

ONDES

UE 3M101 “PROJET”

1. CORDES VIBRANTES

Les mouvements de faible amplitude d’une corde élastique fixée à ses extrémités (par exemple en $x = 0$ et $x = \pi$) sont décrits par l’équation des ondes

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } t \geq 0, x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

où $u = u(t, x)$ représente le déplacement de la corde au temps t et au point x par rapport à sa position d’équilibre $u = 0$. Cette équation a été introduite par D’Alembert en 1747 [6, 7], et constitue la première apparition d’une “équation aux dérivées partielles”. Des modèles plus précis ont par la suite été introduits, conduisant à l’équation, dite de Kirchhoff, ou de Kirchhoff-Carrier (voir [9, 10, 3])

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left(1 + \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \text{pour } t \geq 0, x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Cette dernière équation a la caractéristique d’être non-linéaire. Nous considérerons ici un modèle légèrement plus simple, mais qui partage certaines propriétés fondamentales avec l’équation (2):

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\int_0^\pi u(t, s)^2 ds\right) u & \text{pour } t \geq 0, x \in (0, \pi) \\ u(t, 0) = u(t, \pi) = 0 & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

D’Alembert considérait deux types de solutions de son équation des ondes (1). La corde frappée (corde de piano), qui est au repos et à laquelle on impose une vitesse initiale en la frappant. Ce cas de figure correspond aux “conditions initiales”

$$u(0, x) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0(x)$$

où la vitesse initiale v_0 est donnée. La corde pincée (corde de guitare) qu’on écarte de sa position de repos et qu’on lâche avec une vitesse nulle. Ceci correspond aux conditions initiales

$$u(0, x) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = 0$$

où la position initiale u_0 est donnée. Plus généralement, on peut considérer les conditions initiales

$$u(0, x) = u_0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(0, x) = v_0 \quad (4)$$

où u_0 et v_0 sont donnés. On peut résoudre par des méthodes assez simples (basées sur les séries de Fourier) l’équation des ondes (1) avec les conditions initiales (4). Plus précisément, en supposant que u_0 et v_0 satisfont à certaines conditions, on peut construire une unique solution de (1)-(4) dans une classe convenable de fonctions. On a des propriétés semblables pour l’équation (3), en dépit du caractère non-linéaire de l’équation. En revanche, la situation est considérablement plus compliquée pour l’équation (2).

Notons par ailleurs qu'une propriété fondamentale de l'équation des ondes (1) est la conservation de l'énergie, c'est à dire que la quantité

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right\} dx \quad (5)$$

est conservée au cours du temps. (On vérifie cela formellement en multipliant l'équation par $\frac{\partial u}{\partial t}$ et en intégrant par parties.) On a aussi conservation de l'énergie pour l'équation (2), avec l'énergie

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{4} \left[\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 dx \right]^2 \quad (6)$$

ainsi que pour l'équation (3), avec l'énergie

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \right)^2 \right\} dx + \frac{1}{4} \left[\int_0^\pi (u(t, x))^2 dx \right]^2 \quad (7)$$

2. MODES SIMPLES

Nous ne nous intéresserons pas aux solutions générales des équations ci-dessus, mais à des solutions particulières simples. Une solution particulièrement simple de (1), appelée "mode simple" a la forme

$$u(t, x) = \sin(nt) \sin(nx) \quad (8)$$

ou plus généralement

$$u(t, x) = (a \sin(nt) + b \cos(nt)) \sin(nx) \quad (9)$$

Il est très facile de vérifier que u donné par (8) (ou (9)) vérifie l'équation des ondes (1). (Dans le sens classique: u est C^∞ en t et x , et vérifie l'équation, ainsi que les conditions aux limites.) u est une fonction périodique du temps (i.e. $\sin(nt)$) multipliée par un profil fixe (i.e. $\sin(nx)$), et représente une vibration. Notons que la période (temporelle) est $\frac{2\pi}{n}$. Plus généralement, si $J \geq 1$ est un entier et $(a_j)_{1 \leq j \leq J}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq J}$ des réels, alors

$$u(t, x) = \sum_{j=1}^J [a_j \sin(jt) + b_j \cos(jt)] \sin(jx) \quad (10)$$

est une solution de (1). (La solution générale de (1) a la forme (10) avec une somme infinie au lieu d'une somme finie.) En particulier étant donnés deux entiers $j, k \geq 1$, on a les solutions particulières

$$u_1(t, x) = [a_1 \sin(jt) + b_1 \cos(jt)] \sin(jx), \quad (11)$$

$$u_2(t, x) = [a_2 \sin(kt) + b_2 \cos(kt)] \sin(kx) \quad (12)$$

et

$$u_3(t, x) = [a_1 \sin(jt) + b_1 \cos(jt)] \sin(jx) + [a_2 \sin(kt) + b_2 \cos(kt)] \sin(kx) \quad (13)$$

On voit que la solution u_3 est la superposition des solutions u_1 et u_2 . **On voit donc que les modes simples n'interfèrent pas.** C'est évidemment une conséquence du fait que l'équation (1) est linéaire.

On peut également rechercher des modes simples pour les équations (2) et (3). Cela revient à chercher une solution de la forme

$$u(t, x) = f(t) \sin(nx) \quad (14)$$

où f est une fonction inconnue. On a

$$\int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 = n^2 f^2(t) \int_0^\pi \cos^2(ns) ds = \frac{\pi}{2} n^2 f^2(t) \quad (15)$$

donc l'équation (2) devient

$$f'' + n^2 \left(1 + \frac{\pi}{2} n^2 f^2\right) f = 0 \quad (16)$$

De même, si on cherche une solution de la forme (14) de l'équation (3), on observe que

$$\int_0^\pi u^2 = f^2 \int_0^\pi \sin^2(ns) ds = \frac{\pi}{2} f^2$$

de sorte que l'équation (3) devient

$$f'' + n^2 f + \frac{\pi}{2} f^3 = 0 \quad (17)$$

Les équations (16) et (17) sont des **équations différentielles du second ordre, non-linéaires**.

Les équations (16) et (17) peuvent toutes deux se mettre sous la forme

$$U'' + g(U) = 0 \quad (18)$$

où U prend ses valeurs dans \mathbb{R}^ℓ , $\ell \geq 1$ et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^\ell)$. Plus précisément, pour (16) $\ell = 1$ et $g(U) = n^2(1 + \frac{\pi}{2} n^2 U^2)U$, et pour (17) $\ell = 1$ et $g(U) = n^2 U + \frac{\pi}{2} U^3$. Notons que dans chacun des deux cas (16) et (17), il existe une fonction $G \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R})$ telle que

$$g(U) = \nabla G(U), \quad \forall U \in \mathbb{R}^\ell. \quad (19)$$

Plus précisément, pour (16) $G(U) = \frac{n^2}{2} U^2 + \frac{\pi n^4}{8} U^4$, et pour (17) $G(U) = \frac{n^2}{2} U^2 + \frac{\pi}{8} U^4$.

A son tour, l'équation (18) peut se mettre sous la forme plus générale

$$V' = \Phi(V) \quad (20)$$

où $V = V(t) \in \mathbb{R}^N$ et $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe C^∞ . Il suffit pour cela de remarquer que (18) peut s'écrire comme un système

$$\begin{cases} U' = W \\ W' = -g(U). \end{cases} \quad (21)$$

On pose alors $N = 2\ell$ et on définit $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ par

$$\Phi \begin{pmatrix} U \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ -g(U) \end{pmatrix} \quad (22)$$

pour $U, W \in \mathbb{R}^\ell$.

La théorie de Cauchy-Lipschitz (voir par exemple [8]) permet de résoudre localement le **problème de Cauchy** pour (20). Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème (Cauchy-Lipschitz). *Soit $N \geq 1$ un entier et $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ localement Lipschitzienne. Pour tout $V_0 \in \mathbb{R}^N$, il existe $T_0 > 0$ et une solution $V \in C^1([0, T_0], \mathbb{R}^N)$ de (20) vérifiant la condition initiale*

$$V(0) = V_0. \quad (23)$$

De plus, on a les propriétés suivantes.

- (i) (Unicité) Si $T > 0$ et $V_1, V_2 \in C^1([0, T], \mathbb{R}^N)$ sont deux solutions de (20)-(23), alors $V_1 = V_2$.
- (ii) (Solution maximale) Il existe $T_{\max} = T_{\max}(V_0) \in (0, \infty]$ et une solution $V \in C^1([0, T_{\max}), \mathbb{R}^N)$ de (20)-(23), qui est maximale dans le sens où soit $T_{\max} = \infty$ (on parle alors d'une solution globale); soit $T_{\max} < \infty$ et il n'existe aucun $T > T_{\max}$ pour lequel on ait une solution $V \in C^1([0, T], \mathbb{R}^N)$ de (20)-(23) (V

ne peut pas être prolongée au delà de T_{\max}). L'intervalle $[0, T_{\max})$ est appelé l'intervalle maximal d'existence et T_{\max} le temps maximal d'existence.

- (iii) (Alternative d'explosion) Si $T_{\max} < \infty$, alors $\|V(t)\| \rightarrow \infty$ lorsque $t \uparrow T_{\max}$ (on dit que la solution explose en temps fini).
- (iv) (Régularité) Si $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe C^k avec $k \geq 1$, alors $V \in C^{k+1}([0, T_{\max}), \mathbb{R}^N)$. En particulier, si Φ est C^∞ , alors $V : [0, T_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}^N$ est C^∞ .

En outre, la solution dépend continûment de la donnée initiale. Plus précisément, soit $V_0 \in \mathbb{R}^N$ et soit $(V_0^n)_{n \geq 1} \subset \mathbb{R}^N$ vérifiant $V_0^n \rightarrow V_0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Soient V et $(V^n)_{n \geq 1}$ les solutions correspondantes de (20)-(23). Etant donné $0 < \tau < T_{\max}(V_0)$, on a $T_{\max}(V_0^n) > \tau$ pour n suffisamment grand, et $V^n \rightarrow V$ dans $C^1([0, \tau], \mathbb{R}^N)$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Corollaire. Soient $\ell \geq 1$, $g \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R}^\ell)$ et $G \in C^\infty(\mathbb{R}^\ell, \mathbb{R})$ vérifiant (19). Supposons de plus que $G(U) \geq 0$ pour tout $U \in \mathbb{R}^\ell$. Il s'ensuit que pour tous $U_0, U_1 \in \mathbb{R}^\ell$, il existe une unique solution $U \in C^\infty([0, \infty), \mathbb{R}^\ell)$ de (18) vérifiant les conditions initiales

$$U(0) = U_0, \quad U'(0) = U_1. \quad (24)$$

De plus,

$$\frac{1}{2}\|U'(t)\|^2 + G(U(t)) = \frac{1}{2}\|U_1\|^2 + G(U_0) \quad (25)$$

pour tout $t \geq 0$.

En effet, en mettant l'équation (18) sous la forme (21)-(22), l'existence d'une solution locale résulte du théorème de Cauchy-Lipschitz. La loi de conservation (25) résulte facilement de l'équation (18). De ce fait, $\|U'(t)\| \leq A$ pour tout $0 \leq t < T_{\max}$ avec $A = (\|U_1\|^2 + 2G(U_0))^{\frac{1}{2}}$. Il en résulte que $\|U(t)\| \leq \|U_0\| + tA$, et l'alternative d'explosion implique que $T_{\max} = \infty$. (**C'est la méthode tout à fait fondamentale des estimations "a priori".**)

Il n'est pas difficile de voir que toutes les solutions de (16) et de (17) sont périodiques (**par la méthode du plan des phases**). Mais, contrairement au cas de l'équation des ondes, les solutions des équations (16) et (17) n'ont pas toutes la même période. On peut vérifier que toutes les périodes dans l'intervalle $(0, \frac{2\pi}{n})$ sont atteintes.

3. INTERACTION DE MODES SIMPLES

On peut à présent chercher des solutions qui sont la superposition de deux modes simples, soit

$$u(t, x) = f(t) \sin(jx) + g(t) \sin(kx) \quad (26)$$

avec $j \neq k$. Puisque

$$\int_0^\pi \cos(js) \cos(ks) ds = \int_0^\pi \sin(js) \sin(ks) ds = 0,$$

on observe que

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 &= j^2 f^2 \int_0^\pi \cos^2(js) ds + k^2 g^2 \int_0^\pi \cos^2(ks) ds \\ &= \frac{\pi}{2} (j^2 f^2 + k^2 g^2) \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \int_0^\pi u^2 &= f^2 \int_0^\pi \sin^2(js) ds + 2fg \int_0^\pi \sin(js) \sin(ks) ds + g^2 \int_0^\pi \sin^2(ks) ds \\ &= \frac{\pi}{2} (f^2 + g^2) \end{aligned}$$

L'équation (2) devient le système de deux équations ordinaires

$$\begin{cases} f'' + j^2 f + j^2 \frac{\pi}{2} (j^2 f^2 + k^2 g^2) f = 0 \\ g'' + k^2 g + k^2 \frac{\pi}{2} (j^2 f^2 + k^2 g^2) g = 0 \end{cases} \quad (27)$$

et l'équation (3) devient le système de deux équations ordinaires

$$\begin{cases} f'' + j^2 f + \frac{\pi}{2} (f^2 + g^2) f = 0 \\ g'' + k^2 g + \frac{\pi}{2} (f^2 + g^2) g = 0 \end{cases} \quad (28)$$

Pour le système (27), il est commode de poser

$$f(t) = \frac{1}{j} \phi(jt) \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad g(t) = \frac{1}{j} \psi(jt) \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \mu = \left(\frac{k}{j}\right)^2 \quad (29)$$

de façon que le système (27) devient

$$\begin{cases} \phi'' + \phi + (\phi^2 + \mu \psi^2) \phi = 0 \\ \psi'' + \mu \psi + \mu (\phi^2 + \mu \psi^2) \psi = 0 \end{cases} \quad (30)$$

Notons qu'en posant $\varphi = \mu^{\frac{1}{2}} \psi$, le système (30) s'écrit

$$\begin{cases} \phi'' + \phi + (\phi^2 + \varphi^2) \phi = 0 \\ \varphi'' + \mu \varphi + \mu (\phi^2 + \varphi^2) \varphi = 0 \end{cases} \quad (31)$$

Pour le système (28), on pose

$$f(t) = j \phi(jt) \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad g(t) = j \psi(jt) \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad \mu = \left(\frac{k}{j}\right)^2 \quad (32)$$

de façon que le système (28) devient

$$\begin{cases} \phi'' + \phi + (\phi^2 + \psi^2) \phi = 0 \\ \psi'' + \mu \psi + (\phi^2 + \psi^2) \psi = 0 \end{cases} \quad (33)$$

Les systèmes (30) et (33) peuvent tous deux s'écrire sous la forme (18)-(19) avec $\ell = 2$ et, respectivement, $G(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 + \mu \psi^2) + \frac{1}{4}(\phi^2 + \mu \psi^2)^2$ et $G(\phi) = \frac{1}{2}(\phi^2 + \mu \psi^2) + \frac{1}{4}(\phi^2 + \psi^2)^2$. En particulier, on peut résoudre les problèmes de Cauchy correspondants, et toutes les solutions sont globales.

Les systèmes (30) et (33) sont à comparer avec le système non couplé correspondant à l'équation des ondes (1)

$$\begin{cases} \phi'' + \phi = 0 \\ \psi'' + \mu \psi = 0 \end{cases} \quad (34)$$

La solution générale de (34) est $(\phi, \psi) = (a \sin(t + b), c \sin(t\sqrt{\mu} + d))$. Puisque $\sqrt{\mu} = \frac{k}{j}$, on voit que toutes les solutions sont périodiques de période $2j\pi$.

Les solutions des systèmes (30) et (33) ne sont en général pas périodiques. En revanche, il n'est pas difficile de montrer (**méthode du Wronskien**) que les composantes ϕ et ψ oscillent toutes les deux. Plus précisément, ϕ ne peut pas rester strictement positive (ou négative) sur un intervalle de longueur π , et ψ ne peut pas rester strictement positive (ou négative) sur un intervalle de longueur $\pi/\sqrt{\mu}$.

Remarque. Les systèmes (30) et (33) sont des systèmes Hamiltoniens, c'est à dire des systèmes d'équations de la forme

$$\begin{cases} \dot{p} = \frac{\partial H}{\partial q} \\ \dot{q} = -\frac{\partial H}{\partial p} \end{cases}$$

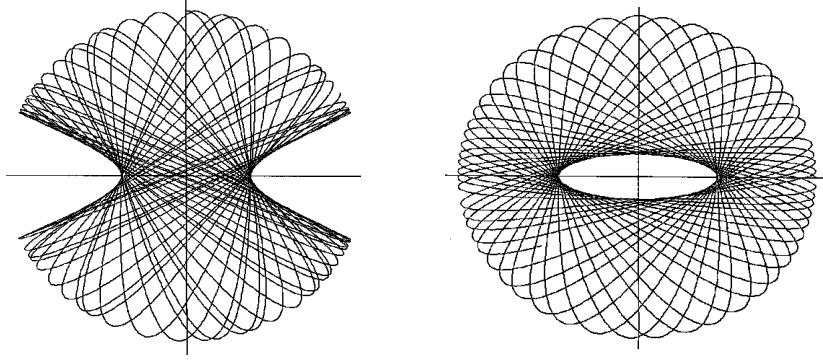


FIGURE 1. Les deux types de solutions de (33), dans le plan (ϕ, ψ)

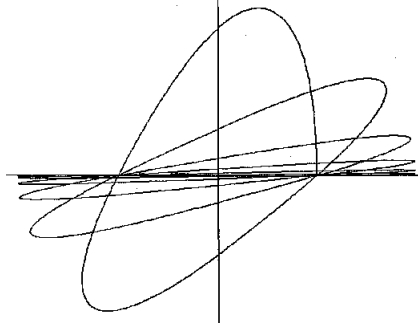


FIGURE 2. Solution de (33), dans le plan (ϕ, ψ) , d'un type différent

où $H = H(p, q) \in C^1(\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{R}^\ell, \mathbb{R})$ et $p, q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^\ell$. Dans les cas de (30) et (33), on a $\ell = 2$, $p = (p_1, p_2)$, $q = (q_1, q_2)$ et, respectivement

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}(p_1^2 + \mu p_2^2) + \frac{1}{4}(p_1^2 + \mu p_2^2)^2$$

et

$$H(p, q) = \frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) + \frac{1}{2}(p_1^2 + \mu p_2^2) + \frac{1}{4}(p_1^2 + p_2^2)^2$$

On retrouve les systèmes (30) et (33) en posant $\phi = p_1$, $\psi = p_2$.

4. LE CAS DU SYSTÈME (33)

Le système (33) a été étudié en détail dans [4]. On peut considérer le cas où $\mu > 1$ est un réel quelconque. Une étude numérique du système fait apparaître deux types très différents de solutions, en fonction des données initiales. (Voir Figure 1.) En procédant par dichotomie, on peut chercher des solutions qui se trouvent à la frontière entre ces deux types de solutions. On observe alors des solutions d'un type différent (voir Figure 2) pour lesquelles la composante ψ converge vers 0 à l'infini en temps. Ces solutions sont exceptionnelles, et elles mettent en évidence un phénomène de transfert d'énergie, puisqu'à l'infini, toute l'énergie passe dans la composante ϕ .

Pour le système (33), on a conservation de l'énergie (le Hamiltonien)

$$E(\phi, \psi, \phi', \psi') = \frac{1}{2}((\phi')^2 + (\psi')^2) + \frac{1}{2}(\phi^2 + \mu\psi^2) + \frac{1}{4}(\phi^2 + \psi^2)^2 \quad (35)$$

au cours du temps, c'est à dire que pour toute solution (ϕ, ψ) de (33), on a

$$E(\phi(t), \psi(t), \phi'(t), \psi'(t)) = E_0 \quad (36)$$

pour tout $t \geq 0$, où l'on a posé

$$E_0 = E(\phi(0), \psi(0), \phi'(0), \psi'(0)) \quad (37)$$

Le système (33) se trouve être complètement intégrable, et il existe une seconde loi de conservation. Plus précisément, la quantité

$$F(\phi, \psi, \phi', \psi') = -\frac{(\phi\psi' - \phi'\psi)^2}{2(\mu - 1)} + (\psi')^2 + \mu\psi^2 + \frac{1}{2}\psi^2(\phi^2 + \psi^2) \quad (38)$$

est conservée au cours du temps, c'est à dire que pour toute solution (ϕ, ψ) de (33), on a

$$F(\phi(t), \psi(t), \phi'(t), \psi'(t)) = F_0 \quad (39)$$

pour tout $t \geq 0$, où l'on a posé

$$F_0 = F(\phi(0), \psi(0), \phi'(0), \psi'(0)) \quad (40)$$

Les solutions exceptionnelles de (33) se trouvent en fait sur la variété $\{F = 0\}$. Plus précisément, soit $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1) \in \mathbb{R}^4$ et soit (ϕ, ψ) la solution du système (33) vérifiant les conditions initiales

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \phi'(0) = \phi_1, \quad \psi'(0) = \psi_1. \quad (41)$$

Posons $E_0 = E(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$ et $F_0 = F(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1)$. Il est montré dans [4] que si $F_0 \neq 0$, alors la solution (ϕ, ψ) est quasi-périodique avec au plus deux fréquences. En revanche, si $F_0 = 0$ et si E_0 est suffisamment grand, alors $\psi(t) \rightarrow 0$ et $\psi'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Ceci montre l'instabilité des modes simples $f(t) \sin(jx)$ de (3) d'énergie suffisamment grande.

5. LE CAS DU SYSTÈME (30)

Le système (30) a été étudié en détail dans [5]. On peut considérer le cas où $\mu > 1$ est un réel quelconque. On a conservation de l'énergie (le Hamiltonien)

$$E(\phi, \psi, \phi', \psi') = \frac{1}{2}((\phi')^2 + (\psi')^2) + \frac{1}{2}(\phi^2 + \mu\psi^2) + \frac{1}{4}(\phi^2 + \mu\psi^2)^2 \quad (42)$$

au cours du temps, c'est à dire que pour toute solution (ϕ, ψ) de (33), on a

$$E(\phi(t), \psi(t), \phi'(t), \psi'(t)) = E_0 \quad (43)$$

pour tout $t \geq 0$, où l'on a posé

$$E_0 = E(\phi(0), \psi(0), \phi'(0), \psi'(0)) \quad (44)$$

Bien que le système (30) ressemble beaucoup au système (33), il n'est apparemment pas complètement intégrable. Cependant, il est établi dans [5] que si μ appartient à l'un des intervalles

$$((\ell + 1)(2\ell + 1), (\ell + 1)(2\ell + 3)) \quad (45)$$

avec $\ell \geq 0$ entier, et si E_0 est suffisamment grand, alors il existe une sous-variété \mathcal{M} de dimension 2 de la variété (de dimension 3) $E(\phi, \psi, \phi', \psi') = E_0$ telle que si $(\phi_0, \psi_0, \phi_1, \psi_1) \in \mathcal{M}$, la solution du système (30) avec les conditions initiales

$$\phi(0) = \phi_0, \quad \psi(0) = \psi_0, \quad \phi'(0) = \phi_1, \quad \psi'(0) = \psi_1. \quad (46)$$

est telle que $\psi(t) \rightarrow 0$ et $\psi'(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$. Notons que pour tout $j \geq 1$, si l'on prend $k = 3j$, alors $\mu = 9$, qui se trouve dans le second des intervalles (45). Ceci montre l'instabilité des modes simples $f(t) \sin(jx)$ de (2) d'énergie suffisamment grande.

6. LE PHÉNOMÈNE DE TRANSFERT D'ÉNERGIE

Le phénomène de transfert d'énergie mis en évidence pour les systèmes (33) et (30) peut s'interpréter de la façon suivante, en renversant le sens du temps (les deux systèmes sont invariants en remplaçant t par $-t$): un mode qui n'est pas excité au départ peut se retrouver spontanément excité. C'est donc en l'occurrence un phénomène d'instabilité.

Ce type de phénomène est à l'origine de certaines catastrophes. En particulier, le pont suspendu de Tacoma Narrows (état de Washington, USA), ouvert à la circulation en juillet 1940, s'est effondré novembre 1940 après s'être mis à osciller d'abord longitudinalement, puis transversalement. Le pont était prévu pour des oscillations longitudinales, mais pas pour des oscillations transversales, qui ont causé son effondrement. Voir la vidéo [11]. Jusque récemment, aucune explication convaincante de ce phénomène n'avait été produite. Les articles [1, 2] fournissent une explication, basée précisément sur un phénomène de transfert d'énergie analogue à celui mis en évidence dans [4, 5] (excitation spontanée des oscillations transversales par instabilité).

REFERENCES

- [1] Arioli G. and Gazzola F.: A new mathematical explanation of what triggered the catastrophic torsional mode of the Tacoma Narrows Bridge. *Appl. Math. Model.* **39** (2015), no. 2, 901–912. (MR3282619) (doi: [10.1016/j.apm.2014.06.022](https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.06.022))
- [2] Arioli G. and Gazzola F.: Torsional instability in suspension bridges: the Tacoma Narrows Bridge case. *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **42** (2017), 342–357. (MR3534942) (doi: [10.1016/j.cnsns.2016.05.028](https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2016.05.028))
- [3] Carrier G.F.: On the vibration problem of an elastic string, *Quart. Appl. Math.* **3** (1945), 151–165. (MR0012351) (doi: [10.1090/qam/12351](https://doi.org/10.1090/qam/12351))
- [4] Cazenave T., Haraux A. and Weissler F. B.: Detailed asymptotics for a convex Hamiltonian system with two degrees of freedom, *J. Dynam. Differential Equations* **5** (1993), 155–187. (MR1205458) (doi: [10.1007/BF01063739](https://doi.org/10.1007/BF01063739))
- [5] Cazenave T. and Weissler F. B.: Unstable simple modes of the nonlinear string, *Quart. Appl. Math.* **54** (1996), no. 2, 287–305. (MR1388017) (doi: [10.1090/qam/1388017](https://doi.org/10.1090/qam/1388017))
- [6] d'Alembert, Jean-Baptiste le Rond: Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 1747, 214–219. (link: <http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=02-hist/1747&seite:int=00000243>)
- [7] d'Alembert, Jean-Baptiste le Rond: Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 1747, 220–249. (link: <http://bibliothek.bbaw.de/bibliothek-digital/digitalequellen/schriften/anzeige?band=02-hist/1747&seite:int=00000249>)
- [8] Demailly J.-P.: *Analyse numérique et équations différentielles*. Grenoble Sciences. Les Ulis: EDP Sciences. 2006. (MR3752612)
- [9] Kirchhoff G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. *J. Reine Angew. Math.* **40** (1850), 51–88. (MR1578677) (doi: [10.1515/crll.1850.40.51](https://doi.org/10.1515/crll.1850.40.51))
- [10] Kirchhoff G.: *Vorlesungen über mathematische Physik. Mechanik*. Teubner, Leipzig, 1873. (link: <https://archive.org/details/vorlesungenberm02kircgoog>)
- [11] Tacoma Narrows Bridge collapse. 1940. (link: <http://www.youtube.com/watch?v=3mclp9QmCGs>).