

# Blatt 5: Spektrum einer Klaviersaite

Wayne Ströbel, Silas Müller

7/3/2021

## Aufgabenstellung

Eine Klaviersaite der Länge  $l = 0.4m$  mit linearer Massenbelegung  $\rho = 0.0006kg/m$  ist rechts und links fixiert und mit der Kraft  $F = 743.4N$  gespannt. Wir betrachten transversale Wellen in der Auslenkung  $\psi(x, t)$  beschrieben durch die Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\gamma}{l} \left| \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} \right| \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t}$$

mit  $\gamma = 1/3$ .

Die Saite wird durch einen Hammer  $\delta$ -artig angeschlagen.

Es soll zunächst die Schwingung der Saite mit entsprechenden Anfangsbedingungen simuliert und anschließend das Spektrum der Saite vom Grundton bis zum fünften Oberton aus der simulierten Zeitentwicklung mittels Fourier Transformation bestimmt werden. Außerdem soll für den Spezialfall  $\gamma = 0$  überprüft werden, ob unsere Diskretisierungslängen eine stabile Simulation ermöglichen. Abschließend sollen die Amplituden der verschiedenen Frequenzen zeitlich aufgelöst und erläutert werden.

## Simulation der Schwingung

### Numerische Vorüberlegung

Um die oben genannte Schwingung zu simulieren betrachten wir zunächst obige Differentialgleichung und transformieren in dimensionslose Koordinaten:

$$\tau = \frac{t}{T}, \quad a = \frac{x}{l}, \quad T = \frac{l}{c}, \quad \phi = \psi l$$

Daraus ergibt sich folgende dimensionslose DGL:

$$\frac{\partial^2 \phi(a, \tau)}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 \phi(a, \tau)}{\partial a^2} - \gamma \left| \frac{\partial \phi(a, \tau)}{\partial \tau} \right| \frac{\partial \phi(a, \tau)}{\partial \tau}$$

Darauf wenden wir nun unsere bekannten numerische Approximationen an, im folgenden gelten die Abkürzungen:  $U_{tt} = \frac{\partial^2 \phi(a, \tau)}{\partial \tau^2}$ , analog für  $U_{xx}$  bzw.  $U_x$  und  $U_t$ . Außerdem sei  $U_{ij} = \phi(\tau_i, a_j)$ .

$$U_{tt} = \frac{U_{i+1,j} - 2U_{i,j} + U_{i-1,j}}{h_t^2}$$

$$U_{xx} = \frac{U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}}{h_x^2}$$

$$U_t = \frac{U_{i,j} - U_{i-1,j}}{h_t}$$

Wobei  $h_t$  und  $h_x$  den jeweiligen Diskretisierungsgrößen entsprechen.

Nun setzt man obige Definitionen in die dimensionlose DGL ein und löst nach  $U_{i+1,j}$  auf. Wir verwenden dabei auch  $U_t = \frac{U_{i+1,j} - U_{i,j}}{h_t}$ , was zu einer stabileren Simulation führte. Man kommt also auf die finale Formel:

$$U_{i+1,j} = \frac{1}{1 + \gamma|u_{i,j} - u_{i-1,j}|} \left( \frac{h_t^2}{h_x^2} (U_{i,j+1} - 2U_{i,j} + U_{i,j-1}) + 2u_{i,j} - u_{i-1,j} + \gamma|u_{i,j} - u_{i-1,j}|u_{i,j} \right)$$

Mit Hilfe dieser Formel wollen wir nun für verschiedene Zeiten jeweils alle Ortskoordinaten ermitteln und das Problem so simulieren. Dabei ist zu erwähnen, dass die Simulation von dem Hammerschlag ausgeht und auf Grunde der Anfangswerte (für alle  $x$  außer am Hammerschlag):

$$\frac{\partial \psi(x, t = 0)}{\partial t} = 0, \quad \psi(x, 0) = 0$$

gilt, dass wir zum Start  $U_{0,0.26} = U_{-1,0.26} = \frac{0.01m}{0.4m}$  wählen können.

## Code

```
library(latex2exp)
#Anfangswerte und Zeit/Step Einstellungen
strike = 0.01
l = 0.4
steps = 1000
times = 20000
dx = 1/steps
dt = 1/10000
gamma = 1./3.

dxdt = (dt^2)/(dx^2)

time <- c(2:(times-1))
step <- c(2:(steps-1))

#Auffüllen der Matrix mit Nullen
u <- matrix(0.0, nrow = times, ncol = steps)

#Startwerte einfügen
u[2, 0.26*steps] <- strike/l
u[1, 0.26*steps] <- strike/l

#Simulation
for (i in time){
  for (j in step){

    u[i+1,j] = 1 / (1 + gamma * abs(u[i, j] - u[i-1, j])) * (dxdt * (u[i, j+1]
- 2*u[i, j] + u[i, j-1]) + 2*u[i, j] - u[i-1, j] + gamma * abs(u[i, j] -
u[i-1, j]) * (u[i,j]))
```

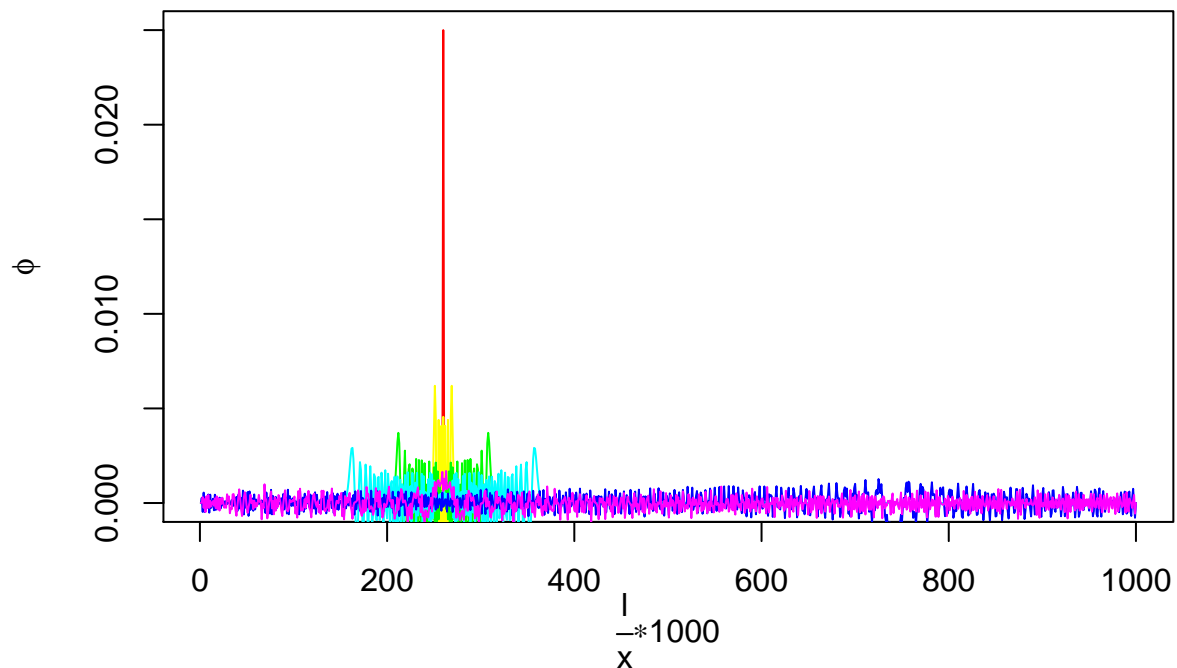
```

}
}

#Plot der örtlichen Werte zu verschiedenen Zeitpunkten
plot(1:steps, u[2,], "l", col=rainbow(6)[1], main="Örtliche Auftragung für
verschiedene Zeiten", xlab=TeX(r'(\frac{1}{x} * 1000)'),
ylab=TeX(r'(\phi)'))
lines(1:steps, u[100,], col=rainbow(6)[2])
lines(1:steps, u[500,], col=rainbow(6)[3])
lines(1:steps, u[1000,], col=rainbow(6)[4])
lines(1:steps, u[10000,], col=rainbow(6)[5])
lines(1:steps, u[20000,], col=rainbow(6)[6])

```

### Örtliche Auftragung für verschiedene Zeiten

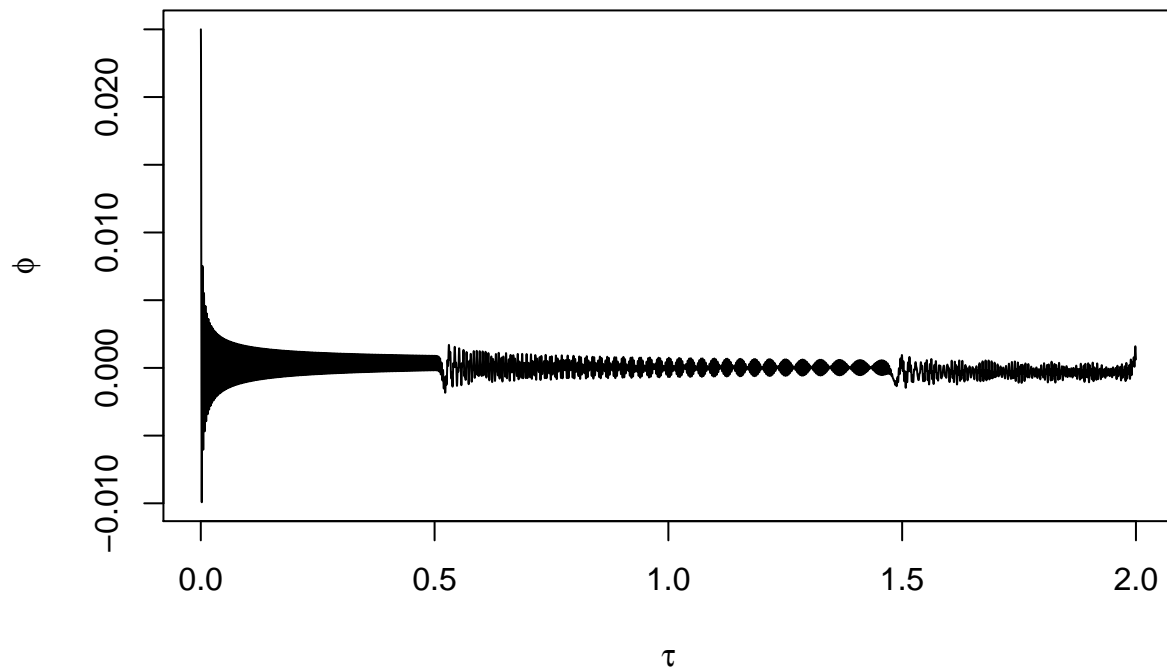


```

plot((1:times)*dt, u[,260], "l", main="Zeitliche Auftragung für einen Ort",
xlab=TeX(r'(\tau)'), ylab=TeX(r'(\phi)'))

```

## Zeitliche Auftragung für einen Ort



### Erläuterung

Man erkennt sowohl den “Einschwingvorgang”, sowie eine stabile Schwingung und wieder eine Überlagerung. Wie zu erwarten ist genau  $\tau$  eine komplette Welle, bis es wieder zu einer Überlagerung kommt. Dies lässt sich besonders gut für die zeitliche Auftragung am Ort des Hammerschlags erkennen. Die Ausbreitung wiederum erkennt man gut an den verschiedenen simulierten Wellen für verschiedene Zeiten.

## Spektrum der Saite

Wir wollen nun mit unserer FFT das Spektrum der Saitenschwingung berechnen und auftragen. Wir erwarten dabei einen Grundton und mindestens 5 folgende Obertöne. Dazu verwenden wir die FFT an verschiedenen Orten um den Ort des Hammerschlags.

### Code

```
#Koeffizient für Fouriertrafo
koeff <- function(n,k){

  w = complex(real = cos(-2*pi*k/n), imaginary = sin(-2*pi*k/n))

  return(w)}
```

```

}

#Fast Fourier Trafo
FFT <- function(func, r){

  n = 2^r
  m = n/2
  Kap = 1

  for (i in c(1:r)){
    for (k in c(1: Kap)){
      for (j in c(1: m)){

        a = 2*k*m +j
        b = a + m
        func[a] = func[a] + func[b]
        func[b] = koef(n,Kap*j) * (func[a] - 2*func[b])

      }
    }

    m = m/2
    Kap = 2*Kap
  }

  return(func/sqrt(n))
}

```

```

#Sortierung der Werte der Fouriertrafo
sort <- function(n, toSort){

  vec <- c(1: n)
  l = 0
  Sorted <- c(1: n)
  for (i in c(1: n-1)){

    vec[i] = 1
    m = n/2
    while (m <= 1){
      l = l-m
      m = m/2
    }
    l = l + m
  }

  vec[n] = n-1

  for (i in c(1: n)){

```

```

    Sorted[i] = toSort[vec[i]]
  }
  return(Sorted)
}

#Gegebene Werte

Force = 743.4
l = 0.4
roh = 0.006

#Ausbreitungsgeschwindigkeit
c = 1./2.*sqrt(Force/roh)

r = 14
n = 2^r

#Eintragen Fourier Trafo der Zeitlichen Entwicklung an verschiedenen Orten
tmp <- sort(n, FFT(u[,245], r))
a_list <- list(tmp)

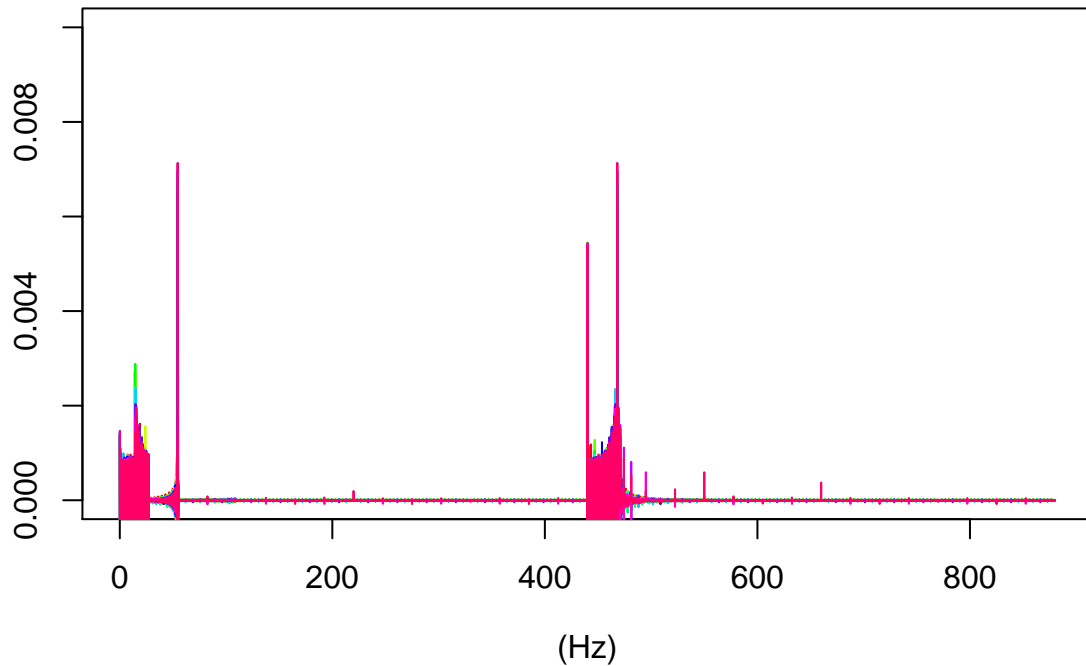
for (i in c(1:15)){
  temp <- sort(n, FFT(u[,245+i], r))
  a_list <- c(a_list, list(temp))
}

#Plotten
plot(seq(1, 20000, length.out=(2^r))* dt * c/l, Re(unlist(a_list[1])), "l",
col="red", ylim=c(0,0.01), main="Zeitliche FFT für festen Ort", ylab="", xlab=TeX('($Hz$)'))

for (i in c(1:15)){
  lines(seq(1, 20000, length.out=(2^r))* dt* c/l, Re(unlist(a_list[1+i])), col=rainbow(length(c(1:15))))
}

```

## Zeitliche FFT für festen Ort



### Erläuterung

Das Ergebnis deckt sich nur sehr bedingt mit den Erwartungen, wenn man das Spektrum ab ca 400Hz betrachtet (ab hier ist der “Einschwingvorgang” abgelaufen und die eigentliche erste Schwingung startet). Vergleicht man die hier erhaltenen Werte mit der Literatur für einen hamonischen Kammerton  $a^1$  so ergäbe sich für den Grundton 440 Hz, für den ersten Oberton 880 Hz, für den dritten 1320 Hz usw. Natürlich betrachtet unsere Simulation eine Dämpfung, der Grundton scheint jedoch auch grob bei 440 Hz zu liegen, während die weiteren Peaks in keinster Weise diesem Verlauf folgen. Das Ergebnis ist also durchaus skeptisch zu bewerten, auch das keine deutlichen Peaks erscheinen, die sich eindeutig den Obertönen zuordnen lassen, lässt auf einen Fehler in der FFT oder der Auftragung schließen.

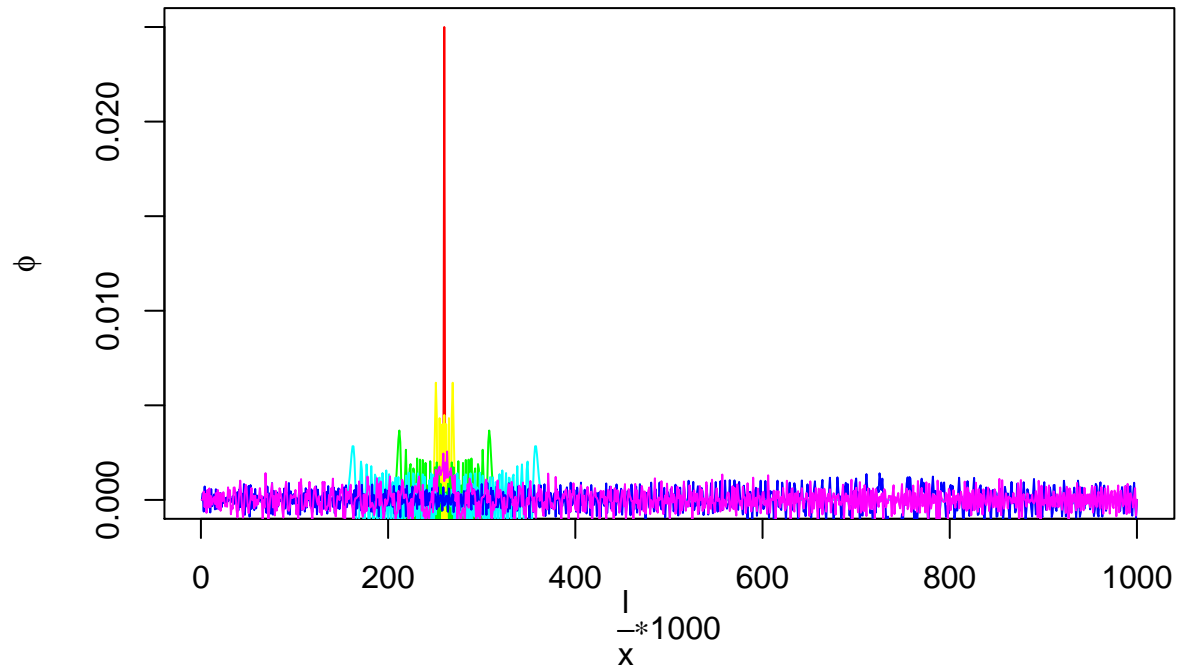
Dennoch soll nun mit vorhandener Simulation und FFT weiter gearbeitet werden.

### Ungedämpftes Verhalten

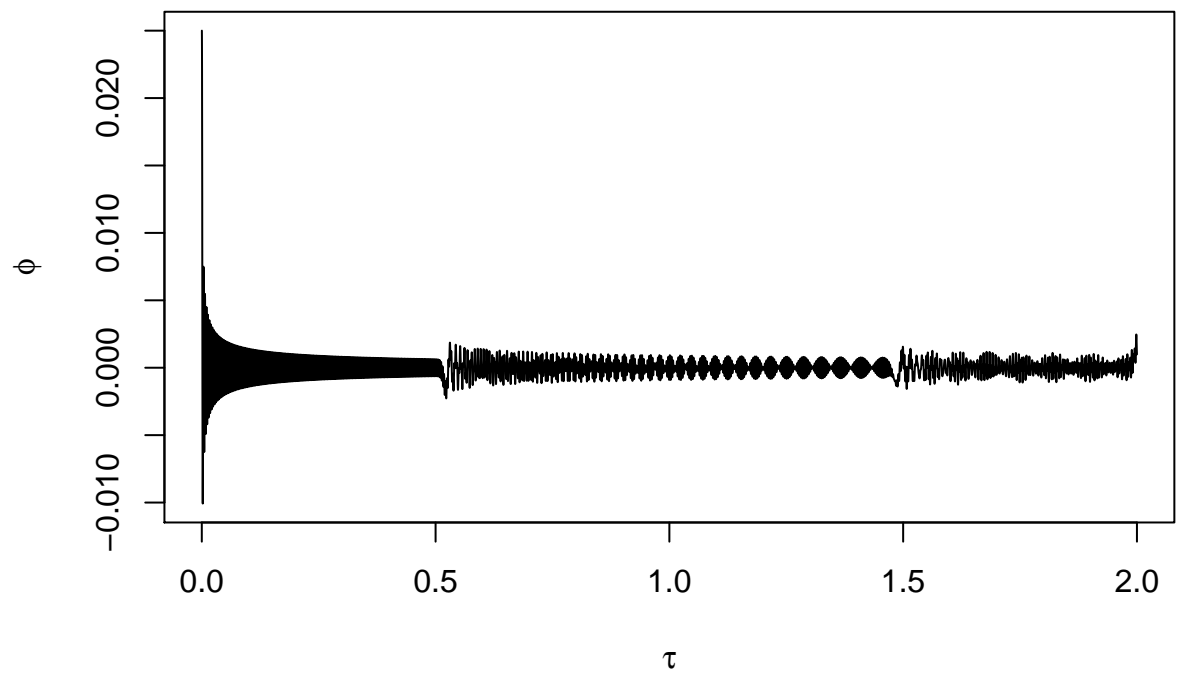
Anhand des ungedämpften Falles ( $\gamma = 0$ ) wollen wir noch einmal die Simulation, sowie die FFT und das Spektrum hinsichtlich der Stabilität bewerten und diskutieren.

## Simulation

### Örtliche Auftragung für verschiedene Zeiten



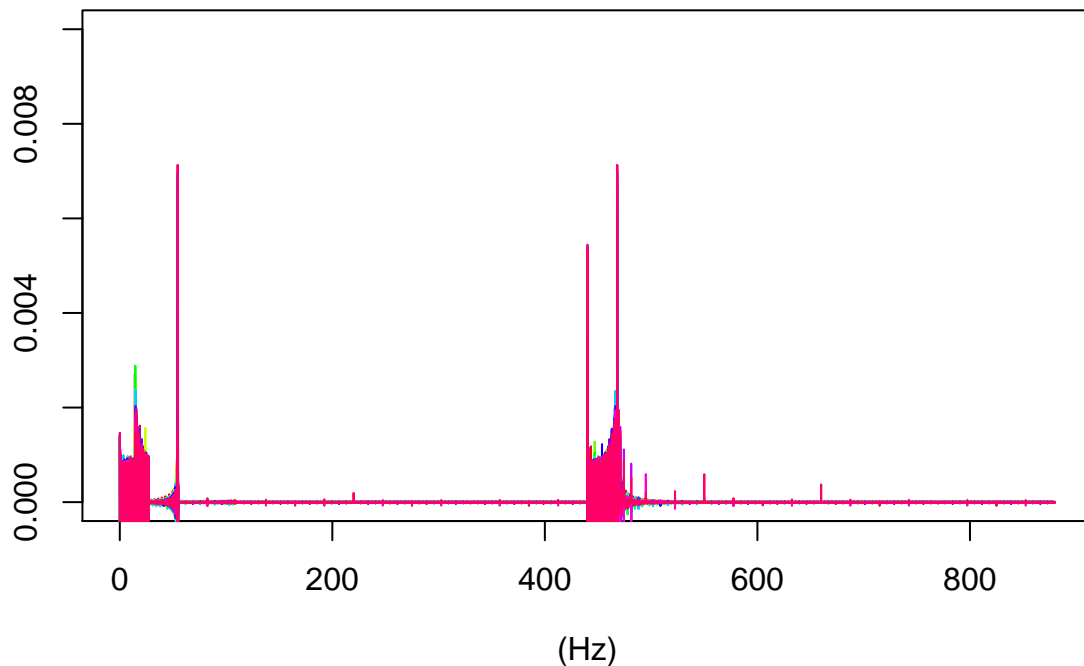
### Zeitliche Auftragung für einen Ort





## Spektrum

### Zeitliche FFT für festen Ort



## Diskussion

Für eine ungedämpfte Simulation, sehen wir, sofern sichtbar, auf lange Sicht keine Abnahme der Amplitude. Das durch die FFT estellte Spektrum ändert sich nicht erkennbar, was auch zu erwarten wäre, da die Seite ja nun immer noch mit dem gleichen Ton schwingt, jedoch nicht ausklingt. Das spricht für ein stabiles Verfahren, obwohl natürlich das Ergebnis der FFT immer noch kritisch zu bewerten ist, da nicht eindeutige Obertöne erkennbar sind.

## Zeitliche Auflösung der Amplituden der verschiedenen Frequenzen

Es sollen die Amplituden der verschiedenen Frequenzen zeitlich aufgelöst werden und erläutert werden, wodurch sich deren Verlauf zu einer linearen Dämpfung unterscheidet. Das Vorgehen für die zeitliche Auflösung der Amplituden ist nicht bekannt. Wir vermuten eine quadratische Dämpfung der Amplituden, was ein Vergleich mit der DGL ergibt. Für den ungedämpften Fall sollten sich die Amplituden des Spektrums natürlich zeitlich in keiner Weise ändern.

## Fazit

Leider ist das Gesamtergebnis eher schlecht zu bewerten. Lediglich bei der Simulation des Hammerschlages gelang es uns (unserer Meinung nach) sinnvolle Ergebnisse zu liefern.

Die FFT und anschließende Ordnung der Werte lieferte nicht die eigentlich deutlich erkennbaren Obertöne. Der Vergleich mit der ungedämpften Schwingung lässt zumindestens die Stabilität positiv bewerten, auch wenn Fragen bezüglich des Spektrums bleiben.

Bei der zeitlichen Auflösung der Amplituden der verschiedenen Frequenzen gelang es uns nicht dies aufzutragen und eine Diskussion und Vergleich der Dämpfung konnte daher nur hypothetisch durchgeführt werden. Trotz einigen Bemühungen konnte leider kein besseres Endergebnis erzielt werden.

## Literatur

*Wikipedia Oberton, <https://de.wikipedia.org/wiki/Oberton> ,Stand 6.7.2021*

*Vorlesungskript, sowie Vorlesung vom 16.6.2021 und 18.6.2021*