนการบวกเลขทศนิยม
  1. เปรียบเทียบ Magnitude ของส่วนยกกำลัง ถ้าไม่เท่ากันก็ปรับให้เท่ากัน โดยยึดค่าของเลขยกกำลังที่มากกว่า
  2. บวกตัวเลขส่วนที่ไม่ยกกำลังเข้าด้วยกัน
  3. ทำการ Normalize
  4. ตรวจสอบ Overflow, Underflow -> Exception
  5. ปัดเศษ
  6. ตรวจสอบว่ายังต้อง Normalize หรือไม่ ถ้าต้องกลับไปที่ข้อ 3

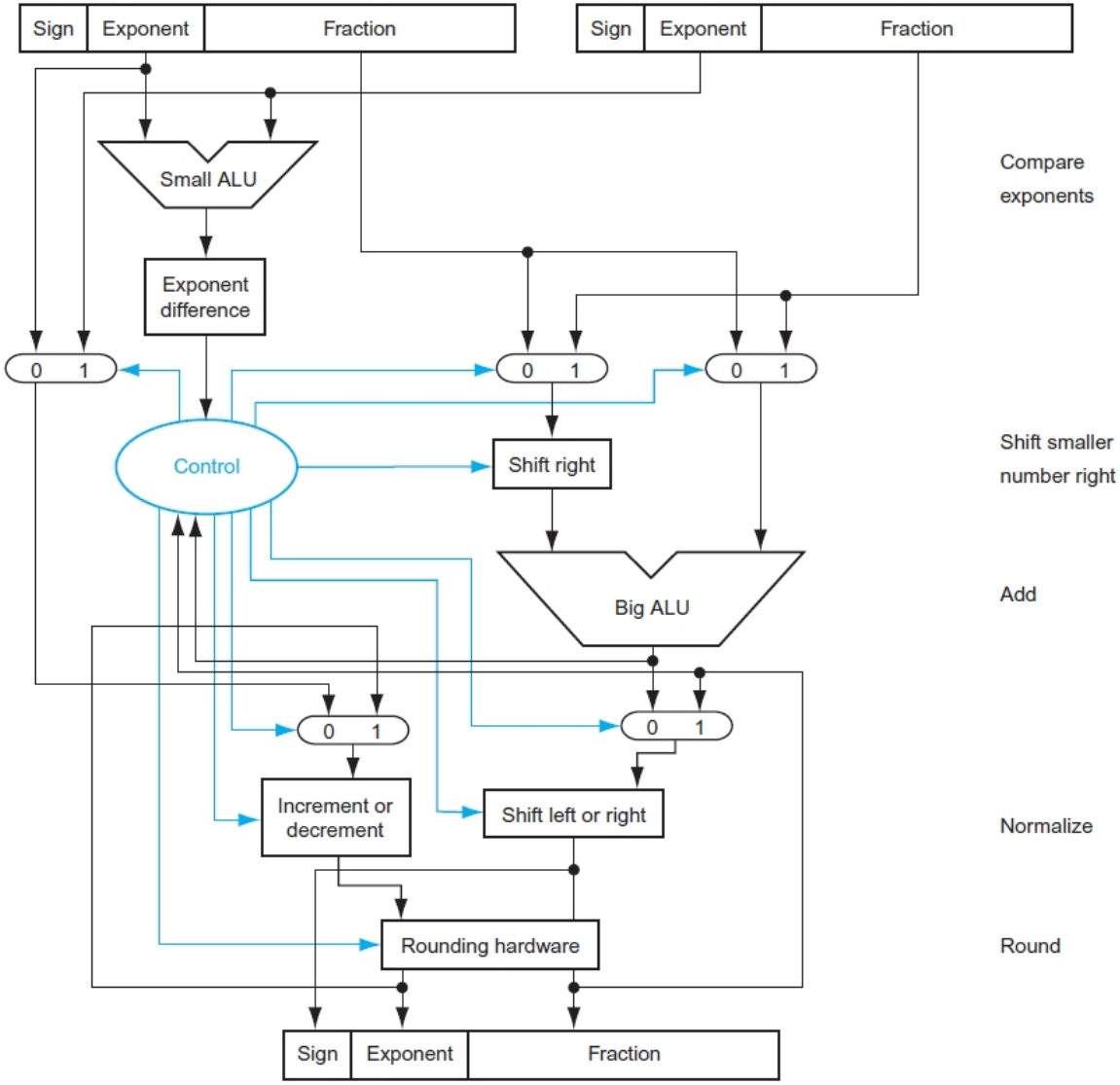
Example

- ให้บวก 0.5_{10} กับ -0.4375_{10}
- $0.5_{10} = 0.1_2 = 0.1_2 \times 2^0 = 1.000_2 \times 2^{-1}$
- $-0.4375_{10} = -0.0111_2 = -1.110 \times 2^{-2}$
- ขั้นที่ 1 เปลี่ยนให้ magnitude เท่ากัน
  - $1.000_2 \times 2^{-1} + -0.111_2 \times 2^{-1}$
- ขั้นที่ 2 บวกเข้าด้วยกัน $= 0.001 \times 2^{-1}$
- ขั้นที่ 3 Normalize และตรวจสอบ Overflow, Underflow $= 1.000 \times 10^{-4}$
- ขั้นที่ 4 ปัดเศษ (ได้เท่าเดิม)
- $1.000 \times 10^{-4} = 0.0001_2 = 1/2^4 = 1/16 = 0.0625 = 0.5 - 0.4375$

Exercise

- ให้บวก 5.66015625 และ 8.59375
  - $5.66015625 = 101.10101001 = 1.0110101001 \times 2^2$
  - $8.59375 = 1000.10011 = 1.00010011 \times 2^3$
  - เริ่มจากปรับส่วน magnitude โดยปรับมาที่ 2^3
  - $= 1.00010011 + 0.10110101 \times 2^3$ (ปัดเศษ)
  - $= 1.11001 \times 2^3$
  - เป็นตัวเลขที่ Normalize แล้ว และไม่ Overflow, Underflow
  - 14.25

FP Addition


Sign
Exponent
Fraction
Sign
Exponent
Fraction
Small ALU
Compare exponents
Exponent difference
0 1
0 1
0 1
Control
Shift right
Shift smaller number right
Big ALU
Add
0 1
0 1
Increment or decrement
Shift left or right
Normalize
Rounding hardware
Round
Sign
Exponent
Fraction

FP Multiplication

- สำหรับการคูณแล้ว ขั้นตอนจะเป็นดังนี้
  - คำนวณส่วนของเลขยกกำลัง (Exponent)
  - คูณส่วนที่ไม่ยกกำลัง (Significand)
  - Normalize
  - ปัดเศษ
  - กำหนดเครื่องหมาย

Example

- หาผลคูณของ $1.110_{10} \times 10^{10} \times 9.200_{10} \times 10^{-5}$
- เริ่มจากส่วน exponent : 10+(-5) = 5
- แต่เนื่องจากส่วน exponent เก็บแบบ biased notation ซึ่ง 10+127=137 และ -5+127 = 122 ดังนั้น 137+122 จะได้ 259 ซึ่งไม่สามารถเก็บใน 8 บิตได้ ดังนั้นให้ลบออกด้วย 127 = 259-127 = 132 (5+127)
- ต่อไปเป็นการคูณส่วน significand โดย 1.110 x 9.200 = 10.212000
- ดังนั้นผลลัพธ์ = 10.212×10^5 เมื่อ Normalize จะได้ 1.0212×10^6
- เมื่อปัดเศษให้เหลือ 3 หลัก จะได้ 1.021×10^6
- สุดท้ายใส่เครื่องหมายจะได้ $+1.021 \times 10^6$

Example

- หาผลคูณของ 0.5_{10} x -0.4375_{10}
- $0.5 = 1.000_2 \times 2^{-1}$ และ $-0.4375_2 = -1.110 \times 2^{-2}$
- เริ่มจากบวกส่วน exponent = -1+ (-2) = -3
- เมื่อเขียนในแบบ biased notation = (-1+127) + (-2+127) – 127 = (-1-2) + (127 + 127 – 127) = -3 + 127 = 124
- คูณส่วน significand 1.000x1.110 คูณแบบจำนวนเต็ม = 1110000 จากนั้นค่อยนำทศนิยมมาใส่ = $1.110000_2 \times 2^{-3}$
- ปัดเศษให้เหลือ 3 บิต = $1.110_2 \times 2^{-3}$
- ตัวเลขข้างต้น Normalize แล้ว และไม่ Overflow หรือ Underflow และไม่จำเป็นต้องปัดเศษอีก จึงได้คำตอบเท่ากับ $1.110_2 \times 2^{-3}$ (-0.21875)

Exercise

- ให้คูณ 5.66015625 และ 8.59375
  - 5.66015625 = 101.10101001 = 1.0110101001×2^2
  - 8.59375 = 1000.10011 = 1.00010011×2^3
  - เริ่มจากบวกส่วน exponent = 2 + 3 = 5
  - เขียนในแบบ biased notation 5+127 = 132
  - คูณส่วน significand 1.0110101 x 1.00010011 = 1.100001001101111
  - ปัดเศษให้เหลือ 3 บิต $1.100001001101111 \times 2^3$
  - ตัวเลขข้างต้น Normalize แล้ว และไม่ Overflow หรือ Underflow
  - จึงได้คำตอบเท่ากับ $1.100001001101111_2 \times 2^3 = 48.6084$

FP Instruction in ARM

- ใน Raspberry Pi จะมี Coprocessor ที่ทำหน้าที่คำนวณ Floating Point มีชื่อว่า VFPv3
- คำสั่ง FP จะไม่ได้ใช้ register ชุดเดียวกับการคำนวณแบบจำนวนเต็ม โดยจะมีการสร้าง register ขึ้นมาอีกชุด คือ s0-s31 สำหรับใช้กับ single precision และ d0-d15 สำหรับ double precision
- ดังนั้นก่อนที่จะคำนวณจะต้องโหลดข้อมูลมาใส่ Sx เสียก่อน

```
LDR       r6, =fvalue
VLDR      s0, [r6]      ; ตัวตั้ง
VLDR      s1, [r6, #4]  ; ตัวคูณ
VMUL.f32  s0, s0, s1
VMOV      r0, s0        ; เก็บผลลัพธ์
```

FP Instruction in ARM

- Addressing Mode จะใช้บาง Addressing Mode ไม่ได้

```
VLDR        s16, [r6, #4]      ; ได้
VLDR        s16, [r6, #4]!     ; ไม่ได้
VLDR        s16, [r6] #4       ; ไม่ได้
```

- กรณีต้องการคำนวณแบบ Double Pricision

```
LDR         r6, =fvalue
VLDM        r6!, {D0, D1}      ; ตัวตั้ง และ ตัวคูณ
VMUL.f64    d0, d1
VCVT.f32.f64  s0, d0           ; แปลง 64 -> 32
VMOV        r0, s0
```

FP Instruction in ARM

- คำสั่งที่ใช้ได้

```
VADD.f32    s0, s1, s2          ; s0 = s1+s2
VSUB.f32    s0, s2, s4          ; s0 = s2 – s4
VDIV.f64    d4, d5, d1          ; d4 = d5/d1
VMUL.f32    s2, s4, s1          ; s2 = s4 * s1
VNMUL.f64   d4, d3, d2          ; d4 = -(d3*d2)
VMAL.f64    d4, d3, d2          ; d4 = d4+(d3*d2)
VABS.f32    s0, s1              ; s0 = abs(s1)
VNEG.f32    s2, s3              ; s2 = - s3
VSQRT.f64   d0, d1              ; d0 = sqrt(d1)
VCMP.f32    s0, s1
VMRS        APSR_nzcv, FPSCR ; copy status
```

Fixed Point

- การคำนวณแบบเลขทศนิยมนั้น จะช้ากว่าการคำนวณแบบจำนวนเต็มมาก
- ดังนั้นในกรณีที่ทำงานกับเลขทศนิยมน้อยๆ อาจใช้วิธีที่เรียกว่า Fixed Point
- เช่น 0.5 x 0.9 ก็ทำการคูณ 0.5 ด้วย 10 และคูณ 0.9 ด้วย 10 จะได้เป็น 5 กับ 9 จากนั้นก็คำนวณแบบปกติ เมื่อได้ผลลัพธ์ออกมาแล้ว จึงค่อยหารกลับไปเป็นทศนิยมอีกครั้ง
- การทำงานแบบนี้ จะทำให้การคำนวณทำได้เร็วขึ้นมาก

Homework #5

- กำหนดตัวเลข 2 จำนวน 6.18×10^{2} และ 5.796875×10^{1}
- ให้แสดงการบวกเลข 2 จำนวนตามแบบ IEEE 754 ตามขั้นตอน
- ให้แสดงการคูณเลข 2 จำนวนตามขั้นตอน
- ให้บอกด้วยว่าผลการทำงาน เกิด Overflow หรือ Underflow หรือไม่

For your attention